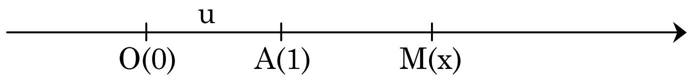
ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

CAPITOLUL I. LIMITE DE FUNCŢII

1 STRUCTURA DE ORDINE A MULȚIMII $\mathbb{R}$

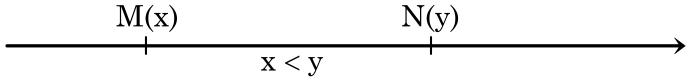
Axa numerelor reale (axa numerică) reprezintă o dreaptă (d) pe care s-a stabilit o origine O, un segment unitate şi un sens de parcurs, numit sensul pozitiv.

Mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este pusă în corespondență bijectivă cu axa numerică. Fiecărui număr $x \in \mathbb{R}$ i se asociază un unic punct M de pe dreapta (d) pentru care numărul real x reprezintă abscisa acestuia şi se scrie $M(x)$.



În acest mod mulțimea numerelor reale se poate identifica cu axa numerică. Fiecare punct al dreptei este identificat cu numărul real care reprezintă abscisa sa. Astfel, dacă $x \in \mathbb{R}$, se poate spune „punctul x“, înțelegându-se prin aceasta „punctul de pe dreaptă care are abscisa x“.

Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ sunt două numere reale, iar $M(x), N(y)$ sunt punctele asociate acestora pe axa numerică vom spune că **x este mai mic decât y** şi se scrie $x < y$, dacă pe axa numerică punctul M este situat în stânga lui N.



După cum este cunoscut, între numerele reale x şi y există doar una din relațiile: $x < y$, $x = y$ sau $y < x$ (proprietatea de trihotomie).

Din proprietatea de trihotomie rezultă că dacă numărul real x nu este mai mare decât numărul real y, atunci x este mai mic sau egal cu y, şi vom scrie $x \le y$.

Aşadar, $x \le y$ dacă şi numai dacă $x < y$ sau $x = y$.

Relația $\le$ se numeşte **relație de ordine** pe $\mathbb{R}$ şi are proprietățile:

▣ **P1. Proprietatea de reflexivitate** Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $x \le x$.

▣ **P2. Proprietatea de antisimetrie** Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \le y$, $y \le x$, atunci $x = y$.

▣ **P3. Proprietatea de tranzitivitate** Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi $x \le y$, $y \le z$, atunci $x \le z$.

▣ **P4. Proprietatea de ordine totală**
Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, atunci fie $x \le y$, fie $y \le x$.

▣ **P5. Proprietatea de compatibilitate cu operațiile de adunare şi înmulțire pe $\mathbb{R}$:**
- Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \le y$, atunci $x + a \le y + a$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$.
- Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \le y$, atunci $ax \le ay$, $\forall\ a \in [0, +\infty)$.

În legătură cu relația de ordine $x \le y$ pe $\mathbb{R}$ menționăm şi următoarele rezultate:

▣ **P6. Axioma lui Arhimede**
Pentru oricare număr $x \in \mathbb{R}$ există un număr întreg unic $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $n \le x < n + 1$.
Numărul $n \in \mathbb{Z}$, cu această proprietate se numeşte **partea întreagă a lui x** şi se notează cu $[x]$.

▣ **P7. Proprietatea de densitate a mulțimii $\mathbb{Q}$**
Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, atunci există $r \in \mathbb{Q}$, astfel încât $x < r < y$.
Proprietatea P7 arată că mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale este mulțime densă în $\mathbb{R}$.

❷ INTERVALE DE NUMERE REALE

Noțiunea de interval de numere reale a fost introdusă în clasele anterioare în corelare cu reprezentarea pe axă a numerelor reale. Astfel, s-au definit următoarele tipuri de intervale de numere reale cu ajutorul relațiilor „$\le$“ şi „$<$“.

INTERVALE MĂRGINITE

Fie $a, b \in \mathbb{R}, a \le b$ numere reale şi $A(a)$, $B(b)$ punctele asociate acestora pe axa numerică. Se definesc următoarele mulțimi de numere reale.

1. Intervalul închis cu extremitățile a şi b:
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$

2. Intervalul deschis cu extremitățile a şi b:
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Imaginile geometrice pe axa numerică a intervalelor $[a, b]$, respectiv (a, b) sunt segmentul închis $[AB]$, respectiv segmentul deschis (AB), (figura 1).

Figura 1

3. Intervalele semideschise cu extremitățile a şi b:

$[a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ (închis la stânga, deschis la dreapta)

$(a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ (deschis la stânga, închis la dreapta)

Imaginile geometrice pe axa numerică a intervalelor $[a,\ b)$, respectiv $(a,\ b]$ sunt mulțimile de puncte $(AB) \cup \{A\}$, respectiv $(AB) \cup \{B\}$, (figura 2).

Figura 2

INTERVALE NEMĂRGINITE

Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $A(a)$ punctul corespunzător pe axa numerică.

Atunci:

1. $[a,\ +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$ se numeşte **interval închis la stânga şi nemărginit la dreapta**.

2. $(a,\ +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ se numeşte **interval deschis la stânga şi nemărginit la dreapta**.

Imaginile geometrice ale intervalelor $[a,\ +\infty)$, respectiv $(a,\ +\infty)$ sunt reprezentate pe axa reală de semidreapta închisă $[AX$, respectiv semidreapta deschisă $(AX$, cu originea în A şi care conțin punctul X, (figura 3).

Figura 3

3. $(-\infty,\ a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$ se numeşte **interval închis la dreapta şi nemărginit la stânga**.

4. $(-\infty,\ a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ se numeşte **interval deschis la dreapta şi nemărginit la stânga**.

Imaginile geometrice ale intervalelor $(-\infty,\ a]$, respectiv $(-\infty,\ a)$ sunt reprezentate de semidreapta închisă $[AX$, respectiv semidreapta deschisă $(AX$, cu originea în A şi care conțin punctul X, (figura 4).

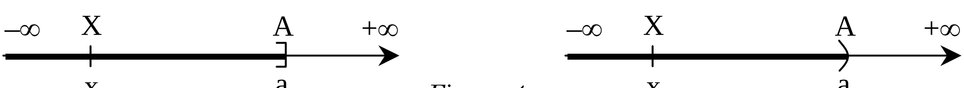


Figura 4

INTERVALE SIMETRICE

Fie a un număr real, $a \in (0, +\infty)$. Un interval de forma $[-a, a]$ sau $(-a, a)$ se numeşte **interval simetric**. Imaginea geometrică pe axa numerică a intervalului simetric este un segment cu mijlocul situat în origine, (figura 5).

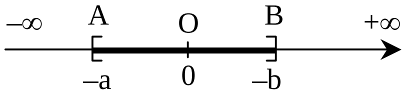
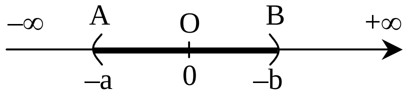


Figura 5



Dacă $x \in [-a, a]$, rezultă că $-a \le x \le a$ şi se obține $|x| \le a$.

Aşadar, $[-a, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le a\}$ şi $(-a, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\}$.

Afirmația $x \notin [-a, a]$ este echivalentă cu $(x < -a \text{ sau } x > a)$ care, cu ajutorul modulului, se scrie $|x| > a$.

Rezultă că $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > a\}$.

De asemenea $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge a\}$.

➲ OBSERVAȚIE

- Pentru $a = +\infty$, intervalul $(-a, a) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ este interval simetric.

◢ **Temă**

1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Să se arate că I este un interval simetric dacă şi numai dacă $\forall\ x \in I$ rezultă $-x \in I$.

2. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime cu proprietatea că $\forall\ x \in A \Rightarrow -x \in A$. Rezultă că A este interval simetric?

INTERVALE CENTRATE ÎNTR-UN PUNCT

Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $r \in (0, +\infty)$. Un interval de forma $[a - r, a + r]$ sau $(a - r, a + r)$ se numeşte **interval centrat în a**.

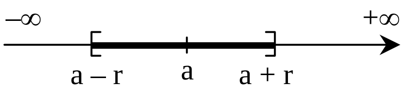
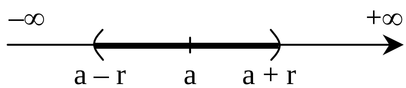


Figura 6



Relația $x \in [a - r, a + r]$ se scrie succesiv $a - r \le x \le a + r$ sau $-r \le x - a \le r$ sau $|x - a| \le r$.

Aşadar, $[a-r, a+r]=\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \le r\}$ şi

$(a-r, a+r)=\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}$.

Intersecția şi reuniunea a două intervale centrate în a sunt intervale centrate în a.

☞ ***Exemplu***

Intervalele $(1, 3)$ şi $(0, 4)$ sunt centrate în $a = 2$ şi au intersecția $(1, 3)$, iar reuniunea $(0, 4)$, ambele centrate în 2.

◢ **Temă**

1. Fie I_1, I_2 două intervale centrate în $a \in \mathbb{R}$, diferite. Să se arate că $I_1 \cap I_2, I_1 \cup I_2 \in \{I_1, I_2\}$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $I_1, I_2, ..., I_n$ intervale centrate în $a \in \mathbb{R}$. Să se arate că reuniunea şi intersecția lor sunt intervale centrate în a.

▣ **TEOREMA 1**

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $I \subset \mathbb{R}$ este un interval deschis care conține pe x_0, atunci există un interval centrat în x_0, inclus în I.

<u>*Demonstrație*</u>

Figura 7

Fie $I=(a, b)$.

Notăm cu $\varepsilon = \min\{b-x_0, x_0-a\}$.

Atunci intervalul $I_\varepsilon = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset (a, b)$ şi este centrat în x_0. ■

❸ MULȚIMI MĂRGINITE

3.1. MAJORANȚI, MINORANȚI

Fie $A \subset \mathbb{R}$, o mulțime nevidă de numere reale.

❖ **<u>DEFINIȚII</u>**

- Numărul real m se numeşte **minorant** al mulțimii A, dacă $m \le a, \ \forall\, a \in A$.
- Numărul real M se numeşte **majorant** al mulțimii A, dacă $a \le M, \ \forall\, a \in A$.

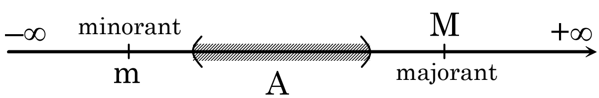


Figura 1

❖ **<u>DEFINIȚII</u>**

- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte **minorată** sau **mărginită inferior** dacă are cel puțin un minorant.

- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte **majorată** sau **mărginită superior** dacă are cel puțin un majorant.
- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte **mărginită** dacă este mărginită inferior şi mărginită superior.

▣ TEOREMA 2

Mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ este mulțime mărginită dacă şi numai dacă există $M \in (0, +\infty)$, astfel încât $|x| \le M, \forall\ x \in A$.

<u>*Demonstrație*</u>

Dacă $|x| \le M, \forall\ x \in A$, atunci $-M \le x \le M, \forall\ x \in A$, deci $-M$ este minorant pentru A, iar M este majorant pentru A. Aşadar, mulțimea A este mulțime mărginită.

Reciproc

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a \le x \le b, \forall\ x \in A$. Luând $M = \max\{|a|, |b|\}$ se obține că $|x| \le M, \forall\ x \in A$. ■

Exerciții şi probleme rezolvate

☒ **1.** Să se determine mulțimea minoranților şi mulțimea majoranților pentru mulțimile:

a) $A = [0, 1]$; **b)** $A = (0, 1)$; **c)** $A = (-1, 2) \cup [3, 5]$.

<u>*Soluție*</u>

a), **b)** Mulțimea minoranților este $M_1 = (-\infty, 0]$, iar mulțimea majoranților este $M_2 = [1, +\infty)$, figura 2.

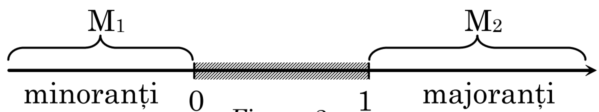


Figura 2

c) Pentru mulțimea A, mulțimea minoranților este $M_1 = (-\infty, -1]$, iar mulțimea majoranților este $M_2 = [5, +\infty)$, figura 3.

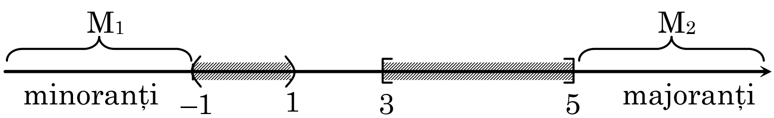


Figura 3

☒ **2.** Să se arate că mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale este minorată, dar nu este majorată.

<u>*Soluție*</u>

Un minorant al mulțimii $\mathbb{N}$ este numărul 0, sau oricare număr real negativ.

Să arătăm că nici un număr real nu poate fi majorant pentru mulțimea $\mathbb{N}$. Pentru demonstrație folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există $M \in \mathbb{R}_+$ majorant al mulțimii $\mathbb{N}$. Atunci $n \leq M, \forall\ n \in \mathbb{N}$.

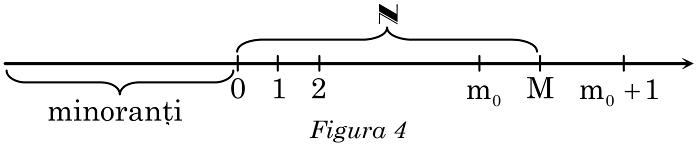


Figura 4

Luând $n_0 = [M]$, se observă că $M < n_0 + 1$ şi cum $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ se obține o contradicție cu faptul că M este majorant (figura 4). Aşadar mulțimea $\mathbb{N}$ este nemajorată.

☒ **3.** Să se determine mulțimea minoranților şi mulțimea majoranților pentru mulțimile:

a) $A = [0, +\infty)$; **b)** $A = \mathbb{Z}$; **c)** $A = \mathbb{Q}$; **d)** $A = \mathbb{R}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Mulțimea minoranților este $M_1 = (-\infty, 0]$. Mulțimea A nu este majorată, deoarece $\mathbb{N} \subset A$, iar $\mathbb{N}$ nu este majorată.

b) Deoarece $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, mulțimea $\mathbb{Z}$ este nemajorată. Dar mulțimea $\mathbb{Z}$ este şi neminorată deoarece, dacă presupunem că există $m \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că $m \leq x, \forall\ x \in \mathbb{Z}$, ar trebui ca $-x \leq -m$, deci mulțimea $A_1 = \{-x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$ este majorată. Contradicție.

c), d) Avem $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ şi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, deci $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$ sunt neminorate şi nemajorate.

❖ <u>DEFINIȚII</u>

- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte **nemărginită inferior** dacă nu are nici un minorant.
- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte **nemărginită superior** dacă nu are nici un majorant.

☞ <u>***Exemple***</u>

- Mulțimea $\mathbb{N}$ este nemărginită superior.
- Mulțimile $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sunt nemărginite atât superior, cât şi inferior.

➲ <u>OBSERVAȚII</u>

- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ este nemărginită superior dacă, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$, există cel puțin un element $a \in A$, astfel încât $x < a$.
- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ este nemărginită inferior dacă pentru oricare număr real $x \in \mathbb{R}$, există cel puțin un element $a \in A$, astfel încât $a < x$.

3.2. MARGINILE UNEI MULȚIMI DE NUMERE REALE

Fie $A \subset \mathbb{R}$, o mulțime nevidă.

❖ **DEFINIȚII**

- Numărul real m se numeşte **margine inferioară** a mulțimii $A \subset \mathbb{R}$, dacă este minorant al mulțimii A şi este cel mai mare minorant al mulțimii A.
- Numărul real M se numeşte **margine superioară** a mulțimii $A \subset \mathbb{R}$ dacă este majorant al mulțimii A şi este cel mai mic majorant al mulțimii A.

Marginea inferioară a mulțimii A se notează $\inf(A)$, iar marginea superioară a mulțimii A se notează $\sup(A)$.

☞ ***Exemplu***

Fie $A = (0, 1)$.

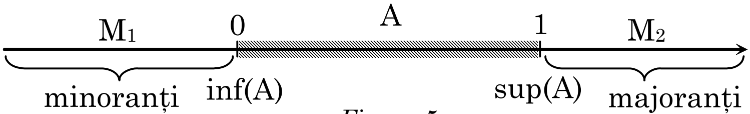


Figura 5

Mulțimea $M_1 = (-\infty, 0]$ este mulțimea minoranților lui A şi $\inf(A) = 0$, iar mulțimea $M_2 = [1, +\infty)$ este mulțimea majoranților şi $\sup(A) = 1$.

Referitor la marginile unei mulțimi vom accepta următoarea axiomă.

▣ **AXIOMA LUI CANTOR**

Orice mulțime de numere reale mărginită inferior admite o margine inferioară.

Georg CANTOR (1845-1918) matematician german

Este creatorul teoriei mulțimilor.

A creat noțiunile de mulțime deschisă, mulțime închisă, punct de acumulare etc.

➲ **OBSERVAȚII**

- Axioma lui Cantor permite să afirmăm că oricare mulțime mărginită are atât margine inferioară, cât şi margine superioară.
- Dacă marginile unei mulțimi există, acestea sunt unice.

Într-adevăr, dacă $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ sunt marginile inferioare ale mulțimii $A \subset \mathbb{R}$, din relațiile $m_1 < m_2$ sau $m_2 < m_1$ s-ar contrazice faptul că m_1 şi m_2 ar fi cei mai mari minoranți ai mulțimii A. Aşadar, dacă există, $\inf(A)$ este unică. Analog se arată faptul că $\sup(A)$ este unică.

3.3. MARGINILE UNEI MULȚIMI NEMĂRGINITE. DREAPTA ÎNCHEIATĂ

Pentru o abordare unitară a rezultatelor de analiză matematică, pe lângă numerele reale se folosesc simbolurile $+\infty$ (plus infinit), respectiv $-\infty$ (minus infinit), numite **numere infinite**.

Mulțimea formată din mulțimea numerelor reale împreună cu numerele infinite $+\infty$ şi $-\infty$, se numeşte **dreapta încheiată** şi se notează $\overline{\mathbb{R}}$. Aşadar $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulțime nemărginită inferior, atunci ea nu are nici un minorant număr real. În acest caz vom considera că $\inf(A) = -\infty$.

Analog, dacă mulțime $A \subset \mathbb{R}$ este nemărginită superior vom considera că $\sup(A) = +\infty$.

➲ OBSERVAȚII

- $\sup(\mathbb{N}) = +\infty$, $\inf(\mathbb{Z}) = -\infty$, $\sup(\mathbb{Z}) = +\infty$, $\inf(\mathbb{Q}) = -\infty$, $\sup(\mathbb{Q}) = +\infty$, $\inf(\mathbb{R}) = -\infty$, $\sup(\mathbb{R}) = +\infty$.

  Referitor la simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$ se acceptă următoarele reguli de calcul:
  - $a + (+\infty) = +\infty$ şi $(+\infty) + a = +\infty$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$;
  - $a + (-\infty) = -\infty$ şi $(-\infty) + a = -\infty$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$;
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ şi $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;
  - $a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, \text{ dacă } a > 0 \\ -\infty, \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$; • $a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, \text{ dacă } a > 0 \\ +\infty, \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$;
  - $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$; $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$;
  - $\dfrac{a}{+\infty} = 0$ şi $\dfrac{a}{-\infty} = 0$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$; • $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$; $(+\infty)^{-\infty} = 0$.

  Referitor la relațiile de ordine se acceptă că:
  $-\infty < +\infty$; $a < +\infty$ şi $-\infty < a$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$.

  Nu se atribuie nici un sens expresiilor:
  $(+\infty) - (+\infty)$; $(-\infty) - (-\infty)$; $0 \cdot (\pm\infty)$; $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $1^{+\infty}$; $1^{-\infty}$ şi $(\pm\infty)^0$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se scrie cu ajutorul relației de inegalitate:**
a) $x \in [3, 7]$; **b)** $x \in (-2, 3]$;
c) $x \in (-2, +\infty)$; **d)** $x \in (-\infty, 3]$.

E2. **Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care intervalele date sunt intervale simetrice:**
a) $(-3, x)$; **b)** $(x+1, 5)$; **c)** $(2x-1, 7)$;
d) $(-x^2, 2x-1)$; **e)** $\left(\dfrac{x-3}{x-1}, \dfrac{2x}{x+2}\right)$.

E3. Se consideră intervalul
$$I_n = \left[1+\frac{1}{n},\ 5-\frac{1}{n}\right],\ n \in \mathbb{N}^*.$$
Să se determine:
a) $I_3 \cap I_4$ şi $I_3 \setminus I_4$; b) $I_n \cap \mathbb{N}$.

E4. Să se determine în funcție de $x \in \mathbb{R}$, intersecțiile de intervale:
a) $I_1 = (-1, 3)$ şi $I_2 = (x, x+1)$;
b) $I_1 = (-3, x+1)$ şi $I_2 = (x-2, 5)$;
c) $I_1 = \left[\frac{x}{2}, \frac{3x-1}{4}\right]$ şi $I_2 = \left[\frac{x+1}{3}, \frac{x+5}{2}\right]$.

E5. Să se determine mulțimile de minoranți şi de majoranți pentru mulțimile:
a) $(-1, 3]$; b) $A = (-3, +\infty)$;
c) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \le 4\right\}$;
d) $A = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in (0, 1)\right\}$;
e) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x^2-4} < 0\right\}$.

E6. Să se arate că următoarele mulțimi sunt mărginite:
a) $A = \left\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$;
b) $A = \left\{\frac{\sqrt{n}}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$;
c) $A = \left\{\frac{x+1}{x-3} \mid x \in (-\infty, -1)\right\}$;
d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \le 2\right\}$;
e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid |x| + |x-1| \le 1\right\}$.

E7. Să se arate că următoarele mulțimi sunt nemărginite:
a) $A = \left\{n^2+1 \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$;
b) $A = \left\{(-1)^n \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$;
c) $A = \left\{\operatorname{tg} x \mid x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$;
d) $A = \left\{\frac{(-1)^n \cdot n^2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

APROFUNDARE

A1. Pentru care valori ale lui $x \in \mathbb{R}$ următoarele intervale sunt mulțimi nevide:
a) $I = [-2x+1, 1+3x]$;
b) $I = \left[\frac{x}{x+1}, \frac{1}{x}\right]$; c) $I = \left[\frac{x-1}{x+1}, \frac{2}{x+2}\right]$?

A2. Să se determine intersecția intervalelor:
$$I_1 = \left[\frac{x}{x+1}, \frac{1}{x}\right],\ I_2 = \left[\frac{x-1}{x+1}, \frac{2}{x+2}\right].$$

A3. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) Orice mulțime finită este mărginită.
b) Orice submulțime a unei mulțimi mărginite este mulțime mărginită.
c) Dacă mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ este mărginită superior, atunci orice submulțime a sa este mărginită inferior.

A4. Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ două mulțimi mărginite. Să se arate că mulțimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ sunt mulțimi mărginite.

A5. Fie $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Să se arate că $\inf(A) = 0$ şi $\sup(A) = 1$.

A6. Să se arate că dacă $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^*\right\}$, atunci $\inf(A) = -1$ şi $\sup(A) = 1$.

A7. Să se determine $\inf(A)$, $\sup(A)$ pentru mulțimile:
a) $A = \left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$;
b) $A = \left\{x^2 + x \mid x \in (-1, 1)\right\}$;
c) $A = \left\{\frac{2x}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$;

d) $A = \left(-\infty, \sqrt{2}\right)$;

e) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \left|x - \sqrt{2}\right| \le \sqrt{3}\right\}$;

f) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2^x + 4^x \le 6\right\}$;

g) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le 3^x + 9^x \le 90\right\}$.

DEZVOLTARE

D1. **Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă şi $m \in \overline{\mathbb{R}}$. Să se arate că $m = \inf(A)$, dacă:**

a) $m \le x, \forall x \in A$;

b) $\forall \varepsilon > 0$, **există un element** $x \in A$, **astfel încât** $x \le m + \varepsilon$.

D2. **Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă şi $M \in \overline{\mathbb{R}}$. Să se arate că $M = \sup(A)$ dacă:**

a) $x \le M, \forall x \in A$;

b) $\forall \varepsilon > 0$, **există un element** $x \in A$, **astfel încât** $x \ge M - \varepsilon$.

D3. **Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ două mulțimi nevide şi mărginite. Să se arate că:**

a) $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$;

b) $\sup(A \cup B) =$

$= \max(\sup(A), \sup(B))$.

D4. **Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $B = \{-x \mid x \in A\}$. Atunci:**

a) $\sup(B) = -\inf(A)$;

b) $\inf(B) = -\sup(A)$.

4 VECINĂTĂȚILE UNUI PUNCT PE AXA REALĂ

❖ DEFINIȚII

- Mulțimea $V \subset \mathbb{R}$ se numeşte **vecinătate a punctului $x_0 \in \mathbb{R}$**, dacă există un interval deschis I, astfel încât $x_0 \in I \subset V$.
- Mulțimea $V \subset \mathbb{R}$ se numeşte **vecinătate a lui $+\infty$** dacă există un interval deschis $I = (a, +\infty)$, astfel încât $I \subset V$.
- Mulțimea $V \subset \mathbb{R}$ se numeşte **vecinătate a lui $-\infty$,** dacă există un interval deschis $I = (-\infty, a)$, astfel încât $I \subset V$.

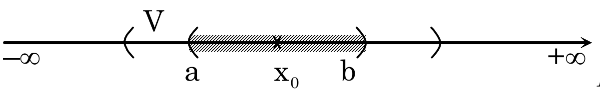


Figura 1

$x_0 \in (a, b) \subset V$

☞ ***Exemple***

• Mulțimile $(-1, 1), [-1, 1], (-1, +\infty), (-\infty, 2)$ sunt vecinătăți pentru $x = 0$.

• Mulțimile $(-2, 3) \cup \{4\}, (-2, 3) \cup (4, 8)$ sunt vecinătăți pentru $x = 1$, dar nu sunt vecinătăți pentru $x = 4$.

➲ OBSERVAȚII

1. Un punct $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ are oricât de multe vecinătăți. Vom nota mulțimea vecinătăților lui x_0 cu $\mathscr{V}(x_0)$.

2. Orice interval deschis (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, este vecinătate pentru oricare $x_0 \in (a, b)$.

3. Intervalele centrate în $x_0 \in \mathbb{R}$ sunt vecinătăți pentru x_0. Ele se numesc **vecinătăți centrate** ale punctului x_0.

4. Fiecărei vecinătăți $V \in \mathscr{V}(x_0)$ îi corespunde o vecinătate centrată în x_0, $V_\varepsilon = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ astfel încât $V_\varepsilon \subset V$. De aceea, atunci când se lucrează cu vecinătățile lui x_0 este suficient să se considere numai vecinătăți centrate.

PROPRIETĂŢI ALE VECINĂTĂŢILOR UNUI PUNCT $x_0 \in \mathbb{R}$

P1. $x_0 \in V$, pentru oricare $V \in \mathscr{V}(x_0)$.

P2. Dacă $V_1, V_2 \in \mathscr{V}(x_0)$, atunci $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{V}(x_0)$.

P3. Dacă $V \in \mathscr{V}(x_0)$ şi $V \subset U$, atunci $U \in \mathscr{V}(x_0)$.

P4. Dacă $V \in \mathscr{V}(x_0)$, atunci există $U \in \mathscr{V}(x_0)$, astfel încât V este vecinătate pentru oricare $y \in U$.

➲ OBSERVAȚIE

- Intersecția unui număr finit de vecinătăți ale lui $x_0 \in \mathbb{R}$ este vecinătate a lui x_0, dar intersecția unui număr infinit de vecinătăți ale lui x_0 poate să nu mai fie vecinătate a lui x_0.

☞ ***Exemple***

1. Fie $V_n = \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] \in \mathscr{V}(0)$, $n \geq 1$. Avem $\bigcap\limits_{n \geq 1} V_n = [-1, 1]$, care este vecinătate pentru $x = 0$.

2. Fie $V_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in \mathscr{V}(0)$, $n \geq 1$. Rezultă că $\bigcap\limits_{n \geq 1} V_n = \{0\}$, care nu este vecinătate a lui $x = 0$.

> ▣ **TEOREMA 3 (teorema de separare)**
> Fie $x, y \in \mathbb{R}$ puncte diferite de pe dreapta reală. Atunci există vecinătățile $V \in \mathscr{V}(x)$ şi $U \in \mathscr{V}(y)$, astfel încât $V \cap U = \varnothing$.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie $x < y$. Intervalul $I = (x, y)$ este mulțime nevidă, deci există cel puțin un punct $c \in (x, y)$. Luând $V \in \mathscr{V}(x)$, $V = (-\infty, c)$ şi $U \in \mathscr{V}(y)$, $U = (c, +\infty)$, vom avea $V \cap U = \varnothing$, (figura 2). ■

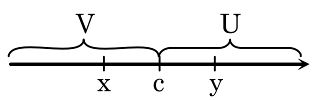


Figura 2

PUNCTE DE ACUMULARE ALE UNEI MULŢIMI

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă.

❖ DEFINIȚII

- Numărul $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte **punct de acumulare al mulțimii A**, dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, rezultă că $A \cap (V \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$.
- Un punct $x_0 \in A$ se numeşte **punct izolat al mulțimii A** dacă nu este punct de acumulare al mulțimii A.

Mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii A se notează A'. O mulțime poate să aibă mai multe puncte de acumulare sau nici unul.

☞ ***Exemple***

1. Fie $A = (0, 1)$. Atunci $A' = [0, 1]$.

2. Dacă $A = \{1\}$, atunci $A' = \varnothing$.

3. Orice mulțime finită nu are puncte de acumulare. Într-adevăr, dacă $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, din proprietatea de separare a lui $\mathbb{R}$, există vecinătăți care separă fiecare element al mulțimii A de celelalte elemente. Intersecția unei asemenea vecinătăți cu mulțimea A este formată doar dintr-un singur element, deci $A \cap (V_i \setminus \{a_i\}) = \varnothing$, unde $V_i \in \mathcal{V}(a_i)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

4. Pentru $A = \mathbb{Q}$ avem $A' = \overline{\mathbb{R}}$, deoarece în orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, se găsesc o infinitate de numere raționale.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se precizeze care dintre următoarele mulțimi sunt vecinătăți ale lui 0:
a) $V_1 = (-1, 3)$; **b)** $V_2 = (-1, 0) \cup (0, 1)$;
c) $V_3 = (0, +\infty)$; **d)** $V_4 = (-4, 0)$;
e) $V_5 = \mathbb{Z}$; **f)** $V_6 = \mathbb{Q}$; **g)** $V_7 = \mathbb{R}$;
h) $V_8 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

E2. Care dintre următoarele mulțimi sunt vecinătăți pentru $+\infty$:
a) $V_1 = (-1, +\infty)$, $V_2 = [3, +\infty)$, $V_3 = (1, 3) \cup (10, +\infty)$, $V_4 = (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$;
b) $V_5 = \mathbb{N}$, $V_6 = \mathbb{Z}$, $V_7 = \mathbb{Q}$, $V_8 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $V_9 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

E3. Fie $A = (2, 3)$. Să se arate că mulțimea A este vecinătate pentru fiecare punct al ei.

E4. Să se determine punctele de acumulare în $\overline{\mathbb{R}}$ pentru mulțimile:
a) $A = \{0, 2\}$;
b) $A = [0, 1)$;
c) $A = [-3, 5]$;
d) $A = (-\infty, 1)$;
e) $A = (-1, 3) \cup (4, 5)$;
f) $A = (4, 8) \setminus \{5\}$;
g) $A = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$.

APROFUNDARE

A1. Să se demonstreze proprietățile P_2, P_3, P_4 ale vecinătăților.

A2. Să se arate că următoarele mulțimi $A \subset \mathbb{R}$ nu sunt vecinătăți pentru oricare punct $x_0 \in A$:

a) $A = \mathbb{N}$; b) $A = \mathbb{Z}$; c) $A = \mathbb{Q}$;

d) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

A3. Să se arate că următoarele mulțimi sunt vecinătăți pentru fiecare punct al lor:

a) $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; b) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;

c) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; d) $A = \bigcup\limits_{n\geq 1}\left(0, \frac{n}{n+1}\right)$;

e) $\bigcap\limits_{n\geq 1}\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) \setminus \{0, 1\}$.

A4. Să se arate că un interval $I \subset \mathbb{R}$ este deschis dacă şi numai dacă este vecinătate pentru oricare punct al său.

A5. Să se determine punctele de acumulare în $\overline{\mathbb{R}}$ pentru mulțimile:

a) $A = \mathbb{N}$; b) $A = \mathbb{Z}$; c) $A = \mathbb{Q}$;

d) $A = \mathbb{R}$; e) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; f) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

A6. Să se determine punctele de acumulare în $\overline{\mathbb{R}}$ pentru mulțimile:

a) $A = \left\{\frac{1}{2n} + \sin\frac{n\pi}{4} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

b) $A = \left\{\frac{n}{n+1} + \cos\frac{n\pi}{6} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

c) $A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

DEZVOLTARE

D1. Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ două mulțimi nevide şi A', B' mulțimile punctelor de acumulare. Să se arate că:

a) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$;

b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

c) $(A \cap B)' = A' \cap B'$.

5 FUNCȚII REALE DE VARIABILĂ REALĂ

Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ două mulțimi de numere reale.

O funcție $f: A \to B$ se numeşte **funcție reală de variabilă reală** sau **funcție numerică**.

În clasele anterioare, au fost studiate diferite funcții numerice sub aspectul proprietăților generale ale monotoniei, paritate-imparitate, periodicitate, mărginire, injectivitate, surjectivitate, convexitate-concavitate şi altele. Astfel, aceste proprietăți au fost verificate în studiul câtorva funcții numerice particulare cum sunt: funcția de gradul I, funcția de gradul II, funcția putere cu exponent natural, funcția radical, funcția exponențială, funcția logaritmică şi funcțiile trigonometrice.

Analiza matematică va continua studiul funcțiilor numerice sub aspectul noilor proprietăți sau al găsirii de noi metode de verificare a proprietăților generale.

Acest studiu va pune în evidență câteva clase de funcții în care se vor regăsi şi funcțiile particulare studiate. Ele vor servi ca suport pentru lecturarea şi desprinderea unor proprietăți şi vor constitui exemple sau contraexemple pentru ilustrarea anumitor noțiuni.

De aceea, în acest paragraf se va face o actualizare sumară a elementelor esențiale legate de funcțiile numerice particulare cunoscute, precum şi unele completări.

FUNCŢII POLINOMIALE

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, unde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $n\in\mathbb{N}$, se numeşte **funcție polinomială de gradul n**.

Cazuri particulare

a) Pentru $n=0$ se obține funcția constantă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_0$. Aceasta este funcție monotonă pe $\mathbb{R}$ şi mărginită.

b) Pentru $n=1$ se obține funcția de gradul I, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_1x+a_0$. Funcția de gradul I este strict monotonă pe $\mathbb{R}$, bijectivă, inversabilă şi nemărginită. Aceste proprietăți se pot desprinde şi din imaginea geometrică a graficului său, reprezentat de o dreaptă.

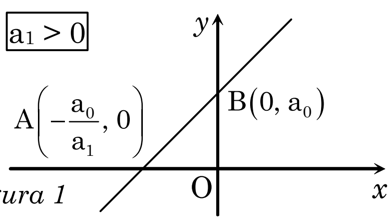


Figura 1

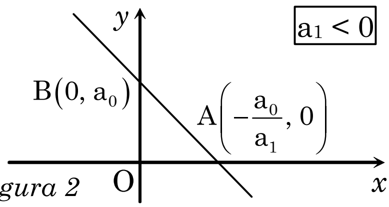


Figura 2

c) Pentru $n=2$ se obține funcția polinomială de gradul II, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$. Imaginea geometrică a graficului funcției de gradul II se numeşte **parabolă**.

d) Funcția putere cu exponent natural, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n$ este un alt caz particular de funcție polinomială de gradul n.

Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ proprietățile funcției polinomiale de gradul n depind de paritatea numărului $n\in\mathbb{N}$ şi se vor întâlni pe parcursul studierii funcțiilor numerice.

FUNCŢII RAŢIONALE

Fie $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții polinomiale de gradul n, respectiv de gradul m şi $D=\{x\in\mathbb{R} \mid g(x)=0\}$.

Funcția $h:\mathbb{R}\setminus D\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ se numeşte **funcție rațională**.

Cazuri particulare

• Atunci când funcția polinomială g este constantă, funcția rațională h este funcție polinomială.

Aşadar, funcțiile polinomiale sunt cazuri particulare de funcții raționale.

• Dacă $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=1$, $g(x)=x^n$, $n \in \mathbb{N}$, atunci se obține funcția rațională $h: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $h(x)=\frac{1}{x^n}=x^{-n}$ (funcția putere cu exponent întreg negativ).

FUNCŢIA PUTERE CU EXPONENT REAL

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ un număr real.

Funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^\alpha$ se numeşte **funcția putere cu exponent real**.

Cazuri particulare

• Pentru $\alpha = 0$, se obține funcția constantă $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=1$.

• Pentru $\alpha \in \mathbb{N}$, se obține funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^n$ care este o restricție la intervalul $(0, +\infty)$ a funcției putere cu exponent natural.

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

• Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ sau $\alpha = \frac{1}{3}$ se obțin funcțiile $f, g:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$, respectiv $g(x)=\sqrt[3]{x}$, adică funcția radical de ordinul 2, respectiv 3.

Mai general, pentru $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ se obține funcția radical de ordinul n, $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$. Funcția radical de ordinul n este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$, este concavă şi nemărginită, (figura 3).

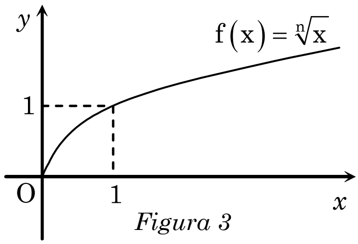


Figura 3

FUNCŢIA RADICAL PENTRU n IMPAR

Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, unde $n \in \mathbb{N}$, este număr impar, $n > 1$, se numeşte **funcția radical pentru n impar**. Imaginea geometrică a graficului ei este redată în figura 4.

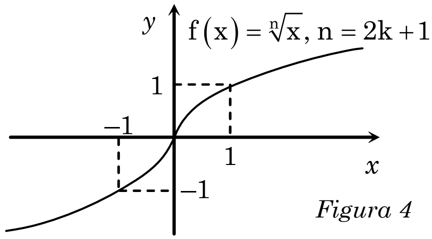


Figura 4

Lectura grafică confirmă următoarele proprietăți:

• este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;

• este convexă pe $(-\infty, 0]$ şi este concavă pe $[0, +\infty)$;

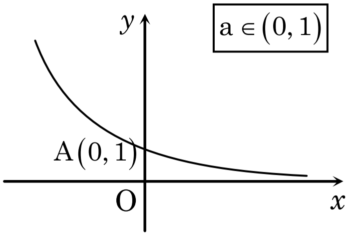
• este bijectivă;

• este impară.

FUNCŢIA EXPONENŢIALĂ

Funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, se numeşte **funcție exponențială**.

Imaginea geometrică a graficului ei este redată în figura 5, pentru $a\in(0,1)$, respectiv pentru $a\in(1,+\infty)$.



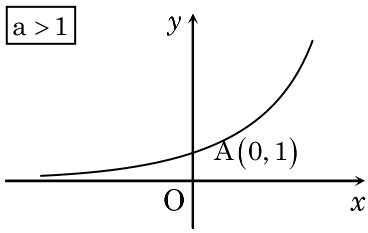


Figura 5

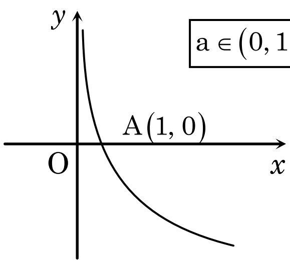
Lecturând graficul funcției exponențiale se confirmă următoarele proprietăți generale:

- funcția este bijectivă;
- funcția este inversabilă;
- funcția este convexă;
- funcția este pozitivă $(a^x>0,\ x\in\mathbb{R})$;
- funcția este nemărginită;
- funcția este strict monotonă pe $\mathbb{R}$ şi anume:
  - dacă $a\in(0,1)$, este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$;
  - dacă $a\in(1,+\infty)$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- axa Ox este asimptotă orizontală a curbei exponențiale.

FUNCŢIA LOGARITMICĂ

Funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, se numeşte **funcție logaritmică**.

Curba logaritmică este redată în figura 6 pentru cazurile $a\in(0,1)$ şi $a\in(1,+\infty)$.



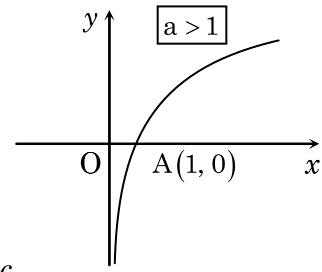


Figura 6

Lecturând graficul funcției logaritmice se confirmă următoarele proprietăți generale:

- este funcție bijectivă;
- este funcție inversabilă;
- nu este funcție mărginită;
- Oy este asimptotă verticală a graficului;
- este funcție monotonă pe $(0, +\infty)$ şi anume:

  – dacă $a \in (0, 1)$ este strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$;

  – dacă $a \in (1, +\infty)$ este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$.

- este funcție convexă pe $(0, +\infty)$ dacă $a \in (0, 1)$ şi este funcție concavă pe $(0, +\infty)$ dacă $a \in (1, +\infty)$.

FUNCŢIILE TRIGONOMETRICE SINUS ŞI COSINUS

Funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, reprezintă funcțiile trigonometrice sinus, respectiv cosinus.

Proprietăți ale funcțiilor sinus şi cosinus:

- sunt funcții mărginite: $\sin x \in [-1, 1]$ şi $\cos x \in [-1, 1]$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;
- sunt funcții periodice cu perioada principală $T = 2\pi$:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x,\ \cos(x + 2\pi) = \cos x,\ \forall\ x \in \mathbb{R};$$

- funcția sinus este funcție impară, iar funcția cosinus este funcție pară:

$$\sin(-x) = -\sin x,\ \cos(-x) = \cos x,\ \forall\ x \in \mathbb{R};$$

- sunt funcții surjective şi nu sunt funcții injective;

Curbele reprezentative ale graficelor funcțiilor sinus, respectiv cosinus sunt redate pe intervalul $[0, 2\pi]$ în figura 7.

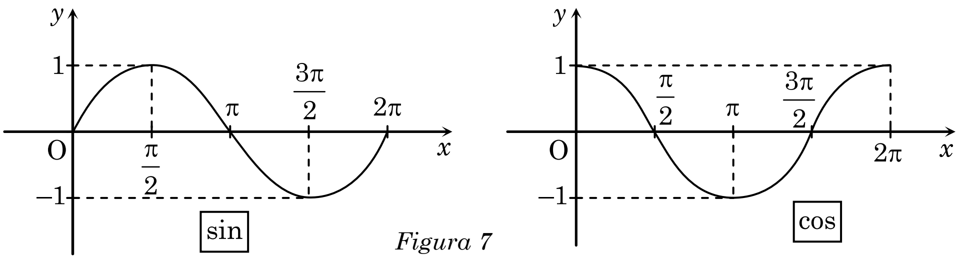


Figura 7

FUNCŢIILE TANGENTĂ ŞI COTANGENTĂ

Se consideră funcțiile:

$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ – funcția tangentă;

$g : \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{ctg} x$ – funcția cotangentă.

Proprietăți ale funcțiilor tangentă şi cotangentă:

• sunt funcții periodice cu perioada principală $T = \pi$:

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

• sunt funcții impare:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

• sunt funcții surjective şi nu sunt funcții injective;

• sunt funcții nemărginite;

• nu sunt funcții strict monotone pe domeniul de existență;

• sunt strict monotone pe orice interval din domeniul de existență;

Curbele reprezentative ale graficelor celor două funcții sunt redate în figura 8 pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, respectiv $(0, \pi)$.

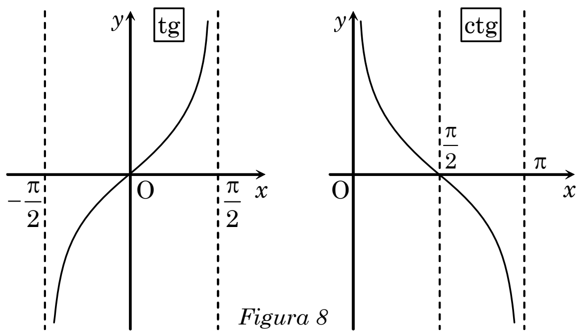


Figura 8

FUNCŢIILE ARCSINUS ŞI ARCCOSINUS

Funcțiile $f:[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin x$, şi $g:[-1, 1] \to [0, \pi]$, $g(x) = \arccos x$, reprezintă funcțiile arcsinus şi arccosinus.

Curbele reprezentative ale graficelor funcțiilor arcsinus şi arccosinus sunt redate în figura 9.

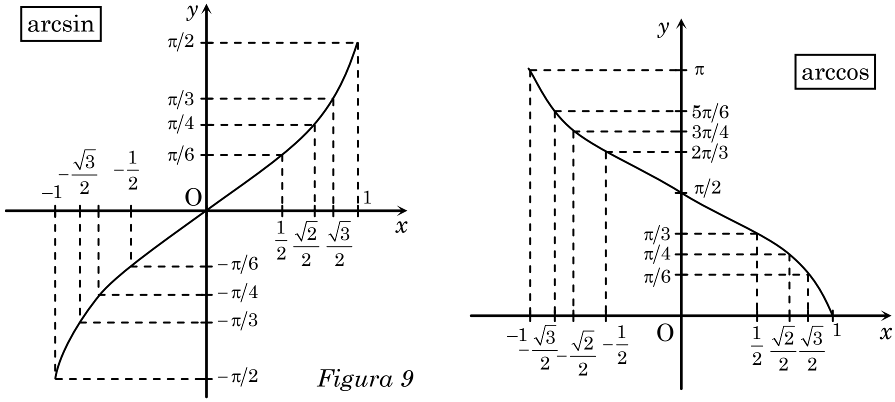


Figura 9

Proprietăți ale funcțiilor arcsin, arccos:

- sunt funcții bijective;
- sunt funcții mărginite:

$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall\ x \in [-1, 1]$ şi $\arccos x \in [0, \pi], \forall\ x \in [-1, 1]$;

- sunt funcții strict monotone pe intervalul $[-1, 1]$: funcția arcsinus este funcție strict crescătoare pe intervalul $[-1, 1]$, iar funcția arccosinus este funcție strict descrescătoare pe $[-1, 1]$;
- arcsinus este funcție impară: $\arcsin(-x) = -\arcsin x,\ x \in [-1, 1]$; arccosinus nu este nici funcție pară, nici funcție impară;
- arcsinus este funcție concavă pe $[-1, 0]$ şi convexă pe $[0, 1]$;
- arccosinus este funcție convexă $[-1, 0]$ şi concavă pe $[0, 1]$.

FUNCŢIILE ARCTANGENTĂ ŞI ARCCOTANGENTĂ

Funcția $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ reprezintă funcția arctangentă.

Funcția $g : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ reprezintă funcția arccotangentă.

Curbele reprezentative ale graficelor funcțiilor arctg şi arcctg sunt redate în figura 10.

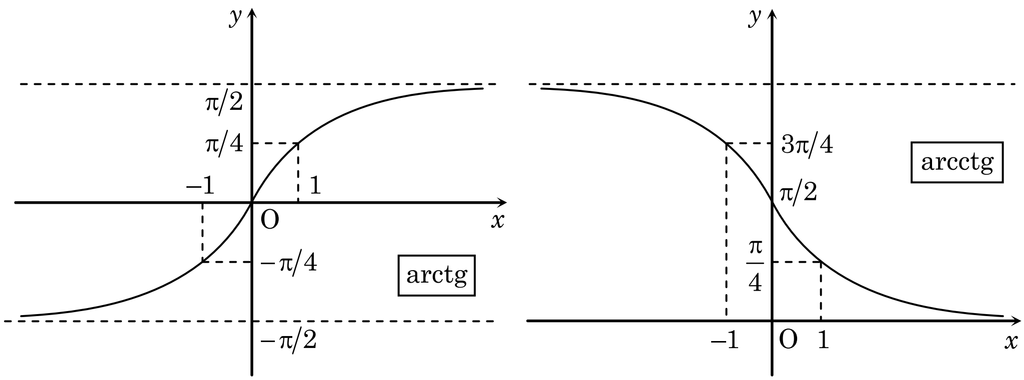


Figura 10

Proprietăți ale funcțiilor arctg şi arcctg:

- sunt funcții bijective;
- sunt funcții mărginite: $\operatorname{arctg}(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{arcctg}(\mathbb{R}) = (0, \pi)$;

• sunt funcții strict monotone pe $\mathbb{R}$: funcția arctg este funcție strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, iar funcția arcctg este funcție strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$;

• funcția arctg este funcție impară: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, funcția arcctg nu este nici funcție impară, nici funcție pară;

• funcția arctg este convexă pe $(-\infty, 0]$ şi concavă pe $[0, +\infty)$;

• funcția arcctg este concavă pe $(-\infty, 0]$ şi convexă pe $[0, +\infty)$.

❖ **DEFINIȚIE**

• Funcțiile constante, funcțiile polinomiale, funcțiile raționale, funcția putere (cu exponent natural, întreg, rațional sau real), funcția exponențială, funcția logaritmică şi funcțiile trigonometrice sunt numite **funcții elementare**.

6 LIMITE DE ȘIRURI

6.1. ȘIRURI CARE AU LIMITĂ FINITĂ

NE REAMINTIM!

• O funcție $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ se numeşte şir de numere reale.

• Numărul $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ se numeşte termenul general al şirului.

Problemă rezolvată

Fie (a_n) un şir de numere reale cu termenul general $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine câți termeni ai şirului (a_n) sunt în afara vecinătății $V = \left(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right)$ a lui 1.

b) Să se arate că în afara vecinătății $V = \left(\frac{999}{1000}, \frac{1001}{1000}\right)$ a lui 1 se află un număr finit de termeni ai şirului.

c) Fie $\varepsilon > 0$ şi $V = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ o vecinătate a lui 1. Să se arate că în afara vecinătății V se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n).

<u>Soluție</u>

a) Din condiția $\frac{9}{10} < a_n < \frac{11}{10}$ se obține 9 < n. Aşadar $a_n \in V$ pentru $n \geq 10$, iar termenii $a_1, a_2, \ldots, a_9$ sunt în afara vecinătății V.

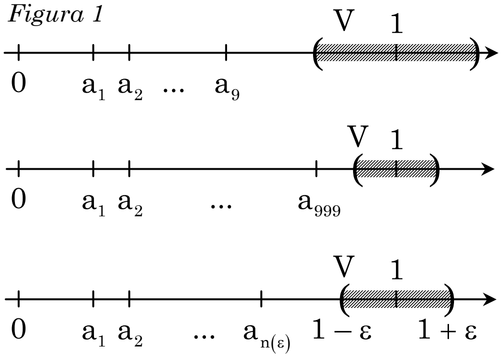
b) Dacă $a_n \in V$, rezultă că $\frac{999}{1000} < a_n$ şi se obține n > 999. Aşadar în afara vecinătății V se află primii 999 de termeni ai şirului (a_n).

c) Să aflăm mai întâi câți termeni aparțin vecinătății $V = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Din condiția $1-\varepsilon < a_n < 1+\varepsilon$ se obține $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

• Dacă $\varepsilon \geq 1$, atunci toți termenii şirului (a_n) aparțin vecinătății V.

• Dacă $\varepsilon < 1$, pentru numărul natural $n(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, termenii $a_1, a_2, \ldots, a_{n(\varepsilon)}$ nu aparțin lui V, iar dacă $n > n(\varepsilon)$, avem că $a_n \in V$.

Figura 1



În afara vecinătății V se află un număr finit de termeni pentru $\forall\, \varepsilon > 0$.

Din problema rezolvată anterior se observă că în afara oricărei vecinătăți V a lui 1, există un număr finit de termeni ai şirului (a_n).

Aşadar, orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(1)$, conține toți termenii şirului (a_n) cu excepția unui număr finit de termeni ai acestuia.

De asemenea, dacă $\varepsilon > 0$, atunci condiția ca $a_n \in V = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ este echivalentă cu $|a_n - 1| < \varepsilon$, sau, altfel spus $d(a_n; 1) < \varepsilon$.

Pentru $\varepsilon > 0$ foarte mic avem că distanța $d(a_n; 1)$ este suficient de mică, putând să considerăm că de la un anumit rang, $n_0 \in \mathbb{N}^*$, termenii a_n pot fi aproximați cu 1. Vom spune astfel că şirul (a_n) admite pe 1 ca limită.

❖ DEFINIȚIE

• Un număr $\ell \in \mathbb{R}$ se numeşte **limita şirului (a_n)** dacă în afara oricărei vecinătăți a lui ℓ se află un număr finit de termeni ai şirului.

Pentru limita şirului (a_n) se foloseşte notația $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Pentru şirul (a_n), cu termenul general $a_n = \frac{n}{n+1}$, putem scrie $1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se arate că $2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1}$.

<u>*Soluție*</u>

Trebuie să arătăm că în afara oricărei vecinătăți $V \in \mathcal{V}(2)$ există un număr finit de termeni ai şirului. Este suficient să considerăm vecinătăți centrate în 2, $V = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$.

Din condiția $\frac{2n+1}{n+1} \in V$, se obține: $2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+1} < 2+\varepsilon$, de unde $n > \frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon}$. (1)

• Pentru $\varepsilon \geq \frac{2}{3}$, relația (1) este adevărată pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, deci în afara vecinătății V nu se află nici un termen al şirului.

• Pentru $\varepsilon < \frac{2}{3}$ şi $n(\varepsilon) = \left[\frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1$, avem $n \geq n(\varepsilon)$, deci în afara vecinătății V se află termenii $a_1, a_2, \ldots, a_{n(\varepsilon)}$, în număr finit. Aşadar, $2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1}$.

☒ **2.** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} \neq 2$.

Soluție

Trebuie arătat că există cel puțin o vecinătate V a lui 2 în afara căreia se află un număr infinit de termeni.

Fie $V = \left(\frac{3}{2}, 3\right)$. Deoarece $\frac{n+2}{n+3} < 1 < \frac{3}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, avem că $\frac{n+2}{n+3} \notin V$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, deci toți termenii şirului sunt în afara vecinătății V. Aşadar, $2 \neq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3}$.

➲ OBSERVAȚII

1. Numărul $\ell \in \mathbb{R}$ nu este limita şirului (a_n) dacă există cel puțin o vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$ în afara căreia se află un număr infinit de termeni ai şirului.

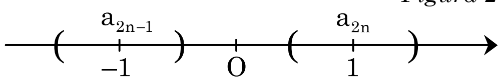
2. Există şiruri de numere reale care nu au limită.

☞ ***Exemplu***

Fie (a_n) şirul cu termenul general $a_n = (-1)^n$. Atunci $a_{2n} = 1, a_{2n-1} = -1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă presupunem că $\ell \in \mathbb{R}$ şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, atunci în oricare vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$ se află toți termenii şirului cu excepția unui număr finit dintre aceştia. Deosebim situațiile:

- $\ell \in (-\infty, -1]$. Pentru $V = (-\infty, 0)$, $a_{2n} \notin V$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
- $\ell \in (-1, 1)$. Pentru $V = (-1, 1)$, $a_n \notin V$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
- $\ell \in [1, +\infty)$. Pentru $V = (0, +\infty)$, $a_{2n-1} \notin V$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Figura 2



În concluzie, nici un număr real ℓ nu poate fi limită a şirului (a_n).

6.2. ȘIRURI CARE AU LIMITĂ INFINITĂ

Fie (a_n) un şir de numere reale.

❖ **DEFINIȚII**

- **Şirul (a_n) are limita** $+\infty$, dacă în afara oricărei vecinătăți a lui $+\infty$ se află un număr finit de termeni ai şirului.
- **Şirul (a_n) are limita** $-\infty$, dacă în afara oricărei vecinătăți a lui $-\infty$ se află un număr finit de termeni ai şirului.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Fie (a_n) un şir cu termenul general $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$, $n \geq 1$. Să se arate că $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $-\infty = \lim\limits_{n\to\infty}(-a_n)$.

Soluție

Fie $V = (a, +\infty)$, $a > 0$, o vecinătate a lui $+\infty$. Din condiția $a_n \in V$, rezultă că $\dfrac{n^2}{n+1} > a$, de unde $n - 1 + \dfrac{1}{n+1} > a$. Dacă $m = [a] + 2$, pentru $n \geq m$, rezultă că $a_n > a$, deci în afara vecinătății V se află un număr finit de termeni: $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$. Rezultă că $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

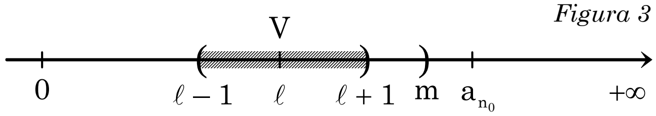
Luând $V = (-\infty, -a)$ vecinătate pentru $-\infty$, în afara lui V se află cel mult primii $m - 1$ termeni, deci $-\infty = \lim\limits_{n\to\infty}(-a_n)$.

☒ **2.** Fie (a_n) un şir nemărginit de numere reale pozitive. Dacă (a_n) are limită, atunci $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Soluție

Să presupunem că $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\ell \in \mathbb{R}$. Atunci în afara vecinătății $V = (\ell - 1, \ell + 1)$ se află un număr finit de termeni ai şirului.

Figura 3



Fie $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_p}$ aceşti termeni.

Pentru $m = \max\left(a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_p}, \ell + 1\right)$, în vecinătatea $V = (-\infty, m)$ a lui ℓ se află toți termenii şirului (a_n). Dar (a_n) fiind nemărginit superior, există cel puțin un termen a_{n_0}, astfel că $a_{n_0} > m$. Contradicție. Așadar $\ell \notin \mathbb{R}$. Rezultă astfel că în oricare vecinătate a lui $+\infty$ se află toți termenii șirului (a_n), mai puțin un număr finit de termeni, deci $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

◢ **Temă**

Să se arate că următoarele șiruri au limita infinită:

a) $a_n = 2n + 7$; **b)** $a_n = 3n^2 + 2$; **c)** $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$;

d) $a_n = \dfrac{-n^3}{n+1}$; **e)** $a_n = n - n^2$.

7 PROPRIETĂȚI ALE ȘIRURILOR CARE AU LIMITĂ

7.1. PROPRIETĂȚI GENERALE

> ▣ **TEOREMA 4 (Unicitatea limitei unui șir)**
> Dacă un șir de numere reale are limită, atunci aceasta este unică.

Demonstrație

Fie (a_n) un șir de numere reale. Presupunem prin absurd că șirul (a_n) are limitele distincte $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

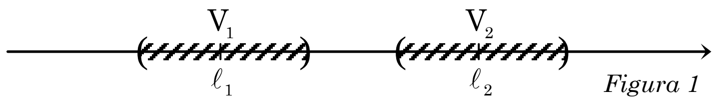


Figura 1

• Dacă $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, din teorema de separare a mulțimii $\mathbb{R}$, rezultă că există vecinătățile $V_1 \in \mathscr{V}(\ell_1)$ și $V_2 \in \mathscr{V}(\ell_2)$, astfel încât $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, (figura 1). Deoarece $\ell_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, atunci în vecinătatea V_1 se află toți termenii șirului (a_n), mai puțin un număr finit de termeni. Așadar, în vecinătatea V_2 se află un număr finit de termeni ai șirului (a_n), iar în afara ei un număr infinit de termeni. Aceasta contrazice faptul că $\ell_2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Așadar $\ell_1 = \ell_2$.

• Dacă $\ell_1 \in \mathbb{R}$ și $\ell_2 = +\infty$, atunci pentru $\varepsilon > 0$ considerăm vecinătățile $V_1 \in \mathscr{V}(\ell_1)$, $V_1 = (\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon)$ și $V_2 \in \mathscr{V}(+\infty)$, $V_2 = (a, +\infty)$, $a > \ell + \varepsilon$, (figura 2). Ca și în cazul precedent rezultă că în V_1 se află toți termenii șirului (a_n), cu excepția unui număr finit de termeni, deci ℓ_2 nu poate fi limită a șirului (a_n).

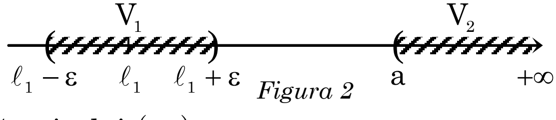


Figura 2

• Celelalte cazuri se tratează analog. ■

❖ **DEFINIȚII**

- Şirurile de numere reale care au limită finită se numesc **şiruri convergente**.
- Şirurile de numere reale care au limita $+\infty$, $-\infty$ sau nu au limită se numesc **şiruri divergente**.

Se observă uşor că un şir de numere reale care nu este convergent este şir divergent. Aşadar, oricare şir de numere reale este sau şir convergent sau şir divergent.

☞ ***Exemple***

- Şirul (a_n), $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ este şir convergent având limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
- Şirurile cu termenii generali: $a_n = (-1)^n$, $b_n = \dfrac{n^2}{n+1}$, $c_n = \dfrac{-n^2}{n+1}$ sunt şiruri divergente.

❖ **DEFINIȚIE**

- Fie (a_n) un şir de numere reale şi $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ o funcție strict crescătoare. Şirul $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ se numeşte **subşir** al şirului (a_n).

☞ ***Exemple***

Dacă (a_n) este şirul cu termenul general $a_n = n$, atunci şirurile (a_{2n-1}), (a_{2n}), (a_{3n}), (a_{10n+3}), $n \geq 1$ sunt subşiruri ale şirului (a_n).

▣ **TEOREMA 5**

Fie (a_n) un şir de numere reale şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$. Atunci orice subşir al şirului (a_n) are limita ℓ.

Demonstrație

Fie $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ un subşir al şirului (a_n). Dacă $V \in \mathscr{V}(\ell)$ este o vecinătate oarecare a lui ℓ, în afara acesteia se află un număr finit de termeni ai şirului, deci şi un număr finit de termeni ai subşirului $\left(a_{\varphi(n)}\right)$.

În mod evident are loc şi o teoremă reciprocă. ■

▣ **TEOREMA 6**

Fie (a_n) un şir de numere reale. Dacă toate subşirurile şirului (a_n) au aceeaşi limită $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci şirul (a_n) are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Demonstrație: (Temă)

Problemă rezolvată

☒ Fie (a_n) un şir de numere reale, astfel încât subşirurile (a_{2n}) şi (a_{2n-1}) au aceeaşi limită, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Soluție

Fie $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ un subşir oarecare al şirului (a_n). Atunci $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ poate conține numai termeni ai subşirului (a_{2n}), numai termeni ai subşirului (a_{2n-1}) sau termeni ai ambelor subşiruri. În fiecare caz, conform teoremelor anterioare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\varphi(n)} = \ell$. Aşadar toate subşirurile şirului (a_n) au aceeaşi limită şi, în consecință, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

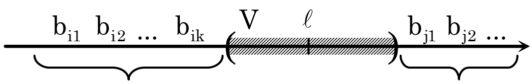
▣ TEOREMA 7

Fie (a_n) un şir de numere reale cu limita $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci, prin înlăturarea sau adăugarea unui număr finit de termeni se obține un şir cu aceeaşi limită ℓ.

Demonstrație

Într-adevăr, dacă $V \in \mathcal{V}(\ell)$, atunci înlăturarea sau adăugarea unui număr finit de termeni nu modifică faptul că în afara vecinătății V se află un număr finit de termeni. ■

Figura 3



În afara lui V, sunt mai puțini termeni sau mai mulți, dar tot în număr finit.

➲ OBSERVAȚIE

- Fie (a_n) un şir de numere reale care are limita $\ell \in \mathbb{R}$. Prin adăugarea unui număr infinit de termeni, şirul obținut are aceeaşi limită ℓ sau nu are limită.

☞ ***Exemple***

- Fie $a_n = \dfrac{1}{n}$ şi $b_n = (-1)^n \dfrac{2}{n}$, $n \geq 1$. Se observă uşor că $b_{2n} = a_n$ şi $b_{2n-1} = \dfrac{-2}{2n-1}$. În acest caz, prin adăugarea termenilor b_{2n-1}, $n \geq 1$, s-a obținut un şir cu aceeaşi limită: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

- Fie $a_n = 1$ şi $b_n = (-1)^n$, $n \geq 1$. Se observă că $b_{2n} = a_n$ şi $b_{2n-1} = -1$. În acest caz, noul şir (b_n) nu mai are limită, deoarece are două subşiruri cu limite diferite.

7.2. PROPRIETĂȚI ALE ȘIRURILOR CONVERGENTE

După cum se ştie, un şir este convergent dacă acesta are limita finită. Astfel, orice şir convergent are proprietățile întâlnite până acum pentru şirurile care au limită.

Dar există şi proprietăți specifice şirurilor convergente.

▣ TEOREMA 8 (Limita modulului)

Fie (a_n) un şir convergent de numere reale. Atunci şirul $(|a_n|)$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$, (limita modulului este egală cu modulul limitei).

➲ OBSERVAȚII

1. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată.

De exemplu, pentru şirul cu termenul general $a_n = (-1)^n$, avem că $|a_n| = \left|(-1)^n\right| = 1$, deci $|a_n|$ este convergent, dar şirul (a_n) nu este convergent.

2. Fie (a_n) un şir convergent şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Afirmațiile următoare sunt echivalente:

a) $\ell = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$.

▣ TEOREMA 9

Orice şir convergent este mărginit.

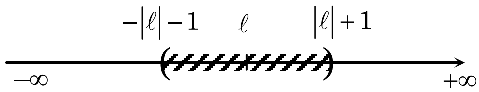


Figura 4

<u>*Demonstrație*</u>

Fie şirul de numere reale (a_n) şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Atunci, în oricare vecinătate a lui ℓ se află toți termenii şirului cu excepția unui număr finit dintre aceştia.

În particular, în afara vecinătății $V = (-1-|\ell|, 1+|\ell|)$ se află un număr finit de termeni: $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_p}$. Luând $M = \max\left\{|a_{n_1}|, |a_{n_2}|, \ldots, |a_{n_p}|, 1+|\ell|\right\}$, toți termenii şirului sunt în intervalul $(-M, M)$, deci şirul este mărginit. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Reciproca teoremei nu este adevărată.

Într-adevăr, şirul (a_n), $a_n = (-1)^n$ este mărginit, dar nu este convergent.

2. Putem formula condiții suplimentare pentru ca un şir mărginit să fie convergent.

☞ ***Exemplu***

Fie (a_n) un şir care are limită. Atunci (a_n) este convergent dacă şi numai dacă este mărginit.

3. Dacă un şir este nemărginit sau are un subşir nemărginit, atunci şirul este divergent. Aşadar, condiția de mărginire este condiție necesară pentru ca un şir să fie convergent.

7.3. TRECEREA LA LIMITĂ ÎN INEGALITĂȚI

> ▣ **TEOREMA 10**
> Fie (a_n) un şir de numere reale pozitive şi $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Atunci $a \geq 0$.

<u>*Demonstrație*</u>

Folosim metoda reducerii la absurd.

Presupunem că $a < 0$. Din relația $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, rezultă că orice vecinătate $V \in \mathscr{V}(a)$, conține toți termenii şirului (a_n) cu excepția unui număr finit dintre aceştia.

Dacă $a \in \mathbb{R}$, considerăm vecinătatea $V = \left(-\infty, \dfrac{a}{2}\right)$, iar pentru $a = -\infty$, considerăm $V = (-\infty, -1)$, figura 5.

