Семинар 3

Конкретные векторные пространства

Основной объект изучения – пространство столбцов $\mathbb{R}^n$. Любая матрица $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ определяет отображение $\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$ заданное $x \mapsto Ax$. В каком-то смысле это единственный пример, а потому – самый важный.

Однако есть и другие, внешне не похожие, примеры:

1. Матрицы $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. В качестве отображений нужно рассматривать $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ заданное по правилу $X \mapsto \sum_i P_i X Q_i$, где $P_i, Q_i^t \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$.
2. Решения СЛУ $\{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$ для некоторой $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$. Хороший вопрос: какие тут должны быть отображения между решениями?
3. Еще более интересный вопрос, а какие должны быть отображения между $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $\{y \in \mathbb{R}^m \mid Ay = 0\}$?

Именно поэтому нужна общая теория, которая бы помогла нам одним языком описать все эти случаи и придумать правильные определения, когда они не очевидны.

Абстрактные векторные пространства

В определении векторного пространства надо зафиксировать откуда берутся коэффициенты. Вариантов несколько: вещественные числа $\mathbb{R}$, комплексные числа $\mathbb{C}$, рациональные числа $\mathbb{Q}$.[1] Для простоты, все определения будем формулировать с вещественными числами.[2]

Определение. Векторное пространство над $\mathbb{R}$ это следующие данные:

1. множество V.[3]
2. операция сложения векторов, т.е. отображение $+\colon V \times V \to V$ вида $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$.
3. операция умножения векторов на число, т.е. отображение $\cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V$ вида $(r, v) \mapsto rv$.

И эти данные удовлетворяют следующим аксиомам:

1. Для любых $v, u, w \in V$ верно $(v + u) + w = v + (u + w)$.
2. Существует вектор $0 \in V$ такой, что для любого вектора $v \in V$ имеем $0 + v = v + 0 = v$.
3. Для любого вектора $v \in V$ существует вектор $-v$ такой, что $v + (-v) = (-v) + v = 0$.
4. Для любых векторов $v, u \in V$ верно $v + u = u + v$.
5. Для любых $r \in \mathbb{R}$ и $v, u \in V$ верно $r(v + u) = rv + ru$.
6. Для любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ верно $(r_1 + r_2)v = r_1 v + r_2 v$.
7. Для любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ верно $(r_1 r_2)v = r_1(r_2 v)$.
8. Для любого $v \in V$ верно $1v = v$.

Обычно элементы V называют *векторами*, а элементы $\mathbb{R}$ называют *скалярами*. Даже в абстрактном случае, полезно думать геометрически, представляя себе в первую очередь $\mathbb{R}^n$ как главные пример.

Определение. Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$, тогда подмножество $U \subseteq V$ называется подпространством, если

1. Если $u, v \in U$, то и $v + u \in U$.
2. Если $r \in \mathbb{R}$ и $v \in U$, то и $rv \in U$.

Стоит отметить, что всякое подпространство само является векторным пространством.

---

[1] На самом деле годится все что угодно, если в этом «чем угодно» можно складывать, вычитать, умножать и делить. Такие объекты называются *полями*.

[2] Определение векторного пространства может показаться жутко сложным и формальным. Не стоит бросаться учить наизусть все, что в нем находится. Главное понимать как с ним работать. Действительно, никто из нас не знает строгого определения $\mathbb{R}$, но это не мешает нам с ним работать!

[3] Это будет как раз множество векторов.

Примеры Пространства:

1. Пусть $V = \mathbb{R}^n$ с обычными операциями сложения и умножения на скаляр.
2. Пусть V $\mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ с обычными операциями сложения и умножения на скаляр.
3. Пусть $V = \{0\} = \mathbb{R}^0$.
4. Пусть $\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}\}$ – множество многочленов от переменной x с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения и умножения на число.
5. Пусть $C[0,1] = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ непрерывна $\}$ – множество непрерывных функций на отрезке $[0,1]$, тогда оно является векторным пространством над $\mathbb{R}$.

