Семинар 4

С решениями

Общая информация:

- Квадратные матрицы $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ называются сопряженными, если найдется невырожденная матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $B = C^{-1}AC$.

Задачи:

1. Какие из следующих матриц сопряжены? Если они сопряжены, то укажите с помощью какой матрицы: • $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, • $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, • $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Решение. a) Да сопряжены.

   $$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{тогда } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Найти можно было так. Положим

   $$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Тогда условие сопряженности означает $A = C^{-1}BC$ или после домножения на C слева $CA = BC$. Запишем его явно

   $$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

   Получаем четыре уравнения

   $$a = 0,\ 0 = 0,\ c = c,\ 0 = d$$

   Значит

   $$C = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

   Кроме того C должна быть обратима, то есть $b \neq 0$ и $c \neq 0$. Мы описали все матрицы C, которые нам подходят под условие $A = C^{-1}BC$.

   b) Нет не сопряжены. Можно было бы как и выше решать систему $CA = BC$ и доказать, что у нее нет решений в виде невырожденных матриц C. А можно рассуждать так: если $A = C^{-1}BC$, то у них одинаковые следы. Но мы видим, что след левой матрицы 5, а след правой 4. Значит они не сопряжены.

   c) Нет не сопряжены. Если бы они были сопряжены, то у них был бы одинаковый определитель. Но определитель левой матрицы 1, а определитель правой 2.

   Ответ: (a) Да, (b) нет, (c) нет. □

2. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы следующие векторы

   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Найдите матрицу A линейного оператора $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ по правилу $x \mapsto Ax$, такого, что $Av_i = u_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 3$.

   Решение. Определим следующие матрицы $U = (u_1|u_2|u_3)$ и $V = (v_1|v_2|v_3)$. Тогда условие на оператор можно записать так $AV = U$. Значит $A = UV^{-1}$.

   Прямое вычисление показывает, что

   $$V^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = UV^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: Матрица оператора

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

3. Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, заданное в стандартном базисе матрицей $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Пусть

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^3, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^2$$

Найти матрицу отображения ϕ в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2.

Решение. Матрица A – это матрица отображения ϕ в стандартных базисах пространств $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$. Пусть B – матрица отображения в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2. Обозначим стандартный базис $\mathbb{R}^3$ через e_1, e_2, e_3, а стандартный базис $\mathbb{R}^2$ через v_1, v_2. Тогда матрицы перехода между базисами задаются следующими равенствами

$$(f_1, f_2, f_3) = (e_1, e_2, e_3)C, \quad (g_1, g_2) = (v_1, v_2)D$$

Подставим в этим равенства соответствующие столбцы, получим[1]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D$$

То есть матрица C – это матрица перехода от e_1, e_2, e_3 к f_1, f_2, f_3, а матрица D – это матрица перехода от v_1, v_2 к g_1, g_2. В этом случае матрица отображения B представляется в виде $B = D^{-1}AC$. Посчитаем

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ответ: $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\square$

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами: (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Можно ли эти матрицы диагонализовать в каком-нибудь базисе?

Решение. а) Найдем характеристический многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = -\det(A - \lambda E)$.[2]

$$\chi_A(\lambda) = -\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(2-\lambda)\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-2)((-\lambda)(4-\lambda)-(-4)1) = (\lambda-2)^3$$

То есть у нас одно собственное значение $\lambda_1 = 2$ кратности 3. Собственные векторы для $\lambda_1 = 2$ ищутся как решения системы $(A - 2E)x = 0$. Найдем ФСР этой системы, то есть базисные векторы среди собственных для $\lambda_1 = 2$. Приведем матрицу $A - 2E$ к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[1]Обратите внимание, что стандартные базисы дадут единичные матрицы.
[2]Здесь минус, так как размер матрицы нечетный.

