Семинар 4

Общая информация:

- Квадратные матрицы $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ называются сопряженными, если найдется невырожденная матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $B = C^{-1}AC$.

Задачи:

1. Какие из следующих матриц сопряжены? Если они сопряжены, то укажите с помощью какой матрицы:
   - $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, • $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, • $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы следующие векторы
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
   Найдите матрицу A линейного оператора $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ по правилу $x \mapsto Ax$, такого, что $Av_i = u_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 3$.

3. Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, заданное в стандартном базисе матрицей $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Пусть
$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^3, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^2$$
   Найти матрицу отображения ϕ в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами: (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Можно ли эти матрицы диагонализовать в каком-нибудь базисе?

5. Найдите собственные значения для матрицы $x^t x$, где x – матрица-строка $(a_1, \ldots, a_n)$.

6. Найти матрицу какого-нибудь линейного оператора $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такого, что выполнены следующие условия: $\ker \phi = \langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $\operatorname{Im} \phi = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

7. Линейный оператор $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таков, что A^3 – это оператор проекции. Какие собственные значения может иметь A? Верно ли, что A будет иметь диагональную матрицу в каком-либо базисе $\mathbb{R}^n$?