

## Экзамен Ozon Masters Вариант 1

### Задача 1

Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы  $A = \|a_{ij}\|_1^n$ , где  $a_{ij} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$

**Задача 2** Пусть  $K_s$  - полный граф, имеющий  $s$  вершин. Ребра графа раскрашивают в 2 цвета. Существует ли  $t \geq 2$  такое, что для любой раскраски графа  $K_{3t-2}$  найдутся  $t$  ребер одного цвета, не имеющих общих вершин?

### Задача 3

На складе лежат ноутбуки "Плутон". Их производят по одному и тому же чертежу два завода: Завод красного знамени "Поломка" и Радиотехнический завод им. Криворучкина. На складе изделия этих заводов представлены в отношении 4:3. Известно, что 1 из 1000 ноутбуков производства ЗКЗ "Поломка" бракован, а у РЗ им. Криворучкина бракован только 1 из 1500 ноутбуков. Один из случайно выбранных ноутбуков на складе оказался сломан. Какова вероятность, что он был произведен на ЗКЗ "Поломка".

### Задача 4

Рассмотрим две матрицы одинакового размера  $A = \|a_{ij}\|$  и  $B = \|b_{ij}\|$ .

Назовем  $s_i = \sum_j (a_{ij} - b_{ij})$  - невязкой по строке  $i$ , а  $v_j = \sum_i (a_{ij} - b_{ij})$  - невязкой по столбцу  $j$ .

Пусть дана матрица  $A$  с положительными элементами  $a_{ij}$ . Среди всех матриц  $B$ , для которых выполнено

- $s_i \geq 0, v_j \geq 0$  для всех  $i$  и  $j$ ,
- $\sum_i b_{ij}$  и  $\sum_j b_{ij}$  - целые для всех  $i$  и  $j$ ,

найдите такую, для которой величина  $\sum_i s_i + \sum_j v_j$  минимальна.

В качестве решения от Вас ожидается алгоритм, доказательство его корректности, оценки на сложность, оценки на качество решения (если полученное решение не точно).

### Задача 5

Решите уравнение:

$$y'' - \frac{2y}{x^2} = 3 \ln(-x)$$

### Задача 6

Существует ли случайная величина с плотностью распределения  $\cos^3 x \cos 2x$  на отрезке  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ? Если нет - докажите, если да - приведите ее функцию распределения.