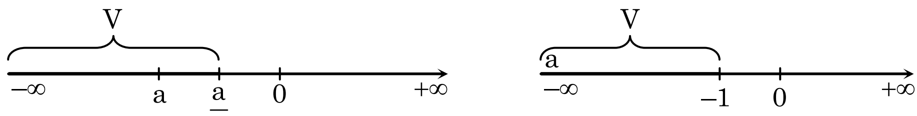


Figura 5

Vecinătatea V conține o infinitate de termeni ai şirului (a_n), de unde rezultă că şirul (a_n) are şi termeni negativi, în contradicție cu ipoteza. Aşadar $a \geq 0$. ■

➲ **<u>OBSERVAȚII</u>**

1. Rezultatul este adevărat şi dacă şirul are limită şi conține termeni pozitivi, începând de la un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

2. Dacă şirul (a_n) are limită, conține o infinitate de termeni negativi, dar are un subşir $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ cu termeni pozitivi, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. Dacă şirul (a_n) are limită şi toți termenii săi sunt negativi, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq 0$.

> ▣ **TEOREMA 11 (de trecere la limită în inegalități)**
> Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri care au limită şi au proprietatea că $a_n \leq b_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Demonstrație

Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Deosebim cazurile:

• $a = -\infty$. În acest caz vom avea că $a = -\infty \le b$.

• $a = +\infty$. În acest caz şirul (a_n) este nemărginit superior, deci şi (b_n) este nemărginit superior. Cum (b_n) are limită, aceasta nu poate fi decât $+\infty$. Aşadar $a \le b$.

• $a \in \mathbb{R}$. În acest caz (a_n) este convergent, deci este şir mărginit. Rezultă că (b_n) este şi el mărginit inferior, deci nu poate avea limita $-\infty$. Dacă $b = +\infty$, atunci $a \le b$.

• Rămâne de analizat cazul $a, b \in \mathbb{R}$. Presupunem prin absurd că $b < a$. Din teorema de separare a lui $\mathbb{R}$, există vecinătățile $V_1 \in \mathscr{V}(a)$ şi $V_2 = \mathscr{V}(b)$ cu proprietatea că $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, (figura 6).

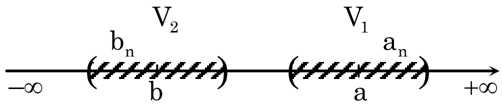


Figura 6

Vecinătatea V_2 conține o infinitate de termeni ai şirului (b_n), în afara ei fiind un număr finit de termeni ai şirului (b_n). Astfel, există termeni $b_n \in V_2$, cu proprietatea $b_n < a_n$, şi se contrazice relația $a_n \le b_n$. În concluzie $a \le b$ şi teorema este complet demonstrată. ■

➲ OBSERVAȚIE

• Dacă pentru şirurile (a_n) şi (b_n) există relația $a_n < b_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, nu rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

☞ ***Exemplu***

Fie (a_n) şi (b_n) cu $a_n = -\dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$. Se observă că $a_n < b_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, dar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Din teorema de trecerea la limită în inegalități rezultă uşor următoarele consecințe.

▣ CONSECINȚA 1

Fie (a_n) un şir de numere reale convergent şi numerele $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a \le a_n \le b, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $a \le \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le b$.

Demonstrație

Se consideră şirurile $(x_n), (y_n)$ astfel încât $x_n = a, y_n = b$ şi vom avea $x_n \le a_n$ şi $a_n \le y_n$. Conform teoremei 11 se obține rezultatul cerut. ■

▣ CONSECINȚA 2

Fie (a_n) un şir crescător de numere reale şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Atunci $a_n \le \ell,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație

• Dacă $\ell = +\infty$, rezultatul este evident.

• Dacă $\ell \in \mathbb{R}$, din monotonia şirului (a_n) se obține că $a_n \le a_m$, $\forall\ m, n \in \mathbb{N}^*$, $n \le m$. Prin trecere la limită după m se obține că:

$$a_n = \lim_{m\to\infty} a_n \le \lim_{m\to\infty} a_m = \ell,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*. \ \blacksquare$$

◢ **Temă**

Enunțați un rezultat analog pentru şirurile descrescătoare.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se arate că şirurile (a_n) sunt divergente dacă:

a) $a_n = 1 + (-1)^n$; b) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$;

c) $a_n = \frac{2n^2}{n+3}$.

E2. Fie $a_n = (-1)^{n+1}$, $n \ge 1$. Se poate obține din (a_n) un şir convergent prin îndepărtarea unui număr finit de termeni? Dar infinit? Care sunt limitele şirurilor obținute?

E3. Se consideră şirul (a_n) cu termenul general $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Există un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât $a_n > 0,\ \forall\ n \ge n_0$?

E4. Fie (a_n) un şir cu termenul general $a_n = \frac{2n+6}{2n+3}$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Să se calculeze limita şirului (b_n) în cazurile $b_n = \frac{4n+6}{4n+3}$, $b_n = \frac{10n+6}{10n+3}$.

E5. Se consideră şirul (a_n), astfel încât $a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Rezultă că $\ell = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

APROFUNDARE

A1. Se consideră şirurile (a_n) şi (b_n) care au aceeaşi limită ℓ. Să se arate că şirul (c_n), $c_n = \frac{a_n + b_n}{2} + \frac{(-1)^n}{2}(a_n - b_n)$ are limita ℓ.

A2. Să se arate că şirul (a_n) cu termenul general $a_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & n \text{ par} \\ \frac{n+1}{n+2}, & n \text{ impar} \end{cases}$ are limita $\ell = 1$.

A3. **Şirul (a_n) are termenii $a_{2n} < 0$ şi $a_{2n-1} > 0$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.**
a) Poate fi convergent acest şir?
b) Poate avea acest şir limita $+\infty$? Dar $-\infty$?

A4. **Se consideră şirul (a_n), astfel încât $a_{2n} = 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = 3$. Este convergent şirul (a_n)?**

A5. **Fie (a_n) un şir, astfel încât subşirurile $(a_{3n}), (a_{3n-1})$ şi (a_{3n-2}) au aceeaşi limită. Să se arate că şirul (a_n) are limită.**

A6. **Se consideră şirul (a_n), astfel încât verifică una din condițiile:**
a) $(a_n - 1)(a_{n+1} - 1) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
b) $(a_n - 1)(a_{n+1} - 2) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Rezultă că şirul (a_n) este convergent? (Olimpiadă locală, 1993)

A7. **Se consideră şirul (a_n), astfel încât subşirurile $(a_{2n-1}), (a_{2n})$ şi (a_{5n}) au limită. Să se arate că şirul (a_n) are limită.**

DEZVOLTARE

D1. **Din (a_n) un şir de numere reale şi $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. Să se arate că dacă se schimbă ordinea termenilor şirului (a_n), noul şir are aceeaşi limită.**

D2. **Fie (a_n) un şir de numere reale şi $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$.**
a) Dacă $\ell > 0$, să se arate că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0$.
b) Dacă $\ell < 0$, să se arate că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0$.
c) Dacă $\ell \in \mathbb{R}^*$, să se arate că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0$.

D3. **Fie (a_n) un şir de numere reale, astfel încât $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell, \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ şi $a_n \leq \ell, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că termenii şirului se pot rearanja, astfel încât să se obțină un şir crescător.**

D4. **Şirul (a_n) are limită $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă $a_{2n} < 0$ şi $a_n + a_{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, să se determine ℓ.**

8 CRITERII DE EXISTENȚĂ A LIMITEI UNUI ŞIR

8.1. CRITERIUL DE EXISTENȚĂ CU ε (EXTINDERE)

Fie (a_n) un şir de numere reale. După cum se cunoaşte şirul (a_n) are limită dacă există $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, astfel încât orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$ conține toți termenii săi cu excepția unui număr finit de termeni.

Să considerăm $\ell \in \mathbb{R}$, limita şirului (a_n). Dacă $\varepsilon > 0$ şi $V \in \mathcal{V}(\ell)$, $V = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ este o vecinătate centrată în ℓ, atunci în afara sa se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n). Aceasta înseamnă că există un rang $n(\varepsilon)$, depinzând de ε,

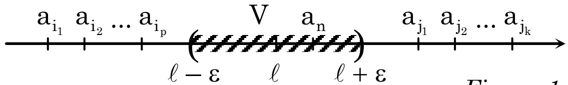


Figura 1

începând de la care toți termenii a_n aparțin vecinătății V.

Relația $a_n \in V$ se scrie sub formă echivalentă astfel:

$a_n \in V \Leftrightarrow a_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \Leftrightarrow \ell-\varepsilon < a_n < \ell+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon.$

Aşadar, $a_n \in V, \forall\, n \geq n(\varepsilon) \Leftrightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon, \forall\, n \geq n(\varepsilon)$.

Deoarece pentru definirea limitei unui şir este suficient să considerăm numai vecinătăți centrate în ℓ, se poate enunța următoarea teoremă de caracterizare a limitei.

> ▣ **TEOREMA 12 (Criteriul de convergență cu ε)**
> Fie (a_n) un şir de numere reale. Un număr $\ell \in \mathbb{R}$ este limita şirului (a_n) dacă şi numai dacă pentru $\forall\, \varepsilon > 0$ există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|a_n - \ell| < \varepsilon, \forall\, n \geq n(\varepsilon)$.

<u>*Demonstrație*</u>

• Fie $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\varepsilon > 0$ arbitrar. În afara vecinătății $V = (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ a lui ℓ se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n): $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_p}$.

Notăm cu $m = \max\{n_1, n_2, ..., n_p\}$. Atunci, pentru $n \geq m+1$ avem $a_n \in V$, ceea ce s-a arătat că este echivalent cu $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Luând $n(\varepsilon) = m+1$, teorema este demonstrată.

• *Reciproc*

Să presupunem că V este vecinătate a lui ℓ. Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \subset V$. Conform ipotezei, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|a_n - \ell| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n(\varepsilon)$, deci $a_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \subset V, \forall\, n \geq n(\varepsilon)$. Aşadar, în afara vecinătății V există un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi deci $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ■

➲ OBSERVAȚII

- Numărul $\ell \in \mathbb{R}$ este limită a şirului (a_n), dacă pentru $\varepsilon > 0$, inecuația $|a_n - \ell| \geq \varepsilon$, cu necunoscuta n, are un număr finit de soluții.
- Numărul $\ell \in \mathbb{R}$ nu este limită a şirului (a_n) dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât inecuația $|a_n - \ell| < \varepsilon$, cu necunoscuta n, are un număr finit de soluții sau, altfel spus, inecuația $|a_n - \ell| \geq \varepsilon$ are o infinitate de soluții.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=2.$

<u>*Soluție*</u>

Fie $\varepsilon>0.$ Din relația $|a_n-2|<\varepsilon,$ rezultă că $\frac{3}{n+1}<\varepsilon,$ de unde $n>\frac{3}{\varepsilon}-1.$ Dacă $\varepsilon\ge 3$ se poate lua $n(\varepsilon)=1,$ iar pentru $\varepsilon<3,$ se poate lua $n(\varepsilon)=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$ şi se obține $|a_n-2|<\varepsilon,\ \forall\ n\ge n(\varepsilon),$ deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2.$

◢ **Temă**
Să se arate că:
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+5}=2;$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2};$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n}{n+1}=-1.$

☒ **2.** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}\ne 4.$

<u>*Soluție*</u>

$|a_n-4|=\frac{n+4}{n+1}\ge 1,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*.$ Aşadar pentru $\varepsilon=1$ se obține că inecuația $|a_n-4|\ge 1$ are o infinitate de soluții. Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 4.$

◢ **Temă**
Arătați că:
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{2n+1}\ne 1;$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\ne\frac{1}{3}.$

▣ **TEOREMA 13 (Criteriul cu ε pentru limită infinită)**

Fie (a_n) un şir de numere reale. Atunci:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty,$ dacă şi numai dacă $\forall\ \varepsilon>0,$ există un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*,$ astfel încât $a_n>\varepsilon,\ \forall\ n\ge n(\varepsilon).$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty,$ dacă şi numai dacă $\forall\ \varepsilon>0,$ există un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*,$ astfel încât $a_n<-\varepsilon,\ \forall n\ge n(\varepsilon).$

<u>*Demonstrație*</u>

a) Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ şi fie $\varepsilon>0.$ Atunci în vecinătatea $V=(\varepsilon,+\infty)$ se află toți termenii şirului (a_n) cu excepția unui număr finit de termeni: $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_p}.$ Luând $m=\max\{n_1, n_2, ..., n_p\}$ şi $n(\varepsilon)=m+1,$ avem $a_n\in V,\ \forall\ n\ge n(\varepsilon).$ Condiția $a_n\in V$ este echivalentă cu $a_n\in(\varepsilon,+\infty),$ deci $a_n>\varepsilon,$ pentru $n\ge n(\varepsilon).$

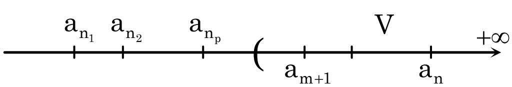


Figura 2

Reciproc

Dacă $V \in \mathscr{V}(+\infty)$, atunci există $V_1 = (\varepsilon, +\infty)$, cu $\varepsilon > 0$, astfel încât $V_1 \subset V$. Conform ipotezei există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n > \varepsilon, \forall\ n \geq n(\varepsilon)$. Dar această condiție este evident echivalentă cu $a_n \in V_1, \forall\ n \geq n(\varepsilon)$ şi astfel, în afara vecinătății V_1, deci şi a lui V, se află un număr finit de termeni. În consecință $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

b) Se demonstrează analog punctului a) sau se consideră şirul (b_n), $b_n = -a_n$. ■

Aplicație

☒ Fie (a_n) un şir de numere reale nenule şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

a) Dacă există un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n > 0, \forall\ n \geq n_0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

b) Dacă există un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n < 0, \forall\ n \geq n_0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

<u>*Demonstrație*</u>

a) Se poate considera că $a_n > 0, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$, deoarece prin îndepărtarea unui număr finit de termeni $a_1, a_2, ..., a_{n_0}$ ai şirului (a_n), limita şirului $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ nu se modifică.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci pentru oricare $\varepsilon > 0$, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n < \frac{1}{\varepsilon}, \forall\ n \geq n(\varepsilon)$. Se obține $\frac{1}{a_n} > \varepsilon, \forall\ n \geq n(\varepsilon)$. Aşadar, folosind criteriul cu ε pentru limite infinite rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

b) Se arată analog punctului a).

Convenții de scriere: $\frac{1}{0_{(+)}} = +\infty$, $\frac{1}{0_{(-)}} = -\infty$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Folosind criteriul cu ε, să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n+4}=3$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^2+4n+1}=2$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n+2}=1$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+1}=1$.

E2. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n+2}=+\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{n+3}=-\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^2+3n-1}=+\infty$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n+3}=+\infty$.

E3. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+1)=+\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n+1}=0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=+\infty,\ a>1$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0,\ a\in(0,1)$.

DEZVOLTARE

D1. Fie (x_n) un şir de numere reale pozitive şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ell$. Folosind criteriul cu ε, să se arate că:

a) dacă $\ell=1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=0$;

b) dacă $\ell=+\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=+\infty$;

c) dacă $\ell=0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=-\infty$.

D2. Fie $A\subset\mathbb{R}$ o mulțime nevidă. Să se arate că punctul $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare pentru mulțimea A, dacă şi numai dacă există un şir (x_n), $x_n\in A\setminus\{x_0\}$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

D3. Să se determine punctele de acumulare pentru mulțimile:

a) $A=\left\{\frac{1}{n+1}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$; b) $A=\mathbb{Z}$;

c) $A=\mathbb{Q}$.

D4. Fie (a_n) un şir de numere reale. Să se arate că şirul (a_n) este convergent dacă şi numai dacă $\forall\ \varepsilon>0$, există un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $|a_m-a_n|\le\varepsilon,\ \forall\ m,\ n\ge n(\varepsilon)$. *(Criteriul lui Cauchy).*

D5. Să se studieze convergența şirurilor folosind criteriul lui Cauchy:

a) $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$;

b) $a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$;

c) $a_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n}{2^n}$;

d) $a_n=\frac{\cos 1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{\cos 2}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{\cos n}{n(n+1)(n+2)}$;

e) $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}$;

f) $a_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$.

8.2. OPERAȚII CU ŞIRURI CONVERGENTE

OPERAŢII CU ŞIRURI DE NUMERE REALE

Operațiile cu şiruri de numere reale se definesc având în vedere operațiile cu funcții.

Dacă (a_n) și (b_n) sunt două șiruri de numere reale, avem:

- $(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$, (**suma** a două șiruri);
- $(a_n)-(b_n)=(a_n-b_n)$, (**diferența** a doua șiruri);
- $(a_n)\cdot(b_n)=(a_n\cdot b_n)$, (**produsul** a două șiruri);
- $\alpha\cdot(a_n)=(\alpha\cdot a_n)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, (**înmulțirea** cu un număr real);
- $\dfrac{(a_n)}{(b_n)}=\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$, dacă $b_n\neq 0$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, (**câtul** a două șiruri).

OPERAȚII CU ȘIRURI CONVERGENTE

▣ TEOREMA 14

Fie (a_n), (b_n) doua șiruri convergente și $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

Atunci:

a) șirul (a_n+b_n) este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(**Limita sumei este egală cu suma limitelor**.)

b) șirul $(a_n\cdot b_n)$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty}b_n\right)$.

(**Limita produsului este egală cu produsul limitelor**.)

<u>*Demonstrație*</u> **(EXTINDERE)**

a) Fie $\varepsilon>0$. Deoarece $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, există un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $|a_n-a|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$ și $|b_n-b|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\ n\ge n(\varepsilon)$.

Atunci: $|a_n+b_n-a-b|=|a_n-a+b_n-b|\le|a_n-a|+|b_n-b|\le\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=$ $=\varepsilon$, $\forall\ n\ge n(\varepsilon)$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$.

b) Avem:

$$|a_nb_n-ab|=|(a_n-a)b_n+(b_n-b)a|\le|a_n-a|\cdot|b_n|+|b_n-b|\cdot|a|. \qquad (1)$$

Șirurile (a_n) și (b_n), fiind convergente sunt și mărginite, deci există $M_1, M_2\in(0,+\infty)$, astfel încât $|a_n|\le M_1$, $|b_n|\le M_2$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

Alegem $M=\max\{M_1, M_2\}$ și rezultă că $|a_n|\le M$, $|b_n|\le M$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

Fie $\varepsilon>0$. Deoarece $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ și $b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ pentru $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2M}$ există un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$, astfel încât:

$$|a_n-a|\le\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2M} \text{ și } |b_n-b|\le\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2M},\ \forall\ n\ge n(\varepsilon). \qquad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) se obține:

$$\left|a_n \cdot b_n - ab\right| \le \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,\ \forall\ n \ge n(\varepsilon).$$

Așadar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = ab$. ■

➲ OBSERVAȚII

În particular, se obțin următoarele rezultate pentru șirurile convergente:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n - b_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-a_n\right) = -\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha \cdot a_n\right) = \alpha \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n \cdot b_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right| \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left|b_n\right|$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^p\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p$, $p \in \mathbb{N}^*$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n\right) = \alpha\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) + \beta\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Problemă rezolvată

☒ Fie (a_n) și (b_n) două șiruri convergente și $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Să se arate că:

a) șirul (c_n), $c_n = \max\{a_n, b_n\}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \max\{a, b\}$;

b) șirul (c_n), $c_n = \min\{a_n, b_n\}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \min\{a, b\}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Se are în vedere că $\max\{a_n, b_n\} = \dfrac{a_n + b_n + \left|a_n - b_n\right|}{2}$, de unde:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n + \left|a_n - b_n\right|}{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n + \left|\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)\right|\right) =$$

$$= \frac{a + b + |a - b|}{2} = \max\{a, b\}.$$

b) Se are în vedere relația: $\min\{a_n, b_n\} = \dfrac{a_n + b_n - \left|a_n - b_n\right|}{2}$.

> **▣ TEOREMA 15**
>
> Fie (a_n), (b_n) șiruri de numere reale convergente și $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Dacă $b_n, b \in \mathbb{R}^*$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ este șir convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.
>
> (**Limita câtului este egală cu câtul limitelor**.)

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă (a_n) este un şir de numere reale nenule, convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$, atunci pentru oricare $p \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p$.

În particular, dacă $p \in \mathbb{N}^*$ şi $a_n = n$ se obține că: $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = +\infty$, şi $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-p} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{+\infty} = 0.$

Mai general, dacă $a \in (0, +\infty)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n^a = +\infty$,

şi $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-a} = 0.$

> ❑ **REȚINEM!**
>
> $$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty, & a \in (0, +\infty) \\ 0, & a \in (-\infty, 0) \\ 1, & a = 0 \end{cases}$$

2. Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri de numere reale, $b_n \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este un şir convergent, atunci nu rezultă că şirurile (a_n) şi (b_n) sunt convergente.

☞ ***Exemplu***

$a_n = (-1)^n$, $b_n = (-2)^n$. Rezultă că $\frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, dar şirurile (a_n) şi (b_n) nu au limită.

3. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, atunci şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este nemărginit.

4. Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) sunt convergente şi au limita 0, atunci despre şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ nu se poate afirma nimic în privința convergenței.

☞ ***Exemple***

a) Pentru $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ rezultă că $\frac{a_n}{b_n} = n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

b) Pentru $a_n = \frac{a}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $a \in \mathbb{R}^*$ se obține $\frac{a_n}{b_n} = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = a$.

c) Pentru $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$ se obține $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

d) Pentru $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ se obține $\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$ care nu are limită.

Aşadar, în cazul $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, nu se poate preciza nimic în privința existenței limitei, iar în cazul în care aceasta există nu se poate preciza nimic referitor la valoarea acesteia. Se spune că, în acest caz, (numit cazul $\frac{0}{0}$), există o **nedeterminare**.

> **Temă**
> **Calculați:**
> - $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+3n}{2n^2+5n+3}$;
> - $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^3+5n^2+1}{5n^3+4n+2}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+3}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2\sqrt{n}}{n^2+5n+1}$.

Soluție

a) Avem succesiv:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

b) Procedând analog punctului a), se obține că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2\sqrt{n}}{n^2+5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n\sqrt{n}}}{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{3+0}{1+0+0}=3.$$

Modul de determinare a limitelor din problema precedentă poate fi aplicat la calculul limitelor şirurilor (a_n) cu termenul general $a_n=R(n)$, unde $R:\mathbb{R}\setminus D\to\mathbb{R}$, este o funcție rațională, astfel încât $R(n)$ are sens pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$.

Dacă $R(n)=\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+...+a_{p-1}n+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+...+b_{q-1}n+b_q}=\frac{f(n)}{g(n)}$, $p,q\in\mathbb{N}^*$ scriind

$$f(n)=n^p\left(a_0+\frac{a_1}{n}+...+\frac{a_p}{n^p}\right)=n^p\cdot x_n,\quad g(n)=n^q\left(b_0+\frac{b_1}{n}+...+\frac{b_q}{n^q}\right)=n^q\cdot y_n.$$

se obține: $\lim\limits_{n\to\infty}R(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^p\cdot x_n}{n^q\cdot y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{p-q}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a_0}{b_0}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}n^{p-q}$.

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+...+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+...+b_q}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}\cdot(+\infty), & \text{dacă } p>q\\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } p=q\\ 0, & \text{dacă } p<q\end{cases}$$

▣ TEOREMA 16

Fie (a_n) şi (b_n) şiruri convergente, $a_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$.

Atunci: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

(**Limita unei puteri se distribuie şi bazei şi exponentului**.)

➲ OBSERVAȚII

- Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ se obține cazul de nedeterminare 0^0.
- Pentru $b_n = \frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.
- Pentru $a_n = a \in (0, +\infty)$ şi $b_n = \frac{1}{n}$ se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = 2^{-n} + n^{-2}$; b) $a_n = n^{-3} + n^{-1}$;

c) $a_n = \dfrac{2n^{-1} + n^{-2}}{3n^{-2} + 2n^{-1}}$;

d) $a_n = \dfrac{2n^2 + 3n}{4n^2 + 5n + 3}$;

e) $a_n = \dfrac{(n+1)^2 + (n-1)^2}{2n^2 + 5}$;

f) $a_n = \dfrac{(n+1)^3 + 2(n-1)^3}{(n+1)^3 + 3(n-1)^2}$.

E2. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}(1+2+3+\ldots+n)$;

b) $a_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n(1+2+3+\ldots+n)}$;

c) $a_n = 2\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}$; d) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{4}}{2 + \sqrt[n]{5}}$;

e) $a_n = \dfrac{\left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}\right)}{1 + 2^n}$; f) $a_n = 2\sqrt[n]{2 + \sqrt[n]{2}}$.

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+3}{3n^2+1}\right)^{\frac{2n}{n+1}}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+4n}{4n^2+3}\right)^{\frac{n+1}{2n+3}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[n]{3} + 5\sqrt[n]{2} + 2\sqrt[n]{2}}{2\sqrt[n]{5} - \sqrt[n]{6}}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}$.

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze limita şirurilor:

a) $a_n = \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)}{1\cdot 3 + 3\cdot 5 + \ldots + (4n^2 - 1)}$;

b) $a_n = \left(\dfrac{n^{-1} + n^{-2} + n^{-3} + n^{-4} + 1}{n^{-1} + n^{-3} + 2}\right)^{\frac{n^2+1}{n^2+n}}$;

c) $a_n = \left(\dfrac{1 + n + n^2 + \ldots + n^{10}}{2 + n + n^2 + \ldots + n^{10}}\right)^{\sqrt[n]{4}}$.

A2. Să se determine numerele $a, b \in \mathbb{R}^*$, ştiind că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an^3 + bn + 1}{2n^3 + n + 1} = 2 = \lim_{n\to\infty} \frac{bn^2 + a}{3n^2 + b}.$$

A3. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!}$;

b) $a_n = \frac{1!\cdot 1 + 2!\cdot 2 + 3!\cdot 3 + \ldots + n!\cdot n}{-1+(n+1)!}$.

A4. Să se determine numerele naturale $a, b \in \mathbb{N}^*$, pentru care:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^2+n+a}{n^2+3}\right)^{\frac{bn+2}{n+3}} = 16.$$

8.3. CRITERIUL MAJORĂRII

▣ TEOREMA 17

Fie (a_n) un şir de numere reale.

a) Dacă există $\ell \in \mathbb{R}$ şi (b_n) un şir de numere reale, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ şi $|a_n - \ell| \le b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

b) Dacă există un şir (b_n), astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ şi $a_n \le b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

c) Dacă există un şir (b_n), astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ şi $b_n \le a_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Demonstrație **(EXTINDERE)**

a) Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|b_n| < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$. Aşadar pentru oricare $\varepsilon > 0$, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|a_n - \ell| \le b_n < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$. În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

b) Fie $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, atunci există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $b_n < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$. Dar din ipoteză rezultă că $a_n \le b_n < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$, şi astfel, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

c) Fie $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $b_n > \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$. Dar din ipoteză rezultă că $a_n \ge b_n > \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$, şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. ■

Problemă rezolvată

☒ Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n} = \frac{1}{2}$.

◢ Temă

Să se arate că:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos(n+1) = 0$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+n}{2n^2+1} = \frac{3}{2}$.

Soluție

a) Deoarece $|\sin x| \le |x|$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, rezultă că $\left|\sin\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\sin\frac{1}{n}\right| \le \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Având $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ se obține că $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = 0$.

b) Deoarece $1 < 1 + \frac{1}{n} \le 2$ se obține că:

$\left|\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| \le \frac{\ln 2}{n}$, $n \ge 1$. Cu criteriul majorării se obține că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$.

c) Avem succesiv $\left|\frac{n^2+1}{2n^2+n} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n-2}{2\left(2n^2+n\right)}\right| \le \frac{1}{n}$, $n \ge 1$ şi folosind criteriul majorării se obține limita cerută.

▣ TEOREMA 18

Fie (a_n) un şir de numere reale strict pozitive, crescător şi nemărginit. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$.

Demonstrație **(EXTINDERE)**

Fie $\varepsilon > 0$. Din nemărginirea şirului (a_n) rezultă că există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_{n(\varepsilon)} > \varepsilon$. Din monotonia şirului se obține că $a_n \ge a_{n(\varepsilon)} > \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$. De aici se obține că $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{\varepsilon}$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Condiția de monotonie este necesară. Într-adevăr, luând şirul (a_n), astfel încât $a_{2n} = \frac{1}{n}$ şi $a_{2n-1} = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, acesta are termenii pozitivi şi este nemărginit. Şirul $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ are subşirurile $\left(\frac{1}{a_{2n}}\right)$ şi $\left(\frac{1}{a_{2n-1}}\right)$ cu limitele diferite, deci şirul nu are limită.

2. Condiția de monotonie din enunțul teoremei poate fi înlocuită cu condiția ca şirul (a_n) să aibă limită. În acest caz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$.

◢ Temă

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, în cazurile:

a) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$;

b) $a_n = \ln(n+1)$;

c) $a_n = 2^n + n$.

3. Orice şir crescător şi nemărginit are limita $+\infty$. Într-adevăr, pentru $\varepsilon > 0$, din nemărginirea şirului rezultă că există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_{n(\varepsilon)} > \varepsilon$. Din monotonia şirului rezultă că $a_n \ge a_{n(\varepsilon)} > \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$. Aşadar, în orice vecinătate $V = (\varepsilon, +\infty)$ a lui $+\infty$ se află toți termenii cu excepția unui număr finit dintre aceştia. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

▣ TEOREMA 19

Fie (a_n) şi (b_n) şiruri de numere reale, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, iar (b_n) este mărginit. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Demonstrație

Din mărginirea şirului (b_n) există $M > 0$, astfel încât $|b_n| < M$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Putem scrie: $|a_n b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| \le M \cdot |a_n|$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, din criteriul majorării se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. ■

Exerciții rezolvate

⊠ **1.** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\left(\frac{3}{n}\right) = 0$.

Soluție

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ şi $\left|\cos\frac{3}{n}\right| \le 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Din teorema 19 rezultă că limita şirului dat este 0.

◢ **Temă**

Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$;

c) $a_n = \frac{3}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} \sin^2 k$.

⊠ **2.** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n)$.

Soluție

Fie $a_n = \cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n$. Deoarece $|\cos x| \le 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, rezultă că $|a_n| \le n$. Se obține că: $\frac{1}{n^2}(\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_n}{n}$ şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, iar $\left|\frac{a_n}{n}\right| \le 1$, limita cerută este egală cu 0.

▣ TEOREMA 20

Fie $a \in (-1, +\infty)$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a > 1 \\ 1, & \text{dacă } a = 1 \\ 0, & \text{dacă } a \in (-1, 1) \end{cases}$.

<u>*Demonstrație*</u>

• Fie $a > 1$. Atunci şirul (a^n) este crescător şi nemărginit, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$, (teorema 18).

• Fie $a \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ şi $b = \frac{1}{a} \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Pentru $b > 1$, şirul (b^n) are limita $+\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Pentru $b < -1$, considerăm subşirurile (b^{2n}) şi (b^{2n-1}) care au limitele $+\infty$, respectiv $-\infty$. Atunci: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b^n} = 0$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b^{2n-1}} = \frac{1}{-\infty} = 0$. Aşadar, dacă $a \in (-1, 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Pentru $a < -1$, şirul (a^n) nu are limită.

☞ <u>***Exemplu***</u>

Dacă $a = -2$, atunci şirul (a^n) are subşirurile $a^{2n} = 2^{2n}$ şi $a^{2n-1} = -2^{2n-1}$ cu limitele $+\infty$, respectiv $-\infty$.

2. Pentru $a < -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$.

O problemă de electrostatică

Se consideră circuitul din figura 3 format din două condensatoare C_1 şi C_2 având capacitățile a, respectiv b şi o baterie cu tensiunea electromotoare E şi un comutator K. Comutatorul este în poziția 1, iar condensatorul C_2 este descărcat.

a) Să se calculeze tensiunea la bornele condensatorului C_2 după a n-a comutare a comutatorului K între pozițiile 1 şi 2.

b) Care este tensiunea la bornele condensatorului C_2 dacă n tinde la infinit?

<u>*Soluție*</u>

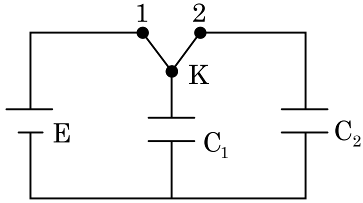


Figura 3

a) În poziția 1, condensatorul C_1 are sarcina $Q = aE$, care prin cuplarea comutatorului pe poziția 2 se va redistribui pe cele două condensatoare în $Q_1 = aU_1$ şi $Q_2 = bU_2$, deci $aE = (a+b)U_1$. Prin cuplare din nou la poziția 1 şi apoi la 2, condensatorul C_2 va avea tensiunea U_2 dată de relația $aE + bU_1 = (a+b)U_2$. Notând $\alpha = \dfrac{a}{a+b}$, se obține că $U_1 = \alpha E$, $U_2 = \alpha E + \alpha\beta E$, unde $\beta = \dfrac{b}{a+b}$. Procedând analog în continuare se obține că: $U_n = \alpha E\left(1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{n-1}\right) = \alpha E \dfrac{1-\beta^n}{1-\beta} = E\left(1-\beta^n\right)$.

b) Având în vedere că $\beta < 1$ se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} \beta^n = 0$ şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = E$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se arate că următoarele şiruri au limita 0:

a) $a_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(n^2\right)$; b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$;

c) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$; d) $a_n = \dfrac{n^3+1}{n^6+n}$.

E2. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n+2} = +\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin n}{n^2+1} = 0$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-n^3}{1+n} = -\infty$.

E3. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)}{(1+2+3+\ldots+n)^2} = \dfrac{4}{3}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)}{n\left[1+3+5+\ldots+(2n-1)\right]} = \dfrac{1}{3}$.

E4. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}\right) = 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \ldots + \dfrac{1}{n^p}\right) = 0,\ p \geq 2$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}\right) = 0$.

E5. Fie $a_n = \dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{\pi}{2n} + \ldots + \sin\dfrac{\pi}{n^2}\right)$, $n \geq 1$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

E6. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2{,}2}{\sqrt{3}+1}\right)^n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^n$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \sin\dfrac{5\pi}{4}\right)^n$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^n$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2a}{a^2+1}\right)^n$, $a \geq 0$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{a^n+1}$, $a \geq 0$.

APROFUNDARE

A1. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\dfrac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\dfrac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = 0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{n(n+2)} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+n)}\right] = 0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+e^n\right)}{n} = 1$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+2^n\right)}{n} = \ln 2$.

A2. Să se calculeze limita şirului (a_n):

a) $a_n = \dfrac{2^n + 1}{2^{n+1} + 3}$; b) $a_n = \dfrac{2^n + 3^{n+1}}{2^{n+1} + 3^n}$;

c) $a_n = \dfrac{2^{2n+1} + 3^n + 1}{3^n + 4^n}$;

d) $a_n = \dfrac{2^n + a^n}{2^n + 3^n}$, $a > 0$;

e) $a_n = \dfrac{1 + a + a^2 + ... + a^n}{1 + b + b^2 + ... + b^n}$, $a, b \in (0, +\infty)$.

(ASE, Buc., 1997)

A3. Să se arate că:

a) dacă $a > 1$, iar şirul (x_n) este crescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = +\infty$;

b) dacă $a > 1$, iar şirul (x_n) este descrescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 0$;

c) dacă $a > 1$, iar şirul (x_n) de numere reale strict pozitive este crescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x_n = +\infty$;

d) dacă $a > 1$, iar şirul (x_n) este strict descrescător şi are limita 0, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x_n = -\infty$.

DEZVOLTARE

D1. Un şir (a_n) de numere reale verifică relațiile de recurență: $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$, $n \ge 2$, $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$. (*Relație de recurență liniară şi omogenă de ordinul 2*)

Dacă $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ sunt soluțiile ecuației $r^2 = \alpha r + \beta$, să se arate că există $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, astfel încât $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$:

a) $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, în cazul $r_1 \ne r_2$;

b) $a_n = (c_1 n + c_2) r_1^n$, în cazul $r_1 = r_2$.

D2. Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri de numere reale date de relațiile de recurență: $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta b_n$ şi $b_{n+1} = \gamma a_n + \delta b_n$, $n \ge 1$. Să se arate că şirurile (a_n) şi (b_n) verifică o relație de recurență omogenă de ordinul 2.

D3. Fie (x_n) un şir de numere reale, astfel încât $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \dfrac{a x_n + b}{c x_n + d}$, $n \ge 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că dacă ecuația $r = \dfrac{ar + b}{cr + d}$ are rădăcinile reale distincte r_1, r_2, atunci şirul (y_n), $y_n = \dfrac{x_n - r_1}{x_n - r_2}$, $n \ge 1$, este o progresie geometrică.

b) Să se studieze convergența şirului (x_n) în condițiile cazului a).

D4. Să se studieze convergența şirurilor şi în caz de convergență să se afle limitele acestora:

a) $a_1 = 2$, $a_2 = 10$, $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$, $n \ge 2$;

b) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$, $n \ge 2$;

c) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 5}{a_n - 1}$, $n \ge 1$;

d) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{4}{3 + a_n}$, $n \ge 1$;

e) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 3}{a_n - 1}$, $n \ge 1$;

f) $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$, $b_{n+1} = a_n + 3b_n$, $n \ge 1$;

g) $x_1 = 0$, $y_1 = 1$, $2x_{n+1} = \sqrt{3} x_n + y_n$ şi $2y_{n+1} + x_n = \sqrt{3} y_n$, $n \ge 1$.

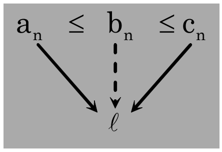
D5. Să se determine numărul pavărilor distincte cu dale 1×2 ale unui dreptunghi cu dimensiunile $2 \times n$.

8.4. CRITERIUL CLEȘTELUI

▣ TEOREMA 21 (Criteriul cleştelui)

Fie (a_n), (b_n), (c_n) şiruri de numere reale, astfel încât $a_n \le b_n \le c_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

<u>*Demonstrație*</u>



• Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, aplicând criteriul majorării, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

• Analog, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

• Putem presupune că $\ell \in \mathbb{R}$. Considerăm şirul $(c_n - a_n)$ care este convergent şi cu termenii pozitivi, iar $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = \ell - \ell = 0$.

De asemenea, $0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, relație din care se obține: $0 \le \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) \le \lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$ şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Dar, $b_n = b_n - a_n + a_n$, relație din care se obține că şirul (b_n) este convergent şi, mai mult, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 + \ell = \ell$.

Teorema este complet demonstrată. ■

Criteriul cleştelui este util în cazul în care nu putem arăta în mod direct convergența unui şir sau nu ştim să calculăm direct limita acestuia.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze limitele şirurilor cu termenul general:

a) $a_n = \dfrac{\left[n\sqrt{2}\right]}{n^2}$; **b)** $a_n = \dfrac{n + 3\sin n^2}{n^2}$; **c)** $a_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2+n}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Din proprietatea părții întregi a unui număr real se obține că: $n\sqrt{2} - 1 < \left[n\sqrt{2}\right] \le n\sqrt{2}$ şi

$$\frac{n\sqrt{2}-1}{n^2} < a_n \le \frac{\sqrt{2}}{n} \text{ sau } \frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{1}{n^2} < a_n \le \frac{\sqrt{2}}{n}. \quad (1)$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{n} - \dfrac{1}{n^2}\right) = 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ şi se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

> **◢ Temă**
> **Calculați:**
> • $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[n\sqrt{3}\right]+\left[n\sqrt{5}\right]}{n^2}$;
> • $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+\sqrt{n}}{n^2+1}$;
> • $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3n^2+k}$.

b) Deoarece $-1 \le \sin\left(n^2\right) \le 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ se obține că $\dfrac{n-3}{n^2} \le a_n \le \dfrac{n+3}{n^2}$, sau $\dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2} \le a_n \le \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2}$, şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

c) Avem inegalitățile evidente $\begin{cases} \dfrac{1}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+1} \le \dfrac{1}{n^2+1} \\ \dfrac{1}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+2} \le \dfrac{1}{n^2+1} \\ \dots \\ \dfrac{1}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+1} \end{cases}$.

Prin adunarea acestor relații se obține că:

$\dfrac{n}{n^2+n} \le a_n \le \dfrac{n}{n^2+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Dar cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = 0$, aplicând criteriul cleştelui se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):**

a) $a_n = \dfrac{n}{n^2+7}$; **b)** $a_n = \dfrac{2n^2+3n+1}{3n^3+2n+1}$;

c) $a_n = \sqrt[n]{1+2^n}$; **d)** $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$;

e) $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$; **f)** $a_n = \dfrac{e^n}{n!}$;

g) $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a > 0$; **h)** $a_n = \dfrac{2^n+3^n+5^n}{n!}$;

i) $a_n = \dfrac{2^n}{3^n+1}$; **j)** $a_n = \dfrac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$.

E2. **Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):**

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n^3+1} + \dfrac{n+2}{n^3+2} + \dots + \dfrac{n+n}{n^3+n}$;

b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

c) $a_n = \dfrac{1^2+1}{n^3+1} + \dfrac{2^2+2}{n^3+2} + \dots + \dfrac{n^2+n}{n^3+n}$;

(Olimpiadă județeană, 1975)

d) $a_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^3+1}} + \dfrac{n+2}{\sqrt{n^3+2}} + \dots + \dfrac{n+n}{\sqrt{n^3+n}}$.

APROFUNDARE

A1. **Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):**

a) $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$, $a, b \in (0, +\infty)$;

b) $a_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n}$, $a_1, a_2, \dots, a_p > 0$;

c) $a_n = \dfrac{\sin 1}{n^2+1} + \dfrac{\sin 2}{n^2+2} + \dots + \dfrac{\sin n}{n^2+n}$;

d) $a_n = \dfrac{1}{1+3^n} + \dfrac{1}{2+3^n} + \dots + \dfrac{1}{n+3^n}$;

e) $a_n = \dfrac{1}{2^0+3^n} + \dfrac{1}{2^1+3^n} + \dots + \dfrac{1}{2^n+3^n}$;

f) $a_n = \dfrac{1!+2!+\dots+n!}{n+(2n)!}$.

A2. **Să se determine $a \in (0, +\infty)$, astfel încât şirul (a_n), $a_n = \sqrt{2^n+4^n+a^n}$ să aibă limita:**

a) 5; **b)** a^2-4a; **c)** $25a^{-1}$.

A3. **Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):**

a) $a_n = \dfrac{\left[\sqrt{2}\right] + \left[2^2\sqrt{2}\right] + \dots + \left[n^2\sqrt{2}\right]}{n^3+n}$;

b) $a_n = \dfrac{1}{n} \ln\left(3^{\frac{n}{1}} + 3^{\frac{n}{2}} + \dots + 3^{\frac{n}{n}}\right)$.

(Olimpiadă locală, 1994)

A4. **Fie (a_n) un şir de numere reale pozitive cu proprietatea:**
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha<1.$$
Să se arate că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
(Criteriul raportului)

8.5. CÂTEVA LIMITE REMARCABILE

Folosind criteriul cleştelui vom demonstra câteva rezultate ce conțin şiruri trigonometrice.

▣ TEOREMA 22

Fie (x_n) un şir astfel încât $x_n \in \mathbb{R}^*$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Atunci: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1$.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie cercul trigonometric $\mathscr{C}(0, 1)$ şi unghiul la centru $\widehat{AOM}$ cu măsura în radiani egală cu x, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, (figura 4). Din interpretarea geometrică a funcțiilor trigonometrice sinus şi tangentă avem că: $\sin x = BM < x < AN = \operatorname{tg} x$, (1). Înmulțind relația (1) cu $\frac{1}{\sin x}$ se obține că:

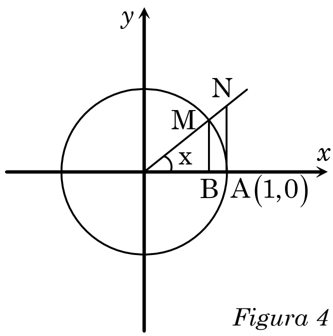


Figura 4

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}, \text{ adică } \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Aceste inegalități au loc şi pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, deoarece funcțiile $x \to \cos x$, $x \to \frac{\sin x}{x}$ sunt funcții pare. Pentru un şir (x_n) cu $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, începând de la un anumit rang avem că $-\frac{\pi}{2} < x_n < \frac{\pi}{2}$ şi $\cos x_n < \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$. (2)

Dar $1 \ge \cos x_n = 1 - 2\sin^2\frac{x_n}{2} > 1 - \frac{x_n^2}{2}$. (3)

Din relațiile (2) şi (3) se obține că: $1-\frac{x_n^2}{2} \le \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$, şi aplicând criteriul cleştelui rezultă $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1$. ■

▣ CONSECINȚĂ

Fie (x_n) un şir de numere reale nenule, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arcsin x_n}{x_n} = 1$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n} = 1$.

◢ **Temă**

Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n = \sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$; **b)** $a_n = n^2\sin\frac{2}{n^2}$; **c)** $a_n = n\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n}\right)$;

d) $a_n = n^3\sin\frac{1}{n}\sin\frac{2}{n^2}$; **e)** $a_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{2n}{n^2+1}$; **f)** $a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$.

APLICAȚII ÎN GEOMETRIE

LUNGIMEA CERCULUI

Fie $\mathscr{C}(O, r)$ un cerc de centru O şi rază r, $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon regulat cu n laturi înscris în cerc şi $B_1B_2 \ldots B_n$ un poligon regulat cu n laturi circumscris cercului, $n \geq 3$, (figura 5).

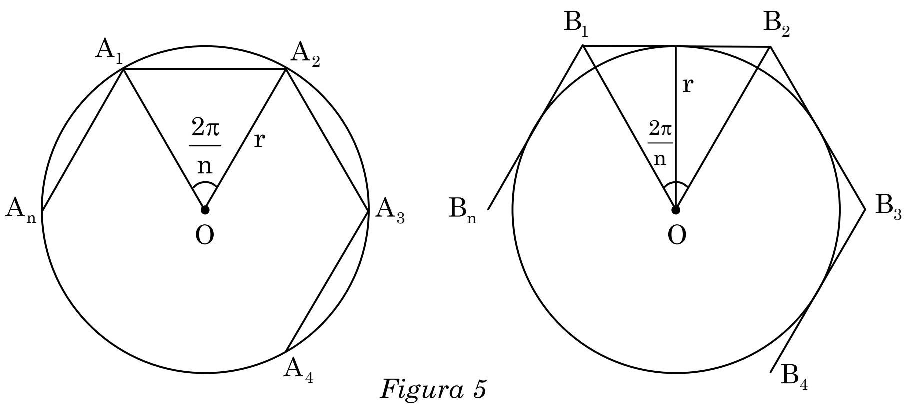


Figura 5

Obținem $A_1A_2 = 2r \cdot \sin\frac{\pi}{n}$ şi $B_1B_2 = 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, $n \geq 3$. Notând cu p_n şi P_n perimetrele celor două poligoane regulate vom obține că $p_n = 2nr \cdot \sin\frac{\pi}{n}$ şi $P_n = 2nr \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, iar dacă **l este lungimea cercului** vom avea că:

$p_n \leq l \leq P_n$, $\forall\, n \geq 3$. (1)

Prin trecere la limită, vom obține că:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} 2\pi r \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r \text{ şi } \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} 2\pi r \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r.$$

Folosind criteriul cleştelui, din relația (1) se obține că $l = 2\pi r.$

ARIA CERCULUI

Folosind notațiile anterioare pentru ariile celor două poligoane regulate se obține:

$$s_n = \frac{1}{2} n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}, \text{ respectiv } S_n = n \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, n \geq 3 \text{ şi } s_n \leq A_C \leq S_n, n \geq 3 \text{ (2)},$$

unde $\mathbf{A_C}$ **este aria cercului**.

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pi r^2 \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi r^2 \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi r^2$. Folosind criteriul cleştelui, din relația (2) se obține că $A_C = \pi r^2.$

9 PROPRIETATEA LUI WEIERSTRASS

Se cunoaşte că orice şir convergent de numere reale este mărginit, dar nu orice şir mărginit este convergent.

Proprietatea de mărginire a unui şir este o condiție necesară pentru convergența şirului, dar nu şi suficientă.

Aşadar, proprietatea de mărginire trebuie completată cu alte proprietăți ale şirului pentru a se asigura convergența acestuia.

Un rezultat important în această privință îl constituie teorema lui Weierstrass.

Karl WEIERSTRASS
(1815-1897)
matematician german

Are contribuții deosebite în analiza matematică – teoria funcțiilor, funcții abeliene, calculul variațiilor etc.

▣ **TEOREMA 23 (Proprietatea lui Weierstrass)**

Fie (a_n) un şir de numere reale.

a) Dacă (a_n) este un şir monoton crescător şi mărginit superior, atunci (a_n) este şir convergent.

b) Dacă (a_n) este un şir monoton descrescător şi mărginit inferior, atunci (a_n) este şir convergent.

Folosind proprietatea lui Weierstrass rezultă că orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Studiul convergenței unui şir folosind proprietatea lui Weierstrass prezintă avantajul că nu trebuie să cunoaştem limita acestuia, dar are şi dezavantajul că nu dă o metodă de calcul a limitei şirului.

Totuşi, lucrând cu şiruri monotone, se arată că dacă (a_n) este un şir monoton şi $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, atunci:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup A$, dacă şirul este crescător;
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf A$, dacă şirul este descrescător.

Folosind proprietatea lui Weierstrass se arată că are loc şi următorul rezultat în legătură cu şirurile mărginite.

▣ TEOREMA 24 (Lema lui Cesaro)
Orice şir mărginit conține cel puțin un subşir convergent.

➲ OBSERVAȚII

- Dacă (a_n) este un şir nemărginit superior, atunci acesta conține un subşir cu limita $+\infty$.
- Dacă (a_n) este un şir nemărginit inferior, atunci acesta conține un subşir cu limita $-\infty$.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se studieze convergența şirurilor (a_n) cu termenul general:

a) $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$; **b)** $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

Soluție

a) Deoarece $a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{3}{(n+2)(n+3)} \geq 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, rezultă că şirul este monoton crescător. Dar $a_n = 2 - \frac{3}{n+2} < 2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, rezultă astfel că şirul (a_n) este mărginit superior. Folosind proprietatea lui Weierstrass rezultă că (a_n) este convergent.

b) Deoarece $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$, se obține că şirul (a_n) este monoton crescător.

◢ Temă
Studiați convergența şirurilor:

- $a_n = \frac{3n+1}{n+3}$;
- $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$;
- $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$.

Folosind inegalitatea $n^2 > (n-1)(n+1)$, $n \geq 2$, se obține:

$$a_n < 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < 2 - \frac{1}{n} < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$ deci şirul (a_n) este mărginit superior. Aşadar (a_n) este şir convergent.

☒ **2.** Să se studieze convergența şirului cu termenul general $a_n = \frac{10^n}{n!}$.

<u>*Soluție*</u>

Avem: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10}{n+1} < 1, \forall n \geq 10$. Aşadar, şirul (a_n) este monoton descrescător începând de la termenul de rang 10. Deoarece $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, şirul este mărginit inferior.

Considerând şirul (b_n) cu termenul general $b_n = a_{n+10}$, rezultă că (b_n) este monoton descrescător şi mărginit inferior, deci este convergent.

Şirul (a_n) este şir convergent deoarece se obține din şirul (b_n) prin adăugarea unui număr finit de termeni.

> **Temă**
> **Studiați convergența şirurilor:**
> - $a_n = \frac{9^n}{(n+1)!}$;
> - $a_n = \frac{10^n}{(n+1)!}$.

➲ OBSERVAȚII

- Din problema rezolvată 2, rezultă că dacă un şir (a_n) este mărginit şi există un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât subşirul $(a_n)_{n \geq n_0}$ este monoton, atunci şirul (a_n) este convergent.
- Dacă un şir (a_n) este mărginit, dar nu este monoton, nu rezultă că şirul este divergent.

☞ <u>***Exemplu***</u>

Şirul (a_n), $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ este mărginit, dar nu este monoton. Totuşi, şirul (a_n) este convergent şi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Aşadar, proprietatea de monotonie nu este nici necesară şi nici suficientă pentru convergență.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze convergența şirurilor (a_n) în cazurile:

a) $a_n = \frac{n+4}{2n+1}$; **b)** $a_n = \frac{3n-2}{n+1}$;

c) $a_n = \frac{4n^2+1}{n^2+1}$;

d) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}$.

E2. Să se studieze convergența şirurilor:

a) $a_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$;

b) $a_n=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

c) $a_n=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$;

d) $a_n=\frac{(n-3)^2}{n^2+1}$.

E3. Să se arate că următoarele şiruri (a_n) au cel puțin un subşir convergent şi să se dea un exemplu de asemenea subşir:

a) $a_n=(-1)^n$; b) $a_n=\frac{n+(-1)^n}{n+1}$;

c) $a_n=\sin\frac{n\pi}{6}$; d) $a_n=\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$;

e) $a_n=\operatorname{tg}\frac{(2n+1)\pi}{3}$;

f) $a_n=\sin\frac{n\pi}{4}\cdot\cos\frac{n\pi}{3}$.

APROFUNDARE

A1. Să se studieze convergența şirurilor (a_n):

a) $a_n=\frac{a^n}{n!}$, $a>0$;

b) $a_n=\frac{n^p}{a^n}$, $a>1$, $p\in\mathbb{N}$;

c) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

d) $a_n=\left(1+\frac{1}{2^1}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)...\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$;

e) $a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\frac{2n-1}{2n}$;

f) $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}$.

A2. Se consideră şirul cu termenul general: $a_n=\sum_{k=1}^{n}\log_{\frac{1}{3}}\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}$. Să se arate că şirul (a_n) este convergent.

(Turism, Suceava, 1997)

A3. Să se studieze convergența şirurilor (a_n):

a) $a_n=\frac{1}{1\cdot2^2}+\frac{1}{2\cdot3^2}+...+\frac{1}{n(n+1)^2}$;

b) $a_n=\frac{1}{1!\cdot1}+\frac{1}{2!\cdot2}+...+\frac{1}{n!\cdot n}$;

c) $a_n=\frac{1}{2+3}+\frac{1}{2^2+3^2}+...+\frac{1}{2^n+3^n}$.

A4. Să se determine mulțimea limitelor subşirurilor următoarelor şiruri:

a) $a_n=1+(-1)^n$;

b) $a_n=\frac{(-1)^n n}{n+1}$;

c) $a_n=2\cdot\sin\frac{n\pi}{3}$;

d) $a_n=\sqrt{2}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}$;

e) $a_n=\sin\frac{n\pi}{3}+\cos\frac{n\pi}{6}$;

f) $a_n=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$;

g) $a_n=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^n$.

DEZVOLTARE

D1. Să se arate că:

a) orice şir nemărginit superior are un subşir cu limita $+\infty$;

b) orice şir nemărginit inferior are un subşir cu limita $-\infty$.

D2. Să se determine mulțimea punctelor limită (mulțimea limitelor subşirurilor) pentru şirurile:

a) $a_n=(-1)^n n$;

b) $\mathbf{a_n} = (-1)^n \dfrac{\mathbf{n}^2}{\mathbf{n}+3}$;

c) $\mathbf{a_n} = \mathbf{n} \cdot \sin\dfrac{\mathbf{n}\pi}{3}$;

d) $\mathbf{a_n} = (-1)^n \mathbf{n} \cdot \cos\dfrac{\mathbf{n}\pi}{4}$;

e) $\mathbf{a_n} = (1+i)^n + (1-i)^n$;

f) $\mathbf{a_n} = \left(1+i\sqrt{3}\right)^n + \left(1-i\sqrt{3}\right)^n$.

D3. **Fie $(\mathbf{a_n})$ un şir de numere reale. Să se arate că $(\mathbf{a_n})$ are cel puțin un punct limită.**

D4. **Să se demonstreze teorema lui Weierstrass. ([1])**

D5. **Să se demonstreze lema lui Cesaro. ([1])**

10 APLICAȚII ALE TEOREMEI LUI WEIERSTRASS

10.1. ŞIRUL APROXIMĂRILOR SUCCESIVE ALE UNUI NUMĂR REAL

Fie $x \in \mathbb{R}$ un număr real pozitiv cu scrierea sub formă zecimală $x = a_0,a_1a_2...a_n...$, unde $a_0 \in \mathbb{N}$ şi $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ sunt cifre ale sistemului zecimal de numerație.

Să considerăm scrierea în baza 10 a numărului x:

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$$

$\sqrt{2} \approx 1,414213...$
$\pi \approx 3,14159265...$

Asociem acestui număr şirul (x_n) cu termenul general:

$x_n = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + ... + \dfrac{a_n}{10^n}$, numit **şirul aproximărilor succesive prin lipsă** cu o eroare mai mică de 10^{-n} ale lui x şi şirul (y_n) cu termenul general $y_n = x_n + \dfrac{1}{10^n}$, numit **şirul aproximărilor succesive prin adaos** cu o eroare mai mică de 10^{-n} a lui x.

Se observă că $x_n, y_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $x_n \le x \le y_n$ şi $y_n - x_n = \dfrac{1}{10^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (1)

De asemenea, şirurile (x_n) şi (y_n) sunt monotone şi mărginite, şi rezultă conform proprietății lui Weierstrass că ele sunt convergente. Din relația (1) se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.

Analog se procedează şi în cazul $x < 0$.

În concluzie: orice număr real este limita şirurilor aproximărilor lui succesive prin lipsă şi prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-n}.

Se obține că orice număr real este limită a unui şir de numere raționale, adică orice număr real este punct de acumulare pentru mulțimea $\mathbb{Q}$.

10.2. PUTERI CU EXPONENT REAL

Fie $a \in \mathbb{R}, a > 0$ şi $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ne propunem să definim puterea a^x.

Considerăm şirurile (x_n) şi (y_n) de numere raționale care aproximează prin lipsă, respectiv prin adaos numărul x, $x_n \le x \le y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi şirurile de puteri $\left(a^{x_n}\right)$ şi $\left(a^{y_n}\right)$.

Pentru $a > 1$, şirul $\left(a^{x_n}\right)$ este monoton crescător, iar şirul $\left(a^{y_n}\right)$ este monoton descrescător.

Din relațiile $a^{x_1} < a^{x_n} < a^{y_n} < a^{y_1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că şirurile sunt mărginite.

Aplicând teorema lui Weierstrass se obține că şirurile $\left(a^{x_n}\right)$ şi $\left(a^{y_n}\right)$ sunt convergente.

Avem: $0 < a^{y_n} - a^{x_n} = a^{x_n}\left(a^{\frac{1}{10^n}} - 1\right) < a^{y_1}\left(a^{\frac{1}{10^n}} - 1\right)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{y_n} - a^{x_n}\right) = 0$ şi astfel, şirurile $\left(a^{x_n}\right)$ şi $\left(a^{y_n}\right)$ au aceeaşi limită.

Prin definiție, a^x reprezintă limita comună a şirurilor $\left(a^{x_n}\right)$ şi $\left(a^{y_n}\right)$:

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x = \lim_{n\to\infty} a^{y_n}$$

Pentru $a \in (0, 1)$, şirul $\left(a^{x_n}\right)$ este descrescător, iar $\left(a^{y_n}\right)$ este crescător, şi rezultatele anterioare se mențin.

Dacă (x_n) este un şir de numere reale convergent, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$ şi $a \in (0,+\infty)\setminus\{1\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\ell}$.

Fie (a_n) şi (b_n) şiruri de numere reale convergente cu limite nenule. Dacă şirul $\left(a_n^{b_n}\right)$ este definit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{b_n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

10.3. STUDIUL CONVERGENȚEI ŞIRURILOR DATE PRIN RELAȚII DE RECURENȚĂ

Problemă rezolvată

☒ Să se studieze convergența şirurilor (a_n):

a) $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n},\ n \ge 1$; **b)** $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{1 + a_n},\ n \ge 1$.

<u>*Soluție*</u>

a) Se observă că $a_1 = \sqrt{2} < 2$, $a_2 = \sqrt{2 + a_1} < \sqrt{2+2} = 2$.

Presupunem prin inducție că $a_k < 2$. Atunci $a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+2} = 2$. Din principiul inducției matematice, rezultă că $a_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul este mărginit superior. Avem şi $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul (a_n) este mărginit.

> **Temă**
> **Studiați convergența şirurilor:**
> **a)** $x_1 \in (0, 1)$,
> $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, n \geq 1;$
> **b)** $x_1 = 2$,
> $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + 1, n \geq 1.$

Deoarece $a_{n+1} - a_n = \sqrt{2+a_n} - a_n = \dfrac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2+a_n} + a_n} =$

$= \dfrac{(1+a_n)(2-a_n)}{\sqrt{2+a_n} + a_n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că şirul (a_n) este crescător. În concluzie, şirul (a_n) este convergent.

Pentru calculul limitei, fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x \in [0, 2]$. Folosind operațiile cu şiruri convergente, din relația de recurență obținem:

$x = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + 2)} = \sqrt{x+2}$. Se obține că $x = 2$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

b) Avem: $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = \dfrac{2}{3}$, $a_4 = \dfrac{3}{5}$, $a_5 = \dfrac{5}{8}$, şi se observă că $a_1 > a_3 > a_5$ şi $a_2 < a_4$.

Presupunem prin inducție că $a_{2k-1} > a_{2k+1}$ şi $a_{2k} < a_{2k+2}$, $k \geq 1$.

Rezultă că:

$$a_{2k+1} = \frac{1}{1 + a_{2k}} > \frac{1}{1 + a_{2k+2}} = a_{2k+3} \text{ şi } a_{2k+2} = \frac{1}{1+a_{2k+1}} < \frac{1}{1+a_{2k+3}} = a_{2k+4}.$$

Din principiul inducției se obține că $a_{2n-1} > a_{2n+1}$ şi $a_{2n} < a_{2n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Aşadar subşirul (a_{2n-1}) este monoton descrescător, iar subşirul (a_{2n}) este monoton crescător. Dar $0 < a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi astfel se obține că subşirurile (a_{2n-1}) şi (a_{2n}) sunt convergente. Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$ şi $y = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$. Din relația de recurență, pentru n par şi apoi pentru n impar rezultă relațiile $x = \dfrac{1}{1+y}$ şi $y = \dfrac{1}{1+x}$, de unde se obține că $x = y$. În concluzie şirul (a_n) este convergent, subşirurile (a_{2n}) şi (a_{2n-1}) având aceeaşi limită $\ell = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze convergența șirurilor (a_n) date de relațiile de recurență și să se afle limitele acestora:

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1+a_n^2}},\ n \ge 1;$

b) $a_1 \in (1, 2)$ și $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2,\ n \ge 1;$

c) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1,\ n \ge 1;$

d) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{2}{1+a_n},\ n \ge 1.$

APROFUNDARE

A1. Să se studieze convergența șirurilor (a_n) date prin relațiile de recurență, iar în caz de convergență să se afle limitele acestora:

a) $a_1 \in (0, 1),\ a_{n+1} = a_n - a_n^3,\ n \ge 1;$

b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1+a_n^2},\ n \ge 1;$

c) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \sqrt{6-a_n},\ n \ge 1;$

d) $a_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+a_n},\ n \ge 1;$

e) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ 13^{a_{n+2}} = 12^{a_{n+1}} + 5^{a_n},$ $n \ge 1;$

f) $x_1 = a,\ x_n \ge \dfrac{1}{4} + x_{n-1}^2,\ n \ge 2.$

(Olimpiadă locală, 1988)

DEZVOLTARE

D1. Fie $f:[a, b] \to [a, b]$ o funcție monoton crescătoare și (x_n) un șir, astfel încât $x_1 \in [a, b]$ și $x_{n+1} = f(x_n),$ $n \ge 1.$

a) Să se arate că (x_n) este monoton crescător dacă $x_1 \le x_2$, și monoton descrescător dacă $x_1 \ge x_2$.

b) Să se arate că șirul (x_n) este convergent.

D2. Fie $f:[a, b] \to [a, b]$ o funcție monoton crescătoare și (x_n) un șir, astfel încât $x_1 \in [a, b]$ și $x_{n+1} = f(x_n),\ n \ge 1.$

a) Să se arate că subșirurile (x_{2n-1}) și (x_{2n}) sunt monotone.

b) Șirul (x_n) este convergent?

D3. Să se studieze convergența șirurilor:

a) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \ln(1+x_n),\ n \ge 1;$

b) $x_1 = \dfrac{1}{3},\ x_{n+1} = x_n + 2^{x_n},\ n \ge 1;$

c) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n},\ n \ge 1;$

d) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = 3^{x_n} - 2^{x_n},\ n \ge 1.$

(Olimpiade locale, 1983)

10.4. NUMĂRUL e. ȘIRURI CU LIMITA NUMĂRUL e

Situație-problemă

O persoană are nevoie pentru o investiție derulată pe o perioadă de timp t, de o sumă S. Această investiție i-ar aduce în final avantajul triplării sumei investite.

Apelând la un creditor pentru suma S, i se impun următoarele condiții:

• *Datoria generată de împrumut trebuie plătită o singură dată la sfârşitul perioadei stabilite.*

• *Dacă perioada de timp i s-ar considera împărțită în n părți egale, suma datorată la sfârşitul fiecărei părți din cele n va fi egală cu suma datorată la sfârşitul părții anterioare majorate cu a n-a parte din aceasta.*

a) Cât ar plăti la final această persoană dacă perioada de timp ar fi considerată împărțită în 1, 2, 3, ... respectiv n părți egale?

b) Cât de mare ar putea fi datoria ce trebuie plătită la final în aceste condiții? Suma S investită ar aduce profit în condițiile acestui împrumut?

Pentru a da răspuns întrebărilor puse să analizăm cazurile particulare:

a) • Pentru $n=1$ avem $S_1 = S + \frac{S}{1} = 2S.$

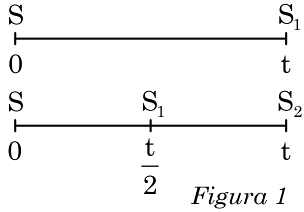


Figura 1

• Pentru $n=2$ avem, (figura 1):

$$S_1 = S + \frac{S}{2} = S\left(1+\frac{1}{2}\right) \text{ şi}$$

$$S_2 = S_1 + \frac{S_1}{2} = S_1\left(1+\frac{1}{2}\right) = S\left(1+\frac{1}{2}\right)^2.$$

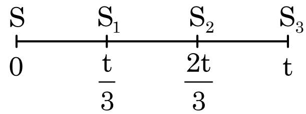


Figura 2

• Pentru $n=3$ avem, (figura 2):

$$S_1 = S + \frac{S}{3} = S\left(1+\frac{1}{3}\right),\ S_2 = S_1 + \frac{S_1}{3} = S\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \text{ şi}$$

$$S_3 = S_2 + \frac{S_2}{3} = S\left(1+\frac{1}{3}\right)^3.$$

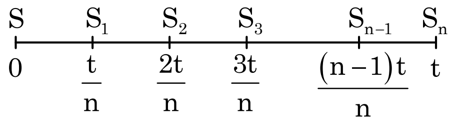


Figura 3

• Pentru cazul general avem, (figura 3):

$$S_1 = S + \frac{S}{n} = S\left(1+\frac{1}{n}\right),\quad S_2 = S_1 + \frac{S_1}{n} = S_1\left(1+\frac{1}{n}\right) = S\left(1+\frac{1}{n}\right)^2, \text{ şi în final}$$

$$S_n = S\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

După cum se observă în calculul sumei finale S_n apare şirul (x_n), $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) S-a obținut că $S_n = S\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$. Deoarece $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$, $x_3 = \frac{64}{27} \approx 2{,}37$, $x_4 = \frac{625}{256} \approx 2{,}44$, deci $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Investitorul ar putea considera că suma finală plătită ar fi cu atât mai mare cu cât n ar fi mai mare.

Aşadar, suma maximă plătită ar depinde de $\lim_{n\to\infty} x_n$, dacă aceasta există.

