Олимпиада для студентов и выпускников вузов -2014 г.

Демонстрационный вариант задания и методические рекомендации по направлению «Прикладная математика»

Профиль
«Системы управления и обработки информации в инженерии»

Время выполнения задания – 240 мин.
Задание включает 5 задач.

Задача 1.(20 баллов)

(дифференциальные уравнения)

Найти решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -0.5x(t) + y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -0.75x(t) - 2.5y(t) + 1 \end{cases}$$

при $x(t_0) = 1,\ \ y(t_0) = -0.5$, на интервале $t \in [t_0, t_f],\ t_0 = 0,\ t_f = 5$.

Определить устойчиво ли решение и, если решение устойчиво, определить значения переменных x и y при $t \to \infty$.

Рекомендация: *см.решения задач олимпиады 2013 года.*

Задача 2.(20 баллов)

(теория управления)

Объект управления описывается дифференциальным уравнением

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 3x(t)$.

Найти математическую модель импульсной переходной функции объекта.

Решение:

Исходному дифференциальному уравнению соответствует передаточная функция

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}.$$

Согласно определению, импульсная переходная функция есть реакция динамической системы на воздействие в виде дельта функции, изображение которой по Лапласу равно единице. Исходя из сказанного, запишем:

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}1 = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

Используя таблицу с изображениями Лапласа, переведем полученное решение из пространства изображений в пространство оригиналов:

$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t},\ t > 0$.

Задача 3.(10 балов)

(линейная алгебра)

Линейный оператор φ в трехмерном пространстве $\Re^3$ задан матрицей

A= $\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}\right)$ в стандартном базисе $\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ пространства $\Re^3$.

Число $\lambda_1 = -3$ является собственным числом этого оператора.

Найти остальные собственные числа λ_2, λ_3. Для каждого из собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ найти по одному собственному вектору $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, соответственно. Доказать, что $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ образуют базис в $\Re^3$, и найти матрицу данного оператора в базисе $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$.

Ответ:

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 9, \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Задача 4.(20 балов)

(шифрование и криптография)

Одна секретная организация, располагающая своими агентами по всему миру, планирует перейти на новый способ передачи секретных сообщений. Для связи между агентами и завербованными ими информаторами разработана специальная система числовой кодировки всех возможных сообщений, которые могут потребоваться. Для передачи какого-либо сообщения информатору достаточно сообщить агенту его номер, так что сам текст сообщения даже не будет передаваться. Сообщения кодируются числами подряд – с 1 и далее, но каждый агент может сообщить своим информаторам, что к номерам сообщений следует прибавлять какое-то конкретное число, одинаковое для всего перечня секретных сообщения (корректирующее число). Для передачи номера сообщения информатор должен оставить в условленном месте или передать определенному человеку сумму в местных банкнотах, равную номеру сообщения.

Организация планирует направить своих агентов в две страны. В первой имеют хождение банкноты достоинством 5, 7 и 12 единиц в местной валюте, в другой – только 7 и 10 единиц. Для расчетов между собой жители этих стран также пользуются монетами, но агенты могут использовать для связи лишь банкноты.

1. Возможно ли наладить указанную систему передачи секретных сообщений в обеих странах?
2. Начиная с какого номера сообщения информатор сможет передать агенту номер любого сообщения (другими словами, какое число следует прибавить к номерам всех сообщений) в условиях денежной системы первой страны?
3. Каким будет такое же число для второй страны?
4. Возможно ли наладить указанную систему передачи сообщений в каждой из стран, если в них произойдут денежные реформы, в результате которых из оборота будет изъята часть существующих номиналов банкнот?
5. Изменится ли в таком случае корректирующее число для каждой из данных стран?

