Семинар 3

С решениями

Задачи:

1. Даны векторы
$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix}3\\8\\11\end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\ a_5 = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$$
Среди этих векторов найти базис их линейной оболочки и выразить все оставшиеся вектора через базисные.

Решение. Приведем матрицу $A = (a_1|a_2|a_3|a_4|a_5)$ к улучшенному ступенчатому виду, получим
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0 & 2\\0 & 1 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$
Значит a_1, a_2, a_4 – базис. При этом $a_3 = 3a_1 + 2a_2$ и $a_5 = 2a_1 - a_4$.
Ответ: Например a_1, a_2, a_4 – базис, $a_3 = 3a_1 + 2a_2$ и $a_5 = 2a_1 - a_4$. □

2. Найдите базис векторного пространства $U = \{y \in \mathbb{R}^5 \mid Ay = 0\}$, где
$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 0 & 7\\1 & 2 & 0 & 1 & 4\\0 & 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
Решение. Приведем матрицу A к улучшенному ступенчатому виду, получим
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 3\\0 & 1 & -1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$
Значит свободные переменные y_3 и y_5. В базисе пространства решений будет два вектора:
$$v_1 = (-2, 1, 1, 0, 0),\ v_2 = (-3, -1, 0, 1, 1)$$
Ответ: $v_1 = (-2, 1, 1, 0, 0),\ v_2 = (-3, -1, 0, 1, 1)$. □

3. Определите можно ли из системы векторов
$$v_1 = \begin{pmatrix}-4\\-5\\2\\3\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}5\\5\\3\\-2\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}4\\5\\-2\\-3\end{pmatrix}$$
выбрать ФСР для системы линейных уравнений
$$\begin{cases}x_1 - x_3 + 2\,x_4 &= 0\\x_2 - 2\,x_3 + 3\,x_4 &= 0\\2\,x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 - 2\,x_4 &= 0\end{cases}$$
Решение. Все векторы кроме
$$\begin{pmatrix}5\\5\\3\\-2\end{pmatrix}$$
лежат во множестве решений. Более того, ранг системы из оставшихся трех векторов равен двум. В то же время пространство решений тоже двумерно. Потому ответ – выбрать можно. □

4. Являются ли функции $1, \sin x, \sin^2 x, \ldots, \sin^n x$ линейно зависимыми?

5. Пусть $\mathbb{R}[x]_n$ – множество всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше n. Показать, что системы

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \text{ и } \{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}, \text{ где } a \in \mathbb{R}$$

являются базисами в $\mathbb{R}[x]_n$ и найти матрицы перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому.

6. Найти ранг следующей матрицы при различных значениях параметра λ:

$$\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$$

Решение. Если посчитать определитель этой матрицы, то получится $-(\lambda+1)^2(\lambda-1)$. Потому, если $\lambda \neq \pm 1$, то матрица не вырождена и значит все ее ранг максимальный и равен 3. Теперь разберем случfb $\lambda = \pm 1$. Ниже приведена матрица при $\lambda = 1$ и ее улучшенный ступенчатый вид

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

В улучшенном ступенчатом виде одна строка, значит ранг исходной матрицы равен 1. Ниже приведена матрица при $\lambda = -1$ и ее улучшенный ступенчатый вид

$$\begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Ответ: При $\lambda = 1$ ранг 1, при $\lambda = -1$ ранг 2, в остальных случаях – 3. □

7. Пусть A и B – квадратные матрицы одного порядка. Доказать, что

$$a) \quad \operatorname{rk} \begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B \quad b) \quad \operatorname{rk} \begin{pmatrix} A & AB \\ B & B+B^2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

Решение. а) Пусть высота матрицы A будет n. Вычтем из две k-ые строки из $n+k$-ой строки (здесь $k \leqslant n$. Тогда получим

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -7B \end{pmatrix}$$

Теперь поделим все строки с $n+1$ до $2n$ на -7, получим

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Теперь вычтем из k-ой строки $n+k$-ю строку для $k \leqslant n$. Получим

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

А ранг блочно диагональной матрицы есть сумма рангов, что и требовалось.

b) Делается аналогично, только надо рассмотреть блочное преобразование столбцов. А именно, надо первый столбец домножить справа на B и вычесть из второго. Это корректно, потому что соответствует умножению справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} E & -B \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

Далее, как в пункте (a). □