Семинар 6

С решениями

Задачи:

1. «Решите» систему методом наименьших квадратов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -9 \end{array}\right)$$

Решение. Введем следующие обозначения

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Нам надо найти решение по формуле $x_0 = (A^t A)^{-1} A^t b$. Эта формула работает, если столбцы матрицы A линейно независимы. Я не будут проверять линейную независимость столбцов в лоб, вместо этого я расскажу как надо организовать вычисления и в какой момент мы проверим эту самую линейную независимость неявно.

Организуем вычисления следующим образом:

(a) Посчитаем матрицу $G = A^t A$.

(b) Вычислим вектор $b_1 = A^t b$.

(c) Решим систему $Gx_0 = b1$ и найдем наше решение.

У такой организации вычислений есть несколько плюсов:

- Столбцы матрицы A линейно независимы тогда и только тогда, когда G обратима, тогда и только тогда, когда на третьем шаге получается единственное решение. Я не очень горю желанием объяснять этот момент, учитывая, что каждый из вас может просто проверить линейную независимость столбцов A.
- При такой организации вычислений, больше вероятность того, что числа в вычислениях не будут погаными.

Теперь перейдем к вычислениям:

(a) Матрица $G = A^t A$ будет

$$G = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 1 \\ 11 & 55 & -31 \\ 1 & -31 & 28 \end{pmatrix}$$

(b) Теперь $b_1 = A^t b$ будет

$$b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 57 \\ -36 \end{pmatrix}$$

(c) Теперь решаем систему

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 11 & 1 & -3 \\ 11 & 55 & -31 & 57 \\ 1 & -31 & 28 & -36 \end{array}\right)$$

Тогда решение системы будет

$$x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для удобства проверки перечислю следующие матрицы

$$(A^tA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{193}{1134} & -\frac{113}{1134} & -\frac{22}{189} \\ -\frac{113}{1134} & \frac{121}{1134} & \frac{23}{189} \\ -\frac{22}{189} & \frac{23}{189} & \frac{11}{63} \end{pmatrix}, \quad (A^tA)^{-1}A^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{126} & -\frac{5}{63} & \frac{5}{14} & \frac{4}{21} \\ \frac{23}{126} & \frac{10}{63} & -\frac{3}{14} & -\frac{1}{21} \\ \frac{2}{21} & \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}$$

$$A(A^tA)^{-1}A^t = \begin{pmatrix} \frac{41}{42} & \frac{2}{21} & \frac{1}{14} & -\frac{2}{21} \\ \frac{2}{21} & \frac{13}{21} & -\frac{2}{7} & \frac{8}{21} \\ \frac{1}{14} & -\frac{2}{7} & \frac{11}{14} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{21} & \frac{8}{21} & \frac{2}{7} & \frac{13}{21} \end{pmatrix}, \quad A(A^tA)^{-1}A^tb = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Еще обратите внимание, что матрица $A(A^tA)^{-1}$ совпадает с транспонированной к $(A^tA)^{-1}A^t$. Еще я на всякий случай посчитал саму проекцию от вектора b.

Ответ: $(-2, 2, 1)$. □

2. Диагонализовать следующие симметричные матрицы в ортонормированном базисе (то есть получить разложение $A = CDC^t$, где C – ортогональная матрица, а D диагональная).

   (a) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Решение. (a) Найдем характеристический многочлен, получим $\chi_A(t) = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$. Значит у нас два собственных значения 1 и 3 и каждый кратности 1. Теперь для каждого собственного значения найдем линейно независимые собственные векторы. Тут будет по одному вектору на каждое собственное значение (количество равно кратности).

Для $\lambda = 1$ решаем систему $(A - E)x = 0$, то есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

Отсюда ФСР есть $(1, -1)$. Надо этот вектор сделать длины 1. Его длина $\sqrt{2}$, значит нужный вектор будет $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Для $\lambda = 3$ решаем систему $(A - 3E)x = 0$, то есть

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x = 0$$

Отсюда ФСР есть $(1, 1)$. Надо этот вектор сделать длины 1. Его длина $\sqrt{2}$, значит нужный вектор будет $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. В итоге искомые матрицы имеют вид

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(b) Найдем характеристический многочлен $\chi_A(t) = (t-1)^2(t+1)$. Видим, что у нас два собственных значения 1 кратности 2 и -1 кратности 1. Значит для 1 должно быть два собственных вектора в ФСР, а для -1 – один. Найдем их.