Pentru şirul (x_n), $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, avem următorul rezultat:

▣ TEOREMA 25 (Daniel Bernoulli [2])

Fie (x_n), $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$. Atunci:

a) şirul (x_n) este monoton strict crescător;

b) şirul (x_n) este mărginit: $2 \leq x_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

c) şirul (x_n) este convergent.

Limita şirului (x_n), $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se notează cu „e" după numele matematicianului elvețian Leonhard Euler (1707-1783). Numărul e este un număr irațional şi are valoarea aproximativă $e \approx 2{,}718281$.

Revenind la problema anterioară vom avea că:

$\lim_{n\to\infty} S_n = S \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = S \cdot e < 3S$, deci împrumutul aduce profit în condițiile specificate.

ALTE ŞIRURI CU LIMITA NUMĂRUL e

Şirul (e_n), $(e_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este şir convergent. Aplicând direct operațiile cu limite de şiruri se obține că $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^\infty$, care este o operație căreia nu i se atribuie nici un sens.

În soluționarea cazurilor de nedeterminare 1^∞, şirul $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$ are un rol important.

1. Fie (x_n), $x_n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Atunci $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Într-adevăr, (x_n) este un subşir al şirului de numere naturale, iar şirul (a_n), $a_n = \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ este un subşir al şirului (e_n). Rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e_n = e$.

2. Fie (x_n), $x_n > 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Într-adevăr, fie $y_n = [x_n]$, partea întreagă a numărului x_n.

Deoarece $x_n - 1 < y_n \le x_n$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ şi

$$\left(1+\frac{1}{1+y_n}\right)^{1+y_n}\cdot\left(1+\frac{1}{1+y_n}\right)^{-1} \le \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}\cdot\left(1+\frac{1}{y_n}\right).$$

Prin trecere la limită în inegalitățile anterioare rezultă că:

$e \le \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le e$, şi astfel se obține limita cerută.

Proprietatea (2) este adevărată şi dacă şirul (x_n) are limita $+\infty$, dar nu toți termenii săi sunt pozitivi.

Într-adevăr, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, atunci în afara vecinătății $V = (0, +\infty)$ a lui $+\infty$, există un număr finit de termeni ai şirului (x_n). Cum limita unui şir nu se schimbă prin înlăturarea unui număr finit de termeni, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

3. Fie (x_n) un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Dacă şirul (y_n), $y_n = (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}$ este definit, atunci: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$.

Acest rezultat mai general poate fi folosit pentru calculul limitelor de şiruri în cazul de nedeterminare 1^∞.

Astfel:

• Dacă $(x_n), (y_n)$ sunt şiruri de numere reale astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}\right]^{x_n y_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)}$.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)^n$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{n+2}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Se scrie $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}} = e^2$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2}{n^2+1}-1\right)^{n+2} \overset{(2)}{=} e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)\left(\frac{n^2}{n^2+1}-1\right)} = e^0 = 1.$

4. Dacă (x_n) este un şir de numere reale nenule, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, atunci:

- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1;$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a,\ a\in(0,+\infty)\setminus\{1\};$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+x_n)^r-1}{x_n} = r,\ r\in\mathbb{R}.$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$; b) $a_n=\left(1+\frac{5}{n+1}\right)^{n+1}$;

c) $a_n=\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+2}$;

d) $a_n=\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2}$;

e) $a_n=\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{n}$;

f) $a_n=\left(1+\frac{n}{2n^2+1}\right)^{n^2}$;

g) $a_n=\left(\frac{n+5}{n+2}\right)^n$; h) $a_n=\left(\frac{2n+3}{2n+4}\right)^{n+1}$;

i) $a_n=\left(\frac{n^2+n+2}{n^2+n-1}\right)^{n^2-1}$;

j) $a_n=\left(\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^{2+\sqrt{n}}$;

k) $a_n=\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n+2}}\right)^{n}$.

E2. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n=\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]^{n+1}$;

b) $a_n=\left(\frac{n^4+2n^2+1}{n^4+n^2+3n}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$;

c) $a_n=\left(3+\frac{1}{n}\right)^{-3n}\cdot 27^n$;

d) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}\right)^{n+1}$.

E3. Se consideră şirul (a_n),

$$a_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}.$$

Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\left(a_n-\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

E4. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n=n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

b) $a_n=\left(n+\frac{1}{n}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)$;

c) $a_n=n^3\cdot\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$;

d) $a_n=n^2\cdot\sin\frac{2}{n}\cdot\ln\left(\frac{n+3}{n}\right)$.

E5. Să se calculeze limitele șirurilor:

a) $a_n = n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$;

b) $a_n = n\left(\sqrt[n]{a}-1\right),\ a>1$;

c) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$; d) $a_n = n\left(\sqrt[n]{5}-\sqrt[n]{4}\right)$;

e) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{5}-\sqrt[n]{3}}$; f) $a_n = \left(\dfrac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{7}}{2}\right)^n$.

APROFUNDARE

A1. Fie (a_n) și (b_n) șiruri de numere reale astfel încât:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$$

$b_n = n$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}$.

A2. Să se determine constantele $a, b \in \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+a}{n+3}\right)^n = e^2$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+an+6}{n^2+n+1}\right)^n = e^2$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{an^2+bn+1}{n^2+3n-2}\right)^{n+1} = e$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{an^2+2n+a+1}{bn^2+3n+1}\right)^{-n} = e^{2a+b}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+a^2}{n+1}-\dfrac{n^2+b-b^2}{n+2}\right)^n = e^{-\frac{17}{4}-2a}$.

A3. Fie (a_n), $a_n = \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n$.

a) Să se arate că (a_n) este convergent.

b) Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2.$$

11 OPERAȚII CU ȘIRURI CARE AU LIMITĂ

11.1. SUMA ȘIRURILOR CARE AU LIMITĂ

Fie $(a_n), (b_n)$ șiruri de numere reale. Atunci au loc următoarele situații:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$	Scrierea simbolică a operației
$a\in\mathbb{R}$	$b\in\mathbb{R}$	$a+b$	$a+b$
$a\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$a+\infty=+\infty$
$a\in\mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$	$a-\infty=-\infty$
$+\infty$	$b\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty+b=+\infty$
$-\infty$	$b\in\mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty+b=-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Cazuri de nedeterminare. Operațiile $(+\infty)+(-\infty)$ și $(-\infty)+(+\infty)$ nu au sens	
$-\infty$	$+\infty$		

În cazul limitei sumei există cazul de nedeterminare $\infty-\infty$.

☞ ***Exemple***

a) Fie $a_n = n^2+3n$, $b_n = 3-n$. Rezultă că $a_n+b_n = n^2+2n+3$ și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty$.

b) Fie $a_n = n + (-1)^n$ şi $b_n = -n$. Atunci $a_n + b_n = (-1)^n$, care nu are limită.

c) Fie $a_n = n + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, $b_n = -n$. Atunci şirul sumă $a_n + b_n = \alpha$, are limita α.

d) Fie $a_n = n + 3$, $b_n = -2n$. Atunci $a_n + b_n = -n + 3$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$.

❑ REȚINEM!

Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limită, iar suma limitelor are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$.

Exerciţiu rezolvat

☒ Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1} - n + 1\right)$.

> ◢ **Temă**
> **Calculați:**
> **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$;
> **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n}{n+2} - n\right)$.

<u>Soluție</u>

a) Cazul $\infty - \infty$. Avem succesiv:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

b) Cazul $\infty - \infty$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1} - n + 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2 - n^2 + n - n + 1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

11.2. PRODUSUL ŞIRURILOR CARE AU LIMITĂ

Fie (a_n) un şir de numere reale care are limită şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele rezultate generale:

Produsul cu scalari:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	α	$\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n)$	Scrierea simbolică a operației
$\ell \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\ell \cdot \alpha$	$\ell \cdot \alpha$
$+\infty$	$\alpha > 0$	$+\infty$	$\alpha \cdot (+\infty) = +\infty, \alpha > 0$
$+\infty$	$\alpha < 0$	$-\infty$	$\alpha \cdot (+\infty) = -\infty, \alpha < 0$
$-\infty$	$\alpha > 0$	$-\infty$	$\alpha \cdot (-\infty) = -\infty, \alpha > 0$
$-\infty$	$\alpha < 0$	$+\infty$	$\alpha \cdot (-\infty) = +\infty, \alpha < 0$
$+\infty$	$\alpha = 0$	În aceste cazuri, şirul $(\alpha \cdot a_n)$ este şirul nul şi limita sa este 0.	
$-\infty$	$\alpha = 0$		

Produsul a două şiruri cu limita infinită:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$	Scrierea simbolică a operației
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

Produsul a două şiruri care au limită, unul dintre acestea fiind convergent:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$	Scrierea simbolică a operației
$a>0$	$+\infty$	$+\infty$	$a\cdot(+\infty)=+\infty,\ a>0$
$a<0$	$+\infty$	$-\infty$	$a\cdot(+\infty)=-\infty\ a<0$
$a>0$	$-\infty$	$-\infty$	$a\cdot(-\infty)=-\infty,\ a>0$
$a<0$	$-\infty$	$+\infty$	$a\cdot(-\infty)=+\infty,\ a<0$
0	$+\infty$	În acest caz se obține o nedeterminare. Operația $0\cdot(\pm\infty)$ nu este definită.	
0	$-\infty$		

În cazul limitei produsului există cazul de nedeterminare $0\cdot\infty$.

☞ ***Exemple***

a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n$. Şirul $(a_n \cdot b_n)$, $a_n \cdot b_n = (-1)^n$, nu are limită.

b) $a_n = n^2$, $b_n = \dfrac{\alpha}{n^2}$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha \in \mathbb{R}$.

c) $a_n = n^2$, $b_n = \dfrac{1}{n}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$.

d) $a_n = n^2$, $b_n = -\dfrac{1}{n}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-n) = -\infty$.

❑ **REȚINEM!**

Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limită şi dacă produsul limitelor are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$.

11.3. CÂTUL A DOUĂ ȘIRURI CARE AU LIMITĂ

Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri care au limită, astfel încât şirul $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ să fie definit.

Cazul în care șirurile sunt convergente s-a tratat la operații cu șiruri convergente.

În cazul în care cel puțin una dintre limitele șirurilor (a_n) și (b_n) este infinită, avem situațiile:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$	Scrierea simbolică a operației
$a \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	0	$\frac{a}{+\infty} = 0$, $\frac{a}{-\infty} = 0$
$+\infty$	$+\infty$	Cazuri de nedeterminare	Operațiile $\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$ nu sunt definite, fiind considerate operații fără sens
$-\infty$	$-\infty$		
$+\infty$	$-\infty$		
$-\infty$	$+\infty$		

Așadar, în cazul limitei raportului a două șiruri rezultă cazurile de nedeterminare $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$.

☞ ***Exemple***

a) $a_n = n\alpha$, $b_n = n$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$.

b) $a_n = n^2$, $b_n = n$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$.

c) $a_n = n$, $b_n = n^2$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

d) $a_n = -n^2$, $b_n = n$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$.

e) $a_n = 2n + 1 + (-1)^n \cdot n$, $b_n = 2n + 1 - (-1)^n \cdot n$. Șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are subșirurile $\frac{a_{2n}}{b_{2n}} = \frac{3n+1}{n+1}$ cu limita 3 și $\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}} = \frac{n+1}{3n+1}$ cu limita $\frac{1}{3}$. În acest caz șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ nu are limită.

❑ REȚINEM!

Dacă șirurile (a_n) și (b_n) au limite, iar șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este definit și raportul limitelor are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

11.4. RIDICAREA LA PUTERE

Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri de numere reale, astfel încât şirul $\left(a_n^{b_n}\right)$ să fie definit şi $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Pentru şirul putere $\left(a_n^{b_n}\right)$ avem situațiile:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{b_n}\right)$	Scrierea simbolică a operației
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
$a>1$	$+\infty$	$+\infty$	$a^{+\infty} = +\infty,\ a>1$
$a>1$	$-\infty$	0	$a^{-\infty} = 0,\ a>1$
$0<a<1$	$+\infty$	0	$a^{+\infty} = 0,\ a\in(0,\,1)$
$0<a<1$	$-\infty$	$+\infty$	$a^{-\infty} = +\infty,\ a\in(0,\,1)$
$+\infty$	$b>0$	$+\infty$	$(+\infty)^{b} = +\infty,\ b>0$
$+\infty$	$b<0$	0	$(+\infty)^{b} = 0,\ b<0$
0	$+\infty$	0	$0^{+\infty} = 0$
$+\infty$	$-\infty$	0	$(+\infty)^{-\infty} = 0$
1	$+\infty$	În aceste cazuri avem o nedeterminare	Operațiile $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$, $(+\infty)^0$, 0^0 nu sunt definite
1	$-\infty$		
$+\infty$	0		
0	0		

Cazurile **1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}** sunt cazuri de nedeterminare.

☞ ***Exemple***

a) $a_n = 1+\dfrac{\alpha}{n}$, $b_n = n$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$.

b) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $b_n = n^2$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{+\infty} = +\infty$.

c) $a_n = 1+\dfrac{1}{n}$, $b_n = 2n+1+(-1)^n\cdot n$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n+1+(-1)^n\cdot n}$ nu există, deoarece pentru n par se obține $a_{2n}^{b_{2n}} = \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{6n+1}$ cu limita e^3, iar pentru n impar se obține $c_n = \left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{2n+2}$ cu limita e.

➲ OBSERVAȚII

- Cazul 1^{∞} se soluționează folosind şiruri care au limita numărul e.
- Cazurile ∞^{0} şi 0^{0} se pot aduce la cazul $0\cdot\infty$.

Dacă avem $c_n = a_n^{b_n}$, atunci putem scrie $c_n = e^{b_n \cdot \ln a_n}$ şi se au în vedere rezultatele:

a) Dacă $x_n \in (0, \infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ln x_n = 0.$

b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{x_n} = 0.$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = n^2 - n;$

b) $a_n = -n^3 + 2n^2;$

c) $a_n = -4n^3 + 3n - 1;$

d) $a_n = 4n^4 - 5n^6 + 3.$

E2. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$; b) $a_n = \frac{2n^2-3n}{4n^2-n+1}$;

c) $a_n = \frac{2n^3+5n-1}{3n^2+n+1}$; d) $a_n = \frac{7-2n-n^3}{2n^2+3n+1}$.

E3. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n = \frac{2n^2+\alpha\cdot n+1}{3n^2+2n+1}$;

b) $a_n = \frac{\alpha\cdot n^2+2n+1}{2n^2+3n-1}$;

c) $a_n = \frac{\alpha\cdot n^3+\beta\cdot n^2+n}{2n^2+1}$;

d) $a_n = \frac{\alpha\cdot n^3+\beta\cdot n^2+1}{\alpha\cdot n^2+3n+1}$.

E4. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \frac{(n+1)^3-(n-2)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$;

b) $a_n = \frac{n\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)}{\left[1+3+5+\ldots+(2n-1)\right]^2}$;

c) $a_n = \frac{1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\ldots+n(n+2)}{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)}$;

d) $a_n = \frac{(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+n)}{1+4+7+\ldots+(3n-2)}$;

e) $a_n = \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \frac{n+1}{2}$.

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$;

b) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$;

c) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+4}+n}$;

d) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}$;

e) $a_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot n^p$, $p \in \mathbb{N}$;

f) $a_n = \left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)\cdot n^2$;

g) $a_n = n^k\left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}-\sqrt{\frac{n}{n+2}}\right)$, $k \in \mathbb{N}$;

h) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+2}}$.

A2. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$;

b) $a_n = \dfrac{2^n+3^n+1}{3^n+n+1}$;

c) $a_n = \dfrac{3^n+2\cdot 5^n}{7\cdot 3^n+5^n}$;

d) $a_n = \dfrac{2^n+3\cdot 4^n+7^{n+2}}{3\cdot 2^n+4\cdot 7^n}$;

e) $a_n = \dfrac{a^n+2^n}{3^n+2^n}$, $a>0$;

f) $a_n = \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, $a, b>0$;

g) $a_n = \dfrac{a^{2n}+a^2+8}{a^{2n}+2a^2+4}$, $a>0$.

A3. Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{2n+1}-a\cdot n-b\right)=1$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+a}-n\right)=1$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+a\cdot n}{n+2}-\dfrac{b\cdot n^2}{n+1}\right)=3$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}\right)=0$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[a\sqrt{n+2}+\left(a^2+a-3\right)\sqrt{n}\right]=0$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\left(20-a^2\right)n^2+2n+3}}{2n+1}=2$.

A4. Să se determine parametrii reali a şi b, astfel încât şirurile (a_n) şi (b_n) să fie simultan convergente:

a) $a_n = a\sqrt{n+5}+b\sqrt{9n+5}-\sqrt{4n+3}$,
$b_n = a\sqrt{9n+3}-b\sqrt{25n+30}+\sqrt{64n+15}$;

b) $a_n = \left(a^2+b\right)\sqrt{n+4}-\sqrt{n+9}$,
$b_n = a\sqrt{9n+8}+b^2\sqrt{n+5}-3\sqrt{n+4}$.

A5. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \sqrt[3]{n^3+n}-n$;

b) $a_n = \sqrt[3]{n^3+n^2}+\sqrt[3]{3n-n^2}$;

c) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt{n^2+2}\right)$;

d) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^3+3n}+\sqrt[3]{n-3n^3}\right)$.

A6. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+1\right)^{\frac{n}{n^2+1}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{\ln^{-2} n}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+3}\right)^{\frac{2}{n}}$.

11.5. LEMA LUI STOLZ-CESARO

▣ TEOREMA 25 (Stolz-Cesaro [2])

Fie (a_n) şi (b_n) şiruri de numere reale, astfel încât:

a) şirul (b_n) este strict crescător şi nemărginit, cu termenii nenuli;

b) şirul (c_n), $c_n = \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ are limita $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci şirul $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\ell$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$; b) $a_n = \dfrac{\ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n}{n+1}$;

c) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n}\right)$;

d) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

e) $a_n = \dfrac{1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4}{n^5}$;

f) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$;

g) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + ... + \dfrac{1}{2n-1}\right)$.

APROFUNDARE

A1. Fie (a_n) un şir de numere reale şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \ell$.

A2. Fie (a_n) un şir de numere reale strict pozitive şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Să se arate că:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n} = \ell$.

A3. Fie (a_n) un şir de numere reale strict pozitive. Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ există, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

A4. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n = \sqrt[n]{n}$; b) $a_n = \sqrt[n]{n!}$;

c) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$; d) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n+1}}$;

e) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{(n!)^n}}$;

f) $a_n = \sqrt[n]{n(n+1)(n+2)...(n+n)}$.

DEZVOLTARE

D1. Fie $(a_n), (b_n)$ astfel încât:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

b) (b_n) este strict descrescător;

c) şirul (c_n), $c_n = \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$.

Atunci şirul $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ este convergent şi are limita ℓ.

(Lema lui Stolz-Cezaro, cazul $\dfrac{0}{0}$)

D2. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n = n\left(\ln 2 - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} - ... - \dfrac{1}{2n}\right)$;

b) $a_n = n\left(e - \dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} - \dfrac{1}{2!} ... - \dfrac{1}{n!}\right)$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ Să se precizeze valoarea de adevăr a următoarelor propoziții. În cazul propozițiilor false, să se dea un contraexemplu.

a) Orice şir monoton este mărginit.

b) Orice şir mărginit este monoton.

c) Orice şir convergent este monoton.

d) Orice subşir al unui şir monoton este monoton.

e) Există şiruri monoton crescătoare care au cel puțin un subşir monoton descrescător.

f) Suma a două şiruri monotone este un şir monoton.

g) Diferența a două şiruri monoton crescătoare este un şir monoton crescător.

h) Suma a două şiruri nemărginite este un şir nemărginit.

i) Orice şir divergent este nemărginit.

j) Orice şir nemărginit are limita $+\infty$ sau $-\infty$.

k) Produsul a două şiruri care nu au limită este un şir care nu are limită.

l) Dacă două şiruri sunt convergente, atunci raportul lor este un şir convergent.

m) Dacă pătratul unui şir (a_n) este şir convergent, atunci şirul (a_n) este şir convergent.

n) Dacă un şir convergent are toți termenii diferiți de zero, atunci limita sa este diferită de zero.

Testul 2

❍ 1. Să se studieze monotonia şi mărginirea şirurilor (a_n):

a) $a_n = \frac{n+1}{n+3}$; b) $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{n+2}$; c) $a_n = \frac{2n+\alpha}{n+1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3p.)

❍ 2. Se consideră şirul (a_n) astfel încât: $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n$, $n \geq 1$.

a) Să se arate că $a_n = \frac{2}{3}\left[2^n + (-1)^n\right]$, $n \geq 1$.

b) Să se studieze convergența şirului cu termenul general $b_n = \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$.

(2p.)

❍ 3. Să se calculeze limitele şirurilor cu termenul general:

a) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$; b) $a_n = \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+n-1}\right)$. *(2p.)*

❍ 4. Să se calculeze limita şirului (a_n) dacă: $\left(1+\frac{2n}{n^2+1}\right)^n \leq a_n \leq \left(\frac{n^2+3n}{n^2+n+1}\right)^{n+1}$, $n \geq 1$.

(2p.)

Testul 3

❍ 1. Să se studieze convergența şirurilor (a_n) şi în caz de convergență să se calculeze limita acestora:

a) $a_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+3)}$; b) $a_n = \left(\frac{2^{\frac{2}{n}} + 3^{\frac{3}{n}}}{2}\right)^n$. *(3p.)*

❍ **2. Să se determine valorile parametrilor reali în cazurile:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5\cdot a^n}{3^n+10^{n+1}}=\dfrac{1}{2}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\dfrac{b\cdot n+3}{n^2+1}\right)^{n-1}=e^3$. *(2p.)*

❍ **3. Să se calculeze:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}-3\sqrt{n+2}}$. *(2p.)*

❍ **4. Să se calculeze:** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$.

(2p.)

12 LIMITA UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

Fie $f: D\to\mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală şi x_0 un punct de acumulare al mulțimii D.

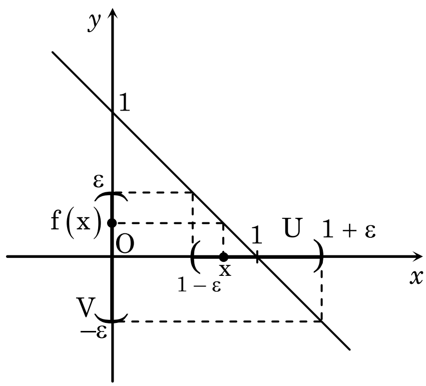
După cum se cunoaşte, pentru orice vecinătate $V\in\mathcal{V}(x_0)$, există puncte $x\in D\cap\left(V\setminus\{x_0\}\right)$ în care funcția f este definită. Altfel spus, funcția f este definită în puncte „oricât de apropiate“ de punctul x_0.

Se pune, astfel, problema comportării funcției f în vecinătatea (apropierea) punctului x_0. Aceasta înseamnă a studia ce se întâmplă cu valorile funcției f pe vecinătăți oarecare ale punctului x_0 (chiar şi în cazurile în care f nu este definită în x_0).

Să analizăm următorul exemplu:

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1-x$ şi punctul $x_0=1$, punct de acumulare al domeniului de definiție.

Vom studia ce se întâmplă cu valorile funcției f când x se află într-o vecinătate $U\in\mathcal{V}(1)$ „oricât de mică“. Considerăm $U=(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, o vecinătate a punctului $x_0=1$, (figura 1).



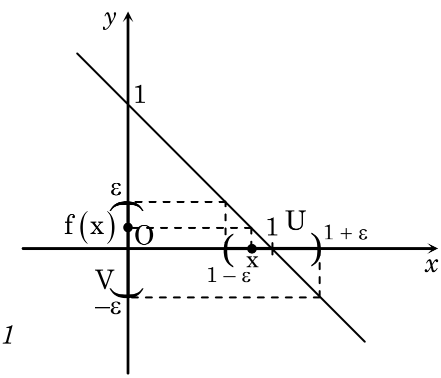


Figura 1

Se observă, lecturând figura 1, că pentru $\varepsilon > 0$, valorile funcției f vor aparține mulțimii $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$ care este o vecinătate a punctului 0.

Aşadar, intuitiv, putem spune că valorile funcției f sunt mereu într-o vecinătate a punctului 0, pentru oricare $\varepsilon > 0$.

Folosind un alt limbaj vom spune că dacă „x tinde la 1“ atunci „$f(x)$ tinde la 0“.

Mai mult, fie V o vecinătate a punctului 0. Atunci există un interval $I = (a, b)$ astfel încât $0 \in I \subset V$, (figura 2).

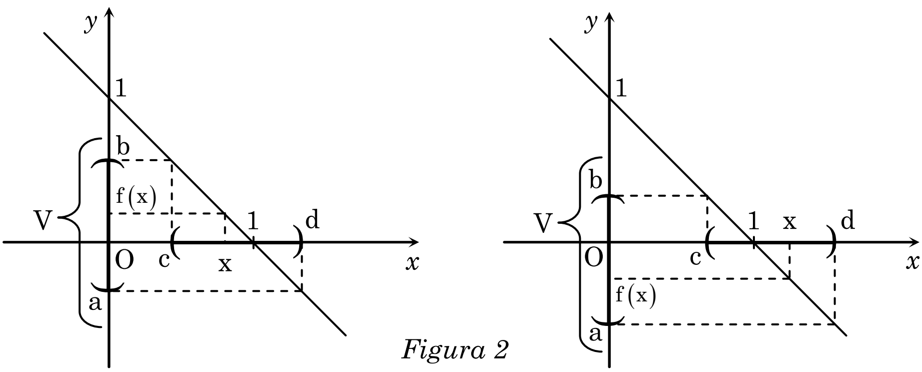


Figura 2

Lecturând figura 2 se observă că există intervalul $U = (c, d)$, vecinătate a punctului $x_0 = 1$, cu proprietatea că pentru oricare $x \in U \cap D$ rezultă că $f(x) \in (a, b)$, deci $f(x) \in V$.

Vom spune că numărul $\ell = 0$ este limita funcției f în punctul $x_0 = 1$ şi vom scrie $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

Proprietatea desprinsă în cazul acestei funcții defineşte o nouă noțiune importantă în cadrul analizei matematice.

❖ DEFINIȚIE

- Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea D şi $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Numărul ℓ se numeşte **limita funcției f în punctul x_0** dacă pentru oricare vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ cu proprietatea că pentru orice $x \in D \cap (U \setminus \{x_0\})$ rezultă că $f(x) \in V$.

  Se foloseşte notația $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

➲ OBSERVAȚII

- Aşa cum s-a specificat, problema existenței limitei unei funcții $f : D \to \mathbb{R}$ în punctul de acumulare $x_0 \in D'$ se pune chiar dacă funcția f nu este definită în x_0. În acest caz restricția $x \neq x_0$ din definiție nu mai este necesară.

- Dacă mulțimea D este nemărginită superior sau inferior, atunci x_0 poate fi $+\infty$, respectiv $-\infty$.
- Dacă x_0 nu este punct de acumulare pentru D, atunci nu se pune problema limitei funcției f în x_0.
  Astfel, într-un punct izolat al mulțimii D nu se pune problema limitei.
- Limita funcției în punctul x_0, dacă există, este unică.

Definiția limitei unui şir este conținută în definiția limitei unei funcții într-un punct. Mai mult, folosind limitele de şiruri se poate caracteriza existența limitei unei funcții într-un punct.

▣ TEOREMA 27
(Eduard Heine (1821-1881), [2])
Fie $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D şi $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$;

2. Pentru oricare şir (x_n), $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$.

Eduard HEINE
(1821-1882)
matematician german

Are contribuții în studiul numerelor iraționale, convergenței şirurilor, funcțiilor continue.

Această teoremă dă posibilitatea folosirii tuturor rezultatelor studiate în legătură cu calculul limitelor de şiruri.

➲ OBSERVAȚII

- Pentru a determina limita funcției $f: D \to \mathbb{R}$ într-un punct de acumulare x_0 al lui D este suficient să cunoaştem limita unui singur şir $(f(x_n))$, unde $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.
- Funcția $f: D \to \mathbb{R}$ nu are limită în punctul x_0, în una din situațiile:
  a) Există un şir (x_n), $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ cu limita x_0, astfel încât şirul $(f(x_n))$ nu are limită.
  b) Există şirurile $(x_n), (y_n)$, $x_n, y_n \in D \setminus \{x_0\}$ cu limita x_0, astfel încât şirurile $(f(x_n))$ şi $(f(y_n))$ au limite diferite.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se studieze existența limitelor funcțiilor f în punctele specificate:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 3x,\ x_0 = 2;$

b) $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 0.$

<u>Soluție</u>

a) Punctul $x_0 = 2$ este punct de acumulare pentru $\mathbb{R}$. Dacă (x_n) este un șir de numere reale, $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, atunci se obține $f(x_n) = x_n^{\ 2} + 3x_n$. Folosind operațiile cu limite de șiruri obținem: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n^{\ 2} + 3x_n\right) = 2^2 + 3\cdot 2 = 10.$ Așadar funcția f are limită în punctul $x_0 = 2$ și $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 10.$

b) Punctul $x_0 = 0$ este punct de acumulare pentru mulțimea $(0, +\infty)$.

Fie (x_n) un șir, astfel încât $x_n \in (0, +\infty)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{0_{(+)}} = +\infty.$ Așadar funcția f are limită în $x_0 = 0$ și $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty.$

☒ **2.** Să se arate că funcțiile f nu au limită în punctele specificate:

a) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 0;$

b) $f: \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x,\ x_0 = +\infty.$

<u>Soluție</u>

a) Vom arăta că există două șiruri $(x_n), (y_n)$, cu $x_n, y_n \in \mathbb{R}^*$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ pentru care șirurile $(f(x_n))$ și $(f(y_n))$ nu au aceeași limită. Considerăm $x_n = -\frac{1}{n},\ y_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*$ și se obține că $f(x_n) = -n,\ f(y_n) = n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = +\infty.$ În concluzie funcția f nu are limită în $x_0 = 0.$

b) Considerăm șirurile $(x_n), (y_n)$ cu termenii generali $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,$ $y_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ și se obține că $f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$ $f(y_n) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$ Așadar f nu are limită la $+\infty.$

☒ **3.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ nu are limită în nici un punct $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$.

Soluție

Fie $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ și $(x_n),(y_n)$ două șiruri de numere reale astfel încât $x_n\in\mathbb{Q},\ y_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, și $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$.

Atunci $f(x_n)=1,\ f(y_n)=0,\ n\in\mathbb{N}^*$ și rezultă că șirurile $(f(x_n)),\ (f(y_n))$, au limite diferite, deci funcția f nu are limită în punctul x_0.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x)$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{(x-2)^2}$; d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3}{x+6}$;

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^2$.

E2. Să se determine constanta reală a pentru care:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+a}{1+x}=2$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+3}{2x+3}=3$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2+ax)}{x^2+ax+x}=\dfrac{2}{3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{(\sqrt{x-1}+a)(x-2)}=\dfrac{1}{4}$.

APROFUNDARE

A1. Să se arate că următoarele funcții nu au limite în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right),\ x_0=0$;

b) $f:\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2x},\ x_0=1$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\\ \cos x, & x\geq 0\end{cases}$, în $x_0=0$ și $x_0=+\infty$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=[x],\ x_0\in\mathbb{Z}$.

A2. Să se arate că următoarele funcții nu au limită în punctele specificate. Există puncte în care funcțiile au limită?

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2, & x\in\mathbb{Q}\\ x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, $x_0=3$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ 2x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases},\ x_0=1$.

(Olimpiadă, 1993)

13 LIMITE LATERALE

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală și $x_0 \in D'$ un punct de acumulare al mulțimii D.

❖ DEFINIȚII

- Numărul $\ell_s \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește **limita la stânga** a funcției f în x_0, dacă pentru oricare șir (x_n), $x_n \in D \cap (-\infty, x_0)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell_s$.
- Numărul $\ell_d \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește **limita la dreapta** a funcției f în x_0, dacă pentru oricare șir (x_n), $x_n \in D \cap (0, +\infty)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell_d$.

Limitele la stânga și la dreapta ale funcției f în punctul $x_0 \in D'$ se numesc **limite laterale** ale funcției f în x_0.

- Pentru limita la stânga se folosesc notațiile $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ sau $f(x_0 - 0)$.
- Pentru limita la dreapta se folosesc notațiile $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ sau $f(x_0 + 0)$.

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă funcția f are în punctul x_0 limite laterale, acestea sunt unice. Acest fapt rezultă din unicitatea limitelor de șiruri.

2. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ punct de acumulare. Funcția f poate să admită limită la stânga în x_0, fără să aibă limită la dreapta în x_0, sau reciproc.

☞ ***Exemplu***

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases}$. Pentru șirurile cu termenii generali $x_n = \dfrac{-1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ și $y_n = \dfrac{-1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$ care au limita 0 și sunt negative se obține: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 1$, deci funcția f nu are limită la stânga în x_0. Se obține ușor că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$.

3. Există funcții $f : D \to \mathbb{R}$ care nu au limite laterale în $x_0 \in D'$.

☞ ***Exemplu***

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ nu are limite laterale în $x_0=0$.

4. Fie $f:(a,\ b)\to\mathbb{R}$. Atunci limita la stânga în a şi limita la dreapta în b, nu au sens, deoarece în acest caz $(a,\ b)\cap(-\infty,\ a)=\varnothing$ şi $(a,\ b)\cap(b,\ +\infty)=\varnothing$. Dacă f are limite în a şi b, acestea coincid cu limita la dreapta în a, respectiv cu limita la stânga în b.

După cum s-a observat anterior, o funcție $f:D\to\mathbb{R}$ poate avea limite laterale în $x_0\in D'$ sau este posibil ca acestea să nu existe.

În cazul în care limitele laterale există, ele pot fi egale sau diferite. Dacă limitele laterale există şi sunt egale, atunci funcția are limită în x_0, egală cu valoarea comună a acestora, în caz contrar funcția nu are limită în x_0.

❑ **REȚINEM!**

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală şi $x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D.

Funcția f are limită în punctul $x_0\in D'$ dacă şi numai dacă limitele laterale ale funcției în x_0 există şi sunt egale.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow f(x_0-0)=\ell=f(x_0+0)$$

Problemă rezolvată

☒ Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\le 1\\ a^2x, & x>1\end{cases}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$, pentru care funcția f are limită în $x_0=1$.

Soluție

Calculăm $\ell_s=f(x_0-0)$ şi $\ell_d=f(x_0+0)$. Fie $(x_n),\ x_n<1$, un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+a)=2+a=\ell_s$.

Dacă $(x_n),\ x_n>1$, este un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a^2x_n)=$ $=a^2=\ell_d$.

Din condiția $\ell_s=\ell_d$ se obține ecuația $a^2=a+2$ cu soluțiile $a\in\{-1,\ 2\}$.

Aşadar $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ există dacă şi numai dacă $a\in\{-1,\ 2\}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se verifice dacă următoarele funcții au limită în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x},\ x_0 \in \{0, 1, \infty\}$;

b) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x \le 2 \\ 5x, & x>2 \end{cases},\ x_0=2$;

c) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\ne 0 \\ 1, & x=0 \end{cases},\ x_0=0$.

E2. Să se determine constantele $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ au limită în punctele date:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax, & x\le 1 \\ ax+1, & x>1 \end{cases},\ x_0=1$;

b) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, & x\le 1 \\ 2+x, & x\in(1, 2) \\ x^2-a, & x\ge 2 \end{cases},\ x_0=1$ și $x_0=2$;

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+a}{x+1}, & x\le 0 \\ \dfrac{2x+1}{x+3}, & x>0 \end{cases},\ x_0=0$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care există limitele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x>0 \\ x+a, & x\le 0 \end{cases}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a, & x\le -1 \\ 3x^2+bx, & x\in(-1, 1) \\ x^2+2ax+1, & x\ge 1 \end{cases},$$

în $x=-1$ și $x=1$.

A2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se determine punctele în care f are limită dacă:

a) $f(x)=|x|$; b) $f(x)=|x-2|$;

c) $f(x)=[x]$; d) $f(x)=\max\{1;\ x^2\}$;

e) $f(x)=x\cdot \operatorname{sgn}(x)$; f) $f(x)=x+[x]$.

A3. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ nu are limită în $x=0$.

A4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

a) Să se arate că dacă $\alpha<0$, funcția f nu are limită în $x=0$.

b) Să se arate că dacă $\alpha>0$, funcția f are limită în $x=0$.

DEZVOLTARE

D1. Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție reală de argument real și $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D.

Să se arate că dacă f este monotonă, atunci funcția f are limite laterale în x_0.

D2. Să se arate că următoarele funcții au limită în orice punct x_0 din domeniul de definiție:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a^x,\ a\in(0,\infty)\setminus\{1\}$;

b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_a x$, $a\in(0, \infty)\setminus\{1\}$;

c) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a\in\mathbb{R}^*$.

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$.

D3. **Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție reală și $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D.**
Să se arate că numărul ℓ_s este limita la stânga în x_0 a funcției f dacă și numai dacă pentru oricare șir (x_n), $x_n \in D$, $x_n < x_0$, monoton crescător și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, rezultă că:
$\ell_s = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

14 PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CARE AU LIMITĂ

Teorema lui Heine referitoare la caracterizarea limitelor de funcții cu ajutorul limitelor de șiruri permite extinderea unor proprietăți ale limitelor de șiruri la limitele de funcții.

▣ TEOREMA 28 (limita modulului)
Fie $f: D \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$.

Demonstrație

Din condiția $\ell = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ rezultă că pentru oricare șir (x_n), $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$. Din proprietatea limitei modulului unui șir se obține că:

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = \left|\lim_{n\to\infty} f(x_n)\right| = |\ell| \text{ și astfel } \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|. \ ■$$

❑ REȚINEM!

$\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$, (limita modulului este egală cu modulul limitei).

▣ TEOREMA 29 (Criteriul majorării, cazul limitelor finite)
Fie $f, g: D \to \mathbb{R}$ două funcții reale și $x_0 \in D'$ un punct de acumulare al lui D. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ și există $\ell \in \mathbb{R}$, astfel încât $|f(x) - \ell| \le g(x)$, $\forall x \in D$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Demonstrație

Fie (x_n), $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ un șir oarecare cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = 0$ și $|f(x_n) - \ell| \le g(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Din criteriul majorării pentru șiruri rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$. Așadar, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$. ■

Probleme rezolvate

> ◢ **Temă**
> **Calculați:**
> - $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cos\frac{1}{x}$;
> - $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{3}{x^2}$;
> - $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2+1}$.

☒ **1.** Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$

<u>*Soluție*</u>

Considerăm funcțiile:

$$f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\ \text{şi}\ g(x)=|x|.$$

Avem: $|f(x)-0|=\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|,\ \forall x\in\mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0.$

Din criteriul majorării rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$

☒ **2.** Să se arate că $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0,\ x_0\in\mathbb{R}.$

<u>*Soluție*</u>

Avem: $|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=$
$=|x-x_0|,\ \forall\ x\in\mathbb{R}.$

Atunci $\lim\limits_{x\to x_0}(\sin x-\sin x_0)=0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0.$

Analog:

$|\cos x-\cos x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le|x-x_0|,\ \forall x\in\mathbb{R}$ şi astfel $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0.$

> ▣ **TEOREMA 30 (Criteriul majorării, cazul limitelor infinite)**
> Fie $f, g: D\to\mathbb{R},\ x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D şi $f(x)\le g(x),\ \forall\ x\in D.$
> **a)** Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty,$ atunci $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty.$
> **b)** Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty,$ atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty.$

Problemă rezolvată

> ◢ **Temă**
> **Să se calculeze:**
> - $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\cos x)$;
> - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x+\ln\frac{x}{x^2+1}\right)$;
> - $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sin^2 x\right)$.

☒ Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sin x)=-\infty.$

<u>*Soluție*</u>

Deoarece $-1\le\sin x\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R},$ avem:

$x-1\le x+\sin x\le x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Dar $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$, de unde, cu criteriul majorării, rezultă limitele cerute.

> **▣ TEOREMA 31 (trecerea la limită în inegalități)**
> Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell_2$ şi există o vecinătate $V \in \mathscr{V}(x_0)$ astfel încât $f(x)\le g(x)$, $\forall x \in V\cap(D\setminus\{x_0\})$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Demonstrație

Fie (x_n), $x_n \in V\cap(D\setminus\{x_0\})$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Atunci $f(x_n)\le g(x_n)$, $n\in\mathbb{N}^*$. Din teorema de trecere la limită în inegalități pentru şiruri rezultă:

$\ell_1=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\le \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=\ell_2$ şi teorema este demonstrată. ■

> **▣ TEOREMA 32 (Criteriul cleştelui)**
> Fie funcțiile $f, g, h : D\to\mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D şi $V\in\mathscr{V}(x_0)$, astfel încât $f(x)\le g(x)\le h(x)$, $\forall x\in V\cap(D\setminus\{x_0\})$. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\ell$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$.

Demonstrație

Fie (x_n), $x_n\in V\cap(D\setminus\{x_0\})$, un şir cu limita x_0. Rezultă că $f(x_n)\le g(x_n)\le h(x_n)$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$. Dar $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\ell=\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n)$ şi aplicând criteriul cleştelui pentru şiruri rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=\ell$. Cum şirul (x_n) a fost ales arbitrar rezultă că $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$. ■

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0$.

Soluție

Avem inegalitățile $-x^2\le x^2\sin\frac{1}{x}\le x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{x\to0} x^2=0=\lim\limits_{x\to0}(-x^2)$.

Cu criteriul cleştelui rezultă că $\lim\limits_{x\to0} x^2\sin\frac{1}{x}=0$.

☒ **2.** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to0} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]$.

Soluție

Folosind definiția părții întregi se obține:

$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}, \forall x\in\mathbb{R}^*$. De aici rezultă că: $1-x<x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\le 1, \forall x\in(0,+\infty)$ și $1-x>x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\ge 1$, $\forall x\in(-\infty,0)$. Prin trecere la limită se obține că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=1$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=1$, deci limita cerută este egală cu 1.

◢ **Temă**

Să se calculeze:

- $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\cos\frac{1}{x-1}$;
- $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{2}{x}\right)$;
- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}$.

☒ **3.** Fie $f, g: D\to\mathbb{R}$ și $x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D.

Să se arate că dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, iar funcția g este mărginită, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=0$.

Soluție

Deoarece funcția g este mărginită rezultă că există $M>0$, astfel încât $|g(x)|<M, \forall x\in D$. Atunci:

$-M\le g(x)\le M$ și $-M\cdot|f(x)|\le f(x)\cdot g(x)\le M|f(x)|, \forall x\in D$.

Dar $\lim\limits_{x\to x_0} M\cdot|f(x)|=0=\lim\limits_{x\to x_0}(-M\cdot|f(x)|)$ și cu criteriul cleștelui se obține că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=0$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}\cdot\ln x=0$;

b) $\lim\limits_{x\to\pi}\sin x\cdot\cos\frac{1}{x-\pi}=0$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x-1}{2^x+1}=1$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\arcsin\frac{1}{x}\right)=+\infty$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x}\right)=+\infty$;

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sin x}{x}=+\infty$;

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\cos x)\cdot e^x=+\infty$;

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3+\sin x)\cdot\ln x=+\infty$;

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-\sin x\right)=+\infty$.

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left[\frac{1}{x}\right]$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left(\left[\frac{1}{x^2}\right]+\left[\frac{2}{x^2}\right]\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[x]+[2x]+\ldots+[nx]}{x}$.

A2. **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $|f(x)-\sin x|\le$ $\le |x|,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.**
Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

A3. **Să se determine, dacă există:**
a) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}(1+\sin x)$;
b) $\lim\limits_{x\to\infty} x(a+\sin x),\ a\in\mathbb{R}$.

A4. **Fie $f:D\to\mathbb{R},\ x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D şi $\ell=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.**
Să se arate că dacă $\ell>\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$, atunci există o vecinătate $V\in$ $\in\mathcal{V}(x_0)$, astfel încât $f(x)>f(\alpha)$, $\forall x\in V\cap(D\setminus\{x_0\})$.
(Funcția f este mărginită inferior pe mulținea $V\cap D\setminus\{x_0\}$.)

15 LIMITELE FUNCȚIILOR ELEMENTARE

Folosind operațiile cu şiruri care au limită şi teorema lui Heine se pot găsi cu uşurință limitele funcțiilor elementare în punctele de acumulare ale domeniului de definiție.

Dacă $f:D\to\mathbb{R}$ este o funcție elementară, iar $x_0\in D$, atunci are loc următorul rezultat general:

▣ TEOREMA 33
Fie $f:D\to\mathbb{R}$, o funcție elementară şi $x_0\in D\cap D'$. Atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Această teoremă arată faptul că limita unei funcții elementare într-un punct din domeniul de definiție este chiar valoarea funcției în acest punct. Aşadar, în asemenea cazuri calculul limitei nu comportă nici o dificultate.

Pentru cazul în care $x_0\in D'$ este un punct de acumulare al domeniului de definiție dar nu aparține acestuia, calculul limitei se poate determina fie prin lectura reprezentării geometrice a graficului acesteia, fie prin folosirea operațiilor cu limite de şiruri.

Vom ilustra aceste modalități în cazul principalelor funcții elementare.

• Funcția polinomială

Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, este funcție polinomială de gradul n, $n\in\mathbb{N}$, atunci avem:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\begin{cases} a_0\cdot(+\infty), & n\in\mathbb{N}^*\\ a_0, & n=0\end{cases},$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\begin{cases} a_0\cdot(-\infty)^n, & n\in\mathbb{N}^*\\ a_0, & n=0\end{cases}.$$

• **Funcția radical de ordin par**

Fie $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[n]{x}$. Lecturând graficul funcției se obține că $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$.

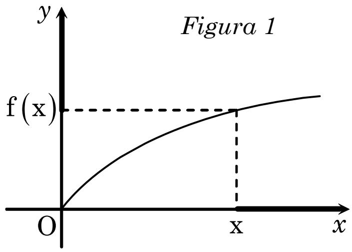
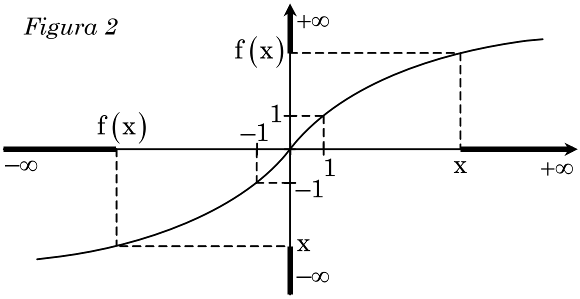


Figura 1

• **Funcția radical de ordin impar**

Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, n impar, avem, prin lecturare grafică: $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[n]{x}=-\infty$.

Figura 2



• **Funcția exponențială**

Fie $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty),\ f(x)=a^x$, $a>0,\ a\neq 1$. În funcție de valorile lui a avem graficele din figura 3.

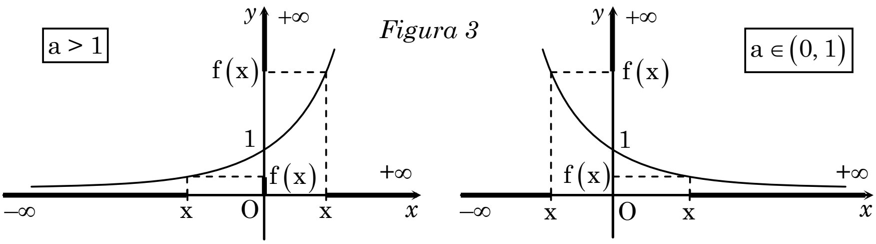


Figura 3

Din lectura grafică se obține:

$$\lim_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}+\infty, & a>1\\ 0, & a<1\end{cases}\quad \text{şi}\quad \lim_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}0, & a>1\\ +\infty, & a<1\end{cases}.$$

• **Funcția logaritmică**

Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_a x,\ a\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$. Studiind graficele funcției în funcție de valorile lui a se obține:

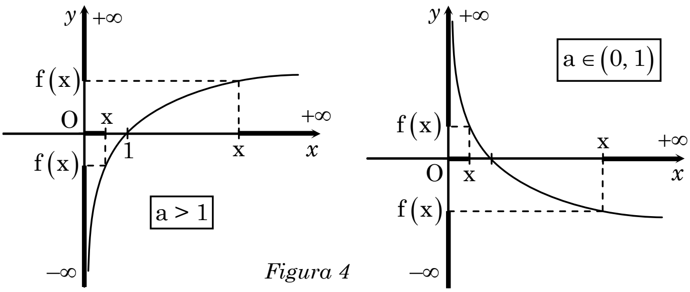


Figura 4

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=\begin{cases}+\infty, & a>1\\ -\infty, & a<1\end{cases}\quad \text{şi}\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_a x=\begin{cases}-\infty, & a>1\\ +\infty, & a<1\end{cases}.$$

• Funcții raționale

Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcții polinomiale de gradul p, respectiv q:
$f(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + ... + a_p$, $g(x) = b_0x^q + b_1x^{q-1} + ... + b_q$.

Dacă $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $g(x) = 0$, fie $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\}$ şi funcția rațională $h : \mathbb{R} \setminus A \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Dacă $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, există situațiile:

• $x_0 \in \mathbb{R} \setminus A$ şi atunci $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$;

• $x_0 = \pm\infty$. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} \cdot (+\infty), & p > q \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & p = q \\ 0, & p < q \end{cases}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} \cdot (-\infty)^{p-q}, & p > q \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & p = q \\ 0, & p < q \end{cases}$;

• $x_0 \in A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\}$ şi A este nevidă. În acest caz sunt posibile situațiile:

a) $f(x_0) \neq 0, g(x_0) = 0$. În această situație se calculează limitele laterale ale funcției h în x_0.

☞ ***Exemplu***

• Fie $h : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(x+1)(x-1)^2}$.

Pentru $x_0 = -1$ se obține $h(-1-0) = \dfrac{2}{0_{(-)}} = -\infty$ şi $h(-1+0) = \dfrac{2}{0_{(+)}} = +\infty$, deci h nu are limită în punctul $x_0 = -1$.

Pentru $x_0 = 1$ se obține $h(1-0) = \dfrac{2}{0_{(+)}} = +\infty$, $h(1+0) = \dfrac{2}{0_{(+)}} = +\infty$ şi astfel $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = +\infty$.

b) $f(x_0) = 0, g(x_0) = 0$. În acest caz se obține o nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$. Având în vedere descompunerea în factori a funcțiilor polinomiale f şi g, funcția h se poate simplifica cu $x - x_0$, ajungându-se la o altă funcție rațională h_1 şi se reia analiza pentru $h_1(x)$.

☞ ***Exemple***

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{1}{2}.$

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)^4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^3}=$

  $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{(x-1)^2}=\dfrac{3}{0_{(+)}}=+\infty.$

• Funcțiile trigonometrice

• Funcțiile trigonometrice directe sinus, cosinus, tangentă şi cotangentă nu au limită la $+\infty$ şi $-\infty$, deoarece sunt funcții periodice.

• Funcția tangentă nu are limită în punctele $x_0=(2k-1)\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. Din lectura graficului acesteia se obține: $tg(x_0-0)=+\infty$ şi $tg(x_0+0)=-\infty.$

• Funcția cotangentă nu are limită în punctele $x_0=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Din lectura graficului acesteia se obține: $ctg(x_0-0)=-\infty$ şi $ctg(x_0+0)=+\infty.$

Pentru funcțiile trigonometrice inverse prin lectură grafică se obține:
$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}x=\pi$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arcctg}x=0.$

◢ **Temă**

1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-9x+7)$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}(-2x^3+7x)$; **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^5+4x+1)$;

d) $\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x})$; **e)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[4]{x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 8}\log_2 x$; **h)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_{0,3}x$; **i)** $\lim\limits_{x\to\infty}\log_{\sqrt{2}}x$;

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$; **k)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2}-1)^x$; **l)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x$;

m) $\lim\limits_{x\to-1}\arcsin x$; **n)** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\arccos x$; **o)** $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x$;

p) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\pi\\ x>3\pi}}\operatorname{ctg}x$; **q)** $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3\pi}{2}\\ x<\frac{3\pi}{2}}}\operatorname{tg}x.$

2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x}{2x+7}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^3-125}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x}{x^3-8}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+x^2+1}{2x^2+x-1}$, $a\in\mathbb{R}$; **e)** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+8}{x^2-4x+2}.$

16 OPERAȚII CU LIMITE DE FUNCȚII

Operațiile cu limite de şiruri dau posibilitatea demonstrării cu uşurință a operațiilor cu limite de funcții.

16.1. ADUNAREA, ÎNMULȚIREA, CÂTUL ȘI RIDICAREA LA PUTERE

▣ TEOREMA 34

Fie $f, g: D \to \mathbb{R}$ două funcții reale şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D, iar $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$.

a) Dacă operația $\ell_1 + \ell_2$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Limita sumei este egală cu suma limitelor.

b) Dacă operația $\ell_1 \cdot \ell_2$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right).$$

Limita produsului este egală cu produsul limitelor.

c) Dacă operația $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, şi $g(x) \neq 0,\ x \in D,$ atunci:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Limita raportului este egală cu raportul limitelor.

d) Dacă operația $\ell_1^{\ell_2}$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$ şi există o vecinătate $V \in \mathscr{V}(x_0)$, astfel încât $(f(x))^{g(x)}$ are sens $\forall\ x \in V \cap (D \setminus \{x_0\})$, atunci

$$\lim_{x \to x_0}(f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Limita unei puteri este egală cu puterea limitelor.

Ca şi în cazurile limitelor de şiruri, pentru operațiile cu limite de funcții există cazurile de nedeterminare:

$$\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

Aceste cazuri de nedeterminare se rezolvă prin procedee asemănătoare cu cele de la şiruri sau având în vedere anumite limite fundamentale.

Astfel avem:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1;$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1;$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r,\ \forall r\in\mathbb{R};$ **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e,\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a;$ **6.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\ln x=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0.$

16.2. LIMITE DE FUNCȚII COMPUSE

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $u : A \to D$ două funcții reale de variabilă reală, iar $h : A \to \mathbb{R},\ h = f\circ u,$ funcția compusă a acestora.

Dacă $x_0 \in A'$ este un punct de acumulare pentru mulțimea A, ne punem problema dacă funcția $h = f\circ u$ are sau nu limită în x_0. Condițiile în care această limită există sunt date de următorul rezultat.

> ▣ **TEOREMA 35**
>
> Fie $x_0 \in A'$ şi $u(x_0)=u_0\in D'$, puncte de acumulare pentru mulțimile A şi D. Dacă sunt îndeplinite condițiile:
>
> **a)** $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0$; **b)** $u(x)\neq u_0,\ \forall\ x\in A\setminus\{x_0\}$; **c)** $\lim\limits_{y\to u_0}f(y)=\ell,$
>
> atunci $\lim\limits_{x\to x_0}f(u(x))=\lim\limits_{y\to u_0}f(y).$

<u>*Demonstrație*</u>

Fie şirul $(x_n),\ x_n\in A\setminus\{x_0\}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. Deoarece $u : A \to D$ rezultă că $u(x_n)\in D$. Din condiția a) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}u(x_n)=u_0$, iar din condiția b) rezultă că $u(x_n)\in D\setminus\{u_0\}$. Să notăm $y_n=u(x_n)$. Se obține un şir (y_n) din D, cu $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}u(x_n)=u_0$. Aşadar u_0 este punct de acumulare pentru mulțimea D.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\ell$ şi de aici se obține $\lim\limits_{n\to\infty}f(u(x_n))=\ell$.

În concluzie, pentru orice şir (x_n) cu $x_n\in A\setminus\{x_0\}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}f(u(x_n))=\ell$ şi astfel, $\lim\limits_{x\to x_0}f(u(x))=\lim\limits_{y\to u_0}f(y)$. ■

➲ **<u>OBSERVAȚII</u>**

1. Teorema anterioară permite înlocuirea calculului limitei funcției $f\circ u$ în x_0, cu calculul limitei funcției f în u_0.

2. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$ şi $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\right)$.

Se spune că limita funcției comută cu valoarea funcției.

3. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$ şi $u(x) \neq 0,\ \forall\ x \in A$, atunci:

- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\arcsin u(x)}{u(x)} = 1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)} = 1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\operatorname{acrtg} u(x)}{u(x)} = 1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} (1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{a^{u(x)}-1}{u(x)} = \ln a,\ a \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) \ln u(x) = 0$.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{4x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x + \sin 2x}{\sin x + 2\sin 3x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x+x^3)}{x^2+x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\cos x}-2}{2^{x+1}-2}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Avem succesiv: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x} = \dfrac{3}{4}$.

b) Avem, folosind operațiile cu limite de funcții, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x + \sin 2x}{\sin x + 2\sin 3x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\dfrac{\sin 6x}{x} + \dfrac{\sin 2x}{x}\right)}{x\left(\dfrac{\sin x}{x} + 2\dfrac{\sin 3x}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{6\cdot\dfrac{\sin 6x}{6x} + 2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{\sin x}{x} + 6\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}} = \frac{6+2}{1+6} = \frac{8}{7}.$$

c) Se obține: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^3)}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x+x^3)}{x+x^3}\cdot\dfrac{x+x^3}{x^2+x}\right) = 1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^3}{x^2+x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{x+1} = 1.$$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\cos x}-2}{2^{x+1}-2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(2^{\cos x-1}-1\right)}{2\left(2^x-1\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{\cos x-1}-1}{\cos x-1}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{2^x-1}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x} =$

$$= \ln 2\cdot\frac{1}{\ln 2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{-x}{2}\right) = 1\cdot 0 = 0.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze, în cazul în care există, limitele funcțiilor $f: D \to \mathbb{R}$, în punctele specificate:

a) $f(x) = x^3 + 2x - 7,\ x_0 \in \{1, \pm\infty\}$;

b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 11,\ x_0 \in \{0, \pm\infty\}$;

c) $f(x) = -2x^5 + 11x^3 + x,\ x_0 \in \{-1, \pm\infty\}$.

E2. Să se studieze existența limitei funcției $f: D \to \mathbb{R}$, în punctul x_0:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1},\ x_0 \in \{2, -1, \pm\infty\}$;

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^4 - 2x + 1},\ x_0 \in \{0, 1, \pm\infty\}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^4 - 1},\ x_0 \in \{0, 1, -1, \pm\infty\}$;

d) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 4x + 6}{3x^3 + 2x + 5},\ x_0 \in \{-1, \pm\infty\}$.

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{(x+1)^2 + (x-1)^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^6 + x + 1}{(1 + x + x^2)^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+1)(3x+1)(5x+1)}{(x+2)^4 - (x+1)^4}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^8 - 2^8}{x^6 - 2^6}$.

E4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(2\sqrt[3]{x} + e^x + \sin^2 x\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{3x}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{3x}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-2}\right)$.

E5. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{7x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{\sin 5x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^4 + x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \sin 3x}{\sin 4x + \sin x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2 - x)}{x^2 - 1}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \sin \dfrac{1}{x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} 3x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^n x}{\sin(x^n)},\ n \in \mathbb{N}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$; j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 5x}{\cos 4x - \cos 6x}$.

E6. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x^3)}{x^4 + x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x + x^2)}{\sin x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}$; d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2 + x - 1)}{\ln(x^3 + x - 1)}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x + x^2)}{x^2}$.

E7. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{x^2 + x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{x^2} - 1}{x^3 + x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{2^x - 1}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{x^2+1} - 2}{3^{x^2+1} - 3}$.

E8. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 5x^2 + x)^{\frac{1}{x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x + x^2)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^{x+1}$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine a, b ∈ ℝ, astfel încât:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax\right)=b$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2+x+1}-ax\right)=b$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax^2+ax+1}{x+b}-x-1\right)=0$.

A2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^5-5x^4+1}{(x-1)^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$.

A3. Să se determine a, b, c ∈ ℝ, astfel încât:

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^6+bx^5+1}{(x-1)^2}$ să fie finită;

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^4+bx^3+6x+c}{(x-1)^3}$ să fie finită;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-ax-b\right)=\sqrt{2}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\dfrac{bx-1}{x^2+1}\right)^x=e^{-3}$.

A4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x+2^x-2}{4^x+2^x-2}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x+5^x-4^x-3^x}{5^x+4^x-3^x-2^x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x}{3x^2+x-2}\right)^{x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+11}{2x^2+3x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$.

A5. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x^2+x}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-3\sqrt{x+1}+2\sqrt{x}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x^2-x+9}-\sqrt{x^2+x+7}}$;

e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x}}$.

A6. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arcsin x+\sin x}{\arcsin x+2\sin x}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+\sin2x+\sin3x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}3x}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+2\sin2x+\ldots+n\sin nx}{\operatorname{tg}x+2\operatorname{tg}2x+\ldots+n\operatorname{tg}nx}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1-\sin2x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x^2}}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos4x}{x^4+x^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{\sin2x}-2^{\operatorname{tg}2x}}{2^{\operatorname{tg}x}-2^{\sin x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x+\sin2x+\ldots+\sin nx)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+\ldots+\operatorname{tg}nx)^{\frac{1}{\sin x}}$.

A7. Să se calculeze:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+a^x)}{\ln(1+b^x)}$, a, b ∈ (0, ∞).

A8. Fie f : D → ℝ, o funcție periodică neconstantă, astfel încât +∞ este un punct de acumulare pentru D. Să se arate că funcția f nu are limită la +∞.

A9. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}x^x$; b) $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^x$;

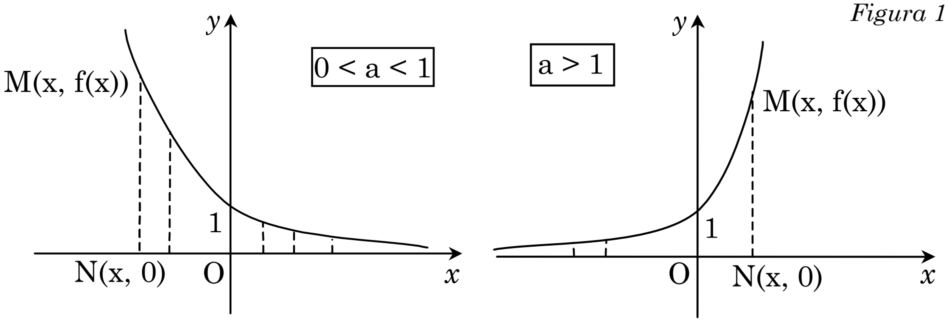
c) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x^2}\right)^{x-1}$.

17 ASIMPTOTELE FUNCȚIILOR REALE

17.1. ASIMPTOTE ORIZONTALE

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, funcția exponențială cu baza a. Imaginea geometrică a graficului funcției exponențiale, denumită curbă exponențială, este redată în figura 1.

Figura 1



Fie punctul M(x, f(x)) pe curba exponențială şi N(x, 0) proiecția lui M pe axa Ox.

Lungimea segmentului [MN] este $\ell(x)=\left|f(x)-0\right|=a^x$.

În clasa a X-a s-a pus în evidență proprietatea că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ dacă $0 < a < 1$ şi este asimptotă orizontală spre $-\infty$ dacă $a > 1$.

Această proprietate s-a descris intuitiv observând că lungimea segmentului [MN] tinde să devină oricât de mică atunci când $x \to +\infty$, respectiv $x \to -\infty$.

Faptul că axa Ox este asimptotă orizontală a funcției exponențiale se exprimă cu ajutorul limitelor de funcții astfel:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ell(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$, pentru $0 < a < 1$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\ell(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$, pentru $a > 1$.

Această observație particulară poate fi extinsă la cazul unei funcții $f:D\to\mathbb{R}$ pentru care $+\infty$, respectiv $-\infty$ sunt puncte de acumulare, iar D conține intervale de forma $(-\infty,\alpha)$ sau $(\alpha,+\infty)$.

❖ DEFINIȚII

- Dreapta y = a este **asimptotă orizontală spre +∞** a funcției f dacă $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$.

• Dreapta y = a este **asimptotă orizontală spre** $-\infty$ a funcției f dacă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.

❑ **REȚINEM!**

Problema asimptotelor orizontale pentru o funcție $f: D \to \mathbb{R}$ se pune numai la $+\infty$ şi $-\infty$ şi numai dacă $+\infty$ sau $-\infty$ sunt puncte de acumulare ale mulțimii D.

Problemă rezolvată

☒ Să se determine asimptotele orizontale ale funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+x+1}$; **b)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x \cdot |x|}{x^2+1}$;

c) $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$; **d)** $f: (-2, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

<u>Soluție</u>

a) În acest caz $\pm\infty$ sunt puncte de acumulare ale domeniului de definiție.

Se obține: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+x+1} = 2$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+x+1} = 2$.

Rezultă că dreapta de ecuație y = 2 este asimptotă orizontală spre $+\infty$ şi spre $-\infty$ a funcției f.

b) $\pm\infty$ sunt puncte de acumulare pentru domeniul de definiție.

Se obține $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2}{x^2+1} = -1$.

Rezultă că dreapta y = 1 este asimptotă orizontală spre $+\infty$, iar dreapta $y = -1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

c) În acest caz numai $+\infty$ este punct de acumulare pentru D = (1, +∞).

Se obține $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{1+\ln x} = 1$. Dreapta de ecuație y = 1 este asimptotă orizontală spre $+\infty$ a funcției f.

d) D = (–2, 2) fiind mulțime mărginită, $\pm\infty$ nu sunt puncte de acumulare şi nu se pune problema asimptotelor orizontale pentru funcția f.

17.2. ASIMPTOTE OBLICE

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție astfel încât $+\infty$ sau $-\infty$ sunt puncte de acumulare pentru D, unde D conține intervale de forma $(-\infty, \alpha)$ sau $(\alpha, +\infty)$, şi dreapta (d): y = mx + n, $m \in \mathbb{R}^*$. O dreaptă paralelă cu axa Oy intersectează imaginea geometrică a graficului funcției f şi dreapta (d) în punctele M(x, f(x)) şi N(x, mx + n).

Lungimea segmentului [MN] este $\ell(x) = |f(x) - mx - n|$.

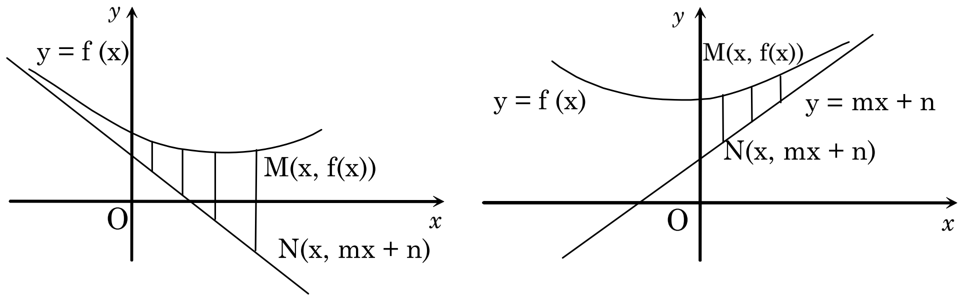


Figura 2

❖ DEFINIȚIE

• Dreapta de ecuație y = mx + n este **asimptotă oblică** spre $+\infty$, (respectiv $-\infty$) a funcției $f : D \to \mathbb{R}$ dacă distanța dintre dreaptă şi imaginea geometrică a graficului, măsurată pe verticală, tinde către zero când x tinde către $+\infty$, respectiv $-\infty$.

Cu ajutorul limitelor de funcții rezultă că:

Dreapta y = mx + n este asimptotă oblică spre $+\infty$ (respectiv $-\infty$) a funcției f dacă $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x) - mx - n| = 0$, (respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x) - mx - n| = 0$).

Problema existenței asimptotelor oblice pentru o funcție $f : D \to \mathbb{R}$ şi modul de determinare a acestora sunt cuprinse în următoarea teoremă.