Решение:

Для того, чтобы наладить указанную систему передачи, нужно, чтобы любые числа, начиная с некоторого, были представимы в виде линейной комбинации заданных номиналов. Это число без 1 и будет корректирующим числом. Проверить, возможно ли *такое, нетрудно, если есть очевидный способ набрать указанными номиналами 10. Тогда требуется лишь проверить, что можно получить сочетанием различных номиналов числа, оканчивающиеся на 1, 2, …, 9. Максимальное из таких чисел без 1 будет искомым.*

1. *Проверим это для заданных условий. Для первой страны 10 получается как 5+5. Условием того, что можно получить числа, оканчивающиеся на все цифры, является взаимная простота некоторого номинала с 10. В данном случае таким номиналом является 7 – значит, среди чисел, кратных 7, можно обнаружить числа, оканчивающиеся на все возможные цифры. Для второй страны имеются номиналы 7 и 10. Выше указано, что их достаточно для реализации описанной системы.*
2. *Для получения чисел, оканчивающихся на все возможные цифры, можно воспользоваться дополнительными номиналами для снижения максимального числа. 1: 21 = 7*3, 2: 42 = 7*6, 3: 63 = 7*9, 4: 14 = 7*2, 5: 35 = 7*5, 6: 56 = 7*8, 7: 7, 8: 28 = 7*4, 9: 49 = 7*7. Максимум равен 63. Попробуем получить числа, оканчивающиеся на 3, меньшие 63. Поскольку 12 = 7+5, а 7 = 5+2, получить можно только некоторые из чисел, представимых в виде 5*a+2*b, где a и b – натуральные числа. При этом a должно быть не меньше b. Для числа 3 такое представление невозможно. 13 = 5+2*4, т.е. не представимо. 23 = 3*5+2*4, т.е. также не представимо. 33 = 5*5+2*4, следовательно, оно может быть представлено в виде 7*4+5. Или 7*3+12. Тогда максимумом становится число 56. Условия перебора те же. 6 – не представимо, 16 = 5*2+2*3, 26 = 5*4+2*3 => 26=3*7 +5 = 2*7 + 12. Имеем числа: {21, 42, 33, 14, 35, 26, 7, 28, 49}. Продолжая оптимизацию, имеем: 9 = 5+2*2, 19 = 3*5 + 2*2 => 19 = 12+7; {21, 42,* ***33****, 14, 35,* ***26****, 7, 28,* ***19****}; 2 = 5*0 + 2; 12 = 12; {21,* ***12****,* ***33****, 14, 35,* ***26****, 7, 28,* ***19****}; 5: 5; {21,* ***12****,* ***33****, 14,* ***5****,* ***26****, 7, 28,* ***19****}; Дальнейшая оптимизация невозможна, поскольку число, оканчивающееся на 3, меньшее 33 получено быть не может – проверено перебором выше. Ответ: число 32.*
3. *Поскольку дополнительных номиналов для данной страны не имеется, таким числом будет 62.*
4. *Для первой страны можно отказаться от номинала 12. Для второй – набор номиналов минимален.*
5. *Для первой страны при отмене номинала 12 корректирующее число не изменится.*

- Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С., Черемушкин А.В. Основы криптографии. – М.: Гелиос АРВ, 2005 г.
- Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля, Т1, Т2. М.: Мир, 1988

Задача 5.(30 баллов)

(операционные системы, системное программирование)

Чему будут равны значения операндов *a, b, c, d, n, k, m* после выполнения нижеприведенного фрагмента программы на языке программирования С в UNIX – подобной операционной системе и почему ?

```
#include <stdio.h>
```

```
#include <stdlib.h>
#include <unistd.h>
#include <sys/types.h>
int main()
{ int a=0, b=1, c=2, d=3, n=4, k=5, m=6, p[2];
char buf[80];
pipe(p);
if( fork()==0)
{m= creat("a.txt", 0664);
a=write(4, "Привет участникам олимпиады\n", 17);
close( p[0]);
b=dup(3);
exit(0);
}
else
{wait(&c);
d=read(3, buf, 7);
n=read(p[0], buf, 9);
k=dup2(a, b);
}
return 0;
}
```

Рекомендуемая литература:

- Стивене Р.У., Раго С.А. UNIX. Профессиональное программирование. 2-е издание. – СПб.: Символ-Плюс, 2007 г.