Подпространства (а значит тоже пространства):

1. $\{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$ для некоторой $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ с обычными операциями сложения и умножения на скаляр.
2. $\{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid AXB = 0\}$ для некоторых $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{n\,k}(\mathbb{R})$ с обычными операциями сложения и умножения на скаляр.

Линейные отображения

Сами по себе векторные пространства не интересны. Нам бы хотелось уметь их сравнивать между собой. Для этого нам нужны линейные отображения. Кроме того, многие вопросы, возникающие в линейной алгебре формулируются именно в терминах линейных отображений.

Определение. Пусть V и U – векторные пространства над $\mathbb{R}$. Отображение $\phi\colon V \to U$ называется линейным, если

1. $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$ для любых $v_1, v_2 \in V$.
2. $\phi(rv) = r\phi(v)$ для любых $r \in \mathbb{R}$ и $v \in V$.

Множество всех линейных отображений из V в U обозначается $\mathrm{Hom}(V, U)$. Если надо подчеркнуть какие скаляры имеются в виду, можно написать $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, U)$.

Примеры

1. Любое линейное отображение $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ задается в виде $\phi(x) = Ax$, где $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$. Таким образом множество $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, U)$ отождествляется с множеством матриц $\mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$.
2. Любое линейное отображение $\phi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ задается единственным образом в виде $\phi(X) = \sum_{i,k=1}^m \sum_{j,l=1}^n a_{ijkl} E_{ij} X E_{lk}$, где E_{ij} – матричная единица, т.е. матрица такая, что на i-ой строке j-ом столбце стоит 1, а все остальные элементы равны 0.

Линейные отображения нужны, чтобы «сравнивать» векторные пространства друг с другом и чтобы строить новые.

Определение. Пусть V и U – векторные пространства и $\phi\colon V \to U$ – линейное отображение. Мы говорим, что оно является *изоморфизмом* (а пространства V и U *изоморфными*), если существует $\psi\colon U \to V$ – линейное отображение такое, что $\phi\psi = \mathrm{Id}$ и $\psi\phi = \mathrm{Id}$.[4]

Про изоморфные пространства надо думать как про одинаковые. На множество V можно смотреть как на «имена векторов», соответственно, U – множество «новых имен», а ϕ – это переименование наших векторов. А раз это всего лишь переименование, то от него ничего не должно зависеть. Потому изучать V – это все равно, что изучать U.

[4] Другими словами ϕ обратимо, где обратный $\phi^{-1} = \psi$.

Линейная зависимость

Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$. Главные вопрос: как надо про него думать? Ответ прост: это куча из элементов и эти элементы можно складывать и умножать на числа. То есть, мы всегда можем вытащить элементы[5] $v_1, \ldots, v_n \in V$ и начать их складывать с коэффициентами, получив некий новый вектор $r_1v_1 + \ldots + r_nv_n \in V$, где $r_i \in \mathbb{R}$. Поэтому все, что можно сказать про векторное пространство, обязательно формулируется в терминах таких выражений. Поэтому предлагается изучать подобные выражения.

Пусть $v_i \in V$ и $r_i \in \mathbb{R}$ как выше, тогда выражение $r_1v_1 + \ldots + r_nv_n$ называется *линейной комбинацией* векторов $v_1, \ldots, v_n$. Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все $r_i = 0$, в противном случае *нетривиальной*. Вектора $v_1, \ldots, v_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная нулю (нулевому вектору), т.е. $v_1, \ldots, v_n$ – линейно зависимы, если существуют $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ так, что хотя бы один из r_i не равен нулю и $r_1v_1 + \ldots + r_nv_n = 0$. В противном случае вектора называются *линейно независимыми*.

Примеры

1. Рассмотрим $V = \mathbb{R}^3$ и пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

   Тогда вектора v_1, v_2, v_3 линейно независимы. Вектора v_1, v_2, v_4 тоже линейно независимы. Но вот вектора v_1, v_2, v_3, v_4 уже зависимы, так как $v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0$. Также зависимы вектора v_1, v_2 и v_5, ибо $v_1 + v_2 - v_5 = 0$.