▣ TEOREMA 36

Fie $f : D \to \mathbb{R}$.

a) Dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}^*$ şi $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx)$, $n \in \mathbb{R}$, atunci dreapta y = mx + n este **asimptotă oblică** a funcției f spre $+\infty$ şi reciproc.

b) Dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}^*$ şi $n = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - mx)$, $n \in \mathbb{R}$, atunci dreapta y = mx + n este **asimptotă oblică** a funcției spre $-\infty$ şi reciproc.

<u>*Demonstrație*</u>

a) Considerăm că există $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$, $m \in \mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = n \in \mathbb{R}$.

Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx - n) = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) - n = n - n = 0$, deci $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

Reciproc

Presupunem că dreapta y = mx + n este asimptotă oblică spre $+\infty$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx - n) = 0$. Avem: $f(x) - mx = [f(x) - mx - n] + n$, de unde se obține $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx-n\right)+n=0+n=n.$ Din egalitatea $\frac{f(x)}{x}-m=\frac{f(x)-mx}{x}$ rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-mx}{x}=\frac{n}{\infty}=0,$ deci $m=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$

b) Se demonstrează analog ca în cazul a). ■

➲ OBSERVAȚIE

- O funcție nu poate avea simultan asimptotă orizontală şi asimptotă oblică spre $+\infty$, respectiv spre $-\infty$. În caz contrar, ar exista constantele $m \lessapprox \mathbb{R}^*$, $n, a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}(mx+n-a)=0$, respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+n-a)=0$, ceea ce nu se poate.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se determine asimptotele oblice ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Avem: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}=1,$ deci m = 1.

Rezultă $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}-x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=0=n,$ deci dreapta y = x este asimptotă oblică spre $+\infty$.

b) Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}=-1,$ deci $m=-1.$

Rezultă $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=$

$=0=n,$ deci dreapta $y=-x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

☒ **2.** Să se determine constantele $a, b\in\mathbb{R},$ astfel încât dreapta y = 2x – 3 să fie asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{ax^3+bx^2-3}{2x^2+1}.$

<u>*Soluție*</u>

Impunem condițiile $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=-3$.

Avem $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^3+bx^2-3}{2x^3+x}=\dfrac{a}{2}=2,$ de unde se obține a = 4.

De asemenea, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^3+bx^2-3}{2x^2+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{bx^2-2x-3}{2x^2+1}=$

$=\dfrac{b}{2}=-3,$ de unde se obține b = –6.

17.3. ASIMPTOTE VERTICALE

Să considerăm funcția logaritmică $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1.$

Reprezentarea geometrică a graficului funcției f, numită curba logaritmică, este dată în figura 3.

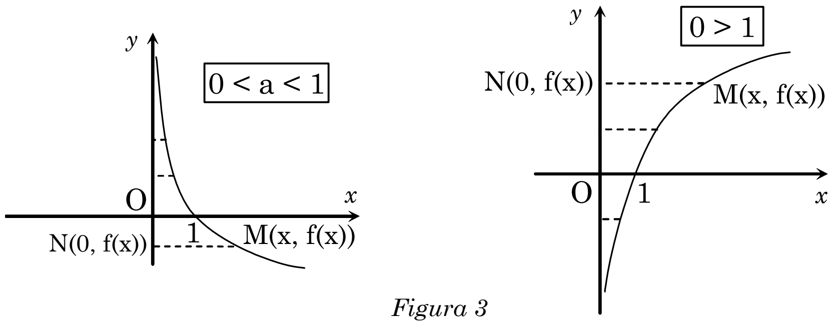


Figura 3

Fie M(x, f(x)) un punct oarecare pe curba logaritmică şi N(0, f(x)) proiecția lui M pe axa Oy. Se observă că pentru x → 0 lungimea segmentului [MN] tinde către zero, iar

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\begin{cases}+\infty, & \text{pentru } a<1\\ -\infty, & \text{pentru } a>1\end{cases}.$$

Aceasta caracterizează faptul cunoscut că axa Oy, dreaptă de ecuație $x=0,$ este asimptotă verticală a funcției logaritmice.

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in\mathbb{R}$ un punct de acumulare finit pentru mulțimea D.

❖ <u>**DEFINIȚII**</u>

- Dreapta $x = x_0$ este **asimptotă verticală a funcției f** dacă cel puțin una dintre limitele laterale $f(x_0-0)$ sau $f(x_0+0)$ există şi este infinită.
- Dacă $f(x_0-0)$ este $+\infty$ sau $-\infty$, dreapta $x = x_0$ se numeşte **asimptotă verticală la stânga**.

- Dacă $f(x_0 + 0)$ este $+\infty$ sau $-\infty$, dreapta $x = x_0$ se numeşte **asimptotă verticală la dreapta**.
- Dacă limitele laterale ale funcției f în x_0 sunt infinite, dreapta $x = x_0$ se numeşte **asimptotă verticală bilaterală**.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se determine asimptotele verticale ale funcțiilor:

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; **b)** $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x^2$.

<u>*Soluție*</u>

a) Domeniul de definiție al funcției este $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Avem $f(-1 - 0) = -\infty, f(-1 + 0) = +\infty, f(1 - 0) = -\infty, f(1 + 0) = +\infty$. Rezultă că dreptele x = 1 şi x = –1 sunt asimptote verticale bilaterale.

b) Avem $f(0 + 0) = +\infty$. Dreapta x = 0 este asimptotă verticală la dreapta.

c) Pentru oricare $x_0 \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0^3 + x_0^2 \in \mathbb{R}$, deci f nu are asimptote verticale. Mai general, **funcția polinomială nu are asimptote verticale**.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se determine asimptotele funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$; **b)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$; **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x + 2}$;

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 9}$; **f)** $f(x) = \dfrac{x^4 - x}{(x-2)(x^2-9)}$.

E2. **Să se determine asimptotele funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$:**

a) $f(x) = \dfrac{|x|}{2x+1}$; **b)** $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{x - 2}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{|x^2 - 1|}$; **d)** $f(x) = \dfrac{|x^2 - 3x|}{x - 1}$;

e) $f(x) = \dfrac{|x|}{1 + |x - 1|}$.

E3. **Să se determine asimptotele funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$:**

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

c) $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 4}}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}}$;

e) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$.

E4. **Să se determine a, b ∈ $\mathbb{R}$, astfel încât funcțiile $f : D \to \mathbb{R}$ să admită asimptotele specificate:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{x + 2}$, $y = x + 1$;

b) $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 1}{2x + 3}$, $y = 2x - 3$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine asimptotele funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$;

b) $f(x) = x \cdot \ln(x^2 - 1)$;

c) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}}$;

d) $f(x) = (x-1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

e) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$; f) $f(x) = \frac{1}{\ln|x-1|}$;

g) $f(x) = (x+1)e^{-|x-1|}$;

h) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 27}}$;

i) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}}$.

A2. Să se determine parametrii reali a şi b, astfel încât funcțiile $f : D \to \mathbb{R}$ să admită asimptotele indicate:

a) $f(x) = \frac{ax^4}{(bx+2)^3}$, $y = x - 3$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{ax^3 - bx^2}$, $y = 2x - \frac{1}{3}$;

c) $f(x) = \frac{(ax+b)e^x}{1+e^x}$, $y = 2x - 1$;

d) $f(x) = \frac{(x+a)(x+a+1)}{x+a+2}$, $y = x - a + 3$.

A3. Să se determine asimptotele funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x \le -1 \\ \frac{2x}{x+1}, & x > -1 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \sin \pi x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$;

d) $f(x) = \frac{x + \sin x}{2 + \sin x}$;

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x^2+1}, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$;

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+1}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{x^3}{x^2+x+1}, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$.

A4. Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + a^2x + 2a}$ să aibă o singură asimptotă verticală.

A5. Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx - 1}$, $a, b \in (0, +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$. Să se determine parametrii a, b, c astfel încât dreapta $y = 2x + 1$ să fie asimptotă oblică spre $+\infty$, iar $y = -1$ să fie asimptotă orizontală spre $-\infty$.
(Electrotehnică, Craiova, 1972)

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ **1.** Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}\right)$; b) $a_n = \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$. *(2p.)*

❍ 2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7-7(x-1)-1}{(x-1)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\cdot e^x\right)^{\frac{1}{1-\cos 2x}}$. *(3p.)*

❍ 3. Fie şirul cu termenul general $a_n=\ln\sqrt{\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}}$.

a) Să se calculeze $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$. b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}S_n$. (ASE, Buc., 1996)

(2p.)

❍ 4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+ax+3,\ x\in(-\infty,1]\\ \dfrac{3x+b}{x^2+2},\ x\in(1,+\infty)\end{cases}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât f să aibă limită în $x=1$ şi să existe $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. *(2p.)*

Testul 2

❍ 1. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n=\dfrac{4^n+\alpha^n}{5^n+3^n},\ \alpha\in\mathbb{R}$;

b) $a_n=a\cdot\sqrt{9n^2+1}+b\sqrt{4n^2+1}+n$, dacă $3a+2b+1=0$.

(3p.)

❍ 2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x)}{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}4x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{\sin\pi x}-2^{\operatorname{tg}\pi x}}{x-1}$.

(2p.)

❍ 3. Se consideră şirul (a_n) dat prin relația: $a_1=0,\ a_{n+1}=a_n+2n+2,\ n\ge 1$. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1\cdot 3+2\cdot 4+\ldots+n(n+2)}}{a_{n+1}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}\right)$. *(2p.)*

❍ 4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât: $f(x)+2f(-x)=\begin{cases}x^2,\ x\le 0\\ 0,\ \ x>0\end{cases}$.

a) Să se studieze dacă f are limită în $x=0$.

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to 1}(x+a)=2$ şi $\lim\limits_{x\to -1}f(x+b)=1$.

Testul 3

❍ 1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x+|x-1|\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

Să se determine mulțimea punctelor $x_0\in\mathbb{R}$, în care funcția f are limită.

❍ 2. Pentru care $a,b\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-ax+b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2}{x^3+1}\right)^{\frac{1}{x+1}}$? *(2p.)*

❍ 3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3+a^3, & x\le a\\ x+1, & x>a\end{cases}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția f are limită în orice $x_0\in\mathbb{R}$.

(2p.)

❍ 4. Se consideră şirul (a_n) astfel încât $a_n=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}$.

a) Să se arate că şirul (a_n) este monoton şi nemărginit superior.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6a_n}{n^3}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$.

(2p.)

Testul 4

❍ 1. Se consideră şirul (a_n), $a_n=\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$, $n\ge 1$.

a) Să se calculeze $b_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,\ n\ge 1$.

b) Să se studieze convergența şirurilor (a_n) şi (b_n).

❍ 2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2^{ax}, & x\le 1\\ 4^{a^2x}, & x>1\end{cases}$.

a) Pentru care valori $a\in\mathbb{R}$, funcția f are limită în $x_0=1$?

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f(2x-1)$ are limită în $\forall\ x_0\in\mathbb{R}$.

❍ 3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1!1+2!2+\ldots+n!n}{(2n)!+3}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x+3^x+\ldots+n^x}{n+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

❍ 4. Să se studieze dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea:

$2f(2-x)+3f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ x+1, & x>1\end{cases}$ are limită pentru oricare $x_0\in\mathbb{R}$.

CAPITOLUL II. FUNCŢII CONTINUE

❶ FUNCȚII CONTINUE ÎNTR-UN PUNCT

1.1. DEFINIREA CONTINUITĂȚII

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+1, \text{ dacă } x\le 0\\ x, \text{ dacă } x\in(0, 1)\cup(1, \infty)\\ 2, \text{ dacă } x=1\end{cases}$, al cărei grafic este reprezentat în figura 1.

Lecturând graficul funcției f se observă că în punctele x = 0 şi x = 1 acesta prezintă „întreruperi“ (discontinuități), iar în toate celelalte puncte $x\in\mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$ graficul fiind reprezentat în mod „continuu“. Să studiem ce se întâmplă cu limita funcției şi cu valoarea funcției în aceste puncte.

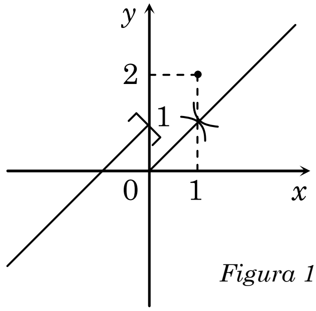


Figura 1

- Pentru x = 0 avem: $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$, $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0}x=0$ şi $f(0)=1$.
- Pentru x = 1 avem: $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1}x=1$, $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1}x=1$ şi $f(1)=2$.
- Pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$ avem $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ după cum se observă uşor considerând cazurile $x\in(-\infty, 0)$, $x\in(0, 1)$ şi $x\in(1, +\infty)$.

Aşadar, în punctele x_0 în care funcția f are graficul fără „întreruperi“ vom avea că $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, iar în punctele în care f are graficul „întrerupt“ funcția f nu are limită sau dacă are limită, aceasta nu este egală cu valoarea funcției în acest punct.

Fie $f: D\to\mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală şi $x_0\in D$.

❖ **DEFINIȚII**

- Funcția f se numeşte **funcție continuă** în punctul $x_0\in D$ dacă x_0 este punct izolat al mulțimii D, sau $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ dacă x_0 este punct de acumulare al mulțimii D.
- Un punct $x_0\in D$ în care funcția f este continuă se numeşte **punct de continuitate** al funcției f.

• Mulțimea $\mathscr{C} = \{x_0 \in D \mid f \text{ este continuă în } x_0\}$ se numeşte **domeniul de continuitate** al funcției f.

➲ OBSERVAȚII

- Dacă funcția f nu este continuă în $x_0 \in D$, ea se numeşte **funcție discontinuă** în x_0, iar x_0 **punct de discontinuitate**.
- Problema continuității unei funcții f nu se pune în punctele în care funcția nu este definită şi nici la $+\infty$ şi $-\infty$.
- Condiția $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ presupune existența limitei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi egalitatea ei cu $f(x_0)$.

În concluzie, o funcție este discontinuă într-un punct $x_0 \in D$ dacă nu are limită în x_0 sau dacă are limită în x_0, aceasta nu este egală cu $f(x_0)$.

Revenind la cazul funcției f studiate anterior, vom spune că ea este continuă în oricare $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ şi discontinuă în $x = 0$ şi în $x = 1$.

Legătura dintre limitele de şiruri şi continuitate este dată de următorul rezultat.

> **▣ TEOREMA 1 (Eduard Heine)**
> Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală şi $x_0 \in D$. Funcția f este continuă în punctul $x_0 \in D$, dacă şi numai dacă pentru oricare şir (x_n), $x_n \in D$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Problemă rezolvată

☒ Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x^2}{2x^2 + x + 1}$ este continuă în $x_0 = 1$.

Soluție

Folosim teorema 1. Fie (x_n) un şir de numere reale, astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$. Avem $f(x_n) = \dfrac{4 \cdot x_n^2}{2x_n^2 + x_n + 1}$ şi folosind operațiile cu şiruri convergente, se obține $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4 \cdot x_n^2}{2x_n^2 + x_n + 1} = \dfrac{4}{2 + 1 + 1} = 1$. Având $f(1) = 4$, rezultă că funcția f este continuă în $x_0 = 1$.

1.2. CONTINUITATEA LATERALĂ

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi punctul $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D.

❖ DEFINIȚII

- Funcția f se numeşte **continuă la stânga** în punctul $x_0 \in D$ dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$.
- Funcția f se numeşte **continuă la dreapta** în punctul $x_0 \in D$ dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$.

➲ OBSERVAȚII

1. O funcție f : D $\to \mathbb{R}$ poate fi continuă la stânga în $x_0 \in D$ fără a fi continuă la dreapta în x_0, şi reciproc.

☞ ***Exemplu***

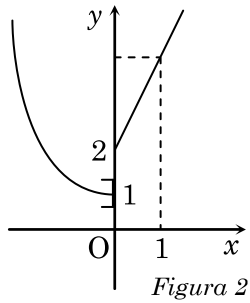


Figura 2

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x \le 0 \\ 2x + 2, x > 0 \end{cases}$.

Avem: $f(0-0) = \lim\limits_{x \to 0}(x^2 + 1) = 1$, $f(0+0) = \lim\limits_{x \to 0}(2x + 2) = 2$ şi $f(0) = 1$. Se obține că $f(0-0) = f(0)$, deci f este continuă la stânga în $x_0 = 0$, dar $f(0+0) = 2 \ne f(0)$, deci f nu este continuă la dreapta în $x_0 = 0$.

2. Pentru funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuitatea funcției în x = a este echivalentă cu continuitatea la dreapta, iar continuitatea funcției f în b este echivalentă cu continuitatea la stânga.

3. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D în care f are limite laterale. Funcția f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

❖ DEFINIȚII

- O funcție $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte **continuă pe mulțimea $A \subset D$** dacă este continuă în fiecare punct $x_0 \in A$.
- Dacă funcția $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe mulțimea D se spune că ea este **funcție continuă**.

O clasă importantă de funcții continue o constituie clasa funcțiilor elementare deoarece s-a arătat că pentru orice punct x_0 din domeniul de definiție limita în x_0 este chiar valoarea funcției în x_0.

❑ REȚINEM!

Orice funcție elementară este funcție continuă.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se studieze continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x},\ x<0\\ a,\ x=0\\ \cos x,\ x>0\end{cases}$ în punctul $x_0=0$.

<u>*Soluție*</u>

Punctul $x_0=0$ este punct de acumulare pentru domeniul de definiție al funcției. Se obține: $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1,$ deoarece funcția cosinus este funcție elementară. Avem şi $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,$ deci $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1.$ Din egalitatea $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$ se obține a = 1. Aşadar, funcția f este continuă în $x_0=0$ dacă şi numai dacă a = 1.

☒ **2.** Să se studieze continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+e^{nx}}{1+e^{nx}}.$

<u>*Soluție*</u>

Pentru calculul limitei de şiruri, deosebim situațiile:

- $e^x<1,$ de unde $x\in(-\infty,0).$ Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=0$ şi $f(x)=\dfrac{x^2+0}{1+0}=x^2;$
- $e^x=1,$ de unde x = 0, iar $f(0)=\dfrac{0+1}{1+1}=\dfrac{1}{2};$
- $e^x>1,$ de unde $x\in(0,+\infty).$ Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^x\right)^n=+\infty$ şi $f(x)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}\left(x^2e^{-nx}+1\right)}{e^{nx}\left(e^{-nx}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2e^{-nx}+1}{e^{-nx}+1}=1.$$

În concluzie, $f(x)=\begin{cases}x^2,\ \text{dacă } x\in(-\infty,0)\\ \dfrac{1}{2},\ \text{dacă } x=0\\ 1,\ \text{dacă } x\in(0,+\infty)\end{cases}.$

Rezultă că $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$, $f(0+0)=1$ şi $f(0)=\frac{1}{2}$, deci funcția f nu este continuă în x = 0. Deoarece pe intervalele $(-\infty,0)$ şi $(0,+\infty)$ funcția f este funcție polinomială, se obține că mulțimea de continuitate a funcției este $\mathscr{C}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

☒ **3.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă în x = 0, astfel încât $f(2x)-f(x)=x,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Să se arate că $f(x)=x+a,\ a\in\mathbb{R}$.

Soluție

Fie $x_0\in\mathbb{R}$ un număr real fixat. Din relația dată se obține succesiv:

$$f(2x_0)-f(x_0)=x_0$$

$$f(x_0)-f\left(\frac{x_0}{2}\right)=\frac{x_0}{2}$$

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right)-f\left(\frac{x_0}{4}\right)=\frac{x_0}{4}$$

....

$$f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)=\frac{x_0}{2^n}$$

$$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)=\frac{x_0}{2^{n+1}},$$

pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$.

> ◢ **Temă**
> **Să se determine funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în cazurile:**
> **a) $f(3x)-f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$;**
> **b) $f(3x)-f(2x)=x,\ x\in\mathbb{R}$.**

Adunând aceste relații se obține egalitatea:

$$f(x_0)=f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)+x_0\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}\right),\ \forall\ n\geq 1.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_0}{2^{n+1}}=0$ şi f este continuă în x = 0, din relația anterioară, prin trecere la limită după n, se obține:

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)+x_0\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=f(0)+x_0.$$

Numărul $x_0\in\mathbb{R}$ fiind luat arbitrar rezultă că $f(x)=x+a$, unde $a=f(0)$. Se constată că această funcție verifică relația cerută.

1.3. PRELUNGIREA PRIN CONTINUITATE A UNEI FUNCȚII

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in D'$ un punct de acumulare al mulțimii D.

Dacă funcția f nu este definită în x_0, dar are limita finită în x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, se poate defini funcția $g:D\cup\{x_0\}\to\mathbb{R}$ astfel: $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in D\\ \ell, & x=x_0\end{cases}$.

Funcția g este continuă în x_0 deoarece $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell = g(x_0)$.

Funcția g se numește **prelungirea prin continuitate a funcției f în punctul x_0**.

☞ ***Exemplu***

Fie $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Rezultă că funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ este prelungirea prin continuitate a funcției f în x = 0.

1.4. PUNCTE DE DISCONTINUITATE

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală și $x_0 \in D$. Deoarece orice funcție este continuă în punctele izolate din domeniul de definiție, rezultă că dacă $x_0 \in D$ este punct de discontinuitate al funcției f, el este punct de acumulare pentru mulțimea D. Acest fapt permite să se cerceteze existența limitelor laterale ale funcției.

❖ **DEFINIȚII**

- Un punct de discontinuitate $x_0 \in D$ este **punct de discontinuitate de prima speță** pentru funcția f, dacă limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 există și sunt finite.
- Un punct de discontinuitate $x_0 \in D$ al funcției f în care cel puțin una din limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 nu este finită sau nu există se numește **punct de discontinuitate de speța a doua**.

☞ ***Exemple***

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ 3x-1, & x > 1 \end{cases}$. În punctul $x_0 = 1$ avem: $f(1-0) = 3, f(1+0) = 2$ și $f(1) = 3$, deci $x_0 = 1$ este punct de discontinuitate de prima speță, (figura 3).

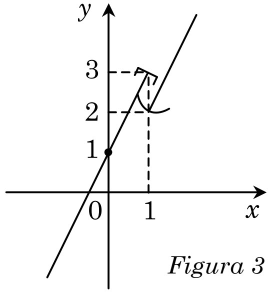


Figura 3

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

În punctul $x_0 = 0$ avem: $f(0-0) = +\infty$, $f(0+0) = +\infty$ și $f(0) = 0$. Dreapta x = 0 este asimptotă verticală

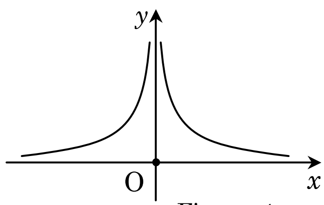


Figura 4

bilaterală, (figura 4). Rezultă că punctul $x_0 = 0$ este punct de discontinuitate de speța a doua.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ *(funcția lui L. Dirichlet)*. Această funcție are o discontinuitate de speța a doua în orice punct $x_0 \in \mathbb{R}$.

DISCONTINUITĂŢILE FUNCŢIILOR MONOTONE

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală monotonă pe D şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D. Funcția fiind monotonă are limite laterale în punctul $x_0 \in D'$ şi au loc relațiile:

$f(x_0 - 0) \le f(x_0 + 0)$ sau $f(x_0 - 0) \ge f(x_0 + 0)$, după cum funcția f este crescătoare sau descrescătoare.

Mai mult, dacă $x_0 \in D$, atunci există inegalitățile: $f(x_0 - 0) \le f(x_0) \le$ $\le f(x_0 + 0)$ sau $f(x_0 - 0) \ge f(x_0) \ge f(x_0 + 0)$. Aceste inegalități conduc la următorul rezultat pentru funcțiile monotone.

▣ TEOREMA 2

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție monotonă pe D şi $x_0 \in D$ un punct de discontinuitate pentru funcția f. Atunci x_0 este punct de discontinuitate de prima speță.

Problemă rezolvată

☒ Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ nu este monotonă pe nici un interval care conține originea.

<u>*Soluție*</u>

1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $0 \in I$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ nu există, rezultă că $x_0 = 0$ este punct de discontinuitate de a doua speță, deci f nu poate fi monotonă pe I.

2. Putem arăta că f nu este monotonă şi având în vedere că funcția se anulează de mai multe ori pe I.

Astfel, pentru $\sin\frac{1}{x} = 0$ se obține $x = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}^*$. Luând $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \ge 1$, rezultă că $x_n \to 0$ şi deci în intervalul I există o infinitate de termeni ai şirului mai puțin un număr finit. Aşadar $f(x_n) = 0$, pentru o infinitate de valori ale lui x_n, deci nu poate fi monotonă pe I.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze continuitatea funcțiilor $f: D \to \mathbb{R}$, în punctele specificate:

a) $f(x) = x^2 + x,\ x_0 = 1;$

b) $f(x) = x + |x|,\ x_0 = 0;$

c) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x},\ x_0 = 2;$

d) $f(x) = x\sqrt{x},\ x_0 = 0.$

E2. Să se studieze continuitatea funcțiilor $f: D \to \mathbb{R}$, în punctele specificate:

a) $f(x) = \begin{cases} x + x^2, & x \le 0 \\ x + \sin x, & x > 0 \end{cases},\ x_0 = 0;$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases},\ x_0 = 0;$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{2x}, & x < 0 \\ \cos 3x, & x \ge 0 \end{cases},\ x_0 = 0;$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x^2}, & x > 1 \\ a, & x = 1 \\ \dfrac{\sin(4x-4)}{8x^2-8}, & x \in (0,1) \end{cases},\ x_0 = 1;$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-2}}}, & x \ne 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases},\ x_0 = 2;$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},\ x_0 = 0.$

E3. Să se determine domeniul de continuitate pentru funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$ în cazurile:

a) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases};$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-1}\sin(x-1)}{3(x^2-1)}, & x > 1 \\ x^2 + 5x - 6, & x \le 1 \end{cases};$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x + \sin 3x}{x + x^2}, & x > 0 \\ a, & x \le 0 \end{cases};$

d) $f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1+x^2}{1+x+x^2}\right)^{1/x}, & x < 0 \\ a, & x \ge 0 \end{cases}.$

E4. Să se studieze natura punctelor de discontinuitate pentru funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 0 \\ x^2 - 3, & x > 0 \end{cases},\ x_0 = 0;$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x^2 + 2x}, & x > 0 \\ x \ln|x|, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},\ x_0 = 0;$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}, & x > 1 \\ \dfrac{1}{2}, & x \le 1 \end{cases},\ x_0 = 1.$

APROFUNDARE

A1. Să se determine domeniul de continuitate pentru funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$ în cazurile:

a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n + x}{x^{2n} + 1};$

b) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2 + e^{-nx}}{1 + e^{-nx}};$

c) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{nx}\sin x + e^{-nx}\cos x}{e^{nx} + e^{-nx}}.$

A2. Să se determine mulțimea punctelor de discontinuitate pentru funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};$

b) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}2^x+3, & x\in\mathbb{Q}\\ 4^x-9, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}x\left[\dfrac{1}{x}\right], & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$;

(Colegiu, Cluj-Napoca, 1995)

e) $f(x)=x[2x],\ x\in[-1,\ 2]$.

A3. Să se determine constantele reale pentru care funcția $f:D\to\mathbb{R}$, este continuă pe D:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x}, & x<0\\ \ln(x+e), & x\geq 0\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\\ a, & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}e^x+x-a, & x\leq 0\\ \ln(e+a+x), & x>0\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{a^2+2ax+6x^2}, & x\leq 1\\ x^2+2a, & x>1\end{cases}$;

e) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{a+x^2}{2}, & x\in(-\infty,\ -2)\\ x-b, & x\in[-2,\ 2]\\ \dfrac{x^2+a}{2}, & x\in(2,\ \infty)\end{cases}$.

f) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x\in(0,\ 1]\\ a, & x=0\end{cases}$;

g) $f(x)=\begin{cases}(x+1)\arcsin e^{-\frac{1}{x^2}}, & x<0\\ a, & x=0\\ e^{-\frac{1}{x}}+b-1, & x>0\end{cases}$;

h) $f(x)=\begin{cases}\sin x\cdot\cos(x+a)+1, & x\leq\dfrac{\pi}{2}\\ 2\cos x+\sin(a+x), & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

A4. Să se determine parametrii reali a, b, $c\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:D\to\mathbb{R}$ este continuă și $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ există:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+2ax+b^2, & x>0\\ \sin 2x, & x\leq 0\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}x^2+\ln(x^2+a^2), & x\leq 0\\ b\sin 2x+2\cos x, & x>0\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}ax\cdot e^x, & x\leq 0\\ b(x^2+x-2)+c, & x>0\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}\ln^3(x+e), & x\in[-1,\ 0]\\ a(x+e)+b, & x\in(0,\ +\infty)\end{cases}$.

A5. Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ pentru care funcțiile $f:D\to\mathbb{R}$ sunt continue:

a) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ax^2\cdot e^{n^{\ln x}}+8x}{2+x\cdot e^{n^{\ln x}}}$;

b) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a|x-1|\cdot e^{nx}+b(x+1)^2e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}$.

A6. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x\cdot e^{nx}\cdot\ln(x^2+1)+a}{1+e^{nx}}.$$

Știind că f este continuă, să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

A7. Să se determine constantele reale pentru care funcțiile $f:D\to\mathbb{R}$ sunt continue, în cazurile:

a) $f(x)=\begin{cases}2^{ax}+4^{ax}, & x\leq 1\\ 6x^2-ax+a, & x>1\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}2^{ax}+3^{bx}, & x\in(-\infty,\ 1]\cup[2,\ +\infty)\\ 8x-3, & x\in(1,\ 2)\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}2\log_2(x^2+|a|), & x\geq 1\\ 2\log_4(x^2+a^2)^2, & x<1\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}2^{bx}+x, & x\leq 2a-1\\ 6x-3^{bx}, & x\geq a^2\end{cases}$;

e) $f(x)=\begin{cases}3x^2+5x, & x<a-1\\ b, & x\in[a-1,\ a^2]\\ 4x-8, & x>a^2\end{cases}$.

A8. **Să se determine funcțiile continue $f : D \to \mathbb{R}$, în cazurile:**

a) $f(2x) = f(3x),\ \forall\ x \in \mathbb{R};$

b) $f(3x) - f(2x) = x,\ \forall\ x \in \mathbb{R};$

c) $f(2x+1) - f(x) = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R};$

d) $f(x) = f(x^2),\ \forall\ x \in D = (0, \infty);$

e) $f(2^x) = f(3^x),\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ D = [0, \infty).$

A9. **Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.**

a) Să se arate că dacă f este continuă în $x_0 = 0$, atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se determine funcțiile continue f care verifică relația dată.

A10. **Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcții continue, astfel încât $f(x) = g(x),\ \forall\ x \in \mathbb{Q}$. Să se arate că f = g.**

A11. **Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) = g(x),\ \forall\ x \in \mathbb{Q}$. Să se arate că dacă f este continuă, iar funcția g este monotonă, atunci f = g. (Olimpiadă județeană, 1978)**

A12. **Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt continue:**

a) $f(x) = \begin{cases} 2^{ax} \cdot 3^{bx}, & x < 1 \\ 12, & x = 1; \\ 3^{ax-1} \cdot 2^{1+bx}, & x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x^2+3} + x\sqrt{1+b^2}, & x < 1 \\ ax + b\sqrt{2x^2+1}, & x > 1. \\ 4, & x = 1 \end{cases}$

A13. **Să se arate că următoarele funcții nu sunt monotone pe nici un interval $I \subset \mathbb{R}$:**

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 + 2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 + 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$

A14. **Pot fi prelungite prin continuitate funcțiile $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$, $f(x) = x^2 \cdot \left[\frac{1}{x^2}\right]$?**

❷ OPERAȚII CU FUNCȚII CONTINUE

2.1. SUMA, PRODUSUL, CÂTUL ȘI PUTERI DE FUNCȚII CONTINUE

Operațiile cu limite de funcții permit stabilirea continuității funcțiilor obținute prin operații cu funcții continue.

▣ TEOREMA 3

Dacă funcțiile f, g : D → $\mathbb{R}$ sunt funcții continue în punctul $x_0 \in D$, atunci:

a) funcția h = αf + βg este continuă în x_0, pentru oricare α, β ∈ $\mathbb{R}$;

b) funcția f · g este continuă în x_0;

c) funcția $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0, dacă $g(x_0) \neq 0$;

d) dacă $(f(x))^{g(x)}$ are sens, $\forall\ x \in D$, funcția f^g este continuă în x_0.

Demonstrație

a) Dacă x_0 este punct de acumulare pentru D avem, folosind operațiile cu limite de funcții:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)=\alpha\lim_{x\to x_0} f(x)+\beta\lim_{x\to x_0} g(x)=\alpha f(x_0)+\beta g(x_0)=h(x_0),$$

deci h este continuă în x_0.

Dacă x_0 este punct izolat pentru D, atunci h este automat funcție continuă.

b), **c)**, **d)** Temă. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă funcțiile f și g sunt continue pe D, atunci și funcțiile $\alpha f+\beta g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, f^g sunt continue pe mulțimea D, cu condiția ca ele să fie definite pe D.
2. Pentru $\alpha=\beta=1$ se obține că $f+g$ este continuă, iar pentru $\alpha=1$, $\beta=-1$ se obține că $f-g$ este continuă.
3. Proprietățile a), b) se pot extinde ușor pentru n funcții. Dacă funcțiile $f_i : D\to\mathbb{R}$, $i=1, 2, \ldots, n$ sunt continue, atunci și funcțiile $\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+$ $+\ldots+\alpha_n f_n$ și $f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n$ sunt continue.
4. Dacă funcțiile f și g sunt discontinue în $x_0\in D$, atunci nu se poate afirma nimic referitor la funcțiile $f+g$, fg și $\frac{f}{g}$.

☞ ***Exemple***

a) Fie $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-1, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-2, & x\le 0\\ 3, & x>0\end{cases}$.

Funcțiile f și g sunt discontinue în $x_0=0$, iar $(f+g)(x)=\begin{cases}-3, & x\le 0\\ 4, & x>0\end{cases}$,

$(f\cdot g)(x)=\begin{cases}2, & x\le 0\\ 3, & x>0\end{cases}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\le 0\\ \frac{1}{3}, & x>0\end{cases}$ sunt discontinue în $x_0=0$.

b) Fie $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-1, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$ și $g(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ -1, & x>0\end{cases}$. În acest caz, funcțiile f și g sunt discontinue în $x_0=0$, iar $(f+g)(x)=0$, $(f\cdot g)(x)=-1$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-1$, $x\in\mathbb{R}$, deci funcțiile $f+g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ sunt continue în $x_0=0$.

5. Dacă o funcție este continuă, iar cealaltă este discontinuă în $x_0\in D$, atunci funcția $f+g$ este discontinuă în x_0.

2.2. CONTINUITATEA FUNCȚIILOR COMPUSE

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $u : A \to D$ funcții reale de variabilă reală şi funcția compusă $h : A \to \mathbb{R}$, $h = f \circ u$.

▣ TEOREMA 4
Dacă funcția $u : A \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0 \in A$ şi funcția $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $u(x_0) = u_0$, atunci funcția $h = f \circ u$ este continuă în punctul $x_0 \in A$.

$$\begin{tikzcd} u_0 \in D \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ x_0 \in A \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "h = f \circ u"'] & \end{tikzcd}$$

<u>*Demonstrație*</u>

Fie (x_n), $x_n \in A$ un şir arbitrar cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Deoarece funcția u este continuă în $x_0 \in A$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) = u(x_0) = u_0 \in D$.

Notăm $u_n = u(x_n)$, $n \geq 1$. Rezultă că $u_n \in D$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) = u(x_0) = u_0$. Din continuitatea funcției f se obține: $\lim\limits_{n\to\infty} f(u(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(u_0) = (f \circ u)(x_0)$.

Aşadar, pentru oricare şir (x_n), $x_n \in A$ convergent la $x_0 \in A$, rezultă egalitatea $\lim\limits_{n\to\infty} f(u(x_n)) = f(u(x_0))$, deci funcția $f \circ u$ este continuă în $x_0 \in A$. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă funcția f este continuă pe D, iar funcția u este continuă pe A, atunci funcția $f \circ u$ este continuă pe mulțimea A.

2. Dacă funcția f sau u este discontinuă în u_0, sau respectiv în x_0, nu rezultă în mod necesar că funcția compusă $f \circ u$ este discontinuă în x_0.

☞ ***<u>Exemplu</u>***

Fie $f, u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x+1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ şi $u(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x-1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Se observă că funcțiile f şi u sunt discontinue în $x_0 = 0$.

Funcția compusă $h = f \circ u$ este $h(x) = x$ şi este continuă în $x_0 = 0$.

3. Dacă funcția u este discontinuă în x_0, iar funcția f este continuă în $u_0 = u(x_0)$, nu se poate preciza nimic referitor la continuitatea funcției compuse $f \circ u$.

☞ ***Exemple***

a) Fie $f,u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ şi $u(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x-1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

Funcția u este discontinuă în $x_0=0$, iar f este continuă în $u_0=u(0)=0$. Funcția compusă $h=f\circ u$ este $h(x)=u(x)$ şi este discontinuă în $x_0=0$.

b) Fie $f,u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ şi $u(x)=\begin{cases}-1, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$.

În x = 0 funcția u este discontinuă, iar în $u_0=u(0)=-1$ funcția f este continuă. Pentru funcția compusă $h=f\circ u$ avem $h(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$ şi este continuă în $x=0$.

Aşadar, prin compunerea a două funcții, cel puțin una fiind discontinuă, nu se poate preciza nimic despre continuitatea funcției compuse.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se studieze continuitatea funcțiilor f, g, $f+g$, $f\cdot g$ şi $\frac{f}{g}$ în cazurile:**

a) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ 2x-1, & x>1\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le 1\\ 3x-2, & x>1\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ 2x-1, & x>1\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x\le 1\\ \sqrt{x+3}, & x>1\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0\\ 1-\cos x, & x>0\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ x^2-1, & x>0\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ x^2-1, & x>1\end{cases}$.

E2. **Să se studieze continuitatea funcțiilor f, g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\circ g$ şi $g\circ f$, în cazurile:**

a) $f(x)=2x-1,\ g(x)=3x-2$;

b) $f(x)=2x-1,\ g(x)=\begin{cases}3x, & x\le 1\\ 6x-3, & x>1\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 1\\ x^2-1, & x>1\end{cases}$, $g(x)=|x|$;

d) $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 1\\ x+1, & x>1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$.

APROFUNDARE

A1. **Fie f, g : D → $\mathbb{R}$, funcții continue. Să se arate că funcțiile $h_1, h_2:D\to\mathbb{R}$, $h_1(x)=\max\{f(x),g(x)\}$, $h_2(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ sunt continue.**

A2. **Se consideră funcția f : D → $\mathbb{R}$ şi funcțiile $f_+, f_-:D\to\mathbb{R}$, definite astfel: $f_+(x)=\max\{f(x),0\}$ şi $f_-(x)=\min\{f(x),0\}$ (*funcțiile parte pozitivă* şi *parte negativă* ale funcției f).**

Să se arate că funcția f este continuă dacă și numai dacă funcțiile f_+ și f_- sunt continue.

A3. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in \mathbb{R}$, astfel încât $g(x_0) \neq 0$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției: Dacă $f + g$, $f \cdot g$ și $\frac{f}{g}$ sunt continue în x_0, atunci funcțiile f și g sunt continue în x_0.

A4. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție polinomială și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ g(x), & x \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$
Să se determine funcția polinomială g pentru care funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

A5. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, date de relațiile:
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$
$$g(x) = \begin{cases} x\sqrt{2}, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$ Să se studieze continuitatea funcțiilor $f, g, f \circ g, g \circ f$.

A6. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ și se definesc funcțiile:
$g(x) = \min\{f(t) \mid t \leq x\}$ și
$h(t) = \min\{f(t) \mid x - 1 \leq t \leq x\}$.
Să se studieze continuitatea funcțiilor g și h.

A7. Să se determine constantele $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f + g$ să fie continuă, dacă:
$$f(x) = \begin{cases} x + a, & x \leq b \\ x - a, & x > b \end{cases},$$
$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x \leq a \\ x - b, & x > a \end{cases}.$$

A8. Să se studieze continuitatea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, știind că are loc relația:
$$2f(x) + 3f(1 - x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}.$$

DEZVOLTARE

D1. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție monotonă pe D, astfel încât $\text{Im}(f)$ este interval. Să se arate că f este continuă.

D2. Să se arate că funcția $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în cazurile:

a) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{arctg}\, x$;

c) $f : [0, 1] \cup [2, 3] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in [0, 1] \\ x^2 - 4, & x \in [2, 3] \end{cases}.$$

D3. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție injectivă și continuă pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Să se arate că f este strict monotonă pe I.

D4. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue cu proprietatea:
$(f \circ f \circ f)(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

D5. Să se arate că nu există funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă cu proprietatea:
$(f \circ f)(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$.

D6. Fie $f : I \to J$, $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale. Să se arate că dacă f este bijectivă și continuă, atunci funcția f^{-1} este continuă.

❸ PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CONTINUE PE INTERVALE

Clasa funcțiilor continue are câteva proprietăți remarcabile care își găsesc numeroase aplicații în teoria ecuațiilor.

3.1. EXISTENȚA SOLUȚIILOR UNEI ECUAȚII

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe I și $a, b \in I$. Să lecturăm graficul funcției f din figura 1.

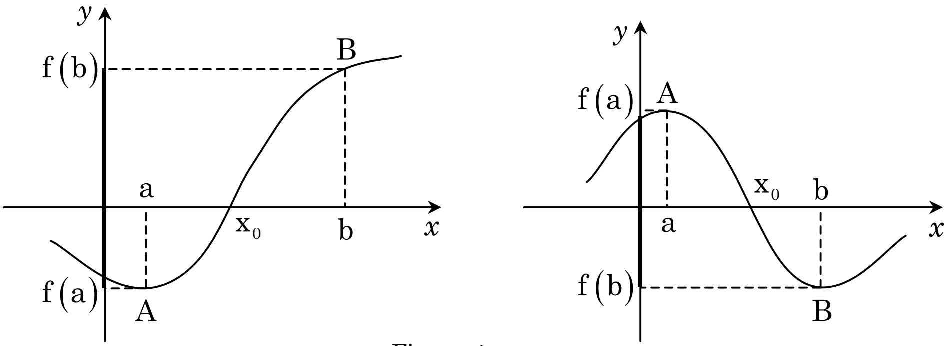


Figura 1

Se observă că valorile funcției în punctele a și b au semne contrare sau altfel exprimat, punctele $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$ sunt separate de axa Ox. Intuitiv, din lectura graficului funcției f se desprinde ideea că graficul funcției f intersectează axa Ox în cel puțin un punct x_0. Altfel spus, ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție $x_0 \in (a, b)$. Problema care se pune este dacă această proprietate se menține pentru oricare funcție continuă.

Răspunsul este dat de următorul rezultat:

> ▣ **TEOREMA 5 (Cauchy-Bolzano)**
> Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul I și $a, b \in I$, $a < b$. Dacă valorile $f(a)$ și $f(b)$ ale funcției f au semne contrare, $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există $c \in (a, b)$, astfel încât $f(c) = 0$.

Din teorema Cauchy-Bolzano rezultă că dacă o funcție $f : I \to \mathbb{R}$ continuă pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$ are valori de semne contrare în punctele $a, b \in I$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul (a, b). Acest rezultat permite să arătăm că anumite ecuații au cel puțin o soluție într-un interval dat.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se arate că ecuația $x^2 + 2\ln x = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $I = \left[e^{-1}, 1\right]$.

<u>*Soluție*</u>

Considerăm funcția $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2\ln x$, care este continuă pe I.

Avem: $f(1) = 1$ şi $f\left(e^{-1}\right) = \frac{1}{e^2} - 2 < 0$, deci $f(1) \cdot f\left(e^{-1}\right) < 0$. Atunci există $c \in I$ astfel încât $f(c) = 0$, deci ecuația are cel puțin o soluție în I.

Mai mult, deoarece funcția f est strict monotonă pe I, ca sumă de funcții strict monotone pe I, rezultă că ecuația are soluție unică.

> ◢ **Temă**
> **Să se arate că ecuațiile au soluții în intervalul dat:**
> **a) $x + \sin x = -1$, $I = \left[-\pi, 0\right]$;**
> **b) $x^2 = e^x$, $I = \left[0, 1\right]$.**

☒ **2.** Să se arate că ecuația $x^n + nx = 1,\ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, are o soluție pozitivă x_n. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

<u>*Soluție*</u>

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n + nx - 1$ este funcție polinomială, deci este continuă. Pentru $x \geq 1$ se obține $f(x) > 0$. Rezultă că ecuația $f(x) = 0$ poate avea soluții pozitive numai în intervalul $[0, 1]$.

Avem: $f(0) = -1$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n}$. Aşadar, există $x_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 2$, cu proprietatea că $f(x_n) = 0$. Funcția f fiind strict monotonă pe $(0, 1)$, soluția x_n este unică. Din criteriul cleştelui se obține $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

3.2. STABILIREA SEMNULUI UNEI FUNCȚII

Lecturând figura 1 observăm că pe intervalul (a, x_0) funcția f nu se anulează, iar graficul funcției f este situat sub axa Ox, deci f are numai valori negative, respectiv deasupra axei Ox, deci f are numai valori pozitive.

Mai general se obține: dacă funcția $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă pe intervalul I şi $f(x) \neq 0,\ \forall\ x \in I$, atunci funcția f are acelaşi semn pe întreg intervalul I.

▣ **TEOREMA 6**

Dacă funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este continuă pe intervalul I şi $f(x) \neq 0, \forall x \in I$, atunci f are acelaşi semn pe intervalul I.

Într-adevăr, dacă f nu ar avea semn constant pe I, atunci ar exista $a, b \in I$, astfel încât $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dar în acest caz, din teorema 5 ar exista $c \in (a, b)$, astfel încât $f(c) = 0$, în contradicție cu ipoteza. ■

Acest rezultat permite ca pentru o funcție continuă să se poată stabili semnul pe un interval pe care ea nu se anulează, cunoscând doar semnul unei valori a funcției într-un singur punct din interval.

Problemă rezolvată

☒ Să se stabilească semnul următoarelor funcții $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi să se rezolve inecuațiile $f(x) \leq 0$ în cazurile:

a) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$; **b)** $f(x) = (x-2)(x-1+2^x)$.

Soluție

a) Soluțiile ecuației $f(x) = 0$ sunt $x \in \{-3, 3, -1, 1\}$. Deoarece f este funcție continuă pe $\mathbb{R}$ şi nu se mai anulează pe intervalele $(-\infty, -3), (-3, -1), (-1, 1), (1, 3), (3, +\infty)$, ea are semn constant pe fiecare din aceste intervale. Având $f(-4) = f(4) = 105$, $f(0) = 9$, $f(-2) = f(2) = -15$, se poate alcătui tabelul de semn al funcției.

> ◢ **Temă**
> **Rezolvați inecuațiile:**
> **a)** $x^4 - 8x \leq 0$;
> **b)** $(2^x - 1)(3^x - 3) \geq 0$.

x	$-\infty$		-3		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$		+ + + + + + + +	0	− − − − −	0	+ + + + +	0	− − − − − −	0	+ + + + +	

Soluția inecuației $f(x) \leq 0$ este $x \in [-3, -1] \cup [1, 3]$.

b) Din $f(x) = 0$ rezultă $x = 2$ şi $x + 2^x = 1$ cu soluția unică $x = 0$. Funcția f fiind continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că ea are semn constant pe intervalele $(-\infty, 0), (0, 2)$ şi $(2, +\infty)$. Deoarece $f(-1) = 4{,}5$, $f(1) = -2$ şi $f(3) = 10$, se obține tabelul de semn:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		+ + + + + + + +	0	− − − − −	0	+ + + + + + + +	

Soluția inecuației $f(x) \leq 0$ este $x \in [0, 2]$.

3.3. PROPRIETATEA LUI DARBOUX

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, iar $a, b \in I$, $a < b$. Să lecturăm graficul acesteia pe intervalul I, (figura 2).

Se observă că dacă alegem un număr $\lambda \in (f(a), f(b))$, atunci se poate găsi o valoare $c(\lambda) \in (a, b)$ cu proprietatea ca $f(c(\lambda)) = \lambda$.

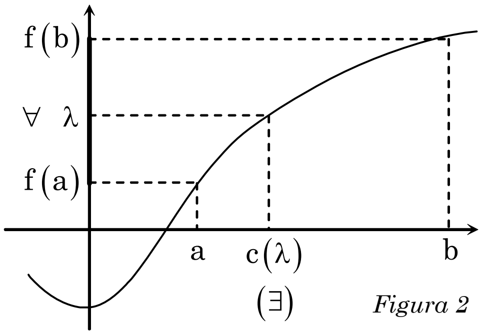


Figura 2

Un asemenea rezultat este specific unei anumite clase de funcții.

❖ **DEFINIȚIE**

• Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție şi $I \subset D$ un interval. Funcția **f are proprietatea lui Darboux** pe intervalul I dacă oricare ar fi punctele $a, b \in I$, $a < b$ şi oricare ar fi λ cuprins între valorile $f(a)$ şi $f(b)$, există un punct $c(\lambda) \in (a, b)$ astfel încât $f(c(\lambda)) = \lambda$.

Aşadar, o funcție f are proprietatea lui Darboux pe intervalul I dacă nu poate trece de la o valoare y_1 la o valoare y_2, fără a lua toate valorile cuprinse între y_1 şi y_2.

Lecturarea graficului funcției continue din figura 2 sugerează faptul că aceasta are proprietatea lui Darboux.

Mai general, avem următorul rezultat:

▣ TEOREMA 7 (Cauchy-Weierstrass-Bolzano)
Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă şi $I \subset D$ un interval. Atunci f are proprietatea lui Darboux pe intervalul I.

Demonstrație

Fie $a, b \in I$, $a < b$ şi $f(a) = y_1$, $f(b) = y_2$ valorile funcției f în punctele a şi b. Vom presupune $y_1 < y_2$. Pentru $\lambda \in (y_1, y_2)$ considerăm funcția $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \lambda$. Funcția g este continuă şi $g(a) = f(a) - \lambda = y_1 - \lambda > 0$, $g(b) = f(b) - \lambda = y_2 - \lambda < 0$. Din teorema 5 rezultă că există $c \in (a, b)$, astfel încât $g(c) = 0$. Din egalitatea $g(c) = 0$ se obține că $f(c) = \lambda$ şi teorema este demonstrată. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ nu este funcție constantă şi are proprietatea lui Darboux, atunci $\mathrm{Im}(f)$ este o mulțime infinită deoarece odată cu valorile y_1, y_2 conține tot intervalul (y_1, y_2).
   Aşadar, dacă funcția neconstantă $f : I \to \mathbb{R}$ are un număr finit de valori, atunci ea nu are proprietatea lui Darboux pe I.
2. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$, atunci mulțimea $\mathrm{Im}(f)$ este un interval.
3. Dacă funcția $f : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe I, atunci ea nu poate avea decât discontinuități de a doua speță.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, ştiind că:
$f^2(x) = 3 \cdot f(x),\ x \in \mathbb{R}.$

<u>*Soluție*</u>

Din relația dată se obține: $f(x)(f(x)-3)=0,\ x \in \mathbb{R}$, şi $f(x)=\begin{cases}0, & x\in A\\ 3, & x\in \mathbb{R}\setminus A\end{cases}$.

Deoarece f este funcție continuă, atunci $\mathrm{Im}(f)$ trebuie să fie interval. Dacă $\mathrm{Im}(f)=\{0, 3\}$ rezultă că f nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$. Rămân doar situațiile: $\mathrm{Im}(f)=\{0\}$ când $A = \mathbb{R}$ şi $\mathrm{Im}(f)=\{3\}$ când $A = \varnothing$. Aşadar, $f(x)=0,\ x \in \mathbb{R}$ sau $f(x)=3,\ x \in \mathbb{R}$ sunt singurele funcții care verifică condiția cerută.

☒ **2.** Fie $f:[a, b]\to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se arate că există $c \in [a, b]$, astfel încât $f(c)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

<u>*Soluție*</u>

Dacă $f(a)=f(b)$, avem $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}=f(a)$ şi se poate lua $c = a$. Să presupunem că $f(a)<f(b)$. Atunci $f(a)<\dfrac{f(a)+f(b)}{2}<f(b)$. Deoarece f este continuă, ia toate valorile cuprinse între $f(a)$ şi $f(b)$, deci $\lambda=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ este valoare a funcției f. Aşadar, există $c\in[a, b]$, astfel încât $f(c)=\lambda$.

☒ **3.** Să se arate că orice funcție polinomială de grad impar are cel puțin o rădăcină reală.

<u>*Soluție*</u>

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, n impar, funcție polinomială de gradul n.

Avem: $\alpha=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a_0\cdot(-\infty)$ şi $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a_0\cdot(+\infty)$.

Se observă că $\alpha\cdot\beta<0$, deci funcția f are valori de semne contrare. Aşadar, există $x_0\in(-\infty,+\infty)$, astfel încât $f(x_0)=0$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se arate că următoarele ecuații au cel puțin o soluție în intervalul dat:

a) $x+1+\sin x=0,\ I=\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$;

b) $x^3+5x^2+4x-9=0,\ I=[0,\ 1]$;

c) $(x^2-8)\cdot2^x=1,\ I=[2,\ 3]$;

d) $\operatorname{arctg} x=\ln x,\ I=(0,\ +\infty)$;

e) $x+\ln x=0,\ I=[0,\ 1]$.

E2. Să se stabilească semnul funcției $f:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=x^3-3x+2$;

b) $f(x)=(x-1)\cdot(2^x-4)$;

c) $f(x)=(x-1)\cdot\ln(x+1)$;

d) $f(x)=(1-\ln x)\cdot(2^x-8)$;

e) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-16x}$;

f) $f(x)=\ln^2 x-2\ln x$.

E3. Să se rezolve inecuațiile:

a) $x^3-4x\ge0$; b) $(x-1)(\ln x-1)\le0$;

c) $(x^2-1)\cdot(e^x-1)\ge0$; d) $\dfrac{2^x-4}{\ln x-1}\le0$;

e) $\dfrac{3^x-9}{2^x-9}\ge1$; f) $\dfrac{\ln x-1}{3-\ln x}<1$.

E4. Să se arate că funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nu au proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$;

b) $f(x)=\begin{cases}-2, & x\in(-\infty,\ 0]\\ x^2+1, & x\in(0,\ +\infty)\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le1\\ 3x-1, & x>1\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\ne0\\ 2, & x=0\end{cases}$;

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\ne0\\ a, & x=0\end{cases}$.

APROFUNDARE

A1. Să se stabilească semnul funcției $f:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=4\sin^2 x-1,\ D=[0,\ 2\pi]$;

b) $f(x)=x+\ln(x+1),\ D=[0,\ e-1]$;

c) $f(x)=\sin x-\cos 2x,\ D=[-\pi,\ \pi]$;

d) $f(x)=\sin x+\ln(x+1),\ D=\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$;

e) $f(x)=\sin x\cdot(\sin(\ln x)),\ D=[1,\ e^2]$;

f) $f(x)=\sin(\ln x),\ D=(0,\ +\infty)$.

A2. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in\mathbb{Q}\\ 2^x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

A3. Să se arate că ecuația $x^3+2x-1=0$ nu are toate soluțiile reale numere întregi.

A4. Folosind monotonia funcțiilor și proprietatea lui Darboux, să se arate că funcțiile sunt bijective:
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2^x$;
b) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\log_2 x$;
c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x+\sqrt[3]{x}$.

A5. Fie $f:[a,b]\to[a,b]$ o funcție continuă. Să se arate că există un punct $x_0\in[a,b]$, astfel încât $f(x_0)=x_0$. (x_0 se numește punct fix.)
(Academia Tehnică Militară, 1991)

A6. Fie $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât $f(0)=f(2\pi)$. Să se arate că există $x_0\in(0,\pi)$, astfel încât $f(x_0)=f(x_0+\pi)$.

A7. Se consideră funcțiile $f,g:[a,b]\to[a,b]$ continue, astfel încât $g(a)=a$, $g(b)=b$. Să se arate că ecuația $f(x)-g(x)=0$ are cel puțin o soluție.

A8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și mărginită. Să se arate că ecuația $f(x)=x$ are cel puțin o soluție reală.

A9. Să se determine funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât:

$$f(x)=f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right),\ \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

(Olimpiadă locală, 1993)

A10. Se consideră $x_0\in\mathbb{R}$ și șirul (x_n) dat de relația de recurență $x_{n+1}^3=x_n^2+2x_n+12$, $n\geq1$.
a) Să se arate că șirul este convergent.
b) Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, astfel încât:

$$f(x)=f\left(\sqrt[3]{x^2+2x+12}\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

(Olimpiadă locală, 1995)

A11. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât $\sin f(x)=1,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Să se arate că f este funcție constantă. (Învățământ tehnic, 1985)

A12. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât ecuația $f(x)=x+4$ nu are soluții reale. Să se arate că f este nemărginită.

A13. Un rezervor este umplut la o sursă cu debit variabil între orele 8 și 12. Același rezervor este golit prin scurgere a doua zi tot între orele 8 și 12. Să se arate că există o oră h în ambele zile la care apa este la același nivel. (Olimpiadă județeană, 1975)

DEZVOLTARE

D1. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și $m=\inf f([a,b])$, $M=\sup f([a,b])$. Să se arate că funcția f este mărginită și există $x_0, x_1\in[a,b]$ cu proprietatea că $f(x_0)=m$ și $f(x_1)=M$.
(Teorema lui Weierstrass)

D2. Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$. Să se arate că $f(I)$ este interval închis și mărginit.

D3. Să se arate că dacă $f:[a,b]\to(a,b)$ este funcție surjectivă, atunci f este funcție discontinuă.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

○ 1. Să se studieze continuitatea funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \le 1 \\ ax + 2, & x > 1 \end{cases}$; b) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2 + 2^{nx}}{x^2 + 1 + 2^{nx}}$. *(3p.)*

○ 2. Să se stabilească semnul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(3^x - 27\right)\cdot\left(2 - \sqrt[3]{x}\right)$. *(3p.)*

○ 3. Să se prelungească prin continuitate funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x}, & x < 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{ax}, & x > 0 \end{cases}$.

(3p.)

Testul 2

○ 1. Să se studieze continuitatea funcțiilor $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{x}, & x > 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 5ax}{9x}, & x \in [-1, 0) \\ b, & x = 0 \\ \dfrac{\sin(3\arcsin x)}{\sin(9\arcsin x)}, & x \in (0, 1] \end{cases}$. *(3p.)*

○ 2. Fie $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $f\left(x^2\right) - f(x) = x^2 - x$, $x \in (0, +\infty)$. Să se determine f. (Olimpiadă locală, 1992) *(3p.)*

○ 3. Să se stabilească semnul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(3^x - 2^x\right)\cdot\left(5^x - 4^x - 3^x\right)$. *(3p.)*

Testul 3

○ 1. Să se studieze continuitatea funcțiilor $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x \cdot \left[2^x\right]$, $x \in [1, 3]$;

b) $f(x) = \begin{cases} ax + b, & |x| < 1 \\ \arcsin\dfrac{1}{x} - \arccos\dfrac{1}{x}, & |x| \ge 1 \end{cases}$. *(3p.)*

○ 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $(f \circ f)(x) = -x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este discontinuă. *(3p.)*

○ 3. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât $a \le f(a)$ și $f(b) \le b$. Să se arate că f admite cel puțin un punct fix. *(3p.)*

CAPITOLUL III. FUNCŢII DERIVABILE

Noţiunea de derivată a fost introdusă şi folosită în matematică de savantul Isaac Newton (1642-1724) în legătură cu studiul legilor mecanicii şi aproape în acelaşi timp, de savantul Gottfried Leibniz (1646-1716) în legătură cu studiul tangentei la o curbă într-un punct al acesteia.

1 DERIVATA UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

1.1. PROBLEME CARE CONDUC LA NOȚIUNEA DE DERIVATĂ

PROBLEMA TANGENTEI LA O CURBĂ (GOTTFRIED LEIBNIZ)

Să considerăm funcția $f:(a, b) \to \mathbb{R}$, o funcție continuă şi punctul fix $M_0(x_0, f(x_0))$ pe imaginea geometrică $\mathscr{G}_f$ a graficului funcției. Se pune problema determinării tangentei în punctul M_0 la curba $\mathscr{G}_f$, determinare care impune găsirea pantei (coeficientului unghiular) acestei drepte.

Vom gândi tangenta M_0T ca fiind o „poziție limită" a unei secante M_0M atunci când punctul $M(x, f(x))$ se apropie oricât de mult de punctul M_0, rămânând permanent pe curba $\mathscr{G}_f$. În acest mod, panta secantei M_0M tinde să aproximeze panta tangentei la curbă în punctul M_0, (figura 1).

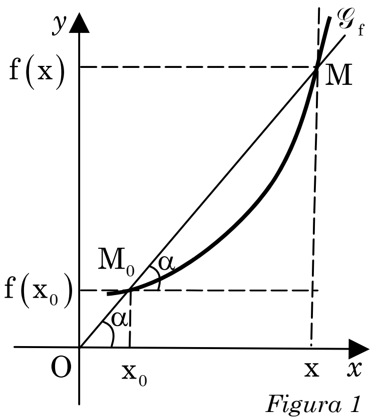


Figura 1

Se ştie că panta secantei M_0M reprezintă tangenta trigonometrică a unghiului α format de aceasta cu sensul pozitiv al axei Ox. Ca urmare, are loc egalitatea:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Presupunând că există limita $m = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (1), aceasta este prin definiție **panta** sau **coeficientul unghiular** al tangentei în punctul

M_0 la curba $\mathscr{G}_f$. Astfel, tangenta în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este bine determinată de ecuația: $y - f(x_0) = m(x - x_0)$.

Dacă $m = \pm\infty$, atunci tangenta în punctul M_0 este o dreaptă cu aceeaşi direcție cu axa Oy.

Pentru limita (1) se va adopta notația $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ şi se va numi **derivata funcției f în punctul x_0**.

PROBLEMA VITEZEI INSTANTANEE A UNUI MOBIL (ISAAC NEWTON)

Să considerăm un mobil ce se deplasează neuniform pe o traiectorie rectilinie după o lege de mişcare $s = s(t)$, care caracterizează spațiul parcurs de mobil ca funcție de timp. În aceste condiții se pune problema determinării vitezei medii într-un moment fixat t_0.

Pentru aceasta se consideră intervale de timp $[t_0, t]$ din ce în ce mai mici pe care mişcarea mobilului tinde să devină uniformă. În acest fel, viteza medie a mobilului în intervalul de timp $[t_0, t]$ va fi $v_m = \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$.

Se obține astfel definiția **vitezei instantanee** a mobilului la momentul t_0 (fixat), $t_0 > 0$ ca fiind limita vitezei medii când $t \to t_0$:

$v(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$, (2).

Din punct de vedere matematic, această limită, dacă există, se va numi derivata în punctul t_0 a funcției spațiu „s“, notată $s'(t_0)$.

Viteza instantanee la momentul t_0 va reprezenta derivata „spațiului“ în punctul t_0: $v(t_0) = s'(t_0)$.

În mod asemănător, dacă $v(t)$ este viteza unui mobil la momentul oarecare t, atunci **accelerația** mobilului la momentul t_0 fixat va fi:

$a(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$, (3).

în ipoteza că această limită există.

1.2. DEFINIȚIA DERIVATEI UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare al mulțimii D.

❖ **DEFINIȚII**

• Se spune că **funcția f are derivată în punctul $x_0 \in D$** dacă există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ în $\overline{\mathbb{R}}$.

Această limită se numeşte **derivata funcției f în punctul x_0** şi se notează $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

• Se spune că funcția **f este derivabilă în punctul $x_0 \in D$** dacă limita $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există şi este finită.

➲ **OBSERVAȚII**

1. Derivabilitatea unei funcții este o proprietate locală, deoarece în studiul derivabilității unei funcții într-un punct intervin numai valorile funcției într-o vecinătate a punctului.
2. Funcția f nu este derivabilă în punctul x_0 dacă $f'(x_0)$ nu există sau există şi este infinită.
3. Utilizând schimbarea de variabilă $h = x - x_0$, atunci derivata funcției f în punctul x_0 se determină cu formula: $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

❖ **DEFINIȚII**

• Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $A \subset D$.

Funcția **f este derivabilă pe mulțimea A** dacă este derivabilă în fiecare punct al mulțimii.

• Mulțimea $D_{f'} = \{x \in D \mid \exists\, f'(x) \text{ şi } f'(x) \in \mathbb{R}\}$ se numeşte **domeniul de derivabilitate** al funcției f.

• Funcția $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărui $x \in D_{f'}$ numărul real $f'(x)$ se numeşte **funcția derivată** a funcției f sau **derivata funcției f**.

Dacă funcția f este derivabilă pe mulțimea D, folosind observația (3), atunci legea de corespondență a funcției f' se scrie sub forma:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \ \forall\, x \in D. \qquad (1)$$

Operația prin care f' se obține din funcția f se numeşte **operația de derivare a lui f**.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se arate că următoarele funcții au derivată în punctele specificate şi sunt derivabile în aceste puncte:

a) $f(x) = x^2 + 2,\ x_0 = 3;$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+4},\ x_0 = -2.$

<u>*Soluție*</u>

În fiecare caz se arată că există $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$

a) Avem: $f'(3) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x^2+2) - 11}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3}(x+3) = 6 \in \mathbb{R}.$

Funcția f are derivată în $x_0 = 3,\ f'(3) = 6$ şi este derivabilă în $x_0 = 3.$

b) $f'(-2) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\dfrac{x+1}{x+4} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)}{x+2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3}{2(x+4)} = \dfrac{3}{4} \in \mathbb{R}.$

Aşadar, f are derivată finită în $x_0 = -2,$ deci este derivabilă în $x_0 = -2.$

☒ **2.** Să se studieze dacă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x+5}$ are derivată în punctul $x_0 = -5$ şi să se precizeze dacă este derivabilă în acest punct.

<u>*Soluție*</u>

Calculăm $f'(-5) = \lim\limits_{x \to -5} \dfrac{f(x) - f(-5)}{x+5} = \lim\limits_{x \to -5} \dfrac{\sqrt[3]{x+5}}{x+5} = \lim\limits_{x \to -5} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+5)^2}} = +\infty.$

În concluzie, $f'(-5) = +\infty$ şi, ca urmare, f are derivată în $x_0 = -5,$ dar nu este derivabilă în acest punct.

☒ **3.** Să se determine derivata f' a funcției:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x + 3.$

<u>*Soluție*</u>

Se va folosi formula (1): $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}.$

Avem succesiv $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - 4(x+h) + 3 - (x^2 - 4x + 3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(h + 2x - 4)}{h} = 2x - 4.$

Aşadar, $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x) = 2x - 4.$

1.3. DERIVABILITATE ȘI CONTINUITATE

Proprietățile de derivabilitate şi continuitate ale unei funcții numerice au fost definite ca proprietăți locale. Legătura dintre acestea este dată de următorul rezultat.

▣ TEOREMA 1 (continuitatea funcțiilor derivabile)
Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Demonstrație

Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ un punct în care f este derivabilă. Pentru a demonstra că f este continuă în punctul x_0 este suficient să arătăm că $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0.$ În acest sens avem succesiv:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=$$
$$=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

Rezultă că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$ deci funcția f este continuă în punctul x_0. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Reciproca teoremei 1 este în general o propoziție falsă. Altfel spus, o funcție numerică poate fi continuă într-un punct fără a fi şi derivabilă în acel punct.

