2019/20 учебный год

Всероссийская олимпиада студентов «Я – профессионал»

Демонстрационный вариант

задания заключительного (очного) этапа

по направлению «**Математика**»

Категория участия: «Бакалавриат»

(для поступающих в магистратуру)

Билет 1

1. Пусть $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{3x_n}{1+x_n}$. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и найдите её предел.

Ответ: возрастает и ограничена сверху, предел $L = 2$.

Решение. Положим $f(x) = \frac{3x}{x+1}$. Выделяя целую часть дроби, можем записать, что $f(x) = 3 - \frac{3}{x+1}$. Отметим, что если $1 \leqslant x < 2$, то $\frac{3}{2} \leqslant 3 - \frac{3}{x+1} < 2$ и, значит, $1 < f(x) < 2$. Отсюда по индукции заключаем, что $1 < x_n < 2$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Кроме того, $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(2-x_n)}{1+x_n} > 0$ и, значит, последовательность $\{x_n\}$ строго возрастает. Тогда по теореме о пределе монотонной ограниченной последовательности $\{x_n\}$ сходится. Обозначим её предел через L. Переходя в рекуррентном соотношении к пределу, получаем $L = \frac{3L}{1+L}$, $L^2 - 2L = 0$, $L = 0$ или $L = 2$. Учитывая, что $L \geqslant 1$, отбрасываем корень $L = 0$. Итак, $L = 2$.

2. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n с постоянными действительными коэффициентами. Известно, что $e^{-4x}\left(x^3 - x\right)\sin x \cos 2x$ – одно из решений этого уравнения. Найдите *минимально* возможное значение n. Ответ обоснуйте.

Ответ: 16.

Решение. Данное частное решение можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2}e^{-4x}\left(x^3 - x\right)\sin 3x - \frac{1}{2}e^{-4x}\left(x^3 - x\right)\sin x.$$

Для того, чтобы линейное однородное дифференциальное уравнение в качестве решения имело такой квазимногочлен, корнями его характеристического уравнения должны являться следующие числа: $\lambda = -4 \pm 3i$ – корни кратности 4; $\lambda = -4 \pm i$ – также корни кратности 4. Получаем, что характеристическое уравнение должно иметь по крайней мере 16 корней (с учётом кратности), поэтому минимально возможное значение n – это 16.

3. Эллипс, вписанный в параллелограмм $PQRS$, касается его сторон PS, PQ и QR в точках A, B и C соответственно; при этом $QC : CR = 5 : 1$. Найдите отношение площади четырёхугольника $ABQR$ к площади треугольника ABP.

Ответ: 41.

Решение. Сделаем аффинное преобразование плоскости, переводящее данный эллипс в окружность. Обозначим образы точек при данном преобразовании теми же самыми буквами со штрихами. Поскольку при аффинных преобразованиях параллельные прямые переходят в параллельные, а касательные к эллипсу переходят в касательные к окружности, в результате мы получаем параллелограмм, в который вписана окружность. Известно, что такой параллелограмм является ромбом. Кроме того, при аффинных преобразованиях сохраняются отношения отрезков на параллельных прямых (в частности, если эти параллельные прямые совпадают).

Пусть $Q'C' = 5x$, тогда $C'R' = x$. В силу того, что отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой, $Q'B' = Q'C' = 5x$. Так как $P'Q'R'S'$ – ромб, $P'Q' = Q'R' = 6x$. Следовательно, $P'B' = P'Q' - B'Q' = x$, $A'P' = B'P' = x$, $A'S' = P'S' - A'P' = 5x$. Пусть площадь параллелограмма $P'Q'R'S'$ равна T. По известным теоремам об отношении площадей находим, что $S_{\triangle A'R'S'} = \frac{5}{6}S_{\triangle P'R'S'} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}T = \frac{5}{12}T$; $S_{\triangle A'B'P'} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}S_{\triangle P'Q'S'} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{T}{2} = \frac{T}{72}$. Отсюда следует, что $S_{A'B'Q'R'} = S_{P'Q'R'S'} - S_{\triangle A'B'P'} - S_{\triangle A'R'S'} = \frac{41T}{72}$. Значит, $\frac{S_{A'B'Q'R'}}{S_{\triangle A'B'P'}} = 41$.

Поскольку при аффинных преобразованиях отношения площадей сохраняются, искомое отношение равно 41.

4. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\,dy$.

Ответ: $\frac{2}{9}(2\sqrt{2} - 1)$.

Решение. Область интегрирования представляет собой криволинейный треугольник с вершинами в точках $O(0;\,0)$, $A(0;\,1)$, $B(1;\,1)$, границами которого являются отрезки OA и AB, а также дуга параболы $x = y^2$, соединяющая точки A и B. Записывая этот же интеграл в другом порядке интегрирования, получаем $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} \sqrt{1+y^3}\,dx = \int\limits_0^1 \sqrt{1+y^3}\,dy \int\limits_0^{y^2} dx = \int\limits_0^1 y^2\sqrt{1+y^3}\,dy = \frac{2}{9}(1+y^3)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

5. Вершина конуса вращения K_1 находится в начале координат, осью K_1 является прямая $x = y = 0$, точка $A(1; 0; \sqrt{3})$ лежит на K_1. Конус K_2 симметричен конусу K_1 относительно плоскости $z = x\sqrt{3}$. Напишите уравнение конуса K_2. Система координат декартова прямоугольная (базис ортонормированный).

Ответ: $3y^2 - 2\sqrt{3}xz + 2z^2 = 0.$

Решение. Пусть $O(0;\,0;\,0)$ – начало координат (и вершина конуса), $B(0;\,0;\,2)$ – точка на оси конуса. Тогда угол AOB есть угол α между осью конуса и его образующей. Несложно вычислить (используя векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$), что $\alpha = 30^\circ$. Отметим, что вершина конуса лежит в плоскости $z = x\sqrt{3}$, относительно которой конус отражается. Значит, вершина конуса K_2 также находится в начале координат. Найдём ещё одну точку на оси конуса K_2. Для этого отражаем точку B относительно плоскости $z = x\sqrt{3}$. Получаем точку $\left(\sqrt{3};\,0;\,1\right)$. Теперь мы можем записать уравнение конуса K_2, зная его вершину, направляющий вектор оси $\mathbf{a} = \left(\sqrt{3};\,0;\,1\right)^T$ и угол $\alpha = 30^\circ$ между осью и образующей: $(\mathbf{r};\mathbf{a})^2 = |\mathbf{r}|^2 \cdot |\mathbf{a}|^2 \cdot \cos^2\alpha$ (заметим, что вершина конуса также удовлетворяет этому уравнению). Подставляя найденные значения, получаем $\left(\sqrt{3}x + z\right)^2 = 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$, или (после упрощения) $3y^2 - 2\sqrt{3}xz + 2z^2 = 0$.

6. Решите задачу Коши $y' = 2 - \sin(y - 2x)$, $y(1) = 2$.

Ответ: $y = 2x$.

Решение. Введём новую неизвестную функцию $z(x)$ такую, что $z = y - 2x$. Тогда $z' = y' - 2$, и задача Коши принимает вид $z' = -\sin z$, $z(1) = 0$. Заметим, что функция $z \equiv 0$ удовлетворяет полученной задаче Коши. В силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши, все условия которой выполняются (правая часть уравнения есть непрерывно дифференцируемая функция), других решений данная задача не имеет. Значит, $z = 0$, поэтому $y = 2x$.

7. На отрезке $[-5; 5]$ наудачу выбираются точки a и b. Какова вероятность того, что уравнение $(a+b)x^2 - 2(1+b)x + b - a = 0$ имеет два различных неотрицательных корня?

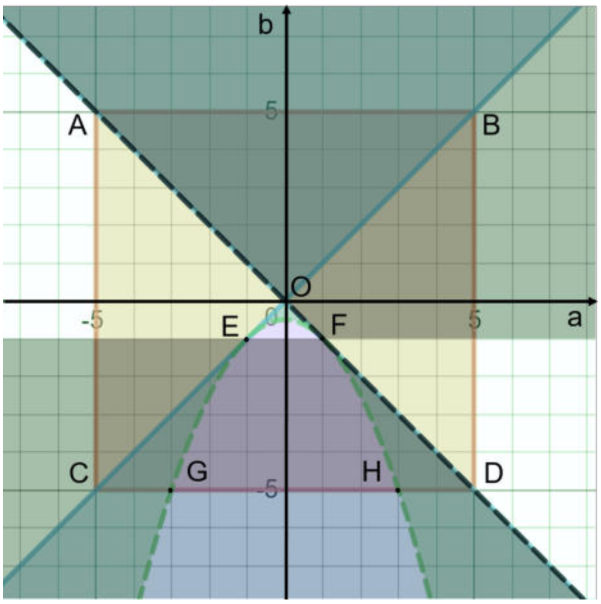

Рис. 1: Билет 1.

