ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ŞI SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

CAPITOLUL I. PERMUTĂRI

1 NOȚIUNEA DE PERMUTARE

În clasa a X-a s-a definit noțiunea de mulțime finită ordonată şi s-a determinat numărul de funcții bijective $f : A \to B$, unde A şi B sunt mulțimi finite.

Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ o mulțime finită cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$.

> ❒ **NE REAMINTIM!**
> *Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ şi $f : \{1, 2, ..., n\} \to A$ funcție bijectivă.*
> • *Perechea (A, f) se numeşte mulțime finită ordonată.*
> *Fie A şi B mulțimi având cardinalul $|A| = n, |B| = m$.*
> • *Numărul funcțiilor bijective de la A la B este: $\begin{cases} 0, & n \neq m \\ n!, & n = m \end{cases}$.*

❖ **DEFINIȚIE**

• Se numeşte **permutare** a mulțimii A, oricare mulțime ordonată formată cu elementele acesteia.

O permutare a mulțimii A se poate scrie sub forma $\left(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}\right)$, unde $i_1, i_2, ..., i_n \in \{1, 2, ..., n\}$.

Se observă că această permutare este descrisă de funcția bijectivă $f : A \to B$, $f(a_k) = a_{i_k}, k \in \{1, 2, ..., n\}$, descriere care poate fi reprezentată şi sub forma următorului tablou:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_k & ... & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & ... & a_{i_k} & ... & a_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Pe linia întâi a tabloului sunt scrise elementele mulțimii A, iar pe linia a doua sunt scrise valorile funcției f, valori care sunt elementele lui A scrise în ordinea dată de funcția bijectivă f.

De asemenea, funcției f i se poate asocia funcția bijectivă:

$\sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$, $\sigma(k) = i_k$, funcție care poate fi reprezentată sub forma: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_k & ... & i_n \end{pmatrix}$.

În acest mod, permutarea $\left(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}\right)$ a mulțimii A este bine descrisă de funcția bijectivă σ.

De aceea studiul permutărilor mulțimii finite A cu cardinalul $|A| = n$ se poate face studiind permutările mulțimii $\{1, 2, ..., n\}$, adică a funcțiilor bijective $\sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$.

❖ **DEFINIŢIE**

- Se numeşte **permutare de gradul n** a mulţimii $A=\{1, 2, ..., n\}$ orice funcţie bijectivă $\sigma : A \to A$.

Mulţimea permutărilor de gradul n se notează S_n, iar elementele ei se vor nota de regulă cu literele greceşti $\sigma, \delta, \theta, \alpha, \beta$ ..., eventual însoţite de indici.

Se obişnuieşte ca o permutare σ de gradul n să se reprezinte astfel:

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & k & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & ... & \sigma(k) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Cardinalul mulţimii S_n este: $|S_n| = n!$.

☞ ***Exemple***

a) Pentru $n=1, A=\{1\}$ şi $S_1=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

b) Pentru $n=2, A=\{1, 2\}$ şi $S_2=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

c) Pentru $n=3, A=\{1, 2, 3\}$ şi $S_3=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \right.$

$\left.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

PERMUTĂRI DE GRADUL n PARTICULARE

a) Permutarea $e \in S_n, e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & k & ... & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & k & ... & n \end{pmatrix}$ se numeşte **permutarea identică** de gradul n.

b) Permutarea $\delta_{ij} \in S_n$, de forma:

$$\delta_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & i-1 & i & i+1 & ... & k & ... & j-1 & j & j+1 & ... & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & i-1 & j & i+1 & ... & k & ... & j-1 & i & j+1 & ... & n \end{pmatrix},$$ care

schimbă doar elementele i şi j între ele, celelalte rămânând neschimbate, se numeşte **transpoziţie**.

Transpoziţia δ_{ij} poate fi descrisă prin următoarea lege de corespondenţă:

$$\delta_{ij}(k)=\begin{cases} i, & k=j \\ j, & k=i \\ k, & k \neq i, k \neq j \end{cases}.$$

☞ ***Exemplu***

Pentru $n = 3$ există transpozițiile:

$$\delta_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \delta_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \delta_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se observă că $\delta_{12} = \delta_{21},\ \delta_{13} = \delta_{31},\ \delta_{23} = \delta_{32}$.

❷ OPERAȚII CU PERMUTĂRI. PROPRIETĂȚI

2.1. COMPUNEREA PERMUTĂRILOR DE GRADUL n

Fie $\sigma, \delta \in S_n$. Deoarece aceste permutări au același domeniu și același codomeniu, are sens operația de compunere a acestora, obținându-se funcțiile $\sigma \circ \delta$ și $\delta \circ \sigma$ pe mulțimea $A = \{1, 2, ..., n\}$ cu valori în mulțimea A.

Permutările σ și δ fiind funcții bijective, se obține că funcțiile $\sigma \circ \delta, \delta \circ \sigma$ sunt funcții bijective, deci permutări de gradul n.

Așadar, **compunerea permutărilor** $\sigma, \delta \in S_n$ sau **produsul permutărilor** $\sigma, \delta \in S_n$ este permutarea $\sigma \circ \delta : A \to A,\ (\sigma \circ \delta)(k) = \sigma(\delta(k)),\ \forall\ k \in A.$

Compunerea de permutări $\sigma \circ \delta$ se notează mai simplu $\sigma\delta$.

Operația care asociază oricăror două permutări $\sigma, \delta \in S_n$ permutarea $\sigma\delta \in S_n$ se numește **operația de compunere (înmulțire)** a permutărilor de gradul n.

Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix},\ \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \delta(1) & \delta(2) & ... & \delta(n) \end{pmatrix}$, atunci produsul $\sigma\delta$ se scrise sub forma $\sigma\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(\delta(1)) & \sigma(\delta(2)) & ... & \sigma(\delta(n)) \end{pmatrix}$.

☞ ***Exemplu***

Fie $\sigma, \delta \in S_3,\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Să calculăm $\sigma\delta$ și $\delta\sigma$.

Avem:

$$\sigma\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(\delta(1)) & \sigma(\delta(2)) & \sigma(\delta(3)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(3) & \sigma(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

◢ **Temă**

Efectuați:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\delta\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \delta(\sigma(1)) & \delta(\sigma(2)) & \delta(\sigma(3)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \delta(3) & \delta(1) & \delta(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se observă că $\sigma\delta \neq \delta\sigma$.

2.2. PROPRIETĂȚI ALE COMPUNERII PERMUTĂRILOR DE GRADUL n

▣ **P1. Proprietatea de asociativitate**

Compunerea permutărilor de gradul n este operație asociativă:

$\forall\ \sigma, \alpha, \beta \in S_n \Rightarrow (\sigma\alpha)\beta = \sigma(\alpha\beta)$.

Această proprietate rezultă din faptul că operația de compunere a funcțiilor este asociativă.

▣ **P2. Proprietatea elementului neutru**

Permutarea identică de gradul n, $e \in S_n$, este **element neutru** pentru operația de compunere a permutărilor de gradul n:

$\forall\ \sigma \in S_n$, au loc egalitățile $\sigma e = e\sigma = \sigma$.

▣ **P3.** Orice permutare de gradul n are **inversă**.

$\forall\ \sigma \in S_n$, $\exists\ \sigma^{-1} \in S_n$ astfel încât $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.

Permutarea σ^{-1} se numeşte **inversa permutării** σ.

Pentru determinarea inversei permutării

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(k) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ se au în vedere corespondențele

$k \xrightarrow{\sigma} \sigma(k)$ şi $\sigma(k) \xrightarrow{\sigma^{-1}} k$. Aşadar, $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(k) & \ldots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & n \end{pmatrix}$,

după care se ordonează prima linie.

☞ ***Exemplu***

Fie permutarea de gradul 5, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Inversa permutării σ este permutarea $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, care după ordonarea liniei întâi devine: $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Se verifică uşor că $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.

▣ **P4.** Compunerea permutărilor de gradul n nu este operație comutativă.

Aşadar, $\exists\ \sigma, \delta \in S_n$ astfel încât $\sigma\delta \neq \delta\sigma$.

☞ ***Exemplu***

$$\sigma\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\delta\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}.$$

Se observă că $\sigma\delta\neq\delta\sigma$.

2.3. PUTEREA UNEI PERMUTĂRI DE GRADUL n

Fie $\sigma\in S_n$. Notăm $\sigma^0=e$, $\sigma^1=\sigma$, $\sigma^2=\sigma\sigma$.

Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se defineşte $\sigma^n=\sigma^{n-1}\cdot\sigma$.

▣ PROPOZIȚIE

Fie $\sigma\in S_n$. Au loc relațiile:

a) $\sigma^m\sigma^n=\sigma^{m+n}$, $\forall$ m, $n\in\mathbb{N}$;

b) $\left(\sigma^m\right)^n=\sigma^{mn}$, $\forall$ m, $n\in\mathbb{N}$.

Demonstrația se face folosind asociativitatea operației de compunere (temă).

Problemă rezolvată

☒ Fie $\sigma\in S_4$, $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$. Să se calculeze σ^2, σ^3, σ^4, σ^{103}.

<u>Soluție</u>

Avem: $\sigma^2=\sigma\cdot\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}.$

$\sigma^3=\sigma^2\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}.$

$\sigma^4=\sigma^3\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=e.$

$\sigma^{103}=\sigma^{4\cdot25+3}=\sigma^{4\cdot25}\sigma^3=\left(\sigma^4\right)^{25}\sigma^3=e\sigma^3=\sigma^3.$

◢ **Temă**

Calculați:

a) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}^{91}$;

b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}^{100}$;

c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&4&2\end{pmatrix}^{45}$.

2.4. PROPRIETĂȚI ALE TRANSPOZIȚIILOR

P1. Fie $\delta_{ij}\in S_n$ o transpoziție. Au loc relațiile:

a) $\delta_{ij}=\delta_{ji}$; **b)** $\delta_{ij}^2=e$; **c)** $\delta_{ij}^{-1}=\delta_{ij}$.

Demonstrație

a) Se foloseşte definiția transpoziției.

b) $(\delta_{ij} \circ \delta_{ji})(i) = \delta_{ij}(j) = i$; $(\delta_{ij} \circ \delta_{ij})(j) = \delta_{ij}(i) = j$.

Pentru $k \neq i$, $k \neq j$ avem $(\delta_{ij} \circ \delta_{ij})(k) = \delta_{ij}(\delta_{ij}(k)) = \delta_{ij}(k) = k$.

Aşadar $\delta_{ij}^2 = e$.

c) În egalitatea $\delta_{ij} \circ \delta_{ij} = e$, compunând cu δ_{ij}^{-1} se obține $\delta_{ij} = \delta_{ij}^{-1}$. ■

▣ CONSECINȚĂ

Numărul tuturor transpozițiilor de gradul n este $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Demonstrație

Într-adevăr, din proprietatea a) rezultă că numărul tuturor transpozițiilor de grad n este egal cu numărul submulțimilor $\{i, j\}$ ale mulțimii $\{1, 2, ..., n\}$, număr egal cu C_n^2. ■

❐ NE REAMINTIM!

- $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$;
- $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$;
- $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$.

P2. Orice permutare de gradul n se scrie ca produs de transpoziții. Această scriere nu este unică.

Exerciţiu rezolvat

☒ Să se scrie ca produs de transpoziții permutarea de gradul 4: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție

Se observă că $\sigma(1) = 3$, adică $\sigma(1) \neq 1$. Pentru a schimba 3 cu 1 se consideră transpoziția δ_{13} şi se face compunerea:

$\delta_{13}\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_1$. Deoarece $\sigma_1(2) = 4$, adică $\sigma_1(2) \neq 2$ pentru a schimba 4 cu 2 se alege transpoziția δ_{42} şi se efectuează compunerea: $\delta_{42}\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \delta_{43}$.

Aşadar, $\delta_{43} = \delta_{42}\sigma_1 = \delta_{42}\delta_{13}\sigma$. Compunând la stânga cu $\delta_{42}^{-1} = \delta_{42}$ şi apoi cu $\delta_{13}^{-1} = \delta_{13}$ se obține $\sigma = \delta_{13}\delta_{42}\delta_{43}$.

O altă descompunere se obține considerând transpoziția δ_{14} şi efectuând $\sigma\delta_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \theta_1$. Apoi se consideră transpoziția δ_{23} şi se efectuează $\theta_1\delta_{23} = \delta_{43}$. Aşadar $\delta_{43} = \theta_1\delta_{23} = \sigma\delta_{14}\delta_{23}$. Compunând la dreapta cu $\delta_{23}^{-1} = \delta_{23}$ şi apoi cu $\delta_{14}^{-1} = \delta_{14}$ se obține $\sigma = \delta_{43}\delta_{23}\delta_{14}$.

❸ INVERSIUNILE UNEI PERMUTĂRI SEMNUL UNEI PERMUTĂRI

Fie $\sigma \in S_n$ şi $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $i < j$.

❖ **DEFINIȚIE**

• Perechea (i, j) se numeşte **inversiune** a permutării σ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$. Numărul inversiunilor permutării σ se notează $m(\sigma)$.

☞ ***Exemplu***

Fie $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Inversiunile acestei permutări sunt perechile $(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)$. Aşadar $m(\sigma) = 7$.

➲ **OBSERVAȚII**

1. Permutarea identică e are $m(e) = 0$.

2. Permutarea $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & ... & 2 & 1 \end{pmatrix}$ are $m(\pi) = 1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$.

3. În general are loc relația $0 \le m(\sigma) \le C_n^2$, $\forall\ \sigma \in S_n$.

❖ **DEFINIȚII**

• Se numeşte **semnul (signatura)** permutării σ, numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$.

• Permutarea σ se numeşte **permutare pară** dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$.

• Permutarea σ se numeşte **permutare impară** dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$.

▣ **PROPOZIȚIA 1**

Orice transpoziție este permutare impară.

Demonstrație

Fie transpoziția $\delta_{ij} \in S_n$. Pentru $i < k < j$, inversiunile acestei transpoziții sunt toate perechile (i, k) şi (k, j) la care se adaugă perechea (i, j).

Avem $m(\delta_{ij}) = 2(j-i-1)+1 = 2(j-i)-1$. Aşadar, $\varepsilon(\delta_{ij}) = (-1)^{2(j-i)-1} = -1$ şi, ca urmare, δ_{ij} este permutare impară. ■

▣ PROPOZIȚIA 2

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\delta \in S_n$. Atunci $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$. (1)

<u>*Demonstrație*</u>

Produsul din relația (1) are C_n^2 factori. Dacă $\sigma(j) = k$ şi $\sigma(i) = l$, atunci $k \ne l$ (σ este funcție bijectivă). Pentru $k > l$, factorul $\sigma(j)-\sigma(i) = k-l$ se simplifică cu factorul $(k-l)$ de la numitor, obținându-se 1.

Pentru $k < l$, prin simplificare, se obține –1, iar perechea (i, j) este inversiune.

După toate simplificările se obține $\prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = (-1)^{m(\sigma)} = \varepsilon(\sigma)$. ■

☞ <u>***Exemplu***</u>

Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Avem $\prod_{1\le i<j\le 3} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \frac{1-3}{2-1}\cdot\frac{2-3}{3-1}\cdot\frac{2-1}{3-2} = (-1)(-1) = (-1)^2 = (-1)^{m(\sigma)} = 1$.

Aşadar σ este permutare pară.

Signatura compunerii a două permutări se poate calcula folosind următorul rezultat.

▣ PROPOZIȚIA 3

Dacă $\sigma, \delta \in S_n$ atunci $\varepsilon(\sigma\delta) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\delta)$.

<u>*Demonstrație*</u>

Folosind Propoziția 2 avem:

$$\varepsilon(\sigma\delta) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(\delta(j))-\sigma(\delta(i))}{j-i} = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(\delta(j))-\sigma(\delta(i))}{\delta(j)-\delta(i)} \cdot \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\delta(j)-\delta(i)}{j-i} =$$

$= \varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(\delta)$, ceea ce justifică enunțul. ■

◢ **Temă**

1. Fie $\sigma, \delta \in S_n$. Să se demonstreze că:

a) $\sigma\delta$ este permutare pară $\Leftrightarrow \sigma$ şi δ au acelaşi semn;

b) $\sigma\delta$ este permutare impară $\Leftrightarrow \sigma$ şi δ au semne diferite.

2. Să se stabilească semnul permutărilor σ şi σ^{-1}.

▣ PROPOZIȚIA 4

Fie A_n mulțimea tuturor permutărilor pare de gradul n. Atunci cardinalul acestei mulțimi este $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

Demonstrație

Notăm $I_n = S_n \setminus A_n$. Definim funcția $f: A_n \to I_n,\ f(\sigma) = \sigma \cdot \delta_{ij}$, unde δ_{ij} este o transpoziție fixată. Demonstrăm că f este bijectivă. Fie $\alpha,\ \beta \in S_n$ şi $f(\alpha) = f(\beta)$. Rezultă succesiv $\alpha\delta_{ij} = \beta\delta_{ij} \Rightarrow (\alpha\delta_{ij})\delta_{ij}^{-1} = (\beta\delta_{ij})\delta_{ij}^{-1} \Rightarrow \alpha = \beta$, adică f este injectivă.

Fie $\theta \in I_n,\ \varepsilon(\theta) = -1$. Avem $\theta \cdot \delta_{ij} \in A_n$, deoarece $\varepsilon(\theta\delta_{ij}) = \varepsilon(\theta)\varepsilon(\delta_{ij}) = (-1)(-1)$ şi $f(\theta\delta_{ij}) = \theta\delta_{ij}\delta_{ij} = \theta$. Rezultă că funcția f este surjectivă. În concluzie, f este bijectivă şi $|A_n| = |I_n|$. Deoarece $S_n = A_n \cup I_n$ şi $A_n \cap I_n = \varnothing$, rezultă egalitatea $|A_n| = |I_n| = \frac{n!}{2}$. ■

Problemă rezolvată

☒ Să se determine:

a) numărul permutărilor pare din mulțimea S_8;

b) cardinalul mulțimii S_n, dacă $|A_n| = 15(n-2)!$.

Soluție

a) Avem egalitatea $|A_8| = \frac{|S_8|}{2} = \frac{8!}{2} = 20160$.

b) Avem relația $\frac{n!}{2} = 15(n-2)!$, care este echivalentă cu $\frac{n(n-1)}{2} = 15$.

Se obține $n = 6$. Rezultă că mulțimea S_6 are $6! = 720$ elemente.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Fie A o mulțime nevidă cu n elemente. Să se determine gradul permutărilor ei ştiind că S_n are:**

a) 24 de elemente;
b) 720 de elemente;
c) 5040 de elemente.

E2. **Să se calculeze $\sigma\pi$, $\pi\sigma$, σ^2, π^2, $(\sigma\pi)^3$, în cazurile:**

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

E3. Fie $\sigma, \delta \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice dacă $\sigma\delta = \delta\sigma$ şi $(\sigma\delta)^2 = \delta^2\sigma^2$.

b) Să se determine $\sigma^{-1}, \delta^{-1}, (\sigma\delta)^{-1}, \sigma^{-1}\delta^{-1}$.

E4. Fie permutările $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Să se rezolve ecuaţiile $x\alpha = \beta$ şi $\beta y = \alpha^3$.

E5. Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\sigma^k = e$, în cazurile:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze σ^{100}, σ^{203}, σ^{2007} în fiecare caz.

E6. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine mulţimea $M = \{\sigma, \sigma^2, \sigma^3, ..., \sigma^n, ...\}$.

E7. Să se scrie transpoziţiile de gradul 4, respectiv 5.

E8. Să se determine numărul inversiunilor şi signatura permutărilor:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

APROFUNDARE

A1. Fie permutările: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\sigma\theta\varepsilon, \sigma^{-1}\theta^{-1}\varepsilon^{-1}$, $(\varepsilon\theta\sigma)^{-1}$.

b) Să se calculeze $\sigma^{2007}, \theta^{2005}, \varepsilon^{2010}$.

c) Să se rezolve ecuaţiile $\sigma x = \theta$, $\sigma y\varepsilon = \theta$, $z\sigma^{2005} = \theta^{2000}\varepsilon^{2006}$.

A2. Fie $\alpha, \beta \in S_5$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine numărul de inversiuni şi signatura acestor permutări.

b) Să se rezolve ecuaţiile $\alpha^{11}x = \beta^{110}$, $\alpha^{301}x\beta^{1027} = (\alpha\beta)^{-2005}$, $\alpha x = x\alpha$, $\alpha x = x\beta$.

A3. Fie $\sigma \in S_n$. Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^k = e$.

A4. Fie $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Să se determine σ^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

A5. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$, ştiind că S_n are 45 de transpoziţii.

A6. Fie A_n mulţimea permutărilor pare ale unei mulţimi cu n elemente. Să se determine n, ştiind că A_n are cardinalul:

a) $\dfrac{(n+4)!}{6!}$; b) $\dfrac{(n+3)!}{28 \cdot 4!}$.

