Олимпиада для студентов и выпускников вузов — 2012

Направление “Прикладная математика и информатика”

Профиль “Математическое моделирование”

Решения и критерии

1. (3 балла) Пусть $f(x) = \sin(x^{13} + x^{15})$. Найдите $f^{(43)}(0)$.

Решение. При $y = o(1)$ имеем $\sin y = y - y^3/6 + O(y^5)$, поэтому

$$f(x) = \sin\left(x^{13} + x^{15}\right) = \left(x^{13} + x^{15}\right) - \left(x^{13}/6 + x^{15}\right)^3 + O\left((x^{13})^5\right) =$$

$$= x^{13} + x^{15} - x^{39}/6 - x^{41}/2 - x^{43}/2 - x^{45}/6 + O(x^{65}).$$

Ввиду единственности разложения в ряд Маклорена, здесь коэффициент при x^{43} равен $f^{(43)}(0)/43!$, откуда $f^{(43)}(0) = -43!/2$.

Критерии.

Попытки угадать ответ с помощью взятия производных — 0 баллов.

Ошибки при разложении в ряд Маклорена — как правило 1 балл.

Забыли умножить на 43! — 2 балла.

2. (4 балла) Сколькими способами вершины куба можно раскрасить в восемь данных цветов, по одной вершине каждого цвета? Две раскраски считаются одинаковыми, если одну из них можно перевести в другую поворотом куба.

Решение. Группа поворотов куба изоморфна группе подстановок S_4 и насчитывает $4! = 24$ элемента. Поэтому все 8! всевозможных раскрасок вершин неподвижного куба можно разбить на классы (орбиты) по 24 элемента в каждом таким образом, что раскрашенные кубы переводятся друг в друга каким-нибудь поворотом в том и только том случае, когда они принадлежат одной орбите. Тогда количество раскрасов равно количеству орбит, то есть равно $8!/4! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

Критерии.

Понимание, что надо на что-то делить 8! — 1 балл.

Неправильно подсчитано число элементов в группе симметрий куба — 2-3 балла.

3. Граф со 100 вершинами имеет 98 вершин степени 30, и по одной вершине степеней 25 и 15.

а. (2 балла) Докажите, что вершины степеней 25 и 15 лежат в одной компоненте связности.

б. (2 балла) Обязательно ли данный граф будет связным?

Решение.

а. Общее число вершин любого графа равна половине суммы степеней всех его вершин, так что сумма стененей всех вершин любого графа — четное число. В частности, количество вершин нечетной степени в любом графе четно. Это же верно для любой компоненты связности графа из условии задачи. Значит, любая компонента связности содержт либо обе вершины нечетных степеней 25 и 15, либо ни одной из них.

б. Нет, граф не обязательно связен. Например, можно построить граф, состоящий из двух компонент связности — полного графа на 31 вершине и остальных вершин. От участников требовалось обоснование, почему вторая компронента связности может быть построена.

Критерии.

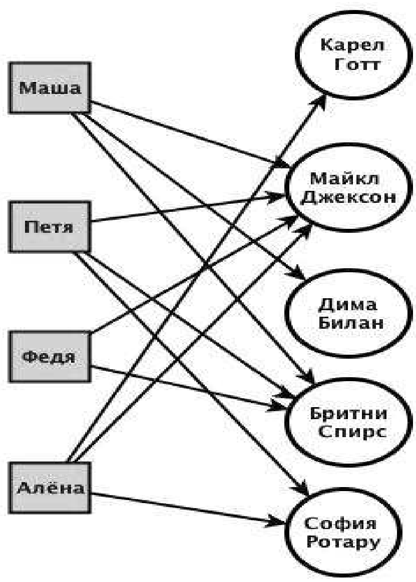
а. Только упоминание про то, что сумма степеней вершин четна — 1 балл. Если этот (или аналогичные) факт не используется, 0 баллов.

б. Указание, ка нужно распределить вершины по компонентам связности без построения этих графов или с неаккуратной попыткой построения — 1 балл.

