Πείραμα 1β -Επαφή p-n.

Ιάσων Καζάζης

Προς τον κύριο Α.Παπαθανασίου.

HELLENIC REPUBLIC

National and Kapodistrian University of Athens

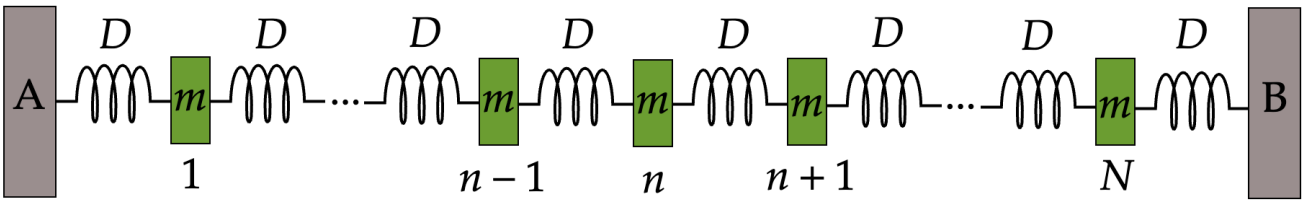
EST. 1837

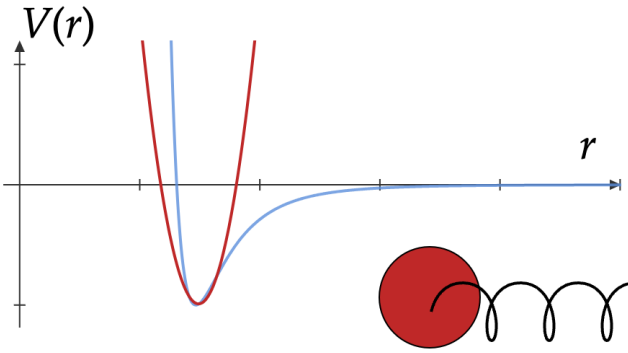
Προσωπικά στοιχεία | ΑΜ: 1110201900073 , email: sph1900073@uoa.gr

Ομάδα 4: Θάνος-Τάνο Ευάγγελος, Καζάζης Ιάσων, Καλλη Ευριπίδης

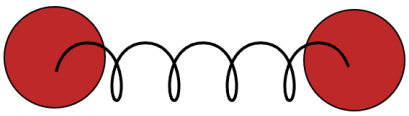
Εκτέλεση άσκησης Πέμπτη 9:00-12:00, 23 Μαΐου 2024.

$$x_1(t) = X_{1,01}(cos(\omega t) - cos(\omega_1 t)) + X_{1,02}(cos(\omega t) - cos(\omega_2 t))$$





$$\omega_2' = \frac{\sqrt{|\Delta_2|}}{2m} = \sqrt{\omega_2^2 - \left(\frac{b_2}{2m}\right)^2}$$



Εργαστήριο Κατεύθυνσης Φυσικής Συμπυκνωμένης Ύλης.

Πείραμα 1Β.

21 Ιουνίου 2024

Περιεχόμενα

1 Θεωρία Πειράματος. 1

1.1 Κρυσταλλικές Ταλαντώσεις και Κανονικοί Τρόποι Ταλάντωσης . . . 1

1.1.1 Περίπτωση N ταλαντωτών . . . 2

2 Πειραματική Διαδικασία. 4

2.1 Οργανολογία και διάταξη. . . . 4

3 Πειραματικά αποτελέσματα. 6

3.1 Δεδομένα πειράματος σε πίνακες. . . . 6

3.2 Μετρήσεις Ελεύθερης Ταλάντωσης Δύο Δρομέων. . . . 6

3.3 Μετρήσεις Εξαναγκασμένης Ταλάντωσης Δύο Δρομέων. . . . 6

3.4 Μετρήσεις Πειράματος Έξι Δρομέων. . . . 7

4 Θεωρητικός Υπολογισμός 8

5 Ανάλυση πειράματος 12

5.1 Πείραμα Δύο Δρομέων . . . 12

5.1.1 Ελεύθερη Ταλάντωση . . . 12

5.1.2 Εξαναγκασμένη Ταλάντωση . . . 14

5.2 Πείραμα Έξι Δρομέων . . . 17

6 Συμπεράσματα, σφάλματα και περιθώρια βελτίωσης. 20

7 Παράρτημα 21

7.1 Pixel Scaling . . . 21

7.2 Computational Approach . . . 21

7.3 Oscillator Simulation . . . 23

8 Βιβλιογραφία. 24

8.1 Βιβλιογραφία. . . . 24

8.2 Αναφορές. . . . 24

8.3 Μετρήσεις-Δεδομένα. . . . 24

Περίληψη

Η παρούσα μελέτη εστιάζει στις ταλαντώσεις των ατόμων στο **κρυσταλλικό πλέγμα** ενός στερεού σώματος. Ο κύριος στόχος είναι η κατανόηση αυτών των ταλαντώσεων μέσω της προσομοίωσής τους με αρμονικούς ταλαντωτές. Στην εισαγωγή, παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο των ταλαντώσεων των ατόμων γύρω από τη θέση ισορροπίας τους σε ένα κρυσταλλικό πλέγμα. Η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης με τα γειτονικά άτομα αναπτύσσεται κατά Taylor και το σύστημα περιγράφεται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης. **Το πείραμα** περιλαμβάνει δύο συστήματα: ένα με δύο δρομείς και ένα με έξι δρομείς, οι οποίοι συνδέονται με ελατήρια. Οι δρομείς έχουν ίση μάζα και τα ελατήρια ίδια σταθερά. Χρησιμοποιείται αεροτροχιά για τη μείωση της τριβής και εξωτερικός διεγέρτης για την επίτευξη ταλαντώσεων. Καταγράφονται οι απομακρύνσεις και οι περίοδοι των ταλαντώσεων για διάφορες καταστάσεις του συστήματος. Τα αποτελέσματα δείχνουν την επιτυχία της προσομοίωσης, παρά τις μικρές αποκλίσεις από τις θεωρητικές τιμές, αποδεικνύοντας τη σημαντική επίδραση του ανθρώπινου παράγοντα στις μετρήσεις.

1 Θεωρία Πειράματος.

1.1 Κρυσταλλικές Ταλαντώσεις και Κανονικοί Τρόποι Ταλάντωσης

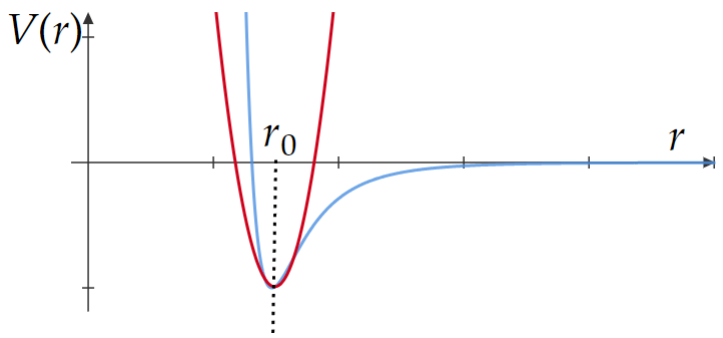
Τα άτομα του κρυσταλλικού πλέγματος ταλαντώνονται γύρω από μια θέση ισορροπίας. Για μικρές απομακρύνσεις από την θέση ισορροπίας (ΘΙ), μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor την δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης με τους γείτονες του. Θα έχουμε λοιπόν:

$$\Delta V(r) \cong \frac{1}{2}D(r-r_0)^2, \quad \text{με} \quad D = \left.\frac{d^2V(r)}{dr^2}\right|_{r_0}$$

Το σύστημα δηλαδή δέχεται μια δύναμη επαναφοράς

$$F = -\frac{dV}{dr}$$

Δυνάμεις που είναι ανάλογες των μετατοπίσεων, προκαλούν αρμονικές ταλαντώσεις και το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης.



Η μικρή αυτή περιοχή ταλαντώσεων μας βοηθάει να μελετήσουμε την θερμική συμπεριφορά, την απορρόφηση και εκπομπή ακτινοβολίας. Όμως εκτός της περιοχής αυτή παρουσιάζουν μια μη γραμμικότητα, η οποία εξηγεί φαινόμενα όπως η θερμική διαστολή. Το πλάτος αυτών των ταλαντώσεων εξαρτάται από

την θερμική ενέργεια του συστήματος και με την αύξηση της ενέργειας αυτής παρατηρείται αύξηση του πλάτους.

Όμως είναι εξαιρετικά δύσκολο να μελετήσουμε ένα τέτοιο σύστημα και για αυτό μελετούμε το μακροσκοπικό του ανάλογο. Υποθέτουμε ότι έχουμε σώματα ίδιας μάζας που είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους και αλληλεπιδρούνε μόνο με τους πρώτους γείτονες τους. Έτσι, μέσω ενός τέτοιου συστήματος μπορούμε να μελετήσουμε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά των πλεγματικών ταλαντώσεων.

1.1.1 Περίπτωση N ταλαντωτών

Στα συστήματα αυτά παρατηρούνται κανονικοί τρόποι ταλάντωσης. Υπάρχουν, με λίγα λόγια, συγκεκριμένες ταλαντώσεις του συστήματος που έχουν συγκεκριμένα διακριτά χαρακτηριστικά (πλάτος, συχνότητα, φάση). Όταν το σύστημα διεγερθεί από κάποιο εξωτερικό αίτιο σε αυτή την κατάσταση, τότε όταν αφαιρεθεί το εξωτερικό αίτιο θα συνεχίσει να διατηρεί αυτά τα χαρακτηριστικά (δεν θα πρέπει όμως να υπάρχει απόσβεση).

