

**Олимпиада для студентов и выпускников вузов — 2015 г.
по направлению «Прикладная математика и информатика»
Профиль «Прикладная математика и информатика»**

Время выполнения задания — 240 мин. Time to complete the task is 240 min.
Решения олимпиадных заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая из задач оценивается в 15 баллов, если сумма превышает 100, итог приравнивается к 100 баллам. Solutions should be written in English or Russian language. Each problem costs 15 points, if the sum exceeds 100, the result is equal to 100 points.

1. Найти, при каких целых значениях x для функции $F(x) = (x+1)^{-1} + \ln \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$, справедливо неравенство $F''(x) \geq 1 + x/2$. 1. Find for which integer value of x does the inequality $F''(x) \geq 1 + x/2$ hold if $F(x) = (x+1)^{-1} + \ln \operatorname{sh} x$, where $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$.

2. Найти, при каких значениях параметра a интеграл неотрицателен: 2. Find the values of the parameter a for which the following integral is nonnegative:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 + ax^5 e^{-x} - x}{x^3} dx.$$

3. На плоскости задана декартова система с координатами x, y . При каких значениях вещественного параметра a окружность $x^2 + y^2 = 4$ имеет хотя бы одно пересечение с прямой $ax + y = a^2$? 3. A Cartesian system with coordinates x, y is given in the plane. For which values of the real parameter a does the circle $x^2 + y^2 = 4$ has at least one intersection with the line $ax + y = a^2$?

4. Найти, при каких комплексных значениях x сходится ряд 4. Find for which complex values of x does the following series converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{a} \frac{x^{2n}}{n^2(1+x^{8n})},$$

где $\binom{n}{a}$ есть число сочетаний из n элементов по a , а параметр a равен минимальному положительному корню уравнения $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. where $\binom{n}{a}$ is the number of combinations of a elements out of n , and the parameter a is the smallest positive root of the equation $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

5. Какова последняя цифра числа 17^{25} ?

5. What is the last digit of 17^{25} ?

6. Несколько раз бросается игральная кость. Какое событие более вероятно:

6. Which of the following outcomes is more probable after a dice is thrown several times:

- (1) сумма выпавших очков четна;
- (2) сумма выпавших очков нечетна?

- (1) the sum of the scores is even;
- (2) the sum of the scores is odd?

Олимпиада для студентов и выпускников вузов — 2015 г.

7. Имеется n пронумерованных писем и n пронумерованных конвертов. Письма случайным образом раскладываются по конвертам (все $n!$ способов равновероятны). Найдите математическое ожидание числа совпадений, когда письмо лежит в конверте с тем же номером.
7. There are n numbered letters and n numbered envelopes. Letters are randomly put into envelopes in such a way that all $n!$ arrangements are equally probable. Find the expected number of matches between letters and envelopes (the letter is in the envelope with the same number).
8. Неориентированный граф задан в виде бинарной матрицы смежности $n \times n$. Предложить алгоритм, определяющий, является ли этот граф двудольным.
8. An unoriented graph is specified by a binary adjacency $n \times n$ matrix. Devise an algorithm deciding whether the graph is bipartite.
9. Мышка прячется в одной из пяти норок, расположенных в ряд слева направо. Кот не может заглянуть в норки, но может проверить лапой любую из них. При этом мышка боится кота и после каждой его попытки перелезает либо в соседнюю левую норку, либо в крайнюю правую (остаться в той же норке она не может). Предложите алгоритм, позволяющий коту поймать мышку.
9. The mouse hides in one of the five holes arranged in a row from left to right. The cat cannot look into the holes, but can check any of them with its paw. The mouse is afraid of the cat, and after each such check it changes the hole either to the adjacent one on the left or to the rightmost one. Propose an algorithm which allows the cat to catch the mouse.

Следующие задания по условиям олимпиады формулируются только по-английски, но решения могут быть записаны как по-английски, так и по-русски:

10. Determine values of real parameters $a \geq 0$ and $b \geq 0$ for which the following limit exists and equals to 0:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^{1/x} + \cos(\pi + ax^5) - \ln(1 + \operatorname{sh} bx)).$$

11. Compute the antiderivative $F_n(x)$ of the function $f_n(x)$ given by the recurrence relations $f_0(x) = 3x^2 - 1$, $f_1(x) = 4x$, $f_n(x) = 5f_{n-1}(x) - 6f_{n-2}(x)$, assuming $F_n(0) = 0$.

12. Find all real-valued solutions of the equation $y''' - 6y'' + 16y' - 16y = e^{2x} + 6x$.