Семинар 1

С решениями

Задачи:

1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:
$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

   Решение. Улучшенный ступенчатый вид
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Решения в краткой и полной форме
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   □

2. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:
$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

   Решение. Стандартный ход решения такой: прибавим все строки к первой
$$\begin{pmatrix} 3+\lambda & 3+\lambda & 3+\lambda & 1+\lambda+\lambda^2 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

   Если $\lambda = -3$, то первое уравнение имеет вид $0 = 7$, значит нет решения. Теперь можно считать, что $\lambda \neq -3$. Поделим на него, получим
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda+3} \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

   Вычтем первую строку из всех остальных
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda+3} \\ 0 & \lambda & 0 & \frac{2\lambda-1}{\lambda+3} \\ 0 & 0 & \lambda & \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda+3} \end{pmatrix}$$

   Если $\lambda = 0$, то второе и третье уравнения имеют вид $0 = -1/3$, а значит нет решения. Теперь можем считать, что $\lambda \neq 0$. Теперь разделим на λ последние два уравнения и вычтем их из первого, получим
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-2}{\lambda(\lambda+3)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)} \end{pmatrix}$$

   Ответ При $\lambda = 0, -3$ решений нет, при всех остальных решение имеет вид
$$x_1 = -\frac{\lambda^2-2}{\lambda(\lambda+3)},\ x_2 = \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)},\ x_3 = \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$$

   □

3. Пусть матрица $A \in \mathrm{M}_{5\,6}(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для системы $Ay = 0$, где $y \in \mathbb{R}^6$, найти количество главных переменных при любом значении $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Чтобы решить задачу нам надо для каждого возможного x привести матрицу к ступенчатому виду и посмотреть на количество ступенек. Заметим, что матрица симметрична относительно середины. То есть, если рассмотрим только левую половину матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 1 & x \\ x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

и приведем ее к ступенчатому виду, то и вся матрица будет в ступенчатом виде. Теперь рассмотрим случай $x = 1$ и видм, что матрица становится

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

А значит ступенчатый вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

И у нас только одна главная переменная.

Теперь, когда $x \neq 1$ давайте покажем, что всегда будет 3 ступеньки. Кстати, главных переменных не больше чем столбцов, а столбцов всего 3.

Если $x \neq -1$, то сложив первую и вторую строку, мы получим

$$\begin{pmatrix} 1+x & 1+x & 1+x \\ x & 1 & x \\ x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

и первая строка не нулевая. Значит можно поделить на $1 + x$. И получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & x \\ x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

А теперь вычтем первую строку из всех

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x-1 & 0 & x-1 \\ x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix}$$

Так как у нас в том числе $x \neq 1$, то можно поделить на $x - 1$ и заодно переставить нижние три строки наверх, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

А теперь с помощью первых трех строк занулим последние две. Вот и получили 3 тупеньки.

Осталось рассмотреть случай $x = -1$. В этом случае у нас матрица целиком состоит из чисел и мы проверяем, что она приводится к 3 ступенькам.

Ответ При $x = 1$ одна главная переменная, при $x \neq 1$ три главные переменные.

□

4. Пусть матрица $J(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет следующий вид[1]

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

   (a) Найти все $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такие, что $AJ(\lambda) = J(\lambda)A$.

   (b) Доказать, что для любого k верна формула

$$J(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} & \dots & C_k^{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \dots & C_k^{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C_k^1\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

   где $C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!}$, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

5. Найти матрицу обратную к данной:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $A^m = 0$ для некоторого m.

   (a) Показать, что $E + A$ и $E - A$ обратимы, где $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – единичная матрица (указание: найти явный вид обратной матрицы).

   (b) Пусть $f \in \mathbb{R}[x]$ – многочлен такой, что $f(0) \neq 0$. Показать, что $f(A)$ обратима.

[1] Такая матрица называется Жордановой клеткой.