Θα μελετήσουμε σύστημα χωρίς εξωτερικής διέγερση και χωρίς απόσβεση. Τα σώματα ισαπέχουν, έχουν την ίδια μάζα και όλα τα ελατήρια έχουν την ίδια σταθερά D. Η εξίσωση κίνησης ενός τυχαίου σώματος n είναι

$$m\ddot{U}_n = D(U_{n-1} + U_{n+1} - 2U_n).$$

Οι λύσεις της είναι της μορφής

$$U_n(t) = A_n e^{i\omega t} + B_n e^{-i\omega t}.$$

Πρέπει οι λύσεις να αντιστοιχούν σε πραγματικές απομακρύνσεις οπότε τις γράφουμε με την μορφή

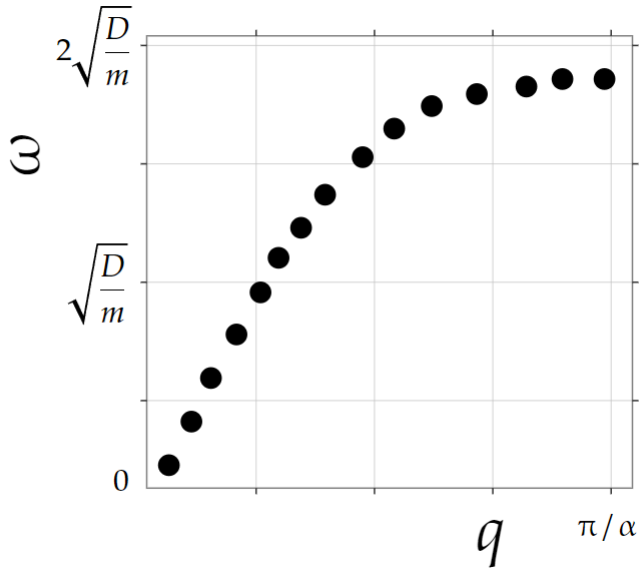
$$U_n(t) = C_n \cos(\omega t) \quad \text{ή} \quad \mathrm{Re}\{C_n e^{-i\omega t}\}, \quad \text{με} \quad C_n = A_n + B_n.$$

Κάνοντας αντικατάσταση την λύση σε κάθε εξίσωση προκύπτει το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{pmatrix} = \frac{m\omega^2}{D} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{pmatrix}.$$

Οι N διαφορετικές ιδιοτιμές του σώματος έχουν την μορφή $4\sin^2\left(\frac{q^{(k)}\alpha}{2}\right)$, όπου $q_{(k)} = \frac{\kappa\pi}{(N+1)\alpha}$, κ=1,2,…,N. Έτσι βρίσκουμε τις ιδιοσυχνότητες,

$$\omega_{(k)} = 2\omega_0 \left|\sin\left(\frac{q^{(k)}\alpha}{2}\right)\right|, \quad \text{όπου} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$



Διασπορά των ιδιοσυχνοτήτων συστήματος με 15 σώματα.

Η γενική εξίσωση των ιδιοδιανυσμάτων $c_{(\kappa)n}$ δίνεται από τον τύπο:

$$c_{(\kappa)n} = \sin\left(q_{(\kappa)} n\alpha\right).$$

Τα ιδιοδιανύσματα $c_{(\kappa)n}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, μπορούν να κανονικοποιηθούν και είναι πλήρης βάση χώρου. Οπότε κάθε γενική ταλάντωση του συστήματος μπορεί να περιγραφεί με τα ιδιοδιανύσματα.

Για ένα σύστημα 2 δρομέων που είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με 3 ελατήρια:

$$q_1 = \pi/3a, \quad q_2 = 2\pi/3a \quad \text{άρα} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{και} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3D}{m}}$$

Με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα για τους δυο φορείς,

$$c_1 = (0.866, 0.866), \quad c_2 = (0.866, -0.866).$$

Το μείον που παρατηρείται στο ιδιοδιάνυσμα του δεύτερου δρομέα δεν μας επηρεάζει στην μέτρηση του πλάτους, όμως προκαλεί μια ασύμφωνη ταλάντωση μεταξύ των δρομέων.

Για ένα σύστημα 6 δρομέων που είναι συνδεδεμένοι με 7 ελατήρια:

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{D}{m}}\left|\sin\left(\frac{k\pi}{14}\right)\right| \quad \text{για} \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Και προκύπτουν τα c_k,

$$c_1 = (0.43, 0.78, 0.97, 0.97, 0.78, 0.43)$$

$$c_2 = (0.78, 0.97, 0.43, -0.43, -0.97, -0.78)$$

$$c_3 = (0.97, 0.43, -0.78, -0.78, 0.43, 0.97)$$

$$c_4 = (0.97, -0.43, -0.78, 0.78, 0.43, -0.97)$$

$$c_5 = (0.78, -0.97, 0.43, 0.43, -0.97, 0.78)$$

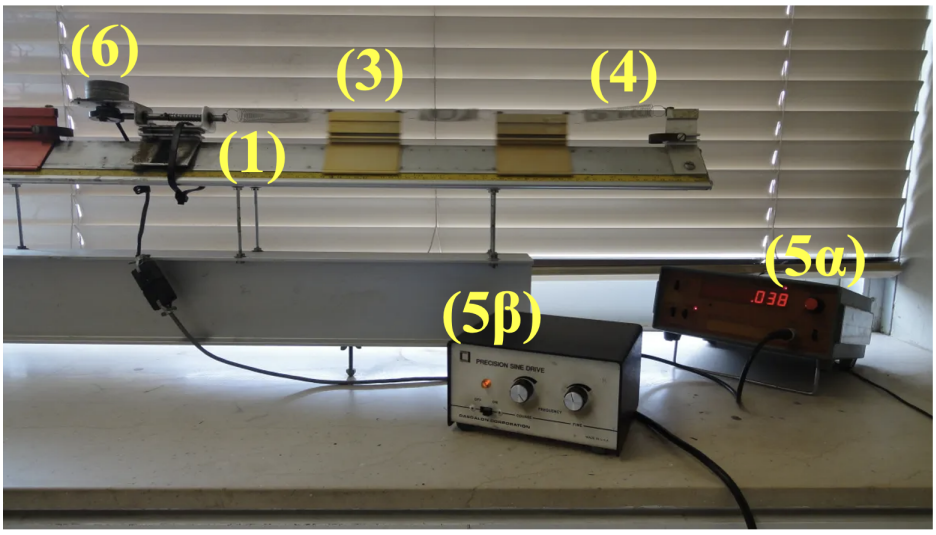
$$c_6 = (0.43, -0.78, 0.97, -0.97, 0.78, -0.43)$$

Αυτή η περίπτωση είναι πιο σύνθετη. Οι δρομείς κινούνται ομόρροπα ή αντίρροπα σε ομάδες ανά 2 όπως θα δούμε και στο πείραμα.

2 Πειραματική Διαδικασία.

2.1 Οργανολογία και διάταξη.

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από ένα σύστημα 2 δρομέων και από ένα 6 δρομέων. Τα σωματίδια έχουν ίση μάζα $m = 0.135$ kg και τα ελατήρια έχουν όλα ίδια σταθερά $D = 3$ N/m. Υπάρχει αεροτροχιά που τροφοδοτείται συνεχώς από σταθερό ρεύμα αέρα. Οι δρομείς συνδέονται μεταξύ τους με ελατήρια και οι ακριανοί δρομείς είναι συνδεδεμένοι σε σταθερό σημείο.



Εικόνα 1. Η διάταξη αποτελείται από: (1) Αεροτροχιά. (2) Παροχή αέρα. (3) Δρομείς ίδιας μάζας Μ. (4) Ελατήρια ίδιας σταθεράς Κ. (5) Συχνόμετρο και ρυθμιστής. (6) Διεγέρτης.

Επιπλέον, η διάταξη διαθέτει ένα έμβολο που προσφέρει εξωτερική διέγερση στο σύστημα την οποία μπορούμε και μεταβάλλουμε . Ρυθμίζουμε τη συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης με τη βοήθεια συχνομέτρου, η τιμή του οποίου διαφέρει από την πραγματική συχνότητα. Για να βρούμε την πραγματική τιμή, διαιρούμε τη συχνότητα της ένδειξης με τον αριθμό 48. Εφαρμόζοντας αυτή την διέγερση στο σύστημα, πέρα από την κίνηση που προκαλείται εξαιτίας της εξωτερικής διέγερσης, υπάρχει και μια κίνηση που είναι μείγμα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. Όμως, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, λόγω τριβής, μένει μόνο η κίνηση λόγω του εξωτερικού διεγέρτη. Όταν η συχνότητα της διέγερσης γίνει ίση με κάποια από τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος τότε παρατηρείται το φαινόμενο του συντονισμού.

Εικόνα 2. Ρυθμιστής και συχνόμετρο. Με ψευδοσυχνότητες που διορθώνουμε με έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα.

Αρχικά βεβαιωθήκαμε ότι οι δρομείς βρίσκονταν σε ισορροπία Ελέγξαμε τις αποστάσεις μεταξύ των δρομέων και των σταθερών σημείων και διασφαλίσαμε ότι ήταν ίσες Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίσαμε ότι το σύστημα ήταν σε κατάσταση ισορροπίας προτού ξεκινήσουμε τις μετρήσεις. Στη συνέχεια υπολογίσαμε τις θεωρητικές ιδιοσυχνότητες των δρομέων χρησιμοποιώντας τη θεωρητική σχέση ν_K Αυτές οι τιμές μας βοήθησαν να προγραμματίσουμε τις μετρήσεις μας και να γνωρίζουμε εκ των προτέρων τις συχνότητες στις οποίες θα έπρεπε να αναμένουμε συντονισμό στο σύστημα. Κατόπιν ρυθμίσαμε τον κινητήρα ώστε να παράγει περιοδική κίνηση με μεταβαλλόμενη συχνότητα Εφαρμόσαμε εξωτερική διέγερση στους δρομείς και καταγράψαμε τις ταλαντώσεις τους χρησιμοποιώντας φωτοδίοδους και συγχρονισμένο ταλαντόμετρο Με κάθε αλλαγή στη συχνότητα παρατηρήσαμε και καταγράψαμε τους έξι κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Οι μετρήσεις μας περιλάμβαναν την καταγραφή της αρχικής θέσης ισορροπίας κάθε δρομέα καθώς και τις ταλαντώσεις τους μετά την εφαρμογή της εξωτερικής διέγερσης Καταγράψαμε τις συχνότητες και τα πλάτη των ταλαντώσεων και συγκρίναμε τα πειραματικά δεδομένα με τις θεωρητικές προβλέψεις.

Εικόνα 3. Οι έξι ταλαντωτές, οι οποιοί είνια πάνω στην αεροτροχιά συνδεδεμένοι με όμοια ελατήρια.

3 Πειραματικά αποτελέσματα.

3.1 Δεδομένα πειράματος σε πίνακες.

Θέτουμε σε λειτουργία την αεροτροχιά και μετατοπίζουμε τους 2 δρομείς κατά 3 cm από την θέση ισορροπίας τους, στην αρχή ομόρροπα και στην συνέχεια αντίρροπα. Αφήνουμε τα σώματα να ταλαντωθούν 1 λεπτό και έπειτα ανά 1 λεπτό παίρνουμε μετρήσεις για το πλάτος ταλάντωσης και για την περίοδο ενός εκ των 2 δρομέων. Η θέση ισορροπίας του ενός δρομέα είναι στα 3.418 m. Παρακάτω παρατίθενται οι μετρήσεις μας:

3.2 Μετρήσεις Ελεύθερης Ταλάντωσης Δύο Δρομέων.

Πειραματικά Δεδομένα N=2.			
Ομόρροπα		Αντίρροπα	
$t(min)$	$x_1(mm)$	$t(min)$	$x_1(mm)$
0	19	0	16
1	16	1	13
2	10	2	9
3	7	3	6
4	6	4	5
5	6	5	4
6	5	6	3
7	4	7	2
8	3	8	2
9	2	9	1
10	1	10	1

Πίνακας 1: Πλάτος ταλάντωσης για τις δύο κινήσεις στο σύστημα 2 δρομέων.