2. Один вектор $v \in V$ линейно зависим тогда и только тогда, когда он равен нулю.

3. Два вектора $v, u \in V$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. либо $v = \lambda u$ либо $u = \lambda v$.

Базис

Утверждение. *Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$ и пусть $v_1, \ldots, v_n \in V$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Вектора $v_1, \ldots, v_n$ линейно независимы и любой вектор $u \in V$ является их линейной комбинацией.*

2. *Вектора $v_1, \ldots, v_n$ линейно независимы и для любого $u \in V$ вектора $v_1, \ldots, v_n, u$ уже линейно зависимы.*

Доказательство. (1)⇒(2). Возьмем любой $u \in V$, тогда $u = \lambda_1v_1 + \ldots + \lambda_nv_n$, тогда $\lambda_1v_1 + \ldots + \lambda_nv_n - u = 0$ – линейная зависимость между векторами.

(2)⇒(1). Пусть $u \in V$, тогда существует какая-то линейная зависимость $\lambda_1v_1 + \ldots + \lambda_nv_n + \mu u = 0$. Если $\mu = 0$, то вектора v_i линейно зависимы, но это не так. Значит $\mu \neq 0$. Тогда на него можно поделить и получим $u = -\frac{\lambda_1}{\mu}v_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\mu}v_n$. □

Если в векторном пространстве V существует система векторов $v_1, \ldots, v_n$ обладающая одним из свойств выше, то мы будем называть такую систему векторов *базисом* пространства V.

Описание всех векторных пространств с базисами

Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$ и пусть у нас есть базис $v_1, \ldots, v_n \in V$. Тогда любой вектор $u \in V$ единственным образом представляется в виде $u = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$. Надо лишь объяснить единственность. Если $u = b_1v_1 + \ldots + b_nv_n$, то $(a_1 - b_1)v_1 + \ldots + (a_n - b_n)v_n = 0$ – линейная комбинация равна нулю. Но так как v_i линейно независимы, это может быть лишь тривиальная линейная комбинация, т.е. все $a_i - b_i = 0$. Таким образом получаем отображение биективное линейное отображение $V \to \mathbb{R}^n$ по правилу $u = \sum_{i=1}^n a_iv_i \mapsto \begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$. То есть V и $\mathbb{R}^n$ становятся изоморфными.

Теперь важное замечание. Базис существует всегда! Только не всегда он состоит из конечного числа векторов. Я не хочу обсуждать бесконечные базисы. Однако, важно понимать следующее.

[5] называемые векторами

Утверждение. *Пусть V – векторное пространство. Любые два базиса V имеют одинаковое число элементов.*[6]

Если V – векторное пространство, то число элементов в базисе называется *размерностью* векторного пространства V и обозначается $\dim V$. Если конечного базиса нет, будем писать $\dim V = \infty$.[7]

Примеры Для простых пространств размерность в точности равна числу коэффициентов, которые необходимы для задания векторов: $\dim \mathbb{R}^n = n$ или $\dim \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R}) = mn$. Чуть позже мы увидим, что для $V = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, $\dim V$ равна числу свободных переменных СЛУ $Ay = 0$. То есть это число характеризует на сколько много есть решений у системы.

Утверждение. *Пусть V – векторное пространство и пусть $U \subseteq V$ – подпространство.*

1. $\dim U \leqslant \dim V$. *В частности, если V обладает конечным базисом, то и U обязательно обладает конечным базисом.*
2. $\dim U = \dim V$ *тогда и только тогда, когда* $U = V$.

Размерность – это величина, показывающая на сколько векторное пространство большое и характеризует «количество степеней свободы» в пространстве. Кроме того, это понятие согласовано с нашей интуицией: прямая $\mathbb{R}^1$ имеет размерность 1, плоскость $\mathbb{R}^2$ – размерность 2, а пространство $\mathbb{R}^3$ – размерность 3.

Смысл базиса

Напомню, что «по-простому» векторное пространство – это все что угодно, где элементы можно складывать и умножать на числа. Формально надо проверить еще какие-то аксиомы, но все, что возникает в реальной жизни, обязательно будет удовлетворять им. Главные примеры – $\mathbb{R}^n$ и $\mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$.