4. На рисунке изображен двудольный граф Г, в котором V_1 есть множество меломанов, а V_2 — множество музыкальных исполнителей:

$V_1 = \{$ Маша, Петя, Федя, Алёна $\}$,

$V_2 = \{$ Карел Готт, Майкл Джексон, Дима Билан, Бритни Спирс, София Ротару $\}$.



Ребро $\{t, s\}$ между $t \in V_1$ и $s \in V_2$ принадлежит графу Г, если персона s — музыкальный кумир персоны t. Определим максимальное сообщество меломанов с похожими вкусами как полный двудольный подграф графа Г, к которому нельзя добавить вершины из V_1 и V_2, не нарушив свойство полноты. Например, такое сообщество будет образовывать двудольный подграф на множествах вершин { Маша, Петя, Федя} и {Бритни Спирс, Майкл Джексон}.

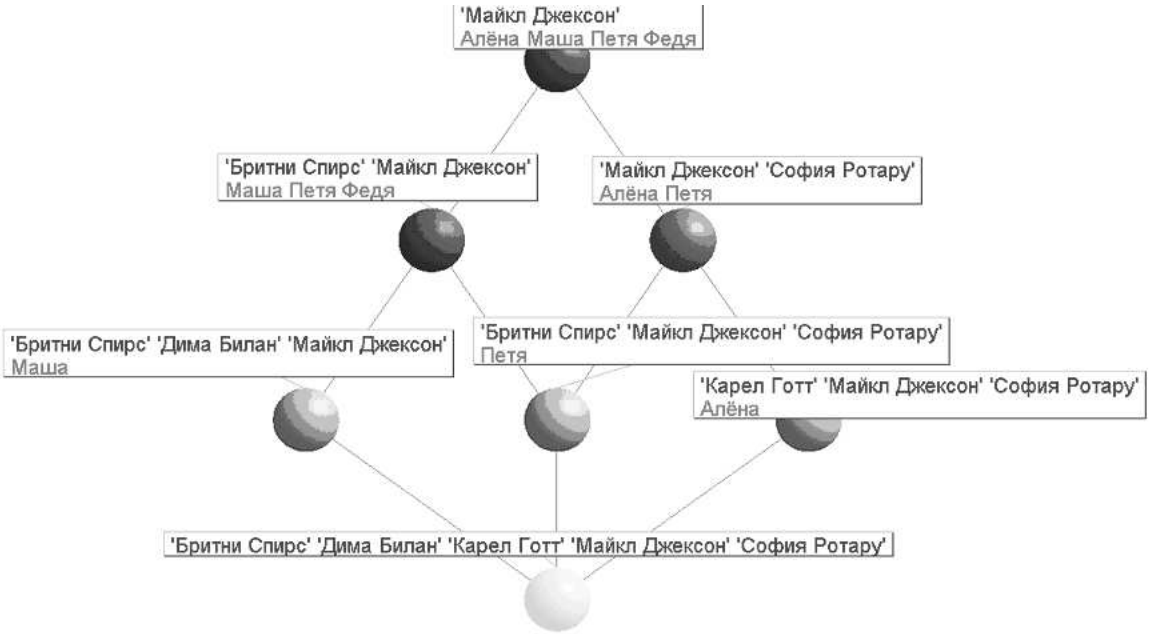
а. (1 балл) Найдите все максимальные сообщества меломанов для заданного графа.

б. (1 балл) Введите отношение быть более крупным сообществом и постройте граф этого отношения для всех найденных сообществ (для простоты вычислений элементы V_1 можно переобозначить цифрами 1, 2, 3 и 4, а элементы V_2 — первыми буквами латинского алфавита a, b, c, d и e).

в. (3 балла) Каково максимальное число таких сообществ для двудольного графа в худшем случае, если $|V_1| = n$ и $|V_2| = m$?

Решение.

а. Все сообщества показаны в виде узлов с пометками на соответствующей диаграмме порядка. Нижний узел с пустым множество поклонников можно не учитывать. Таким образом правильный ответ 6 или 7.



б. Граф порядка по отношению вложения множества меломанов (левой доли двудольного подграфа) изображен на той же диаграмме. В случае графа отношения необходимо изображать транзитивные ребра.

в. Максимальное количество сообществ может быть равно количеству всех подмножеств меломанов либо исполнителей. Фактически необходимо найти $2^{\min(|V_1|,|V_2|)}$.