Καθώς το πλάτος μειώνεται η περίοδος δεν αλλάζει. Για να κάνουμε ακριβέστερη μέτρηση της περιόδου, αφήνουμε κάθε φορά το σύστημα να κάνει 20 ταλαντώσεις και μετράμε τον χρόνο. Ύστερα διαιρούμε με το 20 και έχουμε την περίοδο. Βλέπουμε πως στην περίπτωση της ομόρροπης κίνησης, η περίοδος, είναι σημαντικά μεγαλύτερη της αντίρροπης.

- **Ομόρροπη κίνηση:** Σε αυτή την κίνηση, οι δύο δρομείς κινούνται με την ίδια κατεύθυνση ταυτόχρονα. Η περίοδος ταλάντωσης για την ομόρροπη κίνηση είναι 1.28 δευτερόλεπτα.
- **Αντίρροπη κίνηση:** Σε αυτή την κίνηση, οι δύο δρομείς κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις ταυτόχρονα. Η περίοδος ταλάντωσης για την αντίρροπη κίνηση είναι 0.74 δευτερόλεπτα.

3.3 Μετρήσεις Εξαναγκασμένης Ταλάντωσης Δύο Δρομέων.

Σταθεροποιούμε τα σώματα στις θέσεις ισορροπίας τους και τα αφήνουμε να ηρεμήσουν. Εφαρμόζουμε σε αυτά εξωτερική διέγερση της οποίας την τιμή ελέγχουμε. Το βήμα με το οποίο αλλάζουμε τη συχνότητα του συχνομέτρου είναι 0.006 kHz. Όπου f_n οι ενδείξεις συχνότητας του συχνομέτρου και f η πραγματική συχνότητα του εμβόλου.

Πειραματικά Δεδομένα N=2.		
$f_\delta(Hz)$	$T(s)$	$x_0(mm)$
0,13	7,12	2
0,25	4,12	3
0,38	2,81	2
0,50	2,06	4
0,63	1,53	7
0,75	1,32	62
0,88	1,25	32
1,00	1,24	12
1,13	1,36	10
1,25	1,86	8
1,38	0,68	30
1,50	0,72	16
1,63	0,78	11
1,75	0,73	6
1,88	0,71	4
2,00	0,76	5
2,13	0,74	4
2,25	0,75	3
2,38	0,74	2
2,50	1,32	2
2,63	1,54	1

Πίνακας 2: Μετρήσεις πλάτους και περιόδου εξαναγκασμένης ταλάντωσης 2 δρομέων.

3.4 Μετρήσεις Πειράματος Έξι Δρομέων.

Αρχικά σταθεροποιούμε τα σώματα στην Θ.Ι τους και έπειτα θέτουμε σε ταλάντωση του σύστημα με εξωτερική διέγερση την συχνότητα της οποίας ρυθμίζουμε να είναι ίδια με τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Παρακάτω παρατίθενται οι μετρήσεις μας.

Πειραματικά Δεδομένα N=6.						
m_1 (mm)	m_2 (mm)	m_3 (mm)	m_4 (mm)	m_5 (mm)	m_6 (mm)	Διέγερση
Θέση Ισορροπίας						
539	888	1265	1625	1905	2250	0
Μέγιστη Απομάκρυνση από τη Θ.Ι.						
16	7	5	10	47	40	0,25
13	17	12	10	60	60	0,48
16	12	15	15	55	62	0,688
31	33	25	40	55	85	0,854
31	43	25	25	90	65	1
11	17	5	5	55	51	1,083

Πίνακας 3: Θέση ισορροπίας και μέγιστη απομάκρυνση από αυτήν για σύστημα 6 δρομέων.

4 Θεωρητικός Υπολογισμός

Θα κάνουμε κάποιους θεωρητικούς υπολογισμούς που περιγράφουν τις φυσικές ποσότητες του πειράματος μας για διαφορετικές περιπτώσεις.

Αν $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι οι θέσεις των δύο δρομέων αντίστοιχα, τότε οι δυνάμεις που δρουν σε κάθε δρομέα λόγω των ελατηρίων είναι οι εξής:

Για τον δρομέα 1:

$$F_1 = -Dx_1 + D_0(x_2 - x_1)$$

Για τον δρομέα 2:

$$F_2 = -Dx_2 - D_0(x_2 - x_1)$$

Αυτές οι δυνάμεις μπορούν να εκφραστούν ως εξισώσεις κίνησης:

Για τον δρομέα 1:

$$m_1\ddot{x}_1 = -Dx_1 + D_0(x_2 - x_1) = -(D + D_0)x_1 + D_0x_2$$

Για τον δρομέα 2:

$$m_2\ddot{x}_2 = -Dx_2 - D_0(x_2 - x_1) = -(D + D_0)x_2 + D_0x_1$$

Για την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων, αντικαθιστούμε τις $x_1(t) = A_1e^{i\omega t}$ και $x_2(t) = A_2e^{i\omega t}$ στις εξισώσεις κίνησης και λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} m_1\omega^2 - (D + D_0) & D_0 \\ D_0 & m_2\omega^2 - (D + D_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για να έχουμε μη-τετριμμένες λύσεις, η ορίζουσα του παραπάνω πίνακα πρέπει να είναι μηδέν. Έτσι, λύνουμε την εξής εξίσωση:

$$\det\left(\begin{bmatrix} m_1\omega^2 - (D + D_0) & D_0 \\ D_0 & m_2\omega^2 - (D + D_0) \end{bmatrix}\right) = 0$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα, παίρνουμε:

$$(m_1\omega^2 - (D + D_0))(m_2\omega^2 - (D + D_0)) - D_0^2 = 0$$

Αναδιατάσσοντας, έχουμε:

$$m_1m_2\omega^4 - \omega^2(m_1 + m_2)(D + D_0) + (D + D_0)^2 - D_0^2 = 0$$

Προκύπτει:

$$\omega^2 = \frac{(m_1 + m_2)(D + D_0) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)^2(D + D_0)^2 - 4m_1m_2((D + D_0)^2 - D_0^2)}}{2m_1m_2}$$

Από αυτή την εξίσωση, θα υπολογίσουμε τις δύο τιμές του ω^2 , και έπειτα θα πάρουμε τις τετραγωνικές ρίζες για να βρούμε τις ιδιοσυχνότητες ω_1 και ω_2.

Οι ιδιοσυχνότητες (ω_1) και (ω_2) για τους δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος δύο δρο-

μέων δίνονται από τις εξής εκφράσεις:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(D+D_0)(m_1+m_2)-\sqrt{D^2m_1^2-2D^2m_1m_2+D^2m_2^2+2DD_0m_1^2-4DD_0m_1m_2+2DD_0m_2^2+D_0^2m_1^2+2D_0^2m_1m_2+D_0^2m_2^2}}{2m_1m_2}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{(D+D_0)(m_1+m_2)+\sqrt{D^2m_1^2-2D^2m_1m_2+D^2m_2^2+2DD_0m_1^2-4DD_0m_1m_2+2DD_0m_2^2+D_0^2m_1^2+2D_0^2m_1m_2+D_0^2m_2^2}}{2m_1m_2}}$$

Η ρίζα που περιλαμβάνει το αρνητικό πρόσημο μέσα στο τετραγωνικό ρίζα παρέχει την χαμηλότερη ιδιοσυχνότητα ω_1 , ενώ η ρίζα με το θετικό πρόσημο δίνει την υψηλότερη ιδιοσυχνότητα ω_2 .

Ας εξετάσουμε τις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις για τις ιδιοσυχνότητες $((\omega_1,\ \omega_2))$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $(c(1),\ c(2))$ των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

Περίπτωση 2.α: ($m_1 = m_2 = m$) αλλά $D \neq D_0$

Για το σύστημα με ίδιες μάζες και διαφορετικές σταθερές ελατηρίων, ο πίνακας του συστήματος μετατρέπεται σε:

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + D + D_0 & -D_0 \\ -D_0 & -m\omega^2 + D + D_0 \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$((D + D_0 - m\omega^2)^2 - D_0^2) = 0$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα:

$$m^2\omega^4 - 2m\omega^2(D + D_0) + (D^2 + 2DD_0 + D_0^2 - D_0^2) = 0$$

$$m^2\omega^4 - 2m\omega^2(D + D_0) + D^2 + 2DD_0 = 0$$

Οι ιδιοσυχνότητες είναι:

$$\omega^2 = \frac{2(D + D_0)}{m} \quad \text{και} \quad \omega^2 = \frac{D}{m}$$

Οι ιδιοτιμές αντιστοιχούν σε:

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}}$$

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D_0}{m}}}$$

Τα ιδιοδιανύσματα είναι,

Αντισυμμετρικός τρόπος:

$$c(1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Συμμετρικός τρόπος:

$$c(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Περίπτωση 2.β: $m_1 = m_2 = m$ **και** $D = D_0$

Εδώ $D = D_0$, οπότε ο πίνακας και η χαρακτηριστική εξίσωση μετατρέπονται σε:

$$\begin{bmatrix} -2m\omega^2 + 2D & -D \\ -D & -2m\omega^2 + 2D \end{bmatrix}$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα:

$$(2D - 2m\omega^2)^2 - D^2 = 0$$

$$4D^2 - 4Dm\omega^2 - D^2 = 0$$

Οι ιδιοσυχνότητες ειναι:

$$\omega^2 = \frac{3D}{2m} \quad \text{και} \quad \omega^2 = 0$$

Οι ιδιοτιμές αντιστοιχούν σε:

Στατικός τρόπος :

$$\boxed{\omega_1 = 0}$$

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{3D}{2m}}}$$

Τα ιδιοδιανύσματα είναι τα ίδια όπως πριν.

Περίπτωση 2.γ: $m_1 \neq m_2$ **και** $D = D_0$

Για διαφορετικές μάζες αλλά ίσες σταθερές ελατηρίων, ο πίνακας μετατρέπεται σε:

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + 2D & -D \\ -D & -m_2\omega^2 + 2D \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοσυχνότητες ω_1 και ω_2 είναι δοθείσες από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D(m_1 + m_2 - \sqrt{m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2})}{m_1 m_2}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D(m_1 + m_2 + \sqrt{m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2})}{m_1 m_2}}$$

Τα ιδιοδιανύσματα $c(1)$ και $c(2)$ για τους δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης είναι τα εξής:

$$c(1) = \begin{bmatrix} -\frac{m_2}{m_1 - m_2 - \sqrt{m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c(2) = \begin{bmatrix} -\frac{m_2}{m_1 - m_2 + \sqrt{m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Όλοι οι υπολογισμοί γίνονται με python αναλυτικά στο QR code /file/2a στο GitHub.