☞ ***Exemplu***

• Funcția modul $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=|x|$ este continuă în $x_0=0$ deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0=f(0).$

Pentru derivabilitate să studiem existența şi valoarea limitei raportului $R(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}$ în $x_0=0.$

Avem: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} R(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(-1)=-1,$ iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} R(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1=1.$

Aşadar, nu există $\lim\limits_{x\to 0} R(x)$ şi, ca urmare, funcția modul nu este derivabilă în punctul $x_0=0.$

În concluzie, continuitatea este doar condiție necesară pentru derivabilitate, dar nu şi suficientă.

2. Contrara reciprocei teoremei 1 este propoziție adevărată (principiul contrapoziției: $(p \to q) \equiv (\rceil q \to \rceil p)$:

Orice funcție discontinuă într-un punct nu este derivabilă în acest punct.

Atenție!

Există funcții discontinue într-un punct şi care au derivată în acel punct.

☞ ***Exemplu***

• Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ este discontinuă în $x_0=0$.

$$\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\frac{\pi}{2},\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\frac{\pi}{2},\ f(0)=0\right),\ \text{iar } f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=+\infty.$$

Exercițiu rezolvat

☒ Să se determine numerele reale a şi b, astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+(a-2)x+3-b, & x\le 0\\ e^{3x}, & x>0\end{cases}$ să fie derivabilă în $x_0=0$.

Soluție

Deoarece proprietatea de continuitate a unei funcții într-un punct este condiție necesară pentru derivabilitatea în acel punct, impunem condiția ca funcția f să fie continuă în $x_0=0$.

Din egalitățile $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$ se obține $b=2$.

Din derivabilitatea funcției f în $x_0=0$ rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ există şi este finită.

Se obține că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{x^2+(a-2)x}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$, echivalent cu $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x+a-2)=$ $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3$, care conduce la egalitatea $a-2=3$, de unde $a=5$.

În concluzie, pentru $a=5$ şi $b=2$ funcția f este derivabilă în $x_0=0$.

❷ DERIVATE LATERALE

S-a observat că pentru funcția „modul“ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$ limita raportului $R(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ în punctul $x_0=0$ nu există, în schimb există limitele laterale ale acestui raport în punctul $x_0=0$. Aceste limite laterale vor fi denumite **derivatele laterale** ale funcției f în punctul $x_0=0$.

DERIVATA LA STÂNGA

Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$, astfel încât $D \cap (-\infty, x_0) \neq \emptyset$.

❖ **DEFINIȚII**

• Funcția f are **derivată la stânga în punctul x_0** dacă limita $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există în $\overline{\mathbb{R}}$.

Această limită se numeşte **derivata la stânga** a funcției f în punctul x_0 şi se notează $f_s'(x_0)$.

• Funcția **f este derivabilă la stânga** în punctul x_0 dacă derivata la stânga în x_0 există şi este finită.

DERIVATA LA DREAPTA

Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$, astfel încât $D \cap (x_0, +\infty) \neq \emptyset$.

❖ **DEFINIȚII**

• Funcția f are **derivată la dreapta în punctul x_0** dacă limita $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există în $\overline{\mathbb{R}}$.

Această limită se notează $f_d'(x_0)$ şi se numeşte **derivata la dreapta** a funcției f în punctul x_0.

• Funcția **f este derivabilă la dreapta** în x_0 dacă derivata la dreapta în punctul x_0 există şi este finită.

Revenind la funcția modul, putem spune că nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$, este derivabilă la stânga în $x_0 = 0$ cu $f'_s(0) = -1$ şi este derivabilă la dreapta în $x_0 = 0$ cu $f'_d(0) = 1$.

Folosind derivatele laterale într-un punct, se poate da o caracterizare a existenței derivatei unei funcții într-un punct, respectiv a derivabilității acesteia în punctul considerat.

▣ **TEOREMA 2**

Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$.

a) Funcția f are derivată în x_0 dacă şi numai dacă f are derivate laterale în x_0 şi $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

b) Funcția f este derivabilă în x_0 dacă şi numai dacă este derivabilă la stânga şi la dreapta în x_0 şi $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

➲ OBSERVAȚII ȘI PRECIZĂRI

• Să considerăm funcția $f:[a, b]\to\mathbb{R}$.

a) Dacă f are derivată în $x_0=a$, atunci aceasta este $f'(a)=f'_d(a)$.

b) Dacă f are derivată în $x_0=b$, atunci aceasta este $f'(b)=f'_s(b)$.

c) Funcția f este derivabilă în punctul a (respectiv în punctul b) dacă este derivabilă la dreapta în punctul a (respectiv la stânga în punctul b).

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se studieze derivabilitatea funcțiilor în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x|x-1|,\ x_0=1;$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\max(4x+2,\ x-1),\ x_0=-1.$

<u>Soluție</u>

a) Funcția f are legea de corespondență: $f(x)=\begin{cases}-x^2+x, & x\le 1\\ x^2-x, & x>1\end{cases}.$

Calculăm derivatele laterale în punctul $x_0=1$. Avem:

$$f'_s(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{-x^2+x}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}(-x)=-1;$$

$$f'_d(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}x=1.$$

Deoarece $f'_s(1)\ne f'_d(1)$, rezultă că f nu este derivabilă în punctul $x_0=1$.

b) Legea de corespondență este: $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le -1\\ 4x+2, & x>-1\end{cases}.$

$$f'_s(-1)=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{x+1}{x+1}=1;$$

$$f'_d(-1)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{(4x+2)+2}{x+1}=4.$$

Deoarece $f'_s(-1)\ne f'_d(-1)$, rezultă că f nu este derivabilă în $x_0=-1$.

☒ **2.** Să se studieze derivabilitatea funcției $f:(-\infty, 0]\cup[2, +\infty)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\sqrt{x^2-2x}$, în punctele $x_0=0,\ x_0=2$.

<u>Soluție</u>

• Studiul derivabilității funcției în $x_0=0$ revine la studiul derivabilității la stânga punctului $x_0=0$.

Avem:

$$f'(0)=f'_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left[-\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left[-\sqrt{\frac{x-2}{x}}\right]=-\infty.$$

Deoarece $f'_s(0)=-\infty$, funcția f nu este derivabilă în $x_0=0$.

• $f'(2)=f'_d(2)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\sqrt{\frac{x}{x-2}}=+\infty$. Rezultă că f nu este derivabilă în $x_0=2$.

INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A DERIVATELOR LATERALE

Să considerăm funcția $f:(a, b)\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in(a, b)$.

• S-a arătat că dacă f este derivabilă în punctul x_0, atunci imaginea geometrică $\mathscr{G}_f$ a graficului funcției admite tangentă în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ a cărei pantă este $m=f'(x_0)$ (**interpretarea geometrică a derivatei într-un punct**), iar ecuația tangentei în acest punct este: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

• Dacă funcția este derivabilă la stânga (sau la dreapta) în punctul x_0, atunci se foloseşte noțiunea de **semitangentă la stânga** (sau **la dreapta**).

În cele ce urmează vom considera că funcția $f:(a, b)\to\mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0\in(a, b)$.

Pentru derivatele laterale ale funcției f în punctul x_0 pot exista următoarele situații:

1. $\boxed{f'_s(x_0)\text{ există.}}$ În acest caz, $\mathscr{G}_f$ admite semitangentă la stânga în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ şi anume semidreapta $[M_0T$ cu panta $m=f'_s(x_0)$, (figura 1).

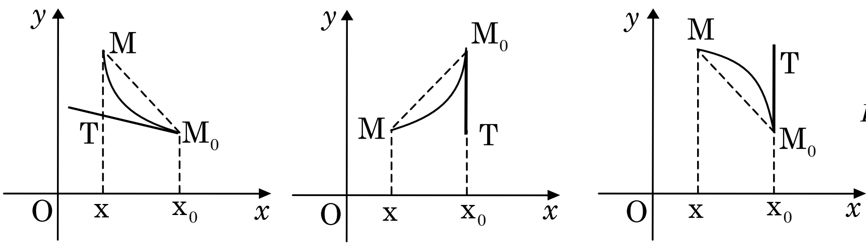


Figura 1

$\mathbf{f'_s(x_0)\in\mathbb{R}}$

$\mathbf{f'_s(x_0)=+\infty}$
Semitangenta $[M_0T$ este sub punctul M_0, $M_0T \parallel Oy$

$\mathbf{f'_s(x_0)=-\infty}$
Semitangenta $[M_0T$ este deasupra punctului M_0, $M_0T \parallel Oy$

2. $\boxed{f'_d(x_0) \text{ există.}}$ În acest caz, $\mathscr{G}_f$ admite semitangentă la dreapta în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, anume semitangenta $[M_0T$ cu panta $m = f'_d(x_0)$, (figura 2).

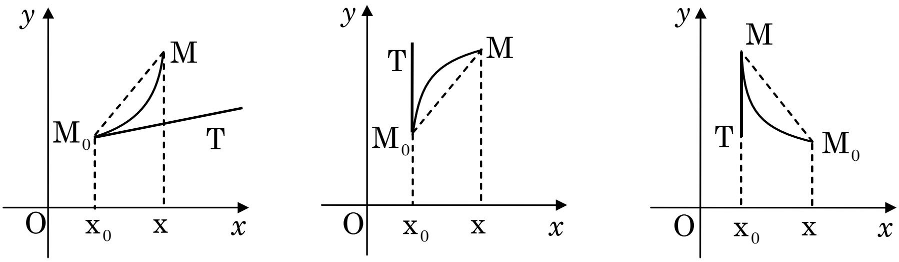


Figura 2

$f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$

$f'_d(x_0) = +\infty$
Semitangenta $[M_0T$ este deasupra punctului M_0, $M_0T \parallel Oy$

$f'_d(x_0) = -\infty$
Semitangenta $[M_0T$ este sub punctul M_0, $M_0T \parallel Oy$

Folosind interpretarea geometrică a derivatelor laterale se pot pune în evidență câteva puncte remarcabile ale graficului funcției.

PUNCTE DE ÎNTOARCERE

❖ **DEFINIȚIE**

Fie funcția numerică $f : D \to \mathbb{R}$.

• Punctul $x_0 \in D$ se numeşte **punct de întoarcere al funcției f** dacă funcția este continuă în x_0 şi are derivate laterale infinite şi diferite în acest punct.

Punctul $M_0(x_0, f(x_0)) \in \mathscr{G}_f$ se numeşte **punct de întoarcere al graficului** funcției, iar în acest punct semitangentele la curba $\mathscr{G}_f$ coincid, (figura 3).

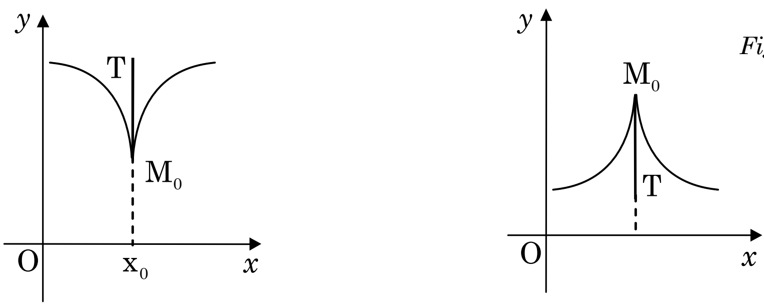


Figura 3

$f'_s(x_0) = -\infty$, $f'_d(x_0) = +\infty$
(x_0 = punct de întoarcere)

$f'_s(x_0) = +\infty$, $f'_d(x_0) = -\infty$
(x_0 = punct de întoarcere)

Problemă rezolvată

☒ Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x},\ x<0\\ \sqrt{x},\ x\geq 0\end{cases}$. Să se arate că $x_0=0$ este punct de întoarcere al funcției f.

<u>*Soluție*</u>

Avem că: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\sqrt{-x}=0,\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}=0$ şi $f(0)=0$.

Aşadar, f este continuă în $x_0=0$.

$f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{\sqrt{-x}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}-\sqrt{\dfrac{-x}{(-x)^2}}=-\infty;$

$f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$

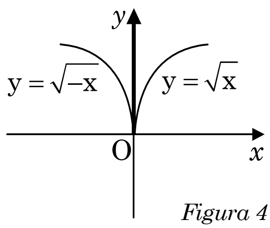


Figura 4

Astfel sunt întrunite toate condițiile pentru ca punctul $x_0=0$ să fie punct de întoarcere al funcției.

În figura 4 se observă că axa Oy este semitangentă verticală a graficului în $O(0,\ 0)$.

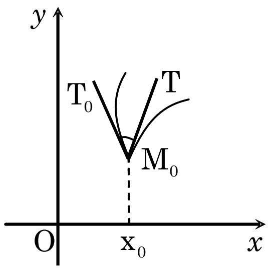
PUNCTE UNGHIULARE

❖ **<u>DEFINIȚIE</u>**

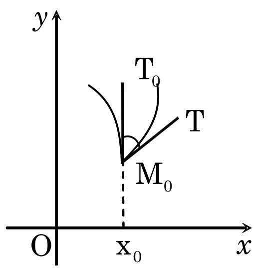
Fie funcția numerică $f:D\to\mathbb{R}$.

- Punctul $x_0\in D$ se numeşte **punct unghiular al funcției f** dacă f este continuă în x_0, are derivate laterale diferite în x_0 şi cel puțin o derivată laterală este finită.

Punctul $M_0(x_0,\ f(x_0))\in\mathcal{G}_f$ se numeşte **punct unghiular al graficului** funcției, iar semitangentele în acest punct la curba $\mathcal{G}_f$ formează un unghi propriu, (figura 5).



$\mathbf{f'_s(x_0),\ f'_d(x_0)\in\mathbb{R}}$
(punct unghiular)



$\mathbf{f'_s(x_0)=-\infty,\ f'_d(x_0)\in\mathbb{R}}$
(punct unghiular)

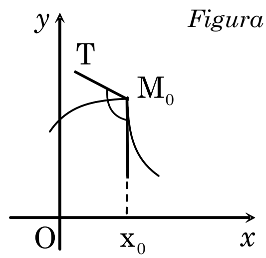


Figura 5

$\mathbf{f'_s(x_0)\in\mathbb{R},\ f'_d(x_0)=-\infty}$
(punct unghiular)

◢ **Temă**

Reprezentați şi alte situații în care apar puncte unghiulare.

Problemă rezolvată

☒ Să se arate că punctul $x_0 = 0$ este punct unghiular al funcției:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ \sin x, & x\geq 0 \end{cases}.$$

<u>*Soluție*</u>

Funcția f este continuă în $x_0 = 0$ deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

$$f'_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^2}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}x=0;$$

$$f'_d(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin x}{x}=1.$$

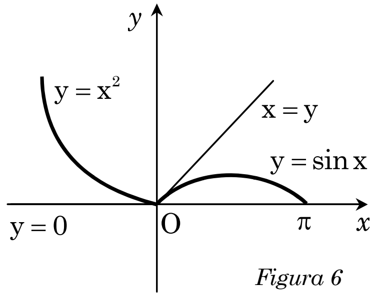


Figura 6

Aşadar, condițiile ca punctul $x_0 = 0$ să fie punct unghiular sunt îndeplinite. Punctul $M_0(0,\ 0)$ este punct unghiular al curbei $\mathscr{G}_f$. Dreptele $y = 0$, $y = x$ sunt semitangente în stânga, respectiv în dreapta, în origine, (figura 6).

PUNCTE DE INFLEXIUNE

❖ <u>DEFINIȚIE</u>

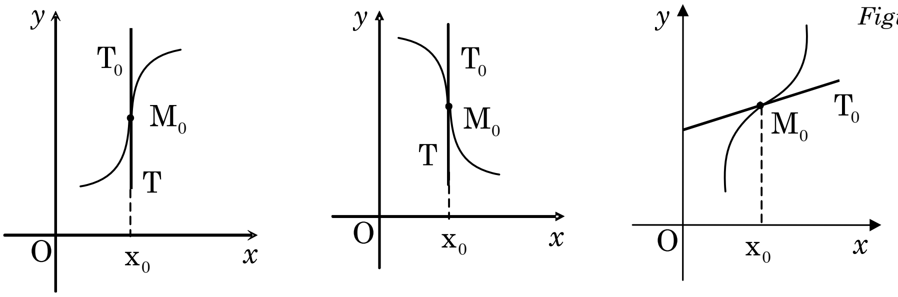
Fie funcția numerică $f: D \to \mathbb{R}$.

- Punctul $x_0 \in D$ este **punct de inflexiune** al funcției f dacă funcția este continuă în x_0, are derivată în punctul x_0 (finită sau infinită) iar funcția este convexă (concavă) de o parte a lui x_0 şi concavă (convexă) de cealaltă parte a punctului x_0.

Punctul $M_0(x_0,\ f(x_0))$ este **punct de inflexiune al curbei $\mathscr{G}_f$,** iar semitangentele la curbă în punctul M_0 sunt semidrepte opuse.

Dreapta suport traversează curba $\mathscr{G}_f$, (figura 7).

Figura 7



$f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = +\infty$ (punct de inflexiune) | **$f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = -\infty$** (punct de inflexiune) | **$f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$** (punct de inflexiune)

Problemă rezolvată

☒ Să se arate că punctul $x_0 = 0$ este punct de inflexiune pentru funcțiile:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x}$; **b)** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3$.

<u>*Soluție*</u>

a) Pentru funcția f avem: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ şi $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$.

Aşadar, f este continuă în $x_0 = 0$ şi are derivata infinită în acest punct, deci $x_0 = 0$ este punct de inflexiune.

b) Pentru funcția g avem: $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$ şi $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

Corelând cu aspectul curbei $\mathscr{G}_g$ (parabola cubică) din figura 8, rezultă că $x_0 = 0$ este punct de inflexiune pentru funcția g.

Punctul $O(0, 0)$ este punct de inflexiune al parabolei cubice şi dreapta $y = 0$ este tangentă la curbă.

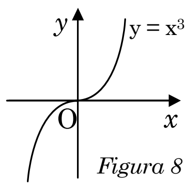


Figura 8

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se arate că funcția $f : D \to \mathbb{R}$ are derivată în punctul specificat, precizând de fiecare dată domeniul maxim de definiție D:

a) $f(x) = 2x^2 + 1,\ x_0 = 3$;

b) $f(x) = 4x^3 + 1,\ x_0 = -1$;

c) $f(x) = \frac{1}{x+3},\ x_0 = 0$;

d) $f(x) = \sqrt{x+1},\ x_0 = 1$;

e) $f(x) = \sqrt[3]{5x+3},\ x_0 = 1$;

f) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$;

g) $f(x) = 2^x,\ x_0 = -1$;

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}},\ x_0 = 1$.

E2. Să se studieze derivabilitatea funcției $f : D \to \mathbb{R}$ în punctul specificat, precizând mulțimea D:

a) $f(x) = 3x + 4,\ x_0 = -2$;

b) $f(x) = -x^2 + x,\ x_0 = 1$;

c) $f(x) = \frac{x+2}{x+1},\ x_0 = \frac{1}{2}$;

d) $f(x) = \cos x,\ x_0 = 0$;

e) $f(x) = \ln x,\ x_0 = 1$;

f) $f(x) = |x+2|,\ x_0 = -2$.

E3. Să se determine funcția derivată f' a funcției $f : D \to \mathbb{R}$ precizând domeniile de definiție D şi $D_{f'}$ în cazurile:

a) $f(x) = 3x + 4$; b) $f(x) = 5x^2 + 1$;

c) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; d) $f(x) = \frac{1}{x}$;

e) $f(x) = 2006$; f) $f(x) = \sin x + 2$.

E4. Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în punctul $x_0 = 0$:

a) $f(x) = x^2 - x + 4$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x \le 0 \\ -x^3 + 3x, & x > 0 \end{cases}$;

c) $f(x)=x-|x|$;

d) $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x\le 0 \\ 5x+1, & x>0 \end{cases}$.

E5. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ este continuă în $x_0=0$, dar nu e derivabilă în acest punct.

E6. Să se calculeze derivatele laterale ale funcției $f:D\to\mathbb{R}$ în punctul specificat și să se precizeze dacă f este derivabilă sau nu în acest punct:

a) $f(x)=\begin{cases} 3x+4, & x\le 1 \\ -x^2+5x, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$;

b) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 2x-1, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$;

c) $f(x)=\begin{cases} 3x-1, & x\le -1 \\ x^3-3, & x>-1 \end{cases}$, $x_0=-1$;

d) $f(x)=|2x-1|+x$, $x_0=\frac{1}{2}$;

e) $f(x)=|x+3|-2$, $x_0=-3$.

E7. Să se calculeze panta tangentei la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în punctele indicate:

a) $f(x)=x^2+1$, $x_0\in\left\{-2, \frac{1}{2}, 3\right\}$;

b) $f(x)=-x^3+x$, $x_0\in\{-1, 0, 2\}$;

c) $f(x)=1-\sin x$, $x_0\in\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.

E8. Să se scrie ecuația tangentei la curba $\mathscr{G}_f$ pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ în punctele date:

a) $f(x)=x^2$, $x_0=3$;

b) $f(x)=x^2+x$, $x_0=-1$;

c) $f(x)=x^3-2x$, $x_0=-3$;

d) $f(x)=\cos x$, $x_0=\pi$;

e) $f(x)=\sqrt{x^2+9}$, $x_0=-4$;

f) $f(x)=(2-3x)^2$, $x_0=1$.

E9. Să se verifice dacă $x=0$ este punct unghiular pentru funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, știind că:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0 \\ e^x, & x>0 \end{cases}$;

b) $f(x)=\max(x, x^3)$;

c) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$;

d) $f(x)=\sqrt[5]{x}$.

E10. Să se verifice dacă pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ punctul x_0 este punct de întoarcere, știind că:

a) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\le 1 \\ \sqrt{x-1}, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$;

b) $f(x)=\sqrt{|x-3|}$, $x_0=3$.

E11. Să se arate că punctul x_0 este punct de inflexiune pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x)=x^3+1$, $x_0=1$;

b) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=0$;

c) $f(x)=\sqrt[5]{x^3}$, $x_0=0$;

d) $f(x)=\sqrt[3]{x+2}$; $x_0=-2$.

APROFUNDARE

A1. Folosind definiția derivatei, să se determine derivata f' a funcției $f:D\to\mathbb{R}$, precizând mulțimile D și $D_{f'}$, dacă:

a) $f(x)=3^x+x$; b) $f(x)=\frac{x+2}{x+3}$;

c) $f(x)=e^{x^2-1}$; d) $f(x)=\ln(x^2-4)$;

e) $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$;

f) $f(x)=\sqrt{x^2-9x}$.

A2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+b$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât să fie verificate condițiile:
$f(1)=-1$ și $f'\left(\frac{1}{2}\right)=3$.

A3. Să se scrie ecuația tangentei la curba reprezentativă a funcției $f:D\to\mathbb{R}$ în punctul specificat:

a) $f(x)=\sqrt{x^2+4x+4},\ x_0=2$;

b) $f(x)=x^2+\sin x,\ x_0=0$;

c) $f(x)=x^3+x+e^x,\ x_0=1$;

d) $f(x)=\begin{cases}\ln\left(x^2+4x\right), & x\in(0,1]\\ \frac{6}{5}(x-1)+\ln 5, & x\in(1,+\infty)\end{cases},\ x_0=1.$

A4. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcțiilor f în punctele de legătură, știind că:

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+6x}, & x\in(0,2)\\ \frac{5}{4}x, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}\ln\left(x^2-3x\right), & x\in(-\infty,-1]\\ \frac{2\ln 16-5(x+1)}{4}, & x\in(-1,+\infty)\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^3-2x}, & x\in(-\infty,2]\\ \frac{x+4}{2}, & x\in(2,+\infty)\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x\in(0,+\infty)\\ \ln(1-x), & x\in(-\infty,0]\end{cases}$;

e) $f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,1]\\ e^{\frac{-1}{(x-1)^2}}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$;

f) $f(x)=\left|x^2-4\right|+|x+1|$;

g) $f(x)=\sqrt{\left|x^2-x\right|}$; h) $f(x)=\sqrt[3]{\left|x^3+x\right|}$;

i) $f(x)=\min\left(x^2-2,\ 4x+10\right)$;

j) $f(x)=[3x+1],\ x_0=\frac{1}{3}$;

k) $f(x)=\begin{cases}\cos(x-2), & x\le 2\\ |x-2|+x-1, & x>2\end{cases}$;

l) $f(x)=\begin{cases}2^x-4, & x\le 2\\ \sin(x-2), & x>2\end{cases}$;

m) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4x^2-2x+1}, & x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\\ \frac{2}{\pi}\arcsin 2x, & x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\end{cases}$;

n) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3\sin\frac{1}{x-1}, & x\ne 1\\ 0, & x=1\end{cases}$.

A5. Să se determine punctele de derivabilitate pentru funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x)=\begin{cases}x^4, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2+2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}x^4, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$;

A6. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ să fie derivabilă în punctul de legătură, dacă:

a) $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x\le 1\\ x^2+1, & x>1\end{cases}$;

b)
$f(x)=\begin{cases}(a+1)e^{x-1}, & x\le 1\\ \sin(x-1)+b\cos(2x-2), & x>1\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}(2-a)x^2-b, & x\le 2\\ 2ax^3-x^2+4a, & x>2\end{cases}$.

A7. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x)=\begin{cases}2ax+b, & x\le 0\\ \frac{x-1}{x^2+3}, & x>0\end{cases}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ dacă $f'(0)\in\mathbb{R}$.

A8. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x)=\begin{cases}x^3+(a+1)x+3, & x\le 0\\ 2a+b+\ln\left(1+x^3\right), & x>0\end{cases}$.
Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât să existe $f'(0)\in\mathbb{R}$.

A9. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + (a+1)x + b, & x \geq 0 \\ \sqrt{1 - 2abx + (cx)^2}, & x < 0 \end{cases}$$

să admită tangentă în $x_0 = 0$ și $2f(-1) = f(2)$.

A10. Se dă funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \ln^2 x^2, & x \in (0, e] \\ \alpha x^2 + \beta x + 4, & x \in (e, +\infty) \end{cases}.$$

Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât f să aibă tangentă în $x_0 = e$ și să se scrie ecuația tangentei.

A11. Să se determine punctele graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ în care tangenta este paralelă cu dreapta $3x - y + 1 = 0$. Să se scrie ecuația tangentei.

A12. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 8x + 1$ admite tangenta de ecuație $y = 24x - 47$. Să se determine coordonatele punctului de tangență.

A13. Tangenta la graficul funcției

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x + 1}$$

formează cu axa Ox un unghi cu măsura $\frac{\pi}{4}$. Să se determine coordonatele punctului de tangență și ecuația tangentei în acest punct.

A14. Să se precizeze dacă există puncte pe graficul funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ în care tangenta are panta egală cu $m = \operatorname{tg} 30° \cdot \sin 60°$.

A15. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - ex$. Există puncte ale graficului în care tangenta să formeze cu axa Ox un unghi obtuz? Dar în care să fie paralelă cu axa Ox? Aceeași problemă pentru $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x - 2007$.

A16. Se dau funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 + ax^2 + b,\ g(x) = 3x^2 + cx + 1.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care curbele reprezentative sunt tangente în punctul cu abscisa $x = 1$, iar tangenta comună este paralelă cu prima bisectoare a axelor de coordonate.

A17. Să se verifice dacă punctele specificate sunt puncte unghiulare:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4|$, $x_0 \in \{0, -2\}$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$, $x_0 \in \{2, 3\}$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x+2|}{|x| + 2}$, $x_0 \in \{-2, 0\}$;

e) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} [x], & x \in [0, 1) \\ x^2 - 1, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$, $x_0 = 1$.

A18. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu au puncte unghiulare, în cazurile:

a) $f(x) = x|x - a|$;

b) $g(x) = x|x - a| + |x - b|$.

A19. Să se determine punctele de întoarcere pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 9|}$; b) $f(x) = \sqrt{|3 - x^2|}$.

A20. Să se determine punctele unghiulare ale funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n-1} - x^2 + 6}{x^2 + 4 + x^{4n}},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

❸ DERIVATELE UNOR FUNCȚII ELEMENTARE

Să considerăm funcția $f : D \to \mathbb{R}$, o funcție derivabilă pe mulțimea D.

Derivata sa este funcția $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, unde $D_{f'}$ este domeniul de derivabilitate al funcției f. Cu ajutorul acestei formule vom determina derivatele câtorva funcții elementare pe domeniul de derivabilitate corespunzător.

1. FUNCȚIA CONSTANTĂ

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi are derivata egală cu funcția nulă: $f'(x) = 0, \ \forall\ x \in \mathbb{R}.$

Se mai scrie $\boxed{c' = 0, \ \forall\ x \in \mathbb{R}.}$

Demonstrație

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0. \ \blacksquare$$

Astfel, dacă $f(x) = 4, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$, atunci $f'(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}$ sau $4' = 0$.

2. FUNCȚIA PUTERE CU EXPONENT NATURAL

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi derivata sa este dată de relația:

$f'(x) = nx^{n-1}, \ \forall\ x \in \mathbb{R}.$ Se scrie $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}, \forall\ x \in \mathbb{R}.}$

Demonstrație

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C_n^1 x^{n-1} h + C_n^2 x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} h + \ldots + h^{n-1} \right) = C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}, \ \forall\ x \in \mathbb{R}. \ \blacksquare$$

☞ ***Exemple***

a) Derivata funcției identice $f(x) = x, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$ este funcția definită prin $f'(x) = 1, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Scriem $x' = 1$.

b) Dacă $f(x) = x^2, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$, atunci $f'(x) = 2x, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Scriem $(x^2)' = 2x$.

c) Dacă $f(x) = x^7, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$, atunci $f'(x) = 7x^6, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Scriem $(x^7)' = 7x^6$.

3. FUNCȚIA PUTERE CU EXPONENT REAL

Funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^r,\ r\in\mathbb{R}$ este derivabilă pe intervalul $(0,+\infty)$ și $f'(x)=rx^{r-1},\ x\in(0,+\infty)$.

Se scrie: $\boxed{(x^r)'=rx^{r-1},\forall\ x>0.}$

Demonstrație

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^r-x^r}{h}=\lim_{h\to0}\frac{x^r\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^r-1\right]}{h}.$$

Notând $\frac{h}{x}=y$, rezultă $f'(x)=x^r\cdot\lim\limits_{y\to0}\frac{(1+y)^r-1}{xy}=x^{r-1},\ \forall\ x>0.$ ■

☞ ***Exemple***

a) $f(x)=x^{\frac{3}{4}},\ x>0,\ f'(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x}},\ x>0.$

b) $f(x)=\sqrt{x},\ x>0,\ f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0.$

Să reținem că $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ \forall\ x>0.$

➲ OBSERVAȚIE

• Funcția radical $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$ nu este derivabilă în $x_0=0$ deoarece $f'(0)=+\infty$.

c) $f(x)=\frac{1}{x},\ x\neq0,\ f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2},\ \forall\ x\neq0.$

d) Dacă $r=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, atunci $x^r=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$. Se obține:

$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, pentru $x>0$ dacă n este par, sau $x\in\mathbb{R}^*$ dacă n este impar.

❑ REȚINEM!

$\boxed{(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\ \text{pentru } x>0 \text{ și n par sau } x\neq0 \text{ și n impar.}}$

4. FUNCȚIA LOGARITMICĂ

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$ este derivabilă pe intervalul (0, +∞) şi $f'(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in(0,+\infty).$

Se scrie: $\boxed{(\ln)'(x)=\dfrac{1}{x},\ \forall\ x>0.}$

Într-adevăr, pentru oricare x > 0 avem:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}\cdot x}=$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\frac{1}{x}.$$

➲ **OBSERVAȚIE**

• Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1.$ Folosind formula de schimbare a bazei logaritmului, $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$, se obține:

$$(\log_a)'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln a},\ \forall\ x>0.$$

5. FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ

Funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty),\ f(x)=a^x,\ a>0,\ a\neq 1,$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x)=a^x\cdot\ln a,\ x\in\mathbb{R}.$

Se scrie $\boxed{(a^x)'=a^x\cdot\ln a,\ \forall\ x\in\mathbb{R}.}$

Într-adevăr, pentru oricare $x\in\mathbb{R}$ avem:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\cdot\ln a.$$

În particular, $\boxed{(e^x)'=e^x,\ \forall\ x\in\mathbb{R}.}$

6. FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE SINUS ŞI COSINUS

Funcțiile f, g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x) = sin x, g(x) = cos x sunt derivabile pe $\mathbb{R}$ şi pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem:

a) $\boxed{(\sin)'(x)=\cos x,\ \forall\ x\in\mathbb{R};}$ **b)** $\boxed{(\cos)'(x)=-\sin x,\ \forall\ x\in\mathbb{R}.}$

Demonstrație

a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \cos\left(\lim_{h \to 0}\left(x + \frac{h}{2}\right)\right) = \cos x.$$

b) Temă ■

➲ OBSERVAȚIE

- Trebuie făcută distincție clară între numerele $f'(x_0)$ şi $(f(x_0))'$. Astfel, $f'(x_0)$ reprezintă valoarea derivatei f' în punctul x_0 (atunci când există), iar $(f(x_0))'$ reprezintă derivata constantei $f(x_0)$ şi este zero.

☞ **_Exemple_**

- $(\ln 2)' = 0$; $\quad (\ln)'(2) = \dfrac{1}{2}$; $\quad \left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)' = 0$; $\quad (\sin)'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

◢ **Temă**

Aplicând formulele pentru derivatele câtorva funcții elementare, să se calculeze derivatele funcțiilor:

A. **1.** $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$; **2.** $f(x) = 2001$, $x \in \mathbb{R}$; **3.** $f(x) = x^{\frac{5}{6}}$, $x > 0$; **4.** $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x > 0$; **5.** $f(x) = \sqrt[9]{x}$, $x \neq 0$; **6.** $f(x) = \log_2 x$, $x > 0$; **7.** $f(x) = 3^x$, $x \in \mathbb{R}$; **8.** $f(x) = \sqrt{2}$, $x \in \mathbb{R}$; **9.** $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$; **10.** $f(x) = \cos\dfrac{5\pi}{8}$, $x \in \mathbb{R}$; **11.** $f(x) = e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

B. **Calculați şi comparați:**

1. $(\sin)'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ **şi** $\left(-\sin\dfrac{\pi}{6}\right)'$; **2.** $(\cos)'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ **şi** $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}\right)'$; **3.** $(\ln e)'$ **şi** $(\ln)'(e)$.

C. **1. Pentru funcția** $f(x) = 5^x$, **să se calculeze** $f'(0)$, $(f(0))'$, $f'(-1)$, $f'(\log_5 3)$; $f'(-\log_5(\ln 5))$.

2. Pentru funcția $f(x) = \sqrt[3]{x}$, **să se calculeze** $f'(1)$, $(f(1))'$; $f'(8)$, $(f(8))'$; $f'(-1)$, $(f(-1))'$.

❹ OPERAȚII CU FUNCȚII DERIVABILE

Tehnica de determinare a derivatei unei funcții pornind de la definiție se dovedeşte a fi destul de anevoioasă pentru funcții obținute pe baza operațiilor cu funcții (adunare, înmulțire, compunere, inversare, ...). De aceea se vor găsi nişte reguli practice care permit determinarea derivatei unei funcții oarecare într-un mod cât mai simplu.

4.1. DERIVATA SUMEI ȘI A PRODUSULUI

▣ TEOREMA 3

Fie funcțiile $f, g : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ punct de acumulare al lui D.

Dacă funcțiile f şi g sunt derivabile în punctul $x_0 \in D$, atunci funcțiile $f + g$ şi fg sunt derivabile în punctul x_0, şi au loc următoarele reguli de derivare:

a) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$; **b)** $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

<u>Demonstrație</u>

a) Pentru $x \neq x_0$ avem $\dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$.

Prin trecere la limită când $x \to x_0$ în această egalitate şi folosind faptul că f şi g sunt derivabile în x_0 se obține:

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

$= f'(x_0) + g'(x_0)$, ceea ce trebuia demonstrat.

b) Pentru $x \neq x_0$ se obține: $\dfrac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$

$$= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Trecând la limită când $x \to x_0$ în egalitățile de mai sus şi folosind faptul că f şi g sunt derivabile în x_0 şi că $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$, se obține:

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

➲ <u>OBSERVAȚII</u>

1. Dacă funcțiile f şi g sunt derivabile pe D, atunci şi funcțiile f + g şi fg sunt derivabile pe D şi au loc următoarele reguli de derivare:

$\boxed{(f+g)' = f' + g'}$ şi $\boxed{(fg)' = f'g + fg'.}$

2. Cele două reguli de derivare pentru sumă şi produs se pot extinde la cazul a n funcții, f_1, f_2, ..., f_n derivabile pe mulțimea D. Avem:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'$$

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)' = f_1' f_2 f_3 \dots f_n + f_1 f_2' f_3 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 f_3 \dots f_n' = \sum_{k=1}^{n} f_1 f_2 f_3 \dots f_{k-1} f_k' f_{k+1} \dots f_{n-1} \cdot f_n$$

Pentru $f_1 = f_2 = f_3 = \dots = f_n = f$ se obține $\boxed{(f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'.}$

3. Alegând $g = c$, $c \in \mathbb{R}$, regula de derivare a produsului conduce la formula $(cf)' = c'f + cf' = 0 \cdot f + cf' = cf'$, (**constanta trece în fața derivatei**).
Pentru $g = -1$ se obține $(-f)' = -f'$, iar $(f - g)' = (f + (-g))' = f' - g'$.

❑ **REȚINEM!**

$\boxed{(c \cdot f)' = c \cdot f'}$ şi $\boxed{(f - g)' = f' - g'.}$

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se determine derivatele funcțiilor f şi valoarea $f'(x_0)$ a derivatei în punctele specificate:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + \cos x$, $x_0 = 0$;

b) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$;

c) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + 2^x - \sin\dfrac{\pi}{2}$, $x_0 = 1$.

<u>*Soluție*</u>

a) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca sumă de funcții derivabile pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = (x^3)' + x' + (\cos)'(x) = 3x^2 + 1 - \sin x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 3 \cdot 0 + 1 - \sin 0 = 1$.

b) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ ca sumă de funcții derivabile pe $\mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' + \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + (x^{-2})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 2x^{-3},\ \forall\, x \neq 0;$$

$$f'(1) = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}.$$

c) Funcția f este derivabilă pe $(0, +\infty)$ fiind exprimată ca sumă de funcții derivabile pe $(0, +\infty)$ şi $f'(x) = (\ln)'(x) + (2^x)' - \left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)' = \dfrac{1}{x} + 2^x \ln 2 - 0$, $\forall\, x > 0$, $f'(1) = 1 + 2\ln 2$.

☒ **2.** Folosind regulile de derivare a sumei şi a produsului, să se determine legea de corespondență a funcției f', dacă:

a) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x + x\sqrt{x}$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin x - 2 \cos x$.

<u>*Soluție*</u>

a) $f'(x) = (x^2 \ln x)' + (x\sqrt{x})' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln)'(x) + x'\sqrt{x} + x(\sqrt{x})' =$
$= 2x\ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} + 1 \cdot \sqrt{x} + x\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\ln x + x + \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$, $\forall\, x > 0$.

b) $f'(x) = (x \sin x)' - (2 \cos x)' = x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin)'(x) - 2(\cos)'(x) = \sin x +$ $+ x\cos x + 2\sin x = 3\sin x + x\cos x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

4.2. DERIVATA CÂTULUI

▣ TEOREMA 4

Fie funcțiile f, g : $D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$, punct de acumulare al lui D.

Dacă funcțiile f şi g sunt derivabile în x_0 şi $g(x_0) \neq 0$, atunci funcția cât $\frac{f}{g}$ este derivabilă în punctul x_0 şi are loc egalitatea:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Demonstrație

Din condiția $g(x_0) \neq 0$ şi g continuă în x_0, rezultă că g este nenulă pe o vecinătate a punctului x_0 şi deci are sens derivabilitatea câtului în x_0. Avem:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x)}{(x - x_0)\cdot g(x)\cdot g(x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x)}{(x - x_0)\cdot g(x)\cdot g(x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]\cdot g(x_0) - [g(x) - g(x_0)]f(x_0)}{(x - x_0)\cdot g(x)\cdot g(x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\cdot f(x_0)\right]\cdot \frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)} =$$

$$= \left[f'(x_0)\cdot g(x_0) - g'(x_0)\cdot f(x_0)\right]\cdot \frac{1}{g^2(x_0)},$$ ceea ce trebuia demonstrat. ■

Demonstrația teoremei arată totodată că dacă funcțiile f şi g sunt derivabile pe mulțimea D şi funcția g nu se anulează pe D, atunci funcția cât $\frac{f}{g}$ este derivabilă pe D şi are loc regula de derivare a câtului:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.}$$

Aplicații

☒ **1.** Fie funcția $f : \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, f(x) = tg x.

Atunci $(\mathrm{tg})'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\forall\, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Într-adevăr, $(\mathrm{tg})'(x) = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin)'(x)\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos)'(x)}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \ \forall\, x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

☒ **2.** Fie funcția $f : \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$.

Atunci $(\mathrm{ctg})'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \ \forall\, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Avem $(\mathrm{ctg})'(x) = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{(\cos)'(x)\cdot\sin x - \cos x\cdot(\sin)'(x)}{\sin^2 x} =$

$= \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{-1}{\sin^2 x}, \ \forall\, x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se determine derivatele funcțiilor f și să se calculeze $f'(x_0)$, unde x_0 este specificat pentru fiecare funcție:**

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3} + x^2 + x^3 - x^4$, $x_0 = -2$;

b) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \ f(x) = \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^0} + \ln 5$, $x_0 = -1$;

c) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \ f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{5}$, $x_0 = 1$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -\sin x + \cos x - \sin\dfrac{\pi}{2} + \cos\pi$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

e) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \ f(x) = \ln x + \log_3 x - \lg x$, $x_0 = 2$;

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5^x - e^{-x}$, $x_0 = 0$.

E2. **Să se determine derivatele funcțiilor f și $f'(x_0)$ în punctul x_0 specificat:**

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$, $x_0 = -1$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (2x+3)^2 + 4x^3(x-1)$, $x_0 = 0$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (3\sin x - 1)(2 - 5\cos x)$, $x_0 = \dfrac{2\pi}{3}$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (\sqrt[3]{x} + 1)(4 + x^2 - x)$, $x_0 = -8$;

e) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (3\ln x + x)(4 - x)$, $x_0 = 1$;

f) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \ f(x) = x\ln x$, $x_0 = e$;

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x(x^2 + 5x - 1)$, $x_0 = -1$.

E3. **Să se calculeze derivatele funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$, precizând domeniul de definiție și domeniul de derivabilitate:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$; b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$;

e) $f(x) = \dfrac{3x-5}{4x+7}$; f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+4}$;

g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^3}$; h) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{x+5}$;

i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 4x + 2}$; j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;

k) $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{x+2}$;

l) $f(x)=\frac{\ln x-x}{\ln x+x}$;

m) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x-2}$;

n) $f(x)=\frac{2\sin x-3\cos x}{3+\sin x}$;

o) $f(x)=\frac{x\sin x}{1-\cos x}$;

p) $f(x)=\frac{\operatorname{tg}x+1}{\operatorname{tg}x-1}$;

r) $f(x)=\frac{2}{\sin 2x+1}$;

s) $f(x)=\frac{x^4}{e^x}+1$;

t) $f(x)=\log_3 x+\log_x 3$;

u) $f(x)=\left(e^2\right)^x+5^x$.

APROFUNDARE

A1. Să se rezolve ecuația $f'(x)=0$, precizând domeniul maxim de definiție și domeniul de derivabilitate al funcției f:

a) $f(x)=x^4-4x^3$;

b) $f(x)=2x^3-15x^2+24x+5$;

c) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2$;

d) $f(x)=x^3\cdot e^x$;

e) $f(x)=\sin^3x+\cos^3x$;

f) $f(x)=x^2\cdot\ln x$;

g) $f(x)=e^x(x^2+6x-15)$;

h) $f(x)=\frac{x+1}{(x+1)^2+1}$;

i) $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$;

j) $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x^2-5x+7}$;

k) $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{x+1}$;

l) $f(x)=\frac{(3x-1)e^x}{4x^2+12x+1}$; m) $f(x)=\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg}x}$;

n) $f(x)=\frac{2+\sin x}{\cos x}$; o) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x+1}$.

A2. Fie funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $f(x)=(x^2+2x+2)\cdot g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, iar g este derivabilă în $x=1$, $g(1)=1$ și $g'(1)=0$. Să se calculeze $f'(1)$.

A3. Fie funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât:

$f(x)=2e^x\cdot g(x)+\frac{x-2}{x^2+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}$,

g este derivabilă în $x=0$ și $g(0)=3$, $g'(0)=-1$. Să se calculeze $f'(0)$.

A4. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: D\to\mathbb{R}$ în punctul specificat, dacă:

a) $f(x)=x^4$, $x_0=-1$;

b) $f(x)=x\ln x$, $x_0=e$;

c) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$, $x_0=-1$;

d) $f(x)=\frac{x^3+1}{\sqrt{x}}$, $x_0=1$;

e) $f(x)=\operatorname{tg}x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$;

f) $f(x)=(x+1)e^x$, $x_0=0$, $x_0=1$.

4.3. DERIVAREA FUNCȚIEI COMPUSE

În paragraful anterior s-a observat că aplicând operațiile algebrice funcțiilor derivabile se obțin tot funcții derivabile. În continuare vom întâlni un alt mod de a genera funcții derivabile. Pentru simplitatea exprimării, funcțiile vor fi considerate ca fiind definite pe intervale de numere reale.

▣ TEOREMA 5

Fie I şi J intervale de numere reale şi funcțiile $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

Dacă u este derivabilă în punctul $x_0 \in I$, iar f este derivabilă în punctul $u(x_0) = y_0 \in J$, atunci funcția compusă $(f \circ u): I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul x_0 şi are loc relația: $(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0)$.

Demonstrație

Fie $F: J \to \mathbb{R}$, $F(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}, & y \neq y_0 \\ f'(y_0), & y = y_0 \end{cases}$.

Deoarece $\lim\limits_{y \to y_0} F(y) = \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0) = F(y_0)$, funcția F este continuă în y_0.

Din egalitatea $F(u(x)) \cdot \dfrac{u(x) - y_0}{x - x_0} = \dfrac{f(u(x)) - f(y_0)}{x - x_0}$, (1)

prin trecere la limită, se obține:

$$(f \circ u)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{x - x_0} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to x_0} F(u(x)) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= F(u(x_0)) \cdot u'(x_0) = F(y_0) u'(x_0) = f'(y_0) \cdot u'(x_0) = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0). \ ■$$

➲ OBSERVAȚII

1. Utilizând această teoremă şi definiția derivatei unei funcții pe o mulțime, se obține următorul rezultat general:

Fie I, J intervale de numere reale şi $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

Dacă funcția u este derivabilă pe intervalul I şi funcția f este derivabilă pe intervalul J, atunci funcția $(f \circ u)$ este derivabilă pe I şi are loc următoarea regulă de derivare:

$\boxed{(f \circ u)' = (f' \circ u) \cdot u'.}$

2. Teorema se poate extinde la un număr n, $n > 2$ de funcții derivabile care se pot compune. Astfel, dacă f, u, v sunt trei funcții care determină funcția $f \circ u \circ v$ pe un interval I, iar dacă v este derivabilă în punctul $x_0 \in I$, f este derivabilă în punctul $u(v(x_0))$, atunci funcția compusă $f \circ u \circ v$ este derivabilă în punctul x_0 şi are loc egalitatea:

$(f \circ u \circ v)'(x_0) = f'(u(v(x_0))) \cdot u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0)$, sau mai general:

$(f \circ u \circ v)' = (f' \circ u \circ v) \cdot (u' \circ v) \cdot v'$.

3. Teorema de derivare a funcțiilor compuse împreună cu derivatele funcțiilor elementare deduse până acum conduc la următorul tabel de formule:

Funcția elementară	**Derivata**	**Funcția compusă**	**Derivata**
c (constantă)	$0,\ x\in\mathbb{R}$		
x	$1,\ x\in\mathbb{R}$	u	u'
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	$nx^{n-1},\ x\in\mathbb{R}$	$u^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	$nu^{n-1}\cdot u'$
$x^r,\ r\in\mathbb{R}$	$rx^{r-1},\ x\in(0,+\infty)$	$u^r,\ r\in\mathbb{R}$	$ru^{r-1}\cdot u'$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x\in(0,+\infty)$	$\sqrt{u}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},\ \begin{cases}x\in(0,+\infty), & n\text{ par}\\ x\in\mathbb{R}^*, & n\text{ impar}\end{cases}$	$\sqrt[n]{u}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}\cdot u'$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$	$\ln u$	$\dfrac{1}{u}\cdot u'$
$\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$	$\dfrac{1}{x\ln a},\ x\in(0,+\infty)$	$\log_a u$	$\dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'$
e^x	$e^x,\ x\in\mathbb{R}$	e^u	$e^u\cdot u'$
a^x, $a>0$, $a\neq 1$	$a^x\cdot\ln a,\ x\in\mathbb{R}$	a^u	$a^u\cdot\ln a\cdot u'$
$\sin x$	$\cos x,\ x\in\mathbb{R}$	$\sin u$	$\cos u\cdot u'$
$\cos x$	$-\sin x,\ x\in\mathbb{R}$	$\cos u$	$-\sin u\cdot u'$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x},\ \cos x\neq 0$	$\operatorname{tg} u$	$\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x},\ \sin x\neq 0$	$\operatorname{ctg} u$	$-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$

4. Dacă $u, v : I\to\mathbb{R}$ sunt funcții derivabile pe I şi $u(x)>0$, $x\in I$, atunci funcția u^v este derivabilă pe I şi derivata ei este:

$$\left(u^v\right)'=v\cdot u^{v-1}\cdot u'+u^v\ln u\cdot v'$$

Într-adevăr, avem succesiv:

$$\left(u^v\right)'=\left(e^{v\cdot\ln u}\right)'\overset{\text{(Obs.3)}}{=}e^{v\cdot\ln u}.\left(v\cdot\ln u\right)'=e^{v\cdot\ln u}\cdot\left(v'\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}\right)=u^v\left(v'\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}\right)=$$

$$=u^v\cdot\ln u\cdot v'+v\cdot u^{v-1}\cdot u'.$$

$$\boxed{f^g=e^{g\cdot\ln f}}$$

Exercițiu rezolvat

☒ Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, să se determine derivatele funcțiilor:

a) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=(3x^2-2x)^5$; **b)** $h:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $h(x)=\ln^2(x^2+5)$;

c) $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=x^x$.

<u>Soluție</u>

a) Să considerăm funcțiile u, f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, u(x) = $(3x^2 - 2x)$, f(u) = u^5, funcții derivabile pe $\mathbb{R}$, pentru care $u'(x) = 6x - 2$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ şi $f'(u) = 5u^4$, $u \in \mathbb{R}$. Rezultă că funcția $f \circ u$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Observăm că $(f \circ u)(x) = f(u(x)) = (3x^2 - 2x)^5 = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Aşadar, h este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $h'(x) = (f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x) = 5u^4(x) \cdot u'(x) =$
$= 5(3x^2 - 2x)^4 \cdot (6x - 2)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Considerăm funcțiile $\mathbb{R} \xrightarrow{v} (0, +\infty) \xrightarrow{u} \mathbb{R} \xrightarrow{f} (0, +\infty)$, $v(x) = x^2 + 5$, $u(v) = \ln v$, $f(u) = u^2$ derivabile.

Avem $(f \circ u \circ v)(x) = f(u(v(x))) = \ln^2(x^2 + 5) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezultă că h este funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$h'(x) = f'(u(v(x)) \cdot u'(v(x)) \cdot v'(x) = 2u(v(x)) \cdot \dfrac{1}{v(x)} \cdot v'(x) = 2\ln(x^2 + 5) \cdot \dfrac{1}{x^2 + 5} \cdot 2x =$
$= \dfrac{4x}{x^2 + 5} \cdot \ln(x^2 + 5)$.

c) Aplicăm regula de derivare din Observația 4:

$(x^x)' = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x\ln x} \cdot (x \ln x)' = e^{x\ln x} \cdot (x' \ln x + x \cdot \ln' x) = e^{x\ln x} \cdot \left(\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}\right) =$
$= x^x(\ln x + 1)$.

4.4. DERIVAREA FUNCȚIEI INVERSE

În acest paragraf vom stabili o nouă modalitate de a obține funcții derivabile şi totodată un nou procedeu de determinare a derivatei pentru anumite funcții.

> ▣ **TEOREMA 6**
> Fie I şi J intervale oarecare şi f : I → J o funcție continuă şi bijectivă. Dacă funcția f este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția inversă $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ şi
> $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

<u>Demonstrație</u>

Bijectivitatea funcției f asigură existența funcției inverse f^{-1}. Vom determina limita raportului $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ când $y \to y_0$, $y \neq y_0$.

Fie x = $f^{-1}(y)$. Deoarece $y \neq y_0$, rezultă că $x \neq x_0$ şi

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \frac{f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}. \quad (1)$$

Funcţia f^{-1} este continuă în punctul $y_0 = f(x_0)$.

Rezultă că $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$. Se deduce astfel că pentru $y \to y_0$, $f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0)$, adică $x \to x_0$. Trecând la limită după $y \to y_0$, în relaţia (1), se obţine : $\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

În concluzie, funcţia f^{-1} este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ şi $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

➲ **OBSERVAŢII**

1. Dacă în enunţ se ia $f'(x_0) = 0$, atunci $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$ în cazul în care funcţia f este strict crescătoare pe I şi $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = -\infty$ în cazul când funcţia f este strict descrescătoare pe I. În concluzie, dacă $f'(x_0) = 0$, atunci funcţia f^{-1} nu este derivabilă în punctul y_0, dar are derivată infinită în y_0.
   Din punct de vedere geometric, în punctul (y_0, x_0) graficul funcţiei inverse are tangentă verticală.
2. Folosind derivabilitatea unei funcţii pe o mulţime, teorema anterioară se poate extinde astfel:
   Fie I şi J intervale oarecare şi $f : I \to J$ o funcţie continuă şi bijectivă.
   Dacă funcţia f este derivabilă pe intervalul I şi $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in I$, atunci $f^{-1}: J \to I$ este funcţie derivabilă pe intervalul J şi $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'(f^{-1})}$.

Exerciţiu rezolvat

☒ Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to (1, \infty)$, $f(x) = 9^x + 3^x + 1$.

Să se arate că funcţia f este inversabilă pe $\mathbb{R}$ şi să se determine $(f^{-1})'(3)$.

Soluţie

Funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, fiind exprimată ca sumă de funcţii strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci este injectivă.

De asemenea, este funcţie continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, deci Im f = $(1, +\infty)$, ceea ce înseamnă că f este surjectivă. În concluzie, funcția f este bijectivă, deci inversabilă. Ca urmare există $f^{-1}: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, derivabilă pe $(1, +\infty)$ şi $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(x_0)}$, unde $f(x_0) = 3$ şi $x_0 = 0$. Se obține că $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3\ln 3}$.

DERIVATELE FUNCŢIILOR TRIGONOMETRICE INVERSE

1. Funcția arcsinus

Funcția $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ este bijectivă, continuă şi derivabilă şi $f'(x) = \cos x$, $\cos x \neq 0$, $\forall\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Funcția inversă este $f^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(y) = \arcsin y$ căreia i se poate aplica teorema de derivare a funcției inverse pe intervalul deschis $(-1, 1)$.

Pentru $y \in (-1, 1)$ se obține:

$$(\arcsin)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Aşadar, funcția arcsin este derivabilă pe intervalul deschis $(-1, 1)$ şi

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall\ x \in (-1, 1).$$

Pentru $y = -1$, avem $x = -\frac{\pi}{2}$, iar $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Conform observației (1), $(\arcsin)'(-1) = +\infty$ şi $(\arcsin)'(1) = +\infty$.

2. Funcția arccosinus

Raționând în mod similar sau aplicând relația $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, $\forall\ x \in [-1, 1]$, rezultă că funcția arccos este derivabilă pe intervalul $(-1, 1)$ şi

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall\ x \in (-1, 1).$$

Pentru $x = -1$ sau $x = 1$, $(\arccos)'(\pm 1) = -\infty$.

3. Funcția arctangentă

Funcția $f:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\to \mathbb{R}$, f(x) = tg x satisface condițiile de derivare a funcției inverse pentru $I=\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și J = $\mathbb{R}$.

Rezultă că funcția inversă $f^{-1}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$ este derivabilă în orice punct $y \in \mathbb{R}$, y = tg x și $(\operatorname{arctg})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$.

Așadar se obține formula $(\operatorname{arctg})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

4. Funcția arccotangentă

Procedând ca pentru funcția arctg, sau folosind relația $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, $\forall\; x \in \mathbb{R}$, obținem că funcția arcctg este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și

$$\operatorname{arcctg}'(x) = -\frac{1}{1+x^2},\ \forall\; x \in \mathbb{R}.$$

➲ **OBSERVAȚIE**

- Dacă u este o funcție derivabilă și $u(x) \in (-1, 1)$, atunci:

$$\boxed{(\arcsin)'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'} \text{ și } \boxed{(\arccos)'(u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.}$$

Dacă u este o funcție derivabilă, atunci:

$$\boxed{(\operatorname{arctg})'(u) = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'} \text{ și } \boxed{(\operatorname{arcctg})'(u) = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'.}$$

În concluzie, teoremele 3-6 din acest paragraf dau modalități de derivare pentru diferite funcții care sunt rezultat al:

– unor operații algebrice cu funcții derivabile (adunare, produs, cât);
– unei operații de compunere de funcții derivabile;
– unei operații de inversare a unei funcții derivabile.

Reguli de derivare

$(f \pm g)' = f' \pm g'$	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	$(c \cdot f)' = c \cdot f'$, $c \in \mathbb{R}$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$(f \circ u)' = f'(u) \cdot u'$	$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, să se calculeze derivatele funcțiilor indicând domeniul maxim de definiție şi domeniul de derivabilitate:

a) $f(x) = (x^2 + x)^4$; b) $f(x) = \sin(4x + 2)$;

c) $f(x) = \sin^3 2x$; d) $f(x) = \cos^2 x + \cos 2x$;

e) $f(x) = tg^2 2x$; f) $f(x) = x \, ctg \, 2x$;

g) $f(x) = \sqrt{4x+1}$; h) $f(x) = \sqrt{9x^2+8x-1}$;

i) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-1}$; j) $f(x) = \left(\frac{x+2}{x}\right)^2$;

k) $f(x) = \ln(6x^2 + x)$; l) $f(x) = \ln\frac{x-2}{x+3}$;

m) $f(x) = \ln(x + \sqrt{9+x^2})$;

n) $f(x) = e^{x^2+2x} + e^{-x}$;

o) $f(x) = 2^{2x} + 3^{\sqrt{x}}$;

p) $f(x) = \left(\frac{e^x+1}{e^{-x}+1}\right)^2$;

r) $f(x) = \sin^2(3x^2 - 4x+1)$;

s) $f(x) = \frac{1}{(x^2+2)^4}$;

t) $f(x) = \arcsin(x^2 + x)$;

u) $f(x) = arctg\frac{2+x^2}{4-x^2}$;

v) $f(x) = \arccos(x^2 - 2x)$;

w) $f(x) = arcctg \, e^{-2x}$;

x) $f(x) = x^{x+1}$;

y) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$; z) $f(x) = (\sin x)^x$.

E2. Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$ pentru funcția $f : D \to \mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f:

a) $f(x) = (2x^2 - x^4)^5$;

b) $f(x) = (x - 1)^2 \cdot (x - 2)^3$;

c) $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$; d) $f(x) = x\sqrt[3]{x+1}$;

e) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$; f) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$;

g) $f(x) = \cos 2x + x$; h) $f(x) = 4ex + e^{-4x}$;

i) $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{2x-6}}$; j) $f(x) = 2^{x^3-3x^2}$;

k) $f(x) = \frac{x+1}{e^{3x}}$; l) $f(x) = arctg \, (x^2 - 4x)$;

m) $f(x) = \frac{1}{3}tg^3x - \frac{1}{2}tg^2x$;

n) $f(x) = \sin^2 3x$;

o) $f(x) = 4arctg\frac{e^x-e^{-x}}{2}$;

p) $f(x) = arctg\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, $x \in (0, \pi)$.

APROFUNDARE

A1. Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, să se calculeze derivata funcției $f : D \to \mathbb{R}$, precizând D şi $D_{f'}$:

I. a) $f(x) = (x^2 + 1)^3 \cdot (x^3 - 3x + 2)^5$;

b) $f(x) = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$; c) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$;

d) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$;

e) $f(x) = x(a^2 - x) \cdot \sqrt{a^2+x^2}$;

f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-x}}{x+2}$;

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x-2}$.

II. a) $f(x) = \cos^2(3x + 1) \cdot \sin(3x +1)$;

b) $f(x) = \sin^3((x^2 + 1)^3)$;

c) $f(x) = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$;

d) $f(x) = tg(\cos(\ln x))$;

e) $f(x) = \frac{1}{2}\ln tg\frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

III. a) $f(x) = \ln\frac{4-x^2}{2-x^2}$;

b) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\sin x}}$;

c) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-tg2x}{1+tg2x}}$;

d) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{4x^2+3x}{4x^2-3x}}$;

e) $f(x) = \log_{x+2} x$; f) $f(x) = \lg\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

IV. a) $f(x) = e^{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+3}}}$; b) $f(x) = e^x \cdot \sqrt{\dfrac{4x^2+1}{4x^2-1}}$;

c) $f(x) = e^{\sqrt{x}}(x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} - 2x - 3)$;

d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot x^2 \cdot \sin x^2$;

e) $f(x) = e^{\frac{\ln(x^2-1)}{x}}$.

V. a) $f(x) = x^{\cos x}$; b) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$;

c) $f(x) = x^{\ln(x+1)}$; d) $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$;

e) $f(x) = \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$; f) $f(x) = x^{\arcsin x}$.

VI. a) $f(x) = \arcsin\sqrt{9-x^2}$;

b) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$;

c) $f(x) = \arccos\dfrac{x^{2n-1}}{1+x^{2n}}$;

d) $f(x) = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$;

e) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x^2$;

f) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$;

g) $f(x) = 2\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + \ln\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$;

h) $f(x) = \operatorname{arcctg}\dfrac{4\sin x}{3+5\cos x}$.

A2. Să se calculeze $f'(x_0)$, pentru:

a) $f(x) = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

c) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$;

d) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{2+\operatorname{tg}x}{2-\operatorname{tg}x}} + \arccos(\sin 3x)$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

e) $f(x) = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$, $x_0 = 1$;

f) $f(x) = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x}} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$;

g) $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{3x^3} + \ln\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$.

A3. Fie funcția $f : \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right) \to \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$, $f(x) = x^2 - x$. Să se arate că f este inversabilă şi să se calculeze $(f^{-1})'(2)$ şi $(f^{-1})'(20)$.

A4. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 2$. Există $\left(f^{-1}\right)'(6)$? În caz afirmativ să se calculeze.

A5. Fie funcția $f : (0, \infty) \to (1, \infty)$, $f(x) = 2^x + x^2 + x$. Să se verifice dacă f este bijectivă şi să se calculeze $(f^{-1})'(4)$.

A6. Se consideră funcția $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x-1) + x$.
a) Să se arate că f este inversabilă.
b) Să se calculeze $(f^{-1})'(2)$, $(f^{-1})'(e+2)$.

A7. Fie funcția:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x - x^2, & x \in (-\infty, 0] \\ 3x + x^2, & x \in (0, \infty) \end{cases}.$$

a) Să se arate că f este inversabilă.
b) Să se arate că $(f^{-1})'(-4) = (f^{-1})'(4)$.

5 DERIVATE DE ORDINUL II

Să considerăm funcția polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-2x^2+1.$

Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi derivata ei este funcția $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2-4x.$

Ne punem problema dacă noua funcție f' este funcție derivabilă şi în caz afirmativ care este derivata ei?

Răspunsul este următorul:

• funcția f' este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca sumă de funcții derivabile, deci are derivată. Derivata funcției f' se numeşte derivata de ordinul II a funcției f şi o vom nota f''.

Astfel avem: $f'':\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(f')'(x)=6x-4.$

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție oarecare, derivabilă pe mulțimea $D\subset\mathbb{R}$.

Derivata funcției f este funcția $f':D_{f'}\to\mathbb{R},\ D_{f'}\subset D$ numită **derivata de ordinul I** sau **derivata întâi** a funcției f.

Derivata de ordinul I se determină folosind regulile de derivare şi derivatele funcțiilor elementare.

În continuare se va pune problema derivabilității funcției f' într-un punct sau pe o mulțime, precum şi problema existenței derivatei acesteia.

❖ DEFINIȚII

• Funcția $f:D\to\mathbb{R}$ este **de două ori derivabilă** în punctul $x_0\in D'\cap D$ dacă există o vecinătate $V\in\mathscr{V}(x_0)$ astfel încât:

a) f este derivabilă în orice punct al vecinătății V;

b) funcția derivată $f':V\to\mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $x_0\in V$.

• Derivata funcției f' în punctul x_0 se numeşte **derivata de ordinul II** (sau **derivata a doua**) a funcției f în punctul x_0 şi se notează $f''(x_0)$.

Aşadar, $$f''(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in V\in\mathscr{V}(x_0)}}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

Funcția f este de două ori derivabilă pe mulțimea $D_1\subset D$ dacă funcția f este derivabilă de două ori în orice punct al mulțimii D_1.

Funcția $(f')':D_1\to\mathbb{R}$ se numeşte derivata de ordinul II a funcției f (sau derivata a doua) şi se notează f'' sau $f^{(2)}$.

➲ OBSERVAȚIE

• Dacă funcția f este derivabilă numai în punctul x_0 (sau pe o mulțime care nu are pe x_0 punct de acumulare) nu se poate defini derivata a doua în x_0.

Aşadar, orice funcție derivabilă de două ori în punctul x_0 are derivata întâi f' definită pe o întreagă vecinătate a lui x_0.

☞ ***Exemplu***

• Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ x^3-x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ este derivabilă numai în punctul $x_0=0$.

Rezultă că pentru această funcție nu se poate pune problema derivabilității de ordinul II în $x_0=0$.

Problemă rezolvată

☒ Să se arate că funcția f este de două ori derivabilă şi să se determine funcția f'' în cazurile:

a) $f(x)=2x^2-x+1,\ x\in\mathbb{R}$;

b) $f(x)=\sin x,\ x\in\mathbb{R}$;

c) $f(x)=\ln(x^2+1), x\in\mathbb{R}$.

Soluție

a) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca sumă de funcții derivabile şi $f'(x)=(2x^2-x+1)'=4x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Funcția f' este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca sumă de funcții derivabile şi derivata acesteia care este derivata de ordinul II a funcției f este dată de: $f''(x)=(f')'(x)=(4x-1)'=4,\ x\in\mathbb{R}$.

b) Funcția sinus este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca funcție elementară şi derivata de ordinul I este $f'(x)=\cos x,\ x\in\mathbb{R}$. Funcția f' este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca funcție elementară şi derivata acesteia care reprezintă derivata de ordinul II a funcției f este $f''(x)=(f')'(x)=-\sin x,\ x\in\mathbb{R}$.

c) Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x^2+1)$ este funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca o compunere de funcții derivabile. Avem:

$$f'(x)=(\ln)'(x^2+1)=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Funcția rațională f' este derivabilă pe $\mathbb{R}$ fiind un cât de funcții derivabile pe $\mathbb{R}$. Derivata derivatei de ordinul I este derivata de ordinul II a funcției f, anume:

$$f''(x)=(f')'(x)=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},\ x\in\mathbb{R}.$$

6 APLICAȚII. RĂDĂCINI MULTIPLE ALE ECUAȚIILOR POLINOMIALE

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ o funcție polinomială de gradul n.