A7. Fie $\sigma, \varepsilon \in S_8$,

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & i & 2 & 1 & j \end{pmatrix}$,

$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & k & 5 & p & 3 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Să se determine permutările astfel încât σ să fie impară, iar ε să fie pară.

A8. **Fie** $\sigma, \alpha \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

şi $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(n) & \sigma(n-1) & \dots & \sigma(1) \end{pmatrix}$.

Ştiind că $m(\sigma) = k$, **să se calculeze** $m(\alpha)$.

A9. **Se consideră permutările:**

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$.

a) Să se determine $m(\alpha) + m(\beta)$.

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ **pentru care** α **este permutare pară, respectiv** β **este permutare impară.**

A10. **Să se scrie ca produs de transpoziții permutările:**

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

A11. **Să se determine permutările** $\sigma, \delta \in S_n$, **în cazurile:**

a) $\dfrac{\sigma(1)}{1} = \dfrac{\sigma(2)}{2} = \dots = \dfrac{\sigma(n)}{n}$;

b) $\dfrac{\delta(1)}{n} = \dfrac{\delta(2)}{n-1} = \dots = \dfrac{\delta(n)}{1}$.

A12. **Fie** $\alpha, \beta \in S_n$. **Să se arate că:**

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha(1)}{\beta(1)} = \frac{\alpha(2)}{\beta(2)} = \dots = \frac{\alpha(n)}{\beta(n)}.$$

A13. **Să se rezolve ecuațiile:**

a) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

A14. **Fie numărul 5213. Făcând toate permutările cifrelor acestui număr şi ordonând crescător numerele obținute, să se precizeze ce loc ocupă în şir numerele:**
a) 2135; b) 3521; c) 5213.

A15. **Se consideră numărul natural** $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5} = 25143$.
Să se calculeze suma

$$s = \sum_{\sigma \in S_5} \overline{a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)}a_{\sigma(5)}}.$$

DEZVOLTARE

D1. **Să se determine toate permutările** $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$ **astfel încât numerele** $1+\sigma(1), 2+\sigma(2), \dots, n+\sigma(n)$ **să formeze:**
a) o progresie aritmetică;
b) o progresie geometrică.

D2. **Se dau numerele strict pozitive** $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. **Să se determine permutarea** $\sigma \in S_n$ **pentru care suma:**

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$ **este maximă (minimă);**

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i a_{\sigma(i)}$ **este maximă (minimă).**

D3. **Fie** $H \subset S_n$, $H \neq \varnothing$ **cu proprietatea că** $\forall\ \sigma, \theta \in H \Rightarrow \sigma\theta \in H$. **Să se arate că:**
a) permutarea identică $e \in H$;
b) dacă $\sigma \in H \Rightarrow \sigma^{-1} \in H$.

D4. Fie $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$. Dacă $\sigma\alpha = \alpha\sigma$, $\forall\ \alpha \in S_n$, atunci $\sigma = e$.

D5. Să se studieze surjectivitatea funcției $f : S_4 \to S_4$, $f(\alpha) = \alpha^4$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine $\sigma\theta, \theta\sigma, \sigma^{-1}, \theta^{-1}$.

b) Verificați dacă are loc egalitatea $(\sigma\theta)^{-1} = \theta^{-1}\sigma^{-1}$.

2. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\sigma^{-1}, \delta^{-1}, \sigma^{2005}, \delta^{2006}$.

b) Să se rezolve ecuațiile $\sigma x = \delta$, $\delta x \sigma^{2005} = \delta^{2006}$.

3. Să se determine semnul permutării $\sigma \in S_7$, dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Testul 2

1. Fie $\sigma, \pi \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice dacă $\sigma^4 = e$ şi $\pi^3 = e$.

b) Să se rezolve ecuațiile $\sigma^{258}x = \pi^{301}$, $y\sigma^{145} = \pi^{98}$.

2. Să se rezolve în S_3 sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = y \\ x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot y \end{cases}.$$

3. Fie $\sigma \in S_8$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 6 & 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine $m(\sigma)$ şi $\varepsilon(\sigma)$.

b) Câte soluții are ecuația $x^2 = \sigma$?

4. Să se scrie ca produs de transpoziții permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

CAPITOLUL II. MATRICE

1 TABEL MATRICEAL. MATRICE MULȚIMI DE MATRICE

Să considerăm următorul enunț din domeniul economiei.

„Un depozit de materiale se aprovizionează eşalonat pe o perioadă de 4 luni cu un anumit produs după următorul plan:

– în prima lună se aprovizionează cu 100 de bucăți, la prețul unitar de 3 000 unități monetare (u.m.);

– în a doua lună se aprovizionează cu 120 de bucăți la prețul unitar de 3 500 u.m.;

– în luna a treia primeşte cu 10 bucăți mai puțin decât în luna precedentă, cu prețul pe unitate de produs de 3 200 u.m., iar în luna a patra comandă o cantitate dublă față de prima lună plătind 3 200 u.m. pe unitatea de produs.“

Pentru ținerea unei evidențe cât mai clare, aceste date pot fi ordonate şi clasate în diverse moduri, astfel încât obținerea unor informații legate de acest proces de aprovizionare să se realizeze cât mai eficient.

Astfel, datele de mai sus pot fi grupate într-un tabel de forma:

Luna	1	2	3	4
Cantitate	100	120	110	200
Preț unitar	3 000	3 500	3 200	3 200

Într-un mod mai simplificat, aceste date pot fi reorganizate într-un tabel de forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 100 & 120 & 110 & 200 \\ 3\,000 & 3\,500 & 3\,200 & 3\,200 \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{pmatrix} 100 & 120 & 110 & 200 \\ 3\,000 & 3\,500 & 3\,200 & 3\,200 \end{pmatrix}.$$

Un astfel de tabel se numeşte **tabel matriceal**.

Primul tabel matriceal este format din 3 linii şi 4 coloane (este de tipul 3×4), iar al doilea tabel matriceal este format din 2 linii şi 4 coloane (este de tipul 2×4).

Dacă se ia în considerare numai linia care conține cantitățile achiziționate lunar, se obține un tabel de forma $\begin{pmatrix}100 & 120 & 110 & 200\end{pmatrix}$ numit **tabel matriceal linie**.

Dacă se consideră numai datele care caracterizează fenomenul în luna a treia se obține un tabel de forma $\begin{pmatrix} 3 \\ 110 \\ 3\ 200 \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} 110 \\ 3\ 200 \end{pmatrix}$, numit **tabel matriceal coloană**.

Aşadar, prin organizarea unor date legate de un fenomen în asemenea tabele matriceale, se stabileşte de fapt o corespondență între poziția ocupată de un număr din tabel şi valoarea acestuia.

Poziția numărului din tabelul matriceal este uşor de identificat printr-o pereche ordonată de numere naturale $(i,\ j)$ care arată că numărul se află pe linia i şi pe coloana j a tabelului.

Generalizarea unei astfel de corespondențe, făcându-se abstracție de natura materială a datelor folosite, conduce la introducerea unei noi noțiuni matematice.

❖ **DEFINIȚIE**

- Fie $m,\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $\mathbb{N}_m = \{1,\ 2,\ ...,\ m\}$, $\mathbb{N}_n = \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ şi $\mathbb{C}$ mulțimea numerelor complexe.
  Se numeşte **matrice de tipul $(m,\ n)$** cu elemente numere complexe, o funcție $A : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \to \mathbb{C}$, $A(i,\ j) = a_{ij}$, $i \in \mathbb{N}_m$, $j \in \mathbb{N}_n$.

Valorile $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ale funcției A se numesc **elementele matricei A**.

Matricea A se poate reprezenta sub forma unui tablou dreptunghiular cu m linii şi n coloane, astfel:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Datorită acestei reprezentări, în loc de matrice de tipul $(m,\ n)$ se poate spune **matrice cu m linii şi n coloane**.

Elementul a_{ij}, $i \in \mathbb{N}_m$, $j \in \mathbb{N}_n$ se află la intersecția liniei i (primul indice) cu coloana j (al doilea indice).

Prescurtat, matricea A se notează $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ sau $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Mulțimea matricelor de tipul $(m,\ n)$ cu elemente numere complexe, se notează $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. În mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ se disting câteva submulțimi importante:

- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})=$ mulțimea matricelor de tipul (m, n) cu elemente numere reale;
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})=$ mulțimea matricelor de tipul (m, n) cu elemente numere raționale;
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})=$ mulțimea matricelor de tipul (m, n) cu elemente numere întregi.

Între aceste mulțimi de matrice există relațiile:

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})\subset\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})\subset\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\subset\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$$

CAZURI PARTICULARE DE MATRICE:

Fie matricea $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

1. Dacă $n=1$, matricea A este de tipul $(m, 1)$ şi se numeşte **matrice coloană**: $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

2. Dacă $m=1$, matricea A este de tipul $(1, n)$ şi se numeşte **matrice linie**: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$.

3. Dacă $m=n$, se obține o matrice de tipul (n, n) şi se numeşte **matrice pătratică de ordinul n**.

Aceasta are reprezentarea următoare:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sistemul ordonat de elemente $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ se numeşte **diagonala principală a matricei A**, iar sistemul ordonat de elemente $(a_{1n}, a_{2\ n-1}, \dots, a_{n1})$ se numeşte **diagonala secundară a matricei A**.

Suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A se numeşte **urma matricei A** şi se notează $\mathbf{Tr(A)}$.

Mulțimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente numere complexe se notează $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4. Matricea de tipul (m, n) cu toate elementele egale cu zero se numeşte **matricea nulă** şi se notează $O_{m,n}$.

EGALITATEA MATRICELOR

Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$.

❖ **DEFINIȚIE**

- Matricele A şi B se numesc **matrice egale**, dacă $a_{ij} = b_{ij}$ pentru fiecare $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se determine a, b, x, y, m $\in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea de matrice $A = B$, pentru: $A = \begin{pmatrix} a^2 + 5i & 2b+1 \\ 2^x + 3^y & 2^x + 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1+mi & 7 \\ 31 & 6 \end{pmatrix}$.

Soluție

Din egalitatea $a_{11} = b_{11}$ rezultă $a^2 + 5i = 1 + mi$. Aplicând egalitatea a două numere complexe se obține $a^2 = 1$ şi $m = 5$, deci $a \in \{-1, 1\}$, $m = 5$.

Din egalitatea $a_{12} = b_{12}$ rezultă $2b + 1 = 7$ şi $b = 3$. Egalitățile $a_{21} = b_{21}$ şi $a_{22} = b_{22}$ conduc la relațiile $2^x + 3^y = 31$ şi $2^x + 2 = 6$. Se obține $x = 2$ şi $y = 3$.

➲ **OBSERVAȚII**

1. Folosind proprietățile relației de egalitate pe mulțimea $\mathbb{C}$, relația de egalitate pe mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ are următoarele proprietăți:

- $A = A, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ **(proprietatea de reflexivitate)**;
- dacă $A = B$, atunci $B = A, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ **(proprietatea de simetrie)**;
- dacă $A = B$ şi $B = C$, atunci $A = C, \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ **(proprietatea de tranzitivitate)**.

2. Dacă matricele A, B nu sunt egale, se scrie $A \neq B$.

❷ OPERAȚII CU MATRICE

2.1. ADUNAREA MATRICELOR

Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$.

❖ **DEFINIȚII**

- Se numeşte **suma matricelor A şi B**, matricea $C = (c_{ij})_{m\times n}$ ale cărei elemente sunt date de egalitățile:
  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., m\}$ şi $j \in \{1, 2, ..., n\}$.
  Suma matricelor A şi B se notează $A + B$.

- Operația prin care oricăror două matrice din mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ li se asociază suma lor se numeşte **adunarea matricelor**.

☞ ***Exemple***

1. Dacă $A=\begin{pmatrix}-1 & 2+i\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}4 & -3-2i\\ \frac{2}{3} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$, atunci $A+B=\begin{pmatrix}3 & -1-i\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

2. Dacă $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 4\\ \sqrt{2} & 5 & -1 & 3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & -2\\ -\sqrt{2} & -2 & 3 & -4\end{pmatrix}$, atunci:

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

PROPRIETĂŢI ALE ADUNĂRII MATRICELOR

P1. Adunarea matricelor este comutativă:
$\mathbf{A+B=B+A,\ \forall\ A,\ B\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})}$.

Într-adevăr, dacă $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$, atunci $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ şi $B+A=(b_{ij}+a_{ij})_{m\times n}$.

Deoarece adunarea numerelor complexe este operație comutativă, rezultă că $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij},\ \forall\ i\in\{1, 2, ..., m\}$ şi $j\in\{1, 2, ...\ n\}$.

Aşadar, $A+B=B+A$.

P2. Adunarea matricelor este asociativă:
$\mathbf{(A+B)+C=A+(B+C),\ \forall\ A,\ B,\ C\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})}$.

Într-adevăr, dacă $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$, $C=(c_{ij})_{m\times n}$, folosind asociativitatea operației de adunare a numerelor complexe se obține succesiv:

$$(A+B)+C=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}+(c_{ij})_{m\times n}=((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})_{m\times n}=$$
$$=(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))_{m\times n}=A+(B+C).$$

P3. Matricea nulă $\mathbf{O_{m,n}}$ este element neutru pentru adunarea matricelor: $\mathbf{A+O_{m,n}=O_{m,n}+A=A,\ \forall\ A=(a_{ij})_{m\times n}}$.

Într-adevăr, $A+O_{m,n}=(a_{ij}+0)_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=A=(0+a_{ij})_{m\times n}=O_{m,n}+A$.

P4. Pentru orice matrice $\mathbf{A\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})}$ există matricea $\mathbf{A'=-A=(-a_{ij})_{m\times n}}$, astfel încât $\mathbf{A+A'=A'+A=O_{m,n}}$.

Matricea $(-A)$ se numeşte **opusa matricei A**.

☞ ***Exemplu***

Dacă $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3i\\ 2 & \sqrt{5} & 0\end{pmatrix}$, atunci opusa ei este $-A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3i\\ -2 & -\sqrt{5} & 0\end{pmatrix}$.

➲ **OBSERVAŢII**

- Dacă $A, B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci suma $A+(-B)$ se notează $A-B$ şi se numeşte **diferenţa matricelor A şi B**.
- Operaţia prin care oricăror două matrice $A, B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ li se asociază diferenţa lor se numeşte **scăderea matricelor**.

☞ ***Exemplu***

Dacă $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, atunci $A-B=\begin{pmatrix}1-(-3) & 1-(-4)\\ -1-3 & 2-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -4 & 4\end{pmatrix}$.

2.2. ÎNMULŢIREA MATRICELOR CU SCALARI

Fie $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})_{m\times n}$ şi $k\in\mathbb{C}$.

❖ **DEFINIŢII**

- Se numeşte **produsul dintre scalarul k şi matricea A**, matricea $B=(b_{ij})_{m\times n}$ ale cărei elemente sunt date de egalităţile $b_{ij}=ka_{ij}$, $\forall\ i\in\{1, 2, ..., m\}$, $j\in\{1, 2, ..., n\}$.

  Produsul dintre matricea A şi scalarul k se notează kA.
- Operaţia prin care fiecărei perechi $(k, A)\in\mathbb{C}\times\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea kA se numeşte **operaţia de înmulţire a matricelor cu scalari**.

☞ ***Exemplu***

Fie $k=i$ şi $A=\begin{pmatrix}-1 & -i & 2i\\ 1-2i & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$. Atunci $iA=\begin{pmatrix}-i & 1 & -2\\ 2+i & 0 & i\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

❒ **REŢINEM!**

• Pentru a înmulţi o matrice cu un scalar, se înmulţeşte fiecare element al matricei cu acel scalar.

PROPRIETĂŢI ALE ÎNMULŢIRII MATRICELOR CU SCALARI

Ţinând seama de proprietăţile operaţiilor de adunare şi înmulţire a numerelor complexe, se verifică următoarele proprietăţi ale înmulţirii matricelor cu scalari:

P1. $1\cdot A=A,\ \forall\ A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P2. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) A,\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P3. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A,\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P4. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{C},\ A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P5. $\alpha \cdot A = O_{m,n} \Leftrightarrow \alpha = 0$ sau $A = O_{m,n}$.

2.3. ÎNMULŢIREA MATRICELOR

Fie matricea $A = (a_{ij})_{m \times n}$ şi matricea $B = (b_{ij})_{n \times p}$.

❖ **DEFINIŢIE**

• Se numeşte **produsul matricelor A, B** (în această ordine), matricea $C = (c_{ij})_{m \times p}$ ale cărei elemente sunt date de egalităţile:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk},\ i \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

$k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Produsul matricelor A şi B se notează $A \cdot B$ sau AB.

Operaţia prin care fiecărei perechi de matrice $(A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea $AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$ se numeşte **înmulţirea matricelor**.

➲ **OBSERVAŢII ŞI PRECIZĂRI**

1. Elementul c_{ik} al matricei produs AB se obţine ca sumă a produselor dintre elementele liniei „i" a matricei A cu elementele corespunzătoare din coloana „k" a matricei B.

Această corespondenţă este indicată de diagrama următoare:

$$\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \ldots & \boxed{a_{in}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ldots & \boxed{b_{1k}} & \ldots \\ \ldots & \boxed{b_{2k}} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \boxed{b_{nk}} & \ldots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} & \ldots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Regula de înmulţire a două matrice se denumeşte pe scurt **regula de înmulţire a liniilor cu coloanele** sau **regula linie-coloană**.

2. • Produsul AB are sens dacă numărul de coloane ale matricei A este egal cu numărul de linii ale matricei B.

• Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci $AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$.

3. • Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, atunci au sens produsele AB şi BA.

- Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci înmulțirea matricelor este peste tot definită (are sens atât AB cât şi BA).

4. În general $AB \neq BA$ (înmulțirea matricelor nu este operație comutativă).

☞ ***Exemplu***

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ şi $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

Se observă că numărul de coloane ale matricei A este egal cu numărul de linii ale matricei B. Aşadar, se poate calcula matricea produs $AB = (c_{ij})_{2\times 2}$ cu următoarele elemente:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1\cdot 4 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 3 = -1$$
$$c_{12} = a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-3) = 4$$
$$c_{21} = a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} + a_{23}\cdot b_{31} = 3\cdot 4 + 0\cdot(-1) + (-2)\cdot 3 = 6$$
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} + a_{23}\cdot b_{32} = 3\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-2)\cdot(-3) = 9$$

Se obține matricea $AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pentru matricele A, B se poate efectua totodată şi produsul $BA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, egal cu $BA = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Se observă că $AB \neq BA$, ceea ce justifică faptul că înmulțirea matricelor nu este comutativă.

PROPRIETĂŢI ALE ÎNMULŢIRII MATRICELOR

> **▣ TEOREMA 1**
> Înmulțirea matricelor este **asociativă**: dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ şi $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, atunci are loc egalitatea $\mathbf{(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)}$.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$ şi $C = (c_{kl})_{p\times q}$.

Notăm $A\cdot B = (d_{ik})_{m\times p}$ şi $(A\cdot B)\cdot C = (e_{il})_{m\times q}$.

Atunci $d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ şi $e_{il} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$. (1)

Să notăm $B \cdot C = (u_{jl})_{n\times q}$ şi $A \cdot (B \cdot C) = (v_{il})_{m\times q}$. Avem $u_{jl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot c_{kl}$ şi

$$v_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{jl} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} \right) \cdot a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl}. \quad (2)$$

Din relațiile (1) şi (2) rezultă că $e_{il} = v_{il}$ pentru oricare $i \in \{1, 2, ..., m\}$ şi $l \in \{1, 2, ..., q\}$. În concluzie $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ şi teorema este demonstrată. ■

▣ TEOREMA 2

Înmulțirea matricelor este **distributivă** față de adunarea matricelor:

a) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \ \forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$

(distributivitatea la stânga a înmulțirii față de adunare);

b) $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A, \ \forall\ B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$

(distributivitatea la dreapta a înmulțirii față de adunare).

Demonstrație

a) Fie $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$ şi $C = (c_{jk})_{n\times p}$.

Notăm $A \cdot (B + C) = (d_{ik})_{m\times p}$, $A \cdot B = (u_{ik})_{m\times p}$ şi $A \cdot C = (v_{ik})_{m\times p}$.

Avem $d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk} = u_{ik} + v_{ik}$, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., m\}$ şi $k \in \{1, 2, ..., p\}$. Aşadar, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Analog se demonstrează egalitatea b). ■

▣ TEOREMA 3

Fie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul n, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci există o matrice $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât:

$$\mathbf{A \cdot I_n = I_n \cdot A = A, \ \forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}.$$

Demonstrație

Considerăm matricea $I_n = (d_{ij})_{n\times n}$, $d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j \\ 0, \text{ dacă } i \neq j \end{cases}$,

$$\text{deci } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Fie matricea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ şi $A \cdot I_n = (b_{ij})_{n\times n}$.