Για τις περιπτώσεις (2.α) ($m_1 = m_2 = m$) αλλά ($D \neq D_0$) και (2.β) ($m_1 = m_2 = m$) και ($D = D_0$), ίδια ιδιοδιανύσματα:

$c(1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ (αντισυμμετρικός τρόπος)

$c(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ (συμμετρικός τρόπος)

Ο λόγος είναι ότι τα ιδιοδιανύσματα εξαρτώνται από την αναλογία των σταθερών D και D_0 και τη συμμετρία του συστήματος. Σε αυτές τις δύο περιπτώσεις, τα συστήματα έχουν ουσιαστικά την ίδια συμμετρία, αν και με διαφορετικές τιμές των σταθερών ελατηρίων.

Ορθογωνιότητα και Κανονικοποίηση

Τα ιδιοδιανύσματα $c(1)$ και $c(2)$ είναι ορθογώνια, επειδή το εσωτερικό τους γινόμενος είναι μηδέν:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$$

Ωστόσο, τα ιδιοδιανύσματα δεν είναι κανονικοποιημένα. Για να τα κανονικοποιήσουμε, πρέπει να διαιρέσουμε κάθε ιδιοδιάνυσμα με $\sqrt{2}$,

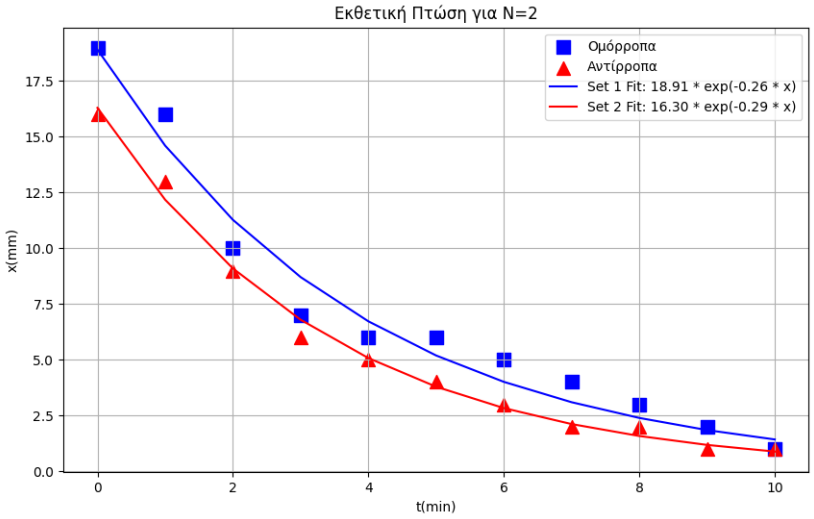
$$c(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5 Ανάλυση πειράματος

5.1 Πείραμα Δύο Δρομέων

5.1.1 Ελεύθερη Ταλάντωση

Αρχικά, υπολογίζουμε την περίοδο ταλάντωσης για τον ομόρροπο και τον αντίρροπο τρόπο ταλάντωσης χωρίς εξωτερική διέγερση. Εδώ σημειώνεται ότι θεωρούμε ότι έχει επιτευχθεί η ταυτόχρονη ταλάντωση των δρομέων και έτσι λαμβάνουμε μια περίοδο ταλάντωσης και για τους δύο δρομείς.



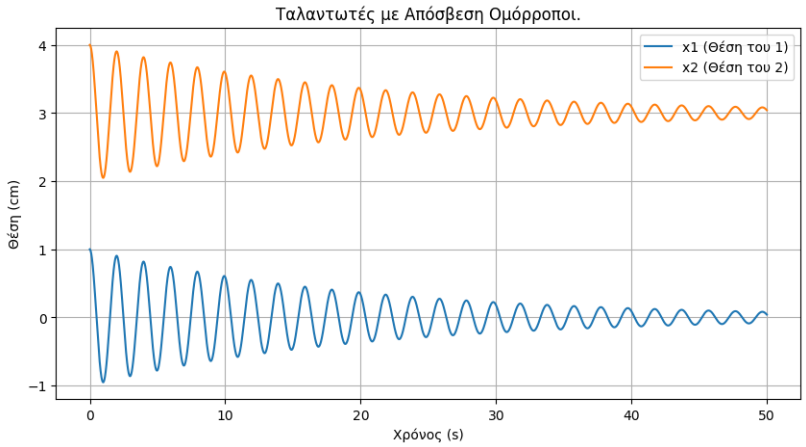
Διάγραμμα $x(t)$ για τη κίνηση του δρομέα στις δύο περιπτώσεις.

Η πτώση του πλάτους των ταλαντωτών είναι εκθετική. Παραπάνω βλέπουμε τα δεδομένα από αυτή την κίνηση και μια εκθετική παλινδρόμηση πάνω στα δεδομένα,

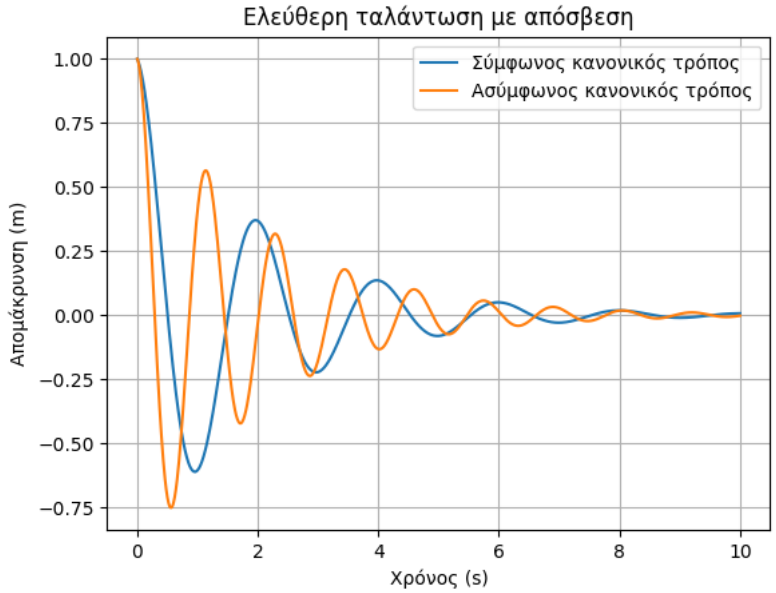
$$X_{o,k} = A_k e^{-\gamma t} \quad \mu\epsilon \quad k = 1, 2 \tag{1}$$

Η απόσβεση μπορεί να βρεθεί από τον εκθέτη $\gamma = b/2m$ (Hz) για κάθε περίπτωση. Για τα ομόρροπα $\gamma = 0.26$ και $b = 0.0702kg \cdot Hz$ και για τα αντίρροπα $\gamma = 0.29$ και $b = 0.0783kg \cdot Hz$. Παρατηρούμε πως οι τιμές των b είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους πράγμα ενθαρρυντικό. Βέβαια σε ιδανικές συνθήκες θα έπρεπε οι τιμές αυτές να είναι ίσες. Παρακάτω βλέπουμε ποιοτικά το τι περιμένουμε θεωρητικά με λύση των εξισώσεων.

Χαμηλή απόσβεση



Μεγάλη απόσβεση



Αρχικά γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι, $\omega_1 = \omega_0$ και $\omega_2 = \sqrt{3}\,\omega_0$. Όπου $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 4.714\ Hz$ και άρα βρίσκουμε θεωρητικά πως $\omega_1 = 4.714\ Hz$ και $\omega_2 = 8.165\ Hz$.

Στην περίπτωση των **ομόρροπων** $T_{o\mu} = 1.28\ sec$ από όπου προκύπτει, $f_{o\mu} = 0.78\ Hz$. Επομένως $\omega_{o\mu} = 2\pi f_{o\mu} = 4.9\ \frac{rad}{s}$.

Στην περίπτωση των **αντίρροπων** $T_{\alpha\nu} = 0.735\ sec$ από όπου προκύπτει, $f_{\alpha\nu} = 1.36\ Hz$. Επομένως $\omega_{\alpha\nu} = 2\pi f_{\alpha\nu} = 8.55\ \frac{rad}{s}$.

Βλέπουμε ότι όντως ισχύει η παρακάτω προσέγγιση καθώς $\omega_2/\sqrt{3} \approx \omega_1$.

$$\boxed{\frac{\omega_2}{\sqrt{3}} = \frac{8,55}{\sqrt{3}} = 4,93 \approx \omega_1}$$

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα ελατήρια είναι ίδιας σταθεράς.

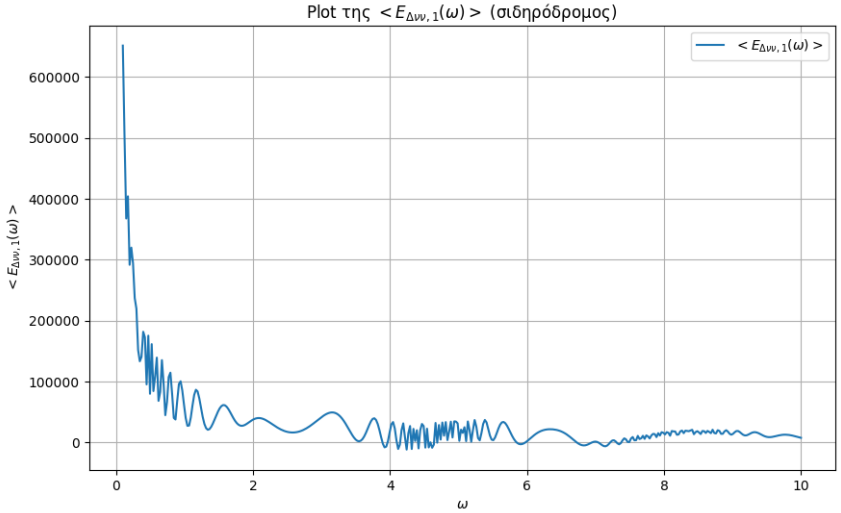
Οι ίδιες ποσότητες θεωρητικά προκύπτουν ως $\omega_0 = 4,71\ Hz$, και αντίστοιχα για τις συχνότητες,

$$\nu_{1,\theta} = 0,75\,\text{Hz} \quad \nu_{2,\theta} = 1,30\,\text{Hz}$$

Οι αποκλίσεις είναι 4% για την ομόρροπη και 3.8% για την αντίρροπη αντιστοίχως.