❖ DEFINIȚIE

• Se numeşte **ecuație polinomială** de gradul n ecuația $f(x)=0,$ unde f este funcție polinomială de gradul n.

Exemplu de ecuații polinomiale:
1. ecuația polinomială de gradul 1: $ax+b=0, a\neq 0;$
2. ecuația polinomială de gradul 2: $ax^2+bx+c=0, a\neq 0;$
3. ecuația polinomială de gradul 3: $ax^3+bx^2+cx+d=0, a\neq 0.$

❖ DEFINIȚIE

• Fie f o funcție polinomială de gradul $n, n\in\mathbb{N}^*$. Numărul $x_0\in\mathbb{R}$ se numeşte **rădăcină multiplă** de ordinul m, $m\in\{1, 2, ..., n\}$ a ecuației polinomiale $f(x)=0$ dacă există o funcție polinomială g de gradul $n-m$ astfel încât: **a)** $f(x)=(x-x_0)^m\cdot g(x), \forall\, x\in\mathbb{R};$ **b)** $g(x_0)\neq 0.$

Numărul m se numeşte **ordin de multiplicitate** a rădăcinii x_0.

Dacă $m=1, 2, 3, ...,$ numărul x_0 se numeşte **rădăcină simplă, dublă**, **triplă** etc.

▣ TEOREMA 7

Fie f o funcție polinomială de gradul n, $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă numărul real x_0 este rădăcină multiplă de ordinul m al ecuației polinomiale $f(x)=0,$ atunci ea este rădăcină multiplă de ordinul $(m-1)$ pentru ecuația polinomială $f'(x)=0.$

Demonstrație

Din definiția rădăcinii multiple de ordinul m rezultă că există funcția polinomială g astfel încât $f(x)=(x-x_0)^m g(x), g(x_0)\neq 0.$

Avem $f'(x)=(x-x_0)^{m-1}\left[mg(x)+(x-x_0)g'(x)\right]=(x-x_0)^{m-1}\cdot h(x).$

Deoarece $f'(x_0)=0$ şi $h(x_0)=mg(x_0)\neq 0$ rezultă că x_0 este rădăcină multiplă de ordinul $m-1$ pentru ecuația $f'(x)=0.$ ■

Această teoremă dă posibilitatea formulării condițiilor în care un număr $x_0 \in \mathbb{R}$ este rădăcină dublă, triplă sau de un ordin mai mare.

Astfel:

- x_0 este rădăcină simplă dacă $f(x_0)=0$ şi $f'(x_0)\neq 0;$
- x_0 este rădăcină dublă dacă $f(x_0)=0,$ $f'(x_0)=0$ şi $f''(x_0)\neq 0;$
- x_0 este rădăcină triplă dacă $f(x_0)=0,$ $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$ şi x_0 este rădăcină simplă pentru $f''(x)=0.$

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x_0=1$ pentru ecuația $x^4-x^3-3x^2+5x-2=0.$

<u>*Soluție*</u>

Considerăm funcția polinomială $f(x)=x^4-x^3-3x^2+5x-2,$ $x\in\mathbb{R}.$

Avem: $f(1)=0,$ $f'(x)=4x^3-3x^2-6x+5$ şi $f'(1)=0.$

$f''(x)=12x^2-6x-6$ şi $f''(1)=0,$ iar $f''(x)=(x-1)(12x+6).$

Aşadar, $f(1)=f'(1)=f''(1)=0$ şi $x_0=1$ este rădăcină simplă pentru ecuația $f''(x)=0.$

Rezultă că $x_0=1$ este rădăcină triplă.

☒ **2.** Să se determine numerele $a, b\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $2ax^{2007}+bx^{223}+$ $+32=0$ are rădăcina dublă $x_0=1.$

<u>*Soluție*</u>

Fie funcția polinomială $f(x)=2ax^{2007}+bx^{223}+32,$ $x\in\mathbb{R}.$

Din condițiile $f(1)=0$ şi $f'(1)=0$ se obțin relațiile $2a+b+32=0$ şi $4014a+223b=0.$

Se obține $a=2$ şi $b=-36$ şi se arată că pentru aceste valori $f''(1)\neq 0.$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze derivata de ordinul II pentru funcțiile:

a) $f(x)=x^4-2x^3+5x^2+3x-1,$ $x\in\mathbb{R};$

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2},$ $x\neq -2;$

c) $f(x)=x\sqrt{x},$ $x\geq 0;$

d) $f(x)=x\cdot e^{x^2+2x},$ $x\in\mathbb{R}$;

e) $f(x)=(1+x^2)\operatorname{arctg}x,$ $x\in\mathbb{R};$

f) $f(x)=\ln(x^2+1)-\operatorname{arcctg}x,$ $x\in\mathbb{R}.$

E2. Să se rezolve ecuația $f''(x)=0$ pentru funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$, precizând mulțimea D, dacă:

a) $f(x)=x^3-4x^2+5x-2$;

b) $f(x)=x\sqrt{x+3}$;

c) $f(x)=x+2\operatorname{arctg} x$;

d) $f(x)=x+\sin x$;

e) $f(x)=\ln(2+\sin x)$; f) $f(x)=e^{-x^2+x}$;

g) $f(x)=\sqrt{x^2+4}+3\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$;

h) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

E3. Să se arate că funcția f verifică identitatea dată:

a) $f(x)=5x^2+4x-2$, $x^2\cdot f''(x)+f'(x)=2\left[x+f(x)+4\right]$, $x\in\mathbb{R}$;

b) $f(x)=e^{x^2-x}$, $\left(4x^2+1\right)f(x)-2f'(x)-f''(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$;

c) $f(x)=e^{2x}\cos 4x$, $f''(x)-4f'(x)+8f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$;

d) $f(x)=x^2\sqrt{x}-4x$, $x\cdot f'(x)+\sqrt{x}\cdot f''(x)-9x=\dfrac{10f(x)+3x}{4}$, $x>0$;

E4. Să se determine funcția polinomială de gradul 2, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ştiind că: $f''(10)=-6$, $f'(2)=-8$, $f(0)=5$.

E5. Să se determine numerele $a, b\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația are rădăcina dublă indicată:

a) $x^3+(a+1)x^2-3x+2b=0$, $x_0=-3$;

b) $4x^4-2ax^3+5x^2-bx+1=0$, $x_0=\dfrac{1}{2}$;

c) $x^4-\left(a^2-a-1\right)x^3+(a-3)x+2b-1=0$, $x_0=1$.

E6. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii date:

a) $x^4-9x^2-4x+12=0$, $x_0=-2$;

b) $5x^4+3x^3-8x^2-5x+1=0$, $x_0=-1$;

c) $3x^4-4x^3+7x^2-5x+1=0$, $x_0=\dfrac{1}{3}$;

d) $2x^4-5x^3+3x^2+x-1=0$, $x_0=1$.

APROFUNDARE

A1. Să se studieze dacă funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt derivabile de ordinul II:

a) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0\\ \operatorname{arctg} x, & x>0\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arcctg} x, & x\le 0\\ x^3-x, & x>0\end{cases}$;

c) $f(x)=|x-3|^3$.

A2. Să se determine $a, b, c\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}2\sin x+(a-2)\cos x, & x\ge 0\\ bx^2+cx+1, & x<0\end{cases}$$

să fie de două ori derivabilă în punctul $x_0=0$.

A3. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^3+(m-1)x^2+nx+2p, & x<2\\ \operatorname{arctg}(x-2), & x\ge 2\end{cases}.$$

Ştiind că f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ să se determine $m, n, p\in\mathbb{R}$ şi $f''(2)$.

A4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^4+(3-a)x^2-4x+b, & x<0\\ -2, & x=0\\ x^3-5x^2+cx+3-d, & x>0\end{cases}.$$

Pentru ce valori ale parametrilor a, b, c, d funcția f este de două ori derivabilă în $x_0=0$?

A5. Să se studieze existența numerelor $f''(0)$ și $g''(3)$ pentru funcțiile date prin: $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x^2+1}, & x<0\\ x, & x\ge 0\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}\ln^2(x-2), & x\ge 3\\ (x-3)^2, & x<3\end{cases}$.

A6. Să se determine funcția polinomială f de gradul 3 dacă: $f(0)=5$, $f'(0)=3$; $f''(0)=-8$ și $f''(2)=4$.

A7. Fie funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln[(x+a)(bx+c)]$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Să se determine $f'(1)$ știind că $f(0)=\ln 2$, $f'(0)=\frac{3}{2}$, $f''(0)=-\frac{5}{4}$.

A8. Fie funcția polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=9x^4-ax^3+bx^2-cx+d$. Să se determine numărul $f'(-1)$ știind că ecuația polinomială $f(x)=0$ are rădăcinile duble $x_1=1$, $x_2=\frac{2}{3}$.

A9. Să se determine coeficienții ecuațiilor polinomiale știind că au pe $x=1$ rădăcină de multiplicitate doi:

a) $ax^{10}+bx^9+2=0$;

b) $(a+1)x^{n+1}-2bx^{n-1}+x^{n-2}+1=0$.

A10. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ știind că ecuațiile polinomiale $2x^4-(3a+2)x^3+$ $+9x^2-bx+4=0$ și $x^3-12x+c=0$ au o rădăcină reală dublă comună.

A11. Să se determine funcția polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de grad $n, n\ge 1$ cu proprietatea:

a) $f(x)=f'(x)\cdot f''(x)$, $x\in\mathbb{R}$;

b) $4f(x)\cdot f'(x)=f''(x^{n-2})$, $x\in\mathbb{R}$.

A12. Se consideră funcția polinomială f de gradul n, $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots$ $\dots(x-a_n)$, $x\in\mathbb{R}$ și funcția g definită prin $g(x)=\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\dots+\frac{1}{x-a_n}$, $x\ne a_i$, $i=\overline{1,n}$.

Să se arate că:

a) $g'(x)<0$, $\forall\ x\in D_g$;

b) $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$, $x\in D_g$;

c) $(f'(x))^2\ge f(x)\cdot f''(x)$, $x\in D_g$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

O1. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2+(m-2)x+2-m}$, $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru $m=0$ să se determine $f'(-1)$ și $f''(0)$.

O2. Să se calculeze $f'(x)$ și $f''(x)$ pentru funcțiile $f:D\to\mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x)=\frac{\sin x}{2+\sin x}$; b) $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)$; c) $f(x)=\begin{cases}x+\sin x, & x\le 0\\ 2x+\ln(1+x^2), & x>0\end{cases}$.

❍3. Pe graficul funcției $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+2}{x}$ să se determine punctul $A(a, b)$ astfel încât tangenta în A să fie paralelă cu dreapta BC, unde $B(1, 1)$, $C\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

❍4. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x=-2$ pentru ecuația polinomială $3x^4+12x^3+11x^2-4x-4=0$.

Testul 2

❍1. Să se calculeze derivatele de ordin I şi II, pentru funcțiile date de:

a) $f(x)=(3x-1)e^{2x+3}$; b) $f(x)=\frac{x\ln(x+1)}{x+1}$; c) $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}+x^2, & x\le 0 \\ \sqrt{x^2+1}+x^3, & x>0 \end{cases}$.

❍2. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ are loc egalitatea:

$$1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

❍3. Să se arate că nu există nici o funcție polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât: $f(x)=\ln(1+x),\ \forall\ x\in[0, +\infty)$. (Universitate, Buc., 1985)

❍4. Fie funcția polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^5+ax^4-bx^3-cx^2+dx+3$ şi $\alpha=3a-b-c+2d$. Dacă ecuația $f(x)=0$ are $x_1=1$ şi $x_2=-1$ rădăcini de multiplicitate de ordinul doi, atunci α este egal cu:

a) 9; b) 3; c) –1; d) 0.

Testul 3

❍1. Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x(x^2+1)}{4}\cdot\sqrt{x^2+2}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$.

a) Să se determine mulțimile D şi $D_{f'}$.

b) Să se calculeze $\frac{5f''(-\sqrt{2})}{f'(\sqrt{2})+f'(-\sqrt{7})}$.

❍2. Să se determine punctele unghiulare ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$.

❍3. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \ln(3-x), & x\le 2 \\ ax^2-x(2a-b)+c, & x>2 \end{cases}$.

a) Să se determine $a, b, c\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie de două ori derivabilă în $x=2$.

b) Pentru $a=-\frac{1}{2}$ şi $b=c=0$, să se scrie ecuația tangentei la grafic în punctul cu abscisa egală cu $18f''(0)$.

❍4. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x) = f(x) + 6x^2 + 11x + 7$.

a) Să se arate că f este bijectivă.

b) Să se arate că funcția f^{-1} este derivabilă în $y_0 = 3$ și să se calculeze $(f^{-1})'(3)$.

c) Ce ordin de multiplicitate are $x = -2$ pentru ecuația polinomială $g(x) = 0$?

7 FUNCȚII DERIVABILE PE UN INTERVAL

7.1. PUNCTE DE EXTREM

Noțiunea de **punct de extrem** a fost întâlnită încă din clasa a IX-a (mai mult intuitiv) în legătură cu studiul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. S-a arătat că:

1. Dacă a > 0, atunci $f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, egalitatea realizându-se pentru $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Valoarea funcției $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ reprezintă **minimul funcției** (cea mai mică valoare a funcției), iar punctul $x_0 = -\frac{b}{2a}$ reprezintă **punctul de minim** al funcției.

Punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ al parabolei asociate, reprezintă **punctul de minim** al acesteia.

2. Dacă a < 0, atunci $f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, egalitatea având loc pentru $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Valoarea funcției $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ în acest caz, reprezintă **maximul funcției** (cea mai mare valoare a funcției), iar punctul $x_0 = -\frac{b}{2a}$ reprezintă **punctul de maxim** al funcției.

Punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ reprezintă **punctul de maxim** al parabolei asociate.

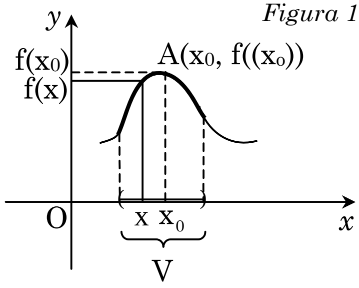
❖ **DEFINIȚIE**

• Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

Un punct $x_0 \in D$ se numeşte **punct de maxim relativ (local) al funcției f** dacă există o vecinătate V a punctului x_0, astfel încât pentru orice $x \in V \cap D$, are loc relația:

$$f(x) \le f(x_0). \qquad (1)$$

Figura 1



x_0 punct de maxim relativ

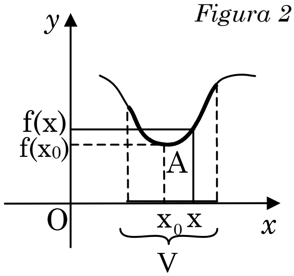
Valoarea $f(x_0)$ a funcției în punctul de maxim relativ se numeşte **maximul relativ** (local) al funcției, iar punctul $A(x_0, f(x_0))$ de pe curba asociată graficului funcției se numeşte **punct de maxim relativ** al acesteia.

❖ **DEFINIȚIE**

• Un punct $x_0 \in D$ se numeşte **punct de minim relativ (local) al funcției f** dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât pentru orice $x \in V \cap D$, are loc relația:

$$f(x) \ge f(x_0). \qquad (2)$$

Figura 2



x_0 punct de minim relativ

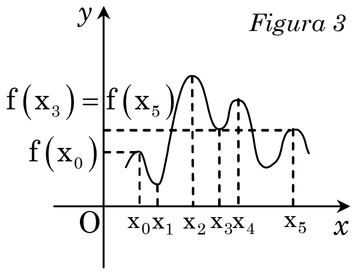
Valoarea $f(x_0)$ a funcției în punctul de minim relativ se numeşte **minimul relativ** (local) al funcției f, iar punctul $A(x_0, f(x_0))$ de pe curba asociată graficului funcției se numeşte **punct de minim relativ** al acesteia.

Punctele x_0 de maxim relativ sau de minim relativ ale unei funcții se numesc **puncte de extrem relativ ale funcției**.

Valorile funcției în punctele de extrem relativ se numesc **extremele relative ale funcției**.

Punctele de maxim relativ şi punctele de minim relativ ale curbei asociate graficului funcției se numesc **puncte de extrem relativ ale graficului**.

Figura 3



➲ **OBSERVAȚII**

1. O funcție poate avea mai multe puncte de extrem relativ, iar un minim relativ poate fi mai mare sau egal decât un maxim relativ. Acest fapt justifică folosirea cuvântului „relativ“, (figura 3).

2. E posibil ca o funcție să nu aibă puncte de extrem, (figura 4).

☞ ***Exemplu***

- $f:(1,2)\to\mathbb{R}, f(x)=x$, (figura 4).

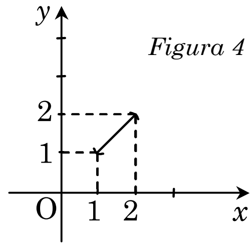


Figura 4

❖ **DEFINIȚII**

- Un punct $x_0\in D$ este **punct de maxim absolut al funcției f** dacă $f(x)\le f(x_0),\ \forall x\in D$.
- Valoarea $f(x_0)$ reprezintă **maximul absolut al funcției**.

Orice punct de maxim absolut este şi punct de maxim relativ (local), dar reciproca nu este în general adevărată.

O funcție poate avea mai multe puncte de maxim absolut.

☞ ***Exemplu***

- Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

Mulțimea $\{2k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$ reprezintă mulțimea punctelor de maxim absolut, iar $f(2k\pi)=1$, $k\in\mathbb{Z}$ reprezintă maximul absolut al funcției cosinus.

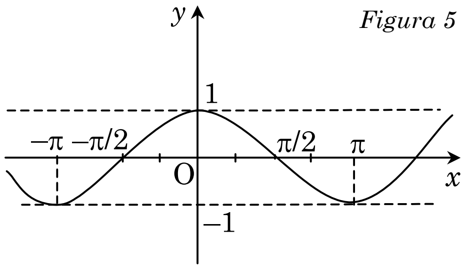


Figura 5

❖ **DEFINIȚII**

- Un punct $x_0\in D$ se numeşte **punct de minim absolut al funcției** $f:D\to\mathbb{R}$, dacă $f(x)\ge f(x_0),\ \forall x\in D$.
- Valoarea $f(x_0)$ reprezintă **minimul absolut al funcției**.

Orice punct de minim absolut este şi punct de minim relativ, dar reciproc nu este în general adevărat.

O funcție poate avea mai multe puncte de minim absolut. În figura 5 mulțimea punctelor de minim relativ este $\{(2k+1)\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$, iar minimul absolut al funcției cosinus este $f(2k+1)=-1,\ x\in\mathbb{Z}$.

Punctele de maxim absolut şi de minim absolut se numesc **puncte de extrem absolut**.

7.2. TEOREMA LUI FERMAT

> ▣ **TEOREMA 8 (Pierre Fermat 1601-1665)**
> Fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in(a,b)$ un punct de extrem al funcției.
> Dacă f este derivabilă în punctul x_0, atunci $f'(x_0)=0$.

Demonstrație

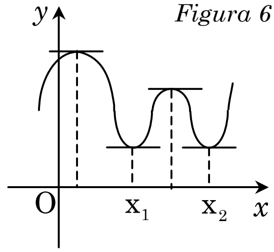
Să presupunem că punctul x_0 este punct de maxim din interiorul intervalului [a, b]. Atunci există o vecinătate V a punctului x_0, $V\subset[a,b]$, astfel încât $f(x) \le f(x_0)$ sau $f(x) - f(x_0) \le 0, \forall x \in V$. Din faptul că f este derivabilă în x_0, rezultă că:

$$f'(x_0) = f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \text{ și } f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0.$$

Rezultă că $f'(x_0) = 0$ și teorema este demonstrată.

În cazul în care x_0 este punct de minim se procedează ca mai înainte, sau se observă că x_0 este punct de maxim pentru funcția g = –f. Conform primei părți a demonstrației avem $g'(x_0) = 0$, adică $f'(x_0) = 0$. ■

Figura 6



• **Interpretare geometrică**

Teorema lui Fermat arată că într-un punct de extrem din interiorul unui interval, tangenta la graficul unei funcții derivabile este paralelă cu axa Ox (panta este zero), (figura 6).

➲ OBSERVAȚII

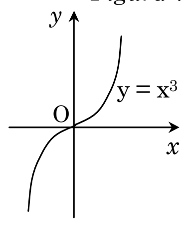
1. Condiția ca punctul de extrem x_0 să fie în interiorul intervalului [a, b] este esențială. Dacă x_0 ar fi una din extremitățile intervalului, este posibil ca funcția f să fie derivabilă în x_0, iar derivata sa să nu se anuleze în acest punct.

☞ ***Exemplu***

• Funcția f : [1, 2] → ℝ, $f(x) = x^2$ are minim în punctul $x_0 = 1$ și maxim în punctul $x_1 = 2$.

Derivata $f'(x) = 2x$, $x \in [1, 2]$ nu se anulează în intervalul [1, 2].

Figura 7

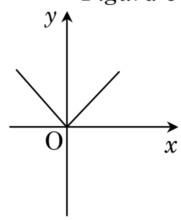


2. Reciproca teoremei lui Fermat nu este, în general, adevărată.
Din faptul că funcția f este derivabilă în punctul x_0 și $f'(x_0) = 0$ nu rezultă întotdeauna că x_0 este punct de extrem.

☞ ***Exemplu***

• Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ este derivabilă în $x_0 = 0$, $f'(0) = 0$, însă punctul $x_0 = 0$ nu este punct de extrem, (figura 7).

Figura 8



3. Condiția de derivabilitate a funcției în punctul x_0 nu este condiție necesară pentru ca punctul x_0 să fie punct de extrem.

☞ ***Exemplu***

• Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ are $x_0 = 0$ punct de minim interior domeniului de definiție, fără ca f să fie derivabilă în $x_0 = 0$, (figura 8).

4. Dacă funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este derivabilă, atunci zerourile derivatei f' din intervalul deschis (a, b) se numesc **puncte critice** ale funcției.

Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem ale unei funcții derivabile sunt printre punctele critice ale funcției.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 4x + 5$. Să se arate că $x = 2$ este punct de maxim al funcției f.

<u>*Soluție*</u>

$f(x) = -(x^2 - 4x - 5) = -[(x-2)^2 - 9] = -(x-2)^2 + 9 \le 9 = f(2),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Rezultă că $x_0 = 2$ este punct de maxim al funcției.

☒ **2.** Fie $a > 0$ și $a^x \ge x + 1,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $a = e$.

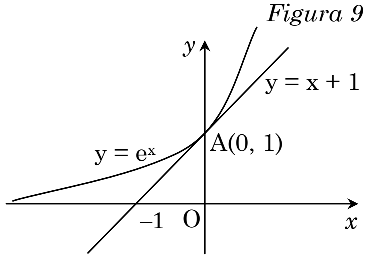
<u>*Soluție*</u>

Relația din ipoteză este echivalentă cu $a^x - x - 1 \ge 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a^x - x - 1$. Din ipoteză avem că $f(x) \ge 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Deoarece $f(0) = 0$ și $f(x) \ge 0 = f(0),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, rezultă că $x_0 = 0$ este punct de minim al lui f. Aplicând teorema lui Fermat se obține că $f'(0) = 0$. Dar $f'(x) = a^x \cdot \ln a - 1$ și deci $f'(0) = \ln a - 1$. Rezultă că $a = e$.

Figura 9



Pentru a proba că $e^x \ge x + 1,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, considerăm graficul funcției $g(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$, (figura 9).

Ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $A(0, 1)$ este $y - e^0 = g'(0) \cdot (x - 0)$ sau încă $y = x + 1$.

Din lectura grafică se obține că $e^x \ge x + 1,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 - 6x + 10$. Să se arate că $x_0 = 1$ este punct de minim al funcției și să se determine minimul funcției f.**

E2. **Să se determine punctele de extrem ale funcțiilor date, relativ la domeniile lor de definiție, precizând totodată și extremele funcției:**

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x^2 + 10x - 1$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 4x - 2$;

c) $f : [-2, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2$;

d) $f : [-2, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = |x^2 - 1|$;

e) $f : (-3, 2) \to \mathbb{R},\ f(x) = -x$;

f) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^{-1}$.

E3. **Se dau funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4|,\ g(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Fermat pe $[-3, 3]$.**

E4. Să se determine punctele critice ale funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = x^3 - 3x$;

b) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 1$;

c) $f(x) = \ln(x - 3) - \ln(x^2 - 5)$;

d) $f(x) = (x^3 + 3x^2) \cdot e^x$;

e) $f(x) = \cos^6 2x$;

f) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{4x+3}{\sqrt{x^2+1}}$;

g) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|+2}$;

h) $f(x) = \operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x$;

i) $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot \arcsin\dfrac{x}{a}$.

APROFUNDARE

A1. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - (a+1)x + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
Să se determine $f'(0) \cdot f(0)$ știind că $x = -1$ este punct de maxim local al funcției și valoarea maximă a funcției este 6.

A2. Să se determine funcția polinomială $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ știind că f are un maxim local egal cu -1 în punctul $x = 1$ și un minim local egal cu -2 în punctul $x = 2$.

A3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = 6^x + a^x - 14^x - 15^x$, $a > 0$.
a) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.
b) Să se determine a astfel încât $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

A4. Se consideră funcția $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \left(x - \dfrac{2m}{m^2+1}\right)^4$.
Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să aibă un minim în punctul $x = 1$.

A5. Să se determine $a > 0$, știind că $a^x + 1 \geq 3^x + 4^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

A6. Să se determine $a > 0$ dacă $a^x + 2^x \geq 3^x + 4^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

A7. Să se determine $a > 0$ dacă:
$\ln(x - 1) \leq a(x - 2)$, $\forall x \in (1, \infty)$.

A8. Să se arate că dacă $(1 + x)^3 \geq 1 + mx$, $\forall x > -1$, atunci $m = 3$.

7.3. TEOREMA LUI ROLLE

Teorema lui Fermat dă condiții suficiente pentru ca o funcție să aibă derivata nulă într-un punct, dar nu și condiții necesare. Un alt rezultat care dă numai condiții suficiente pentru ca derivata unei funcții să se anuleze într-un punct îl reprezintă următoarea teoremă:

▣ **TEOREMA 9 (Michel Rolle 1652-1719)**
Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$. Dacă:
a) funcția f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$;
b) funcția f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b);
c) $f(a) = f(b)$,
atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Demonstrație

Deosebim următoarele situații:

a) f este constantă pe $I = [a, b]$. Atunci $f'(x) = 0$, $\forall\ x \in I$;

b) f nu este constantă pe I.

Deoarece f este continuă pe $I = [a, b]$, ea este mărginită şi îşi atinge marginile pe acest interval. Astfel, există punctele $u, v \in I$ astfel ca $f(u) \le f(v)$, $\forall\ x \in I$. Deoarece f nu este constantă avem $f(u) < f(v)$.

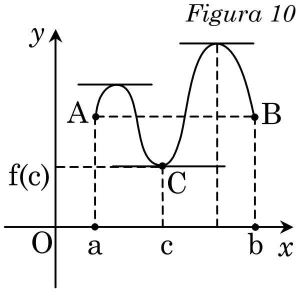
Punctele u şi v sunt puncte de extrem pentru funcția f. Având $f(u) < f(v)$, atunci cel puțin unul dintre punctele u şi v este interior intervalului $[a, b]$.

În caz contrar am avea $f(u) = f(a) = f(b) = f(v)$, ceea ce nu se poate.

Fie $u \in (a, b)$. Atunci, din teorema lui Fermat rezultă că $f'(u) = 0$ şi se ia $c = u$. ■

INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A TEOREMEI LUI ROLLE

Figura 10



În condițiile cuprinse în teorema lui Rolle, rezultă că există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât tangenta la graficul funcției în punctul $C(c; f(c))$ este paralelă cu axa Ox, (figura 10) sau este chiar axa Ox.

➲ OBSERVAȚIE

• Fie funcția $f : \left[-1, \sqrt{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \left[-1, \sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \left[-1, \sqrt{2}\right] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$.

Pe intervalul $\left[-1, \sqrt{2}\right]$ nu se verifică nici una din condițiile a), b), c) ale teoremei lui Rolle. Totuşi $f'(0) = 0$. Aşadar, ipotezele teoremei lui Rolle sunt numai suficiente pentru anularea derivatei.

CONSECINȚE ALE TEOREMEI LUI ROLLE

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție oarecare, $I \subset \mathbb{R}$ interval de numere reale. Soluțiile reale ale ecuației $f(x) = 0$ se numesc zerourile (rădăcinile) funcției f pe intervalul I.

Teorema lui Rolle conduce la câteva referiri privind zerourile unei funcții numerice.

▣ CONSECINȚA 1

Între două zerouri ale unei funcții derivabile pe un interval I se află cel puțin un zero al derivatei.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe I și $a, b \in I, a < b$ zerouri ale funcției, f(a) = f(b) = 0.

Aplicând teorema lui Rolle pe intervalul $[a, b]$, rezultă că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$, deci c este zero al derivatei. ■

▣ CONSECINȚA 2

Între două zerouri consecutive ale derivatei unei funcții derivabile pe un interval I se află cel mult un zero al funcției.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe I și $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ două zerouri consecutive ale derivatei f'. Presupunem prin absurd că în intervalul (x_1, x_2) există a, b astfel încât f(a) = f(b) = 0, $a < b$.

Aplicând teorema lui Rolle funcției f pe intervalul $[a, b]$, rezultă că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Rezultă că $x_1 < c < x_2$ în contradicție cu faptul că x_1, x_2 sunt zerouri consecutive ale funcției f'. Așadar, presupunerea făcută este falsă și afirmația din consecință este demonstrată. ■

Probleme rezolvate

☒ **1.** Se consideră $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, funcție derivabilă care verifică relația $f(0) = f(1) = 0$. Să se arate că există $c \in (0, 1)$ astfel încât $f'(c) + f(c) = 0$.

<u>*Soluție*</u>

Pornim de la ideea că expresia $f'(c) + f(c) = 0$ poate reprezenta valoarea derivatei unei funcții în punctul c.

Astfel, definim funcția $g: [0, 1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) \cdot e^x$. Aceasta este derivabilă pe $[0, 1]$ ca produs de funcții derivabile și $g(0) = g(1) = 0$. Conform teoremei lui Rolle, există $c \in (0, 1)$ astfel încât $g'(c) = 0$, ceea ce este echivalent cu $f'(c) + f(c) = 0$.

☒ **2.** Se dă funcția polinomială de gradul 4, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + ax + b$. Să se arate că ecuația $f(x) = 0$ nu poate avea 4 soluții reale distincte.

Soluție

Presupunem prin absurd că ecuația are soluțiile reale distincte x_1, x_2, x_3, x_4 astfel încât $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Conform consecinței 1, ecuația $f'(x) = 0$ are trei soluții reale distincte $x_1' \in (x_1, x_2)$, $x_2' \in (x_2, x_3)$, $x_3' \in (x_3, x_4)$. Aplicând această consecință funcției derivate $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabilă pe $\mathbb{R}$ rezultă că ecuația $f''(x) = 0$ are două soluții reale distincte, $x_1'' \in (x_1', x_2')$, $x_2'' \in (x_2', x_3')$. Dar $f''(x) = 12(x^2 + x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$ şi ecuația $f''(x) = 0$ nu are două soluții reale. Această contradicție arată că ecuația $f(x) = 0$ nu poate avea 4 soluții reale, distincte.

$$\begin{array}{lccccccc}
f: & x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 \\
f': & & x_1' & & x_2' & & x_3' & \\
f'': & & & x_1'' & & x_2'' & &
\end{array}$$

☒ **3.** Să se rezolve ecuația exponențială $3^{x+1} + 2^x = 8^x + 3$.

Soluție

Se observă că $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$ sunt soluții ale ecuației. Să arătăm că ecuația nu mai are şi alte soluții reale.

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{x+1} + 2^x - 8^x - 3$ derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Ecuația $f'(x) = 0$ se scrie sub forma $3^{x+1} \ln 3 + 2^x \ln 2 = 8^x \ln 8$ sau

$$3 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^x \ln 3 + \left(\frac{1}{4}\right)^x \ln 2 = \ln 8. \quad (1)$$

Funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^x \ln 3 + \left(\frac{1}{4}\right)^x \ln 2$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ şi în acest caz ecuația (1) are cel mult o soluție reală, deci şi ecuația $f'(x) = 0$ are cel mult o soluție reală. Aşadar, ecuația $f(x) = 0$ are cel mult două soluții reale. Rezultă că 0 şi 1 sunt singurele soluții reale ale acestei ecuații.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se verifice dacă se poate aplica teorema lui Rolle funcțiilor:

a) $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 6$;

b) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 15x^2 + 14x$;

c) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |4x^2 - x^4|$;

d) $f : \left[-1, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [-1, 0) \\ 1 - \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases};$$

e) $f : \left[-\frac{\pi}{4}, 1\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right] \\ -x, & x \in (0, 1] \end{cases};$$

f) $f : \left[-\frac{\pi}{3}, 1\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x - 1, & x \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right) \\ 1 - x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}.$$

E2. Să se determine constantele $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât să se poată aplica teorema lui Rolle funcțiilor:
a) $f: [-2, 1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \in [-2, 0) \\ 2x, & x \in [0, 1] \end{cases};$$
b) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + (2a-1)x + b, & x < 0 \\ (c-1)x^2 + 3x - 5, & x \geq 0 \end{cases}$$ şi apoi să se aplice efectiv teorema.

E3. Fie funcția $f: [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$. Există puncte $c \in \mathbb{R}$ astfel încât tangenta la graficul funcției în $C(c, f(c))$ să fie paralelă cu axa Ox?

E4. Să se determine $c \in (-1, 1)$ astfel încât tangenta în punctul cu abscisa c de pe graficul funcției $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ să fie paralelă cu axa Ox.

E5. Să se arate că derivatele de ordinul I ale funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au numai zerouri reale:
a) $f(x) = (x-2)(x+3)(x-4)$;
b) $f(x) = (x^2-1)(x^2+x-6)$;
c) $f(x) = (4x^2-1)(9-x^2)$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care se poate aplica teorema lui Rolle funcțiilor şi să se aplice aceasta, dacă:
a) $f: [-3, 3] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 7x + b - 3, & x \in [-3, 0) \\ x^2 + (c+1)x + 1, & x \in [0, 3] \end{cases};$$
b) $f: [-1, e-1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \in [-1, 0) \\ \ln(x+1), & x \in [0, e-1] \end{cases}.$$
(ASE, Buc., 1995)

A2. Să se determine punctele în care tangenta la grafic este paralelă cu Ox pentru funcțiile:
a) $f: \left[-2, \frac{5}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{10 + x - 2x^2}$;
b) $f: [-1, 3] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + x + 2, & x < 1 \\ x^2 - 5x + 5, & x \geq 1 \end{cases}.$$

A3. Fie funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ derivabilă şi $f(0) = 0$. Să se arate că există $c \in (0, 1)$, astfel încât $f'(c) = -\frac{f(c)}{c-1}$.

A4. Fie funcția $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$ derivabilă şi $f(1) = 2f(2)$. Să se arate că există $c \in (1, 2)$, astfel încât $f'(c) = -\frac{f(c)}{c}$.

A5. Fie $f, g: [0, 1] \to \mathbb{R}^*$ derivabile, astfel încât $f(1) \cdot g(0) = f(0) \cdot g(1)$. Să se arate că există $c \in (0, 1)$, astfel încât $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}$.

A6. Să se arate că pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$, există $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\frac{\sin^{m-2} x}{\cos^{n-2} x} = \frac{n}{m}$.

A7. Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă şi $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Să se arate că $f(a) \neq f(b)$.

A8. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă care are n zerouri distincte. Să se arate că derivata f' are cel puțin $(n-1)$ zerouri distincte.

A9. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție polinomială de gradul n, $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Să se arate că f are cel mult n zerouri reale.
b) Dacă f are n zerouri reale şi diferite, atunci f' are toate zerourile reale şi distincte.

A10. **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție polinomială nenulă. Să se verifice dacă f are toate zerourile reale, atunci şi funcția $f + mf'$ are toate zerourile reale, $m\in\mathbb{R}$.**

A11. **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție polinomială, astfel încât curba reprezentativă intersectează prima bisectoare a axelor în trei puncte distincte. Să se arate că $\exists\ c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f''(c) = 0$.**

A12. **Să se rezolve ecuațiile exponențiale:**

a) $3^x + 2^{2x+1} = 6^x + 5$;

b) $3^{2x+1} = 2^{4x+1} - 3\cdot 2^{2x} + 7$.

7.4. APLICAȚIE. ȘIRUL LUI ROLLE

> ***NE REAMINTIM!***
> *Criteriul Cauchy-Bolzano*
> *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul I şi $a,b\in I$, $a<b$. Dacă $f(a)\cdot f(b)<0$, atunci ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție $c\in(a,b)$.*

Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval de numere reale şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție numerică.

Dacă f este funcție continuă, criteriul Cauchy-Bolzano dă condiții suficiente ca ecuația $f(x)=0$ să aibă soluții reale pe intervalul I.

O altă problemă legată de soluțiile ecuației f(x) = 0 o reprezintă **separarea soluțiilor acesteia**.

Separarea soluțiilor ecuației f(x) = 0 presupune:

a) determinarea numărului de soluții reale ale ecuației;

b) precizarea intervalelor în care sunt situate aceste soluții.

Teorema lui Rolle, consecințele acesteia şi criteriul Cauchy-Bolzano conduc la o metodă de separare a soluțiilor reale ale unor ecuații de forma f(x) = 0, unde f este o funcție derivabilă, metodă numită **şirul lui Rolle**.

Etapele şirului lui Rolle

a) Se fixează intervalul I de studiu al ecuației f(x) = 0 şi se defineşte funcția $f:I\to\mathbb{R}$, derivabilă pe I.

b) Se calculează f' şi se determină soluțiile $x_1, x_2, ..., x_n\in I$ ale ecuației f '(x) = 0 din intervalul I, $x_1<x_2<...<x_n$.

c) Se formează şirul α, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, β, unde α şi β sunt valorile funcției la capetele intervalului I, sau limitele funcției f la capetele intervalului I.

d) Rezultatele anterioare se organizează într-un tabel cu liniile x, f '(x), f(x) şi o linie în care se trec semnele valorilor α, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$, β.

Acest şir al semnelor valorilor funcției f se numeşte **şirul lui Rolle**.

Concluzii desprinse din analiza şirului lui Rolle

1°. Dacă în şirul lui Rolle apar două semne alăturate identice, atunci în intervalul corespunzător nu există nici o soluție reală a ecuației f(x) = 0.

Într-adevăr, să considerăm intervalul $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ pentru care $f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) > 0$:

• dacă în I_k există două sau mai multe soluții ale ecuației, atunci se contrazice consecința 2 a teoremei lui Rolle;

• dacă în I_k există o singură soluție c a ecuației, cum $f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) > 0$, atunci c este punct de extrem al funcției f, deci f '(c) = 0, contradicție cu faptul că x_k, x_{k+1} sunt zerouri consecutive ale derivatei.

2°. Dacă în şirul lui Rolle apar două semne consecutive diferite, ecuația f(x) = 0 are o singură soluție în intervalul corespunzător I_k.

Într-adevăr, să presupunem că $f(x_k) < 0, f(x_{k+1}) > 0$. Conform consecinței 2 a teoremei lui Rolle, ecuația f(x) = 0 are cel mult o soluție în I_k, iar conform criteriului Cauchy-Bolzano rezultă că există cel puțin o soluție a ecuației în I_k. Aşadar, se obține unicitatea soluției pe I_k.

3°. Dacă în şirul lui Rolle apare „zero“, de exemplu $f(x_k) = 0$, atunci se consideră că x_k este rădăcină multiplă a ecuației.

4°. Numărul schimbărilor de semn şi al zerourilor din şirul lui Rolle determină numărul soluțiilor reale ale ecuației f(x) = 0.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se separe soluțiile reale ale ecuației $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 1 = 0$.

<u>*Soluție*</u>

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 1$ derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Derivata este funcția $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 12(x - 2)(x^2 - 1)$ şi are soluțiile: $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

Avem $\alpha = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, f(1) = 12, f(2) = 7, f(–1) = –20, $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Alcătuim tabelul:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
f'(x)		0	0	0	
f(x)	$+\infty$	-20	12	7	$+\infty$
Şirul lui Rolle	+	–	+	+	+

Se observă că în şirul lui Rolle sunt doar două schimbări de semn.

Ecuația dată are două soluții reale $x_1 \in (-\infty, -1)$ şi $x_2 \in (-1, 1)$.

☒ **2.** Să se discute numărul soluțiilor reale ale ecuației $\ln(x^2 + 1) - \dfrac{x^2}{2} - m = 0,\ m \in \mathbb{R}$.

<u>*Soluție*</u>

Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x^2 + 1) - \frac{x^2}{2} - m$ derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Derivata funcției f este $f'(x) = \frac{x(1-x^2)}{x^2+1}$ cu soluțiile $x_1 = -1,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 1$.

Avem $\alpha = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = f(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} - m$, $f(0) = -m$, $\beta = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

Se observă că valorile funcției calculate în soluțiile derivatei depind de m. Alcătuim tabelul de semn pentru aceste valori:

m	$-\infty$ 0 ln 2 – 0,5 $+\infty$
$-m + \ln 2 - \frac{1}{2}$	+ + + + + + + + + + 0 – – – – –
–m	+ + + 0 – – – – – – – – – – – –

Tabelul asociat studiului cu ajutorul şirului lui Rolle are structura:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	Separarea soluțiilor
m \ f(x)	$-\infty$	$-m + \ln 2 - 0{,}5$	$-m$	$-m + \ln 2 - 0{,}5$	$-\infty$	
$m \in (-\infty, 0)$	–	+	+	+	–	$x_1 \in (-\infty, -1)$; $x_2 \in (1, \infty)$
$m = 0$	–	+	0	+	–	$x_1 \in (-\infty, -1)$; $x_2 = 0$, dublă $x_3 \in (1, \infty)$
$m \in (0, \ln 2 - 0{,}5)$	–	+	–	+	–	$x_1 \in (-\infty, -1)$; $x_2 \in (-1, 0)$ $x_3 \in (0, 1)$; $x_4 \in (1, \infty)$
$m = \ln 2 - 0{,}5$	–	0	–	0	–	$x_1 = -1$, $x_2 = 1$, duble
$m \in (\ln 2 - 0{,}5, \infty)$	–	–	–	–	–	$x \in \varnothing$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se separe rădăcinile reale ale ecuațiilor:

a) $x^3 - 3x - 7 = 0$;
b) $4x^3 - 15x^2 + 12x - 3 = 0$;
c) $x^4 - 4x^3 - 5 = 0$;
d) $2x^3 - 21x^2 + 72x - 65 = 0$;
e) $6x^5 + 15x^4 - 40x^3 - 30x^2 + 90x = -1$;
f) $3x^2 - 7x + 2\ln x + 1 = 0$;
g) $\ln(x^2 + 2) - \frac{x^2}{3} - 4 = 0$;
h) $x \cdot e^{2x-1{,}5x^2} + 3 = 0$;
i) $\sin^3 x - 3\sin x - 1 = 0,\ x \in [0, 2\pi]$.

E2. Să se discute rădăcinile reale ale ecuațiilor:

a) $x^3 - 3x + m = 0$;
b) $x^3 + 3x^2 = -m$;
c) $\ln(x^2 + 1) - m = 0$;
d) $x^2 - 2\ln x = m$.

APROFUNDARE

A1. **Să se arate că ecuația:**
$(x+1)(x+2)(x+3)+(x+2)(x+3)(x+4)+(x+1)(x+3)(x+4)+(x+1)(x+2)(x+4)=0$
are toate soluțiile reale.

A2. **Să se discute după valorile parametrului m soluțiile reale ale ecuațiilor:**
a) $x^4-8x^3+22x^2-24x-m+2=0$;
b) $3x^4+20x^3-36x^2+2m=0$;
c) $2x^3-15x^2+36x-6+m=0$;
d) $x^4-8x^3+16x^2-9+m=0$;
e) $x^3+mx^2-x+5=0$.

A3. **Să se discute după $m\in\mathbb{R}$ soluțiile reale ale ecuațiilor:**
a) $e^x-mx^2=0$; **b)** $e^x-mx=0$;
c) $e^{x^2-3x}+m=0$; **d)** $\sin x+x-m=0$;
e) $\sin x\cdot\cos^3 x=m$; **f)** $\ln x-mx=0$.

A4. **Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,**
$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$
Să se arate că f satisface condițiile teoremei lui Rolle şi există un şir (c_n) pentru care $f'(c_n)=0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$.

7.5. TEOREMA LUI LAGRANGE

În continuare, vom folosi teorema lui Rolle pentru demonstrarea unui rezultat important în analiza matematică, cunoscut sub denumirea de **teorema creşterilor finite** sau **teorema lui Lagrange**.

> ▣ **TEOREMA 10 (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813)**
> Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<b$. Dacă:
> **a)** funcția f este continuă pe intervalul închis [a, b],
> **b)** funcția f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b),
> atunci există cel puțin un punct $c\in(a,b)$ astfel încât $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$. (1)

<u>*Demonstrație*</u>

Relația din concluzia teoremei se poate scrie şi sub forma:

$f'(c)-k=0$, unde $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Se observă că $f'(x)-k$ se obține prin derivarea funcției $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-kx$.

Funcția g este derivabilă pe (a, b), continuă pe [a, b], iar $g(a)=g(b)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$, deci îndeplineşte condițiile teoremei lui Rolle.

Atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $g'(c)=0$.

Din această relație rezultă $f'(c)=k$ şi teorema este demonstrată. ■

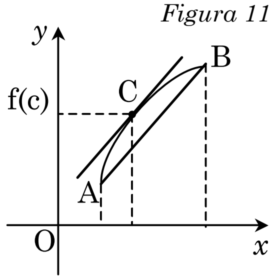
Joseph-Louis LAGRANGE (1736-1813) matematician şi astronom francez. A pus bazele mecanicii analitice şi ale calculului variațiilor.

Formula (1) se numeşte **formula lui Lagrange** sau **formula creşterilor finite** sau **formula mediei** pentru funcții derivabile.

Interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange

• Dacă graficul funcției f admite tangentă în fiecare punct, eventual cu excepția capetelor intervalului [a, b], atunci există un punct pe grafic în care tangenta este paralelă cu coarda care uneşte extremitățile acestuia, (figura 11).

Figura 11



Într-adevăr, dacă A(a, f(a)), B(b, f(b)) sunt extremitățile graficului, atunci panta segmentului [AB] este $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, iar panta tangentei în punctul C(c, f(c)) este f '(c). Formula lui Lagrange arată tocmai egalitatea celor două pante.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Fie f : [–1, 3] → $\mathbb{R}$, f(x) = $\begin{cases} 4x+3, & x\in[-1, 1) \\ 2x^2+5, & x\in[1, 3] \end{cases}$.

Să se verifice aplicabilitatea teoremei lui Lagrange şi să se determine un punct în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda care uneşte punctele de pe grafic de abscise –1 şi 3.

<u>*Soluție*</u>

Funcția f este continuă şi derivabilă pe [–1, 1)$\cup$(1, 3].

Deoarece $f(1-0)=7=f(1+0)$ şi $f'_s(1)=4=f'_d(1)$ rezultă că f este continuă şi derivabilă în $x=1$.

Aşadar, se poate aplica teorema lui Lagrange şi există c $\in$ (–1, 3) astfel încât $f'(c)=\frac{f(3)-f(-1)}{3+1}=6$.

Deoarece $f'(x)=\begin{cases} 4, & x\in[-1, 1) \\ 4x, & x\in[1, 3] \end{cases}$, din egalitatea f '(c) = 6 se obține c = 1,5.

Folosind interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange, rezultă că tangenta în punctul $C\left(\frac{3}{2}, \frac{19}{2}\right)$ îndeplineşte condiția cerută.

☒ **2.** Să se determine a, b $\in\mathbb{R}$, astfel încât funcției f : [–1, 1] → $\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} ax+e^{2x}, & x\in[-1, 0) \\ x^2+3-b, & x\in[0, 1] \end{cases}$ să i se poată aplica teorema lui Lagrange şi apoi să se aplice aceasta.

<u>Soluție</u>

Funcția f este continuă şi derivabilă pe mulțimea [–1, 0) ∪ (0, 1], având în vedere operațiile cu funcții derivabile. Impunem condițiile de continuitate şi derivabilitate în x = 0. Funcția f este continuă în x = 0 dacă şi numai dacă f(0 – 0) = f(0) = f(0 + 0). Rezultă b = 2. Funcția f este derivabilă în x = 0 dacă şi numai dacă $f'_s(0) = f'_d(0) \in \mathbb{R}$.

Dar $f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{ax + e^{2x} - 1}{x} = a + \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2 = a + 2.$

$f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x^2+1-1}{x} = 0$. Din $f'_s(0) = f'_d(0) = 0$, se obține a = –2.

Aplicând teorema lui Lagrange rezultă că există c ∈ (–1, 1) astfel încât $f'(c) = \dfrac{f(1)-f(-1)}{2} = -\dfrac{1}{2e^2}$.

Deoarece $f'(x) = \begin{cases} -2+2e^{2x}, & x \in [-1, 0) \\ 2x, & x \in [0, 1] \end{cases}$, rezultă: $c = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4e^2-1}{4e^2} \in (-1, 0)$.

☒ **3.** Fie 0 < a < b şi f : [a, b] → ℝ, f(x) = ln x.

Să se aplice teorema lui Lagrange funcției f şi să se arate că:

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

<u>Soluție</u>

Funcția f este continuă şi derivabilă pe [a, b]. Aplicând teorema lui Lagrange rezultă că există c ∈ (a, b) astfel încât:

$f'(c) = \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a}$ sau $\dfrac{1}{c} = \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a}$, de unde $c = \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a}$.

Deoarece a < c < b, se obține $a < \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a} < b$ şi relația cerută este imediată.

Dacă a = n şi b = n +1, se obține $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$, ∀ n ∈ $\mathbb{N}^*$.

☒ **4.** Să se calculeze limita şirului: $a_n = n\cdot\left[\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} - \dfrac{\ln n}{n}\right]$, n ≥ 1.

<u>Soluție</u>

Considerăm funcția f : [1, ∞) → ℝ, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Se observă că:

$a_n = n[f(n+1) - f(n)]$.

Deoarece f verifică condițiile teoremei lui Lagrange pe I = [n, n+1], rezultă că există c(n) ∈ (n , n +1), astfel încât: f(n +1) – f(n) = f '(c(n)).

Rezultă că $a_n = n\cdot f'(c(n)) = n\cdot\dfrac{1-\ln c(n)}{(c(n))^2} = \dfrac{n}{c(n)}\cdot\dfrac{1-\ln c(n)}{c(n)}$.

Din n < c(n) < n +1 rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{c(n)}=1$, şi astfel:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\ln c(n)}{c(n)}=0.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se aplice teorema lui Lagrange funcțiilor:

a) $f:[-2, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^3+4x+1$;

b) $f:[-1, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$;

c) $f:[-2, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{9-x^2}$;

d) $f:[1, e]\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\ln x$.

E2. Să se studieze dacă se poate aplica teorema lui Lagrange funcțiilor, iar în caz afirmativ să se aplice:

a) $f:[-1, 2]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x^2+2,\ x\in[-1, 0)\\ x^2-x+2,\ x\in[0, 2]\end{cases};$$

b) $g\ [-2, 0]\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}x^2+2x+6,\ x\in[-2, -1]\\ x^3-3x+2,\ x\in(-1, 0]\end{cases};$$

c) $h: [-4, 4]\to\mathbb{R},\ h(x)=x\cdot|x|$;

d) $j:[-4, 3]\to\mathbb{R}$,

$$j(x)=\begin{cases}\sqrt{x+5},\ x\in[-4, -1)\\ \frac{x+9}{4},\ x\in(-1, 3]\end{cases}.$$

E3. Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$, astfel încât să se poată aplica teorema lui Lagrange funcțiilor:

a) $f:[0, 3]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^2+5x+2a+1,\ x\in[0, 1)\\ (a+3)x+b+1,\ x\in[1, 3]\end{cases};$$

b) $g:[-2, 0]\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}ax+e^{3x+3},\ x\in[-2, -1)\\ x^2+2ax+b,\ x\in[-1, 0]\end{cases}.$$

E4. Fie funcția $f:[-1, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x-4x^3$. Să se arate că există un punct în care tangenta la graficul funcției este paralelă cu coarda care uneşte punctele $A(-1, 3)$ şi $B(2, -30)$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ pentru care se poate aplica teorema lui Lagrange funcțiilor:

a) $f:[0, 4]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\ln^3(x+1),\ x\in[0, e-1)\\ (a+1)x+b,\ x\in[e-1, 4]\end{cases};$$

b) $g:\left[-1, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}ae^{x^2+x},\ x\in[-1, 0)\\ (a^2-2)\sin x+b\cos x,\ x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\end{cases}.$$

A2. Se poate aplica teorema lui Lagrange funcției $f:[-4, 4]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\max\left(x^2-2x+3, 3x-3\right)?$$

Dar funcției $g=f\,/_{[-4, 1]}$?

A3. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x+1,\ x\le 0\\ \sqrt{2x+1}, x>0\end{cases}.$$ Să se determine un punct A pe graficul funcției în care tangenta este paralelă cu coarda care uneşte punctele de pe grafic de abscise $x_1=-2$ şi $x_2=4$.

A4. **Aplicând teorema lui Lagrange funcției f(x) = ln x pe intervalul [n , n + 1], să se demonstreze că:**

a) şirul (a_n), $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ este divergent;

b) şirul (b_n), $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \in (0, 1)$.

A5. **Să se demonstreze inegalitățile:**

a) $n \cdot (b-a) \cdot a^{n-1} < b^n - a^n < n \cdot (b-a) \cdot b^{n-1}$, $0 < a < b$;

b) $\frac{a-b}{\cos^2 b} < \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b < \frac{a-b}{\cos^2 a}$, $0<a<b<\frac{\pi}{2}$;

c) $(b-a)\cdot \operatorname{tg} a < \ln\frac{\cos a}{\cos b} < (b-a)\cdot \operatorname{tg} b$, $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$;

d) $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$, $x, y \in \mathbb{R}$;

e) $e^x \ge x + 1$, $x \in \mathbb{R}$; **f)** $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18} > 1 + \frac{\pi}{18}$.

A6. **Fie funcția $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \ln(1+t)$.**

a) Să se aplice teorema lui Lagrange pe intervalul $[0, x]$, $x > 0$.

b) Să se demonstreze că: $x < (x+1)\ln(1+x) < x(x+1)$.

A7. **Fie funcția $f: [3, 6] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^x$, $x \in \mathbb{R}$.**

a) Să se aplice teorema lui Lagrange pe intervalele $[3, 4]$ şi $[5, 6]$.

b) Să se rezolve ecuația $3^x + 6^x = 4^x + 5^x$.

A8. **Să se rezolve ecuațiile:**

a) $3^x + 5^x = 2^x + 6^x$;

b) $9^x + 6^x = 14^x + 1$.

A9. **Să se compare numerele:**

a) $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{5}$ şi $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{10}$;

b) $\sqrt[n]{9} + \sqrt[n]{5}$ şi $\sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{10}$.

A10. **Să se calculeze limitele de şiruri:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$.

A11. **Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă şi numerele f(0), $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ în progresie aritmetică. Să se arate că există $c \in (0, 1)$, astfel încât $f''(c) = 0$.**

7.6. CONSECINȚE ALE TEOREMEI LUI LAGRANGE

Din teorema lui Lagrange se obțin câteva rezultate foarte importante în analiza matematică. Astfel, următorul rezultat permite să decidem dacă o funcție are derivată într-un punct.

> ▣ **CONSECINȚA 1 (derivata unei funcții într-un punct)**
>
> Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $x_0 \in I$.
>
> Dacă: **a)** f este continuă în x_0; **b)** f este derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$,
>
> **c)** există $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$,
>
> atunci funcția f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = \ell$.

Demonstrație

Aplicăm teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[x, x_0] \subset I$, $x < x_0$.

Rezultă că există $c(x) \in (x, x_0)$ astfel încât: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c(x))$.

De aici rezultă că $f'_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} f'(c(x)) = \ell$, deoarece din $x < c(x) < x_0$ se obține $\lim\limits_{x\to x_0} c(x) = x_0$. În mod analog, $f'_d(x_0)$ există și este egală cu ℓ.

Așadar, funcția f are derivată în x_0 și $f'(x_0) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă $\ell \in \mathbb{R}$, atunci f este și derivabilă în x_0.

Problemă rezolvată

☒ Să se studieze derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ x + \ln x, & x > 1 \end{cases}$ folosind consecința teoremei lui Lagrange.

<u>*Soluție*</u>

Funcția f este derivabilă pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Deoarece $f(1-0) = 1 = f(1+0)$, funcția f este continuă în 1.

Avem $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 1 + \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1} 2x = 2$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2$.

Din consecința 1 rezultă că funcția f are derivată în x = 1 și $f'(1) = 2$, deci f este derivabilă și în x = 1.

➲ OBSERVAȚII

1. Aplicarea consecinței 1 fără verificarea tuturor ipotezelor poate duce la concluzii greșite.

☞ ***Exemplu***

• Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ și pentru oricare $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = 1$, iar $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 1$.

Concluzia că $f'(0) = 1$ este falsă.

În acest caz nu se poate aplica consecința 1 deoarece f nu este continuă în x = 0.

Problema derivatei în punctul x = 0 se face pornind de la definiție și se obține:

$$f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{x+1-1}{x} = 1;$$

$$f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{x+2-1}{x} = \infty.$$

Funcția f nu are derivată în x = 0.

2. Consecința 1 a teoremei lui Lagrange dă o condiție suficientă pentru existența derivatei unei funcții într-un punct (f să fie continuă în punct şi să existe limita derivatei în punct). Condiția nu este însă şi necesară.

☞ ***Exemplu***

• Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2\cdot\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. Funcția f este derivabilă în x = 0, deoarece: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\cos\frac{1}{x}=0$. Dar $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)$ nu există.

3. Din demonstrația consecinței se obține: dacă f este continuă la stânga în x_0 şi există $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}f'(x)=\ell$, atunci există $f'_s(x_0)$ şi $f'_s(x_0)=\ell$. În mod similar se obține $f'_d(x_0)$.

> ▣ **CONSECINȚA 2 (Caracterizarea funcțiilor constante)**
> Fie $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe [a, b]. Atunci f este constantă dacă şi numai dacă $f'=0$.

Demonstrație

Dacă f este constantă pe [a, b], atunci se ştie că $f'=0$.

Reciproc, fie $f'(x)=0,\ \forall\ x\in[a, b]$. Aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalul [a, x], $x\in(a, b]$. Rezultă că există $c\in(a, x)$ astfel încât $f(x)-f(a)=$ $=(x-a)\cdot f'(c)=0$, de unde se obține $f(x)=f(a),\ \forall\ x\in[a, b]$.

Aşadar f este constantă pe intervalul [a, b].

> ▣ **CONSECINȚA 3**
> Fie $f, g: I\to\mathbb{R}$, funcții derivabile pe intervalul I, astfel încât $f'(x)=g'(x)$, $\forall\ x\in I$.
> Atunci există $c\in\mathbb{R}$, astfel încât $f-g=c$. (Funcțiile f şi g diferă printr-o constantă.)

Demonstrație

Fie $h: I\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-g(x)$. Funcția h este derivabilă pe I şi $h'(x)=$ $=f'(x)-g'(x)=0,\ \forall\ x\in I$. Din consecința 2 se obține că $h(x)=c,\ \forall\ x\in I$, deci $f(x)-g(x)=c,\ \forall\ x\in I$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze derivabilitatea funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ în punctele specificate, folosind consecința teoremei lui Lagrange:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-x+15, & x\leq 0\\ x(x^2-4)+3(x+5), & x>0\end{cases}$

$x_0=0$;

b) $f(x) = x \cdot \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, $x_0 = \pm 1$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$, $x_0 \in \{0, 1\}$;

d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-3x+2}, & x \le 1 \\ -\sqrt{x^2+3x-4}, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$;

e) $f(x) = |x-1|\ln\left(x^2-2x+2\right)$, $x_0 = 1$.

E2. Să se determine parametrii reali, astfel încât funcția f să fie derivabilă:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2+(m-1)x+3, & x < 0 \\ e^{x^2}-5x+p, & x \ge 0 \end{cases};$$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b, & x > 0 \\ \sin x + 3\cos x, & x \le 0 \end{cases};$$

c) $f : [1, e^2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1+\ln^2 x, & x \in [1, e) \\ (2a-3)x+b^2, & x \in [e, e^2] \end{cases}.$$

E3. Să se arate că următoarele funcții sunt funcții constante:

a) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x + \arccos x$;

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$.

E4. Se dau funcțiile $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos x$, $g(x) = \arccos(-x)$. Să se arate că f și g diferă printr-o constantă și să se găsească aceasta.

E5. Se dau funcțiile $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right)$. Să se arate că $f - g$ este funcție constantă.

APROFUNDARE

A1. Să se demonstreze că funcția $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ este funcție constantă.

A2. Fie $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x|+1, & x < 0 \\ \ln x + 2, & x > 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} \ln(-x)+2, & x < 0 \\ \ln x + 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Să se arate că f și g au aceeași derivată, și totuși ele nu diferă printr-o constantă.

A3. Să se demonstreze că au loc egalitățile:

a) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x$, $x \in [0, +\infty)$;

b) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi, & x \in [1, \infty) \\ -\pi, & x \in (-\infty, -1] \end{cases}$.

A4. Să se determine intervalele pe care diferența $f - g$ este funcție constantă, dacă:

a) $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(3x - 4x^3)$, $g(x) = 3\arcsin x$;

b) $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ și $g(x) = 2\arcsin x$.

A5. Să se determine funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, care verifică relațiile:

a) $f'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $g'(x) + 2g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

A6. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, funcții continue pe $[a, b]$ și derivabile pe (a, b). Să se arate că dacă $g'(x) \ne 0$, $\forall x \in [a, b]$, atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

(Teorema lui A. Cauchy)

DEZVOLTARE

D1. **Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I. Să se arate că funcția derivată f' a funcției f are proprietatea lui Darboux.**
(Teorema lui Darboux)

D2. **Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I. Să se arate că dacă funcția $f' \neq 0$ pe I, atunci f' are semn constant pe I.**

D3. **Fie $f: I \to \mathbb{R}$. Să se arate că dacă f nu are proprietatea lui Darboux, atunci nu există nici o funcție $F: I \to \mathbb{R}$ derivabilă astfel încât $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in I$.**

D4. **Fie funcția**

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Să se arate că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, derivata f' este discontinuă şi are proprietatea lui Darboux.

8 REGULILE LUI L'HOSPITAL

François L'HOSPITAL (1661-1704) matematician francez

Contribuții în cadrul analizei matematice în calculul limitelor de funcții.

În operațiile cu limite de funcții s-a observat că deseori se ajunge la nedeterminări de forma $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

În aceste situații este necesar un studiu direct pentru a stabili dacă limita există sau nu există. Metodele care au fost folosite în astfel de situații nu au avut un caracter unitar, iar de multe ori, găsirea limitelor presupunea o experiență deosebită sau chiar inventivitate în organizarea calculului. În acest paragraf va fi prezentată o metodă mai simplă şi unitară care, cu ajutorul derivatelor, permite rezolvarea cazurilor de nedeterminare $\boxed{\dfrac{0}{0}}$ şi $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$ într-un număr destul de mare de situații. Celelalte cazuri de nedeterminare se pot reduce cu uşurință la cele două cazuri menționate anterior.

Metoda poartă numele de **regula lui l'Hospital** după numele matematicianului francez François l'Hospital (1661-1704) care a publicat-o în anul 1696.

▣ **TEOREMA 11 (Regula lui l'Hospital pentru cazul $\dfrac{0}{0}$)**

Fie funcțiile $f, g: I \to \mathbb{R}$, I interval şi x_0 un punct de acumulare al acestuia.
Dacă: **a)** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$; **b)** f şi g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$;

c) $g'(x) \neq 0$ pentru $\forall\, x \in I \setminus \{x_0\}$; **d)** există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$,

atunci funcția $\dfrac{f}{g}$ are limită în x_0 şi $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\text{tg}x}$.

Soluție

Fie $f(x)=e^{2x}-1,\ g(x)=\text{tg}\,x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ şi $x_0=0$.

Avem $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$, deci limita dată este în cazul $\frac{0}{0}$.

Funcțiile f şi g sunt derivabile pe intervalul $I=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ şi

$g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\neq 0,\ \forall\ x\in I.$

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}2\cdot e^{2x}\cdot\cos^2 x=2,$ aplicând regula lui l'Hospital rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=2$.

> ▣ **TEOREMA 12 (Regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$)**
>
> Fie funcțiile f, g : $I\to\mathbb{R}$, $I\subset\mathbb{R}$ interval şi x_0 un punct de acumulare al acestuia.
>
> Dacă: **a)** $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$;
>
> **b)** f şi g sunt derivabile pe $I\setminus\{x_0\}$;
>
> **c)** $g'(x)\neq 0$, pentru $x\in I\setminus\{x_0\}$;
>
> **d)** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ există în $\overline{\mathbb{R}}$,
>
> atunci funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 şi $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$.

Soluție

Fie $f(x)=\ln x,\ g(x)=x,\ x\in(0,\infty)$. Avem $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to\infty}x=+\infty$. Funcțiile f şi g sunt derivabile pe $(0,\infty)$, iar $g'(x)=1\neq 0,\ \forall\ x\in(0,\infty)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, cu regula l'Hospital se obține $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă funcțiile f şi g au derivate de ordin superior şi funcțiile derivate ale acestora satisfac condițiile teoremei lui l'Hospital, atunci se poate aplica repetat regula lui l'Hospital pentru $\frac{f'}{g'}, \frac{f''}{g''}$ până la îndepărtarea nedeterminării.

☞ ***Exemplu***

• Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$.

Soluție

Funcțiile $f(x) = e^{2x}$ şi $g(x) = x^2$ sunt derivabile de orice ordin $n \in \mathbb{N}^*$.

Cu regula lui l'Hospital se obține succesiv:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 \cdot e^{2x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4e^{2x}}{2} = +\infty.$$

2. Regula lui l'Hospital poate fi folosită şi pentru calculul unor limite de şiruri.

☞ ***Exemplu***

• Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n}$.

Soluție

Considerăm funcțiile $f(x) = \ln^2 x$, $g(x) = x$, $x \in (0, \infty)$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Din definiția cu şiruri a limitei unei funcții, pentru $x_n = n$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Alte cazuri de nedeterminare

Fie $f, g: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, interval şi x_0 punct de acumulare al acestuia.

Cazurile de nedeterminare $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ pot fi aduse la unul din cazurile $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Cazul $0 \cdot \infty$

Fie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$. Putem scrie $f \cdot g = f : \left(\frac{1}{g}\right)$, dacă $g(x) \neq 0$ sau $f \cdot g = g : \left(\frac{1}{f}\right)$, dacă $f(x) \neq 0$, $x \in I \setminus \{x_0\}$ şi se obține cazul $\frac{0}{0}$ sau cazul $\frac{\infty}{\infty}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x$.

Soluție

Avem succesiv: $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}} = 0.$

Cazul $\infty - \infty$

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)$ este în cazul $\infty - \infty$, folosind scrierea:

$f(x)-g(x) = \left(\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}\right):\left(\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}\right)$, se obține cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

Soluție

Avem cazul $\infty - \infty$. Acesta se transformă în cazul $\dfrac{0}{0}$ astfel:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

Cazurile 0^0; ∞^0; 1^∞

În aceste cazuri folosim relația $f^g = e^{g\cdot\ln f}$ şi se obține unul dintre cazurile de nedeterminare anterioare.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze: **a)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$; **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1-x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Soluție

a) Avem cazul 0^0. Rezultă succesiv: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(e^{x\cdot\ln x}\right) = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x}$.