Atunci $b_{ij} = a_{i1}d_{1j} + a_{i2}d_{2j} + ... + a_{ij}d_{jj} + ... + a_{in}d_{nj} = a_{ij}$, $\forall$ i, $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Aşadar $A \cdot I_n = A$.

Analog se arată că $I_n \cdot A = A$ şi teorema este demonstrată. ■

Matricea $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte **matrice unitate** sau **matrice identică de ordinul n**.

Astfel, matricea unitate de ordinul 2 este $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, matricea unitate de ordinul 3 este $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Teorema 3 arată că matricea unitate I_n este element neutru pentru înmulțirea matricelor pe mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Legătura dintre înmulțirea matricelor şi înmulțirea cu scalari a matricelor este dată de următoarea egalitate:

$\mathbf{a(AB) = (aA)B = A(aB)}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ şi $a \in \mathbb{C}$.

2.4. PUTEREA UNEI MATRICE PĂTRATICE

Proprietatea de asociativitate a înmulțirii matricelor pătratice permite definirea puterii cu exponent natural a unei matrice pătratice.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Definim $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se defineşte puterea n a matricei A prin $A^n = A^{n-1} \cdot A$.

☞ ***Exemplu***

Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, atunci:

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$,

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$;

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$.

Reguli de calcul

❶ Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $k, p \in \mathbb{N}$. Atunci au loc egalitățile:

a) $A^k \cdot A^p = A^{k+p}$; **b)** $(A^k)^p = A^{kp} = (A^p)^k$; **c)** $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Verificarea acestor egalități se face folosind proprietățile de asociativitate a înmulțirii matricelor şi distributivitatea înmulțirii față de adunare.

Exercițiu rezolvat

☒ Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^5 şi A^8.

<u>*Soluție*</u>

Din exemplul de mai sus se cunosc matricele A^2, A^3, A^4. Pentru A^5 se poate folosi regula $A^5 = A^2 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ -22 & 1 \end{pmatrix}$, iar pentru A^8 se poate folosi regula $A^8 = \left(A^4\right)^2 = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -56 \\ 112 & 17 \end{pmatrix}$.

❷ Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, astfel încât $AB = BA$. Atunci:

a) $A^m \cdot B^p = B^p \cdot A^m$, $\forall\ m, p \in \mathbb{N}^*$;

b) $(A+B)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i A^{p-i} B^i$, $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$.

(Formula binomului lui Newton pentru matrice)

◢ **Temă de proiect**

Verificarea regulilor de calcul 1 şi 2.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se verifice egalitatea:

$$A^2 - (a+d) \cdot A + (ad - bc) \cdot I_2 = O_2.$$

(Relația Hamilton-Cayley)

<u>*Soluție*</u>

Avem

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}.$$

Atunci $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 =$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2.$$

William Rowan HAMILTON (1805-1865) matematician, astronom şi mecanician irlandez (englez)

A expus teoria fundamentală a numerelor complexe, a evidențiat principiile de comutativitate, asociativitate, distributivitate. A dezvoltat teoria numerelor hipercomplexe lărgind noțiunea de număr. A elaborat teoria cuaternionilor.

Contribuții importante în optica geometrică punând bazele opticii matematice.

☒ **2.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>*Soluție*</u>

***Metoda I:* Utilizarea inducției matematice**

Calculăm $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Se observă că $A^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -(n-1) \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru $n = 1$ egalitatea este adevărată. Presupunem că $A^k = \begin{pmatrix} k+1 & -k \\ k & -(k-1) \end{pmatrix}$ și demonstrăm că $A^{k+1} = \begin{pmatrix} k+2 & -(k+1) \\ k+1 & -k \end{pmatrix}$.

Avem $A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} k+1 & -k \\ k & -(k-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+2 & -(k+1) \\ k+1 & -k \end{pmatrix}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Așadar, $A^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -(n-1) \end{pmatrix}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

***Metoda a II-a:* Utilizarea formulei binomului lui Newton**

Matricea A se scrie sub forma $A = I_2 + B$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Deoarece $I_2 B = B I_2$, atunci $A^n = (I_2 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k$. Dar $B^2 = O_2$ și rezultă că $B^p = O_2, \forall\, p \geq 2$.

Așadar, $A^n = C_n^0 I_2 + C_n^1 B = I_2 + nB = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -(n-1) \end{pmatrix}$.

◢ **Temă**
Calculați:
a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^n$;
b) $\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{100}$.

***Metoda a III-a:* Utilizarea relației Hamilton-Cayley**

Pentru matricea A, relația Hamilton-Cayley se scrie: $A^2 - 2A + I_2 = O_2$.

Rezultă că $A^2 = 2A - I_2$. Avem $A^3 = A^2 \cdot A = 2A^2 - A = 3A - 2I_2$. Analog se obține $A^4 = 4A - 3I_2$. Folosind metoda inducției matematice se demonstrează că $A^n = nA - (n-1)I_2$.

Aşadar $A^n = n \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -(n-1) \end{pmatrix}$.

☒ **3.** Să se determine $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dacă $A^2 + A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>*Soluție*</u>

Din relația dată se obține că $A^3 + A^2 = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi $A^3 + A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot A$, deci $A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}A$. (1)

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din relația (1) se obține:

$\begin{pmatrix} 2a & 3a+2b \\ 2c & 3c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$ şi $c = 0,\ a = d$.

Aşadar, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, iar din egalitatea dată rezultă că:

$\begin{pmatrix} a^2+a & 2ab+b \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ cu soluțiile $a = 1,\ b = 1$ şi $a = -2,\ b = -1$. Se obține $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

APLICAŢII ÎN TEORIA GRAFURILOR

Fie $G = (X, \mathcal{U})$ un graf cu n vârfuri, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $n \geq 1$ şi $A = (a_{ij})_{n\times n}$ **matricea booleană (de adiacență)** asociată acestuia.

Matricea A indică numărul drumurilor de lungime 1 dintre două vârfuri x_i, x_j. Dacă $a_{ij} = 1$, atunci există un drum de lungime 1 de la x_i la x_j, iar dacă $a_{ij} = 0$, nu există un asemenea drum.

Pentru determinarea numărului drumurilor de lungime 2, 3, ..., n se folosesc puterile $A^2, A^3, ..., A^n$ ale matricei A.

Fie A^k puterea k a matricei A, $A^k = (b_{ij})_{n\times m}$:

- dacă $b_{ij} = 0$, atunci nu există nici un drum de lungime k de la vârful x_i la vârful x_j;
- dacă $b_{ij} \neq 0$, atunci există un drum de lungime k de la x_i la x_j;
- dacă $b_{ij} = p$, atunci există p drumuri de lungime k de la x_i la x_j.

Problemă rezolvată

☒ Fie G un graf sub formă sagitală ca în figura 1. Să se determine drumurile de lungime 2 şi 3 de la vârful 1 la celelalte vârfuri.

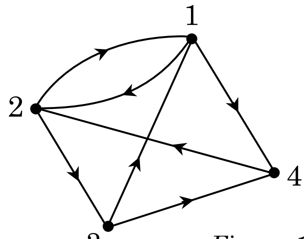


Figura 1

Soluţie

Matricea booleană asociată grafului este $A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, iar puterile de ordin 2 şi 3 sunt:

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&2\\0&2&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&3&1&1\\2&1&2&0\\1&1&0&2\end{pmatrix}.$$

Rezultă că există un singur drum de lungime 2 de la vârful 1 la vârful 2, respectiv la vârful 3 şi nici un drum de lungime 2 de la vârful 1 la vârful 4. Aceste drumuri sunt $d_{1,2}=(1, 4, 2)$, $d_{1,3}=(1, 2, 3)$. Citind matricea A^3 se deduce că există un singur drum de lungime 3 de la vârful 1 la vârful 2, respectiv la vârful 3 şi două drumuri de la vârful 1 la vârful 4. Acestea sunt $d_{1,2}=(1, 2, 1, 2)$, $d_{1,3}=(1, 4, 2, 3)$, $d_{1,4}=(1, 2, 3, 4)$, $d'_{1,4}=(1, 2, 1, 4)$.

◢ **Temă**

Să se determine drumurile de lungime 2 şi 3 de la vârfurile 2, 3, 4 la celelalte vârfuri ale grafului din figura 1.

2.5. TRANSPUSA UNEI MATRICE

❖ DEFINIŢII

- Fie matricea $A=(a_{ij})_{m\times n}$. Se numeşte **transpusa** matricei A, matricea ${}^tA=(b_{kl})_{n\times m}$, unde $b_{kl}=a_{lk}$, pentru oricare $k\in\{1, 2, ..., n\}$ şi $l\in\{1, 2, ..., m\}$.
- Operaţia prin care fiecărei matrice $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea transpusă ${}^tA\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ se numeşte **operaţia de transpunere a matricelor**.

➲ OBSERVAŢII

1. Matricea transpusă ${}^tA$ se obţine din matricea A prin schimbarea liniilor în coloane şi a coloanelor în linii.
2. Dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci ${}^tA\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}({}^tA)$, unde $\mathrm{Tr}(A)$ este urma matricei A.

Problemă rezolvată

☒ Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze transpusele matricelor A, B, AB şi BA.

b) Să se calculeze matricele ${}^tA \cdot {}^tB$, ${}^tB \cdot {}^tA$ şi să se compare cu matricele ${}^t(BA)$, respectiv ${}^t(AB)$.

<u>*Soluție*</u>

a) ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, ${}^t(AB) = \begin{pmatrix} 20 & 7 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$,

$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 10 \\ 4 & 11 & 15 \end{pmatrix}$, ${}^t(BA) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 11 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$.

$\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$

b) ${}^tA \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 11 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} = {}^t(BA).$

${}^tB \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 7 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} = {}^t(AB).$

PROPRIETĂŢI ALE OPERAŢIEI DE TRANSPUNERE

Folosind definiția transpusei unei matrice şi operațiile cu matrice se verifică următoarele proprietăți:

▣ **P1.** Pentru oricare matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, ${}^t({}^tA) = A$.

▣ **P2.** Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci:

a) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$;

b) ${}^t(aA) = a \cdot {}^tA$, $a \in \mathbb{C}$.

▣ **P3.** Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Se dau matricele:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & i^3\\ \sqrt{7} & -8 & 2\\ 0 & -4 & 0,2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 4 & -8 & -3\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}14\\ -\sqrt{28}\\ 8\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \sqrt{5} & 6 & -5\end{pmatrix}.$$

a) Să se precizeze tipul matricelor A, B, C, D.

b) Să se scrie elementele $a_{23}, a_{31}, b_{22}, b_{13}, c_{21}, c_{31}, d_{11}, d_{14}$.

c) Care afirmație este adevărată:

• urma matricei A este $\operatorname{Tr}(A)=-6,8$.

• $a_{21}\cdot c_{21}+b_{23}-d_{14}=-12$;

• $a_{23}\cdot b_{21}\cdot b_{13}\cdot c_{31}\cdot d_{12}>-30$;

• $25a_{33}^2+(a_{31}-d_{12})^2-c_{11}=-c_{31}-a_{31}^3$?

E2. Să se determine numerele reale pentru care au loc egalitățile:

a) $\begin{pmatrix}3 & 2+x\\ 3y-5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-5 & 6\\ 7 & b^2-5\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}x+y & 2x-y\\ 4 & 2a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & y+2\\ a+2b & 5\end{pmatrix}$.

E3. Se dau matricele:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 5\\ -3 & -2 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -7 & 1\\ 0 & -9 & 3\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Să se determine $A+B$, $A-B$, $-A-B$, $3A$, $5B$, $3A+5B$, $A-\sqrt{2}O_3$.

E4. Să se determine numerele pentru care au loc relațiile:

a) $\begin{pmatrix}3 & x\\ 2x & 3\end{pmatrix}+x\cdot\begin{pmatrix}x+1 & 2\\ -1 & x\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}9 & 4+y\\ z+2 & 4+t\end{pmatrix}$;

b) $x\cdot\begin{pmatrix}x-6 & 2\\ -1 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 3y\\ z & 2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & y^2\\ 7 & 4\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}4^x-2 & p!\\ \lg(y-1) & C_z^2\end{pmatrix}-$

$-2\begin{pmatrix}1+3\cdot 2^{x-1} & 60\\ \frac{1}{2} & z-1,5\end{pmatrix}=O_2$.

E5. Să se determine matricea A, ştiind că:

a) $4A+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 6\\ -7 & 9\end{pmatrix}$;

b) $2A+\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & -4 & 9\end{pmatrix}=$

$=3\cdot\begin{pmatrix}4! & C_4^2 & \ln e\\ \lg 1 & A_3^2 & i^{100}\end{pmatrix}$.

E6. Să se determine matricele A şi B, dacă:

a) $2A+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$;

$3A-2B=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 9 & -1\end{pmatrix}$;

b) $2A+3B=\begin{pmatrix}-8 & -7 & 2\\ -1 & 6 & -5\end{pmatrix}$,

$A-2B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 3 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

E7. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & -5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Să se calculeze AB, BA, ABC, $CAB-C^2$, $(ABC-CAB)^2$.

E8. Matricele A, B verifică egalitățile: $A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ şi $2A+B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$. Să se calculeze $A\cdot B$, $B\cdot A$, $({}^tA)^2-({}^tB)^2$.

E9. Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ şi $f(X)=X^3+X^2-5X+2I_2$, $g(X)=X^2-3X+I_2$. Să se determine matricele:
$B=2f(A)-3g(A)$, $C=f\left({}^tA\right)-g\left({}^tA\right)$.

E10. Se dau matricele:
$A=\begin{pmatrix}2 & x\\ y & 3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}y & -3\\ 5 & 2x\end{pmatrix}$.
a) Aflaţi $x, y\in\mathbb{C}$ astfel încât:
$AB=\begin{pmatrix}14 & 2\\ 19 & 6\end{pmatrix}$.
b) Aflaţi $x, y\in\mathbb{C}$ astfel încât:
$(A+xI_2)(B+yI_2)=\begin{pmatrix}-25 & 59\\ 2x+y^2 & 20\end{pmatrix}$.

E11. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ x & y\end{pmatrix}$.
a) Să se afle x, y pentru care $A+B=AB+I_2$.
b) Există $x, y\in\mathbb{C}$ astfel încât $A^2=B^2$?
c) Să se calculeze A^3, A^4, A^5, A^{100}.

E12. Să se calculeze A^n, $n\in\mathbb{N}^*$, în cazurile:
a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$;
c) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; d) $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

E13. Fie $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.
Să se calculeze A^2, A^3, A^6, A^{15}, A^{24}.

E14. Fie $A, B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Să se verifice egalităţile:
a) $\operatorname{Tr}(A+B)=\operatorname{Tr}(A)+\operatorname{Tr}(B)$;
b) $\operatorname{Tr}(aA)=a\operatorname{Tr}(A)$;
c) $\operatorname{Tr}(AB)=\operatorname{Tr}(BA)$;
d) $\operatorname{Tr}\left[{}^t(AB)\right]=\operatorname{Tr}\left({}^tA\cdot{}^tB\right)$.

APROFUNDARE

A1. Se dă matricea $A_k\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$, $k\in\mathbb{N}$, $A_k=\begin{pmatrix}k & k^2 & k(1+k)\\ 2k-1 & 0 & 3k-2\end{pmatrix}$. Să se calculeze $S_n=A_1+A_2+\ldots+A_n$.

A2. Fie $k\in\mathbb{N}$ şi $A_k=\begin{pmatrix}1 & k\\ k+1 & k-1\end{pmatrix}$. Să se calculeze sumele de matrice:
a) $U_n=A_1+A_2+\ldots+A_n$;
b) $V_n=A_1^2+A_2^2+\ldots+A_n^2$.

A3. Să se determine matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ştiind că $\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot X=X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

A4. Să se determine matricele $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, în fiecare din cazurile:
a) $A^2=I_2$; b) $A^2=O_2$;
c) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; d) $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

A5. Se consideră egalitatea: $\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Să se arate că dacă numerele reale x, y, z, t sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele $a-b$, $b-c$, $c-d$ sunt în progresie aritmetică. (ASE, Buc., 1993)

A6. Să se calculeze A^n, $n\in\mathbb{N}^*$, în cazurile:
a) $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$;

e) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon^2 & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde $\varepsilon^2 + \varepsilon = -1$.

A7. Să se calculeze:
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

A8. Să se determine matricea A cu toate elementele numere naturale, care verifică egalitatea:
$(1 \;\; 2 \;\; 4) \cdot A = (3 \;\; 1 \;\; 2)$.

A9. Să se rezolve ecuația $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

A10. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $\{a-d, b-c, c, b\} \subset \mathbb{C}^*$.
Dacă $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, să se arate că:
$\dfrac{b_n}{b} = \dfrac{c_n}{c} = \dfrac{a_n - d_n}{a-d}$. (ASE, Buc., 1996)

A11. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că:
a) $A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix}$, unde $a_n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;
b) pentru oricare $n, m \in \mathbb{N}^*$ au loc relațiile: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ și $a_{m+n} = a_{m+1} \cdot a_{n+1} + a_m \cdot a_n$. (Univ., Craiova, 1996)

A12. Să se arate că pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$ nu există matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $AB - BA = I_n$.

A13. Fie $D = \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C})$ și $f : D \to D$, $f((x \;\; y)) = (3x + y \;\; 4x + 3y)$. Să se arate că:
a) $f(aA) = af(A)$, $\forall\, a \in \mathbb{C}$ și $A \in D$;
b) $f(A+B) = f(A) + f(B)$, $\forall\, A, B \in D$;
c) f este funcție bijectivă.
d) Dacă $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, atunci
$$f((x \;\; y)) = {}^t\!\left(A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

A14. Fie $D = \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C})$, funcțiile $f, g : D \to D$ și matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$.
Dacă:
$f((x \;\; y)) = (a_{11}x + a_{12}y \;\; a_{21}x + a_{22}y)$,
$g((x \;\; y)) = (b_{11}x + b_{12}y \;\; b_{21}x + b_{22}y)$,
să se arate că:
$$(f \circ g)((x \;\; y)) = {}^t\!\left((A \cdot B) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$
Generalizare.

A15. Să se rezolve ecuațiile în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
a) $A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$;
b) $A^3 + A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

A16. Harta unor trasee turistice este redată sub forma unui graf în figura 1.
a) Să se scrie matricea booleană A a grafului dat.
b) Să se calculeze A^2, A^3, A^4.
c) Între ce puncte turistice există cele mai multe trasee de lungime 2? Dar de lungime 3?
d) Găsiți punctele turistice între care există cel puțin 5 trasee turistice de lungime 4.

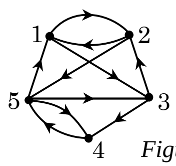


Figura 1

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ 1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 5 & 8\end{pmatrix}$ şi numerele reale $\alpha=\mathrm{Tr}(A+B)$, $\beta=\mathrm{Tr}(2A-3B)$, $\gamma=$ suma elementelor matricei AB şi $u=\alpha+\beta+\gamma$. Atunci:
a) $u=-7$; b) $u=-28$; c) $u=49$; d) $u=56$.

❍ 2. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}10 & -4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}$ şi $\alpha=$ suma elementelor matricei $AB-{}^tA\,{}^tB$. Atunci:
a) $\alpha=-82$; b) $\alpha=47$; c) $\alpha=-38$; d) $\alpha=82$.

❍ 3. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Atunci matricea A^3 este egală cu:
a) $2A-3I_3$; b) O_3; c) $4A-6I_3$; d) $13A-17I_3$.

❍ 4. Se consideră egalitatea $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3a-2 & b^2+2b\\ 2^{-x}-9 & y^2+7\\ \sqrt{u^2+16} & \lg v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 9 & 3\\ 8 & 5\end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ şi $m=a+b+x+y-u^2+v$, unde $b>0$. Atunci $|m|$ este:
a) $9\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $2\sqrt{3}$; d) 10.

❍ 5. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $f(X)=X^3-5X^2+8I_3$. Atunci $f(A)$ este:
a) I_3; b) ${}^tA$; c) A^2; d) O_3.

Testul 2

❍ 1. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 3^x-1 & 3^x\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2^y+1 & 0\\ 3^y & 3^y+1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2^z & 6^z\\ -6^z & 3^z\end{pmatrix}$. Să se determine x, y, z astfel încât $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot A+B\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=C$.

❍ 2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & a \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_n - 1 & x_n \end{pmatrix}$ şi să se determine (x_n) şi matricea $B = A \cdot A^2 \cdot \ldots \cdot A^n$.