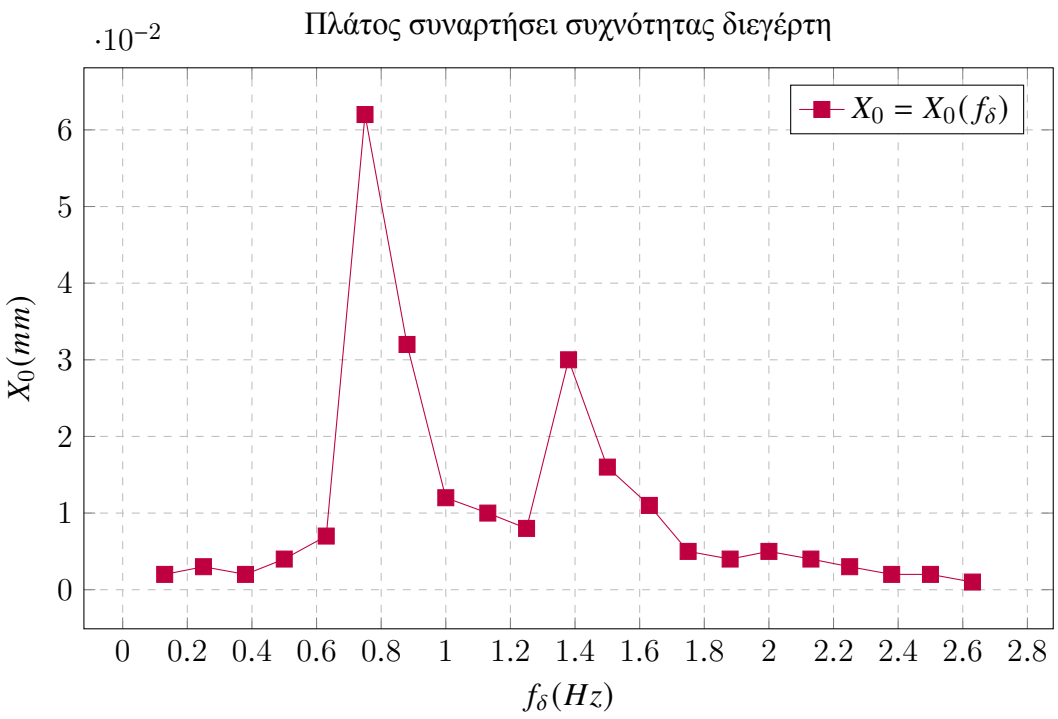
Η μέση, ανά περίοδο, δυναμικής ενέργειας που αποθηκεύεται στον κάθε δρομέα δίνεται από τον παρακάτω σιδηρόδρομο. Την οποία και απεικονίζουμε παρακάτω.

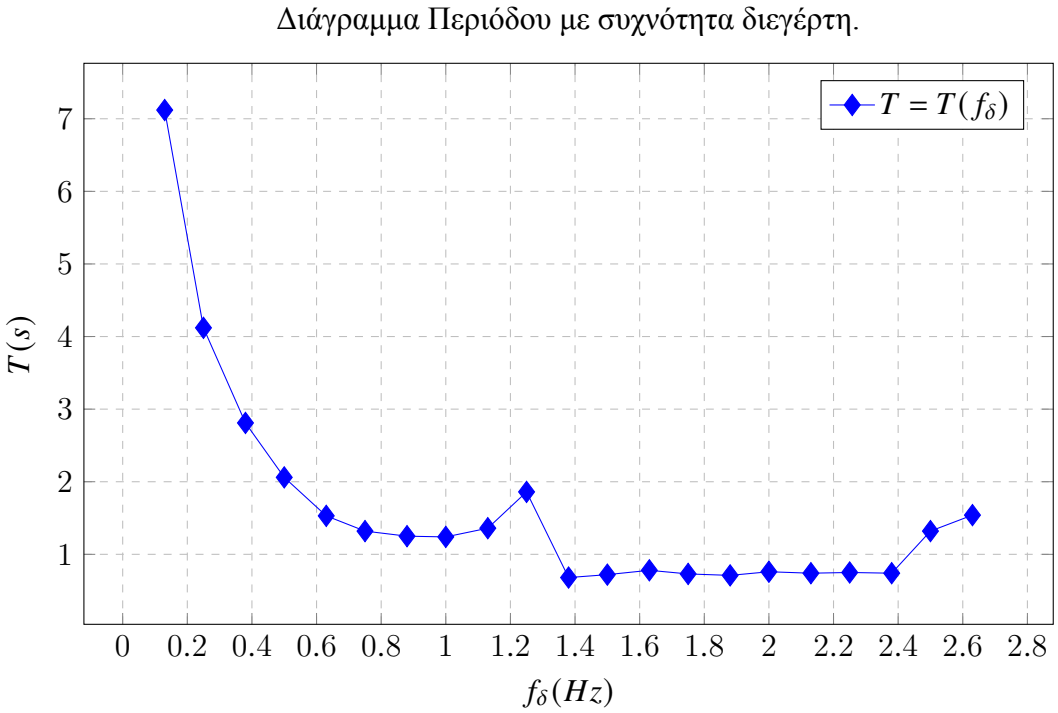
$$
\begin{aligned}
< E_{\Delta\nu\nu,1}(\omega) > = & \frac{1}{2}D\left(X_{1,01}+X_{1,02}\right)^2\frac{\pi}{\omega} \\
& + \frac{1}{2}DX_{1,01}^2\left\{\frac{\pi}{\omega}+\frac{1}{2\omega_1}\sin\left(\frac{\omega}{\omega_1}2\pi\right)\cos\left(\frac{\omega_1}{\omega}2\pi\right)\right\} \\
& + \frac{1}{2}DX_{1,02}^2\left\{\frac{\pi}{\omega}+\frac{1}{2\omega_2}\sin\left(\frac{\omega}{\omega_2}2\pi\right)\cos\left(\frac{\omega_2}{\omega}2\pi\right)\right\} \\
& - D\left(X_{1,01}^2+X_{1,01}X_{1,02}\right)\left\{\frac{1}{\omega+\omega_1}\sin\left(\frac{\omega+\omega_1}{\omega}\pi\right)\cos\left(\frac{\omega}{\omega+\omega_1}\pi\right)\right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\omega-\omega_1}\sin\left(\frac{\omega-\omega_1}{\omega}\pi\right)\cos\left(\frac{\omega}{\omega-\omega_1}\pi\right)\right\} \\
& - D\left(X_{1,02}^2+X_{1,01}X_{1,02}\right)\left\{\frac{1}{\omega+\omega_2}\sin\left(\frac{\omega+\omega_2}{\omega}\pi\right)\cos\left(\frac{\omega}{\omega+\omega_2}\pi\right)\right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\omega-\omega_2}\sin\left(\frac{\omega-\omega_2}{\omega}\pi\right)\cos\left(\frac{\omega}{\omega-\omega_2}\pi\right)\right\} \\
& + DX_{1,01}X_{1,02}\left\{\frac{1}{\omega_1+\omega_2}\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega}\pi\right)\cos\left(\frac{\omega}{\omega_1+\omega_2}\pi\right)\right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\omega_1-\omega_2}\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega}\pi\right)\cos\left(\frac{\omega}{\omega_1-\omega_2}\pi\right)\right\}
\end{aligned}
$$



5.1.2 Εξαναγκασμένη Ταλάντωση

Όσον αφορά την ταλάντωση των δρομέων με εξωτερική διέγερση, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση του πλάτους συναρτήσει της συχνότητας καθώς και τη γραφική παράσταση της περιόδου συναρτήσει της συχνότητας.





Για το πρώτο γράφημα βλέπουμε τις δύο κορυφές οι οποίες αντιστοιχούν στην ομόρροπη ελεύθερη και στην αντίρροπη αντίστοιχα για αυτές τις τιμές της εξωτερικής συχνότητας του διεγέρτη. Είναι δηλαδή ιδιοσυχνότητες και επομένως υπάρχει συντονισμός και μέγιστο πλάτος. Στο δεύτερο διάγραμμα έχουμε μια μορφή που θυμίζει υπερβολή (δηλαδή $T \sim f^{-1}$), για το γράφημα $T = T(f_\delta)$ καθώς αυτή η σχέση συνδέει περίοδο με συχνότητα.

Για τις f_s βλέπουμε πως στα $0.75\ Hz$ και $1.38\ Hz$ μια απότομη αύξηση πλάτους. Εκεί βρίσκονται οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Οι θεωρητικές ιδιοσυχνότητες για μάζα $m = 0.135kg$ και σταθερά $D = 3N/m$

είναι $\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega_0 = 4.714$ Hz και $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0 = 8.165$ Hz. Οι πειραματικές θα βρεθούν από τη σχέση $\omega = 2\pi f$ και είναι $\omega_{1\pi} = 4.71$ Hz και $\omega_{2\pi} = 8.55$ Hz και οι αποκλίσεις 0.08% και 6.14% αντίστοιχα. Οι μικρές αποκλίσεις δείχνουν ακόμα ότι έχουμε πλησιάσει αρκετά τις θεωρητικές τιμές, παρά των μεγάλων σφαλμάτων που υπεισέρχονται στο πείραμα εξαιτίας της δυσκολίας της ακριβούς παρατήρησης της κίνησης των δρομέων.

Για f_δ στα $0.75\ Hz$ και $1.38\ Hz$ βλέπουμε μια απότομη αύξηση του πλάτους. Εκεί βρίσκονται οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Θεωρητικά θα περιμέναμε $0.75\ Hz$ και $1.31\ Hz$. Δηλαδή κρατώντας την ακρίβεια στο δεύτερο δεκαδικό, έχουμε απόκλιση μόνο στη δεύτερη τιμή κατά 5.34%. Το γράφημα ποιοτικά μοιάζει πάρα πολύ και με το θεωρητικά αναμενόμενο αν λύσουμε τις εξισώσεις (παράρτημα Β).

Σε συνθήκες ίσης προσφερόμενης ισχύος μπορούμε να επαληθεύσουμε θεωρητικά, εφόσον $\omega_2 > \omega_1$ τότε $X_1 > X_2$,

$$X_{1,01} = \frac{F_0/2m}{\omega_1^2 - \omega^2}, \quad X_{1,02} = \frac{F_0/2m}{\omega_2^2 - \omega^2}$$

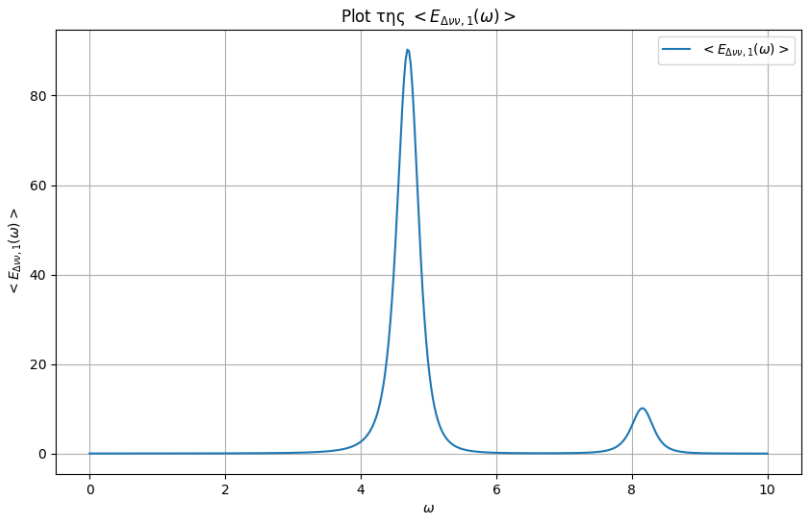
Κάτι το οποίο περιμένουμε, εφόσον η ιδιοσυχνότητα του δεύτερου τρόπου ταλάντωσης είναι μεγαλύτερη, το σύστημα θα απαιτεί περισσότερη ενέργεια. Με την προσφορά ίσης ισχύος, ο δεύτερος τρόπος είναι λογικό να παρουσιάζει μικρότερο πλάτος καθώς δεν επαρκεί η ισχύς, όσο στον πρώτο τρόπο.

