

Экзамен Ozon Masters 3 августа 2019 Вариант 1

Задача 1 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$a_n = \left(\frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{(b+1)(b+2)\dots(b+n)} \right)^\alpha, \quad a > 0, \quad b > 0$$

Задача 2 Пусть $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, и задана $h(x)$, $x \in R$, -гладкая ограниченная функция. Докажите, что

$$E[(X - \mu)h(X)] = \sigma^2 E[h'(X)]$$

Задача 3 Пусть x_1, \dots, x_n - произвольные целые числа. Докажите, что число $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - x_j}{i - j}$ - целое.

Задача 4 Найдите все такие матрицы A , для которых все элементы матриц A и A^{-1} неотрицательны.

Задача 5 Товарный арбитражер использует онлайн-аукцион "eBay" для покупки и последующей продажи товаров. Арбитражер знает, что многие торги ведутся между торговыми роботами. Он хочет проанализировать данные продаж коллекционных монет "Достоинство". Для этого он собрал информацию о динамике цены за последние n дней. Дни пронумерованы $i = 1, 2, \dots, n$ и для каждого дня есть цена торгов $p(i)$.

Арбитражер хочет проанализировать для некоторых (возможно, больших) k так называемые k -операционные стратегии - множества из m пар за дни $(b_1, s_1), \dots, (b_m, s_m)$, где $0 \leq m \leq k$ и

$$1 \leq b_1 < s_1 < b_2 < s_2 < \dots < b_m < s_m \leq n$$

Они рассматриваются как множество из не более чем k непересекающихся временных интервалов, во время которых арбитражер сначала покупает, а потом продает монеты. При этом доход арбитражера от купли-продажи составляет $\sum_{i=1}^m (p(s_i) - p(b_i))$.

Предложите эффективный полиномиальный (по n и k) алгоритм поиска оптимальной k -операционной стратегии для заданной серии цен.

Задача 6 Пусть случайная величина X принимает неотрицательные значения. Докажите, что

$$P[X = 0] \leq \frac{Var(X)}{E[X^2]}$$