Начнем с $\lambda = 1$. Тогда мы решаем систему $(A - E)x = 0$. То есть

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = 0$$

Отсюда ФСР состоит из двух векторов $(0, 1, 0)$ и $(1, 0, 1)$. Теперь их надо ортогонализовать и сделать длины 1. Заметим, что мы удачно выбрали векторы и они уже оказались ортогональны, осталось

лишь нормировать их. Первый уже длины 1, а второй надо разделить на длину $\sqrt{2}$. В итоге получаем ортонормированные собственные векторы $(0,1,0)$ и $(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$. Хочу обратить внимание, что это НЕ единственный вариант, можно и по-другому выбрать ортонормированный базис.
Теперь $\lambda=-1$. Мы решаем систему $(A+E)x=0$, то есть

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}x=0\mapsto\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}x=0$$

Значит ФСР будет $(-1,0,1)$. И после нормировки $(-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$. В итоге требуемые матрицы будут

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что я мог бы переставить первый и второй столбец матрицы C местами, это не имеет значения, я их поставил в таком порядке для красоты. Так же можно было бы любой из этих векторов умножить на -1, если вам хочется.

Ответ: a) $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, b) $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ □

3. Пусть задана матрица

$$A=\begin{pmatrix}13&14&4\\14&24&18\\4&18&29\end{pmatrix}$$

Найдите какую-нибудь симметричную матрицу B такую, что $B^2=A$.

Решение. (a) В начале посчитаем хар многочлен A, будет

$$\chi_A(t)=\det(tE-A)=t^3-66t^2+849t-784=(t-1)(t-49)(t-16)$$

Отсюда

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&16&0\\0&0&49\end{pmatrix}$$

Каждый корень имеет кратность 1, потому для каждого собственного значения будет по одному линейно независимому собственному вектору. Найдем их. Для $\lambda=1$ решаем $(A-E)x=0$, то есть

$$\begin{pmatrix}12&14&4\\14&23&18\\4&18&28\end{pmatrix}x=0\ \mapsto\ \begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\end{pmatrix}x=0$$

Значит $v_1=(2,-2,1)^t$. Теперь надо нормировать вектор $c_1=(2/3,-2/3,1/3)^t$. Для $\lambda=16$ решаем $(A-16E)x=0$, то есть

$$\begin{pmatrix}-3&14&4\\14&8&18\\4&18&13\end{pmatrix}x=0\ \mapsto\ \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}x=0$$

Значит $v_{16}=(-2,-1,2)^t$. Теперь надо нормировать вектор $c_1=(-2/3,-1/3,2/3)^t$. Для $\lambda=49$ решаем $(A-49E)x=0$, то есть

$$\begin{pmatrix}-36&14&4\\14&-25&18\\4&18&-20\end{pmatrix}x=0\ \mapsto\ \begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\end{pmatrix}x=0$$

Значит $v_{49}=(1,2,2)^t$. Теперь надо нормировать вектор $c_1=(1/3,2/3,2/3)^t$. Значит матрица $C=(c_1|c_{16}|c_{49})$, то есть

$$C=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

(b) Теперь рассмотрим матрицу B следующего вида

$$B = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} C^t = CSC^t$$

Вспомним, что матрица C ортогональная, то есть $C^t = C^{-1}$ и проверим, что B искомая. Действительно

$$B^2 = (CSC^t)^2 = CSC^tCSC^t = CSSC^t = CDC^t = A$$

Теперь осталось посчитать матрицу B, будет

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ответ: a) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

□

4. Найти сингулярное разложение следующих матриц

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. (a) Посчитаем SVD для матрицы $A = USV^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