❍ 3. Să se determine $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^{2001} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2001 \\ 0 & 2^{2001} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

❍ 4. Folosind binomul lui Newton pentru matrice să se calculeze A^n, dacă $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. (Bacalaureat, 1996, generalizare)

Testul 3

❍ 1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine numerele $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $aA^2 + bA + 2I_3 = O_3$.

b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există numerele $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^n = a_n A + b_n I_3$.

❍ 2. Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dacă $X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

❍ 3. Se consideră mulțimea de matrice $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R}^* \right\}$.

a) Să se arate că dacă $A, B \in \mathcal{M}$, atunci $A^2 \cdot B^2 \in \mathcal{M}$.

b) Există matrice $A \in \mathcal{M}$ astfel încât $A^{2001} = -I_2$?

❍ 4. Se consideră matricele $A_k = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} \\ \varepsilon^{3k} & (1+\varepsilon)^{2k} & (1+\varepsilon)^{3k} \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$, unde ε este rădăcina cubică a unității. Să se calculeze matricea $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

CAPITOLUL III. DETERMINANŢI

1 DETERMINANTUL DE ORDINUL n. PROPRIETĂȚI

1.1. DETERMINANTUL DE ORDINUL 2

Să considerăm sistemul de două ecuații liniare cu două necunoscute $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ (1) şi matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ a coeficienților necunoscutelor x_1, x_2.

Rezolvarea acestui sistem este cunoscută. Aplicând metoda reducerii se obține:

$$\begin{cases} (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})x_1 = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12} \\ (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})x_2 = b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21} \end{cases}.$$

Dacă numărul $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0,$ atunci soluția sistemului este:

$$x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}; \quad x_2 = \frac{b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}. \quad (2)$$

Se observă că numitorul fracțiilor din relația (2) reprezintă diferența dintre produsul elementelor de pe diagonala principală a matricei A şi produsul elementelor de pe diagonala secundară a matricei A.

❖ **DEFINIȚIE**

• Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Numărul $d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ se numeşte **determinantul de ordinul 2** sau **determinantul** matricei A.

Pentru determinantul de ordinul 2 se foloseşte notația:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \det(A) \text{ sau } |A|.$$

Produsele $a_{11} \cdot a_{22}$ şi $a_{12} \cdot a_{21}$ se numesc **termenii determinantului** de ordinul 2.

☞ ***Exemple***

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Avem $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-2) = 8.$

2. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Avem $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c.$

Revenim la formulele (2) care dau soluțiile sistemului (1). Se observă că numărătorii fracțiilor reprezintă determinanții matricelor $A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$ şi $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$.

Aceste matrice sunt obținute din matricea A înlocuind coloana coeficienților necunoscutelor x_1, respectiv x_2 cu coloana formată din termenii liberi b_1, b_2 ai ecuațiilor sistemului (1). Astfel, cu ajutorul determinantului de ordinul 2, formulele (2) se scriu sub forma:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad (3)$$

formule denumite **formulele lui Cramer** pentru sistemul de două ecuații liniare cu două necunoscute.

1.2. DETERMINANTUL DE ORDINUL 3

Să considerăm acum sistemul de trei ecuații liniare cu trei necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}, \ (4) \text{ şi } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

matricea coeficienților necunoscutelor x_1, x_2, x_3.

Pentru rezolvarea sistemului vom folosi metoda reducerii.

Reducem pentru început necunoscuta x_3. Pentru aceasta înmulțim prima ecuație cu a_{23}, apoi cu a_{33} și o adunăm la ecuația a doua înmulțită cu $-a_{13}$, respectiv la ecuația a treia înmulțită cu $-a_{13}$. Se obține sistemul de două ecuații liniare cu necunoscutele x_1, x_2:

$$\begin{cases} (a_{11} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{13})x_1 + (a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13})x_2 = b_1 \cdot a_{23} - b_2 \cdot a_{13} \\ (a_{11} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{13})x_1 + (a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13})x_2 = b_1 \cdot a_{33} - b_3 \cdot a_{13} \end{cases} \quad (5)$$

Reducem necunoscuta x_2 din ecuațiile (5). Se obține ecuația:

$$\left[(a_{11} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{13})(a_{12} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{32}) - (a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31})(a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13})\right]x_1 =$$

$$= (b_1 \cdot a_{23} - b_2 \cdot a_{13})(a_{11} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13}) - (b_1 \cdot a_{33} - b_3 \cdot a_{13})(a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13}). \quad (6)$$

Desființând parantezele şi cu notațiile:

$d_{x_1} = b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{12}a_{32} + b_3a_{12}a_{23} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{13}a_{22}$ şi

$d = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$, relația (6) se aduce la forma $d \cdot x_1 = d_{x_1}$. (7)

❖ **DEFINIȚIE**

• Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Numărul $d = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ (8) se numeşte **determinantul de ordinul trei** sau **determinantul** matricei A.

Pentru determinantul de ordinul trei se folosesc notațiile:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \det(A) \text{ sau } |A|.$$

Cei şase termeni din scrierea determinantului de ordinul 3 se numesc **termenii determinantului**.

Se observă că d_{x_1} este valoarea determinantului de ordinul 3:

$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, determinant obținut din determinantul d înlocuind coloana coeficienților necunoscutei x_1 cu coloana formată din termenii liberi b_1, b_2, b_3.

Dacă $d \neq 0$, din relația (7) se obține $x_1 = \dfrac{d_{x_1}}{d}$.

În mod analog se pot obține necunoscutele x_2 şi x_3 considerând determinanții de ordin 3, d_{x_2} şi d_{x_3} obținuți din d prin înlocuirea coloanelor a doua şi a treia prin coloana formată cu termenii liberi ai ecuațiilor sistemului (1).

Aşadar, dacă $d \neq 0$, sistemul (1) are soluția unică dată de formulele lui Cramer: $x_1 = \dfrac{d_{x_1}}{d},\ x_2 = \dfrac{d_{x_2}}{d},\ x_3 = \dfrac{d_{x_3}}{d}$. (9)

CALCULUL DETERMINANTULUI DE ORDINUL 3

Relația (8) care dă valoarea determinantului de ordinul 3 este destul de dificil de memorat fără un suport logic. De aceea se vor indica două tehnici practice de obținere a celor şase termeni, tehnici specifice numai determinantului de ordinul 3.

1. Regula lui Sarrus

Calculul determinantului de ordinul 3 prin regula lui Sarrus se face parcurgând următoarele etape:

• se scriu primele două linii sub determinant;

• se adună produsele termenilor situați pe diagonala principală şi pe diagonalele paralele cu aceasta situate sub ea;

• se scad produsele termenilor situați pe diagonala secundară şi pe diagonalele paralele cu aceasta situate sub ea.

Aranjarea calculelor se face astfel:

$$\begin{matrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}\end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

☞ ***Exemplu***

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \end{matrix}\end{matrix} = 2\cdot3\cdot1 + 5\cdot1\cdot4 + 0\cdot(-1)\cdot(-2) - 4\cdot3\cdot0 - (-2)\cdot1\cdot2 - 1\cdot(-1)\cdot5 = 35$$

2. Regula triunghiului

Cele şase produse din formula determinantului de ordinul 3 se pot obține printr-o altă tehnică numită **regula triunghiului**. Această regulă este descrisă mai jos indicând secvențial modul de construire a fiecărui produs:

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$(a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33}) \qquad (a_{13} \quad a_{21} \quad a_{32}) \qquad (a_{12} \quad a_{23} \quad a_{31})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$\left(a_{13} \quad a_{22} \quad a_{31}\right) \quad \left(a_{12} \quad a_{21} \quad a_{33}\right) \quad \left(a_{11} \quad a_{23} \quad a_{32}\right)$$

În concluzie, $d = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

☞ ***Exemplu***

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot5 + 4\cdot1\cdot1 + 4\cdot(-1)\cdot3 - 4\cdot1\cdot4 - 2\cdot3\cdot1 - 5\cdot1\cdot(-1) = -15$$

➲ **PRECIZARE**

- Pentru o matrice $A = (a_{11}) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, determinantul său este determinantul de ordinul 1, $d = |a_{11}| = a_{11}$.

☞ ***Exemplu***

Matricea $A = (-5) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ are determinantul $d = |-5| = -5$, iar matricea $B = (2 - i) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ are determinantul $d = |2 - i| = 2 - i$.

1.3. DETERMINANTUL DE ORDINUL n

În continuare se va defini determinantul unei matrice pătratice de ordinul n în aşa fel încât pentru $n = 2$ şi $n = 3$ să se determine determinantul de ordinul 2, respectiv 3. Pentru aceasta vor fi analizate formulele de calcul pentru determinantul de ordinul 2, respectiv 3 şi se va deduce o regulă generală prin care se va defini determinantul de ordinul n.

Să considerăm formulele determinanților de ordinul 2, respectiv 3:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Referitor la aceşti determinanți se observă că:

1. termenii acestor determinanți sunt produse de elemente ce aparțin la linii şi coloane diferite şi totodată orice astfel de produs este termen în formula determinanților;

2. fiecare termen este un produs de forma $a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)}$, unde $\sigma \in S_2$ pentru determinantul d_2 şi de forma $a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)}$, unde $\sigma \in S_3$ pentru determinantul d_3;

3. termenii cu semnul (+) corespund permutărilor pare, iar termenii cu semnul (–) corespund permutărilor impare.

Cu aceste observaţii, cei doi determinanţi se pot scrie sub forma:

$\Delta_2 = \sum\limits_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)}$, $\Delta_3 = \sum\limits_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)}$.

($\varepsilon(\sigma)$ este signatura permutărilor σ.)

Această regulă unitară de scriere a determinantului de ordinul 2 şi 3 cu ajutorul permutărilor, permite extinderea noţiunii de determinant pentru o matrice pătratică de ordinul n, $n \geq 4$.

Fie $A = (a_{ij})_{n \times n}$ o matrice pătratică de ordinul n.

❖ DEFINIŢIE

• Numărul $\det(A) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$, unde S_n este mulţimea permutărilor de gradul n şi $\varepsilon(\sigma)$ este signatura permutării σ, se numeşte determinantul matricei A sau **determinantul de ordinul n**.

Determinantul de ordinul n se notează astfel:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Produsele $a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$, unde $\sigma \in S_n$, se numesc **termenii determinantului** de ordin n.

În mod uzual se spune despre elementele, liniile şi coloanele matricei A că sunt elementele, liniile, respectiv coloanele determinantului $\det(A)$. Determinantul matricei $A = (a_{ij})_{n \times n}$ se poate nota şi sub forma $|A|$ sau $|a_{ij}|_n$.

➲ OBSERVAŢII

1. Noţiunea de determinant al unei matrice are sens numai pentru matricele pătratice.
2. Matricea nu trebuie să se confunde cu determinantul său; o matrice este o funcţie, iar determinantul matricei este un număr.

3. În formula determinantului unei matrice de ordinul n sunt n! termeni dintre care $\frac{n!}{2}$ au semnul (+) şi $\frac{n!}{2}$ au semnul (–).

4. Dacă $A \in \mathscr{M}_n(K)$, atunci $\det(A) \in K$, unde $K \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1.4. DEZVOLTAREA UNUI DETERMINANT DUPĂ O LINIE SAU DUPĂ O COLOANĂ

Calculul unui determinant de ordinul n, $n \geq 4$ pornind de la definiţie este foarte incomod. De exemplu, pentru un determinant de ordinul 4 este necesară determinarea a $4! = 24$ termeni, precum şi paritatea celor 24 de permutări de gradul 4. De aceea se va da un procedeu prin care calculul acestuia se va reduce la calculul unui anumit număr de determinanţi de ordinul n – 1. Astfel, pentru determinaţii de ordin 2, respectiv 3, avem:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11} \cdot |a_{22}| - a_{12} \cdot |a_{21}|. \quad (1)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{33}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

sau $$\Delta_3 = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Se observă că Δ_2 se scrie cu ajutorul a doi determinanţi de ordinul 1 iar Δ_3 cu ajutorul a trei determinanţi de ordin 2. Fiecare din determinanţii din scrierea lui Δ_2, respectiv Δ_3 se obţine din Δ_2, respectiv Δ_3 suprimând linia şi coloana elementului scris în faţa lui.

Fie $d = |a_{ij}|_n$ un determinant de ordin n.

❖ **DEFINIŢII**

- Determinantul de ordinul $(n-1)$ care se obţine suprimând linia i şi coloana j din determinantul d se numeşte **minorul elementului** a_{ij} şi se notează d_{ij}.
- Numărul $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot d_{ij}$ se numeşte **complementul algebric al elementului** a_{ij}.

Unui determinant de ordinul n i se pot asocia n^2 minori de ordinul $(n-1)$, respectiv n^2 complemenţi algebrici.

Cu aceste noi noţiuni, relaţiile (1) şi (2) devin:

$\Delta_2 = a_{11}\delta_{11} + a_{12}\delta_{12}$ şi $\Delta_3 = a_{11}\delta_{11} + a_{12}\delta_{12} + a_{13}\delta_{13}$. (3)

Aşadar, determinanţii de ordin 2, respectiv 3 se scriu ca sumă de produse dintre elementele liniei întâi şi complemenţii algebrici ai acestora.

Prin calcul direct sau aranjarea adecvată a formulelor (1) şi (2) se poate arăta că alegând oricare linie (coloană) din determinant au loc relaţiile:

$\Delta_2 = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2}$ şi $\Delta_3 = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + a_{i3}\delta_{i3}$, $i \geq 1$.

Pentru determinantul de ordinul n, $d = \left|a_{ij}\right|_n$ au loc relaţiile:

$\mathbf{d = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + \ldots + a_{in}\delta_{in},\ i = \overline{1, n};}$ **(4)**

(dezvoltarea determinantului după linia i)

$\mathbf{d = a_{1j}\delta_{1j} + a_{2j}\delta_{2j} + \ldots + a_{nj}\delta_{nj},\ j = \overline{1, n}.}$ **(5)**

(dezvoltarea determinantului după coloana j)

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se calculeze determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Soluţie

• Exersăm dezvoltarea determinantului după linia a treia:

$\det(A) = 3 \cdot \delta_{31} + 0 \cdot \delta_{32} + (-1)\delta_{33} + 0 \cdot \delta_{34}$.

Avem: $\delta_{31} = (-1)^{3+1} d_{31} = d_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 3$

$\delta_{33} = (-1)^{3+3} d_{33} = d_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 12$

Aşadar, $\det(A) = 3 \cdot 3 + 0 + (-1) \cdot 12 + 0 = -3$.

Determinarea complemenţilor algebrici δ_{32} şi δ_{34} nu a fost necesară deoarece în scrierea determinantului, aceştia erau înmulţiţi cu zero.

Exersăm dezvoltarea determinantului după coloana a doua:

$\det(A) = (-1)\delta_{12} + (-1)\delta_{22} + 0 \cdot \delta_{32} + 2 \cdot \delta_{42}$

Avem: $\delta_{12} = (-1)^{1+2} d_{12} = -d_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -2$

$$\delta_{22} = (-1)^{2+2} d_{22} = d_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -21$$

$$\delta_{42} = (-1)^{4+2} d_{42} = d_{42} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -13$$

Aşadar, $\det(A) = (-1)(-2) + (-1)(-21) + 0 + 2 \cdot (-13) = -3.$

☒ **2.** Să se calculeze determinantul $d = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ având toate elementele de deasupra diagonalei principale zero *(determinant triunghiular).*

<u>*Soluție*</u>

Facem dezvoltarea determinantului după prima linie şi obținem:

$$d = a_{11}\delta_{11} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Continuăm procedeul dezvoltării după prima linie şi după încă un pas se obține $d = a_{11}a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

După n paşi se obține $d = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$

➲ **<u>OBSERVAȚIE</u>**

- Un determinant triunghiular are valoarea egală cu produsul elementelor de pe diagonala principală.

1.5. PROPRIETĂȚI ALE DETERMINANȚILOR

Unele calcule din diferitele tehnici de găsire a valorii determinantului unei matrice pătratice pot fi eliminate dacă se au în vedere anumite proprietăți ale acestora.

▣ **P1.** Determinantul unei matrice A este egal cu determinantul matricei transpuse ${}^tA$: $\mathbf{det(A)=det({}^tA)}$.

Într-adevăr, dezvoltarea determinantului matricei A după linia i coincide cu dezvoltarea după coloana i a determinantului matricei transpuse.

➲ OBSERVAȚIE

- Din această proprietate se desprinde concluzia că orice proprietate dată pentru linii într-un determinant este adevărată şi pentru coloanele lui.

▣ **P2.** Dacă într-o matrice pătratică se schimbă între ele două linii (sau coloane) se obține o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei inițiale.

☞ ***Exemplu***

Fie $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ matricea obținută din A schimbând liniile 1 şi 2 între ele.

Se obține $\det(A)=26$ şi $\det(B)=-26=-\det(A)$.

▣ **P3.** Dacă elementele unei linii (sau coloane) a matricei A se înmulțesc cu un număr k, se obține o matrice B al cărei determinant este egal cu $k\cdot\det(A)$.

Într-adevăr, efectuând dezvoltarea determinantului matricei B după elementele liniei (coloanei) multiplicate cu numărul k, toți termenii dezvoltării conțin factorul comun k şi se obține $k\cdot\det(A)$.

☞ ***Exemplu***

Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & 0 & -12\end{pmatrix}$ matricea obținută din A înmulțind elementele liniei a treia cu factorul (-3).

Se obține $\det(A)=15$ şi $\det(B)=-45=-3\cdot\det(A)$.

❑ **REȚINEM!**
Dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ k\in\mathbb{C}\Rightarrow$
$\Rightarrow \det(kA)=k^n\det(A)$.

▣ **P4.** Dacă elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice pătratică sunt nule, atunci determinantul matricei este nul.

Într-adevăr, dezvoltând determinantul matricei după linia (coloana) care are toate elementele nule se obține valoarea determinantului egală cu zero.

☞ ***Exemplu***

Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \\ -8 & 3 & \sqrt{5} & i^5 \end{pmatrix}$, atunci $\det(A) = 0 \cdot \delta_{21} + 0 \cdot \delta_{22} + 0 \cdot \delta_{23} + 0 \cdot \delta_{24} = 0.$

> ▣ **P5.** Dacă o matrice pătratică are două linii (coloane) identice, atunci determinantul ei este nul.

Într-adevăr, fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice în care două linii sunt identice. Dacă schimbăm aceste linii între ele se obţine o matrice B egală cu A. Aşadar $\det(A) = \det(B)$.

Aplicând proprietatea P_2, rezultă că $\det(A) = -\det(B)$ şi, ca urmare, avem $\det(A) = -\det(A)$, deci $\det(A) = 0$.

☞ ***Exemplu***

Matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 5 \\ 4 & -i & 4 \end{pmatrix}$ are coloanele 1 şi 3 identice.

Rezultă că $\det(A) = 0$. (Verificaţi prin calcul.)

> ▣ **CONSECINŢĂ**
>
> Fie $d = |a_{ij}|_n$ un determinant de ordinul n. Pentru orice $i \neq j$ au loc egalităţile:
>
> **1.** $a_{i1}\delta_{j1} + a_{i2}\delta_{j2} + \ldots + a_{in}\delta_{jn} = 0$;
>
> **2.** $a_{1j}\delta_{1i} + a_{2j}\delta_{2i} + \ldots + a_{nj}\delta_{ni} = 0$.

Demonstraţie

Pentru relaţia 1 considerăm determinantul d' obţinut din d înlocuind linia j cu linia i. Rezultă că $d' = 0$. Dezvoltând determinantul d' după linia j se obţine egalitatea 1.

Pentru egalitatea 2 se foloseşte proprietatea P1 şi egalitatea 1. ■

> ▣ **P6.** Dacă elementele a două linii (coloane) ale unei matrice pătratice sunt proporţionale, atunci determinantul ei este nul.

Într-adevăr, aplicând proprietatea P_3, se obţine că determinantul matricei este produsul dintre factorul de proporţionalitate şi determinantul unei matrice cu două linii (coloane) identice. Conform proprietăţii P_5 acest determinant este nul.

☞ ***Exemplu***

Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ -4 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & -4 & 8 & 0 \\ 4 & -7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ al cărei determinant se cere.

Se observă că liniile 1 şi 3 sunt proporționale, factorul de proporționalitate fiind $k=2$. Conform proprietății P6 $\det(A)=0$. Aplicând această proprietate, rezultatul s-a obținut fără calcul.

> ▣ **P7.** Fie $A=(a_{ij})_{n\times n}$ o matrice de ordinul n astfel încât elementele liniei i sunt de forma $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$, $j=\{1, 2,\dots, n\}$. Dacă B şi C sunt matricele obținute din A înlocuind elementele liniei i cu elementele b_{ij}, respectiv c_{ij}, atunci $\det(A)=\det(B)+\det(C)$.

