**2019/20 учебный год**

**Всероссийская олимпиада студентов «Я – профессионал»**

**<u>Демонстрационный вариант</u>**

задания заключительного (очного) этапа

по направлению «**Математика**»

Категория участия: «Магистратура/специалитет»

(для поступающих в аспирантуру/ординатуру)

# Билет 1

1. Пусть $x_1 = \dfrac{1}{e}$, $x_{n+1} = \dfrac{1+x_n^2}{2}$. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и найдите её предел.

   **Ответ:** возрастает и ограничена сверху, предел $L = 1$.

   **Решение**. Отметим, что если $0 < x < 1$, то $\frac{x^2+1}{2} \in (0; 1)$. Отсюда по индукции заключаем, что $0 < x_n < 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, $x_{n+1} - x_n = \frac{(x_n-1)^2}{2} > 0$ и, значит, последовательность $\{x_n\}$ строго возрастает. Тогда по теореме о пределе монотонной ограниченной последовательности $\{x_n\}$ сходится. Обозначим её предел через $L$. Переходя в рекуррентном равенстве к пределу, получаем $L = \frac{L^2+1}{2}$, $L^2 - 2L + 1 = 0$, $L = 1$.

2. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение порядка $n$ с постоянными действительными коэффициентами. Известно, что $x^{170}\sin^4(3x)$ – одно из решений этого уравнения. Найдите *минимально* возможное значение $n$. Ответ обоснуйте.

   **Ответ:** 855.

   **Решение.** Данное частное решение можно преобразовать к виду

   $$\frac{1}{8}x^{170}\cos 12x - \frac{1}{2}x^{170}\cos 6x + \frac{3}{8}x^{170}.$$

   Для того, чтобы линейное однородное дифференциальное уравнение в качестве решения имело такой квазимногочлен, корнями его характеристического уравнения должны являться следующие числа: $\lambda = \pm 12i$ – корни кратности 171; $\lambda = \pm 6i$ – корни кратности 171; $\lambda = 0$ – также корень кратности 171. Получаем, что характеристическое уравнение должно иметь по крайней мере 855 корней (с учётом кратности), поэтому минимально возможное значение $n$ – это 855.

3. Найдите $A^{1000}$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

   **Ответ:** $\begin{pmatrix} 3^{1000} & 0 & 0 \\ 0 & -2^{999} & 2^{999}\sqrt{3} \\ 0 & -2^{999}\sqrt{3} & -2^{999} \end{pmatrix}$.

   **Решение.** Данная матрица является блочно-диагональной, поэтому при возведении её в степень можно каждый её блок возвести в степень. Следовательно, элемент на пересечении первой строки и первого столбца итоговой матрицы равен $(-3)^{1000}$, а остальные элементы первого столбца и первой строки равны нулю.

   Для возведения в степень матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ представляем её в виде $B = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$. Последняя матрица представляет собой матрицу поворота плоскости на угол $60^\circ$ (против часовой стрелки в условиях правой системы координат). Следовательно, эта матрица в степени 1000 соответствует повороту на угол $1000 \cdot 60^\circ$. Так как $60000^\circ = 166 \cdot 360^\circ + 240^\circ$, это эквивалентно повороту на угол $240^\circ$. Значит, $B^{1000} = 2^{1000}\begin{pmatrix} \cos 240^\circ & -\sin 240^\circ \\ \sin 240^\circ & \cos 240^\circ \end{pmatrix} = 2^{1000}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   Итак, $A^{1000} = \begin{pmatrix} 3^{1000} & 0 & 0 \\ 0 & -2^{999} & 2^{999}\sqrt{3} \\ 0 & -2^{999}\sqrt{3} & -2^{999} \end{pmatrix}$.

4. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^1 \frac{e^y - 1}{\sqrt{y}} dy$.