Критерии.

а. 1 балл, если утеряно не более одного сообщества или одно названо неправильно, или все названы верно. Иначе 0.

б. 1 балл, если разумно введено отношение "быть более общим сообществом" и правильно изображен граф отношения. Иначе 0.

в. 3 балла, если указан закон и обснование ответа $2^{\min(|V_1|,|V_2|)}$.

2 балла, если указана идея вычисления, сделано несколько шагов, но формула не верна.

1 балл, если указана идея оценки, адекватно интерпретированы слова "в худшем случае" с точки зрения вычислительной сложности (чем больше сообществ, тем выше затраты на их вычисление).

5. Предположим, что квадратные комплексные матрицы A, B и C порядка 5 удовлетворяют условию $AB = BC$, причем C — диагональная матрица.

а. (2 балла) Докажите, что если B — невырожденная матрица, то существует базис пространства $\mathbb{C}^5$, состоящий из собственных векторов матрицы A.

б. (3 балла) Предположим, что $\operatorname{rk} B = 4$. Из каких клеток состоит жорданова форма матрицы A?

Решение.

а. Имеем $C = B^{-1}AB$, т.е. оператор A диагонализуем. Это означает, что существует базис в $\mathbb{C}^5$, состоящий из его собственных векторов.

б. Пусть $C = \mathrm{diag}\,(c_1, \ldots, c_5)$. Столбцы матриц $P = AB$ и $Q = BC$ имеют вид, соответственно, $P^i = AB^i$ и $Q^i = c_i B^i$, где B^i — i–й столбец матрицы B, $i = 1, \ldots, 5$. Следовательно, исходное уравнение $AB = BC$ равносильно системе из пяти уравнений $AB^i = c_i B^i$, или $(A - c_i E)B^i = 0$. Последнее условие означает, что векторы B^i — собственные с собственными значениями c_i. По условию, среди них четыре линейно независимых, поэтому число жордановых клетко матрицы A не меньше четырех. Это означает, что в жордановой форме матрицы A либо пять одномерных клеток (т.е. жорданова форма диагональная), либо три одномерных и одна двумерная.

С другой стороны, у любой матрицы A с не менее чем четырьмя клетками в жордановой форме есть четыре линейно независимых собственных вектора $v_1, \ldots, v_4$ с некоторыми собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$. Тогда матрицы $C = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_1)$ и B со столбцами $B^1 = B^5 = v_1, B^2 = v_2, B^3 = v_3, B^4 = v_4$ удовлетворяют условию.

Ответ: либо пять одномерных, либо три одномерных и одна двумерная с произвольным характеристическими числами.

Критерии.

а. Упоминания $C = B^{-1}AB$, с разумной, но недостаточно аккуратной аргументацией — 1 балл.

б. Решений почти не было, поэтому критерии индивидуальные.

6. Случайный вектор $\zeta = (\xi, \eta)$ распределён равномерно в квадрате $\{(x, y) | |x| + |y| \leq 2\}$.

а. (2 балла) Найдите условную плотность случайной величины η при условии $\xi = x$ и постройте её график.

б. (2 балла) Вычислите условное математическое ожидание $E(\eta|\xi = x)$ и условную дисперсию $D(\eta|\xi = x)$.

в. (1 балл) Исследуйте ξ и η на независимость.

Решение.

а) Плотность распределения случайного вектора ζ имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{если } |x| + |y| \leq 2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдём частное одномерное распределение первой компоненты вектора ζ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \int\limits_{x-2}^{2-x} \frac{1}{8}\,dy, & \text{если } 0 \leq x < 2, \\ \int\limits_{-x-2}^{x+2} \frac{1}{8}\,dy, & \text{если } -2 < x \leq 0, \\ 0, & |x| \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2 - |x|}{4}, & \text{если } |x| < 2, \\ 0, & \text{если } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Тогда для всех $x \in (-2; 2)$ условная плотность

$$f(y|\xi = x) = \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{4 - 2|x|}, & \text{если } |y| \leq 2 - |x|, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, условное распределение при $x \in (-2;2)$ является равномерным на интервале $(|x|-2; 2-|x|)$. График условной плотности является ступенчатой функцией.