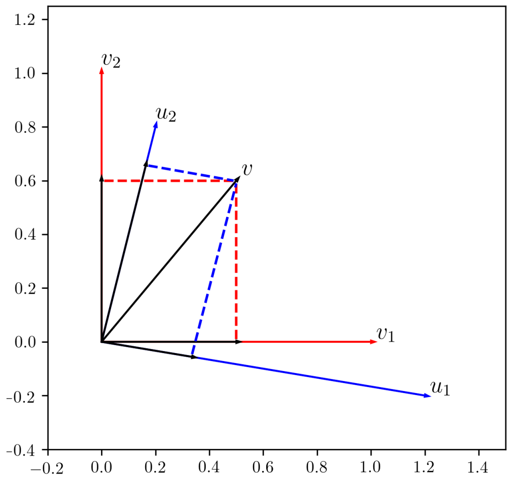
Пусть V – векторное пространство. Напомню, что базис – это набор векторов $v_1, \ldots, v_n$ который линейно независим и через них все выражается. То есть уравнение $x_1v_1 + \ldots + x_nv_n = 0$ имеет только нулевое решение $x_i = 0$ и любой вектор $v \in V$ представляется (по безысходности единственным образом) в виде $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Смысл базиса вот в чем: если вы его выбрали, то вы можете отождествить V с $\mathbb{R}^n$ следующим образом: если $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$, то ему соответствует единственный столбец $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$. Таким образом, про любое векторное пространство, когда это необходимо, можно думать как просто про $\mathbb{R}^n$. Но надо помнить, что (1) часто необязательно выбирать базис и без выбора базиса задачи могут проще решаться и (2) базис можно выбрать не единственным образом, и если его выбрать по-другому вычисления могут стать либо проще либо сложнее (как повезет).

Смена базиса

На рисунке ниже изображена плоскость с двумя базисами: красный v_1, v_2 и синий u_1, u_2. При этом вектор v можно разложить как по одному, так и по другому базису. В зависимости от этого у него будут разные координаты.

[6] Это утверждение верно и для конечных и для бесконечных базисов, но для работы с бесконечными базисами надо знать как сравнивать бесконечные множества.

[7] На самом деле, теория множеств позволяет различать какие-то из бесконечных множеств, но мы этого делать не будем.



Давайте теперь поговорим, как это устроено в общем случае. Пусть у нас есть векторное пространство V. Можно считать, что $V = \mathbb{R}^n$ для удобства. Пусть у вас в V есть два базиса: $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$.[8] И пусть у нас есть вектор $v \in V$. Тогда он раскладывается по обоим базисам:

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad v = y_1 f_1 + \ldots + y_n f_n = \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Вопрос: а как связаны координаты x_i и координаты y_i? Вот на этот вопрос мы и попытаемся ответить. Для начала надо знать, как связаны базисы e_i и f_i. По определению базиса для e_i каждый вектор f_i представляется в виде:

$$f_i = c_{1i} e_1 + \ldots + c_{ni} e_n = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$$

Если положить $C = (c_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, то предыдущий набор равенств можно записать кратко в виде:

$$\begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} C$$

Такая матрица называется *матрицей перехода* от e_i к f_i. Теперь запишем наш вектор v так

$$v = \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad v = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Так как разложение по базису e_i однозначно (по определению базиса), то получаем связь на координаты

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Запоминать это правило надо так: если от базиса e к базису f мы перешли с помощью умножения справа на матрицу C, то на координатах у нас отображение в обратную сторону с помощью умножения на матрицу C слева (то есть тоже с другой стороны). Еще полезно держать перед глазами вот эту таблицу.

базис	новый $\xleftarrow{\cdot C}$ старый
координаты	новые $\xrightarrow{C\cdot}$ старые

[8]Напомню, что базисы обязательно имеют одинаковый размер.