Demonstrație

Avem

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}+c_{ij})\delta_{ij}=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\delta_{ij}+\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\delta_{ij}=\det(B)+\det(C).\ \blacksquare$$

☞ ***Exemplu***

Fie $A=\begin{pmatrix} a+b & a_1+b_1 \\ c & c_1 \end{pmatrix}$. Atunci $B=\begin{pmatrix} a & a_1 \\ c & c_1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{pmatrix}$.

Conform proprietății 7 are loc egalitatea $\det(A)=\det(B)+\det(C)$, adică

$$\begin{vmatrix} a+b & a_1+b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}.$$

➲ OBSERVAȚIE

- Proprietatea 7 este specifică determinanților:
  $\det(A)=\det(B)+\det(C)$, dar $A\neq B+C$.

> ▣ **P8.** Dacă o linie (o coloană) a unei matrice pătratice este o combinație liniară de celelalte linii (coloane), atunci determinantul ei este zero.

Într-adevăr, dacă o linie (coloană) a matricei A este o combinație liniară de celelalte linii (coloane), atunci aplicând proprietatea 7, $\det(A)$ se scrie ca o sumă de determinanți care au două linii proporționale, deci sunt nuli.

☞ ***Exemplu***

Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -10 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Linia a doua este o combinație liniară de celelalte linii:
$a_{2j} = \alpha a_{1j} + \beta a_{3j},\ j \in \{1, 3\}$ şi $\alpha = 2, \beta = -1.$

Se obține că $\det(A) = 0,$ conform proprietății P8. (Verificați prin calcul.)

▣ **P9.** Dacă la elementele unei linii (coloane) a unei matrice pătratice A se adună elementele altei linii (coloane) înmulțite cu acelaşi număr, atunci matricea rezultată are acelaşi determinant ca matricea A.

Pentru justificare se pot folosi proprietățile 7 şi 6.

➲ OBSERVAȚIE

- Proprietatea 9 dă posibilitatea ca prin operații efectuate cu diferite linii sau coloane ale unei matrice sau ale unui determinant de ordin n, să se obțină pe o linie sau coloană $(n-1)$ elemente nule care reduce calculul determinantului dat la unul de ordin inferior.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se calculeze: $d = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

Soluție

Aplicând proprietatea P9, adunăm linia a doua înmulțită cu (-3) la prima linie şi se obține:

$$d = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \cdot \delta_{11} = -5 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 200.$$

☒ **2.** Să se calculeze determinantul, scriind rezultatul sub formă de produs:

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{C},\ \text{diferite între ele.}$$

Soluție

Pentru calcule mai restrânse vom folosi tehnica creării de zerouri pe o linie sau coloană şi alte proprietăți ale determinanților. Scădem din linia 4 linia 3 înmulțită cu a, apoi din linia a treia pe a doua înmulțită cu a şi din linia a doua scădem linia întâi înmulțită cu a. Se obține succesiv:

$$V_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad\\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & d-a\\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad\\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2\end{vmatrix}.$$

Se dezvoltă determinantul obținut după prima coloană şi apoi se dau factori comuni pe coloane. Rezultă:

$$V_4=\begin{vmatrix}b-a & c-a & d-a\\ b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad\\ b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(d-a)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ b & c & d\\ b^2 & c^2 & d^2\end{vmatrix}$$

Cu ultimul determinant obținut, notat V_3 se procedează ca mai sus sau, de exemplu, se poate scădea coloana întâi din celelalte şi se obține:

$$V_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ b & c & d\\ b^2 & c^2 & d^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ b & c-b & d-b\\ b^2 & c^2-b^2 & d^2-b^2\end{vmatrix}=(c-b)(d-b)\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ b & 1 & 1\\ b^2 & c+b & d+b\end{vmatrix}=$$

$=(c-b)(d-b)(d-c)$. Aşadar, $V_4=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

➲ PRECIZARE

- Determinanții V_4 şi V_3 se numesc **determinanți Vandermonde** de ordinul 4, respectiv 3.

Theophile VANDERMONDE (1735-1796) matematician şi fizician elvețian

În matematică a avut contribuții în studiul determinanților, a funcțiilor simetrice şi a teoriei ecuațiilor algebrice. În fizică a studiat dilatarea gazelor.

☒ **3.** Să se calculeze determinantul:

$$d_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2\end{vmatrix}.$$

<u>*Soluție*</u>

Se dezvoltă determinantul după coloana întâi şi se obține:

$$d_n=1\cdot\delta_{11}+(-1)\delta_{21}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2\end{vmatrix}.$$

Primul determinant este un determinant triunghiular şi are valoarea 2^{n-1}, iar al doilea este de tipul celui inițial dar de ordinul $(n-1)$.

Aşadar, avem relația de recurență $d_n = 2^{n-1} + d_{n-1}$. Dând lui n valori şi însumând relațiile obținute se găseşte $d_n = 2^n - 1$, $n \geq 1$.

> ▣ **P10.** Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $\mathbf{det(AB) = det(A) \cdot det(B)}$.

◢ **Temă de proiect**

Verificarea proprietății P10 pentru cazul $n \in \{2, 3\}$. Generalizare.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se calculeze determinanții de ordin 2:**

a) $\begin{vmatrix} -6 & -10 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{32} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{27} \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 2+3i & 2-3i \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} \varepsilon & -1 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{vmatrix}$, $\varepsilon^3 = 1$.

E2. **Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile:**

a) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 10$; b) $\begin{vmatrix} 2^x & 1 \\ 3 & 2^x \end{vmatrix} = 5$;

c) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x-1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - x$;

d) $\begin{vmatrix} x^2+2x & x+3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6x & -1 \\ x+1 & 1 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} \lg(x+1) & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \log_2 32$.

E3. **Să se calculeze determinanții de ordin 3:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 8 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 \\ 4 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 3! & 4! \\ 3! & 4! & 5! \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} C_6^0 & C_6^1 & C_6^2 \\ C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 \\ C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} A_3^0 & A_3^1 & A_3^2 \\ A_4^1 & A_4^2 & A_4^3 \\ A_5^0 & A_5^1 & A_5^2 \end{vmatrix}$.

E4. **Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

b) $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ 2x & 2x-1 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & x \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

E5. **Fie x_1, x_2, x_3 soluțiile ecuației**

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Să se calculeze suma $S = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

E6. **Cu ce semn apar în determinantul de ordinul 4 termenii: $a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$, $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$, $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$?**

E7. Cu ce semn apare în determinantul de ordin n produsul elementelor de pe:
a) diagonala principală;
b) diagonala secundară?

E8. Sunt termenii unui determinant produsele: $a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54}$, $a_{13}a_{24}a_{31}a_{43}$, $a_{11}a_{22}a_{33}a_{45}a_{54}$?

E9. Să se calculeze determinanții de ordin 4:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

E10. Să se rezolve ecuația:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

E11. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A) = 2$, $\det(4A) = 128$, să se determine n.

APROFUNDARE

A1. Folosind proprietățile determinanților, să se scrie ca produs:

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ c & c+1 & c+2 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & a^2+1 & a+1 \\ b & b^2+1 & b+1 \\ c & c^2+1 & c+1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a & a^3 & 1 \\ b & b^3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

A2. Să se calculeze determinanții trigonometrici:

a) $\begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 1 & \sin^2 y & \cos^2 y \\ 1 & \sin^2 z & \cos^2 z \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} \cos 2x & \cos x & 1 \\ \cos 2y & \cos y & 1 \\ \cos 2z & \cos z & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin^2 x & \sin x \\ \cos 2y & \sin^2 y & \sin y \\ \cos 2z & \sin^2 z & \sin z \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & \cos^2 x & \operatorname{ctg} x \\ 1 & \cos^2 y & \operatorname{ctg} y \\ 1 & \cos^2 z & \operatorname{ctg} z \end{vmatrix}$.

A3. Fie x_1, x_2, x_3 soluțiile ecuației $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$.

Să se calculeze $d = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

A4. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 soluțiile ecuațiilor $x^4 - 1 = 0$. Să se calculeze:

$$d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & -2x_4 \\ -2x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & -2x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & -2x_3 & x_4 \end{vmatrix}.$$

A5. Există numere $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât ecuația:

$$\begin{vmatrix} 2-a & a-x & x-1 \\ 1-x^2 & x^2 & -1 \\ 2-a-2x & x+a & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)^2$$ să

aibă o rădăcină întreagă?

A6. Se consideră determinantul

$$f(x)=\begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{2a} \end{vmatrix},\ a\in\mathbb{R}.$$

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x)=0$ are soluții strict negative.

b) Pentru ce valori ale lui $a\in\mathbb{R}$, ecuația $f(x)=0$ are soluții reale?

(ASE, Buc., 1993)

A7. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0;$

b) $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix}=0;$

c) $\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}=0.$

A8. Să se verifice egalitățile:

a) $\begin{vmatrix} 1-a-b & c & c \\ a & 1-b-c & a \\ b & b & 1-c-a \end{vmatrix}=(a+b+c-1)^2;$

b) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}=1+(a_1+a_2+\dots+a_n).$

A9. Fie $a, b, c, n\in\mathbb{Z}$. Să se arate că determinantul $\begin{vmatrix} a^2+n & ab & ac \\ ab & b^2+n & bc \\ ac & bc & c^2+n \end{vmatrix}$ este divizibil cu n^2.

A10. Fie $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu toate elementele egale cu 1 sau -1. Să se arate că 4 divide $\det(A)$. Generalizare.

A11. Fie $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Să se arate că $\det\left(A-{}^tA\right)=0.$

A12. Fie $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $a_{ij}=a\in\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{Q}$, $i=\overline{1,3}$ şi produsul elementelor pe orice linie sau coloană să fie 1. Să se arate că $\det(A)>0$.

A13. Fie $A, B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AB=BA$.

a) Să se arate că $\det\left(A^2+B^2\right)\geq 0$.

b) Rămâne proprietatea a) adevărată dacă $AB\neq BA$?

A14. Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Să se arate că $\det\left(I_n+A+A^2\right)\geq 0$.

A15. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se arate că are loc egalitatea $A^2-\mathrm{Tr}(A)\cdot A+\det(A)\cdot I_2=O_2$. *(Relația Hamilton-Cayley)*

A16. Să se demonstreze prin inducție după n că:

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i-a_j).$$

(Determinantul Vandermonde de ordin n)

A17. Fie $\Delta_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$. Să se arate că $\Delta_{2n}=\left(a^2-b^2\right)^n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

A18. Fie $d_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Să se arate că:

a) $d_n = 5d_{n-1} - 6d_{n-2}$, $n \geq 3$.

b) $d_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

A19. Fie matricea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ astfel încât $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i \geq j \\ i+j, \text{ dacă } i < j \end{cases}$. Să se calculeze $\det(A)$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ 1. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ iar $\alpha = \det(A+B) + \det(AB)$.

Atunci:

a) $\alpha = -90$; b) $\alpha = -120$; c) $\alpha > 0$; d) $\alpha = 0$.

❍ 2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu $\det(A) = 2 = \det(B)$.

Dacă $\alpha = \det(5A)$ şi $\beta = \det(5B)$, atunci:

a) $(\alpha, \beta) = (10, 10)$; b) $(\alpha, \beta) = (50, 150)$; c) $(\alpha, \beta) = (50, 250)$; d) $(\alpha, \beta) = (5, 25)$.

❍ 3. Fie ecuația $\begin{vmatrix} x^2-1 & 1 \\ x & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 2 & x \end{vmatrix}$ cu soluțiile x_1, x_2, $x_1 < x_2$.

Dacă $\alpha = 7x_1^2 - 2x_2^2$, atunci:

a) $\alpha = 28$; b) $\alpha = -70$; c) $\alpha = -98$; d) $\alpha = 70$.

❍ 4. Fie ecuația $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2+x+1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$.

Atunci modulul diferenței soluțiilor ei este: a) 2; b) 3; c) 1; d) 4.

Testul 2

❍ 1. Să se calculeze determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & a+b & a^2 \\ 1 & b+c & b^2 \\ 1 & c+a & c^2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

❍ 2. Să se rezolve ecuațiile: a) $\begin{vmatrix} 2^x & 2^{x+1}-2 \\ 2^x-1 & 2^x+8 \end{vmatrix} = 30$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lg x & \lg 2x & 1 \\ \lg^2 x & \lg^2 2x & 1 \end{vmatrix} = 0$.

○ **3. Să se arate că ecuația** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^3 \\ 1 & x^2 & x^6 \end{vmatrix} = 0$ **are cel puțin o soluție complexă cu partea reală nulă pentru** $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

○ **4. Se consideră funcția** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

a) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

b) Să se discute numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = 8m(x^2 - 1)$, $m \in \mathbb{R}$.

❷ APLICAȚII ALE DETERMINANȚILOR ÎN GEOMETRIA PLANĂ

2.1. ECUAȚIA DREPTEI DETERMINATE DE DOUĂ PUNCTE DISTINCTE COLINIARITATEA A TREI PUNCTE

Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ două puncte distincte în planul raportat la reperul cartezian xOy şi $E(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1$.

Se observă că ecuația $E(x, y) = 0$ reprezintă ecuația unei drepte. De asemenea, $E(x_1, y_1) = 0$ şi $E(x_2, y_2) = 0$, deoarece determinanții obținuți au două linii egale.

Rezultă că punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ aparțin dreptei de ecuație $E(x, y) = 0$.

Aşadar, **ecuația dreptei determinate de punctele $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$** se scrie sub formă de determinant astfel:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Dacă $M(x, y)$ este un punct oarecare al dreptei AB, atunci relaţia (1) exprimă şi faptul că punctele $M(x, y)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ sunt puncte coliniare.

În concluzie, **trei puncte** $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ sunt **puncte coliniare** dacă şi numai dacă are loc egalitatea:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Problemă rezolvată

☒ Se consideră punctele $A(-2, 3)$, $B(1, -4)$ şi $C(2m-1, 10)$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele A, B, C să fie coliniare.

<u>*Soluţie*</u>

a) Aplicând formula (1), ecuaţia dreptei AB sub formă de determinant este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$ care este echivalentă cu ecuaţia $7x + 3y + 5 = 0$.

b) Condiţia de coliniaritate a punctelor A, B, C conduce la relaţia:

$$\begin{vmatrix} 2m-1 & 10 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$ echivalentă cu $14m + 28 = 0$, care conduce la $m = -2$.

Aşadar, pentru $m = -2$ punctele A, B, C sunt coliniare, iar pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, punctele sunt necoliniare.

◢ **Temă**

1. Să se scrie ecuaţiile laturilor triunghiului ABC, dacă $A(-1, 2)$, $B(-3, 4)$, $C(4, -4)$.

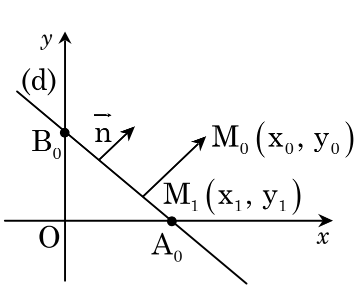
2. Studiaţi coliniaritatea punctelor:

a) $A(1, 0)$, $B(-3, 4)$, $C(5, -4)$;

b) $M(2, 1)$, $N(0, m+3)$, $P(-1, 7)$.

2.2. DISTANŢA DE LA UN PUNCT LA O DREAPTĂ

Fie d o dreaptă de ecuaţie generală $ax + by + c = 0$, cu vectorul normal $\vec{n}(a, b)$, iar $M_0(x_0, y_0)$ un punct din plan. Notăm cu $M_1(x_1, y_1)$ proiecţia punctului M_0 pe dreapta d. Rezultă că vectorii $\vec{n}$ şi $\overrightarrow{M_1M_0}$ sunt vectori coliniari şi, ca urmare, are loc egalitatea



$\vec{n}\cdot\overline{M_1M_0}=|\vec{n}|\cdot\left|\overline{M_1M_0}\right|\cdot\cos 0^\circ$, din care se obține că:

$$d(M_0, M_1)=\left|\overline{M_1M_0}\right|=\frac{\vec{n}\cdot\overline{M_1M_0}}{|\vec{n}|}=\frac{|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (3)$$

Din condiția că $M_1(x_1, y_1)\in d$ se obține $ax_1+by_1+c=0$.

Înlocuind în relația (3) se obține:

$d(M_0, M_1)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (4), relație care reprezintă formula **distanței de la punctul $\mathbf{M_0(x_0, y_0)}$ la dreapta de ecuație $\mathbf{ax+by+c=0}$.**

2.3. ARIA UNEI SUPRAFEȚE TRIUNGHIULARE

Se consideră reperul cartezian xOy şi punctele necoliniare $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

În cele ce urmează se va da o nouă exprimare ariei unei suprafețe triunghiulare folosind determinanți.

Pentru aceasta se porneşte de la formula binecunoscută a ariei: $\mathcal{A}_{[ABC]}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot d(A, BC)$. (5)

Avem că $BC=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$, iar ecuația dreptei BC este $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0$, echivalentă cu $(y_2-y_3)x-(x_2-x_3)y+x_2y_3-x_3y_2=0$.

Conform formulei (4) se obține:

$$d(A, BC)=\frac{|(y_2-y_3)x_1-(x_2-x_3)y_1+x_2y_3-x_3y_2|}{\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}}=\frac{|\Delta|}{\sqrt{(y_2-y_3)^2+(x_2-x_3)^2}}.$$

Cu aceste explicitări, formula (5) a ariei suprafeței triunghiulare devine:

$$\mathcal{A}_{[ABC]}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}\cdot\frac{|\Delta|}{\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}}=\frac{1}{2}\cdot|\Delta|.$$

Aşadar, aria suprafeței triunghiulare [ABC], unde $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, este: $\boxed{A_{[ABC]}=\frac{1}{2}.|\Delta|,\text{ unde } \Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}. \quad (6)}$

➲ OBSERVAȚIE

- Condiția de coliniaritate a trei puncte se poate regăsi scriind că aria suprafeței triunghiulare corespunzătoare este zero, deci că $\Delta = 0$.

Problemă rezolvată

☒ Se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, -1)$. Să se determine:

a) lungimea înălțimii triunghiului duse din A;

b) aria suprafeței triunghiulare $[ABC]$;

c) aria suprafeței patrulatere $[ABDC]$, unde $D(5, 4)$.

<u>*Soluție*</u>

a) Ecuația dreptei BC este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x + y - 11 = 0.$$ Rezultă

că $d(A, BC) = \dfrac{|4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 11|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \dfrac{6\sqrt{17}}{17}$.

b) $\mathcal{A}_{[ABC]} = \dfrac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6$. Aşadar, $\mathcal{A}_{[ABC]} = \dfrac{1}{2} \cdot |-6| = 3$.

c) Avem: $\mathcal{A}_{[ABDC]} = \mathcal{A}_{[ABC]} + \mathcal{A}_{[BCD]}$. Dar $\mathcal{A}_{[BCD]} = \dfrac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 13$,

deci $\mathcal{A}_{[BCD]} = \dfrac{13}{2}$. Se obține, $\mathcal{A}_{[ABDC]} = 3 + \dfrac{13}{2} = \dfrac{19}{2}$.

> ◢ **Temă**
> **Se dau punctele**
> $\mathbf{A(-2, -1)}$, $\mathbf{B(3, 4)}$, $\mathbf{C(0, -6)}$.
> **a) Calculați lungimile înălțimilor triunghiului ABC.**
> **b) Calculați** $\mathcal{A}_{[ABC]}$, $\mathcal{A}_{[OBC]}$.
> **c) Sunt coliniare punctele A, O, B?**

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Fie punctele** $\mathbf{A(-3, -2)}$, $\mathbf{B(5, -1)}$, $\mathbf{C(-1, -3)}$.

a) Să se scrie ecuațiile dreptelor AB, AC, BC.
b) Ce lungimi au înălțimile triunghiului ABC?
c) Să se calculeze $\mathcal{A}_{[ABC]}$ **prin două procedee.**

E2. **Se dau punctele** $\mathbf{A(3, 4)}$, $\mathbf{B(3, -2)}$, $\mathbf{C(2a+1, 1)}$ **şi** $\mathbf{D(-3, 1)}$.

a) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ **punctele A, B, C sunt coliniare?**
b) Calculați aria suprafeței [ABD].
c) Punctul $\mathbf{M(m^2 - 2, 4m - 1)}$, $m \in \mathbb{Z}$, **este situat la distanța** $\sqrt{5}$ **față de dreapta AD. Să se determine coordonatele punctului M şi** $\mathcal{A}_{[MAD]}$.

E3. Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ dacă punctele A, B, C sunt coliniare:
a) $A(m-1, 3)$, $B(2m, -m)$, $C(2m-3, 1+m)$;
b) $A(m+n, 1+m)$, $B(2m-n, 1)$, $C(m, n+1)$.