В начале найдем $R = AA^t$, будет

$$R = \begin{pmatrix} 90 & 72 \\ 72 & 90 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем разложение этой матрицы в виде $R = CDC^t$, где D диагональная, а C ортогональная. Начнем с поиска хар многочлена $\chi_A(t) = \det(A - tE) = t^2 - 180t + 2916 = (t - 18)(t - 162)$. Тогда

$$D = \begin{pmatrix} 162 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S = \begin{pmatrix} \sqrt{162} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{18} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные векторы для R. Для $\lambda = 162$ решаем $(R - 162E)x = 0$, то есть

$$\begin{pmatrix} -72 & 72 \\ 72 & -72 \end{pmatrix} x = 0 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x = 0$$

Собственный вектор $v_{162} = (1, 1)^t$. После нормировки $u_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t$. Для $\lambda = 18$ решаем $(R - 18E)x = 0$, то есть

$$\begin{pmatrix} 72 & 72 \\ 72 & 72 \end{pmatrix} x = 0 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

Собственный вектор $v_{18} = (-1, 1)^t$. После нормировки $u_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t$. Значит

$$U = (u_1|u_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

У нас два ненулевых сингулярных значения, значит в матрице V мы можем найти однозначно первые два вектора. Если $V = (v_1|v_2|v_3)$, то

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} A^t u_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sigma_2} A^t u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Последний столбец V находится из условий, что он ортогонален двум другим столбцам и имеет длину 1. Решаем систему $A^t x = 0$, то есть

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} x = 0 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} x = 0$$

ФСР будет состоять из вектора $v_3' = (-2, 2, 1)^t$. А после нормировки получится $v_3 = (-2/3, 2/3, 1/3)^t$. Значит матрица V имеет вид

$$V = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Посчитаем SVD для матрицы $A = USV^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В начале найдем $R = AA^t$, будет

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем разложение этой матрицы в виде $R = CDC^t$, где D диагональная, а C ортогональная. Начнем с поиска хар многочлена $\chi_A(t) = \det(A - tE) = t^2 - 20t + 36 = (t-2)(t-18)$. Тогда

$$D = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S = \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные векторы для R. Для $\lambda = 18$ решаем $(R - 18E)x = 0$, то есть

$$\begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} x = 0 \ \mapsto \ \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x = 0$$

Собственный вектор $v_{18} = (1, 1)^t$. После нормировки $u_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t$. Для $\lambda = 2$ решаем $(R - 2E)x = 0$, то есть

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} x = 0 \ \mapsto \ \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

Собственный вектор $v_2 = (-1, 1)^t$. После нормировки $u_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t$. Значит

$$U = (u_1|u_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

У нас два ненулевых сингулярных значения, значит в матрице V мы можем найти однозначно первые два вектора. Если $V = (v_1|v_2|v_3|v_4)$, то

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} A^t u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sigma_2} A^t u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Последние два столбца V должны быть ортогональны первым двум, ортогональны между собой и иметь длину 1. Давайте выполним все эти три условия попорядку. Чтобы они были ортогональны первым двум, надо решить систему $A^t x = 0$, то есть

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x = 0 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

ФСР будет состоять из векторов $(-1, 1, 0, 0)^t$ и $(0, 0, -1, 1)^t$. Заметим, что они уже ортогональны друг другу. Осталось их сделать длины 1, получим $v_3 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)^t$ и $v_4 = (0, 0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t$. Значит матрица V имеет вид

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Еще как вариант последние два столбца можно было подобрать в виде

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ответ: a) Полное SVD

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^t$$

Усеченное SVD

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^t$$

b) Полное SVD

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^t$$

Усеченное SVD

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^t$$

$\square$

5. Пусть V – евклидово пространство и $P\colon V \to V$ – оператор проектирования на U вдоль W, где $U, W \subseteq V$. Покажите, что $\ker P^* = (\operatorname{Im} P)^\perp$ и $\ker P = (\operatorname{Im} P^*)^\perp$. Выведете отсюда, что сопряженный оператор $P^*\colon V \to V$ будет проектированием на $W^\perp$ вдоль $U^\perp$.