 

**Ответ:** $e-2$.

**Решение.** Область интегрирования представляет собой криволинейный треугольник с вершинами в точках $O(0;\,0)$, $A(0;\,1)$, $B(1;\,1)$, границами которого являются отрезки $OA$ и $AB$, а также дуга параболы $y=x^2$, соединяющая точки $A$ и $B$. Записывая этот же интеграл в другом порядке интегрирования, получаем

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} \frac{e^y-1}{\sqrt{y}}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{e^y-1}{\sqrt{y}}\,dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} dx = \int\limits_0^1 (e^y-1)\,dy = (e^y-y)\Big|_0^1 = e-2.$$

5. Решите задачу Коши $y''=y'\operatorname{arctg}\ln y',\ y(0)=5,\ y'(0)=1.$

**Ответ:** $y=x+5$.

**Решение.** Введём новую неизвестную функцию $z(x)=\ln y'(x)$. Тогда $y'(x)=e^{z(x)}$ и, дифференцируя обе части последнего равенства, получаем $y''(x)=e^{z(x)}z'(x)$. Уравнение принимает вид $z'e^z=\operatorname{arctg} z$. При $x=0$ равенство $y'(x)=e^{z(x)}$ обращается в $y'(0)=e^{z(0)}$, откуда $z(0)=0$.

Итак, мы приходим к задаче Коши $z'=e^{-z}\operatorname{arctg} z$, $z(0)=0$. Заметим, что функция $z(x)\equiv 0$ является решением этой задачи, а также выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши (правая часть уравнения есть непрерывно дифференцируемая функция). Значит, $z=0$ - это единственное решение этой задачи. Возвращаясь к исходной функции, получаем $y'(x)=1$, $y(0)=5$, откуда $y=x+5$.

6. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность с положительными членами. Оказалось, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n+1}}=1$. Пусть $y_n=\dfrac{1}{nx_n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^3$. Верно ли, что последовательность $y_n$ ограниченна?

**Ответ:** Нет. Например, при $x_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

**Решение.** Заметим, что последовательность $x_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ удовлетворяет данному в задаче условию. Действительно, при этом $y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, т.е. $y_n$ – это частичная сумма гармонического ряда, который, как известно, расходится.

7. Вычислите интеграл $\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{z+i\ln 3+\pi}{\operatorname{ctg} z-\frac{5i}{4}}dz$, где $\Gamma$ – окружность $|z+2|=3$, пробегаемая против часовой стрелки.

**Ответ:** $\frac{32\pi^2 i}{9}$.

**Решение.** Найдём особые точки подынтегральной функции. Поскольку числитель дроби есть функция регулярная, а знаменатель регулярен во всех точках, когда $\sin z$ отличен от нуля, эта функция регулярна во всех точках, где $\sin z\neq 0$, и где знаменатель дроби отличен от нуля, т.е. $\operatorname{ctg} z-\frac{5i}{4}\neq 0$.

Если $\sin z=0$, то знаменатель дроби обращается в бесконечность, а числитель конечен, поэтому эти точки являются устранимыми особыми точками, и на величину интеграла они не влияют.

Если $\operatorname{ctg} z=\frac{5i}{4}$, то получаем $\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow e^{2iz}=9\Leftrightarrow z=-i\ln 3+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. При этих значениях $z$ знаменатель обращается в ноль, а его первая производная отлична от нуля (т.к. она равна $-\frac{1}{\sin^2 z}$). Числитель имеет ноль первого порядка при $z=-i\ln 3-\pi$. Таким образом, точки вида $z=-i\ln 3+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq -1$ являются полюсами первого порядка данной функции.

Внутри данной окружности лежит единственный полюс – точка $z=-i\ln 3$. Вычет функции $\frac{f(z)}{g(z)}$ в случае, когда точка $z_0$ не является нулём числителя и является нулём знаменателя первого порядка, равен $\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$. Следовательно, вычет подынтегральной функции в точке $z=-i\ln 3$ равен $\left.\frac{z+i\ln 3+\pi}{-\frac{1}{\sin^2 z}}\right|_{z=-i\ln 3} = -\pi\sin^2(i\ln 3)=\frac{16\pi}{9}$.

