Экзамен Ozon Masters 13 июля 2019 Вариант 2

Задача 1 Вычислить интеграл $\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$

Задача 2 Решие систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{y} + y = 0 \\ 3\ddot{x} + 5x + \dot{y} + 3y = 0 \end{cases}$$

Задача 3 Компания "Рога и копыта"занимается продажей детсих товаров. Одним из самых популярных являются памперсы "Сахара которые поставляет компания "Боль и уныние". Для того, чтобы продать памперсы, компания "Рога и копыта"должна сначала приобрести их у "Боль и уныние". После приобретения памперсы хранятся на складе компании "Рога и копыта объем которого равен L. При этом каждая доставка товара на склад обходится в P рублей (и это не считая себестоимости самих памперсов), что приносит огромную боль и ввергает в уныние владельца "Рогов и копыт". Поэтому он хочет, чтобы доставок было как можно меньше. Однако хранение тоже стоит денег, а именно c рублей за один день хранения одного памперса.

Владелец "Рога и копыта"хочет устроить корпоратив для сотрудников и закрыть магазин на неделю празднования. До корпоратива осталось n дней. При этом владелец благодаря провидению и экселю может абсолютно точно предсказать сколько памперсов буде продано в каждый из оставшихся дней. Предложите алгоритм, который решает, в какие дни нужно заказывать доставку памперсов из "Боль и уныние"и объемы заказа для минимизации общих издержек.

Задача 4 Пусть задан двудольный граф $G(V, E)$. *Паросочетанием* называется любое подмножество ребер $M \subset E$, такое, что любые два ребра из M не имеют общих вершин (можно сормулировать и так: любая вершина из V может принадлежать не более чем одному ребру из M). *Вершинным покрытием* графа G называется любое подмножество вершин $U \subset V$, такое, что любое ребро из E содержит хотя бы в одну из вершин U.

Пусть $\nu(G) := \max\{|M| \quad |M$ - паросочетание$\}$,

$\tau(G) := \min\{|U| \quad |U$ - вершинное покрытие$\}$.

Докажите, что $\nu(G) = \tau(G)$

Задача 5 Пусть A - квадратная матрица $n \times n$, при этом для всех i и j выполнено $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, $a_{ij} \geq 0$. Найдите максимальное собственное значение матрицы $\ln(A)$.

Задача 6 Пусть X - неотрицательная случайная величина с конечным числом значений. Докажите, что выполняются неравенства:

$$E[X] \leq \left(E[X^2]\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(E[X^3]\right)^{\frac{1}{3}} \leq \dots$$