Смена координат в $\mathbb{R}^n$

В случае, когда мы работаем в $\mathbb{R}^n$ вот как можно думать про равенство

$$\begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} C$$

В этом случае каждый вектор f_i – это вектор столбец высоты n. Потому левая часть равенства (когда там записаны n столбцов) представляет из себя матрицу n на n. То есть $(f_1 \dots f_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Аналогично можно думать, что $(e_1 \dots e_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Таким образом можно найти матрицу перехода: $C = (e_1 \dots e_n)^{-1}(f_1 \dots f_n)$. Тут есть важный частный случай, предположим, что e_i – стандартный базис, т.е. e_i имеет 1 на i-ом месте и нули в остальных местах. Тогда матрица перехода $C = (f_1 \dots f_n)$. То есть C составлена из координат f_i в стандартном базисе.

Линейные оболочки

Пусть V – векторное пространство. Для простоты можно думать, что это $\mathbb{R}^n$. И пусть у нас задан произвольный набор векторов $v_1, \dots, v_k \in V$.[9] Понятно, что конечный набор не образует подпространство, но можно рассмотреть наименьшее подпространство, содержащее данные вектора. Это подпространство обозначается $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ и состоит из всех линейных комбинаций v_i, т.е.

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \in V \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Заметим, что $\dim\langle v_1, \dots, v_k \rangle \leqslant k$ и равенство достигается тогда и только тогда, когда v_i линейно независимы.

Пусть вектора $v_1, \dots, v_k$ линейно зависимы. Выделим среди них наибольшее линейно независимое подмножество. После перенумерации векторов, можно считать, что это $v_1, \dots, v_m$, где $m \leqslant k$. Тогда каждый вектор v_j при $j > m$ будет линейно выражаться через первые m векторов. Последнее означает, что $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, но теперь вектора справа линейно независимы.

Выделение базиса из системы векторов

Дано Пусть $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ – вектора и $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка.

Задача Среди векторов $v_1, \dots, v_m$ найти базис пространства V и разложить оставшиеся вектора по этому базису.

Алгоритм

1. Запишем вектора $v_1, \dots, v_m$ по столбцам в матрицу $A \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$. Например, при $n = 3$, $m = 5$

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \end{pmatrix}$$

2. Приведем матрицу A элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду. Например

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

3. Пусть $k_1, \dots, k_r$ – номера главных позиций в матрице A'. Тогда вектора $v_{k_1}, \dots, v_{k_r}$ образуют базис V. Например, в примере выше это вектора v_1, v_2 и v_4.

4. Пусть v_i – вектор соответствует неглавной позиции в A'. Тогда в i-ом столбце A' записаны координаты разложения v_i через найденный базис выше. Например, в примере выше $v_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2$ и $v_5 = a_{51}v_1 + a_{52}v_2 + a_{53}v_4$.

[9] Вектора могут быть любые, могут быть линейно зависимыми или независимыми, могут быть хоть все нулевыми или просто одинаковыми.

Пример Пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}5\\12\\7\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Тогда

$$\begin{pmatrix}1&1&5&1&-1\\3&2&12&1&1\\2&1&7&1&0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&1&5&1&-1\\0&0&0&-1&2\\2&1&7&1&0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&1&5&1&-1\\0&0&0&-1&2\\1&0&2&0&1\end{pmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix}1&0&2&0&1\\1&1&5&1&-1\\0&0&0&1&-2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&3&1&-2\\0&0&0&1&-2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&3&0&0\\0&0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

Тогда v_1, v_2 и v_4 – базис линейной оболочки. $v_3 = 2v_1 + 3v_2$ и $v_5 = v_1 - 2v_4$.

Подпространства в $\mathbb{R}^n$

Мы хотим понять как устроены все возможные подпространства в $\mathbb{R}^n$. Для начала надо понять, а как вообще задавать подпространства в $\mathbb{R}^n$. Существует два способа:

1. С помощью образующих векторов: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ задано в виде $U = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, где $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ – некоторые вектора. В этом случае часто бывает полезно, чтобы вектора v_i были линейно независимыми.

2. С помощью СЛУ: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ задано в виде $U = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ – некоторая матрица. В этом случае часто бывает полезно, чтобы строки матрицы A были линейно независимыми.