E4. Se dau punctele $A(8, 0)$, $B(3, 6)$, $C(0, 3)$ şi $Ox \cap BC = \{D\}$, $AB \cap Oy = \{E\}$.
a) Să se scrie ecuațiile dreptelor BC şi AB.
b) Să se calculeze aria suprafeței [ABC].
c) Sunt coliniare mijloacele segmentelor [OB], [AC], [DE]?

E5. Să se determine punctele de pe dreapta $3x + 2y - 12 = 0$ situate la distanța 3 de dreapta $12x - 5y + 30 = 0$.

E6. Se consideră dreptele:
$d_1 : 2x + y - 3 = 0$ şi $d_2 : x - y + 5 = 0$.
Să se determine:
a) $A \in d_2$, astfel încât $d(A, d_1) = 2\sqrt{5}$;
b) $B \in d_1$, astfel încât $d(B, d_2) = 5\sqrt{2}$.

E7. Fie patrulaterul ABCD, $A(1, 2)$, $B(8, 2)$, $C(6, 4)$, $D(3, 4)$.
a) Să se scrie ecuațiile laturilor şi diagonalelor patrulaterului.
b) Să se calculeze $\mathcal{A}_{[ABCD]}$.
c) Dacă $AD \cap BC = \{E\}$, $BD \cap AC = \{F\}$ iar M, N sunt mijloacele laturilor [AB], [DC], să se arate că punctele E, F, M, N sunt coliniare.

E8. Se dau punctele $A(3, 2)$ şi $B(2, 4)$. Să se determine punctele M de pe dreapta $x - y = 3$ pentru care $\mathcal{A}_{[OAM]} = \mathcal{A}_{[OBM]}$.

E9. Se dau punctele $A(0, 1)$, $B(4, -2)$, $C(4, -1)$, $D(5, 3)$. Să se determine punctele M de pe dreapta de ecuație $3y - x - 5 = 0$ pentru care $\mathcal{A}_{[MAB]} = \mathcal{A}_{[MCD]}$.

E10. Se dau punctele $A(3, 2)$, $B(6, 4)$ şi $C(-2, 2)$. Să se determine locul geometric al punctelor M pentru care $\mathcal{A}_{[MAB]} = \mathcal{A}_{[MBC]}$.

E11. Să se scrie ecuația unei drepte care trece prin punctul $A(-2, 0)$ şi formează cu dreptele de ecuații $3x - 2y - 7 = 0$ şi $2x + 3y + 4 = 0$ un triunghi cu aria 13.

E12. Se consideră patrulaterul ABCD de vârfuri $A(6, 4)$, $B(3, 5)$, $C(-2, -3)$, $D(1, -3)$. Să se determine:
a) aria patrulaterului ABCD;
b) aria patrulaterului format de centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, BCD, CDA, DAB.

E13. Fie $A(a, b+1)$, $B(a+1, b^2)$, $C(1, 1)$, $a, b \in \mathbb{Z}$ şi
$\mathcal{M} = \{M(a, b) \mid A, B, C \text{ sunt coliniare}\}$.
a) Câte elemente are mulțimea $\mathcal{M}$?
b) Să se determine aria poligonului format de punctele din mulțimea $\mathcal{M}$.
c) Studiați natura poligonului format de punctele mulțimii $\mathcal{M}$.

CAPITOLUL IV. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

1 MATRICE INVERSABILE DIN $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Una din proprietățile operației de înmulțire pe mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a scos în evidență că există o matrice I_n numită **matricea unitate de ordinul n** cu proprietatea că $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A, \ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

În acest context se pune problema dacă matricea I_n se poate scrie ca produsul a două matrice de ordin n.

Răspunsul este dat introducând noțiunea de inversă a unei matrice.

❖ **DEFINIȚII**

- Fie A o matrice de ordinul n.
  Matricea A se numeşte **matrice inversabilă** în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dacă există o matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.
- Matricea B se numeşte **inversa matricei** A şi se notează $B = A^{-1}$.

Rezultă că $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, relație din care se obține că $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se cerceteze dacă matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sunt inversabile în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soluție

- Presupunem că există $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ astfel încât $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Din aceste egalități de matrice rezultă că $\begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix}$ şi se găseşte $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Aşadar A este inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Presupunem că există matricea $B^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ astfel încât $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot$ $\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se obține egalitatea $\begin{pmatrix} x+u & y+v \\ x+u & y+v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ceea ce este imposibil. Aşadar B nu este matrice inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

> ▣ **TEOREMA 1**
> Inversa unei matrice pătratice, dacă există, este unică.

<u>Demonstrație</u>

Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $B, B'\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB=BA=I_n$ şi $AB'=B'A=$ $=I_n$. (1)

Folosind proprietatea de asociativitate a înmulțirii matricelor şi relația (1), se obține:

$B=B\cdot I_n=B\cdot(AB')=(BA)\cdot B'=I_n\cdot B'=B'$, deci $B=B'$.

Aşadar, inversa unei matrice, dacă există, este unică. ■

În continuare se pune problema identificării matricelor inversabile şi găsirii unui procedeu de determinare a inversei unei matrice inversabile, altul decât acela pornind de la definiție.

Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice de ordinul n.

❖ **<u>DEFINIȚII</u>**

- Matricea A se numeşte **matrice singulară** dacă determinantul ei este nul.
- Matricea A se numeşte **matrice nesingulară** dacă determinantul ei este nenul.

Un exemplu uzual de matrice singulară este matricea nulă O_n, iar de matrice nesingulară este matricea unitate I_n.

> ▣ **TEOREMA 2**
> Matricea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este matrice inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dacă şi numai dacă $\det(A)\neq 0$ (A este matrice nesingulară).

<u>Demonstrație</u>

„$\Rightarrow$“ Să presupunem că matricea A este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Atunci există $A^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n$. Trecând la determinanți în această relație şi aplicând proprietatea 10 a determinaților se obține că: $\det(A)\cdot\det(A^{-1})=\det(I_n)=1$. Rezultă că $\det(A)\neq 0$.

„$\Leftarrow$" Arătăm că dacă A este matrice nesingulară, atunci este matrice inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pentru aceasta vom construi efectiv matricea A^{-1}.

Fie $A=(a_{ij})_{n\times n}$.

• **Etapa I.** Se scrie transpusa matricei A, adică:

$$^{t}A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

• **Etapa II.** Se formează o matrice A^{*} numită **matricea reciprocă** (sau **adjunctă**) a matricei A care se obţine din ^{t}A înlocuind fiecare element al acesteia cu complementul algebric corespunzător:

$$A^{*}=\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \dots & \delta_{n1} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \dots & \delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix}.$$

• **Etapa III.** Se formează matricea $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot A^{*}$ şi se arată că este inversa matricei A. Într-adevăr,

$$AA^{-1}=A\cdot\left(\frac{1}{\det(A)}\cdot A^{*}\right)=\frac{1}{\det(A)}\cdot AA^{*}=$$

$$=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \dots & \delta_{n1} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \dots & \delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Efectuând înmulţirile celor două matrice A şi A^{*} şi folosind dezvoltarea unui determinant după elementele unei linii (coloane), precum şi faptul că „suma produselor dintre elementele unei linii (coloane) şi complemenţii algebrici ai elementelor corespunzătoare de pe altă linie (coloană) este egală cu zero" (Consecinţa la proprietatea P5. a determinanţilor), se obţine:

$$AA^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{pmatrix}=I_n.$$

Analog se obține că $A^{-1}A = I_n$.

Aşadar, dacă $\det(A) \neq 0$, atunci matricea A este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi inversa ei verifică egalitatea:

$$\boxed{\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*.}}$$

➲ OBSERVAȚII ȘI PRECIZĂRI

1. Dacă matricea A este nesingulară, atunci A^{-1} este nesingulară.

2. Dacă matricea A este nesingulară, atunci A^* este nesingulară.

Într-adevăr, din relația $AA^* = d \cdot I_n$, rezultă că $\det(AA^*) = d^n$, de unde se obține că $\det(A^*) = d^{n-1} \neq 0$.

3. Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dacă şi numai dacă $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

4. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt inversabile, atunci $A \cdot B$ este inversabilă şi $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se determine inversa matricei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

<u>*Soluție*</u>

Cercetăm dacă A este matrice inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 - 2 + 12 + 1 = 14 \neq 0.$

> ◢ **Temă**
>
> **Calculați A^{-1} dacă:**
>
> **a)** $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 5 \\ -2 & \sqrt{18} \end{pmatrix}$;
>
> **b)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezultă că există A^{-1}.

Determinăm:

$${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ şi } A^* = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Se obține:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

2. Se dă matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} m & 2 & m+2 \\ -1 & m+3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{C}$.

Să se determine $m \in \mathbb{C}$ astfel încât A să fie inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Soluţie

Conform teoremei 2, A este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dacă şi numai dacă $\det(A) \neq 0$. Avem $\det(A) = -2(m+1)^2$.

Aşadar, A este inversabilă dacă şi numai dacă $m+1 \neq 0$, adică $m \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

Temă
Aflaţi $m \in \mathbb{C}$ astfel încât $A = \begin{pmatrix} m-2 & 0 \\ 3 & m+3 \end{pmatrix}$ să fie inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2 ECUAŢII MATRICEALE

Se numeşte **ecuaţie matriceală**, o ecuaţie în care necunoscuta este o matrice.

Să considerăm următoarea ecuaţie matriceală:

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (1), unde $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este necunoscuta ecuaţiei.

Vom căuta să determinăm matricea X folosind inversa unei matrice pătratice. Notăm $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi ecuaţia matriceală (1) devine **AX = B**, (2). În acest moment de observă că dacă matricea A este inversabilă, înmulţind ecuaţia (2) la stânga cu A^{-1} se obţine $\mathbf{X = A^{-1}B}$ şi problema este clarificată.

Într-adevăr, $\det(A) = -3 \neq 0$. Aşadar există $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^* = -\dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$,

iar $X = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Ca urmare, se poate spune că există anumite tipuri de ecuaţii matriceale care pot fi rezolvate folosind „inversabilitatea matricelor".

TEOREMĂ

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ matrice inversabile.

Atunci ecuaţiile matriceale:

$$\left.\begin{array}{llr} \textbf{a)}\ AX = B, & B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}) & (1) \\ \textbf{b)}\ XA = B, & B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) & (2) \\ \textbf{c)}\ AXC = B, & B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}) & (3) \end{array}\right\} \text{au soluţii unice.}$$

Demonstrație

a) Se înmulțeşte ecuația (1) la stânga cu matricea $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi aplicând asociativitatea înmulțirii se obține succesiv:

$$A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A) \cdot X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}).$$

Aşadar, ecuația (1) are soluție unică în $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, $\mathbf{X = A^{-1}B}$.

b) Înmulțind ecuația (2) la dreapta cu $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi aplicând asociativitatea înmulțirii, se obține succesiv:

$$(XA) \cdot A^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow X(AA^{-1}) = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),$$

deci ecuația (2) are soluție unică în $M_{m,n}(\mathbb{C})$, $\mathbf{X = BA^{-1}}$.

c) Combinând tehnica de la puntele a) şi b) se obține:

$$AXC = B \Leftrightarrow A^{-1}(AXC)C^{-1} = A^{-1}BC^{-1} \Leftrightarrow (A^{-1}A)X(CC^{-1}) = A^{-1}BC^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}BC^{-1}.$$

Aşadar, ecuația (3) are soluție unică în $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, $\mathbf{X = A^{-1}BC^{-1}}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se rezolve ecuația matriceală $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluție

Se observă că ecuația este de forma $A \cdot X \cdot B = C$.

Dacă matricele A şi B sunt inversabile atunci ecuația matriceală are soluția unică $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$ (cazul c) din teoremă).

Avem: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -1$, $A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\det(B) = -1$, $B^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluția ecuației matriceale este:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se determine care matrice sunt inversabile:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

E2. Să se determine inversele matricelor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

E3. Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricele sunt inversabile:

a) $\begin{pmatrix} 3 & m \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} m & 9 \\ 1 & m \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

E4. Să se rezolve ecuațiile matriceale:

a) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E5. Să se rezolve ecuațiile matriceale:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

APROFUNDARE

A1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & m \\ x & -1 & x \end{pmatrix}$.

Să se determine $m \in \mathbb{R}$, dacă:

a) A este inversabilă, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) $A^{-1} = A^*$ şi $7x = 3m$.

A2. Fie ecuația $x^2 + (m+5)x + m + 2 = 0$ cu soluțiile x_1, x_2 şi matricea

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -2 \\ -2 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că A este inversabilă pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

A3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ şi $C = ABA^{-1}$.

Să se calculeze C^n, $n \geq 1$.

A4. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât
$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}.$$
Să se arate că A este inversabilă şi să se determine inversa acesteia.

A5. Să se rezolve sistemele matriceale:

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

b) $X + Y\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$ $X\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

A6. Fie $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ inversabilă astfel încât $A + A^{-1} = 2I_p$. Să se determine $A^n + A^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

A7. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $A^5 = O_n$. Să se arate că matricele $I_n - A$ şi $I_n + A$ sunt inversabile şi să se calculeze inversele acestora. (Univ., Bucureşti, 1990)

A8. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $A^3 = A^2$ şi $A + B = I_n$. Să se arate că matricea $I_n + AB$ este inversabilă.

A9. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $AB = A + B$. Să se arate că matricele $I_n - A$, $I_n - B$ sunt inversabile şi că $AB = BA$.

A10. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că:

a) dacă $I_n + AB$ este inversabilă, atunci $I_n + BA$ este inversabilă;

b) dacă $I_n + (AB)^p$ este inversabilă, atunci $I_n + (BA)^p$ este inversabilă.

A11. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ matrice inversabilă. Să se afle A^{-1} folosind relaţia Hamilton-Cayley.

TEST DE EVALUARE

❍ **1.** Să se determine inversele matricelor:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

❍ **2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x+1 & 3 \\ x+1 & -1 & x+1 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

❍ **3.** Se dă ecuaţia $y^3 - (a-1)y^2 + (2a-5)y - a + 3 = 0$, $a \in \mathbb{C}$ cu soluţiile y_1, y_2, y_3. Să se determine a astfel încât matricea $A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_1 \\ y_3 & y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ să fie inversabilă.

❍ **4.** Să se rezolve ecuaţia matriceală: $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ în două moduri.

❸ SISTEME DE ECUAȚII LINIARE CU CEL MULT PATRU NECUNOSCUTE

3.1. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE. NOȚIUNI GENERALE

Să considerăm următoarea problemă-suport:

Într-un bazin apa curge prin trei robinete identice. Dacă primul robinet se deschide timp de 6 ore, al doilea 4 ore şi al treilea 3 ore, în bazin se adună 390 dal de apă. Dacă primul robinet se deschide 5 ore, al doilea 2 ore şi al treilea 3 ore, atunci în bazin vor fi 305 dal de apă. Dacă primul robinet este deschis 3 ore, al doilea 7 ore, iar al treilea 3 ore, atunci în bazin vor fi 405 dal de apă. Câți decalitri de apă curg într-o oră prin fiecare robinet?

Vom organiza datele problemei în următorul tabel de tip matriceal:

Robinetul I (nr. ore)	Robinetul II (nr. ore)	Robinetul III (nr. ore)	Cantitatea de apă (dal)
6	4	3	390
5	2	3	305
3	7	3	405

Pentru a răspunde la întrebarea problemei, vom nota cu x, y, z debitul robinetelor I, II, respectiv III.

Datele referitoare la numărul de ore de funcționare a celor trei robinete le consemnăm într-o matrice de ordinul 3, notată A, cele referitoare la cantitatea totală de apă le consemnăm într-o matrice-coloană B, iar datele care indică necunoscutele problemei le scriem într-o matrice-coloană X. Astfel, se obțin matricele:

$$A=\begin{pmatrix}6 & 4 & 3\\ 5 & 2 & 3\\ 3 & 7 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}390\\ 305\\ 405\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

Corelarea celor trei categorii de date consemnate în matricele A, B şi X o vom face exprimând cantitatea totală de apă ca fiind suma cantităților de apă furnizate de fiecare robinet în timpul funcționării.

În felul acesta se obține următorul model matematic al problemei:

$$\begin{cases}6x+4y+3z=390\\ 5x+2y+3z=305.\\ 3x+7y+3z=405\end{cases}$$

Acest model este un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute x, z, y, cu exponentul 1, numit **sistem de trei ecuații liniare cu trei necunoscute**.

Determinarea valorilor necunoscutelor x, z, y se va face pe baza unor considerente legate de matrice şi de determinanţi.

Forma generală a unui sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \qquad (1)$$

Numerele $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ se numesc **coeficienţii necunoscutelor**, iar $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt **necunoscutele sistemului**. Numerele $b_1, b_2, ..., b_m \in \mathbb{C}$ se numesc **termenii liberi**.

Dacă toţi termenii liberi sunt nuli, atunci sistemul de ecuaţii liniare se numeşte **sistem liniar omogen**.

Sistemul de ecuaţii (1) poate fi scris mai condensat sub forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ 1 \le i \le m.$$

Sistemului (1) de m ecuaţii liniare cu n necunoscute i se asociază următoarele matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

(matricea coeficienţilor sau matricea sistemului) **(matricea necunoscutelor)** **(matricea termenilor liberi)**

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

(matricea extinsă)

Cu ajutorul acestor matrice, sistemul (1) are următoarea scriere matriceală: $\mathbf{A \cdot X = B}$ numită **forma matriceală** a sistemului de ecuaţii liniare.

Un sistem de numere $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ se numeşte **soluţie a sistemului de ecuaţii** (1) dacă înlocuind necunoscutele $x_1, x_2, ..., x_n$, respectiv cu aceste numere, toate ecuaţiile sistemului sunt verificate, ceea ce se scrie sub forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i, \ 1 \le i \le m.$$

Din punct de vedere al existenței soluției şi al numărului de soluții, un sistem de ecuații liniare poate fi în una din situațiile:

1. Sistem incompatibil. În această situație sistemul nu are nici o soluție.

☞ ***Exemplu***

Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$.

Dacă ar exista perechea (α_1, α_2) care să verifice cele două ecuații, atunci ar trebui ca 5 = 1, ceea ce este fals. Aşadar, sistemul este incompatibil.

2. Sistem compatibil. În această situație sistemul are cel puțin o soluție.

a) Un sistem compatibil cu o singură soluție se numeşte **sistem compatibil determinat**.

☞ ***Exemplu***

Sistemul de ecuații $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ are soluția unică $x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

b) Un sistem compatibil cu mai multe soluții se numeşte **sistem compatibil nedeterminat**.

☞ ***Exemplu***

Sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$ este sistem compatibil nedeterminat deoarece are o infinitate de soluții de forma $(\alpha, 3-2\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

➲ **OBSERVAȚIE**

- Orice sistem liniar omogen este compatibil. Se observă că o soluție a acestuia este $(0, 0, ..., 0)$ numită **soluția banală**.

Problema esențială care se pune în legătură cu un sistem de ecuații liniare este dacă acesta este compatibil sau incompatibil, iar în caz de compatibilitate care este numărul soluțiilor şi cum se determină mulțimea acestora.

➲ **PRECIZARE**

- În acest capitol se vor studia sisteme de ecuații liniare cu cel mult 4 necunoscute.

3.2. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE DE TIP CRAMER

Fie (S) un sistem de **n** ecuații cu **n** necunoscute, $n \le 4$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (S)$$

Făcând notațiile $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, sistemul (S) se scrie sub forma matriceală **AX = B**.

❖ DEFINIȚIE

- Un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute cu proprietatea că matricea sistemului are determinantul nenul se numeşte **sistem de tip Cramer**.

Gabriel CRAMER (1704-1752) matematician şi fizician elvețian

În 1750 a introdus rezolvarea sistemelor liniare cu ajutorul determinanților. Are contribuții în cadrul teoriei curbelor algebrice.

Dacă sistemul (S) este sistem de tip Cramer $(d = \det(A) \neq 0)$, atunci matricea A a sistemului este matrice inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi matricea X a necunoscutelor este $X = A^{-1} \cdot B$. Pornind de la această exprimare a matricei X a necunoscutelor, vom deduce o regulă de determinare element cu element a soluției $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a sistemului.

