

Вариант 1

Задача 1

Маша любит саморазвитие. Для этого она покупает книги с собранием цитатами великих людей. Если цитата ей нравится, она выкладывает ее в свой инстаграм. Маша пришла в магазин с целью купить очередную книгу. Она нашла $n + 1$ новую книгу с цитатами. В каждой книге n цитат. Всего в книгах $\frac{n(n+1)}{2}$ цитат, которые понравятся Маше. Цитаты распределены по следующему правилу:

- Есть одна книга, в которой нет ни одной подходящей Маше цитаты.
- Есть одна книга с одной хорошей цитатой.
- Есть одна книга, в которой ровно две хороших цитаты.
- ...
- Есть ровно одна книга, в которой все цитаты - хорошие.

Маша наугад выбрала книгу и прочитала случайную цитату. Цитата ей понравилась и Маша случайно выбрала еще одну цитату из этой же книги. Какова вероятность, что и вторая цитата ей понравится.

Задача 2

Из множества $\{1, \dots, 2n\}$ случайным образом выбирается $n + 1$ элемент. С какой вероятностью среди них найдутся два таких элемента, что один делится на другой?

Задача 3

Пусть задан простой ориентированный граф $G(V, E)$ и $s, t \in V$. Обозначим через α длину минимального пути из s в t . Покажите, что максимальное число путей из s в t , не имеющих общих ребер, не превосходит $\left(\frac{|V|}{\alpha}\right)^2$

Задача 4

Вычислите $\text{rank}(A)$, если матрица $A \in R^{n \times n}$ ($n \geq 2$) задана поэлементно $A_{ij} = \sin i + \sin j$.

Задача 5

Постройте алгоритм, который получает на вход дерево и за линейное время определяет, есть ли в нем совершенное паросочетание, то есть множество ребер, такое, что каждая вершина графа встречается ровно в одном ребре множества.

Задача 6

Решить дифференциальное уравнение $y'' + y = f(x)$.