Любое пространство можно задать любым из этих двух способов, а значит, если пространство задано одним из этих способов, его можно задать и другим.

Фундаментальная система решений (ФСР)

Так как $\mathbb{R}^n$ обладает конечным базисом, то и $\{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, тоже обладает конечным базисом, причем количество базисных элементов не превосходит n. Любой базис такого пространства называется *фундаментальной системой решений*. Наша задача научиться находить его.

Дано Матрица $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$.

Задача Найти базис пространства $U = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$.

Алгоритм

1. Приведем матрицу A к улучшенному ступенчатому виду. Пусть например она имеет вид

$$\begin{pmatrix}1&a_{12}&0&a_{14}&0&a_{16}\\0&0&1&a_{24}&0&a_{26}\\0&0&0&0&1&a_{36}\end{pmatrix}$$

2. Теперь $\dim U$ равна количеству свободных переменных. ФСР строится так: для каждой свободной переменной будет свой базисный вектор. Такую свободную переменную полагаем 1, а остальные свободные переменные 0. После чего рассчитываем значения главных переменных. В примере выше, свободные переменные x_2, x_4 и x_6. Тогда ФСР

$$v_2 = \begin{pmatrix}-a_{12}\\\underline{1}\\0\\\underline{0}\\0\\\underline{0}\end{pmatrix},\quad v_4 = \begin{pmatrix}-a_{14}\\\underline{0}\\-a_{24}\\\underline{1}\\0\\\underline{0}\end{pmatrix},\quad v_6 = \begin{pmatrix}-a_{16}\\\underline{0}\\-a_{26}\\\underline{0}\\-a_{36}\\\underline{1}\end{pmatrix},$$

В векторах выше подчеркнуты позиции свободных переменных, которые мы задаем сами.

Ранг системы векторов

Пусть V – некоторое векторное пространство. Системой векторов называется последовательность $(v_1, \dots, v_k)$ из векторов V, в которой векторы v_i могут повторяться.[10]

По определению рангом системы $(v_1, \dots, v_k)$ называется максимальное количество линейно независимых векторов в этой системе. Ранг такой системы будет обозначаться $\operatorname{rk}(v_1, \dots, v_k)$.

Утверждение. *Если $(v_1, \dots, v_k)$ – некоторая система векторов в векторном пространстве V, то* $\operatorname{rk}(v_1, \dots, v_k) = \dim\langle v_1, \dots, v_k\rangle$.

Матричный ранг

Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ – некоторая матрица. Сейчас я определю пять разных определений ранга матрицы. Все эти ранги между собой совпадают и полученная величина будет просто называться рангом матрицы A и обозначаться $\operatorname{rk} A$.

Определение. Пусть $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^m$ – столбцы матрицы A, то есть $A = (A_1|\dots|A_n)$. Тогда столбцовым рангом матрицы A называется ранг системы $(A_1, \dots, A_n)$, то есть $\operatorname{rk}_{\text{столб}} A = \operatorname{rk}(A_1, \dots, A_n)$.

Определение. Пусть $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$ – строки матрицы A, то есть $A^t = (A_1|\dots|A_m)$. Тогда строковым рангом матрицы A называется ранг системы $(A_1, \dots, A_m)$, то есть $\operatorname{rk}_{\text{стр}} A = \operatorname{rk}(A_1, \dots, A_m)$.

Определение. Факториальным рангом матрицы A называется следующее число

$$\min\{k \mid A = BC,\ \text{где } B \in \mathrm{M}_{m\,k}(\mathbb{R}),\, C \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})\}$$

то есть это минимальное число k такое, что матрица A представима в виде произведения матриц BC, где общая размерность для B и C, по которой они перемножаются, есть k.

Определение. Тензорным рангом матрицы A называется следующее число

$$\min\{k \mid A = x_1 y_1^t + \ldots + x_k y_k^t,\ \text{где } x_i \in \mathbb{R}^m,\, y_i \in \mathbb{R}^n\}$$

то есть это минимальное число k такое, что матрица A представима в виде суммы k «тощих» матриц вида xy^t, где $x \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^n$.

