Семинар 5

С решениями

Общая информация:

- Напомню, что стандартным скалярным произведением на $\mathbb{R}^n$ называется $(x, y) = x^t y$.
- Через $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ обозначается пространство многочленов степени не более n, то есть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n} = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$.

Задачи:

1. Опишите все ортогональные матрицы порядка n, состоящие из неотрицательных элементов.

   Решение. **Ответ:** Это матрицы перестановок. $\square$

2. В пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ задана квадратичная форма $Q(f) = f(1)f(2)$. Найдите ее сигнатуру (число положительных, отрицательных и нулевых чисел на диагонали в диагональном виде).

   Решение. **Ответ:** Одно положительное, одно отрицательное, все остальные нули. $\square$

3. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Методом Грама-Шмидта ортогонализуйте базис $1, x, x^2, x^3$.

   Решение. Давайте пройдемся по алгоритму. В начале положим

   $$v_1 = 1;$$

   Теперь по формулам

   $$v_2 = x - \frac{(x, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = -\frac{1}{2} + x$$

   Теперь следующий вектор

   $$v_3 = x^2 - \frac{(x^2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(x^2, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = \frac{1}{6} - x + x^2$$

   И последний вектор

   $$v_4 = x^3 - \frac{(x^3, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(x^3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 - \frac{(x^3, v_3)}{(v_3, v_3)} v_3 = -\frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2 + x^3$$

   Ответ: $1, -\frac{1}{2} + x, \frac{1}{6} - x + x^2, -\frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2 + x^3$. $\square$

4. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в пространстве $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением, где

   $$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Решение. Найдем векторы сторон

   $$AB = B - A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad BC = C - B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad AC = C - A = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем длины сторон по формуле $|v| = \sqrt{(v,v)}$, где $(v,v) = x^t v$ – стандартное скалярное произведение и увидим, что все длины равны 6, то есть $|AB| = |BC| = |AC| = 6$. Получился равносторонний треугольник. Но в равностороннем треугольнике мы знаем, что все углы равны между собой и равны 60°.

Ответ: $|AB| = |BC| = |AC| = 6$, все углы 60°.

□

5. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^4$ – векторное подпространство заданное следующим образом $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, где

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\4\\3\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\5\\5\\8\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}-2\\6\\-2\\24\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}2\\-4\\3\\-19\end{pmatrix}$$

Задайте это подпространство в виде $U = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid Ay = 0\}$ для некоторой матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,4}(\mathbb{R})$. (Подумайте с чего эта задача дается на тему про скалярные произведения).

6. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задано стандартное скалярное произведение $(x,y) = x^t y$ и пусть заданы три вектора:

$$p_1 = \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix}-1\\4\\4\end{pmatrix} \text{ и } p_3 = \begin{pmatrix}6\\8\\0\end{pmatrix}$$

Пусть L – гиперплоскость, проходящая через точки p_1, p_2, p_3. Выясните на каком расстоянии от гиперповерхности L лежат следующие векторы

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} \text{ и } w_2 = \begin{pmatrix}3\\8\\3\end{pmatrix}$$

По одну ли сторону от гиперповерхности L они лежат?

Решение. (a) В качестве точки p подойдет любая точка с поверхности L. Возьмем, например, в качестве такой $p = p_1$. Плоскость L получается из подпространства натянутого на векторы $p_2 - p_1$ и $p_3 - p_1$ сдвигом на точку $p = p_1$. Тогда вектор v ищется как вектор ортогональные этим. То есть

$$A = (p_2 - p_1 | p_3 - p_1) = \begin{pmatrix}-2 & 5\\0 & 4\\4 & 0\end{pmatrix}$$

Решаем систему $A^t x = 0$, получаем вектор $v = (4, -5, 2)$.

(b) Чтобы проверить с какой стороны от поверхности находятся векторы и посчитать расстояние до них, надо сдвинуть начало координат в точку p. А именно, надо заменить векторы w_1 и w_2 на $w_1 - p$ и $w_2 - p$, получим

$$v_1 = w_1 - p = \begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}, \quad v_2 = w_2 - p = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$$

Теперь посчитаем

$$\frac{(v_1, v)}{|v|} = \sqrt{5} \text{ и } \frac{(v_2, v)}{|v|} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Модули этих чисел равны расстояниям до L, а знаки показывают, что они находятся по разные стороны от поверхности. Первое число положительное, значит оно находится по ту сторону от L куда показывает вектор v, второй вектор находится с противоположной стороны.

Ответ: a) $v = (4, -5, 2)$, $p = (1, 4, 0)$, b) расстояние до w_1 есть $\sqrt{5}$, расстояние до w_2 есть $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Вектор w_1 находится по ту сторону от L, куда смотрит v, а w_2 находится с противоположной стороны. □

7. Существует ли скалярное произведение на пространстве матриц $n \times n$ ($n > 1$), относительно которого матрица из всех единиц была бы ортогональна любой верхнетреугольной матрице?