Pentru $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$ suntem în cazul $0\cdot\infty$.

Se obține: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x\cdot\ln x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln x}{\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(-x) = 0.$

Aşadar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = e^0 = 1.$

b) Avem cazul 1^∞. Rezultă că $(1-x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\frac{\ln(1-x)}{\sin x}}$, iar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{(1-x)\cdot\cos x} = -1$. Aşadar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1-x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-1}{x^9-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-32}{x^4-16}$;

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-4x^2+2x+7}{x^4+x^3-2x-2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$; e) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{\sqrt{4+4x+x^2}-5}{x^2-49}$;

f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{5x-7}-2}{\sqrt{x^2-2x-2}-1}$; g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-2}}{x^2-1}$;

h) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt[3]{x+24}}{\sqrt[4]{x+13}-2}$; i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^3-x^2}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x\cdot \operatorname{tg}3x}$;

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{\cos 3x-1}$; l) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\sin\frac{x}{2}-1}{1-2\cos x}$;

m) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{x^2-1}-1}{x^2+3x-4}$; n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\sin x}-e^x}{x^2+x}$;

o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

E2. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+\ln x}{5\ln x+x-4x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{e^{x^2+x+1}}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x)}{\ln(e^x-x)}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+1}-\operatorname{tg}\sqrt{x+1}}{\operatorname{tg}(x^2-1)}$;

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$; g) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 4x)}$.

E3. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\sin x\cdot\ln x)$; b) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}$;

c) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x-2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}x$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sin x\cdot\ln(\sin x)$;

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}e^{-\frac{1}{x}}\cdot\ln x$; g) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(x+1)\cdot e^{\frac{1}{x+1}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x$.

E4. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x+1-\ln\left(x^2+1\right)\right]$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{e^{x-1}-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

E5. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x-1)^{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(3^{x+1}-3)^{\sin x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(1-2\sin x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)^{x-2}$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\ln(1+x)\right)^x$.

E6. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2x+1)^{\frac{1}{2x}}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x+2)^{\frac{x}{2x^2+1}}$;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)^{x-1}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{4x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$;

f) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\arccos x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+\sin x}{x+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

E7. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+2}\right)^{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to3}(4-x)^{\frac{1}{x-3}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+4}\right)^{2x+3}$;

d) $\lim\limits_{x\to2\pi}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\sin x}{1+\sin 2x}\right)^{\frac{2}{x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\right]^{x}$.

E8. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, dacă:

a) $a_n=\sqrt[n]{\cos\frac{n\pi}{2n+1}}$;

b) $a_n=\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n^2\right)^{n^2}$.

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^n-\sin^n x}{x^{n+2}}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-2x^2-\cos x}{x^4}$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos^2 2x\cdot\ldots\cdot\cos^n nx}{x^2}$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ 1. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\sqrt{|4-x^2|}}{1+x^2}$. Dacă s este suma pătratelor punctelor critice ale funcției f, atunci:

a) $s=0$; b) $s=9$; c) $s=3$; d) $s=4$.

❍ 2. Se dă funcția $f:[1,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3+ax+b, & x\le2\\ x^2+bx+c, & x>2\end{cases}$ căreia i se poate aplica teorema lui Rolle.

Dacă $\alpha = a + b + c$ şi β este punctul intermediar rezultat din teorema lui Rolle, atunci:

a) $\alpha = +26;\ \beta \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; **b)** $\alpha = +26;\ \beta = \frac{10}{3}$; **c)** $\alpha = -26;\ \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; **d)** $\alpha + \beta = 1$.

❍ **3.** **Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+2}$; $g(x) = \operatorname{arctg}(x+1)$ şi $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$. Atunci:**

a) $h(x) = -\frac{\pi}{4}$; **b)** $h(x) = 0$; **c)** $h(x) = \frac{\pi}{4}$; **d)** h nu e funcție constată.

❍ **4.** **Ecuația polinomială $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 8 = 0$ are n soluții reale pozitive. Atunci:**

a) $n = 1$; **b)** $n = 2$; **c)** $n = 3$; **d)** $n = 4$.

❍ **5.** **Fie $l_1 = \lim\limits_{x\to 0}(1 - x + \sin x)^{\frac{1}{x^3}}$ şi $l_2 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^8 - \sin^8 x}{x^{10}}$. Dacă $L = \ln l_1 + l_2$, atunci:**

a) $L = \sqrt[6]{e} + \frac{1}{6}$; **b)** $L = 1$; **c)** $L = \frac{7}{6}$; **d)** L nu există. (Învățământ tehnic, Buc., 1986)

Testul 2

❍ **1.** **Fie funcția polinomială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - ax^2 + bx - c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Funcția admite pe $x = 1$ ca punct de maxim, şi pe $x = 2$ ca punct de minim, iar maximul lui f este egal cu 6. Dacă $\alpha = 2a - b - c$, atunci:**

a) $\alpha = 5$; **b)** $\alpha = 7$; **c)** $\alpha = 12$; **d)** $\alpha = 9$.

❍ **2.** **Valorile lui $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care ecuația $mx^3 + 12x^2 + 9x - 4 = 0$ are toate soluțiile reale, sunt în intervalul:**

a) $\left(-\infty, \frac{13}{4}\right)$; **b)** $(-28, 0)$; **c)** $\left[-28, \frac{13}{4}\right] \setminus \{0\}$; **d)** $\mathbb{R}$.

❍ **3.** **Se dă funcția $f, g : \left[-1, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ae^{x^2+x}, & x \le 0 \\ (a^2 - 2)\sin x + b\cos x, & x > 0 \end{cases}$ şi $a \in (0, +\infty)$, care satisface condițiile teoremei lui Lagrange. Suma absciselor punctelor de pe graficul funcției în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda care uneşte extremitățile graficului funcției f este:**

a) $s = \frac{\pi}{4}$; **b)** $s \in \varnothing$; **c)** $s = \frac{\pi - 2}{4}$; **d)** $s = -\frac{1}{2}$.

❍ **4.** **Fie $f, g : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\arcsin x$, $g(x) = -\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ şi $h = f - g$. Dacă $h\left(\frac{1}{4}\right) = c$, atunci:**

a) $c = \frac{\pi}{4}$; **b)** $c = 1$; **c)** $c = \frac{\pi}{3}$; **d)** $s = \frac{\pi}{2}$.

❍ 5. **Fie $l_1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \sin x - x}{\sin(\sin x)}$ şi $l_2 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - \ln^2(1-x)}{x^3}$. Dacă $L = l_1 - l_2$, atunci:**

a) $L = 1$; **b) $L = e - 1$;** **c) $L = e$;** **d) $L = e - 2$.**

9 ROLUL DERIVATEI ÎNTÂI ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR

9.1. DETERMINAREA INTERVALELOR DE MONOTONIE

O aplicație utilă a derivatei unei funcții o constituie determinarea intervalelor de monotonie pentru o funcție dată.

> ▣ **TEOREMA 13**
> Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I. Atunci:
> **a)** funcția f este monoton crescătoare pe intervalul I dacă şi numai dacă $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$;
> **b)** funcția f este monoton descrescătoare pe intervalul I dacă şi numai dacă $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$.

<u>*Demonstrație*</u>

a) „⇒“ Presupunem că f este monoton crescătoare pe I. Atunci pentru oricare $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, avem $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Rezultă că $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, deci $f'(x_0) \geq 0, \forall x_0 \in I$.

„⇐“ Să presupunem că $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$ şi fie $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul închis $[x_1, x_2]$ rezultă că există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c)$. Deoarece $c \in (x_1, x_2)$, rezultă că $f'(c) \geq 0$ şi cum $x_2 - x_1 > 0$, se obține că $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, ceea ce conduce la faptul că funcția f este monoton crescătoare pe intervalul I.

Cealaltă afirmație a teoremei se demonstrează analog sau se consideră funcția monoton crescătoare $g = -f$. ■

➲ <u>OBSERVAȚII ȘI PRECIZĂRI</u>

1. Dacă funcția f este derivabilă pe intervalul I şi f' este strict pozitivă (respectiv strict negativă) pe I, atunci funcția f este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe I.
2. Dacă f este strict crescătoare pe intervalul I, nu rezultă în mod necesar că $f'(x) > 0, \forall x \in I$.

☞ ***Exemplu***

• Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^5$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, dar $f'(x) = 5x^4$ se anulează în $x = 0$.

3. Dacă f este derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$ și funcția f' este pozitivă sau negativă pe $I \setminus \{x_0\}$, se poate întâmpla ca f să nu fie monotonă pe I.

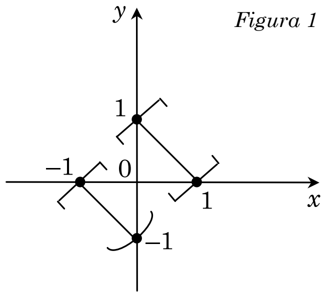


Figura 1

☞ ***Exemplu***

• $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -x-1, & x \in [-1,\ 0) \\ -x+1, & x \in [0,\ 1] \end{cases}$.

Din lectura grafică, figura 1, concluzia se impune.

Pentru a indica monotonia funcției f pe intervalul I, cu ajutorul semnului derivatei se utilizează un tabel de monotonie de tipul:

x	I
$f'(x)$	+ + + + + +
$f(x)$	↗ ↗

(1)

x	I
$f'(x)$	– – – – – –
$f(x)$	↘ ↘

(2)

❑ REȚINEM!

Pentru determinarea intervalelor de monotonie ale unei funcții $f : D \to \mathbb{R}$ se procedează astfel:

a) Se calculează derivata f' a funcției pe domeniul de derivabilitate $D_{f'} \subset D$.

b) Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$, $x \in D_{f'}$.

c) Se determină semnul funcției f' pe intervalele pe care nu se anulează. Pentru aceasta se descompune domeniul de definiție D în intervale disjuncte, astfel încât pe nici unul dintre acestea funcția f' nu se anulează. Punctele care delimitează intervalele sunt punctele critice, punctele în care funcția nu este derivabilă sau extremitățile intervalelor în cazul funcțiilor definite pe reuniuni de intervale.
Pentru determinarea semnului pe un interval se poate folosi proprietatea funcțiilor continue de a păstra semn constant pe intervalul pe care nu se anulează.

d) Se stabilesc intervalele de monotonie în funcție de semnul derivatei.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se determine intervalele de monotonie pentru funcțiile:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$;

b) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2\ln x$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Calculul derivatei: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvarea ecuației $f'(x) = 0$: $6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -2$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $f(-2) = 19$; $f(1) = 8$

Se determină semnul derivatei pe tabelul următor:

x	$-\infty$			-2			1				$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	0	–	–	0	+	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		19	$\searrow$		-8	$\nearrow$			$+\infty$

Aşadar, pe intervalele $(-\infty, -2]$ şi $[1, \infty)$, funcția f este strict crescătoare, iar pe $[-2, 1]$, funcția f este strict descrescătoare.

b) Funcția este derivabilă pe $(0, +\infty)$ şi $f'(x) = 2x - \frac{2}{x}$, $x > 0$. Ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x_1 = 1 \in (0, +\infty)$.

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $f(1) = 1$.

Tabelul de monotonie a funcției f este:

x	0				1			$+\infty$
$f'(x)$	–	–	–		0	+	+	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			1	$\nearrow$		$+\infty$

În concluzie, funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, 1]$ şi strict crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$.

c) Funcția este periodică, cu perioada principală $T = 2\pi$.

Se recomandă efectuarea studiului doar pe un interval de lungime egală cu perioada principală, apoi rezultatele se extind la tot domeniul de definiție (adăugând multiplu de 2π la capetele intervalelor de monotonie).

Efectuăm studiul pe intervalul $[0, 2\pi]$.

$f'(x) = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$. Soluțiile din $[0, 2\pi]$ sunt $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = \frac{4\pi}{3}$.

Tabelul de monotonie:

x	0		$2\pi/3$		$4\pi/3$		2π
$f'(x)$	+ + + + +		0	– – – – – – – – – – –	0	+ + + + + + + +	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	

În concluzie, f este strict crescătoare pe intervalele de forma $[0 + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi]$ şi $[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ şi strict descrescătoare pe intervalele de forma $[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

☒ **2.** Să se determine parametrul real m, astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 3x + m)e^{2x}$ să fie monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$.

<u>*Soluție*</u>

Domeniul de definiție este interval şi funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$. Este suficient să punem condiția $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Obținem succesiv: $(2x^2 - 4x + 2m - 3)e^{2x} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2m - 3 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta = 16 - 8(2m - 3) \leq 0$ de unde se obține $m \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

9.2. DETERMINAREA PUNCTELOR DE EXTREM

Până la acest moment, determinarea punctelor de extrem se poate face pentru o clasă destul de restrânsă de funcții numerice.

Folosind semnul derivatei întâi vom putea determina punctele de extrem pentru o clasă extinsă de funcții numerice.

☞ <u>***Exemple***</u>

1. Să considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ x^2e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, deoarece $f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{-2x}{x} = -2$; $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x^2e^{-x}}{x} = 0$. Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ (2x - x^2)e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$.

Tabelul de monotonie a funcției este:

x	$-\infty$			0			2			$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-2 \mid 0$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		0	$\nearrow$		$4e^{-2}$		$\searrow$	0

Din tabelul de monotonie a funcției f, cu ajutorul definiției punctului de extrem se observă că:

• punctul x = 0 este punct de minim al funcției. Derivata f' este negativă în stânga punctului x = 0 şi pozitivă în dreapta acestui punct.

• punctul x = 2 este punct de maxim al funcției. Derivata f' este pozitivă în stânga punctului x = 2 şi negativă în dreapta acestuia.

❑ REȚINEM!

Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 punct de continuitate din interiorul lui D şi $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ derivata funcției.

a) Dacă pe o vecinătate a punctului x_0, în stânga lui x_0 derivata f' este negativă, iar în dreapta lui x_0 derivata f' este pozitivă, punctul x_0 este **punct de minim** al funcției f.

b) Dacă pe o vecinătate a punctului x_0, în stânga lui x_0 derivata f' este pozitivă, iar în dreapta lui x_0 derivata f' este negativă, punctul x_0 este **punct de maxim** al funcției f.

2. Să considerăm funcția $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Avem: $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$, $\forall\, x \in (-2, 2)$. Tabelul de monotonie este:

x	-2				0				2
$f'(x)$	$\vert$	+	+	+	0	–	–	–	$\vert$
$f(x)$	0		$\nearrow$		2		$\searrow$		0

Din tabelul de monotonie a funcției f, folosind şi caracterizarea punctelor de extrem ale unei funcții se observă că:

• punctul $x = 0$ este punct de maxim al funcției;

• punctul $x = -2$ este extremitatea stângă a unui interval, nu e extremitatea dreaptă a nici unui interval din domeniul de definiție al funcției f şi este punct de minim al funcției.

În dreapta punctului $x = -2$ derivata f' este pozitivă.

• punctul $x = 2$ este extremitatea dreaptă a unui interval; nu e extremitatea stângă pentru nici un interval din domeniul de definiție al funcției f şi este punct de minim al funcției.

În stânga punctului $x = 2$ derivata f' este negativă.

❑ REȚINEM!

a) Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ un punct de continuitate al funcției f, x_0 este extremitatea stângă a unui interval $I \subset D$ pe care f' nu se anulează şi x_0 nu e extremitatea dreaptă a nici unui interval inclus în D.

- Dacă $f' > 0$ pe I, atunci x_0 este punct de minim.
- Dacă $f' < 0$ pe I, atunci x_0 este punct de maxim.

b) Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ punct de continuitate al funcției f, x_0 este extremitatea dreaptă a unui interval $I \subset D$ pe care f' nu se anulează şi x_0 nu e extremitatea stângă a nici unui interval inclus în D.

- Dacă $f' > 0$ pe I, atunci x_0 este punct de maxim.
- Dacă $f' < 0$ pe I, atunci x_0 este punct de minim.

REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE OPTIMIZARE

Numeroase probleme din domeniul ştiințific (matematică, fizică, astronomie...) precum şi din activitatea practică (construcții, transporturi, economie...) operează cu mărimi variabile pentru care este util de cunoscut anumite valori de maxim sau de minim (valori optime) în condiții impuse.

Exemplu: maximul sau minimul unei lungimi, unei arii, unui volum, rezultantei unor forțe etc.

În determinarea acestor valori optime se poate folosi derivata întâi a unei funcții numerice asociată fenomenului în cauză.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Dintr-un carton dreptunghiular cu dimensiunile de 77 cm şi 32 cm se va confecționa o cutie fără capac. Cât este latura pătratelor decupate de la colțurile cartonului astfel încât să se obțină o cutie cu volum maxim?

<u>*Soluție*</u>

Fie x lungimea laturii unui pătrat.
Dimensiunile cutiei ce se poate forma sunt: $x,\ 77-2x,\ 32-2x$, (figura 1).
Funcția care modelează volumul cutiei este:
$V:(0,16)\to\mathbb{R},\ V(x)=x(77-2x)(32-2x)$.

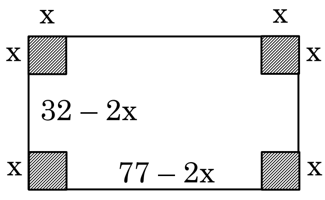


Figura 1

Avem $V'(x)=4\left(3x^2-109x+616\right)$ şi se obține următorul tabel de variație al funcției V:

x	0				7				16
V'(x)	+	+	+		0	–	–	–	
V(x)	|	↗			7938 max		↘		|

În concluzie, cutia va avea volum maxim pentru $x=7$.

☒ **2.** O ambarcațiune cu lungimea de 56 m navighează pe o rețea rectangulară de canale cu lățimea constantă de 20 m.

a) Poate această ambarcațiune să intre pe un canal lateral perpendicular pe direcția lui de mers?

b) Care este lungimea maximă a unei ambarcațiuni pentru a putea face această manevră?

(Se neglijează lățimea ambarcațiunii)

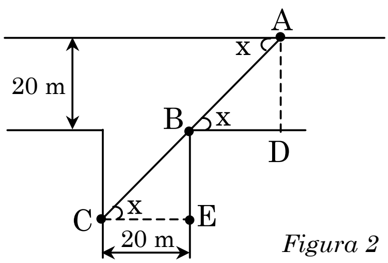


Figura 2

<u>*Soluție*</u>

a) Considerând poziția vasului pe segmentul $[AC]$ în figura 2 unde $x=45°$, se obține $AC=2AB=2\cdot 20\sqrt{2}$ m, $AC>56$ m. Aşadar, ambarcațiunea poate efectua manevra.

b) Fie l lungimea ambarcațiunii. Vom exprima l în funcție de măsura x a unghiului făcut de ambarcațiune când se sprijină pe malurile celor două canale ca în figura 2.

Din triunghiurile dreptunghice ABD şi BCE se obține:

$$AB = \frac{20}{\sin x},\ BC = \frac{20}{\cos x},\ l(x) = \frac{20}{\sin x} + \frac{20}{\cos x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Maximul lungimii ambarcațiunii este dat de maximul funcției l. Se obține $l_{max} = 40\sqrt{2}$ m.

◢ **Temă de proiect**

Aplicații ale derivatelor în problemele practice de maxim şi minim.

9.3. DEMONSTRAREA UNOR INEGALITĂȚI

Rezultatele teoretice asupra monotoniei şi punctelor de extrem ale unei funcții permit obținerea unor inegalități care, cu ajutorul metodelor elementare ar fi greu de demonstrat.

Să considerăm funcția $f : I \to \mathbb{R}$, I interval de numere reale.

• Dacă m este minimul global al funcției pe intervalul I şi $m \geq 0$, atunci $f(x) \geq 0,\ \forall\ x \in I$.

• Dacă M este maximul global al funcției f pe intervalul I şi $M \leq 0$, atunci $f(x) \leq 0,\ \forall\ x \in I$.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se demonstreze inegalitățile:

a) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 \leq 0,\ \forall\ x \in [-1, 3]$; **b)** $\ln\frac{x+1}{x} > \frac{2}{2x+1},\ \forall\ x > 0$.

<u>*Soluție*</u>

a) Definim funcția $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$, derivabilă cu derivata $f'(x) = 3(x^2 - 2x - 3),\ \forall\ x \in [-1, 3]$.

Soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sunt $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Tabelul de monotonie a funcției este:

x	-1		3
$f'(x)$	0	$- - - - - - -$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	-32

Se observă că funcția are maximul global $M = f(-1) = 0$, ceea ce impune inegalitatea $f(x) \leq 0,\ \forall\ x \in [-1, 3]$ şi astfel: $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 \leq 0,\ \forall\ x \in [-1, 3]$.

b) Considerăm funcția $f : (0, +\infty)$, $f(x) = \ln\frac{x+1}{x} - \frac{2}{2x+1}$ a cărei derivată este $f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)(2x+1)^2},\ \forall\ x > 0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Tabelul de monotonie a funcției este:

x	0		$+\infty$
f '(x)	|	– – – – – – – – – – – –	
f(x)	$+\infty$	↘	0

Din tabelul de monotonie se obține că marginea inferioară a mulțimii valorilor funcției f este m = 0, ceea ce implică: $f(x) > 0,\ \forall\ x \in (0, \infty)$ şi astfel $\ln\frac{x+1}{x} - \frac{2}{2x+1} > 0,\ \forall\ x > 0$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcției f pe domeniul maxim de definiție:**

a) $f(x) = x^3 - 6x$; **b)** $f(x) = -x^4 + 8x^2$;

c) $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$;

d) $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$;

e) $f(x) = 2x^3e^{-x}$;

f) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$;

g) $f(x) = \sin x + \cos x$;

h) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)$;

i) $f(x) = \ln x - 2\operatorname{arctg} x$;

j) $f(x) = x + \cos 2x$.

E2. **Să se determine punctele de extrem ale funcției f pe domeniul maxim de definiție:**

a) $f(x) = x^2(2 + 2x - x^2)$;

b) $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 7x - 1$;

c) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$;

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$;

e) $f(x) = x(\ln x - 1)$;

f) $f(x) = 2x + \operatorname{ctg} x$;

g) $f(x) = x^2 e^{-2x+1}$;

h) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

E3. **Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + 3x^2 + (a - 2)x + 1$, să aibă puncte de extrem.**

E4. **Să se demonstreze inegalitățile:**

a) $e^x \geq x + 1,\ x \in \mathbb{R}$;

b) $x^2 - 2\ln x \geq 1,\ x > 0$;

c) $\operatorname{arctg} x \leq x,\ x \geq 0$.

APROFUNDARE

A1. **Să se studieze monotonia funcției $f : D \to \mathbb{R}$ definite prin:**

a) $f(x) = (x - 1)\sqrt{1 - x^2}$;

b) $f(x) = x\sqrt{\frac{2 - x}{x}}$; **c)** $f(x) = x^3 \ln x$;

d) $f(x) = \cos x - \cos^3 x$;

e) $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 1} - \operatorname{arctg} x$;

f) $f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{4x^2 + 3}}$;

g) $f(x) = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$;

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1 - x^2}$;

i) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$.

A2. **Să se determine punctele de extrem ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$ definite prin:**

a) $f(x) = \sqrt{2x(4 - x)}$; **b)** $f(x) = \left|\frac{x - 2}{x + 3}\right|$;

c) $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$;

d) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;

e) $f(x) = \ln(x + 1) + \operatorname{arctg} x$;

f) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^4}$;

g) $f(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x + x\cos x$;

h) $f(x) = \frac{\ln x + x}{\ln x - x}$; i) $f(x) = (2x^2 - 3x)e^x$;

j) $f(x) = x^x$; k) $f(x) = |3x + 2|e^x$.

A3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 5mx^2 + 6x + 5$ să fie monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$.

A4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - m)\,e^{2x}$ să fie monotonă pe $\mathbb{R}$.

A5. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + ax + a)\,e^{ax}$. Există valori ale parametrului întreg a pentru care f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$?

A6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m - 1) \cdot \operatorname{arctg} 2x - 3x$.
Să se determine valorile lui m pentru care f nu este monotonă pe $\mathbb{R}$.

A7. Câte puncte de extrem are funcția:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{\frac{|x|}{x^2+1}}$?

A8. Fie $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + ax^2 - \ln(1 + x)$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$, pentru care f are două puncte de extrem.

A9. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f: D \to \mathbb{R}$ are puncte de extrem:
a) $f(x) = [x^2 - (m - 1)x + 3m - 2]e^{-x}$;
b) $f(x) = [x^3 - (2 + m)x^2]\;e^{\frac{2}{x}}$.

A10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{x^2 - 3ax + 4}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$
Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = 1$ să fie punct de extrem al funcției.

A11. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax(x - b)(x - c)$.
Să se determine constantele a, b, c, astfel încât $x = -1$ este un punct de minim, $x = 1$ este un punct de maxim, iar maximul funcției este 4.

A12. Să se demonstreze inegalitățile:
a) $(x + 1)\ln(x + 1) \geq \operatorname{arctg} x$, $x \in [0, \infty)$;
b) $\sin x \leq x$, $\forall\, x \geq 0$;
c) $\ln(x + 1) \leq x$, $\forall\, x \in (-1, \infty)$;
d) $\arcsin x \geq x$, $\forall\, x \in [0, 1]$;
e) $e^x \geq x^e$, $\forall\, x \in [0, \infty)$;
f) $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, $\forall\, x \geq 0$.

A13. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$.
Să se arate că f nu este monotonă pe nici o vecinătate a originii.

A14. Dintre toate dreptunghiurile cu același perimetru să se determine cel cu arie maximă.

A15. Dintre toate dreptunghiurile care au aceeași arie să se determine cel de perimetru minim.

A16. Două forțe $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ au mărimile variabile cu suma de 20N, iar suporturile lor determină un unghi cu măsura de 60°.
Să se determine mărimile celor două forțe pentru care rezultanta este minimă.

A17. Să se determine cilindrul care are volumul maxim înscris într-un con dat.

A18. Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris într-un cerc de rază R.

A19. Să se determine dreptunghiul de perimetru maxim înscris într-un cerc de rază R.

A20. **Un triunghi dreptunghic are suma catetelor egală cu a şi se roteşte în jurul unei catete.**
Să se determine valoarea maximă a volumului corpului generat prin rotirea triunghiului.

A21. **Un triunghi isoscel cu perimetrul constant P se roteşte în jurul bazei. Să se determine triunghiul care generează un corp de volum maxim.**

A22. **Să se determine paralelipipedul dreptunghic de volum maxim cu baza un pătrat, înscris într-o semisferă de rază r.**

10 ROLUL DERIVATEI A DOUA ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR

10.1. DETERMINAREA INTERVALELOR DE CONVEXITATE ȘI CONCAVITATE

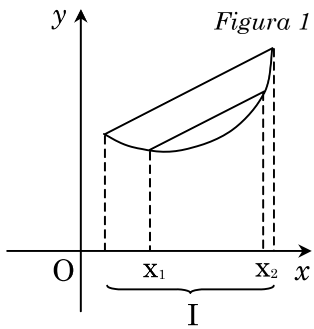


Figura 1

La clasa a X-a au fost introduse noțiunile de funcție convexă şi funcție concavă pe un interval. Reamintim aceste noțiuni.

a) Funcția $f : I \to \mathbb{R}$, I interval de numere reale, se numeşte **funcție convexă** pe intervalul I dacă pentru oricare $x_1, x_2 \in I$ şi oricare $t \in [0, 1]$ are loc inegalitatea:

$$f[(1-t)x_1 + t x_2] \le (1-t) f(x_1) + t f(x_2).$$

Semnificația geometrică a funcției convexe pe intervalul I este aceea că pe orice interval $[x_1, x_2] \subset I$ imaginea geometrică a graficului funcției se află sub coarda care uneşte punctele cu abscisele x_1, x_2, (figura 1).

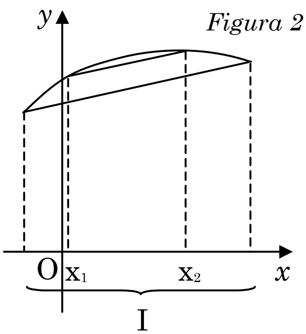


Figura 2

b) Funcția $f : I \to \mathbb{R}$, I interval de numere reale, se numeşte **funcție concavă** pe intervalul I dacă pentru oricare $x_1, x_2 \in I$ şi oricare $t \in [0, 1]$ are loc inegalitatea:

$$f[(1-t)x_1 + t x_2] \ge (1-t) f(x_1) + t f(x_2).$$

Din punct de vedere geometric, funcția f este concavă pe intervalul I dacă pe orice interval $[x_1, x_2] \subset I$ imaginea geometrică a graficului funcției se află deasupra coardei care uneşte punctele cu abscisele x_1, x_2, (figura 2).

În continuare vom da un criteriu practic de a stabili dacă o funcție (de două ori derivabilă) este convexă sau concavă pe un interval folosind semnul derivatei a doua a funcției.

▣ TEOREMA 14

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}, a < b$, o funcție care verifică condițiile:

a) f este continuă pe intervalul închis [a, b];

b) f este derivabilă de două ori pe intervalul deschis (a, b).

Atunci:

1) dacă $f''(x) \geq 0$, $\forall\ x \in (a, b)$, rezultă că funcția f este convexă pe intervalul închis [a, b];

2) dacă $f''(x) \leq 0$, $\forall\ x \in (a, b)$, rezultă că funcția f este concavă pe intervalul închis [a, b].

<u>*Demonstrație*</u>

1) Fie $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Pentru fiecare punct $x \in (x_1, x_2)$ se aplică teorema lui Lagrange funcției f pe intervalele $[x_1, x]$, $[x, x_2]$. Prin urmare există $c_1 \in (x_1, x)$, $c_2 \in (x, x_2)$, astfel încât $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1)$, $\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2)$.

Deoarece $c_1 < c_2$ şi f' este o funcție crescătoare pe intervalul (a, b) (aici intervine ipoteza $f''(x) \geq 0$ pe (a, b)) rezultă că $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, adică:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \qquad (1)$$

Din faptul că $x \in (x_1, x_2)$, rezultă că pentru orice $t \in (0, 1)$ avem $x = (1-t)x_1 + tx_2$.

Înlocuind pe x în relația (1) se obține $f(x) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ ceea ce înseamnă că f este funcție convexă pe intervalul [a, b].

Pentru demonstrarea punctului 2) se procedează analog sau se înlocuieşte f cu –f. ■

➲ OBSERVAȚII

1. În condițiile teoremei:

- dacă f este convexă pe I $\Rightarrow f''(x) \geq 0$, $\forall\ x \in I$;
- dacă f este concavă pe I $\Rightarrow f''(x) \leq 0$, $\forall\ x \in I$.

2. Semnul derivatei a doua a funcției permite determinarea intervalelor pe care funcția este convexă sau este concavă.

Modul practic de determinare a intervalelor de convexitate şi de concavitate ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$ este următorul:

a) Se calculează derivata a doua f'' pe mulțimea de existență $D_{f''} \subset D$.

b) Se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$ pe mulțimea $D_{f''}$.

c) Se descompune domeniul de definiție al funcției în intervale disjuncte pe care f" nu se anulează (prin intermediul zerourilor derivatei a doua şi eventual al punctelor în care funcția f nu este de două ori derivabilă).

d) Se determină semnul derivatei a doua pe fiecare interval obținut la c).

e) • Dacă $f'' > 0$ pe un interval $\Rightarrow$ f este convexă pe acel interval.

• Dacă $f'' < 0$ pe un interval $\Rightarrow$ f este concavă pe acel interval.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se determine intervalele de convexitate/concavitate pentru:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2$; **b)** $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$.

<u>Soluție</u>

a) Avem: $f'(x) = 6x^2 - 6x$, $x \in \mathbb{R}$; $f''(x) = 12x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

Ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x = \dfrac{1}{2}$. Tabelul pentru studiul convexității sau concavității funcției este următorul:

x	$-\infty$				1/2				$+\infty$
$f''(x)$	–	–	–	–	0 +		+	+	+
f(x)	$-\infty$	$\frown$			–1/2		$\smile$		$+\infty$
		(concavă)					(convexă)		

În concluzie, funcția f este concavă pe intervalul $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ şi este convexă pe intervalul $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

b) Avem: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{6}{(x-2)^3}$ şi $f''(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Tabelul pentru studiul convexității/concavității funcției f este următorul:

x	$-\infty$					2					$+\infty$
$f''(x)$	–	–	–	–	–	|	+	+	+	+	+
f(x)	$-\infty$		$\frown$			$-\infty$ | $+\infty$		$\smile$			$+\infty$

Concluzie: f este concavă pe $(-\infty, 2)$ şi este convexă pe $(2, +\infty)$.

10.2. DETERMINAREA PUNCTELOR DE INFLEXIUNE

În paragraful 2, capitolul III s-a stabilit că pentru o funcție $f : I \to \mathbb{R}$, punctul x_0 interior intervalului I este punct de inflexiune dacă:

– f este continuă în punctul x_0;

– f are derivată în punctul x_0 (finită sau infinită);

– imaginea geometrică a graficului funcției este convexă (concavă) de o parte a lui x_0 şi concavă (convexă) de cealaltă parte a lui x_0.

În continuare vom da un criteriu suficient pentru ca un punct x_0 să fie punct de inflexiune al unei funcții folosind semnul derivatei a doua.

▣ TEOREMA 15

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ şi x_0 un punct din interiorul intervalului I, astfel încât:

a) f este de două ori derivabilă într-o vecinătate V a lui x_0;

b) există punctele a, b ∈ V, astfel încât $x_0 \in (a, b)$;

c) $f''(x_0) = 0$;

d) $f''(x) < 0, \forall x \in (a, x_0)$ şi $f''(x) > 0, \forall x \in (x_0, b)$

sau invers $f''(x) > 0, \forall x \in (a, x_0)$ şi $f''(x) < 0, \forall x \in (x_0, b)$.

Atunci x_0 este punct de inflexiune al funcției f.

Demonstrația rezultă din definiția punctului de inflexiune şi din teorema de caracterizare a funcțiilor convexe, respectiv concave folosind semnul derivatei a doua (teorema 14).

➲ OBSERVAȚII

1. Condiția $f''(x_0) = 0$ nu implică totdeauna că x_0 este punct de inflexiune.

☞ ***Exemplu***

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ are derivata a doua $f''(x) = 12x^2$, $x \in \mathbb{R}$ care se anulează în $x_0 = 0$.

Se observă că $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Rezultă că $x_0 = 0$ nu este punct de inflexiune pentru funcția f.

2. Condiția ca f să fie continuă în x_0 este necesară.

☞ ***Exemplu***

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \le 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$. Funcția f nu e continuă în $x_0 = 0$, deci nu e derivabilă în $x_0 = 0$.

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & x > 0 \end{cases},\ f''(x) > 0, \forall x < 0 \text{ şi } f''(x) < 0, \forall x > 0.$$

Cu toate acestea punctul $x_0 = 0$ nu se consideră punct de inflexiune.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$, definite prin:

a) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 7x + 2$;
b) $f(x) = -2x^4 + 3x^3 + 21x^2 - 1$;
c) $f(x) = 3x^5 - 2x^4 - 18x^2 + x - 1$;
d) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$; e) $f(x) = \frac{(x+3)^2}{x+1}$;
f) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+4}$; g) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$;
h) $f(x) = x \ln(x+3)$;
i) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^x$;
j) $f(x) = \operatorname{arctg} x - x + 1$;
k) $f(x) = \sin x - \frac{1}{4}\sin 2x$;
l) $f(x) = \sqrt[3]{|x^2-1|}$.

E2. Să se determine punctele de inflexiune ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$, definite prin:

a) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 3x - 4$;
b) $f(x) = -x^4 + 5x^3 - 7x^2 - x$;
c) $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$; d) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x(x+2)}$;
e) $f(x) = \sqrt{x^2-x}$; f) $f(x) = x^3 \ln x$;
g) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$;
h) $f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}$ i) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-1}$;
j) $f(x) = e^x(x^2 - 3x - 2)$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate precum şi punctele de inflexiune ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$, definite prin:

a) $f(x) = x\left|\frac{2x}{x+2}\right|$;
b) $f(x) = (x^2 - 5x + 6)e^{|x|}$;
c) $f(x) = \left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|$; d) $f(x) = e^x - e^{4x}$;
e) $f(x) = |x| \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$;
f) $f(x) = \arcsin\frac{x-2}{x+2}$.

A2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \\ x + \frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$.

a) Este funcția f convexă pe $\mathbb{R}$?
b) Are puncte de inflexiune?

A3. Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a-x^3}}$, $a \in \mathbb{R}$.
Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât f să admită $x = -1$ punct de inflexiune.

A4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^n x$, $n \ge 3$.
Să se arate că f admite un singur punct de inflexiune $x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

A5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 90x^2 + ax + b$.
Dacă x_1, x_2, x_3 sunt puncte de inflexiune ale funcției f, atunci punctele $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $C(x_3, f(x_3))$ sunt coliniare.

A6. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, o funcție convexă.
Să se arate că pentru orice $x, y, z \in I$, are loc inegalitatea:
$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \le \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}.$$
Generalizare.

A7. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc relația:
$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

CAPITOLUL IV. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCŢIILOR

1 ETAPELE REPREZENTĂRII GRAFICE A FUNCȚIILOR

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală şi $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$ graficul funcției f.

O serie de proprietăți locale şi globale ale funcției f pot fi evidențiate şi valorificate mai uşor prin realizarea reprezentării geometrice a mulțimii G_f în planul raportat la un sistem ortogonal de axe de coordonate xOy.

Reprezentarea geometrică a mulțimii G_f se numeşte **curba reprezentativă** a funcției şi se notează $\mathscr{G}_f$.

Pentru reprezentarea grafică a funcțiilor elementare s-a folosit, în general, metoda coordonatelor şi unele proprietăți ale acestor funcții.

În cazul funcțiilor compuse se impune un studiu mai profund în vederea reprezentării grafice a acestora.

Pentru aceasta sunt necesare câteva etape:

1. Domeniul de definiție al funcției şi domeniul de studiu

Domeniul de definiție este dat în mod explicit în enunț sau dacă nu este specificat trebuie determinat ca fiind mulțimea de puncte pentru care au sens toate operațiile cu funcții ce apar în descrierea funcției date. Această mulțime reprezintă domeniul maxim de definiție.

• Dacă funcția este periodică, atunci este suficient ca funcția să fie studiată pe un interval de lungime egală cu perioada principală (dacă aceasta există).

• Dacă funcția este funcție pară sau funcție impară $\left(f(-x) = f(x)\right.$, respectiv $\left.f(-x) = -f(x), \forall\, x \in D\right)$, atunci este suficient studiul funcției pe $D \cap (0,+\infty)$. Axa Oy este axă de simetrie pentru graficul funcțiilor pare, iar $O(0, 0)$ este centru de simetrie pentru graficul funcțiilor impare.

2. Intersecțiile graficului cu axele de coordonate

a) Intersecția cu axa Ox, $(G_f \cap Ox)$. Punctele de intersecție cu axa Ox sunt punctele de coordonate $(a, 0)$, unde $a \in \mathbb{R}$ este soluție a ecuației $f(x) = 0$.

b) Intersecția cu axa Oy, $(G_f \cap Oy)$. Dacă $0 \in D$, punctul de intersecție cu axa Oy are coordonatele $(0, f(0))$.

3. Asimptotele funcției

• Dacă domeniul de definiție al funcției f are $+\infty$ sau $-\infty$ puncte de acumulare, se determină $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Dacă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, $a, b\in\mathbb{R}$, dreptele y = a, respectiv y = b sunt asimptote orizontale spre $+\infty$, respectiv spre $-\infty$.

• Asimptotele oblice sunt dreptele y = mx + n, unde $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ şi $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)$ dacă $m\in\mathbb{R}^*$ şi $n\in\mathbb{R}$.

• Asimptotele verticale sunt dreptele de ecuații x = a, $a\in\mathbb{R}$, unde $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, sau cel puțin o limită laterală $f(a-0)$, $f(a+0)$ este infinită.

4. Studiul funcției folosind prima derivată

În această etapă se determină:

a) domeniul de continuitate al funcției;

b) domeniul de derivabilitate al funcției. Se pun în evidență punctele în care funcția nu este derivabilă şi tipul acestor puncte: puncte unghiulare, de întoarcere, de inflexiune.

c) Se stabileşte semnul funcției derivate f'. Pentru aceasta se determină soluțiile ecuației $f'(x)=0$, intervalele pe care f' are semn constant şi semnul pe fiecare din aceste intervale. Se stabilesc intervalele de monotonie şi punctele de extrem local ale funcției.

5. Studiul funcției folosind a doua derivată

Se calculează f'' şi se determină domeniul de existență al acesteia. Se determină soluțiile ecuației $f''(x)=0$ şi se stabilesc intervalele de convexitate şi concavitate şi punctele de inflexiune.

6. Tabelul de variație al funcției

Rezultatele obținute în etapele anterioare sunt sistematizate într-un tabel (tablou) numit **tabelul de variație** al funcției cu aspectul de mai jos.

Pe prima linie se trece domeniul de definiție sau de studiu şi valorile remarcabile ale lui x: zerourile derivatei întâi şi a doua, zerourile funcției etc.

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	
$f''(x)$	

Pe a doua linie se stabileşte semnul primei derivate, iar pe a patra linie semnul derivatei a doua.

Pe linia a treia se trec: limitele funcției la capetele domeniului de definiție (de studiu), monotonia funcției, valorile funcției în punctele remarcabile etc.

7. Interpretarea tabelului de variație şi trasarea graficului funcției

În sistemul ortogonal de coordonate xOy se reprezintă asimptotele funcției, punctele de intersecție ale graficului cu axele, punctele de extrem şi punctele de inflexiune. Având în vedere monotonia şi forma graficului (concavă sau convexă) se unesc punctele remarcabile ale graficului printr-o curbă corespunzătoare.

Problemă rezolvată

☒ Să se traseze graficul funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$; **b)** $f(x) = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$; **d)** $f(x) = \sin x + \cos x - 1$.

<u>Soluție</u>

a) Domeniul de definiție este $D = \mathbb{R}$.

Intersecția cu axele de coordonate. Ecuația $2x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ are soluția reală $x_1 = -1$. Intersecția cu axa Ox este punctul $A(-1, 0)$, iar cu axa Oy este punctul $B(0, 5)$.

Funcția nu are asimptote fiind funcție polinomială.

Studiul cu prima derivată. Funcția este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = 6x^2 - 6x$. Soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sunt $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.

Tabelul de semn pentru prima derivată este:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + +	0	– –	0	+ + + + +	

Funcția este crescătoare pe intervalele $(-\infty, 0]$ şi $[1, +\infty)$ şi descrescătoare pe intervalul $[0, 1]$. Punctul x = 0 este punct de maxim, iar x = 1 este punct de minim.

Studiul folosind derivata a doua

Funcția este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f''(x) = 12x - 6$. Tabelul de semn al derivatei a doua este redat alături:

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f''(x)$		– – – – – –	0	+ + + + + +	

Funcția este concavă pe intervalul $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ şi convexă pe $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$, iar $x = \dfrac{1}{2}$ este punct de inflexiune.

Tabelul de variație a funcției

Rezultatele obținute anterior sunt cuprinse în tabelul:

x	$-\infty$		-1		0		$1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$	+ + +	+ + + +	+ + +	+ + + +	0	− − − −	− − − −	− − − −	0	+ + +	+ + +
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	M (5)	$\searrow$	$9/2$	$\searrow$	(3) m	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	− − −	− − − −	− − −	− − − −	− − −	− − − −	0 i	+ + + +	+ + +	+ + + +	+ +

Interpretând rezultatele din tabelul de variație obținem graficul din figura 1.

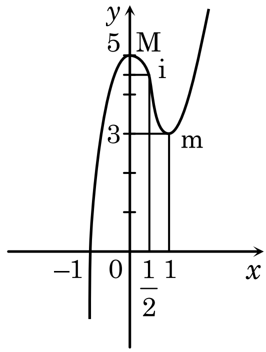


Figura 1

b) Domeniul de definiție este $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ care se scrie $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Graficul intersectează axele de coordonate numai în punctul $O(0, 0)$.

Asimptotele funcției

Avem: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, deci f nu are asimptote orizontale.

Pentru asimptotele oblice se calculează:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{1 - x^2} = -1 \text{ şi } n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) + x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{1 - x^2}\right) = 0.$$

Aşadar, dreapta $y = -x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ şi spre $-\infty$.

Calculăm $f(-1-0) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{x^3}{1 - x^2} = \frac{-1}{0_-} = +\infty$ şi $f(-1+0) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{x^3}{1 - x^2} = \frac{-1}{0_+} = -\infty.$

Rezultă că dreapta $x = -1$ este asimptotă verticală bilaterală.

Avem şi $f(1-0) = +\infty$, $f(1+0) = -\infty$, deci dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală bilaterală.

Studiul folosind derivata întâi şi a doua

Funcția este derivabilă pe D şi avem: $f'(x) = \dfrac{x^2(3 - x^2)}{(1 - x^2)^2}$.

Ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x \in \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, iar $f(0) = 0$, $f(-\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(\sqrt{3}) = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$.

Funcția este de două ori derivabilă pe D și $f''(x)=\dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^3}$. Ecuația $f''(x)=0$ are soluția x = 0.

Tabelul de variație:

x	$-\infty \quad -\sqrt{3} \quad -1$	0	$1 \quad \sqrt{3} \quad +\infty$
$f'(x)$	− − − − − 0 + + + + +	+ + + + + 0 + + + + +	+ + + + + 0 − − − − −
$f(x)$	$+\infty \searrow \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (m) $\nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (M) $\searrow -\infty$
$f''(x)$	+ + + + + + + + + + + +	− − − − 0 (i) + + + +	− − − − − − − − − − − −

Graficul este redat în figura 2.

➲ OBSERVAȚIE

Se observă că $f(-x)=-f(x)$, $\forall\ x\in D$, deci funcția f este impară. Graficul admite punctul $O(0,\,0)$ centru de simetrie, deci studiul se putea face numai pe mulțimea $[0,\,1)\cup(1,\,+\infty)$.

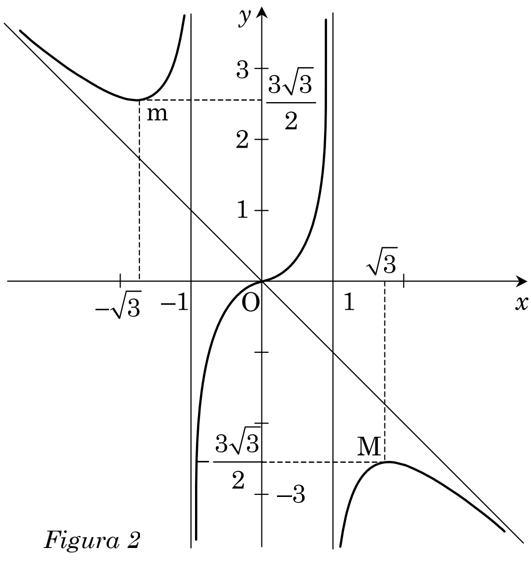


Figura 2

c) Domeniul de definiție este D = ℝ. Limitele la capetele domeniului sunt: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, deci funcția nu are asimptote orizontale. Intersecțiile cu axele de coordonate sunt punctele $O(0,\,0)$ și $A(-1,\,0)$. Funcția nu are asimptote verticale.

Avem: $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^3+x^2}{x^3}}=1$ și

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}=\frac{1}{3}.$$

Rezultă că dreapta $y=x+\dfrac{1}{3}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ și spre $-\infty$.

Studiul folosind prima derivată

Avem: $f'(x)=\dfrac{3x^2+2x}{3x\cdot\sqrt[3]{x(x+1)^2}}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,\,0\}$.

Studiul derivabilității în x = 0 şi x = 1 conduce la: $f'_s(0)=\dfrac{2}{0_{(-)}}=-\infty$, $f'_d(0)=\dfrac{2}{0_{(+)}}=+\infty$, $f'_s(-1)=\dfrac{1}{0_{(+)}}=+\infty$, $f'_d(-1)=+\infty$, deci f nu este derivabilă în $x=0$ şi x = –1. Punctul x = 0 este punct de întoarcere, iar punctul x = –1 este punct de inflexiune.

Tabelul de variație (fără derivata a doua):

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
f'(x)		+ + + + + +	$+\infty$ | $+\infty$	+ + + + + +	0	− − − − − −	$-\infty$ | $+\infty$	+ + + + + + +	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↗	M $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	↘	0 m	↗	$+\infty$

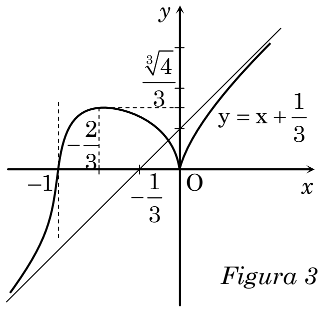


Figura 3

Graficul este redat în figura 3.

d) Funcția f este periodică de perioadă principală T = 2π. Domeniul de studiu este $D=[0,\,2\pi]$.

Intersecția cu axele de coordonate

Soluțiile ecuației $f(x)=0$ sunt $x\in\left\{0,\,\frac{\pi}{2},\,2\pi\right\}$.

Funcția este de două ori derivabilă pe D şi se obține: $f'(x)=\cos x-\sin x$, $f''(x)=-\sin x-\cos x$. Ecuațiile $f'(x)=0$ şi $f''(x)=0$ au soluțiile $x\in\left\{\frac{\pi}{4},\,\frac{5\pi}{4}\right\}$, respectiv $x\in\left\{\frac{3\pi}{4},\,\frac{7\pi}{4}\right\}$.

Tabelul de variație pe $D=[0,\,2\pi]$ este următorul:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
f'(x)		+ + + + +	0	− − − − −	− − −	− − − − −	− − −	− − − − −	0	+ + + + +	+ + +	+ + + + +	
f(x)	0	↗	M $(\sqrt{2}-1)$	↘	0	↘	-1	↘	$(-\sqrt{2}-1)$ m	↗	-1	↗	0
f''(x)		− − − − −	− − −	− − − − −	− − −	− − − − −	0 i	+ + + + +	+ + +	+ + + + +	0 i	− − − − −	
			$\frown$						$\smile$			$\frown$	

Graficul pe $D=[0,\ 2\pi]$ este în figura 4.

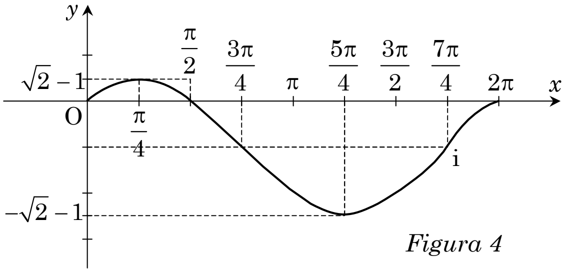


Figura 4

❷ REPREZENTAREA GRAFICĂ A CONICELOR

Conicele reprezintă secțiunile obținute prin intersecția unei suprafețe conice cu un plan.

În funcție de poziția planului, secțiunea obținută poate fi cerc, elipsă, hiperbolă sau parabolă.

În geometria plană conicele pot fi definite ca locuri geometrice.

CERCUL

Fie xOy un reper cartezian în plan, $A(a,\ b)$ un punct fix şi $r \in (0,\ +\infty)$ un număr real.

Cercul de centru $A(a,\ b)$ şi rază r este locul geometric al punctelor din plan situate la distanța r față de punctul A: $\mathscr{C}(A,\ r)=\{M(x,\ y)\in \mathscr{P} \mid AM=r\}$.

Cu ajutorul coordonatelor, relația AM = r se scrie sub forma $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$ sau $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, (1).

Relația (1) se numeşte **ecuația cercului sub formă de pătrate**.

Din relația (1) se obține $y=b\pm\sqrt{r^2-(x-a)^2}$, $x\in[a-r,\ a+r]$.

Pentru reprezentarea grafică a cercului este suficient să realizăm graficul funcției $f:[a-r,\ a+r]\to\mathbb{R},\ f(x)=b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}$, care reprezintă semicercul superior al cercului. Imaginea geometrică a cercului se va completa apoi având în vedere simetria cercului în raport cu dreapta y = b.

Funcția f este continuă pe $D=[a-r,\ a+r]$, iar $f'(x)=\dfrac{a-x}{\sqrt{r^2-(a-x)^2}}$,

$$f''(x)=\frac{-r^2}{\left(\sqrt{r^2-(a-x)^2}\right)^3},\ x\in(a-r,\ a+r).$$

Tabelul de variație este:

x	$a-r$		a		$a+r$
$f'(x)$	$+\infty$	$+ + + + +$	0	$- - - - -$	$-\infty$
$f(x)$	b	$\nearrow$	$r+b$ $M(a, b+r)$	$\searrow$	b
$f''(x)$	$\vert$	$- - - - - - -$	$- - -$	$- - - - - - -$	$\vert$

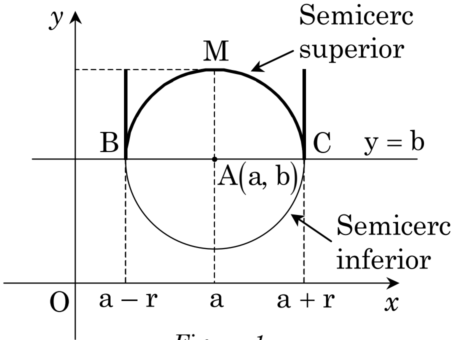


Figura 1

Graficul funcției f și, prin simetrie, al întregului cerc este dat în figura 1.

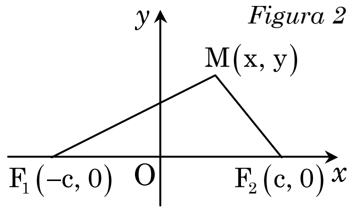
Punctul $M(a, b+r)$ este punct de maxim. În punctele $B(a-r, b)$ și $C(a+r, b)$ graficul admite semitangente verticale.

ELIPSA

Elipsa este locul geometric al punctelor din plan care au suma distanțelor la două puncte fixe constantă. Punctele fixe se numesc **focarele elipsei**.

Pentru obținerea ecuației elipsei, fie punctele fixe $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ și $a \in (0, +\infty)$ astfel încât $MF_1 + MF_2 = 2a$ (1), unde $M(x, y)$ este un punct din plan situat pe elipsă (figura 2).

Figura 2



Deoarece $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, condiția geometrică (1) se scrie sub forma $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$, (2).

Pentru raționalizarea relației (2) se separă un radical și se ridică la pătrat relația obținută. În final se obține că $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 = 0$. Cu notația $b^2 = a^2 - c^2$ rezultă ecuația elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, (3).

Se observă ușor că dacă $M(x, y)$ aparține elipsei, deci verifică ecuația (3), atunci și punctele $M_1(-x, y)$, $M_2(-x, -y)$ și $M_3(x, -y)$ verifică această ecuație. Rezultă că elipsa are ca axe de simetrie axele de coordonate, iar punctul $O(0, 0)$ este centru de simetrie.

Din ecuația (3) se obține $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Așadar, funcția $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, definește partea din elipsă situată deasupra axei Ox. Punctele $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ reprezintă intersecțiile elipsei cu axa Ox, iar punctele $B(b, 0)$, $B'(-b, 0)$ intersecțiile cu axa Oy. Punctele A, A', B, B' se numesc **vârfurile elipsei**, iar segmentele $[AA'], [BB']$ se numesc **axa mare**, respectiv, **axa mică** a elipsei.

Funcția f este continuă pe $[-a, a]$, iar $f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $f''(x) = \frac{-ab}{\sqrt{a^2 - x^2} \cdot (a^2 - x^2)}$, $x \in (-a, a)$.

Tabelul de variație este:

x	$-a$		0		a
$f'(x)$	$+\infty$	+ + + + +	0	− − − − − −	$-\infty$
$f(x)$	0	↗	b	↘	0
$f''(x)$	|	− − − − − − − − − − − − − − − −			|

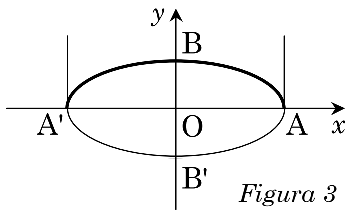


Figura 3

Graficul funcției f este redat în figura 3, iar prin simetrie se obține graficul elipsei.

În punctele $A(a, 0)$ şi $A'(-a, 0)$ graficul funcției f admite semitangente verticale.

HIPERBOLA

Hiperbola este locul geometric al punctelor din plan cu proprietatea că diferența distanțelor la două puncte fixe numite focare este constantă.

Pentru obținerea ecuației hiperbolei notăm $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ focarele hiperbolei şi fie $M(x, y)$ un punct curent al acesteia.

Condiția geometrică prin care se defineşte hiperbola se scrie $|MF_1 - MF_2| = 2a,\ a \in (0, +\infty),$ (1).

Exprimând analitic relația (1) se obține egalitatea $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$, care după raționalizare se aduce la forma:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 - a^2(c^2 - a^2) = 0,\ (2).$$

Deoarece $|MF_1 - MF_2| < F_1F_2$ se obține $a < c$. Cu notația $b^2 = c^2 - a^2$ ecuația (2) se scrie: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$ (3). Această ecuație este ecuația carteziană a hiperbolei. Intersecția hiperbolei cu axa Ox este reprezentată de punctele $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, numite vârfurile hiperbolei. Pentru $a = b$ hiperbola se numeşte **hiperbolă echilaterală**.

Se observă că axele de coordonate Ox şi Oy sunt axe de simetrie ale hiperbolei, iar $O(0, 0)$ este centru de simetrie pentru hiperbolă.

Din relația (3) se obține $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$. Funcția $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, va da graficul hiperbolei în cadranul I, iar prin simetrie în raport cu axele Ox şi Oy se obține întreg graficul hiperbolei.

Avem: $f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $f''(x) = \frac{-ab}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}$, $x \in (a, +\infty)$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, funcția nu are asimptote orizontale. Pentru determinarea asimptotelor oblice obținem: $m = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{a}\cdot\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a}$ şi $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - \frac{b}{a}x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{a}\cdot\frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0.$

Aşadar, dreapta $y = \frac{b}{a}x$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

Tabelul de variație este:

x	a		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+ + + + + + + + + +	
$f(x)$	0	↗ ↗	$+\infty$
$f''(x)$	− − − − − − − − − − − − −		

Graficul funcției f este redat în figura 4, iar graficul hiperbolei este redat în figura 5.

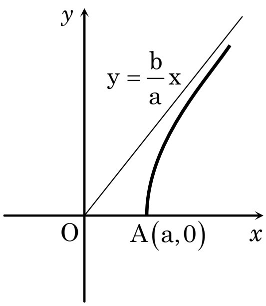


Figura 4

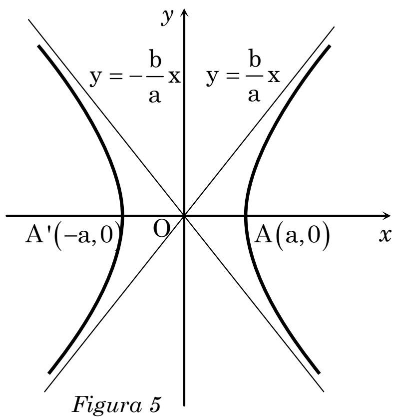


Figura 5

În punctele $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ graficul admite tangentă verticală.

PARABOLA

Parabola este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix numit **focar** şi de o dreaptă fixă numită **directoare**.

Pentru a stabili ecuația parabolei considerăm $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, focarul parabolei, $x = -\frac{p}{2}$ ecuația directoarei şi $M(x, y)$ un punct curent pe parabolă (figura 6).

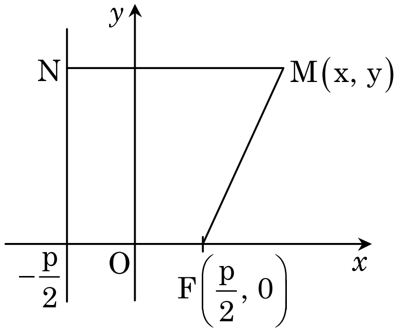


Figura 6

Condiția geometrică MF = MN conduce la egalitatea $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$, care raționalizată se scrie sub forma $y^2 = 2px$, (1).

Relația (1) se numeşte **ecuația carteziană a parabolei**.

Se observă că dacă $M(x, y)$ se află pe parabolă, atunci şi punctul $M_1(x, -y)$ se află pe parabolă, deci axa Ox este axă de simetrie a parabolei.

Funcția $f:[0, +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2px}$ va da graficul parabolei situat în cadranul I, iar prin simetrie față de Ox se obține întregul grafic al parabolei.

Avem:

$f'(x)=\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)=-\frac{\sqrt{2p}}{4x\sqrt{x}}$, $x\in(0, +\infty)$.

Tabelul de variație:

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ + + + + + + + + + + + + + + + +
$f(x)$	0 ↗ ↗ ↗ $+\infty$
$f''(x)$	− − − − − − − − − − − − − − − − − − − −

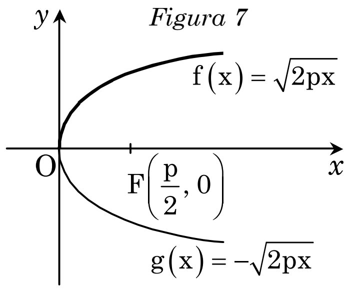


Figura 7

Graficul funcției f şi graficul complet al parabolei este redat în figura 7. În punctul $O(0, 0)$ parabola admite axa Ox ca tangentă verticală.

❸ REZOLVAREA GRAFICĂ A ECUAȚIILOR

Fie f, g : D → $\mathbb{R}$ funcții numerice şi $\mathcal{G}_f$ şi $\mathcal{G}_g$ reprezentările geometrice ale acestora în acelaşi sistem de coordonate xOy, (figura 1).

Din lectura grafică se observă că cele două curbe se intersectează în punctele A, B, iar abscisele lor x_1, respectiv x_2 verifică relațiile:

$$f(x_1)=g(x_1) \text{ şi } f(x_2)=g(x_2),\ (1).$$

Egalitățile (1) arată că numerele reale x_1, x_2 sunt soluții ale ecuației $f(x)=g(x)$, (2).

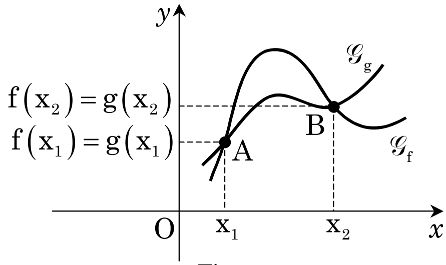


Figura 1

Reciproc, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ este soluție a ecuației $f(x)=g(x)$, adică $f(x_0)=g(x_0)$ rezultă că x_0 este abscisa unui punct comun al curbelor $\mathscr{G}_f$ şi $\mathscr{G}_g$.

Aşadar, soluțiile unei ecuații de forma $f(x)=g(x),\ x\in D\subset\mathbb{R}$ sunt date de abscisele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f şi g.

Metoda de determinare a soluțiilor unei ecuații de forma (2) folosind graficele funcțiilor asociate se numeşte **metoda grafică**.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se rezolve ecuația $\ln(x+1)=x$, (1).

<u>*Soluție*</u>

Vom determina numărul de soluții reale ale ecuației (1) folosind metoda grafică.

Varianta 1

Notăm $f, g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x+1),\ g(x)=x$. Curbele $\mathscr{G}_f, \mathscr{G}_g$ asociate sunt redate în figura 2.

Din lectura grafică se pot extrage următoarele concluzii:

- ecuația are o singură soluție reală $x=0$;
- $\ln(1+x)\le x,\ \forall\ x\in(-1,+\infty)$.

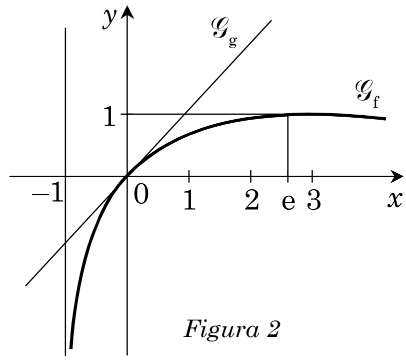


Figura 2

Varianta 2

Notăm: $f, g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\ln(x+1)-x,\ g(x)=0.$$

Să reprezentăm grafic funcția f.

Funcția f este continuă şi de două ori derivabilă pe $(-1,+\infty)$. Avem: $f'(x)=\dfrac{-x}{1+x},\ f''(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2},\ x\in(-1,+\infty)$.

Asimptotele funcției f

Avem: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$, deci dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală.

Tabelul de variație al funcției f este:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + + + +		0	− − − − − − − − − −	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 M	↘	$-\infty$
$f''(x)$	− −				

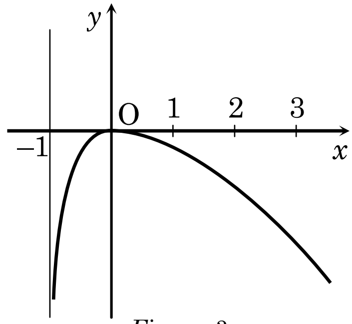


Figura 3

Curbele $\mathcal{G}_f$ şi $\mathcal{G}_g$ sunt redate în figura 3. Curba $\mathcal{G}_g$ este tangentă în x = 0 curbei $\mathcal{G}_f$.

Din lectura grafică se obține că ecuația $f(x)=g(x)$ are o singură soluție reală x = 0 şi că $f(x)\le g(x)$, deci $\ln(x+1)-x\le 0,\ \forall\ x\in(-1,+\infty)$.

➲ OBSERVAȚIE

- A doua variantă de rezolvare grafică a ecuației (1) pune mai sigur în evidență că x = 0 este singura soluție, deoarece punctul x = 0 fiind punct de maxim pentru f, axa Ox este tangentă graficului funcției f.
  În prima variantă de rezolvare grafică nu există siguranța că dreapta y = x este tangentă fără unele calcule suplimentare. Într-adevăr, ecuația tangentei în x = 0 la $\mathcal{G}_f$ este: $y-\ln 1=f'(0)\cdot(x-0)$ sau y = x. Aşadar, cele două curbe sunt tangente în x = 0 şi concluzia găsită în varianta 1 este corectă.

☒ **2.** Să se determine numărul de soluții reale ale ecuației polinomiale: $x^4+2x^2-12x+4=0$.

<u>*Soluție*</u>

Varianta 1. Încercăm aplicarea şirului lui Rolle.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4+2x^2-12x+4.$ Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi rezultă că $f'(x)=4x^3+4x-12=4(x^3+x-3).$ Pentru formarea şirului lui Rolle trebuie rezolvată ecuația $x^3+x-3=0,$ care ridică greutăți deosebite. Aşadar aplicarea şirului lui Rolle nu este convenabilă în acest caz.

Varianta 2. Folosim rezolvarea grafică. Vom scrie ecuația dată sub forma $\frac{x^4+2x^2}{4}=3x-1$ şi notăm $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^4+2x^2}{4},\ g(x)=3x-1.$

Graficul funcției g este o dreaptă. Reprezentăm grafic funcția f.

Funcția f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi avem $f'(x)=x^3+x,$ $f''(x)=3x^2+1.$ Graficul intersectează axa Ox doar în punctul $O(0,0).$

Tabelul de variație al funcției f este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$		0	$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$				

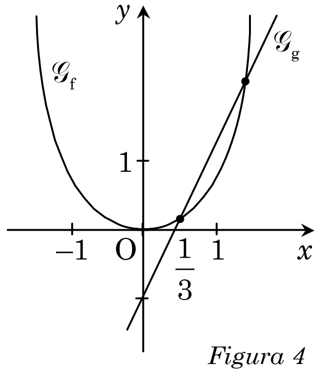


Figura 4

Curbele $\mathscr{G}_f$ şi $\mathscr{G}_g$ sunt reprezentate în figura 4.