Ответ: $\frac{19}{60}$.

Решение. Если коэффициент при x^2 обращается в 0, то уравнение не квадратное, и у него не может быть 2 корней. Значит, $a+b\neq 0$ (далее мы рассматриваем только этот случай; в действительности, это ограничение несущественно, так как за счёт него отбрасывается множество параметров меры 0). Уравнение квадратное, поэтому оно имеет 2 различных действительных корня тогда и только тогда, когда его дискриминант положителен, т.е. $(1+b)^2-(a+b)(b-a)>0$. Эти корни являются неотрицательными, если и только если их сумма и произведение неотрицательны. В силу теоремы Виета последнее условие эквивалентно неравенствам $\frac{b-a}{a+b}\geqslant 0$, $\frac{2(1+b)}{a+b}\geqslant 0$. В итоге получаем систему неравенств $\begin{cases} b>-\frac{1}{2}\left(a^2+1\right), \\ (1+b)(a+b)\geqslant 0, \\ (b-a)(b+a)\geqslant 0, \end{cases}$ которая задаёт интересующее нас множество значений параметров. Для того, чтобы корректно его построить, необходимо отметить, что парабола $b=-\frac{1}{2}\left(a^2+1\right)$ касается прямых $b=a$ и $b=-a$ в точках E и F соответственно[1] (см. рис. 1).

Множество решений системы неравенств изображено на рисунке 1 (оно состоит из двух криволинейных треугольников CEG и DFH, а также треугольника ABO). Найдём его площадь.

$$S_{DFH}=S_{CEG}=\int\limits_{-5}^{-1}(a-(-5))da-\int\limits_{-3}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\left(a^2+1\right)-(-5)\right)da=$$

$$=\left(\frac{1}{2}a^2+5a\right)\Big|_{-5}^{-1}-\left(\frac{9}{2}a-\frac{1}{6}a^3\right)\Big|_{-3}^{-1}=8-\frac{14}{3}=\frac{10}{3}.$$

Площадь треугольника AOB составляет ровно одну четверть площади квадрата $ABDC$ и равна 25. Значит, мера множества параметров, удовлетворяющих условию, равна $2\cdot\frac{10}{3}+25=\frac{95}{3}$; при этом мера множества возможных значений параметров (оно изображено на рисунке красным цветом) равна $10\cdot 10=100$. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{95}{3}:100=\frac{19}{60}$.

8. Найдите A^{101}, если $A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 3\\ 0 & -12 & 7\end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix}-3^{101} & 0 & 0\\ 0 & -605 & 303\\ 0 & -1212 & 607\end{pmatrix}$.

Решение. Данная матрица является блочно-диагональной. Так как при возведении блочно-диагональной матрицы в степень каждый её блок возводится в эту степень отдельно, то $A^{101}=\begin{pmatrix}(-3)^{101} & 0\\ 0 & B^{101}\end{pmatrix}$, где $B=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -12 & 7\end{pmatrix}$. Чтобы возвести матрицу B в степень, приведём её к жордановой форме. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}-5-\lambda & 3\\ -12 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2=0.$$

Это уравнение имеет единственный корень $\lambda=1$ кратности 2. Для определения соответствующего собственного вектора, решаем однородную систему с матрицей $B-E=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ -12 & 6\end{pmatrix}$. Эта система имеет единственное линейно независимое решение $\mathbf{h}_1=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^T$. Присоединённый вектор находим как некоторое решение неоднородной системы $(B-E)\mathbf{h}=\mathbf{h}_1$. В качестве такого решения можно взять, например, $\mathbf{h}_2=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}^T$. Векторы $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ образуют жорданов базис, в котором матрица B принимает вид $\widetilde{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Тогда $\widetilde{B}=S^{-1}BS$ или $B=S\widetilde{B}S^{-1}$, где $S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ — матрица перехода к этому базису (т.е. матрица со столбцами $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$).

[1] Для исследования взаимного расположения параболы и прямой $b=a$ достаточно решить систему, составленную из уравнений $b=a$, $b=-\frac{1}{2}\left(a^2+1\right)$.

