Семинар 3

Задачи:

1. Даны векторы
$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix}3\\8\\11\end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\ a_5 = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$$
Среди этих векторов найти базис их линейной оболочки и выразить все оставшиеся вектора через базисные.

2. Найдите базис векторного пространства $U = \{y \in \mathbb{R}^5 \mid Ay = 0\}$, где
$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 0 & 7\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

3. Определите можно ли из системы векторов
$$v_1 = \begin{pmatrix}-4\\-5\\2\\3\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}5\\5\\3\\-2\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}4\\5\\-2\\-3\end{pmatrix}$$
выбрать ФСР для системы линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2\,x_4 & = 0\\ x_2 - 2\,x_3 + 3\,x_4 & = 0\\ 2\,x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 - 2\,x_4 & = 0\end{cases}$$

4. Являются ли функции $1, \sin x, \sin^2 x, \ldots, \sin^n x$ линейно зависимыми?

5. Пусть $\mathbb{R}[x]_n$ – множество всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше n. Показать, что системы
$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \text{ и } \{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\},\ \text{где } a \in \mathbb{R}$$
являются базисами в $\mathbb{R}[x]_n$ и найти матрицы перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому.

6. Найти ранг следующей матрицы при различных значениях параметра λ:
$$\begin{pmatrix}7-\lambda & -12 & 6\\ 10 & -19-\lambda & 10\\ 12 & -24 & 13-\lambda\end{pmatrix}$$

7. Пусть A и B – квадратные матрицы одного порядка. Доказать, что
$$a)\quad \operatorname{rk}\begin{pmatrix}A & B\\ 2A & -5B\end{pmatrix} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B \quad b)\quad \operatorname{rk}\begin{pmatrix}A & AB\\ B & B+B^2\end{pmatrix} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$