Din lectura graficului se obține că există doar două puncte de intersecție. Ecuația dată are două soluții reale $x_1 \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $x_2 \in (1, 2)$.

☒ **3.** Să se determine în funcție de parametrul real m numărul de soluții reale ale ecuației $e^x = mx$.

<u>*Soluție*</u>

Se observă că x = 0 nu este soluție a ecuației, deci ea este echivalentă cu ecuația $\frac{e^x}{x} = m$. Folosim metoda grafică alegând $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $g(x) = m$.

Să reprezentăm grafic funcția f.

• Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, deci y = 0 este asimptotă orizontală la $-\infty$.

• Pentru asimptotele verticale se obține: $f(0-0) = -\infty$, $f(0+0) = +\infty$, deci x = 0 este asimptotă verticală bilaterală.

• Studiul cu ajutorul derivatelor

Funcția f este de două ori derivabilă şi avem: $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}e^x$,

$$f''(x) = \frac{x\left(x^2 - 2x + 2\right)}{x^4}e^x,\ x \in \mathbb{R}^*.$$

Tabelul de variație pentru funcția f este:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$		$\vert$	$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$	0	$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$	
$f(x)$	0	$\searrow$ $-\infty$	$\vert$	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{m}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$ $\frown$		$\vert$	$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$ $\smile$			

Curbele reprezentative ale celor două funcții sunt redate în figura 5.

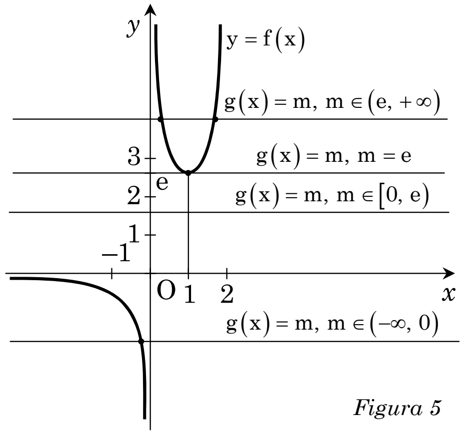


Figura 5

Lecturând graficele din figura 5 se obțin concluziile:

• pentru $m \in (-\infty, 0)$, există un punct de intersecție, deci ecuația are o singură soluție reală $x \in (-\infty, 0)$;

• pentru $m \in [0, e)$ nu există puncte de intersecție și ecuația nu are soluții reale;

• pentru m = e, punctul de intersecție este $A(1, e)$, iar soluția ecuației este $x = 1$;

• pentru $m \in (e, +\infty)$, există două puncte de intersecție, iar ecuația are două soluții reale $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, +\infty)$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se reprezinte grafic funcțiile $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 - x^2$;

b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$;

c) $f(x) = x^4 - 4x^3$;

d) $f(x) = -2x^3 + 3x^2$;

e) $f(x) = x^5 - 5x$;

f) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

E2. Să se reprezinte grafic funcțiile $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$; b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$;

c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$;

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$; f) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$;

g) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)}$;

h) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$;

i) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x}$;

j) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$.

E3. Să se reprezinte curbele de ecuații:

a) $x^2 - y^2 = 1$; b) $x^2 - 4y^2 = 4$;

c) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$;

d) $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$;

e) $y^2 = 16x$; f) $y^2 = 2x$.

E4. Să se determine numărul soluțiilor reale pentru ecuațiile:

a) $\ln(x+1) = x - 1$; b) $\sin x = x$;

c) $x^5 = 5x + 1$; d) $x + e^x = 1$;

e) $\operatorname{tg} x = x$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$;

f) $xe^x = x^2 + 1$; g) $x^3 - 3x + m = 0$.

APROFUNDARE

A1. Să se reprezinte grafic funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sqrt{1-x}$; b) $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$;

c) $f(x) = x\sqrt{1-x}$; d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$;

e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; f) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$;

g) $f(x) = x\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$; h) $g(x) = \sqrt[3]{x^3-x^2}$;

i) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$; j) $f(x) = x\cdot\sqrt[3]{x}$.

A2. Să se reprezinte grafic funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x}$; b) $f(x) = \dfrac{|1-x^2|}{x}$;

c) $f(x) = x\cdot\sqrt{|x|}$; d) $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$;

e) $f(x) = \sqrt{|x^2-1|}$; f) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

A3. Să se reprezinte grafic funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x + \ln(x+1)$;

b) $f(x) = x\cdot\ln x$; c) $f(x) = x\cdot e^{-x}$;

d) $f(x) = x^2\cdot\ln x$; e) $f(x) = e^{-x^2}$;

f) $f(x) = x\cdot\ln|x|$; g) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;

h) $f(x) = \ln(x^2-1)$; i) $f(x) = |x|\cdot e^{-|x-1|}$;

j) $f(x) = |x-1|\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

A4. Să se reprezinte grafic funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sin x - \cos x$;

b) $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$;

c) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$;

d) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

e) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\sin x}$; f) $f(x) = \ln(\sin x)$;

g) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;

h) $f(x) = x + \sin x$.

A5. Să se reprezinte în plan mulțimea punctelor $M(x, y)$, dacă:

a) $\sqrt{1-y^2} = x$; b) $|x| + |y| = 1$;

c) $(x^2-4y^2)\cdot(|x-y|-1) = 0$.

A6. Să se discute ecuațiile:

a) $|1-x^2| = m(1+x^2)$;

b) $2\ln x - mx^2 + 2 = 0$;

c) $e^x = mx^2$; d) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}} = \dfrac{m}{x}$.

A7. Se consideră funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2-4}$.

a) Să se reprezinte graficul funcției.
b) Graficul funcției f are centru de simetrie?
c) Să se determine punctele de pe graficul funcției f în care tangenta la curbă este paralelă cu dreapta 9x + y = 0 şi să se arate că acestea sunt vârfurile unui paralelogram.
d) Să se separe soluțiile ecuației $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$.

A8. Se consideră funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{mx^2+2}{x-1}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine m, astfel încât graficul funcției f să fie tangent dreptei de ecuație $y = -2x + 10$.
b) Să se reprezinte grafic funcția pentru $m = 1$.

A9. Se consideră funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{m(x+1)^3}{x^2-mx+1}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, pentru care f are două asimptote paralele cu axa Oy.
b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, pentru care f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.
c) Să se reprezinte grafic f pentru $m = 1$.

A10. Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}.$$

a) Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția să admită ca puncte de extrem $x = -1$ și $x = 3$, iar dreapta $y = x + 3$ să fie asimptotă a funcției.
b) Să se reprezinte graficul funcției pentru valorile găsite la punctul a) și să se arate că graficul funcției f admite un centru de simetrie.

A11. Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{9x^2}{x^2 - x + 1}$.

a) Să se arate că funcția f are trei puncte de inflexiune și să se separe acestea.
b) Dacă α, β, γ sunt valorile funcției în punctele de inflexiune, să se arate că: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$.
c) Să se reprezinte grafic funcția f.
(Politehnică, Buc., 1972)

TESTE DE EVALUARE RECAPITULATIVE

Testul 1

❍ 1. Să se studieze convergența șirului (a_n), cu termenul general $a_n = \frac{\alpha \cdot n^2 + n + 1}{2n + 1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *(2p.)*

❍ 2. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + ax + 1, & x \le 1 \\ x^2 + ax + b, & x > 1 \end{cases}.$$ *(3p.)*

❍ 3. Să se determine punctele de extrem ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5x^2 + 9}{x^2 + 3x + 3}$. *(2p.)*

❍ 4. Să se determine asimptotele funcției $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 2|x|}$. *(2p.)*

Testul 2

❍ 1. Să se studieze convergența și să se calculeze limita șirului (a_n), dat de relația de recurență: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{a_n}$, $n \ge 1$. *(2p.)*

❍ 2. Să se determine parametrii reali pentru care funcția $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1, & x \in [-1, 0) \\ ax^2 + bx + c, & x \in [0, 1] \end{cases}$$ satisface ipotezele teoremei lui Rolle. *(3p.)*

❍ 3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(2 - \cos x)}{x \cdot \sin 5x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(a + x) \cdot \sin(a - x) - \sin^2 a}{x^2}$. *(3p.)*

❍ 4. Să se arate că: $e^x - 1 \ge \ln(x + 1)$, $\forall\, x \in (-1, +\infty)$. *(1p.)*

Testul 3

❍ 1. Dacă $\ell = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n^2}}$, atunci:

a) $\ell = 0$; b) $\ell = 1$; c) $\ell = 2$; d) $\ell = e$; e) $\ell = +\infty$.

❍ 2. Fie a, b $\in \mathbb{R}$, $b \geq 0$. Şirul (x_n), $x_n = \frac{2n^a+n^2-1}{bn^3+2n^2+1}$ este convergent pentru:

a) $b = 0$, $a > 2$; b) $b > 0$, $a = \pi$; c) $b \geq 0$, $a \leq 2+\operatorname{sgn}(b)$; d) $a = b^2+3$;

e) $a = \sqrt{5}+\operatorname{sgn}(b)$.

❍ 3. Dacă $L = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin(nx)}{x}$, atunci:

a) $L = n(n+1)$; b) $L = n^2$; c) $L = \frac{n(n+1)}{2}$; d) $L = (n+1)(n+2)$; e) $L = n(n+3)$.

❍ 4. $\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{\sqrt{x^2+3x+7}-\sqrt{7x+4}}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ este egală cu: a) 1; b) –1; c) 2; d) –2; e) 0.

❍ 5. Mulțimea punctelor de continuitate a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3+1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 2x+1, & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$

este: a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; d) $\{0, \pm\sqrt{2}\}$; e) $\varnothing$.

❍ 6. Funcția $f : D\to\mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2e^{nx}+x}{e^{nx}+1}$:

a) este definită numai pe $(-\infty, 0]$;
b) este definită şi continuă pe $\mathbb{R}$;
c) este definită şi derivabilă pe $\mathbb{R}$;
d) este definită pe $\mathbb{R}$, dar nu este continuă pe $\mathbb{R}$;
e) este definită numai pentru $x\in(3, +\infty)$.

❍ 7. Funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}$, admite asimptota oblică de ecuație:

a) $y + x + 1 = 0$; b) $2y + 2x = 1$; c) $y = 1 - x$; d) $y = -x$; e) $y = x$.

❍ 8. Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2-2x+1$, $g(x) = x^4-2x^3+2x^2-1$. Graficele funcțiilor f şi g sunt tangente în punctul:
a) $A(1, 0)$; b) $A(2, 0)$; c) $A(-1, 4)$; d) $A(1, -1)$; e) nu sunt tangente.

❍ 9. Domeniul de derivabilitate a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin\frac{2x}{x^2+1}$ este:

a) $\mathbb{R}$; b) $[-1, 1]$; c) $(0, +\infty)$; d) $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$; e) $\varnothing$.

❍ 10. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x-m)\cdot|x-3|$ este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ pentru: a) $m = 0$; b) $m = 3$; c) $m = 1$; d) $m = -1$; e) $m \in \varnothing$.

Testul 4

❍ 1. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, & x>0 \\ \sin x, & x\le 0 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Pentru valorile lui a şi b găsite să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4\cdot\dfrac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}\right)^n$. *(2p.)*

❍ 2. Să se determine constantele reale $a\in(0,+\infty), b\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{x^2+b}, & x\in[0,1] \\ \ln\left(x^2-3x+3\right), & x\in(1,2] \end{cases}$, îndeplineşte condițiile teoremei lui Rolle şi să se aplice această teoremă funcției găsite. *(2p.)*

❍ 3. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x>1 \\ \pi, & x=0 \\ 2x+\pi, & x<0 \end{cases}$ care afirmație este adevărată:

a) funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$;
b) funcția f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$;
c) funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$;
d) funcția f este convexă pe $(-\infty, 0)$;
e) punctul $x=0$ este punct de inflexiune pentru f? *(2p.)*

❍ 4. Să se reprezinte grafic funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1,2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$. *(3p.)*

Testul 5

❍ 1. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{ax^2-x^3}$, ştiind că graficul funcției f admite o asimptotă care trece prin punctul $A(1,1)$. *(3p.)*

❍ 2. Să se separe soluțiile reale ale ecuației $x^5-2x^3+mx^2-3x+m=0,\ m\in\mathbb{R}$.

❍ 3. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)}{x^3}$. *(2p.)*

❍ 4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Dacă α, β, γ sunt soluțiile ecuației $f(x)=0$ şi aceste soluții sunt distincte, să se arate că:

$\dfrac{\alpha^2}{f'(\alpha)}+\dfrac{\beta^2}{f'(\beta)}+\dfrac{\gamma^2}{f'(\gamma)}=1$. (ASE, Bucureşti) *(1p.)*

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI PROBLEME DE ECUAȚII LINIARE
CAPITOLUL I. PERMUTĂRI (pag. 13)

• **E1.** $\text{Card}(S_n) = n!$; **a)** $n=4$; **b)** $n=6$; **c)** $n=7$. • **E4.** $x=\beta\alpha^{-1}$; $y=\beta^{-1}\alpha^3=\beta^{-1}\alpha$. • **E5. a)** $k=3$; **b)** $k=4$; **c)** $k=5$. • **E6.** Avem $\sigma^4=e$ şi se obține $M=\{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$. • **E8.** $m(\sigma)=2$; $m(\alpha)=4$; $m(\beta)=8$; $m(\theta)=17$. • **A1. b)** $\sigma^{2007}=\sigma^{5\cdot 401+2}=\sigma^2$; $\theta^{2005}=\theta$; $\varepsilon^{2010}=e$; **c)** $x=\sigma^{-1}\cdot\theta$; $y=\sigma^{-1}\cdot\theta\cdot\varepsilon^{-1}$; $z=\theta^2\cdot\varepsilon$. • **A2. b)** Pentru ecuația $\alpha\cdot x = x\cdot\alpha$ şi $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\a&b&c&d&e\end{pmatrix}$ se obține: $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\e&b&a&c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&1&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\a&b&c&d&e\end{pmatrix}$. Se analizează pe rând cazurile $a=1, a=2, ..., a=5$ şi se obține $x\in\{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$. • A**3.** Mulțimea $\{e, \sigma, \sigma^2, ...\}\subset S_n$, deci este finită. Rezultă că $\exists\, q, p\in\mathbb{N}$, $p>q$ astfel ca $\sigma^p=\sigma^q$ şi se obține $\sigma^{p-q}=e$. Se ia $k=p-q\in\mathbb{N}^*$. • **A5.** $C_n^{\,2}=45\Rightarrow$ $\Rightarrow n=10$. • **A6. a)** 2; **b)** 5. • A**7.** $(i, j)=(8, 7)$; $(k, p)=(6, 8)$. • **A8.** $C_n^{\,2}-k$. • **A9. a)** $\frac{n(n+1)}{2}+$ $+\frac{n(n-1)}{2}$. • **A11.** Se foloseşte proprietatea fundamentală a şirului de rapoarte egale şi se obține: **a)** $\sigma(k)=k$; **b)** $\tau(k)=n-k+1$, $k=\overline{1, n}$. • **A13. a)** Se caută soluții de forma $\begin{pmatrix}1&2&3\\a&b&c\end{pmatrix}$. Se analizează cazurile $a=1, a=2, a=3$. Se obține soluția $x=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$; **c)** Avem $\varepsilon(x^2)=\varepsilon(\sigma)\Leftrightarrow(\varepsilon(x))^2=-1\Leftrightarrow 1=-1$, fals $\Rightarrow x\in\varnothing$. • **A15.** Se foloseşte scrierea în baza 10 şi se obține: $4!(1+2+3+4+5)(10^4+10^3+10^2+10+1)$.

TESTE DE EVALUARE (pag. 16)

TESTUL 3

1. c); **2. d)**; **3. c)**;

CAPITOLUL II. MATRICE (pag. 32)

• **E2. a)** $a=x=y=4$; $b=\pm3$; **b)** $x=a=2$; $y=b=1$. • **E4. a)** $x=y=2, z=0, t=3$ sau $x=-3$, $y=-13, z=-5, t=8$; **b)** $x\in\{2, 4\}$; **c)** $x=2, p=5, y=11, z\in\{2, 3\}$. • **E10. a)** $x=y=2$; **b)** $x=-5$, $y=0$. • **E11. a)** $x=0, y=1$; **c)** $A^n=\begin{pmatrix}1&5^n-1\\0&5^n\end{pmatrix}$. • **E12. a)** $\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix}1&0&2n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. • **E13.** $A^3=-I_3$, $A^6=I_3$, etc.

• **A3.** $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. • **A6. b)** $\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & n\ln a \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+b)^n+(a-b)^n & (a+b)^n-(a-b)^n \\ (a+b)^n-(a-b)^n & (a+b)^n+(a-b)^n \end{pmatrix}$. • **A7.** $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$. • **A9.** Din egalitatea $A^n \cdot A = A \cdot A^n$ rezultă $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se obține $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. Se calculează A^n şi se identifică cu matricea dată. • **A10.** Se scrie $A^{n+1} = A^n \cdot A = A \cdot A^n$. Se obțin relațiile $a_{n+1} = a \cdot a_n + c \cdot b_n$ şi analoagele, de unde rezultă relațiile cerute. • **A12.** $Tr(AB - BA) = 0$ şi $Tr(I_n) = n$. • **A15. c)** $(2, 3), (3, 5), (5, 2)$ respectiv $(2, 2), (3, 3), (5, 1), (5, 5)$.

TESTE DE EVALUARE (pag. 35)

TESTUL 1

1. c); **2. a)**; **3. d)**; **4. b)**; **5. d)**.

TESTUL 2

1. $x = y = z = 1$; **2.** Se foloseşte că $A(a) \cdot A(b) = A(ab)$; **3.** Se foloseşte că $X^{2001} \cdot X = X \cdot X^{2001}$; $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **4.** Avem $A = a \cdot I_3 + B$ şi $B^3 = 0_3$.

CAPITOLUL III. DETERMINANȚI (pag. 37)

1. Determinantul de ordinul n. Proprietăți (pag. 51)

• **E2. a)** $x \in \{-4, 4\}$; **b)** $x = \frac{3}{2}$; **c)** $x = 1$; **d)** $x \in \{-4, 2\}$; **e)** $x = 9$. • **E4. a)** $x \in \{-2, 1\}$; **b)** $x = 0$; **c)** $x = 1$. • **E6.** $+, -, -$. • **E10.** $x = 1$.

• **A1. a)** $(b-a)(c-a)(c-b)$; **b)** 0; **c)** $(a-b)(b-c)(c-a)$; **d)** $(a-1)(b-1)(a-b)(-1-a-b)$; **e)** $(x-y)(z-x)(y-z)(xy+yz+zx)$; **f)** Se scrie determinantul ca sumă de determinanți.
• **A2. a)** 0; **b)** $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ şi se adună coloana 3 la coloana 1. Rezultă un determinant Vandermonde; **c)** $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Se înmulțeşte coloana 2 cu 2 şi se adună la prima coloană. Se obține un determinant Vandermonde. • **A3.** Ecuația se scrie $x^3 + (x+1)^3 = 0$, etc.
• **A5.** Se obține ecuația: $(x-1)^3 + a = 0$. • **A6.** Se obține $f(x) = e^{2(x^2+x+a)} + 2e^{-(x^2+x+a)} - 3$. Rezultă $e^{x^2+x+a} = 1$ şi $x^2 + x + a = 0$. Se pun condițiile $\Delta \geq 0, S < 0, P > 0$. • **A7. a)** $\Delta = (x+3)(x-1)^3$; **b)** $\Delta = (x-1)^4 - 1$; **c)** $x \in \{a+b+c, b-a-c, c-a-b, a-b-c\}$. • **A10.** Prin adunarea unei linii la celelalte linii se obțin pe aceste linii numai numere pare. Se dă apoi factor

comun 2 pe fiecare linie cu elementele pare. • **A11.** Dacă $M = A - {}^tA$, atunci ${}^tM = -M$ şi se are în vedere că $\det {}^tM = \det(M)$. • **A13.** Fie $M = A + i \cdot B$ şi $N = A - i \cdot B$. Atunci $\det(M \cdot N) = \det\left(A^2 + B^2\right)$. Dar $\det(M) = \overline{\det(N)}$ şi astfel $\det(M \cdot N) = \left(\det(M)\right)^2 \geq 0$; **b)** Nu.

• **A14.** Avem: $I_n + A + A^2 = \left(A + \frac{1}{2} I_2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} I_2\right)^2$ şi se aplică A13. • **A19.** $D = (-2)^{n-1} \cdot (n-1)!$.

2. Aplicații ale determinanților în geometria plană (pag. 58)

• **E2.** $m \in \{0, 8\}$. • **E10.** Dreptele $8x - 11y - 4 = 0$ şi $4x - 5y - 4 = 0$. • **E11.** Se scrie $y = m(x + 2)$. Se obțin vârfurile triunghiului prin intersecția dreptelor.

CAPITOLUL IV. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

1. Matrice inversabile. 2. Ecuații matriceale (pag. 66)

• **E3. a)** $m \neq 6$; **b)** $m \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$; **c)** $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$; **d)** $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

• **E4. a)** $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$. • **E5. b)** $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• **A1. a)** $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$; **b)** $\det A = 1$ şi $m = \frac{7x}{3}$. Se obține ecuația $7x^3 - 3x^2 + 8x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(7x^2 + 4x + 12\right) = 0$ cu soluția reală $x = 1$, iar $m = \frac{7}{3}$. • A**2.** $\det(A) \neq 0$, $\forall\, m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 + 6m + 11 \neq 0, \forall m \in \mathbb{R}$. • **A4.** Dacă $A^2 - A = B$ şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se obține $AB = BA$ şi $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$. Rezultă $a = 3; c = 2$ sau $a = -2; c = -2$. • **A5. b)** $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

• **A6.** $2 \cdot I_p$. • **A7.** $I_n = I_n \pm A^5 = (I_n \pm A) \cdot M$, etc. • **A8.** Se arată că $(A \cdot B)^2 = 0_n$. Rezultă $I_n = I_n - (A \cdot B)^2 = (I_n - A \cdot B)(I_n + A \cdot B)$. • **A9.** Relația dată se scrie $(I_n - A) \cdot (I_n - B) = I_n$, deci $I_n - A$, $I_n - B$ sunt inversabile şi rezultă că $(I_n - B) \cdot (I_n - A) = I_n$ şi $AB = BA$.

• **A10. a)** Dacă $(I_n + A \cdot B) \cdot C = I_n$ se arată că $(I_n + B \cdot A)^{-1} = I_n - BCA$; **b)** $I_n + (A \cdot B)^p = I_n + A \cdot M$, unde $M = (B \cdot A)^{p-1} \cdot B$. Atunci din a) şi matricea $I_n + M \cdot A = I_n + (B \cdot A)^{p-1} \cdot B \cdot A = I_n + (B \cdot A)^p$ este inversabilă.

3.2. Sisteme de ecuații liniare de tip Cramer (pag. 73)

• **E3. a)** $(1, 1, 0)$; **b)** $(2, 0, 0)$; **c)** $(1, 1, 1, 1)$; **d)** $(-1, 1, 1, 2)$.

• **A1. a)** $(2, 1, 1, 1)$; **b)** $(i, 1, 0)$; **c)** $(-1, 1, 2, 2)$. • **A2. a)** $(-abc, ab+bc+ca, -a-b-c)$.

• **A3. a)** $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$; **b)** $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$; **c)** $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$; **d)** $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$. • **A5. a)** $\det(A) = 6m(m-2)$; **b)** $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$; **d)** $m \in (0, 2)$.

3.3. Rangul unei matrice (pag. 77)

• **E2. a)** $r = 2$ pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$, $r = 1$ dacă $m = 9$; **b)** $r = 2$; **c)** $r = 2$ pentru $m = \frac{11}{5}$, $r = 3$ în rest; **d)** $r = 1$ dacă $m = 1$, $n = 3$ şi $r = 2$ în rest.

• **A1. c)** $\det(A) = \alpha + \beta - 3$. Pentru $\alpha + \beta \neq 3$, $r = 4$ şi $r = 3$ în rest; **d)** Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, rezultă că $r \geq 2$. Dacă $\alpha \in \{-3, -2\}$, $\beta \in \{-3, -2\}$, $r = 2$, iar în rest $r = 3$. • **A2.** $a = 4$, $b = -1$, $c = -2$. • **A3.** Condiția $\det(A) = 0$. • **A4.** $x \in \{1, 7\}$. • **A5.** Dacă $x = a - \frac{1}{2}$ se obține că $\det(A) = (x + b + c) \cdot (x^2 + b^2 + c^2 - xc - xb - bc)$. Se arată că parantezele nu sunt numere întregi, deci nu pot fi egale cu 0.

3.4. Studiul compatibilității sistemelor de ecuații liniare şi rezolvarea acestora (pag. 84)

• **E1.** a) $x = \alpha$, $y = 10 - 9\alpha$, $z = 8 - 7\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; **c)** incompatibil; **d)** $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$. • **E2. a)** Compatibil simplu nedeterminat. $x = \frac{7\alpha + 24}{13}$, $y = \frac{22\alpha + 16}{13}$, $z = \alpha$; **b)** Compatibil simplu nedeterminat. $x = \frac{-3\alpha + 19}{8}$, $y = \frac{\alpha + 7}{8}$, $z = \alpha$; **c)** Compatibil simplu nedeterminat; **d)** Compatibil dublu nedeterminat; **e)** incompatibil; **f)** incompatibil; **g), h)** Compatibil simplu nedeterminat; **i)** $(1, -2, -3)$.

• **A1. a)** $a = 1$; **b)** Din $\operatorname{rang}A = \operatorname{rang}\overline{A} = 2$ se obține relația $2ab - 5a - 3b + 6 = 0$ sau $(2a-3)(2b-5) = 3$. Rezultă $(a; b) \in \{(3; 3), (2; 4), (0; 2), (1; 1)\}$. • **A2. a)** $a = 1, b = 1$ sau $a = -0{,}5, b = 1$; **b)** $a = 1, b = -12$. • **A3.** $\operatorname{rang}A = \operatorname{rang}\overline{A} = 2$ şi $a = -8, b = 2$. • **A4.** Condiția $\operatorname{rang}A = \operatorname{rang}\overline{A} = 2$. Se obține $a = -1$, $b = -1$. • **A5.** Condiția $\det(A) = 0$, $a \in \{-4, 3\}$. Apoi se găseşte $b \neq -3$. • **A6.** Condiția $\det(A) \neq 0$, $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{3}{2}\right\}$. • **A7.** Condiția $\det(A) = 0$ implică $m \in \{-2, 1\}$. • **A11.** Se formează cu primele 3 ecuații un sistem omogen care trebuie să admită soluții nebanale. Rezultă $m = 1$, şi soluția $x = \alpha$, $y = -\alpha$, $z = \alpha$. Înlocuită în a patra ecuație se obține $\alpha \in \{-9, 9\}$.

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
CAPITOLUL I. LIMITE DE FUNCȚII

13. Limite laterale (pag. 172)

• **E2. a)** $a \in \mathbb{R}$; **b)** $a = 0, b = 2$; **c)** $a = \frac{1}{3}$.

• **A1. a)** e; **b)** $a = 2, b = 3$.

14. Proprietăți ale funcțiilor care au limită (pag. 176)

• **A1. a)** 1; **b)** 3; **c)** $\frac{n(n+1)}{2}$. • **A2.** $l = 0$. • **A3. a)** 0; **b)** Pentru $a \in (1, +\infty)$, $l = +\infty$; pentru $a \in (-\infty, 1)$, $l = -\infty$; iar pentru $a \in [-1, 1]$, limita nu există.

16.2. Limite de funcții compuse (pag. 184)

• **E4. a)** 1; **b)** 1; **c)** $\frac{1}{2} + \ln 2$; **d)** $\frac{\pi}{2}$. • **E5. a)** $\frac{6}{7}$; **b)** $\frac{6}{5}$; **c)** 1; **d)** $\frac{4}{5}$; **e)** $\frac{1}{2}$; **f)** 1; **g)** $\frac{1}{3}$; **h)** 1, pentru $n \geq 1$ şi $\frac{1}{\sin 1}$ pentru $n = 0$; **i)** $\frac{1}{2}$; **j)** $\frac{4}{5}$.

• **A1. a)** $a = 1, b = -1$; **b)** $a = 1, b = 0$; **c)** $a = 1, b = 0$. • **A2. a)** 10; **b)** $\frac{n(n+1)}{2}$. • **A3. a)** $a + b + 1 = 0$ şi $6a + 5b = 0$; **b)** $a + b + c + 6 = 0$, $4a + 3b + 6 = 0$, $2a + b = 0$. • **A4. a)** $\frac{\ln 6}{3\ln 2}$. • **A6. a)** 1; **b)** 1; **c)** 1; **d)** -1; **e)** 9; **f)** -8. • **A8.** Fie $T > 0$ perioadă a funcției. Deoarece f este neconstantă există $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_0) \neq f(x_1)$. Atunci $f(x_0) = f(x_0 + nT)$ şi $f(x_1) = f(x_1 + nT)$. Luând $x_n = x_0 + nT$, $y_n = x_1 + nT$, cu limita $+\infty$ se obține că $f(x_n) \to f(x_0)$ şi $f(y_n) \to f(x_1)$.

17. Asimptotele funcțiilor reale (pag. 191)

• **E1. a)** $y = 0, x = 0, x = 1$; **b)** $y = 0, x = 2, x = -2$; **c)** $y = 1, x = 2, x = -2$; **d)** $y = 1, x = 1, x = 2$; **e)** $y = x, x = 3, x = -3$; **f)** $y = x + 2, x = 2, x = 3, x = -3$. • **E2. a)** Asimptote orizontale: $y = \frac{1}{2}$ spre $+\infty$, $y = -\frac{1}{2}$ spre $-\infty$. Asimptotă verticală $x = -\frac{1}{2}$; **b)** $x = 2$, asimptotă verticală şi $y = x + 2$ asimptotă oblică; **c)** Asimptote verticale $x = 1, x = -1$, asimptotă oblică $y = x$.
• **E3. a)** Asimptote orizontale: $y = x$ la $+\infty$ şi $y = -x$ la $-\infty$; **b)** $y = x$ la $+\infty$, $y = -x$ la $-\infty$; **c)** $y = 0$; **d)** $x = 3, x = -3$ şi $y = x$ la $+\infty$, $y = -x$ la $-\infty$. • **E4. a)** $a = 3$; **b)** $a = 4, b = 0$.
• **A1. a)** $x = 0, y = x + 1$; **b)** $x = 1, x = -1$.

CAPITOLUL II. FUNCȚII CONTINUE

1. Funcții continue într-un punct (pag. 202)

• **A1. a)** $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ x & , x \in (-1, 1] \end{cases}$; **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x > 0 \\ 0{,}5 & , x = 0 \\ 1 & , x < 0 \end{cases}$; **c)** $f(x) = \begin{cases} \sin x & , x > 0 \\ 0{,}5 & , x = 0 \\ \cos x & , x < 0 \end{cases}$.

• **A3. a)** $a=1$; **b)** $a=0$; **c)** $1=a+\ln a$ cu soluția unică $a=1$. **d)** $a=1$; **e)** $a=b=0$; **f)** $a=0$; **g)** $a=0,\ b=1$; **h)** Se obține $\sin a=\frac{1}{2}$, etc. • **A4. a)** $b=0,\ a=1$; **b)** $a=\pm e,\ b=0$; **c)** $a=b$, $c=2b$; **d)** $a=3,\ b=1-3e$. • **A7. a)** $2^a+4^a=6$ şi $a=1$; **b)** $2^a+3^b=5$ şi $2^{2a}+3^{2b}=13$. Se obține $a=b=1$ şi $a=\log_2 3,\ b=\log_3 2$; **c)** $a^2=|a|$ şi $a\in\{0,1,-1\}$. Convine doar $a\in\{-1,1\}$; **d)** Dacă $2a-1<a^2$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, atunci f este continuă pe $D=(-\infty,2a-1]\cup[a^2,+\infty)$. Dacă $a=1$ atunci $2^b+1=6-3^b$ şi $b=1$. **e)** $a=2,\ b=8$ şi $a=-3,\ b=28$. • **A8. a)** $f=a$; **b)** $f(x)=x+a$; **c)** $f=a$; **d)** $f=a$; **e)** $f=a$. • **A9.** Avem: $f(x)=f(x-x_0)+f(x_0)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(0)+f(x_0)=f(x_0)$, deoarece $f(0)=0$; **b)** $f(x)=ax,\ a\in\mathbb{R}$. • **A10.** Dacă $x_0\in\mathbb{R}$, fie (x_n), $x_n\in\mathbb{Q}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$. Din continuitatea funcțiilor f şi g se obține $f(x_0)=g(x_0),\ \forall x_0\in\mathbb{R}$, deci $f=g$. • **A11.** Fie $x_0\in\mathbb{R}$. Considerăm $(x_n),(y_n)$ şiruri cu proprietatea că $x_n, y_n\in\mathbb{Q},\ x_n<x_0<y_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Dacă g este monotonă, atunci avem: $g(x_n)\le g(x_0)\le g(y_n)$ sau $g(x_n)\ge g(x_0)\ge g(y_n),\ \forall n\in\mathbb{N}$. Dar $f(x_n)=g(x_n)$ şi $f(y_n)=g(y_n)$ şi astfel se obține că: $f(x_n)\le g(x_0)\le f(y_n)$ sau $f(x_n)\ge g(x_0)\ge f(y_n),\ n\in\mathbb{N}$. Prin trecere la limită avem: $f(x_0)=g(x_0)$ deci $f=g$.

2. Operații cu funcții continue (pag. 207)

• **A1.** Se folosesc egalitățile: $\max(a,b)=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ şi $\min(a,b)=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$. • **A2.** Se foloseşte faptul că $f_+(x)=\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$ şi $f_-(x)=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$. • **A4.** Din continuitate se obține că $g(n)=0,\ \forall n\in\mathbb{Z}$, şi apoi că $g(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. • **A6.** Trasăm graficul funcției $f(x)=x^2-1$. Rezultă studiind figurile 1 şi 2 că $g(x)=\begin{cases} f(x) & ,\ x\le 0\\ -1 & ,\ x>0\end{cases}$. Analog se va obține că $h(x)=\begin{cases} f(x), & x\le 0\\ -1, & x\in(0,1)\\ f(x-1), & x\ge 1\end{cases}$ • **A7.** Avem: $f(b-0)=a+b$ şi $f(b+0)=b-a$. Din egalitatea $f(b-0)=f(b+0)$ se obține că $a=0$. Analog, $g(a-0)=a+b$ şi $g(a+0)=a-b$ şi se obține $a+b=a-b$, deci $b=0$. • **A8.** Se ia $x\to 1-x$ şi se obține $2f(1-x)+3f(x)=\begin{cases}1-x, & 1-x\le 1\\ 1-2x, & 1-x>1\end{cases}$. Se formează un sistem cu necunoscutele $a=f(x)$ şi $b=f(1-x)$.

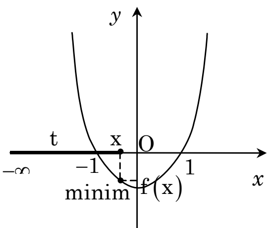


Figura 1

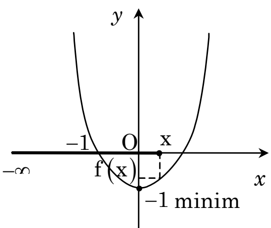


Figura 2

• **D2. a)** $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ şi f este funcție monotonă. Se aplică apoi D1. • **D4.** Din relația $f\circ(f\circ f)=1_{\mathbb{R}}$ rezultă că f este surjectivă iar din relația $(f\circ f)\circ f=1_{\mathbb{R}}$ se obține că f este injectivă. Aşadar, f este bijectivă. Funcția f fiind continuă şi injectivă, ea este strict monotonă pe $\mathbb{R}$, din D3. Considerăm f crescătoare pe $\mathbb{R}$. Dacă ar exista $x_0 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_0) < x_0$, atunci din strict monotonia lui f se obține succesiv: $f(f(x_0)) < f(x_0) < x_0$, și $x_0 = f(f(f(x_0))) < f(x_0)$. Contradicție. Așadar, $f(x_0) \geq x_0$. Dacă $f(x_0) > x_0$, în mod analog se obține că $f(x_0) < x_0$. Așadar $f(x_0) = x_0$ și $f = 1_{\mathbb{R}}$.

3. Proprietatea lui Darboux (pag. 214)

• **E4.** Funcțiile au discontinuități de prima speță.
• **A1. b)** f este strict crescătoare, iar $f(0) = 0$, deci $f(x) \geq 0, \forall x \in D$; **f)** $f(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = e^{k\pi}, k \in \mathbb{Z}$.
Avem tabelul de semn:

x	$-\infty$ ...	$e^{-2\pi}$	$e^{-\pi}$	1	e^{π}	$e^{2\pi}$	... $+\infty$
$f(x)$		0 + + + +	0 − − − −	0 + + + +	0 − − − −	0 +	

• **A2. a)** $f([-1, 0])$ nu este interval; **b)** $f([1, 2])$ nu este interval. • **A3.** Dacă $f(x) = x^3 + 2x - 1$, atunci $f(0) = -1$ și $f(1) = 2$, deci ecuația are o soluție $x \in (0, 1)$. • **A4.** Funcțiile date sunt strict crescătoare deci sunt injective. Fiind continue se arată că $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. Avem **a)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, deci $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, deci $\text{Im} f(\mathbb{R})$.
• **A5.** Fie $g(x) = f(x) - x$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Funcția g este continuă și $g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(b) = f(b) - b \leq 0$, deci există $x_0 \in [a, b]$ cu $g(x_0) = 0$ și astfel $f(x_0) = x_0$. • **A8.** Notăm $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x$. Din mărginirea funcției f avem că $a \leq f(x) \leq b, \forall x \in \mathbb{R}$, și se obține că $g(x) \geq -x + a$, și $g(x) \leq -x + b$. Din continuitatea lui g rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) \leq$ $\leq \lim\limits_{x\to\infty}(-x + b) = -\infty$, și $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) \geq \lim\limits_{x\to-\infty}(-x + a) = +\infty$. Așadar $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ deci $\text{Im} f = \mathbb{R}$. Se obține că $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ cu $g(x_0) = 0$ și $f(x_0) = x_0$. • **A9.** Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Atunci $f(x_0) = f\left(\frac{2x_0}{1 + x_0^2}\right) = f(x_1)$, unde $x_1 = \frac{2x_0}{1 + x_0^2}$. Apoi $f(x_1) = f\left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2}\right) = f(x_2)$, unde $x_2 = \frac{2x_1}{1 + x_1^2}$.
În acest mod se obține că pentru șirul (x_n), $x_{n+1} = \frac{2x_n}{1 + x_n^2}$ avem că $f(x_n) = f(x_{n+1})$ sau

$f(x_n) = f(x_0), \forall n \in \mathbb{N}$. Se arată apoi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1 & , x_0 > 0 \\ 0 & , x_0 = 0 \\ -1 & , x_0 < 0 \end{cases}$. Așadar $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) =$

$= \begin{cases} f(1) & , x_0 > 0 \\ f(0) & , x_0 = 0 \\ f(-1) & , x_0 < 0 \end{cases}$. Din continuitatea funcției f se obține că $f(1) = f(0) = f(-1)$, deci $f(x_0) =$ constantă $\forall x_0 \in \mathbb{R}$. • **A12.** Fie $g(x) = f(x) - x - 4, x \in \mathbb{R}$. Cum g este continuă și $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, sau $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Dar din $g(x) > 0$ se obține că $f(x) > x + 4$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, iar dacă $g(x) < 0$ rezultă că $f(x) < x + 4$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Așadar f este nemărginită.

CAPITOLUL III. FUNCȚII DERIVABILE

2. Derivate laterale (pag. 229)

• **E5.** Avem $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$, dar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ nu există. • **E6. a)** $f_s'(1) = 3$, $f_d'(1) = 3$, $f'(1) = 3$; **b)** $f_s'(1) = 2 = f_d'(1)$; **c)** $f_s'(-1) = 3$, $f_d'(-1) = 3$; **d)** $f_d'\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f_s'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, nederivabilă; **e)** $f_s'(-3) = -1$, $f_d'(-3) = 1$, nederivabilă. • **E7. a)** $m = f'(x_0)$. Deoarece $f'(x) = 2x$, vom obține $m_1 = f'(-2) = -4$, $m_2 = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $m_3 = f'(3) = 6$. • **E8.** Ecuația este $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$. Se obține: **a)** $y = 6x - 9$; **b)** $y = -x - 1$; **c)** $y = 25x + 104$; **d)** $y = -1$. • **E9. a), b), c)** da; **d)** nu, deoarece $f'(0) = +\infty$. Punct de inflexiune. • **E10. a)** da; **b)** da. • **E11. a)** Graficul este în figura 1. Ecuația tangentei în $x = 0$ este $y = 0$. Punctul $x = 0$ este de punct de inflexiune; **b), c)** Se arată că $f'(0) = +\infty$; **d)** $f'(-2) = +\infty$.

• **A2.** $a = 3$, $b = -4$. • **A5. a)** Punctele de continuitate sunt date de soluțiile ecuației $x^4 = x^2 + 2$. Se obține $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, puncte în care f nu este derivabilă; **b)** $x = 0$. • **A6. a)** Din continuitate se obține $a + b = 2$, iar $f_s'(1) = a$, $f_d'(1) = 2$. Rezultă $a = 2$, $b = 0$; **b)** $a = 0$, $b = 1$; **c)** $a = \frac{3}{7}$, $b = \frac{12}{7}$. • **A7.** $b = -\frac{1}{3}$, $a = \frac{1}{6}$. • **A8.** $a = -1$, $b = 5$. • **A9.** $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = \pm 3$. • **A11.** Panta tangentei este $m = 3 = f'(x_0)$. Se obține $x_0 \in \left\{-3, \frac{1}{3}\right\}$. • **A12.** Condiția $f'(x_0) = 24$. Se obține $x_0 = 2$. • **A13.** Panta $m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Condiția $f'(x_0) = 1$. Rezultă $x_0 \in \{1, -3\}$. • **A16.** Curbele $y = f(x)$, $y = g(x)$ sunt tangente în $A(x_0, y_0)$ dacă $f(x_0) = g(x_0)$ şi $f'(x_0) = g'(x_0)$. Rezultă $a = -1$, $b = -1$, $c = -5$.

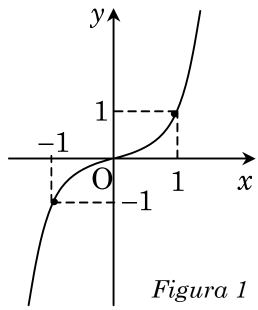


Figura 1

• **A18. a)** Avem: $f(x) = \begin{cases} x_2 - ax, & x \ge a \\ -x^2 + ax, & x < a \end{cases}$. Funcția f este continuă şi $x_0 = a$. Studiem derivabilitatea în $x_0 = a$. Avem: $f_d'(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x > a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x > a}}\frac{x^2 - ax - 0}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} x = a$ şi $f_s'(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x < a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x < a}}\frac{-x^2 + ax - 0}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}(-x) = -a$. Din egalitatea $f_s'(a) = f_d'(a)$ se obține $a = 0$. **b)** Se analizează cazurile $a < b$, $a = b$, $a > b$.

Cazul 1. $a < b$. Rezultă că $f(x) = \begin{cases} x(-x + a) - (x - b), & x \le a \\ x(x - a) - (x - b), & x \in (a, b) \\ x(x - a) + (x - b), & x \ge b \end{cases}$. Avem: $f_s'(a) = -a - 1$ şi $f_d'(a) = a - 1$. Din egalitatea $f_s'(a) = f_d'(a)$ se obține $a = 0$. Se studiază apoi derivabilitatea în $x = b$. Se ajunge la o contradicție.

Cazul $a > b$. Se ajunge la o contradicție când se află derivatele în a şi b.

Cazul $a=b$. Se obține $f(x)=(x+1)(x-a)=\begin{cases}(x+1)(x-a), & x\ge a\\ (x+1)(a-x), & x<a\end{cases}$. Din studiul derivabilității în $x_0=a$ se obține $a=-1$. Aşadar $a=b=-1$. • **A19.** a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-9}, & x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)\\ \sqrt{9-x^2}, & x\in(-3,3)\end{cases}$.

Se obține: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}, & x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\\ \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}, & x\in(-3,3)\end{cases}$ şi $f_s'(-3)=-\infty$, $f_d'(-3)=+\infty$, $f_s'(3)=-\infty$, $f_d'(3)=+\infty$.

Aşadar punctele $x_0=-3$ şi $x_0=3$ sunt puncte de întoarcere. • **A20.** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{-1}(x^2)^n-x^2+6}{x^2+4+(x^4)^n}$.

Se deosebesc situațiile: **a)** $x^2<1$, când $\lim\limits_{n\to\infty}(x^2)^n=0$ şi rezultă că $f(x)=\dfrac{6-x^2}{x^2+4}$; **b)** $x^2=1$, deci $x\in\{-1,1\}$. Se obține $f(1)=\dfrac{6}{6}=1$ şi $f(-1)=\dfrac{-1-1+6}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$. **c)** $x^2>1$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=+\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x^{4n}=+\infty$. Avem: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{-1}-\dfrac{x^2-6}{x^{2n}}}{\dfrac{x^2+4}{x^{2n}}+x^{2n}}=\dfrac{x^{-1}}{\infty}=0$. Aşadar

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6-x^2}{x^2+4}, & x\in(-1,1)\\ 1, & x=1\\ \dfrac{2}{3}, & x=-1\\ 0, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}.$$

4.4. Derivarea funcției inverse (pag. 248)

• **A3.** Funcția este strict crescătoare şi $\mathrm{Im}(f)=\left[-\dfrac{1}{4},+\infty\right]$. Avem $\left(f^{-1}\right)'(2)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{3}$ şi $\left(f^{-1}\right)'(20)=\dfrac{1}{f'(5)}=\dfrac{1}{9}$. • **A4.** $f(x)=(x+1)^3+x-3$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Din proprietatea lui Darboux rezultă că $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$. Avem $\left(f^{-1}\right)'(6)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{13}$. • **A5.** Funcția f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$ ca sumă de funcții strict crescătoare $\left(g(x)=2^x, h(x)=x^2+x\right)$. Cum $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ rezultă $\mathrm{Im}(f)=(1,+\infty)$. Aşadar f este inversabilă. Avem: $\left(f^{-1}\right)'(4)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{3+\ln4}$.

6. Rădăcini multiple ale ecuațiilor polinomiale (pag. 253)

• **E4.** $f(x)=-3x^2+4x+5$. • **E5. a)** $a=3, b=-9$; **b)** $a=2; b=4$; **c)** $a=2, b=1$ sau $a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{17}{9}$. • **E6. a)** 2; **b)** 2; **c)** 1; **d)** 3.

• **A2.** $a=3, c=2, b=-\frac{1}{2}$. • **A3.** $m=-5, n=13, -5$. • **A4.** $a=8, b=-2, c=-4, d=5$.
• **A6.** $f(x)=x^3-4x^2+3x+5$. • **A7.** $f(x)=\ln(x+1)(x+2)$. • **A8.** $f(x)=9x^4-30x^3+37x^2-20x+4$.
• **A9. a)** $a=18, b=-20$; **b)** $a=\frac{n-2}{2}, b=\frac{n+4}{4}$. • **A10.** Dacă x_0 este rădăcină dublă comună se pune condiția $f(x_0)=0=g(x_0)$, $f'(x_0)=0=g'(x_0)$. Se obține $x_0=2, a=2, b=4$ şi $x_0=-2, a=-\frac{10}{3}, b=-4$. • **A11. a)** Din egalitatea gradelor se obține $n=3$, apoi $f(x)=\frac{(x-a)^3}{18}$, $a\in\mathbb{R}$; **b)** Se obține $2n-1=(n-2)^2$ şi $n\in\{1, 5\}$. Convine $n=5$. Se obține $f(x)=x^5$.

7.2. Teorema lui Fermat (pag. 261)

• **A1.** $f(x)=x^3-3x+4$. • **A2.** $f(x)=2x^3-9x^2+12x-6$. • **A3. b)** Deoarece $f(0)=0$ şi $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $x=0$ este punct de minim pentru f. Atunci $f'(0)=0$ şi se obține $a=35$. • **A4.** $m=1$. • **A5.** Fie $f(x)=a^x+1-3^x-4^x, x\in\mathbb{R}$. Funcția f este derivabilă, $f(0)=0$ şi $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, deci $x=0$ este punct de minim pentru f. Rezultă $f'(0)=0$ şi $a=12$. • **A6.** $a=6$.

7.3. Teorema lui Rolle (pag. 265)

• **E2. a)** $a=1{,}5, b=2, c=0$; **b)** $a=2, b=-5, c=-4$. • **E3.** $f'(x)=0$ implică $x\in\{-2, 0\}$. Convine $x=0$. • **E4.** $x=0$. • **E5. b)** Funcția f are zerourile $x\in\{\pm1, -3, 2\}$. Se aplică teorema lui Rolle pe intervalele $(-3, -1), (-1, 1), (1, 2)$.

• **A1. a)** $a=-\frac{11}{3}, b=4, c=-8$; **b)** $a=2, b=1, c=0$. • **A3.** Se consideră $g(x)=(1-x)\cdot f(x)$.
• **A4.** $g(x)=x\cdot f(x)$. • **A5.** Se aplică teorema lui Rolle funcției $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, x\in[0, 1]$.
• **A6.** $g(x)=\sin^m x\cdot\cos^n x, x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. • **A8.** Se aplică teorema lui Rolle funcției f pe intervalele $[x_1, x_2], [x_2, x_3], ..., [x_{n-1}, x_n]$ unde $x_1<x_2<...<x_n$ sunt zerourile funcției f. • **A10.** Cazul $m=0$ este imediat. Pentru $m\neq 0$ se aplică teorema lui Rolle funcției $g(x)=e^{\frac{x}{m}}\cdot f(x), x\in\mathbb{R}$ pe intervalele de forma $[x_{i-1}, x_i]$ cu x_i soluții ale ecuației $f(x)=0$. • **A11.** Considerăm funcția $g(x)=f(x)-x$, care are trei soluții $x_1<x_2<x_3$. Se aplică Rolle şi rezultă că $\exists\, c_1, c_2\in\mathbb{R}$, $c_1\in(x_1, x_2), c_2\in(x_2, x_3)$ cu $g'(c_1)=0, g'(c_2)=0$. Se aplică apoi teorema lui Rolle funcției g' pe $[c_1, c_2]$.

7.4. Şirul lui Rolle (pag. 269)

• **A1.** Se aplică teorema lui Rolle funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ pe $[-4,-3],\ [-3,-2],\ [-2,-1]$. • **A2. e)** Cum $x=0$ nu este soluție, ecuația este echivalentă cu ecuația $x+m-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}=0$. Se consideră $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+m$. Avem $f'(x)=$ $=\frac{x^3+x-10}{x^3}$, cu zeroul $x=2$. Şirul lui Rolle este:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$m+\frac{9}{4}$	$+\infty$	Separarea soluțiilor
$m<\frac{9}{4}$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$x_1\in(-\infty,0),\ x_2\in(0,2),\ x_3\in(2,+\infty)$
$m=\frac{9}{4}$	$-$	$+$	$+$	0	$+$	$x_1\in(-\infty,0),\ x_2=x_3=2$
$m>\frac{9}{4}$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$x_1\in(-\infty,0)$

• **A4.** $f'(x)=\sin\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x},\ x\in(0,1)$. Din $f'(c_n)=0$ se obține că $\operatorname{tg}\frac{\pi}{c_n}=\frac{\pi}{c_n}$. Se aplică teorema lui Rolle funcției $g:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\to\mathbb{R},\ g(x)=\operatorname{tg}x-x$ pe $I_k=\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right)$.

7.5. Teorema lui Lagrange (pag. 273)

• **E2. a)** Nu; **b)** Nu; **c)** Da, $c\in\{2,-2\}$; **d)** Da, $c=-\frac{31}{16}$. • **E3. a)** $a=4,\ b=7$; **b)** $a=b=3$.

• **E4.** Panta coardei este $m=-11$. Din $f'(c)=-11$ se obține $c\in\{-1,1\}$.

• **A1. a)** $a=\frac{3-e}{e},\ b=\frac{3-2e}{e}$; **b)** $a=b\in\{-1,2\}$. • **A3.** $A\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$. • **A4.** Se obține că $f'(c)=\ln(n+1)-\ln(n),\ c\in(n,n+1)$ sau $\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln(n)<\frac{1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ (1); **a)** Prin adunarea relațiilor (1) rezultă că $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ +...+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}=a_n$ (2), deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geq\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$; **b)** Din (2) se obține că $b_n-1+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln(n)<b_n$, deci $\ln(n+1)-\ln(n)<b_n<\ln(n+1)-\ln(n)-\frac{1}{n+1}+1$. Se obține că $0<b_n<1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul (b_n) este mărginit. Avem: $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln(n)<0,\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci (b_n) este monoton descrescător.

• **A5.** Se aplică teorema lui Lagrange funcțiilor: **a)** $f(x)=x^n,\ x\in[a,b]$; **b)** $f(x)=\operatorname{tg}x,\ x\in[a,b]$; **c)** $f(x)=\ln(\cos x),\ x\in[a,b]$; **d)** $f(t)=\sin t,\ t\in[x,y]$; **e)** $f(t)=e^t,\ t\in[0,x],\ t\in[x,0]$.

• **A7. b)** Ecuația se scrie sub forma $\frac{6^x-5^x}{6-5}=\frac{4^x-3^x}{4-3}$. Cu teorema lui Lagrange aplicată funcției $f(t)=t^x$, pe $[3,4]$ și $[5,6]$ se obține că $\exists\ c_1\in(3,4),\ c_2\in(5,6)$ cu $f'(c_1)=f'(c_2)$ sau

$x \cdot c_1^{x-1} = x \cdot c_2^{x-1}$ cu soluțiile $x \in \{0, 1\}$. • **A8. a)** Se scrie: $\frac{3^x - 2^x}{3-2} = \frac{6^x - 5^x}{6-5}$ etc. **b)** Se scrie $\frac{6^x - 1}{6-1} = \frac{14^x - 9^x}{14-9}$. • **A9. a)** Fie $f(x) = \sqrt[3]{x}, x \in \mathbb{R}$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe $[9, 10]$ şi $[4, 5]$ se obține că există $c_1 \in [4, 5], c_2 \in [9, 10]$ astfel încât $f'(c_2) = \frac{\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{9}}{10-9}$ şi $f'(c_1) = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}}{5-4}$. Rezultă că $\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{9} = \frac{1}{3\sqrt[3]{c_2^{\,2}}} < \frac{1}{3\sqrt[3]{c_1^{\,2}}} = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}$, deci $\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{9}$.

• **A10. a)** Aplicăm teorema lui Lagrange funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$ pe $I_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Se obține că există $c_n \in I_n$, cu $f'(c_n) = \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$ (1). Din relația (1) se obține că $n\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right) = \frac{e^{c_n}}{n+1}$ şi limita cerută este $l = 0$; **b)** Analog punctului a) obținem $n^2\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right) = \frac{n}{n+1} \cdot e^{c_n}$ şi $l = 1$. • **A11.** Avem că $\alpha = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)}{\frac{1}{2} - 0} = \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \beta$. Din teorema lui Lagrange există $c_1 \in (0, 2)$, $c_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ cu $f'(c_1) = \alpha = \beta = f'(c_2)$. Se aplică apoi teorema lui Rolle funcției f' pe $[c_1, c_2]$.

7.6. Consecințe ale teoremei lui Lagrange (pag. 276)

• **E2. a)** $p = 2, m = -4$; **b)** $a = 1, b = 3$; **c)** $a = \frac{1}{e} + \frac{3}{2}, b = 0$.

• **A4. a)** $f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} & , x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}} & , x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$, $g'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$. • **A5. a)** Avem $\left(e^{-x} f(x)\right)' = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Deci $e^{-x} f(x) = c$, şi $f(x) = c e^x, x \in \mathbb{R}$; **b)** Avem: $\left(e^{2x} g(x)\right)' = e^{2x} g'(x) + 2e^{2x} g(x) = e^{2x}\left(g'(x) + 2g(x)\right) = e^{2x} = \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'$. Se obține că $e^{2x} g(x) = \frac{e^{2x}}{2} + c$, sau $g(x) = \frac{1}{2} + c \cdot e^{-2x}, x \in \mathbb{R}$.

8. Regulile lui L'Hospital (pag. 282)

• **A1. a)** Avem succesiv $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} n\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{\sin x - x\cos x}{2x \cdot x^2} = \frac{n}{2} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{n}{6}$;

c) Se scrie $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cos nx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots(k\sin kx)\ldots\cos nx\right]}{2x}=$ $=\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{2}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$

9. Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor (pag. 292)

• **E4. a)** Fie $f(x)=e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}.$ Alcătuim tabelul de variație pentru f:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	$- - - - - - - - - - - - - -\ 0\ + + + + + + + + + + + + + +$
$f(x)$	↘ ↘ $\underset{m}{0}$ ↗ ↗

Se observă că $f(x)>f(0)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ **b)** Fie $f(x)=x^2-2\ln x-1,\ x\in(0,+\infty).$ Avem $f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x}.$ Alcătuim tabelul de variație pentru f.

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f'(x)$	$- - - - - - - - - - - - - -\ 0\ + + + + + + + + + + + + + +$
$f(x)$	↘ ↘ $\underset{m}{0}$ ↗ ↗

Aşadar $f(x)\ge f(1)=0,\ \forall x\in(0,+\infty).$ • **A3.** Avem: $f'(x)=6x^2-10mx+6.$ Condiția $f'(x)\ge 0,$ $\forall x\in\mathbb{R}$ conduce la $\Delta=4(25m^2-36)\le 0,$ deci $m\in\left[-\dfrac{6}{5},\dfrac{6}{5}\right].$ • **A4.** Condiția $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R},$ implică $x^2+x-m\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R},$ deci $\Delta=1+4m\le 0.$ • **A5.** Da. Exemplu $a=2.$ • **A6.** $m<2{,}5.$ • **A7.** Ecuația $f'(x)=0$ conduce la $2ax^2+2ax-1=0,\ x\in(-1,+\infty).$ Se pun condițiile: $\Delta>0,$ $x_1>-1,\ x_2>-1.$ Se obține $\Delta>0,\ S>-2$ şi $P+S+1>0.$ Se obține $a\in(-\infty,-2).$ • **A12. f)** Fie $f(x)=e^x-1-\dfrac{x}{1}-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6},\ x\ge 0.$ Avem $f'(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2},$ $f''(x)=e^x-1-x\ge 0,$ $\forall x\in[0,+\infty].$
Alcătuim tabelul:

x	0 $+\infty$
$f''(x)$	+ +
$f'(x)$	0 ↗ ↗ ↗ ↗ ↗
$f'(x)$	+ +
$f(x)$	0 ↗ ↗ ↗ ↗ ↗

Lecturând tabelul se obține că $f(x)\ge 0,\ \forall x\ge 0.$

• **A14.** Fie $p=2a.$ Atunci, dacă $AD=x$ (figura 1) obținem $CD=a-x.$ Aria dreptunghiului este $S(x)=x(a-x),\ x\in(0,a).$ Din $S'(x)=0$ se obține $x=\dfrac{a}{2}$ deci $y=\dfrac{a}{2}$ şi ABCD este pătrat.

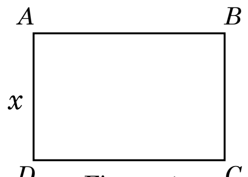


Figura 1

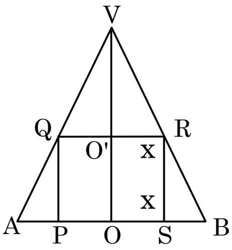


Figura 2

• **A17.** Fie $x \in (O, R)$ raza cilindrului (figura 2). Din asemănare se obține $\frac{O'R}{OB} = \frac{VO'}{VO}$ sau $\frac{x}{R} = \frac{h - RS}{h}$. Se obține că înălțimea cilindrului este $RS = h - \frac{hx}{R} = \frac{h(R-x)}{R}$. Volumul cilindrului este $\mathscr{V}(x) = \frac{\pi x^2 (R-x) h}{R}$. Din ecuația $\mathscr{V}'(x) = 0$ se obține $x = \frac{2R}{3}$.

10. Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor (pag. 298)

• **A3.** $a = \frac{1}{8}$. • **A4.** $x_n = \arcsin\sqrt{\frac{n-1}{n}}, l_1 = \frac{\pi}{2}, l_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}$. • **A5.** Avem: $f''(x) = 60(x^3 + 3x^2 - x - 3) = 60(x+3)(x^2-1)$. Soluțiile $x \in \{-1, 1, -3\}$. Se obține $A(-1, b-a-68)$, $B(1, b+a-82)$, $C(-3, b-3a-54)$. Se arată că $D = \begin{vmatrix} -1 & b-a-68 & 1 \\ 1 & b+a-82 & 1 \\ -3 & b-3a-54 & 1 \end{vmatrix} = 0$, prin scăderea primei linii din celelalte două linii. • **A7.** Funcția sinus este funcție concavă pe $[0, \pi]$. Se aplică problema A6 pentru $x = A, y = B, z = C$ şi $f(x) = -\sin x$.

CAPITOLUL IV. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

3. Rezolvarea grafică a ecuațiilor (pag. 313)

• **E1. a)** Funcția este continuă şi de două ori derivabilă fiind funcție polinomială de gradul 3. Rezultă $f'(x) = 3x^2 - 2x$, $f''(x) = 6x - 2$. Din $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$, iar dacă $f''(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{1}{3}$. Graficul intersectează axa Ox în $x = 0$ şi $x = 1$. Tabelul de variație şi graficul sunt redate în figura 1.

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + +	0 − − − − − −	− − − − − −	0 + + + + + + +	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	M (0) ↘	↘	$-\frac{4}{27}$ m ↗	$+\infty$
$f''(x)$	− − − − − − −	− − − − − −	0 i + + + + + +	+ + + + + + +	

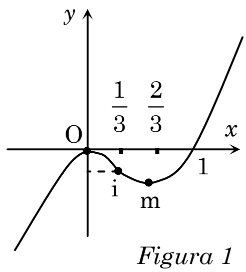


Figura 1

e) Funcția este de două ori derivabilă. Se obține $f'(x) = 5(x^4 - 1)$, cu zerourile $x \in \{-1, 1\}$ şi $f''(x) = 20x^3$, cu zeroul $x = 0$. Graficul intersectează axa Ox în punctele $x = 0, x = \pm\sqrt[4]{5}$.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + +		0	− − − − − −		− − − − − −	0	+ + + + + + +	
$f(x)$	$-\infty$	↗	M 4	↘		↘	-4 m	↗	$+\infty$
$f''(x)$	− − − − − −			− − − − − −	0 i	+ + + + + + +		+ + + + + + +	

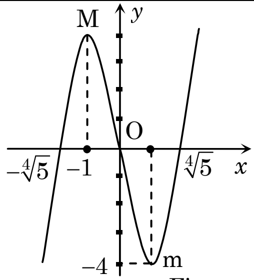


Figura 2

Graficul este redat în figura 2.

• **E2. d)** Funcția este funcție impară, deci domeniul de studiu poate fi $[0, +\infty]$. Avem:

$$f'(x)=\frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \text{ cu zeroul } x=0,\quad f''(x)=\frac{-2x^3+6x}{\left(x^2+1\right)^3} \text{ cu zerourile } x\in\left\{0, \sqrt{3}\right\} \text{ pe } [0, +\infty].$$

Graficul admite asimptotă oblică spre $+\infty$, $y = x$.

Tabelul de variație:

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	+ + + + + + + + + + +		+ + + + + + + + + + +	
$f(x)$	0	↗ ↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗ ↗	$+\infty$
$f''(x)$	0 i	+ + + + + +	0 i	− − − − − − − − −	

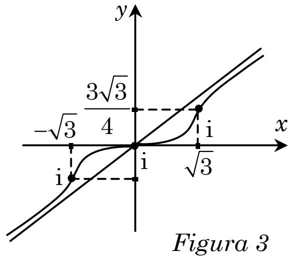


Figura 3

Graficul pe $D=\mathbb{R}$ este în figura 3. Axa Ox este tangentă graficului în $x = 0$.

f) $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Funcția este de două ori derivabilă pe D şi $f'(x)=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, cu zerourile $x\in\{0, 3\}$, $f''(x)=\frac{6x}{(x-1)^4}$, cu zeroul $x=0$. Graficul admite asimptota verticală $x=1$ şi asimptota oblică spre $\pm\infty$, $y=x+2$.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + +		0	+ + +		− − − −	0	+ + + + + +	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ | $+\infty$	↘	6,25 m	↗	$+\infty$
$f''(x)$	− − − − −		0	+ + +		+ + + + + + +		+ + + + + + +	

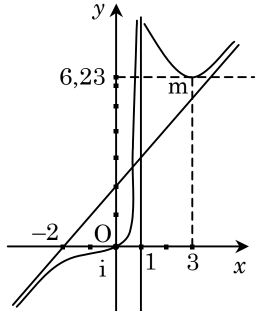


Figura 4

Graficul este redat în figura 4. Axa Ox este tangenta graficului în $x = 0$.

h) $D=\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$. Dreapta $y=1$ este asimptotă la $\pm\infty$, iar $x=2$, $x=-2$ sunt asimptote verticale. Se obține: $f'(x)=\frac{-6x}{\left(x^2-4\right)^2}$, cu zeroul $x=0$. Intersecția cu Ox în $x=\pm1$.

Tabelul de variație fără a doua derivată:

x	$-\infty$	-2 0 2	$+\infty$
$f'(x)$	$+ + + + + +$	$+ + + + + 0 - - - -$	$- - - - - -$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow \underset{\frac{1}{4}}{M} \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 1$

Graficul este redat în figura 5.

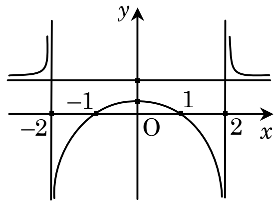


Figura 5

• **A1. d)** $D = \mathbb{R}$, funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Dreapta $y = -1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$, iar dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$. Funcția are un punct de inflexiune $x = 0$, deoarece $f''(x) = \dfrac{-3x\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^3}$; **h)** $D = \mathbb{R}$, domeniul de derivabilitate $D' = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. $f'(x) = \dfrac{3x-2}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}}, x \in D'$. Punctul $x = 0$ este punct de întoarcere deoarece $f'_s(0) = +\infty$, $f'_d(0) = -\infty$. Deoarece $f'(1) = +\infty$, punctul $x = 1$ este punct de inflexiune. Graficul admite asimptota oblică $y = x - \dfrac{1}{3}$. • **A8. a)** $m = 1$.

• **A9. a)** Se pune condiția ca ecuația $x^2 - mx + 1 = 0$ să admită două soluții reale $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Rezultă $m^2 - 4 > 0$; **b)** $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2(x^2 - 2(m+1)x + m + 3)}{(x^2 - mx + 1)^2}$. Se pune condiția ca $x^2 - 2mx + m + 3$ să păstreze suma constantă pe $\mathbb{R}$ deci $\Delta = 4(m^2 + m - 2) < 0$.

• **A10. a)** Dreapta $y = x + 3$ este asimptotă oblică dacă $a = 1$ şi $b - d = 3$. Din condiția $f'(-1) = 0 = f'(3)$ se obține că $a - 2ad + bd - c = 0$ şi $9a + 6ad + bd - c = 0$. Se obține $a = 1, b = 2, c = 1, d = -1$; **b)** Centrul de simetrie $C(\alpha, \beta)$ verifică condiția $f(\alpha) + f(2\alpha - x) = 2\beta, \forall x \in D$. Se găseşte $C(1, 4)$.