

## Вариант 2

### Задача 1

Студент и преподаватель играют в игру: они подбрасывают монету до тех пор, пока не встретится последовательность РРО (победа преподавателя) или РОО (победа студента). Является ли игра честной (вероятность выигрыша каждого игрока равна 0.5)?

### Задача 2

Из множества  $\{1, \dots, 2n\}$  случайным образом выбирается  $n+1$  элемент. С какой вероятностью среди них найдутся два взаимно простых числа?

### Задача 3

Пусть задан ориентированный граф  $G(V, E)$  и  $s, t \in V$ . Покажите, что минимальное число ребер в пути из  $s$  в  $t$  совпадает с максимальным значением  $\phi(t) - \phi(s)$  среди всех функций  $\phi : V \rightarrow \mathbb{Z}$ , таких, что выполнено:  $\phi(w) - \phi(v) \leq 1$  для всех ребер  $(v, w) \in E$ .

### Задача 4

Пусть  $A$  - некоторая невырожденная  $n \times n$  матрица. Покажите, что для любой вырожденной  $n \times n$  матрицы  $X$  выполнено:

$$\|A - X\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 \geq 1$$

где  $\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

### Задача 5

Предложите алгоритм, который получает на вход список из  $n$  натуральных чисел  $d_1, \dots, d_n$  и за полиномиальное время сообщает существует ли ненаправленный граф  $G(V, E)$  ( $|V| = n$ ), степени вершин которого равны соответственно  $d_1, \dots, d_n$ . Граф не может содержать петлю или нескольких ребер между одной и той же парой вершин.

### Задача 6

Доказать неравенство

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{e} < \int_0^1 \frac{xe^{-x}}{1+x^2} dx < 1 - \frac{2}{e}$$