▣ TEOREMĂ (Regula lui Cramer)

Un sistem de tip Cramer este compatibil determinat, iar soluția lui este dată de formulele:

$$x_1 = \frac{d_1}{d},\ x_2 = \frac{d_2}{d},\ \dots,\ x_n = \frac{d_n}{d}, \quad (1)$$

unde $d = \det(A)$ şi d_k este determinantul obținut din determinantul d al matricei A a sistemului înlocuind coloana k (coloana coeficienților necunoscutei x_k) cu coloana formată din termenii liberi, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

<u>Demonstrație</u>

Fie (S) sistemul de tip Cramer determinat mai sus, cu scrierea matriceală $AX = B$. Deoarece A este matrice inversabilă avem relația $X = A^{-1}B$. Cu notațiile adoptate pentru matricele X, A^{-1} şi B avem:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \cdot \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \dots & \delta_{n1} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \dots & \delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \cdot \begin{pmatrix} b_1\delta_{11} + b_2\delta_{21} + \dots + b_n\delta_{n1} \\ b_1\delta_{12} + b_2\delta_{22} + \dots + b_n\delta_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1\delta_{1n} + b_2\delta_{2n} + \dots + b_n\delta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Aplicând egalitatea a două matrice se obțin formulele după care se calculează fiecare necunoscută $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$x_1 = \frac{1}{d}\left(b_1\delta_{11} + b_2\delta_{21} + \dots + b_n\delta_{n1}\right) = \frac{d_1}{d}$$

$$x_2 = \frac{1}{d}\left(b_1\delta_{12} + b_2\delta_{22} + \dots + b_n\delta_{n2}\right) = \frac{d_2}{d}$$

....

$$x_n = \frac{1}{d}\left(b_1\delta_{1n} + b_2\delta_{2n} + \dots + b_n\delta_{nn}\right) = \frac{d_n}{d}$$

unde $d = \det(A) \neq 0$ şi d_k este valoarea determinantului obținut din determinantul d al matricei A înlocuind coloana k prin coloana termenilor liberi. ■

➲ OBSERVAȚIE

- Formulele (1) se numesc **formulele lui Cramer**.

Pentru n = 2 şi n = 3 aceste formule au fost obținute atunci când s-a definit determinantul de ordin 2, respectiv de ordin 3.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se rezolve sistemul de ecuații liniare folosind regula lui Cramer:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}.$$

<u>*Soluție*</u>

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $d = \det(A) = -65 \neq 0$.

Rezultă că sistemul este de tip Cramer şi are soluție unică dată de formulele Cramer: $x_1 = \frac{d_1}{d}$, $x_2 = \frac{d_2}{d}$, $x_3 = \frac{d_3}{d}$, $x_4 = \frac{d_4}{d}$.

Dar $d_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -65$; $d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$;

$$d_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 3\end{vmatrix}=65;\ d_4=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 2\\ 2 & -2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=-65.$$

Aşadar, soluția sistemului de ecuații este sistemul de numere $(1, 0, -1, 1)$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se scrie sub formă matriceală şi să se rezolve sistemele de ecuații folosind inversa unei matrice:

a) $\begin{cases}x+y=2\\ 2x+3y=5\end{cases}$; b) $\begin{cases}2x-3y=1\\ 3x-4y=2\end{cases}$;

c) $\begin{cases}5(x+y)-2(x-y)=3y+a\\ 3(x+2y)-y+2x=x+b\end{cases}$;

d) $\begin{cases}x+y+z=3\\ 2x+y-z=2\\ 4x-y+z=4\end{cases}$; e) $\begin{cases}x+y+z=a\\ x+2y-z=b\\ x+3y-2z=c\end{cases}$;

f) $\begin{cases}x-y+z=1\\ x+iy+z=2+i\\ ix+y+z=2+i\end{cases}$.

E2. Rezolvați prin regula lui Cramer sistemele de ecuații de la E1.

E3. Să se rezolve prin regula lui Cramer sistemele:

a) $\begin{cases}x+y+z=2\\ 2x+3y-z=5\\ 3x+y+3z=4\end{cases}$; b) $\begin{cases}x-y+z=2\\ 2x+y-3z=4\\ x+2y+z=2\end{cases}$;

c) $\begin{cases}2x+y+z+t=4\\ 2x+y+3t=6\\ x+y+3z=5\\ x-y+4t=4\end{cases}$;

d) $\begin{cases}3x+y-2z+4t=4\\ 2x+3y-z+t=2\\ x-2(2y-3z+t)=-3\\ 4(x+2y)-6\left(z+\frac{1}{2}y\right)+t=5\end{cases}$.

E4. Să se rezolve sistemele de ecuații prin două metode:

a) $\begin{cases}x+y-\frac{5x+3y}{7}=\frac{9y-11}{14}\\ \frac{3x-2y}{2}+2=x-\frac{2y+4}{5}\end{cases}$;

b) $\begin{cases}2x+6y=\frac{7}{9}(10x+24z)\\ 9y+20z=6(x-48y)\\ 2(x+y+2z)=128-y\end{cases}$.

APROFUNDARE

A1. Să se rezolve sistemele de ecuații liniare:

a) $\begin{cases}2(x+2z)+3(y-4)+t=0\\ x+3z+2(2t+y-4)=3\\ 3(x-y+t)+8(y-1)-t+z=5\\ 2(2x+t)+2z+t+y=14\end{cases}$;

b) $\begin{cases}(1+i)x-2y+z=-3+i\\ x-(1+i)y+iz=-1\\ x-(2-i)y+z=-2+2i\end{cases}$;

c) $\begin{cases}C_3^1x-C_3^2y+4C_3^3z-C_3^0t=0\\ C_4^0x+C_4^1z-C_4^2t=-5\\ 2C_5^1x-4C_5^0y+C_5^2t=6\\ A_3^2x-2A_3^1y+A_3^3z=0\end{cases}$.

A2. Să se rezolve sistemele de ecuații ştiind că numerele a, b, c, d sunt numere reale diferite:

a) $\begin{cases} x + ay + a^2z = -a^3 \\ x + by + b^2z = -b^3 \\ x + cy + c^2z = -c^3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$.

A3. Să se determine valorile parametrilor reali pentru care fiecare sistem este de tip Cramer şi să se rezolve în acest caz:

a) $\begin{cases} 2ax + y + z = 0 \\ x + ay - z = -1 \\ x + 2ay + z = 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} (a-2)x - 2y + z = 1 \\ x + y + z = a - 2 \\ (a-1)x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x + (p+1)y + z = p \\ x + py + (p-1)z = 2p \\ (p+3)x + (3p+3)y + pz = 3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x + my + 2z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 6x + y + z + (m^2 - m)t = 1 \end{cases}$.

A4. Se consideră sistemul liniar:
$$\begin{cases} (1+m)x + y + z = 1 \\ x + (1+m)y + z = m \\ x + y + (1+m)z = m^2,\ m \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

a) Să se scrie matricea A a sistemului şi să se calculeze $\det(A)$.

b) Să se afle $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil determinat.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații pentru m = 2.

d) Pentru m = 0 să se precizeze dacă sistemul este compatibil.

A5. Se consideră sistemul liniar:
$$\begin{cases} (2m-1)x - my + 3z = 1 \\ (m-2)x + y + (m-2)z = 2 \\ 3x + (m-1)y + (2m-1)z = 3 \end{cases}.$$

a) Să se scrie matricea A a sistemului şi să se rezolve ecuația $\det(A) = 0$.

b) Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, sistemul este de tip Cramer?

c) Să se determine soluția (x_m, y_m, z_m) în condiția b).

d) Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$ are loc relația $x_m + y_m + z_m > 3$?

A6. Să se rezolve ecuația matriceală:
$$X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A7. Se consideră sistemul de ecuații $\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = 6 + i,\ i = \overline{1, 4}$, unde
$$a_{ij} = \begin{cases} i, \text{ dacă } i = j \\ 2, \text{ dacă } i \neq j \end{cases};\ i, j = \overline{1, 4}.$$

a) Să se calculeze $\det(A)$, unde $A = (a_{ij})_{4\times4}$.

b) Să se rezolve sistemul de ecuații.

A8. Să se rezolve sistemul de ecuații:
$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = 4^{i-1},\ a_{ij} = j^{i-1},\ i, j = \overline{1, 4}.$$

3.3. RANGUL UNEI MATRICE

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ şi r un număr natural, astfel încât $1 \le r \le \min(m, n)$.

Alegem din matricea A **r** linii $i_1, i_2, ..., i_r$ şi **r** coloane $j_1, j_2, ..., j_r$.

Determinantul format cu elementele matricei A situate la intersecţia celor r linii şi r coloane se numeşte **minor de ordinul r** al matricei A.

Numărul minorilor de ordinul r ai matricei A este egal cu $C_m^r \cdot C_n^r$.

Fie $A \neq O_{m,n}$ o matrice cu m linii şi n coloane. Deoarece mulţimea minorilor matricei A este finită, există $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq \min(m, n)$, astfel încât matricea A să aibă cel puţin un minor de ordin r nenul, iar toţi minorii de ordin superior lui r, dacă există, să fie nuli.

❖ DEFINIŢIE

- Spunem că **o matrice** nenulă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ **are rangul r** şi se scrie $\text{rang } A = r$ dacă matricea A are un minor de ordin r nenul şi toţi minorii lui A de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli.

Dacă $A = O_{m,n}$ se convine să se spună că are rangul 0, adică $\text{rang}\left(O_{m,n}\right) = 0$.

Pentru determinarea rangului unei matrice este util să se folosească următorul rezultat.

▣ TEOREMA 1

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice nenulă şi $r \in \mathbb{N}^*$.

Rangul matricei A este r dacă şi numai dacă există un minor de ordinul r al lui A, nenul, iar toţi minorii de ordinul $r+1$ sunt nuli (atunci când există).

Demonstraţie

Dacă $\text{rang } A = r$, atunci toţi minorii de rang mai mare decât r sunt nuli, deci şi cei de ordinul $r+1$ sunt nuli.

Pentru afirmaţia reciprocă trebuie observat că dacă toţi minorii de un anumit ordin k sunt nuli, atunci vor fi nuli şi minorii de ordinul $k+1$ ai matricei. Acest lucru se întâmplă deoarece dezvoltând un minor de ordinul $(k+1)$ după elementele unei linii sau coloane se obţine o sumă de produse, în care fiecare factor este un minor de ordinul k al matricei. Minorii de ordinul k fiind nuli, rezultă că suma este nulă, deci minorul de ordinul $k+1$ este nul. ■

➲ OBSERVAŢIE

- Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci:

  $\text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang } A, \text{rang } B)$.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se calculeze rangul matricelor:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Se observă că $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$ şi ca urmare $\text{rang } A \leq 3$.

Calculăm minorii de ordinul 3 ai matricei A în număr de $C_3^3 \cdot C_4^3 = 4$.

Avem: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

Rezultă că $\text{rang } A < 3$. Alegem un minor de ordinul 2.

Fie acesta: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Aplicând teorema asupra rangului se obține că $\text{rang } A = 2$.

b) $B \in \mathcal{M}_{5,3}(\mathbb{C})$ şi ca urmare $\text{rang } B \leq 3$.

Alegem un prim minor de ordinul 3 şi obținem:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$. Aşadar $\text{rang } B = 3$.

☒ **2.** Să se determine, în funcție de parametrul $m \in \mathbb{C}$, rangul matricei $A = \begin{pmatrix} m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

<u>*Soluție*</u>

Calculăm determinantul matricei A. Rezultă succesiv:

$$d = \begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)^2 (m+1).$$

• Pentru $m \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ avem $d \neq 0$ şi $\text{rang } A = 3$.

• Pentru $m = 1$ se obține $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi rezultă $\text{rang}\, A = 1$.

• Pentru $m = -1$ se obține $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi deoarece minorul $d_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ rezultă că $\text{rang}\, A = 2$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se determine rangul matricelor:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

E2. Să se discute rangul matricelor pentru $m, n \in \mathbb{R}$:

a) $\begin{pmatrix} 3 & m \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & m & m+1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & m & m-2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} m & m+1 & n \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m^2 \end{pmatrix}$.

E3. Să se determine valorile parametrilor $m, n \in \mathbb{R}$, dacă perechile de matrice au acelaşi rang:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ m & 8 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} -7 & -14 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & m & n \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & m & 1 \\ 1 & 11 & 2-3m \end{pmatrix}$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine rangul matricelor. Discuție.

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2\alpha & 5 \\ 2 & 10 & -12 & 5 \\ 2 & \alpha & -2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m^2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 & 1 \\ \beta & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & -3 & -2 \\ \alpha^2 & \beta^2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

A2. Se dă matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & b & 1 & 2 \\ a & -1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R}).$$

Să se determine a, b, c astfel încât $\text{rang}\, A = 2$.

A3. **Fie matricea** $A(x)=\begin{pmatrix} 3 & x & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 4 & 2 & -2x & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Să se determine $x \in \mathbb{R}$ **astfel încât** $\operatorname{rang} A(x)=3$.

A4. **Se dă matricea**

$$A(x)=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & x+2 \\ -13 & 3 & x & -6 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $x \in \mathbb{R}$ **pentru care** $\operatorname{rang} A(x)$ **este minim.**

A5. **Fie matricea**

$$A=\begin{pmatrix} a-\frac{1}{2} & b & c \\ c & a-\frac{1}{2} & b \\ b & c & a-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}).$$

Să se arate că $\operatorname{rang} A=3$.

3.4. STUDIUL COMPATIBILITĂȚII SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE ȘI REZOLVAREA ACESTORA

PROPRIETATEA KRONECKER-CAPELLI. PROPRIETATEA LUI ROUCHÉ

În paragraful (3.1.) s-a stabilit ce este un sistem de ecuații liniare de tip Cramer şi care este metoda de rezolvare a acestuia. În continuare vom considera un sistem oarecare de m ecuații liniare cu n necunoscute, $n \le 4$.

Compatibilitatea unui astfel de sistem este asigurată de următorul rezultat.

> ▣ **TEOREMA 2 (Proprietatea Kronecker-Capelli** [1])
> Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} \overline{A}$, unde A este matricea sistemului, iar $\overline{A}$ este matricea extinsă.

Considerăm $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} \overline{A}=r$.

Minorul de ordinul r care dă rangul matricei A se numeşte **minor principal** sau **determinant principal** şi se va nota d_p.

Necunoscutele sistemului de ecuații liniare ai căror coeficienți formează minorul principal se numesc **necunoscute principale**, iar celelalte necunoscute se numesc **necunoscute secundare**.

Ecuațiile sistemului care corespund liniilor minorului principal se numesc **ecuații principale**, iar celelalte ecuații se numesc **ecuații secundare**.

Orice minor al matricei $\overline{A}$ care se obține din determinantul principal prin bordarea (comple-

Leopold KRONECKER
(1823-1891)
matematician german
A avut contribuții în teoria numerelor, analiză matematică, algebră (teoria ecuațiilor algebrice, teoria formelor pătratice), algebră liniară.

tarea) cu o linie formată din coeficienţii necunoscutelor principale dintr-o ecuaţie secundară şi cu o coloană formată din termenii liberi ai ecuaţiilor principale şi termenul liber al ecuaţiei secundare alese, se numeşte **minor caracteristic**.

Minorii caracteristici se vor nota $d_{c_1}, d_{c_2}, \ldots$.

Numărul acestora este egal cu numărul ecuaţiilor secundare ale sistemului.

➲ OBSERVAŢII

1. $\operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang} \overline{A}$.

2. Un sistem liniar (S) este compatibil $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = r$.

Rezultă că toţi minorii de ordinul $r+1$ ai matricei $\overline{A}$ sunt nuli, deci şi toţi minorii caracteristici sunt nuli.

Astfel, proprietatea Kronecker-Capelli poate fi enunţată sub următoarea formă echivalentă:

> **▣ TEOREMA 3 (Proprietatea lui Rouché [1])**
> Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil dacă şi numai dacă toţi minorii caracteristici sunt nuli.

Exerciţiu rezolvat

☒ Să se stabilească compatibilitatea sistemului de ecuaţii:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y + 5z = 4 \\ 3x - y + 6z = 3 \end{cases}.$$

Soluţie

Matricea sistemului de ecuaţii, respectiv matricea extinsă a acestuia sunt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

> *Eugene ROUCHÉ*
> *(1035-1910)*
> *matematician francez*
>
> *Are contribuţii importante în algebră, geometrie, geometrie descriptivă şi analiză matematică.*

Avem $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$ şi minorul $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$

Rezultă că rang $A = 2$ şi $d_p = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$. Ca urmare, matricea $\overline{A}$ are un singur minor caracteristic: $d_{c_1} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Conform teoremei lui Rouché rezultă că sistemul este compatibil.

ALGORITM DE REZOLVARE A UNUI SISTEM DE m ECUAŢII LINIARE CU n NECUNOSCUTE, $n \leq 4$

Pentru rezolvarea unui sistem (S) de m ecuaţii liniare cu n necunoscute, $n \leq 4$ se parcurg următoarele etape:

1. Stabilirea compatibilităţii sistemului:

a) Se scrie matricea A a sistemului şi matricea extinsă $\overline{A}$.

b) • Dacă matricea A este pătratică şi $\det(A) \neq 0,$ atunci sistemul este de tip Cramer şi se rezolvă prin regula lui Cramer.

• Dacă $\det(A) = 0$ sau A nu este pătratică, atunci se determină rang A şi se stabileşte minorul principal d_p.

c) Se calculează minorii caracteristici $d_{c_1}, d_{c_2}, \ldots$ (dacă există) şi se aplică proprietatea de compatibilitate a lui Rouché.

• Dacă un minor caracteristic d_c este nenul, atunci sistemul (S) este incompatibil şi rezolvarea s-a încheiat.

• Dacă toţi minorii caracteristici sunt nuli atunci sistemul este compatibil (are cel puţin o soluţie).

2. Determinarea mulţimii soluţiilor sistemului

a) Se stabilesc ecuaţiile principale şi ecuaţiile secundare.

b) Se stabilesc necunoscutele principale şi necunoscutele secundare.

• Dacă nu există necunoscute secundare, sistemul este compatibil determinat (rang A = n).

• Dacă există una, două, ... necunoscute secundare sistemul se numeşte **compatibil simplu nedeterminat**, **compatibil dublu nedeterminat** etc.

c) Se formează **sistemul principal** din ecuaţiile principale ale sistemului dat, păstrând în membrul întâi termenii cu necunoscutele principale, iar termenii cu necunoscutele secundare, notate parametric, se trec în membrul al doilea.

d) Se rezolvă sistemul principal prin regula lui Cramer.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -2. \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Soluție

Scriem matricele A şi $\overline{A}$ asociate sistemului de ecuații:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \text{ şi } \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R}).$$

Se observă că $\operatorname{rang} A \le 3$. Se calculează minorii de ordin 3 şi se constată că toți sunt nuli. Deoarece există minori de ordin 2 nenuli, rezultă că $\operatorname{rang} A = 2$.

Alegem minorul principal $d_p = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \ne 0.$

Există un singur minor caracteristic $d_c = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Conform teoremei lui Rouché sistemul este compatibil.

Ecuațiile principale sunt primele două ecuații ale sistemului, iar ecuația secundară este ecuația a treia.

Necunoscutele principale sunt x_1, x_2, iar necunoscutele secundare sunt x_3, x_4.

Din acest motiv sistemul este compatibil dublu nedeterminat.

Notăm parametric necunoscutele secundare $x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Se formează sistemul principal:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 + 3\alpha + \beta \\ x_1 - x_2 = -2 - 2\alpha + 3\beta \end{cases}$$

care se rezolvă cu regula lui Cramer şi se obține:

$$x_1 = \frac{\alpha + 4\beta - 1}{3};\ x_2 = \frac{7\alpha - 5\beta + 5}{3}.$$

Aşadar, mulțimea soluțiilor sistemului de ecuații este:

$$S = \left\{ \left(\frac{\alpha + 4\beta - 1}{3}, \frac{7\alpha - 5\beta + 5}{3}, \alpha, \beta \right) \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

☒ **2.** Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 7 \\ x + y + z = 3 \\ x - y - z = -1 \\ 2x - 3y + 5z = 6 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ x - y + 4z = -6 \\ 5x + 2y - z = 5 \end{cases}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$. Rezultă că rang $A \le 3$.

Se găseşte că $d_p = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, deci rang $A = 3$.

Sistemul are un minor caracteristic $d_c = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.

Aplicând proprietatea lui Rouché se obține că sistemul este incompatibil.

b) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$.

Se găseşte că rang $A = 3$ şi un minor principal este:

$$d_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -16.$$

Sistemul are un singur minor caracteristic $d_c = \det\left(\overline{A}\right) = 0$.

Aşadar, sistemul este compatibil.

Deoarece numărul de necunoscute este egal cu rang A, rezultă că sistemul este compatibil determinat (nu există necunoscute secundare).

Sistemul principal ataşat sistemului dat este:

$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ x - y + 4z = -6 \end{cases}$, care este un sistem de tip Cramer cu soluția: $(1, -1, -2)$.

☒ **3.** Să se rezolve sistemul de ecuații discutând după valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ 2x + (m+1)y + (m+1)z = 2 \\ 3x + (m+2)y + (2m+1)z = 3 \end{cases}.$$

Soluție

Matricea sistemului $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m+1 & m+1 \\ 3 & m+2 & 2m+1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ are

$\det(A) = (m-1)^2(m+2).$

Se deosebesc următoarele cazuri:

1. $\det(A) \neq 0$, adică $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

În acest caz sistemul este un sistem de tip Cramer şi soluția este dată de formulele lui Cramer:

$$x = \frac{d_x}{\det(A)} = \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{1}{m+2}; \quad y = \frac{d_y}{\det(A)} = \frac{1}{m+2};$$

$$z = \frac{d_z}{\det(A)} = \frac{1}{m+2}.$$

2. $\det(A) = 0$, adică $m \in \{1, -2\}$.