По индукции устанавливается, что $B^{101} = S\widetilde{B}^{101}S^{-1}$ и $\widetilde{B}^{101} = \begin{pmatrix} 1 & 101 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Учитывая, что $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, после перемножения матриц в нужном порядке получим $B^{101} = \begin{pmatrix} -605 & 303 \\ -1212 & 607 \end{pmatrix}$.

9. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $N = 324$, $p = \frac{1}{18}$, а случайная величина η – экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$; при этом случайные величины ξ и η независимы. Найдите коэффициент корреляции случайных величин $4\eta - \xi$ и $2\eta + \xi$.

Указание. Плотность экспоненциального распределения с параметром λ равна $\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x \leqslant 0. \end{cases}$

Биномиально распределённая случайная величина с параметрами (N, p) соответствует количеству успехов в схеме Бернулли при количестве испытаний, равном N, и вероятности успеха в одном испытании, равной p.

Ответ: $-\frac{1}{35}$.

Решение. Известно, что для экспоненциально распределённой случайной величины с параметром λ дисперсия равна $\frac{1}{\lambda^2}$, а для биномиально распределённой с параметрами N и p дисперсия равна $Np(1-p)$. Следовательно, $D\xi = 324 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{17}{18} = 17$, $D\eta = \frac{1}{\lambda^2} = 2$.

По определению, коэффициент корреляции ρ случайных величин X и Y равен $\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}$. Ковариация представляет собой билинейную функцию, поэтому $\operatorname{Cov}(4\eta - \xi,\, 2\eta + \xi) = -\operatorname{Cov}(\xi,\, \xi) + 2\operatorname{Cov}(\xi,\, \eta) + 8\operatorname{Cov}(\eta,\, \eta)$.

Для независимых случайных величин ковариация обращается в 0, и, помимо этого, $\operatorname{Cov}(X,\, X) = DX$ для произвольной случайной величины X. Значит, $\operatorname{Cov}(X,\, Y) = -D\xi + 8D\eta = -1$.

Для независимых случайных величин дисперсия суммы или разности равна сумме дисперсий; кроме того, $D(\alpha X) = \alpha^2 DX$ для произвольного числа α и для любой случайной величины X. Отсюда $D(4\eta - \xi) = D\xi + 16D\eta = 49$, $D(2\eta + \xi) = D\xi + 4D\eta = 25$.

Итак, $\rho(4\eta - \xi,\, 2\eta + \xi) = \frac{-1}{\sqrt{49 \cdot 25}} = -\frac{1}{35}$.

10. Вычислите интеграл $\oint\limits_\Gamma \frac{\sin 2z}{z \sin z\,(e^z - 1)} dz$, где Γ – окружность $|z| = 6$, пробегаемая против часовой стрелки.

Ответ: $-2i\pi$.

Решение. Применяя формулу синуса двойного угла, можем привести интеграл к виду $\oint\limits_\Gamma \frac{2\cos z}{z\,(e^z - 1)} dz$.

Числитель и знаменатель дроби есть регулярные функции, поэтому подынтегральная функция $f(z)$ регулярна во всех тех точках, где знаменатель отличен от нуля. Особые точки – это $z = 0$, а также корни уравнения $e^z = 1$, откуда $z = 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$. Внутрь кривой Γ попадает единственная особая точка $z = 0$, поэтому данный интеграл равен $2i\pi \operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)$. Каждый из множителей в знаменателе $f(z)$ имеет в точке $z = 0$ ноль первого порядка, а числитель в ноль не обращается, поэтому $z = 0$ является полюсом второго порядка $f(z)$. Раскладывая $f(z)$ в окрестности точки $z = 0$ в ряд Лорана, получаем $f(z) = \frac{2\left(1 - \frac{z^2}{2} + o(z^3)\right)}{z\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + o(z^2) - 1\right)} = \frac{2}{z^2}\left(1 - \frac{z^2}{2} + o\left(z^3\right)\right)\left(1 + \frac{z}{2} + o(z)\right)^{-1} = \left(\frac{2}{z^2} - 1 + o(z)\right)\left(1 - \frac{z}{2} + o(z)\right) = \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$. Вычет в конечной точке есть коэффициент при минус первой степени в разложении функции в ряд Лорана, откуда получаем $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = -1$. Следовательно, данный интеграл равен $-2i\pi$.