б) При $x \in (-2;2)$ условное математическое ожидание

$$E(\eta|\xi = x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f(y|\xi = x)\, dy = \int\limits_{|x|-2}^{2-|x|} y \frac{1}{4-2|x|}\, dy = 0.$$

Условная дисперсия при $x \in (-2;2)$

$$D(\eta|\xi = x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y|\xi = x)\, dy - (E(\eta|\xi = x))^2 = \int\limits_{|x|-2}^{2-|x|} y^2 \frac{1}{4-2|x|}\, dy = \frac{(2-|x|)^2}{3}.$$

в) Аналогично пункту а) плотность распределения $f_\eta(y)$ второй компоненты вектора ζ имеет вид

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{2-|y|}{4}, & \text{если } |y| < 2, \\ 0, & \text{если } |y| \geq 2. \end{cases}$$

Случайные величины ξ и η являются зависимыми, так как в точках $\{(x,y) : |x|+|y| < 2\}$ нарушается равенство

$$f(x,y) = f_\xi(x) f_\eta(y).$$

7. (6 баллов) Пусть для натурального n число x_n — корень уравнени $x = \operatorname{tg} x$ из интервала $\big(\pi n; \pi(n+1)\big)$. Докажите, что

$$x_n = \pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Решение.

Пусть x_n — корень данного уравнения, лежащий в интервале $\big(\pi n; \pi(n+1)\big)$. Так как при $n \geq 1$ всегда $\operatorname{tg} x_n > 0$ и $\lim_{n\to infty} \operatorname{tg} x_n = +\infty$, то имеем $x_n = \pi n + \dfrac{\pi}{2} - z_n$, где $z_n > 0$ и $\lim_{n\to infty} z_n = 0$. Так как $x_n = \operatorname{tg} x_n = 1/\operatorname{tg} z_n$, то

$$\operatorname{tg} z_n (\pi n + \frac{\pi}{2} - z_n) = 1,$$

откуда

$$\operatorname{tg} z_n = \frac{1}{\pi n + \dfrac{\pi}{2} - z_n} = \frac{1}{\pi n} + O(1/n^2).$$

Так как $\operatorname{tg} z_n = z_n + o(z_n^2)$, то функция z_n эквивалентна при $n \to +\infty$ функции $\frac{1}{\pi n}$, откуда $o(z_n^2) = o(1/n^2)$. Тогда

$$z_n = \frac{1}{\pi n} + O(1/n^2) + o(z_n^2) = \frac{1}{\pi n} + O(1/n^2),$$

и потому

$$x_n = \pi n + \frac{\pi}{2} - z_n = \pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + O(1/n^2).$$

Критерии.

3 балла: совершены осмысленная замена переменных и предельный переход (разложение в ряд) при стремлении параметра к 0.

8. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению Релея с плотностью

$$f(x,\theta) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{2}{\theta} x e^{-x^2/\theta}, & x \geq 0. \end{cases}$$

а. (3 балла) Постройте оценку максимального правдоподобия неизвестного параметра θ.

б. (2 балла) Докажите несмещенность построенной оценки.

Решение.

а) Логарифмическая функция правдоподобия выборки имеет вид

$$\ln L(X_1, ..., X_n, \theta) = \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{2}{\theta} X_i \exp\left(-\frac{X_i^2}{\theta}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln \frac{2}{\theta} + \ln X_i - \frac{X_i^2}{\theta}\right).$$

Оценкой максимального правдоподобия называется значение $\hat{\theta}$, при котором достигается максимум функции $L(X_1, ..., X_n, \theta)$. Точка, в которой достигается максимум, является решением уравнения

$$\frac{\partial \ln L(X_1, ..., X_n, \theta)}{\partial \theta} = 0.$$

Дифференцируя логарифм функции правдоподобия и приравнивая ее к нулю, получаем уравнение

$$-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0.$$

Таким образом, $\hat{\theta} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$.

б) Оценка $\hat{\theta}$ называется несмещенной оценкой параметра θ, если $E\hat{\theta} = \theta$.