Οι απαγορευμένες και επιτρεπτές ενεργειακές στάθμες/ζώνες ταλάντωσης του κλασσικού συστήματος των δύο πανομοιότυπων δρομέων, συζευγμένων με πανομοιότυπα ελατήρια είναι τα σημεία που έχουμε απότομες μειώσεις και αυξήσεις των τιμών.

Αν πλοτάρουμε και κάνουμε παλινδρόμηση τη συνάρτηση του πλάτους με το ω για να βρούμε τη δύναμη, μετά μπορούμε να υπολογίσουμε και την $< E_{\Delta\nu\nu,1}(\omega) >$ από τον τύπο

$$< E_{\Delta\nu\nu,1}(\omega) >= \frac{F_0^2\omega_1^2}{16m}\left(\frac{1}{\left(\omega_1^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}+\frac{1}{\left(\omega_2^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}\right)^2 \tag{2}$$

Τότε προκύπτει πως η $< E_{\Delta\nu\nu,1}(\omega) >$ παρουσιάζει δύο κορυφές στα αντίστοιχα σημεία των ω_1 και ω_2. Κάτι που περιμένουμε από το ενεργειακό φάσμα.



5.2 Πείραμα Έξι Δρομέων

Κάνοντας την επεξεργασία με τις εργαστηριακές μετρήσεις του πειράματος προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες.

$q_k(mm^{-1})$	$\omega = v/2\pi$	$v = 0,25$	$v = 0,48$	$v = 0,68$	$v = 0,85$	$v = 1$	$v = 1,08$
$v(Hz)$		m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
0,0013	1,6	16	13	16	31	31	11
0,0026	3,1	7	17	12	33	43	17
0,0039	4,3	5	12	15	25	25	5
0,0052	5,4	10	10	15	40	25	5
0,0066	6,3	47	60	55	55	90	55
0,0079	6,8	40	60	62	85	65	51

Πίνακας 4: Τιμές ιδιοσυχνοτήτων και διασποράς $_k(q_k)$.

Σχετικά με τους 6 δρομείς τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοσυχνότητες είναι τα εξής παρακάτω, τα οποία μη ορθογώνια/μοναδιαία:

Για $\omega_1 = 2.097947$ Hz έχουμε $c_1 = (0.43, 0.78, 0.97, 0.97, 0.78, 0.43)$

Για $\omega_2 = 4.090695$ Hz έχουμε $c_2 = (0.78, 0.97, 0.43, -0.43, -0.97, -0.78)$

Για $\omega_3 = 5.878318$ Hz έχουμε $c_3 = (0.97, 0.43, -0.78, -0.78, 0.43, 0.97)$

Για $\omega_4 = 7.371178$ Hz έχουμε $c_4 = (0.97, -0.43, -0.78, 0.78, 0.43, -0.97)$

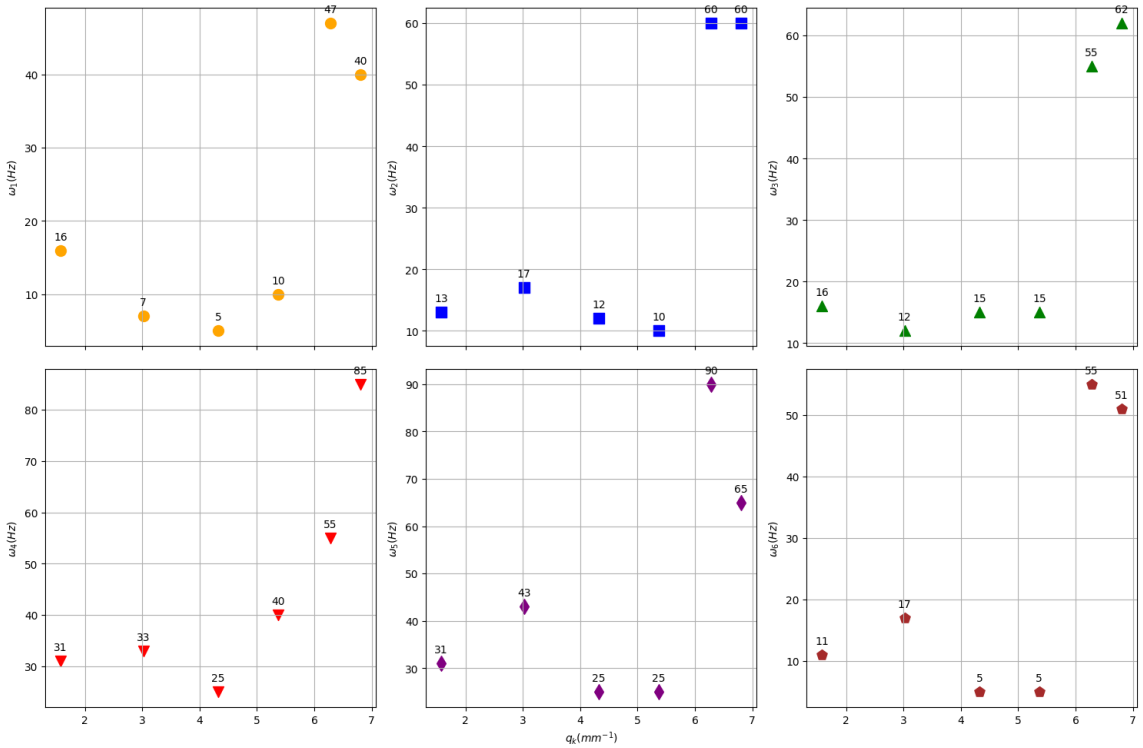
Για $\omega_5 = 8.494416$ Hz έχουμε $c_5 = (0.78, -0.97, 0.43, 0.43, -0.97, 0.78)$

Για $\omega_6 = 9.191709$ Hz έχουμε $c_6 = (0.43, -0.78, 0.97, -0.97, 0.78, -0.43)$

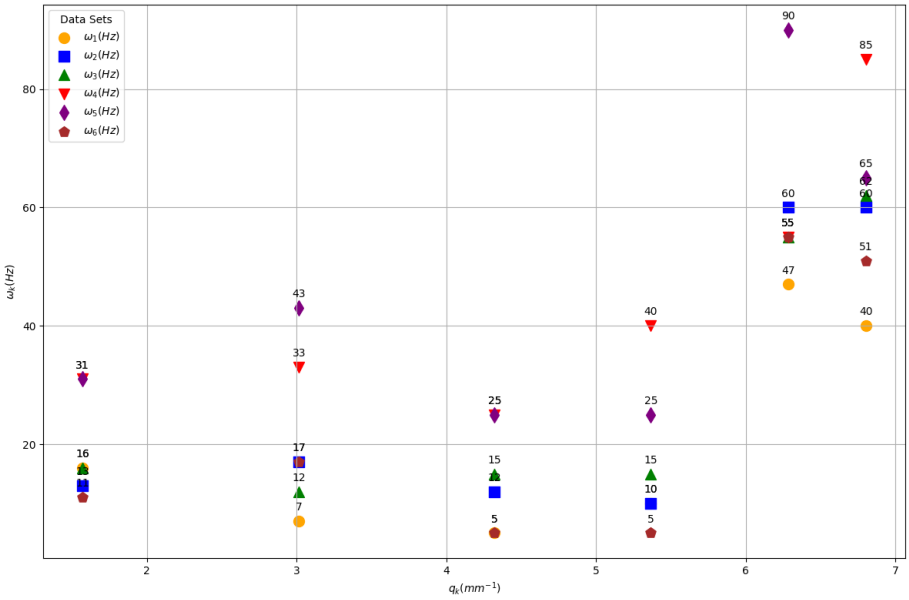
N	v(Hz)	ω_k(Hz)	λ_k(mm)	q_k(mm^{-1})
1	0,250	1,5707963	4790,800	0,0013115
2	0,480	3,0159286	2395,400	0,0026230
3	0,688	4,3228314	1596,933	0,0039345
4	0,854	5,3658402	1197,700	0,0052460
5	1,000	6,2831853	958,160	0,0065575
6	1,083	6,8046896	798,466	0,0078690

Πίνακας 1: Ιδιοσυχνότητες και μήκη κύματος για το σύστημα 6 δρομέων

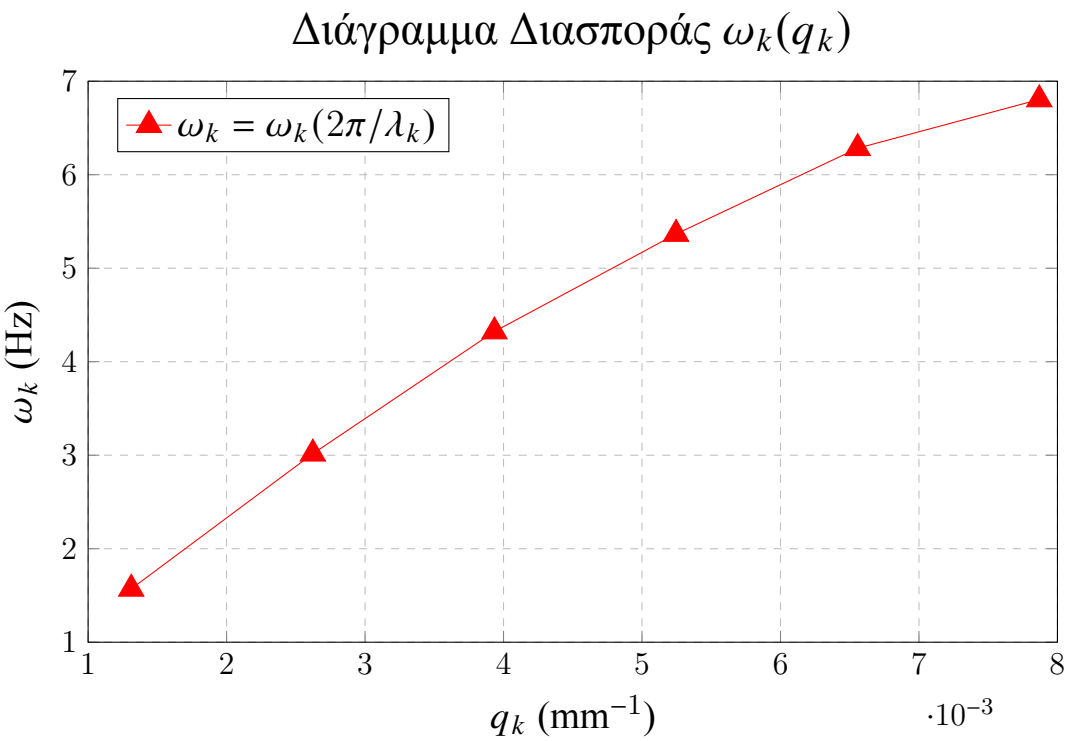
Τα γραφήματα πλάτους ταλάντωσης συναρτήσει των θέσεων ισορροπίας για διαφορετικά ω, δίνονται παρακάτω.



