Экзамен Ozon Masters 13 июля 2019 Вариант 1

Задача 1 Вычислить интеграл

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx$$

Задача 2 Решие систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

Задача 3 Предположим, имеется решетчатый граф G размера $n \times n$ (квадратная решетка $n \times n$). Каждой вершине графа v приписано некоторое число x_v. Будем считать, что все приписанные веса различны. Вершина v называется локальным минимумом графа, если x_v меньше, чем веса всех вершин, смежных с v. Предполагая, что веса вершин заранее неизвестны (например, чтобы узнать вес какой-то вершины v нужно *вызвать* некоторую функцию f), предложите алгоритм, который за $O(n)$ вызовов находит локальный минимум графа.

Задача 4 Пусть задан граф $G(V, E)$ без изолированных вершин. *Паросочетанием* называется любое подмножество ребер $M \subset E$, такое, что любые два ребра из M не имеют общих вершин (можно сормулировать и так: любая вершина из V может принадлежать не более чем одному ребру из M).

Реберным покрытием графа G называется любое подмножество ребер $F \subset E$, такое, что любая вершина из V содержится хотя бы в одном ребре из F.

Пусть $\nu(G) := \max\{|M| \quad |M \text{ - паросочетание}\}$,

$\rho(G) := \min\{|F| \quad |F \text{ - реберное покрытие}\}$.

Докажите, что $\nu(G) + \rho(G) = |V|$

Задача 5 Пусть A - квадратная матрица $n \times n$, $S_j = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$. Докажите, что $\sum_{j=1}^{n} S_j^{-1} |a_{jj}| \le rk(A)$, где слагаемые, соответствующие нулевым значениям S_j, можно заменить нулями.

Задача 6 Пусть X - случайная величина с конечным числом значений, при этом все они положительны.

Покажите, что

$$E\left[\frac{1}{X}\right] \ge \frac{1}{E[X]}$$