Имеем

$$E\hat{\theta} = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = EX_1^2.$$

Далее,

$$EX_1^2 = \int_0^\infty \frac{2}{\theta} x^3 e^{-\frac{x^2}{\theta}}\, dx = \theta \int_0^\infty y e^{-y}\, dy = \theta.$$

9. (6 баллов) Найдите максимум функции при заданных ограничениях:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = min\{3x_1 + x_2, 4x_2 + x_1\} \to max \\ (x_1 + 1)(x_2 + 2) \leqslant 8, \\ (x_1 - 1)(x_2 + 3) \leqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение.

Заметим, что для решения задачи достаточно рассмотреть три случая:

1) $3x_1 + x_2 = 4x_2 + x_1$

2) $3x_1 + x_2 > 4x_2 + x_1$

3) $3x_1 + x_2 < 4x_2 + x_1$

В первом случае всё просто: задача сводится к максимизации функции одной переменной, её решение::

$$x_1^{(1)} = \sqrt{13} - 2, \quad x_2^{(1)} = \frac{2}{3}(\sqrt{13} - 2), \quad f^{(1)} \approx 5.887.$$

Во втором случае, так как функции (как $x_2(x_1)$) $(x_1+1)(x_2+2) = 8$ и $(x_1-1)(x_2+3) = 4$ выпуклы, а целевая функция в данной области (!) линейна, то достаточно рассмотреть только точку их пересечения, а также точку, в которой $x_2 = 0$. Это точки:

$$x_1^{(2)} = \sqrt{17} - 2, \quad x_2^{(2)} = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}, \quad f^{(2)} \approx 4.369.$$

$$x_1^{(3)} = \frac{7}{3}, \quad x_2^{(3)} = 0, \quad f^{(3)} \approx 2.3333.$$

В третьем случае, по тем же причинам, достаточно рассмотреть точку в которой $x_1 = 0$.

$$x_1^{(4)} = 0, \quad x_2^{(4)} = 6, \quad f^{(4)} = 6.$$

Сравнивая эти четыре точки, находим, что в (4)-ой точке достигается максимум.

Критерии.

Решение начинается со взятия производной или с предположения, что функция линейна — 0 баллов.

Корректно раскрыт минимум — 1 балл.

В целом верный ход решения, но пропущены некоторые точки — 3 балла.

Нет обоснования, почему рассмотрены конкретные точки — 4-5 баллов.

10. (7 баллов) Известно, что число дуг любого простого пути в ориентированном графе G не превосходит 4. Сколько цветов понадобится для такой раскраски вершин графа G, чтобы вершины одного цвета не были смежны?

Ответ обоснуйте, т.е. докажите, что этого количества цветов всегда достаточно для раскраски, и приведите пример графа G с заданным свойством, который невозможно раскрасить в меньшее количество цветов.

Ответ. 5.

Решение. Докажем, что пяти цветов достаточно. Построим даг (ациклический орграф), убирая минимальное число дуг (стрелок). В даге присваиваем метку каждой вершине, равную длине максимального выходящего из этой вершины пути.

Очевидно, все вершины помечены числами от 0 до 4. Докажем, что это дает раскраску графа в не более чем пять цветов. Пусть в исходном орграфе G есть дуга (x, y). Достаточно показать, что x и y получат разные метки. Возможны два случая:

1. (x, y) принадлежит дагу. Тогда метка x больше метки y по методу присвоения меток вершинам дага.

2. (x, y) не входит в даг. Тогда метка y больше метки x, так как из вхождения (x, y) в контур орграфа G следует, что в даге существует путь от y к x.

Утверждение доказано.

Рассмотрим теперь граф с вершинами v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 и дугами (v_i, v_j) для всех $1 \leq i < j \leq 5$. Очевидно, такой граф удовлетворяет условию задачи, причем его нельзя раскрасить менее чем в 5 цветов, т.к. все пять его вершин являются смежными. Тем самым, пять — наименьшее возможное количество цветов.

Критерии.

3 балла — приведен контрпример, показывающий необходимость по крайней мере 5 цветов.

Независимо от этого

2-3 балла: выделен ациклический подграф или проведены эквивалентные рассуждения, позволяющие разделить граф на слои.

4 балла — корректно доказана достаточность без доказательства необходимости.