Γράφημα των πλατών για όλα τα διαφορετικά ν για τις αντίστοιχες θέσεις ισορροπίας.



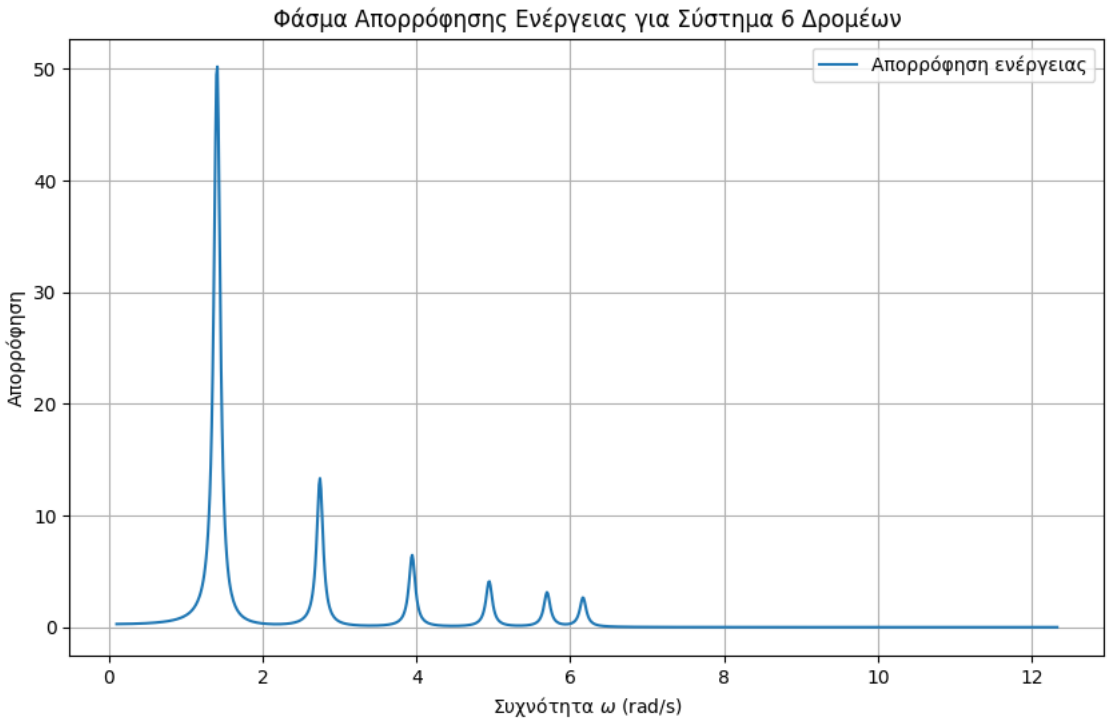
Έτσι προκύπτει το διάγραμμα διασποράς για τα $\omega_k(q_k)$. Πράγματι, όπως αναμέναμε, παρατηρούμε μια σχεδόν γραμμική αύξηση που καταλήγει σε μια μικρή σταθεροποίηση. Στη μικρότερη ιδιοσυχνότητα, οι δρομείς ταλαντώνονται σχεδόν ομόρροπα, παρουσιάζοντας σύσσωμη κίνηση. Καθώς η συχνότητα αυξάνεται, οι δρομείς διαχωρίζονται σε υποομάδες που κινούνται αντίρροπα μεταξύ τους. Στη μεγαλύτερη συχνότητα παρατηρούμε τη μέγιστη αντίρροπη σχετική κίνηση.



Η μικρότερη ιδιοσυχνότητα αντιστοιχεί σε κύμα σχετικά ομόρροπης/σύσσωμης κίνησης των δρομέων, ενώ η μεγαλύτερη ιδιοσυχνότητα σε κύμα με τη μεγαλύτερη δυνατή αντίρροπη/σχετική κίνηση των δρομέων μεταξύ τους. Δηλαδή υπάρχουν τρια ζεύγη δρομέων που ταλαντώνονται αντίρροπα. Λογικό καθώς ο τρόπος c_1 και ο τρόπος c_6 έχουν αμφότερα 3 ζεύγη τιμών, στην πρώτη περίπτωση το κάθε ζεύγος αντιστοιχεί σε ομόρροπες ταλαντώσεις και στη δεύτερη σε αντίρροπες.

Αν θεωρήσουμε ότι υπάρχουν θετικά και αρνητικά φορτία εναλλάξ, τότε, εφόσον τα θετικά φορτία κινούνται ομόρροπα μεταξύ τους και τα αρνητικά φορτία ομοίως στη δεύτερη ιδιοκίνηση, έχουμε ήδη μία σχετική κίνηση φορέων αγωγιμότητας. Από τις δύο περιπτώσεις, θεωρούμε ότι η ανταλλαγή ενέργειας με ένα προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα θα ήταν πιο αποτελεσματική τότε. Έτσι, το ηλεκτρομαγνητικό κύμα μπορεί να αλληλεπιδράσει. Αντίθετα, στην πρώτη ιδιοκίνηση, όπου τα φορτία κινούνται ομόρροπα, δεν υπάρχει σχετική κίνηση φορέων και το ρεύμα είναι μηδενικό.

Το σχηματικό φάσμα απορρόφησης ενέργειας προκύπτει παρόμοια με παραπάνω.



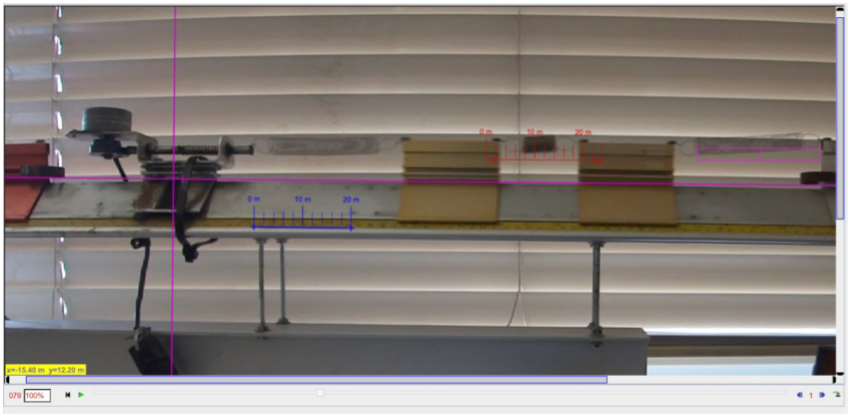
6 Συμπεράσματα, σφάλματα και περιθώρια βελτίωσης.

Συνοψίζοντας, προσπαθήσαμε να προσομοιώσουμε τις ταλαντώσεις ενός κρυσταλλικού πλέγματος χρησιμοποιώντας ένα μακροσκοπικό σύστημα μαζών και ελατηρίων. Μελετήσαμε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, δηλαδή τις συγκεκριμένες μορφές με τις οποίες μπορεί να ταλαντωθεί το σύστημα, και τις ιδιοσυχνότητες τους, δηλαδή τις συχνότητες στις οποίες συμβαίνουν αυτές οι ταλαντώσεις. Εξετάσαμε τις περιπτώσεις διέγερσης και απόσβεσης, κατανοώντας πως οι εξωτερικές δυνάμεις και η απώλεια ενέργειας επηρεάζουν τις ταλαντώσεις. Αναγνωρίσαμε ότι οι αποκλίσεις από τις θεωρητικές τιμές και οι αστοχίες στα διαγράμματά μας οφείλονται κυρίως στον ανθρώπινο παράγοντα, δηλαδή σε σφάλματα ανάγνωσης και απροσεξίες κατά τις μετρήσεις. Κατανοήσαμε πως ο ανθρώπινος παράγοντας επηρεάζει σημαντικά τα πειράματα, προκαλώντας σφάλματα που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη στην ανάλυση των αποτελεσμάτων. Παρά τα σφάλματα, το πείραμα θεωρείται επιτυχές δεδομένων των συνθηκών, καθώς πετύχαμε τους κύριους στόχους και βγάλαμε χρήσιμα συμπεράσματα που μας επιτρέπουν να προσομοιώσουμε ένα κρυσταλλικό πλέγμα με τις μακροσκοπικές θεωρήσεις . Αυτά τα σημεία αναδεικνύουν τις βασικές γνώσεις και δεξιότητες που αποκτήσαμε από την εκτέλεση της άσκησης αυτής.

7 Παράρτημα

7.1 Pixel Scaling

Το πρόγραμμα Tracker είναι ένα δωρεάν πρόγραμμα για Video Analysis and Modeling. Μας δίνει τη δυνατότητα να μεταφωρτόνουμε το βίντεο του πειράματος, το οποίο πρέπει να έχει ληφθεί με όσο μικρότερη δυνατή παράλλαξη, και μπορούμε να κάνουμε μετρήσεις ταχύτητας, αποστάσεων και άλλων ποσοτήτων κατευθείαν από εκεί. Εδώ μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε απόσταση οπότε αρκεί ένα απλό καλιμπράρισμα βάση του κανόνα στην αεροτροχιά και την εισαγωγή ενός rgb σημείου που θα ακολουθεί την κίνηση του σώματος. Από τις κορυφές στα διαγράμματα της ταχύτητας βρίσκουμε τις αποστάσεις.