По теореме Коши о вычетах данный интеграл равен $2i\pi\cdot\frac{16\pi}{9}=\frac{32\pi^2 i}{9}$.

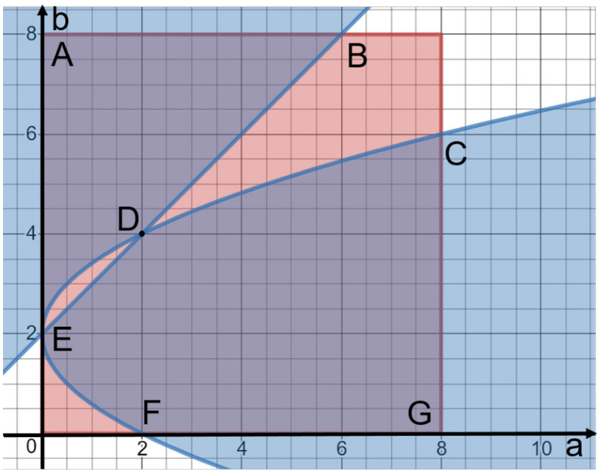


Рис. 1: Билет 1.

8. На отрезке $[0;8]$ наудачу выбираются точки $a$ и $b$. Какова вероятность того, что уравнение $(b-a-2)x^2 - x + 2a - b^2 + 4b - 4 = 0$ имеет два действительных корня разных знаков?

   **Ответ:** $\frac{79}{96}$.

   **Решение.** Если коэффициент при $x^2$ обращается в 0, то уравнение не квадратное, и у него не может быть 2 решения. Значит, $b - a - 2 \neq 0$. Тогда для того, чтобы корни были разных знаков необходимо и достаточно, чтобы их произведение было отрицательным. В силу теоремы Виета последнее условие эквивалентно неравенству $\frac{2a-b^2+4b-4}{b-a-2} < 0$, откуда далее получаем $(b-a-2)\left(a - \frac{1}{2}(b-2)^2\right) < 0$. Множество точек, удовлетворяющих этому неравенству, а также условиям $0 \leqslant a \leqslant 8$, $0 \leqslant b \leqslant 8$, изображено на рисунке 1. Оно состоит из криволинейных многоугольников $ABDE$ и $CDEFG$ (закрашены синим и красным цветами на рисунке), а его границами являются дуги параболы $a = \frac{1}{2}(b-2)^2$ и отрезки прямых $a = 0$, $b = 0$, $a = 8$, $b = 8$, $b = a + 2$.

   Найдём площадь закрашенного множества.

$$S_{ABDE} = \int\limits_2^4 \frac{1}{2}(b-2)^2\,db + \int\limits_4^8 (b-2)\,db = \left.\frac{(b-2)^3}{6}\right|_2^4 + \left.\frac{(b-2)^2}{2}\right|_4^8 = \frac{4}{3} + 16 = \frac{52}{3};$$

$$S_{CDEFG} = \int\limits_0^6 \left(8 - \frac{1}{2}(b-2)^2\right)\,db - \int\limits_2^4 \left(b - 2 - \frac{1}{2}(b-2)^2\right)\,db =$$

$$= \left.\left(8b - \frac{1}{6}(b-2)^3\right)\right|_0^6 - \left.\left(\frac{1}{2}b^2 - 2b - \frac{1}{6}(b-2)^3\right)\right|_2^4 = 36 - \frac{2}{3} = \frac{106}{3}.$$

   Значит, мера множества параметров, удовлетворяющих условию, равна $\frac{52}{3} + \frac{106}{3} = \frac{158}{3}$; при этом мера множества возможных значений параметров (оно изображено на рисунке красным цветом) равна $8 \cdot 8 = 64$. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{158}{3} : 64 = \frac{79}{96}$.