Если я в матрице A выделю какой-нибудь набор из k строк и одновременно набор из k столбцов, а потом возьму матрицу составленную из элементов на пересечении этих строк и столбцов, то я получу квадратную матрицу размера k. Такие матрицы мы будем называть квадратными подматрицами матрицы A.

Определение. Минорным рангом матрицы A называется размер наибольшей невырожденной квадратной подматрицы.[11]

Главное для нас следующее утверждение.

Утверждение. *Для любой матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ все пять видов ранга совпадают и не превосходят* $\min(m, n)$.

Примеры

1. В начале заметим, что матрица имеет ранг 0 тогда и только тогда, когда $A = 0$.
2. Ранг матрицы A равен единице тогда и только тогда, когда она не нулевая и все столбцы пропорциональны одному общему столбцу (или что эквивалентно, все строки пропорциональны одной общей строке). Если воспользоваться определением факториального ранга, то мы видим, что тогда матрица A имеет вид $A = xy^t$, где $x \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^n$ – ненулевые вектора.

[10] В подобной ситуации повторяющиеся векторы различаются по индексу – «ключу».

[11] На самом деле можно дать более сильное определение, а именно, минорный ранг – это размер любой максимальной невырожденной подматрицы. То есть мы берем какую-то квадратную подматрицу, которая невырождена, а любая большая подматрица уже вырождена. Оказывается, что все максимальные невырожденные подматрицы имеют одинаковый размер и он называется минорным рангом.

Свойства ранга

Прежде всего надо запомнить как ранг связан с матричными операциями.

Утверждение. *Пусть* $A, B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, *тогда*

$$|\operatorname{rk} A - \operatorname{rk} B| \leqslant \operatorname{rk}(A+B) \leqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

Надо понимать, что, во-первых, все эти эффекты можно увидеть на диагональных матрицах; во-вторых, все границы неравенств достигаются. Смысл этого утверждения вот в чем: если вы шевелите матрицу A с помощью матрицы B, то ранг A может измениться не более чем на ранг B в любую сторону. Теперь посмотрим на матрицы: $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ и $C = -A$. Тогда $\operatorname{rk}(A+B) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$ и $\operatorname{rk}(A+C) = \operatorname{rk} A - \operatorname{rk} C$.

Утверждение. *Пусть* $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ *и* $B \in \mathrm{M}_{n\,k}(\mathbb{R})$, *тогда*

$$\operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - n \leqslant \operatorname{rk}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B)$$

Как и в предыдущем случае, все обе границы неравенства достигаются и все можно пронаблюдать на диагональных матрицах. Пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда $\operatorname{rk}(AA) = \operatorname{rk} A$ и $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - 2$.

Утверждение. *Пусть* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *– квадратная матрица. Тогда* $\operatorname{rk} A = n$ *тогда и только тогда, когда* A *невырождена, т.е.* $\det A \neq 0$.

Таким образом на ранг можно смотреть как на степень невырожденности матрицы A. Самый высокий ранг у невырожденных матриц, самый маленький у нулевой, но есть еще и промежуточные состояния.

Утверждение. *Если матрица* $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ *находится в ступенчатом виде и имеет* k *ступенек, то ее ранг равен* k.

Это утверждение вместе со следующим дают эффективный способ считать ранг.

Утверждение. *Для любой матрицы* $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ *и любых невырожденных матриц* $C \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ *и* $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *верно:* $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(CA) = \operatorname{rk}(AD)$.[12]

В частности ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях столбцов и строк. Обычно этим пользуются для нахождения ранга. Более того, если $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ имеет ранг r, то элементарными преобразованиями строк и столбцов она приводится к виду

$$A \mapsto \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } E \in \mathrm{M}_r(\mathbb{R}) \text{ – единичная матрица}$$

Следствием данного замечания является следующее.

Утверждение. *Для любых матриц* $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ *и* $B \in \mathrm{M}_{s\,t}(\mathbb{R})$ *имеем*

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

[12] В частности ранг не меняется при элементарных преобразованиях строк и столбцов.