7.2 Computational Approach

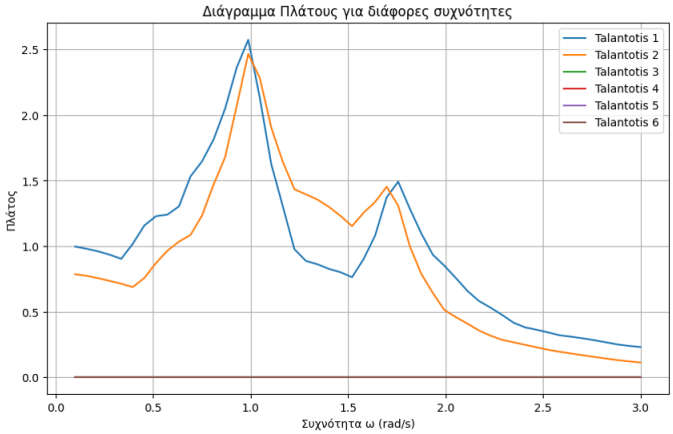
Θέλουμε να λύσουμε τις παρακάτω εξισώσεις στη γενική περίπτωση. Έχουμε δύο εξισώσεις του Νεύτωνα για τους ταλαντωτές. Στον ένα ταλαντωτή επιδρά και η διέγερση του συστήματος, ενώ στον άλλο επιδρά η απομάκρυνση του πρώτου. Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι, για τον πρώτο:

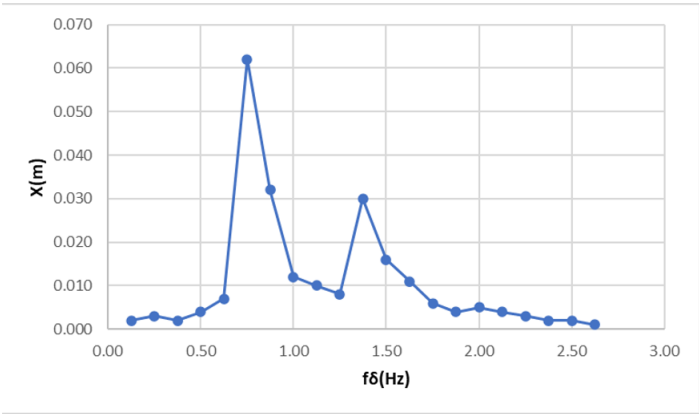
$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} + b\frac{dx_1}{dt} = -k(x_1 - x_2) + F_0\cos(\omega t) \tag{3}$$

Και αντίστοιχα για τον δεύτερο,

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} + b\frac{dx_2}{dt} = -k(x_2 - x_1) \tag{4}$$

Προκύπτει με την αριθμητική επίλυση τους μια πάρα πολύ καλή εικόνα σε σχέση με τα πειραματικά μας δεδομένα. Εδώ η κλίμακα είναι ποιοτική, αλλά άμα κάνουμε τις σωστές αντικαταστάσεις προκύπτει με μικρή απόκλιση παρόμοια συχνότητα (σχεδόν ίδια με την θεωρητική φυσικά).





Στη περίπτωση των πολλών ταλαντωτών η επίλυση γίνεται ως εξής, αρχικά παίρνουμε την γενική περίπτωση των i-ταλαντωτών, όπου η εξίσωση είναι,

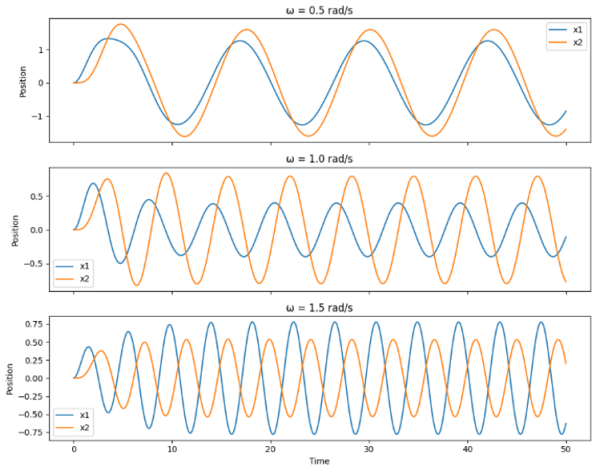
$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} + b\frac{dx_i}{dt} = -k(x_i - x_{i-1}) - k(x_i - x_{i+1}) + F_0\cos(\omega t)\delta_{i1} \tag{5}$$

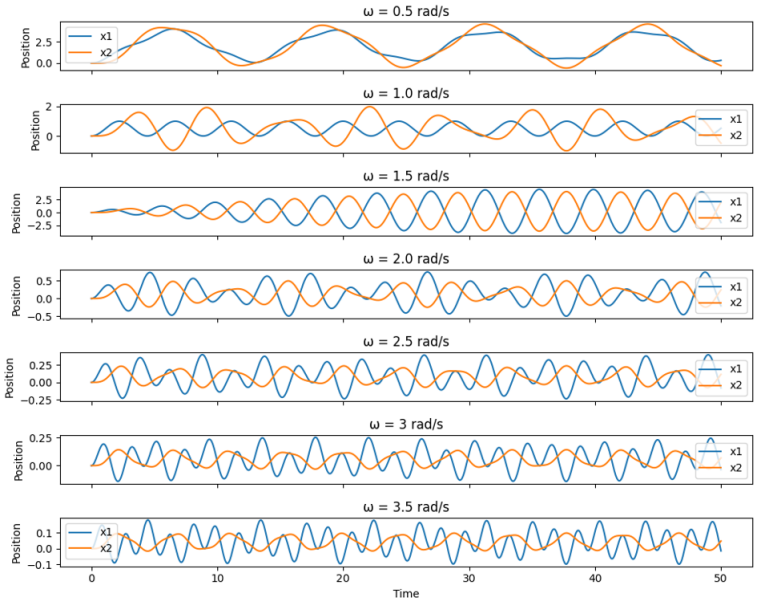
Και αριθμητικά λύνουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων,

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i \tag{6}$$

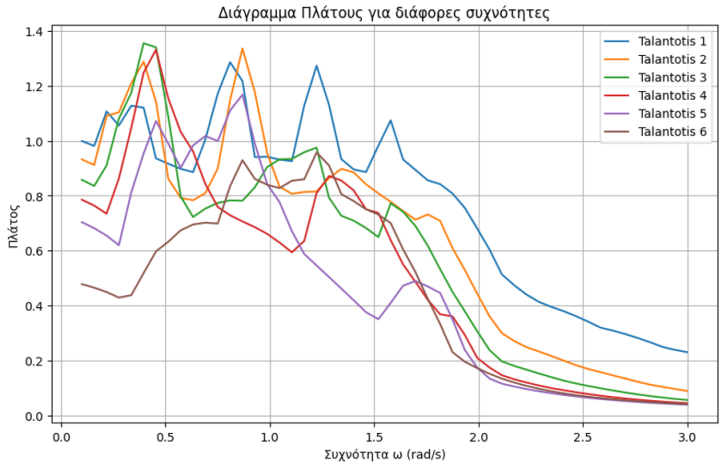
$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{m}\left(-k(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}) - bv_i + F_0\cos(\omega t)\delta_{i1}\right) \tag{7}$$

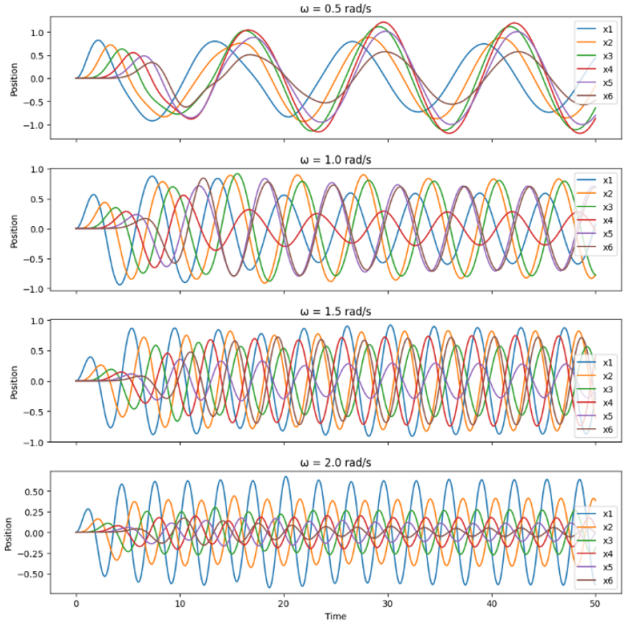
Αυτό γίνεται ώστε να ρίξουμε την τάξη της παραγώγισης και να λύσουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.





Ο κώδικας μπορεί να γενικευτεί για την περίπτωση πολλών ταλαντωτών. Ρυθμίζουμε στο πρόγραμμα του github τον δείκτη i ανάλογα για το πλήθος που επιθυμούμε. Το πρόγραμμα μας κάνει απεικόνιση της θέσης με τον χρόνο, τη συχνότητα καθώς και του πλάτους με τη συχνότητα.





7.3 Oscillator Simulation

Στο αρχείο Talantotes.phz του github Condensed-matter-labs/blob/main/2a/Talantotes.phz, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει ένα φυσικό simulation για τις περιπτώσεις των N=2 και N=6 ταλαντωτές. Το simulation δίνει τη δυνατότητα να βάλουμε απόσβεση στα ελατήρια (damping), διαφορετικά ελατήρια, τριβές εδάφους και να δώσουμε εξωτερική διέγερση στο σύστημα. Παράλληλα μπορούμε να έχουμε ταυτόχρονα το γράφημα ταχυτήτων και μετατοπίσεων του ταλαντωτή για τους υπολογισμούς μας.

Simulation για σύστημα 2 ταλαντωτών.

Simulation για σύστημα 6 ταλαντωτών.

8 Βιβλιογραφία.

8.1 Βιβλιογραφία.

[Βλ1] Εργαστηριακός Οδηγός Κατεύθυνσης Φυσικής Συμπυκνωμένης ύλης 2020.

[Βλ2] Εισαγωγή στη φυσική στερεάς κατάστασης. Kittel. Έκδοση 5, Πνευματικός.

[Βλ3] Φυσική στερεάς κατάστασης, Ashcroft, Mermin, Πνευματικός.

[Βλ4] Φυσική στερεάς κατάστασης, Ibach Harald, Lüch Hans, ZHTH.

[Βλ5] Φυσική στερεάς κατάστασης, Ε.Ν. Οικονόμου, ΠΕΚ.

[Βλ6] Φυσική στερεάς κατάστασης, Philip Hofmann, Παπαζήση.

[Βλ7] Οπτοηλεκτρονική, Jasprit Singh, Τζιόλα.

8.2 Αναφορές.

[1] Οδηγίες για το Πείραμα 2α του εργαστηριακού φυλλαδίου.
[2] Phonon, άρθρο Wikipedia.
[3] Singh J. LATTICE VIBRATIONS: PHONON SCATTERING. In: *Electronic and Optoelectronic Properties of Semiconductor Structures*. Cambridge University Press; 2003:217-259.
[4] Peter Byrne. First Principles Materials Modelling. Phonons and Lattice Dynamics, University of York, 2021.

8.3 Μετρήσεις-Δεδομένα.

[Data-1]: Πρώτο σετ μετρήσεων set1.csv
[Data-2]: Δεύτερο σετ μετρήσεων set2.csv
[Data-3]: Τρίτο σετ μετρήσεων της άλλης ομάδας set3.csv