9. В системе координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ тело $S$ задано неравенством $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 \leqslant 4x - 6y - 4$. Найдите объём $S$, если известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $|\mathbf{e}_3| = 6$, а $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 90^\circ$, $\angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 30^\circ$.

   **Ответ:** $4\pi$.

   **Решение.** Преобразуем неравенство к виду $2(x-1)^2 + 3(y+1)^2 + 6z^2 \leqslant 1$. Если бы система координат была прямоугольной (базис ортонормированный), то это неравенство задавало бы внутренность эллипсоида объёма $\frac{4}{3}\pi abc$, где $a$, $b$, $c$ – полуоси эллипса, т.е. объёма $\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2}{9}\pi$. Так как система координат общая декартова, то объём тела будет больше в $\frac{V_1}{V}$ раз, где $V = 1$ – объём параллелепипеда, построенного на векторах ортонормированного базиса, а $V_1$ – объём параллелепипеда, построенного на векторах базиса из условия. Заметим, что вектор $\mathbf{e}_1$ ортогонален плоскости, в которой лежат векторы

 

$\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. Тогда $V_1 = |\mathbf{e}_1|\,|\mathbf{e}_2|\,|\mathbf{e}_3|\sin\angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 18$ (также объём $V_1$ может быть найден по формуле $V_1 = \sqrt{\det\Gamma}$, где $\Gamma$ – матрица Грама данного базиса). Значит, искомый объём равен $\frac{2}{9}\pi \cdot 18 = 4\pi$.

**10.** Шестигранную симметричную игральную кость подбрасывают 94 раза. Рассматривается случайная величина $\xi$, равная количеству выпавших пятёрок. а) Найдите математическое ожидание и дисперсию $\xi$. б) Найдите наиболее вероятное значение $\xi$.

**Ответ:** а) $E\xi = \frac{47}{3}$; $D\xi = \frac{235}{18}$; б) 15.

**Решение.** а) Случайную величину $\xi$ можно представить в виде суммы 94 независимых индикаторных случайных величин $\xi_k$, которые равны 1 в случае успеха (выпадении пятёрки) в $k$-м испытании и 0 в случае неудачи. Так как $P(\xi_k = 0) = \frac{5}{6}$, а $P(\xi_k = 1) = \frac{1}{6}$, получаем, что $E\xi_k = 0 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, $E\xi_k^2 = 0 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, $D\xi_k = E\xi_k^2 - (E\xi_k)^2 = \frac{5}{36}$. Матожидание суммы равно сумме матожиданий, а для независимых случайных величин дисперсия суммы равна сумме дисперсий, поэтому $E\xi = \sum\limits_{k=1}^{94} E\xi_k = 94 \cdot \frac{1}{6} = \frac{47}{3}$, $D\xi = \sum\limits_{k=1}^{94} D\xi_k = 94 \cdot \frac{5}{36} = \frac{235}{18}$.

б) Для биномиальной случайной величины вероятность получить $k$ успехов в серии из $n$ испытаний при вероятности успеха в одном испытании, равной $p$, есть $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. В нашем случае вероятность выпадения ровно $k$ пятёрок из 94 равна $P_k = C_{94}^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{94-k}$. Рассмотрим отношение $\frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{C_{94}^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{94-k}}{C_{94}^{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{95-k}} = \frac{C_{94}^k}{5C_{94}^{k-1}} = \frac{95-k}{5k}$. Отсюда получаем, что $P_k > P_{k-1} \Leftrightarrow \frac{P_k}{P_{k-1}} > 1 \Leftrightarrow \frac{95-k}{5k} > 1 \Leftrightarrow k < \frac{95}{6}$. Следовательно, при $k \leqslant 15$ вероятность получения $k$ успехов выше, чем вероятность получения $k-1$ успеха, а при $k \geqslant 16$ вероятность $k$ успехов ниже, чем вероятность $k-1$ успеха. Значит, наиболее вероятное количество успехов равно 15.