• Pentru $m = -2$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, iar rang $A = 2$.

Un minor principal este $d_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3.$

Sistemul are un singur minor caracteristic $d_c = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$

Conform proprietății lui Rouché sistemul este incompatibil.

• Pentru $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, iar rang $A = 1$.

Un minor principal este $d_p = |1| = 1.$

Minorii caracteristici sunt: $d_{c_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $d_{c_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Aşadar, sistemul este sistem compatibil.

Prima ecuaţie a sistemului care corespunde minorului principal este ecuaţie principală, iar celelalte ecuaţii sunt secundare. Necunoscuta principală este x iar necunoscutele secundare sunt y şi z pe care le notăm parametric: $y=\alpha,\ z=\beta,\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

Ecuaţia principală este $x=1-\alpha-\beta$.

Aşadar, pentru $m=1$ sistemul este compatibil dublu nedeterminat cu mulţimea soluţiilor $S=\left\{(1-\alpha-\beta,\ \alpha,\ \beta)\,\middle|\,\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}\right\}$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze compatibilitatea sistemelor:

a) $\begin{cases}2x+y-z=2\\5x-y+2z=6\end{cases}$;

b) $\begin{cases}2x+y-2z=1\\x+y+z=3\\11x+6y-9z=8\end{cases}$;

c) $\begin{cases}2x+3y+5z+t=-6\\3x+3z-3t=5\\5x+4y+9z-t=0\end{cases}$;

d) $\begin{cases}x+2y-8z=21\\3x+4y+2z=7\\x+y+5z=-7\\2x+y+z=2\end{cases}$.

E2. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases}3x+2y-5z=8\\5x-y-z=8\\-2x+3y-4z=0\end{cases}$;

b) $\begin{cases}3x-7y+2z=1\\-x+5y-z=2\end{cases}$

c) $\begin{cases}2x-y+3z+2t=4\\x+y+z-t=3\\3x-2y+5z+4t=5\end{cases}$;

d) $\begin{cases}2x-y+z+t=3\\x+3y-z+5t=-16\\5x+y+z-7t=-10\end{cases}$;

e) $\begin{cases}3x-2y-z=1\\2x-y+3z=0\\12x-y-11z=1\\2x+y-5z=-1\end{cases}$;

f) $\begin{cases}x+3y-2z-4t=1\\-x-3y+2z+5t=6\\x+3y-2z+7t=-3\end{cases}$;

g) $\begin{cases}2x-y+3z+4t=0\\5x-y+z+t=0\\-x+z+2t=0\\7x-2y+4z+5t=0\end{cases}$;

h) $\begin{cases}3x+4y+2z=0\\4x-2y-z+t=6\\x+y+z+t=4\\7x-5y-3z+t=8\\5x-7y-5z-t=0\end{cases}$;

i) $\begin{cases}4x-3y+2z=4\\3x+4y-z=-2\\6x+5y-3z=5\\-x+y-4z=9\\7x-y+z=6\end{cases}$;

j) $\begin{cases}3x-2y+5z-2t=2\\x+y+4z=5\\x-y+3t=-4\\6x-3y+9z+4t=-1\\2x-5y-3z+t=-12\end{cases}$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemele să fie compatibile:

a) $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x+y-z=a \\ -3x-\left(a^2+a\right)y+4z=a-1 \\ 2x-y-3z=-3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+ay=1 \\ x+y=b \\ 2x+3y=5 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

A2. Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil şi rangul matricei să fie 2:

a) $\begin{cases} x+ay+a^2z=1 \\ x+3y+2z=1 \\ x+y+z=b \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=-1 \\ x+9y+az+t=3 \\ 5x-6y+10z+bt=-a \end{cases}$.

A3. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul

$\begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ -x+ay+2z=a+b \\ 3x+by-4z=a \end{cases}$

să fie sistem simplu nedeterminat şi să se rezolve.

A4. Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul:

$\begin{cases} 2x-y+z-t=1 \\ x+y+az+t=-1 \\ x-y+z+bt=c \end{cases}$

să fie compatibil dublu nedeterminat.

A5. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul:

$\begin{cases} x+3y-2z=1 \\ 2x+y-a^2x=0 \\ x-7y+az=b \end{cases}$

să fie sistem incompatibil. Să se rezolve pentru $a=2$ şi $b=-3$.

A6. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul omogen:

$\begin{cases} x+(m+5)y-(m+1)z=0 \\ -x+y+3z=0 \\ (1-2m)x+2y+4mz=0 \end{cases}$

să aibă numai soluția nulă.

A7. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul omogen:

$\begin{cases} mx+2y+z=0 \\ (m+2)x-2y+3y=0 \\ 5x+2my+(3m+2)z=0 \end{cases}$

să aibă şi soluții nenule. Să se rezolve sistemul pentru $m=1$.

A8. Să se studieze compatibilitatea sistemelor:

a) $\begin{cases} x-2y-2z=4 \\ 3x+y+mz=4 \\ 3x-y+z=p \end{cases}$, $m, p \in \mathbb{R}$;

b) $\begin{cases} x+y+mz=0 \\ x-y+z=0 \\ x+my+z=0 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{cases} x+(m+1)y+z=2+m-m^2 \\ mx+y-z=0 \\ x-2y-mz=3m-m^2-2 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$;

d) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=5 \\ 2x+3y=m+4 \\ 7x-my=m^2+2 \end{cases}$.

A9. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & 2 \\ 2 & a+1 \end{pmatrix}$,

$a \in \mathbb{R}$.

A10. Să se rezolve şi să se discute în $\mathbb{R}$ sistemele:

a) $\begin{cases} x+my=m \\ mx+y=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+z=m \\ mx-y+2z=1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x - ay + z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ ax + a^2y - z = a^2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x - y - az = 1 \\ ax + y + az = 1 - a \\ ax + 3y + 3z = -1 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} (m-4)x - 2y + z = 1 \\ x + y + z = m - 4 \\ (m-3)x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = a \\ x + y + az + t = a^2 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} ax + 2y - z = 1 \\ x + (a-1)y + z = 1 \\ x - y + (a+1)z = 1 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} x - y + z + 2t = 1 \\ x - y - 5z - 3t = 1 \\ 2x + 8z + t = 2 \\ (m+2)x + my - 3z + (m+1)t = 2 \end{cases}$;

i) $\begin{cases} x - 2y + z + t = 0 \\ 3x - y + 7z - 5t = 0 \\ 2x - y + 3z - 3t = 0 \\ 4x + (a+1)y + 2az + (a-3)t = 0 \end{cases}$;

j) $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + y - z = a \\ 2x - y - 3z = -3 \\ -3x - (a^2 + a)y + 4z = a - 1 \\ x + 2by - 2z = 2b - 2 \end{cases}$;

k) $\begin{cases} x - y - 2z + 4t = 0 \\ 5x + 3y + 7z - 6t = 0 \\ 8x - 5z + (m+4)t = 1 \\ 4x + 2y + mz + (m-2)t = p \end{cases}$.

A11. **Să se rezolve sistemul:**

$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ (m+2)x - y + 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 243 \end{cases}$. **(IP, Buc., 1987)**

A12. **Se dă sistemul de ecuații**

$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, 2, 3$, **astfel încât**

$2b_i = 23i^2 - 95i + 84$ **şi**

$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j \\ 0, \text{ dacă } i > j \\ (-1)^{i+j} C_j^i, \text{ dacă } i < j \end{cases}$, $i, j = \overline{1, 3}$.

a) Să se calculeze rang A, unde $A = (a_{ij})_{3\times3}$.

b) Să se rezolve sistemul de ecuații.

METODA LUI GAUSS DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAŢII LINIARE

Să pornim de la următoarea situație-problemă:

„Un depozit de mărfuri livrează până la epuizarea stocului o gamă de 4 produse A, B, C, D după următorul tabel matriceal:

Numărul de produse de tipul				Suma încasată (unități monetare)
A	B	C	D	
10	16	15	18	6 020 u.m.
0	15	30	24	4 860 u.m.
0	0	25	45	3 800 u.m.
0	0	0	125	5 000 u.m.

Care este prețul pe unitatea de produs?“

Să notăm cu x, y, z, t prețul pe unitatea de produs pentru tipul de produs A, B, C, respectiv D.

Modelul matematic al situației date este:

$$\begin{cases} 10x + 16y + 15z + 18t = 6\ 020 \\ 15y + 30z + 24t = 4\ 860 \\ 25z + 45t = 3\ 800 \\ 125t = 5\ 000 \end{cases}.$$

Se observă că s-a obținut un sistem liniar de 4 ecuații cu 4 necunoscute cu o aşezare „triunghiulară". Soluția se obține cu uşurință pornind de la ultima ecuație din care se obține $t = 40$. Apoi, prin metoda substituției se obțin pe rând $z = 80$, $y = 100$, $x = 250$.

Aşadar, prețul pe unitatea de produs este: 250 u.m., 100 u.m., 80 u.m., respectiv 40 u.m.

Din cele de mai sus se desprinde ideea simplității rezolvării unui sistem de ecuații liniare având o astfel de formă „triunghiulară" , dar şi întrebarea „cum trebuie procedat ca un sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute să fie adus la o formă atât de simplă?"

Răspunsul la această întrebare reprezintă esența a ceea ce urmează.

Fie (S) un sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute, $n \le 4$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + a_{m4}x_4 = b_m \end{cases}.$$

❖ DEFINIȚII

- Sistemul (S) este **echivalent** cu un sistem (S_1) şi se scrie $S \sim S_1$, dacă au aceeaşi mulțime de soluții.
- Se numeşte **transformare elementară de tipul 1** a sistemului (S) orice permutare a două ecuații ale sistemului.
- Se numeşte **transformare elementară de tipul 2** a sistemului (S) o operație prin care se adună o ecuație cu o altă ecuație înmulțită eventual cu un număr nenul.

Metoda lui Gauss sau **metoda eliminării succesive** este metoda prin care un sistem (S) este transformat într-un sistem echivalent (S') de formă „triunghiulară" sau „trapezoidală" prin transformări elementare de tipul 1 sau 2. Un astfel de sistem are forma:

$$
(S)\begin{cases}
\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3+\alpha_{14}x_4=c_1\\
\alpha_{22}x_2+\alpha_{23}x_3+\alpha_{24}x_4=c_2\\
\alpha_{33}x_3+\alpha_{34}x_4=c_3\\
\alpha_{44}x_4=c_4.\\
0=c_5\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
0=c_m
\end{cases}
$$

Carl Friedrich GAUSS
(1777-1855)
matematician şi astronom german

Are contribuții importante în toate ramurile matematicii: algebră, teoria numerelor, analiză matematică, geometrie, geometrie analitică.

Sistemul (S') se rezolvă pornind de la ultima ecuație spre prima.

• Dacă în sistemul (S') apar ecuații de forma $0=c_k$, unde $c_k\neq 0$, atunci sistemul (S'), deci şi (S), este incompatibil.

• Dacă în sistemul (S') nu apar ecuații contradictorii sistemul este compatibil.

Eventualele necunoscute secundare, dacă apar, se notează parametric, se trec în membrul al doilea şi se continuă cu rezolvarea sistemului triunghiular format.

Să urmărim aplicarea metodei lui Gauss pe câteva exemple:

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemele de ecuații liniare:

$$
\textbf{a)}\begin{cases}2x-y+z-t=1\\3x-z+t=-3\\2x-y-3t=2\\2x+2y-2z+5t=-6\end{cases};\quad
\textbf{b)}\begin{cases}x+y+z=2\\2x-y-2z=-2\\x+4y+5z=8\\2x+5y+6z=10\end{cases};\quad
\textbf{c)}\begin{cases}2x-3y+z=-1\\x+2y-3z=0\\x-12y+11z=-1\\4x-15y+9z=0\end{cases}.
$$

<u>Soluție</u>

Vom aplica convenabil transformări de tipul 1 sau 2 astfel încât să se elimine succesiv câte o necunoscută şi sistemul să fie adus la o formă triunghiulară sau trapezoidală.

a) Eliminăm necunoscuta x din ecuațiile a doua, a treia şi a patra.

Pentru aceasta se înmulțeşte prima ecuație cu $-\dfrac{3}{2}$ şi o adunăm la a doua ecuație, apoi înmulțim prima ecuație cu -1 şi o adunăm pe rând la ecuația a treia şi a patra (transformări de tipul 2).

Se obține sistemul echivalent: $\begin{cases} \boxed{2x - y + z - t = 1} \\ 3y - 5z + 5t = -9 \\ -z - 2t = 1 \\ 3y - 3z + 6t = -7 \end{cases}$.

Facem o transformare de tipul 1, permutând ecuația a treia cu a patra.

Se obține sistemul echivalent: $\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ \boxed{3y - 5z + 5t = -9} \\ 3y - 3z + 6t = -7 \\ -z - 2t = 1 \end{cases}$.

Eliminăm necunoscuta y din a treia ecuație având ca ecuație de referință ecuația a doua.

Se obține sistemul: $\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ 3y - 5z + 5t = -9 \\ \boxed{-2z - t = -2} \\ -z - 2t = 1 \end{cases}$.

Eliminăm necunoscuta z din ecuația a patra având ca ecuație de referință ecuația a treia.

Rezultă sistemul liniar scris în formă triunghiulară:

$$\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ 3y - 5z + 5t = -9 \\ -2z - t = -2 \\ -\frac{3}{2}t = 2 \end{cases}.$$

Pornind de la ultima ecuație către prima se obține soluția: $t = -\frac{4}{3}$, $z = \frac{5}{3}$, $y = 2$, $x = 0$. Soluția sistemului inițial este sistemul de numere $\left(0, 2, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, iar sistemul este compatibil determinat.

b) Aplicând succesiv transformări elementare de tipul 1 şi 2 se obțin următoarele sisteme echivalente:

$$\begin{cases} \boxed{x + y + z = 2} & \bigg| \cdot(-2), (-1) \\ 2x - y - 2z = -2 \\ x + 4y + 5z = 8 \\ 2x + 5y + 6z = 10 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 2 \\ \boxed{-3y - 4z = -6} \\ 3y + 4z = 6 \\ 3y + 4z = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -3y - 4z = -6 \\ \boxed{0 \cdot z = 0} \\ 0 \cdot z = 0 \end{cases} \quad (S')$$

Din compoziția sistemului (S') scris sub formă trapezoidală se observă că z poate lua orice valoare. De aceea z se va lua necunoscută secundară, şi se va nota parametric $z=\alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{C}$.

Se deduce apoi $y=\dfrac{6-4\alpha}{3}$ şi $x=\dfrac{\alpha}{3}$.

Mulțimea soluțiilor sistemului dat este $S=\left\{\left(\dfrac{\alpha}{3}, \dfrac{6-4\alpha}{3}, \alpha\right) \middle| \alpha \in \mathbb{C}\right\}$, iar sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

c) Se aplică transformări elementare de tipul 1 sau 2 şi sistemul (S) devine succesiv:

$$S\sim\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-3y+z=-1 \\ x-12y+11z=-1 \\ 4x-15y+9z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-3z=0 \\ -7y+7z=-1 \\ -14y+14z=-1 \\ -23y+21z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-3z=0 \\ -7y+7z=-1 \\ 0z=1 \\ -2z=\dfrac{23}{7} \end{cases}.$$

Acest ultim sistem conține o ecuație contradictorie $(0=1)$, fapt pentru care acest sistem este incompatibil, deci şi sistemul inițial este incompatibil.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se rezolve sistemele de mai jos prin metoda lui Gauss:**

a) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+2y=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+2z=-1; \\ x-y+2z=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z+3t=7 \\ 2x-5y-4z+t=10 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+z-t=1 \\ 2x+y-2t=1 \\ 3x+4y-z=6 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 3x+y+z=2 \\ 2x+2y-z=1 \\ x+y+2z=3 \\ 4x+2y-3z=-1 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=5 \\ 3x-y=6 \\ 4x+3y=-1 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 2x+y-z+3t=0 \\ x-2y+z-4t=0 \\ 3x+y-4z+5t=0 \\ -x+6y+2t=0 \end{cases}$.

E2. **Pentru golirea unui bazin cu apă se utilizează trei robinete. Dacă primul robinet este deschis 2 ore, al doilea 3 ore şi al treilea 6 ore, se evacuează în total 220 hl de apă. Lăsându-se deschise 3 ore, 2 ore, respectiv 6 ore, se evacuează în total 210 hl de apă, iar dacă primul şi al doilea sunt deschise câte 2 ore, iar al treilea 3 ore se evacuează 145 hl de apă. Să se afle debitul fiecărui robinet.**

E3. **Dacă tatăl ar avea cu 7 ani mai mult decât are, atunci vârsta actuală a fiului mai mic ar fi $\frac{1}{6}$ din vârsta tatălui. Peste 15 ani vârsta fiului mai mare va fi $\frac{1}{2}$ din vârsta tatălui. Să se determine vârsta fiecăruia, dacă peste 18 ani cei doi copii vor avea împreună vârsta tatălui.**

E4. Să se rezolve sistemele prin metoda lui Gauss şi să se discute:

a) $\begin{cases} x-3y+6z=4 \\ 3x-y+z=3 \\ -6x+2y+az=b \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+5y+2z=b \\ 2x-3y+az=-1 \end{cases}$.

E5. Să se rezolve sistemele de ecuații prin două metode:

a) $\begin{cases} 2(x+2y)=3z+11 \\ 5x-3y=6-5z-2x \\ 3(x-z)=15-y+5z \\ 6(x-y)+11z=-4-y \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3(x-y)=2(z-2y)+x+1 \\ 2(x-y-1)=3(z-y-1)+x \\ x+y+z-3=0 \\ x+2(y-z)=z+1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x+4z=-2(2+y) \\ 5y+7z=4(x+4) \\ 11z-31y-47z=-68 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x-4y+z+(m+1)t=0 \\ x-y-z+t=0 \\ 2x+y-z+3t=0 \\ x+2y+3z-t=0 \end{cases}$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ 1. Se consideră sistemul de ecuații liniare: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-2y+2z=8 \\ 2x+3y-2z=4 \end{cases}$.

a) Să se determine rangul matricei sistemului.
b) Să se rezolve sistemul de ecuații prin două metode.

❍ 2. Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemul de ecuații: $\begin{cases} x+y+3z-t=0 \\ 2x+y+z+t=1 \\ x+2y+z+2t=3 \\ x+y+z+t=1 \\ x+2y-z+4t=0 \end{cases}$.

❍ 3. Să se studieze compatibilitatea sistemului de ecuații: $\begin{cases} x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \\ mx+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

❍ 4. Fie sistemul: $\begin{cases} x+y+az+at=b \\ x+ay+az+t=b \\ ax+ay+z+t=b \\ ax+y+z+at=b \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

i) Condiția necesară şi suficientă ca sistemul să fie compatibil este:
a) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; b) $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; c) $b=0$; d) $b=0$, $a \neq 1$; e) $a \neq -1$, $b=0$.

ii) Condiția necesară şi suficientă ca sistemul să fie compatibil simplu nedeterminat este:

a) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; **b)** $a = 1$; **c)** $a \neq 1$; **d)** $a \neq -1$; **e)** $a = -1, b = 0$.

Testul 2

1. Se dă sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2x + my + 4z = 0 \\ (3+m)x + 2y + mz = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}.$$

a) Să se rezolve sistemul pentru $m = 2$.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ **pentru care sistemul are şi soluții nenule.**

2. Fie sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = -1 \\ x + y + (1-a)z = b \end{cases}.$$

a) Să se rezolve sistemul pentru $a = 1, b = 3$.

b) Să se discute sistemul după parametrii reali a, b.

3. Se dă sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4^a \\ x + y - 2z = m \\ x + 2y - 3z = 2^a \end{cases}.$$

a) Să se arate că sistemul este de tip Cramer.

b) Dacă (x_0, y_0, z_0) **este soluția sistemului, să se determine** $m \in \mathbb{R}$ **pentru care** $z_0 > \frac{2}{3}, \forall a \in \mathbb{R}$.

4. Se consideră matricele $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = \frac{1}{3}(A - B), A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, **unde**

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\left(C_i^j, A_i^j\right), \text{ dacă } i > j \\ \max\left(C_j^i, A_j^i\right), \text{ dacă } i \leq j \end{cases}, \quad b_{ij} = \max(i, j), \; i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

a) Să se determine $A \cdot B$.

b) Să se rezolve sistemul $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$.

c) Să se determine $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, **dacă** $X \cdot C = B$.