Тогда ФСР состоит из двух векторов

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Мы видим, что линейно независимых собственных векторов оказалось 2, что меньше чем кратность собственного значения, то есть 3. Значит эта матрица не диагонализуема.

b) Найдем характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = -\det\begin{pmatrix}4-\lambda & -5 & 2\\ 5 & -7-\lambda & 3\\ 6 & -9 & 4-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)$$

У нас два собственных значения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$. У первого кратность 2, а у второго кратность 1. Теперь для каждого собственного значения найдем собственные векторы. Начнем с $\lambda_1 = 0$. Надо решить систему $(A - 0E)x = 0$. Приведем систему к улучшенному ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Тогда в качестве ФСР подойдет вектор $(1,2,3)$. Теперь разберем случай $\lambda_2 = 1$. Тогда надо решить систему $(A - E)x = 0$. Приведем систему к улучшенному ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 5 & -8 & 3\\ 6 & -9 & 3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

В качестве ФСР подойдет вектор $(1,1,1)$. Мы видим, что для собственного значения $\lambda_1 = 0$ кратность равна 2, а линейно независимых собственных векторов только 1. Значит матрица не диагонализуема ни в каком базисе.

Ответ: a) $\lambda = 2$, базис собственных векторов, например, $v_1 = (1,2,0)^t$ и $v_2 = (0,0,1)^t$ b) $\lambda_1 = 0$, базис собственных векторов, например, $v_1 = (1,2,3)^t$, $\lambda_2 = 1$, базис собственных векторов, например, $u_1 = (1,1,1)^t$. □

5. Найдите собственные значения для матрицы $x^t x$, где x – матрица-строка $(a_1, \ldots, a_n)$.

Решение. Если $x = 0$, то матрица $x^t x = 0$, значит все собственные значения нулевые.[3]

Теперь считаем, что $x \neq 0$, Давайте обозначим $A = x^t x$ и $v = x^t$. Тогда

$$Av = x^t x x^t = (x x^t) x^t = (\sum_i x_i^2) v$$

То есть вектор v собственный с собственным значением $\sum_i x_i^2$ и кратность этого собственного значения хотя бы 1.

Теперь рассмотрим систему линейных уравнений $xy = 0$ относительно столбца $y \in \mathbb{R}^n$. Так как строка x не нулевая, то эта система имеет ровно одну главную переменную, а значит у нас $n-1$ свободная переменная. Значит ФСР системы состоит из каких-то $y_1, \ldots, y_{n-1}$ векторов. Но тогда

$$Ay_i = x^t x y_i = x^t 0 = 0 = 0 y_i$$

То есть 0 является собственным значением, а $y_1, \ldots, y_{n-1}$ – это линейно независимые собственные вектора для этого собственного значения. Еще мы знаем, что кратность собственного значения не меньше, чем количество линейно независимых собственных векторов для него. То есть кратность нуля не меньше $n-1$.

[3] Потеря этого случая в решении не считается критичной.

Теперь мы знаем, что $\lambda_1 = \sum_i x_i^2$ – собственное значение и его кратность $n_1 \geqslant 1$. Число $\lambda_2 = 0$ – собственное значение и его кратность $n_2 \geqslant n-1$. Но в то же время $n_1 + n_2 \leqslant n$ – степень характеристического многочлена (она же размерность матрицы A). А значит $n_1 = 1$ и $n_2 = n-1$. В частности других собственных значений нет.

Другой вариант решения – посчитать в лоб характеристический многочлен матрицы A.

Ответ: $\lambda_1 = \sum_i x_i^2$ кратности 1 и $\lambda_2 = 0$ кратности $n-1$. □

6. Найти матрицу какого-нибудь линейного оператора $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такого, что выполнены следующие условия: $\ker\phi = \langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $\operatorname{Im}\phi = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

7. Линейный оператор $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таков, что A^3 – это оператор проекции. Какие собственные значения может иметь A? Верно ли, что A будет иметь диагональную матрицу в каком-либо базисе $\mathbb{R}^n$?