Олимпиада для студентов и выпускников вузов — 2012

Направление “Математическое моделирование”

Профиль “Математическое моделирование” Profile code: 090

Время выполнения заданий 3 часа.

Примечание . Все ответы требуется обосновать.

1. (3 балла) Пусть $f(x) = \sin(x^{13} + x^{15})$. Найдите $f^{(43)}(0)$.

2. (4 балла) Сколькими способами вершины куба можно раскрасить в восемь данных цветов, по одной вершине каждого цвета? Две раскраски считаются одинаковыми, если одну из них можно перевести в другую поворотом куба.

3. Граф со 100 вершинами имеет 98 вершин степени 30, и по одной вершине степеней 25 и 15.

а. (2 балла) Докажите, что вершины степеней 25 и 15 лежат в одной компоненте связности.

б. (2 балла) Обязательно ли данный граф будет связным?

4. На рисунке изображен двудольный граф Γ, в котором V_1 есть множество меломанов, а V_2 — множество музыкальных исполнителей:

$V_1 = \{$ Маша, Петя, Федя, Алёна $\}$,

$V_2 = \{$ Карел Готт, Майкл Джексон, Дима Билан, Бритни Спирс, София Ротару $\}$. Ребро $\{t, s\}$ между $t \in V_1$ и $s \in V_2$ принадлежит графу Γ, если персона s — музыкальный кумир персоны t. Определим максимальное сообщество меломанов с похожими вкусами как полный двудольный подграф графа Γ, к которому нельзя добавить вершины из V_1 и V_2, не нарушив свойство полноты. Например, такое сообщество будет образовывать двудольный подграф на множествах вершин $\{$ Маша, Петя, Федя$\}$ и $\{$Бритни Спирс, Майкл Джексон$\}$.

а. (1 балл) Найдите все максимальные сообщества меломанов для заданного графа.

б. (1 балл) Введите отношение быть более крупным сообществом и постройте граф этого отношения для всех найденных сообществ (для простоты вычислений элементы V_1 можно переобозначить цифрами 1, 2, 3 и 4, а элементы V_2 — первыми буквами латинского алфавита a, b, c, d и e).

в. (3 балла) Каково максимальное число таких сообществ для двудольного графа в худшем случае, если $|V_1| = n$ и $|V_2| = m$?

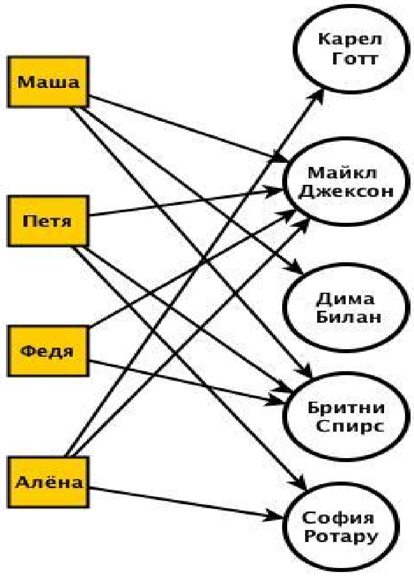

Рис. 1: граф к задаче 4

5. Предположим, что квадратные комплексные матрицы A, B и C порядка 5 удовлетворяют условию $AB = BC$, причем C — диагональная матрица.

а. (2 балла) Докажите, что если B — невырожденная матрица, то существует базис пространства $\mathbb{C}^5$, состоящий из собственных векторов матрицы A.

б. (3 балла) Предположим, что $\operatorname{rk} B = 4$. Из каких клеток состоит жорданова форма матрицы A?

6. Случайный вектор $\zeta = (\xi, \eta)$ распределён равномерно в квадрате $\{(x,y) | |x| + |y| \leq 2\}$.

а. (2 балла) Найдите условную плотность случайной величины η при условии $\xi = x$ и постройте её график.

б. (2 балла) Вычислите условное математическое ожидание $E(\eta|\xi = x)$ и условную дисперсию $D(\eta|\xi = x)$.

в. (1 балл) Исследуйте ξ и η на независимость.

7. (6 баллов) Пусть для натурального n число x_n — корень уравнени $x = \operatorname{tg} x$ из интервала $\big(\pi n; \pi(n+1)\big)$. Докажите, что

$$x_n = \pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

8. Выборка $X_1, \ldots, X_n$ соответствует распределению Релея с плотностью

$$f(x,\theta) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{2}{\theta} x e^{-x^2/\theta}, & x \geq 0. \end{cases}$$

а. (3 балла) Постройте оценку максимального правдоподобия неизвестного параметра θ.

б. (2 балла) Докажите несмещенность построенной оценки.

9. (6 баллов) Найдите максимум функции при заданных ограничениях:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = min\{3x_1 + x_2, 4x_2 + x_1\} \to max \\ (x_1 + 1)(x_2 + 2) \leqslant 8, \\ (x_1 - 1)(x_2 + 3) \leqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

10. (7 баллов) Известно, что число дуг любого простого пути в ориентированном графе G не превосходит 4. Сколько цветов понадобится для такой раскраски вершин графа G, чтобы вершины одного цвета не были смежны?

Ответ обоснуйте, т.е. докажите, что этого количества цветов всегда достаточно для раскраски, и приведите пример графа G с заданным свойством, который невозможно раскрасить в меньшее количество цветов.