Εργαστήριο Κατεύθυνσης Συμπυκνωμένης Ύλης

HELLENIC REPUBLIC

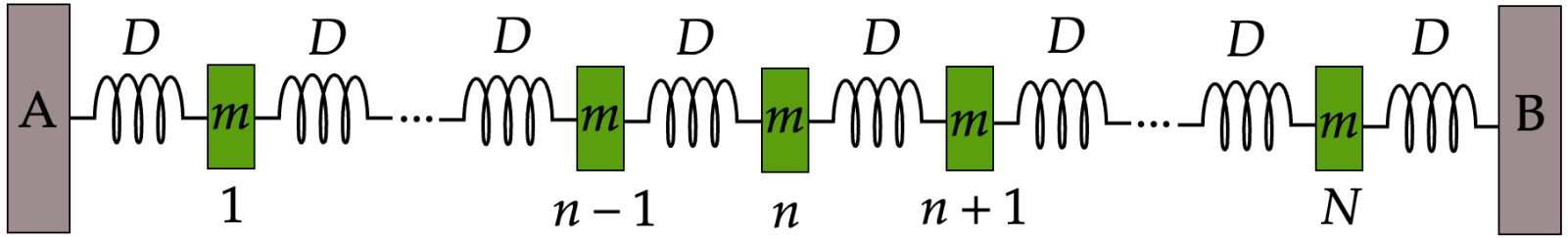
National and Kapodistrian University of Athens

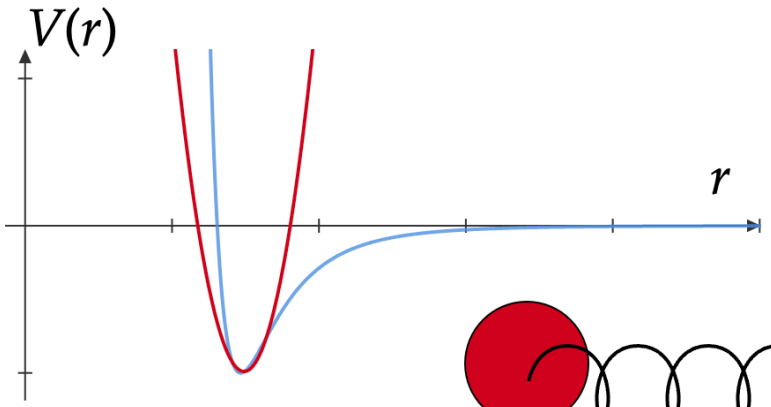
EST. 1837

Βαγγέλης Θάνος | Ευριπίδης Καλλή | Ιάσων Καζάζης

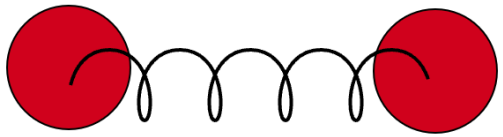
Πείραμα 2α
Γραμμικές Πλεγματικές Ταλαντώσεις

$$x_1(t) = X_{1,01}(cos(\omega t) - cos(\omega_1 t)) + X_{1,02}(cos(\omega t) - cos(\omega_2 t))$$





$$\omega_2' = \frac{\sqrt{|\Delta_2|}}{2m} = \sqrt{\omega_2^2 - \left(\frac{b_2}{2m}\right)^2}$$



Περιεχόμενα

1. Θεωρία πειράματος.
1.1 Αρμονική Προσέγγιση …….…….…… 5
1.2 Ταλαντώσεις Περιοδικής Μονοατομικής Αλυσίδας ……...……. 6
1.3 Κανονικοί Τρόποι Ταλάντωσης (N=2,6)……7

2. Σκοπός του πειράματος.

3. Πειραματική Διάταξη.
3.1 Σύστημα N=2 Δρομέων……..…...……..... 12
3.2 Σύστημα N=6 Δρομέων ……..……... 13

4. Πειραματικά Δεδομένα.

5. Ανάλυση Πειράματος.
5.1 Θεωρητική Μελέτη και Ανάλυση Πειράματος…….…….. 16
5.2 Υπολογιστική αντιμετώπιση……... 20
6. Σχολιασμός και Συμπεράσματα.

7. Παράρτημα.

8. Βιβλιογραφία.

Πείραμα 2α
5/6/2024

Εισαγωγή

Θεωρία
- **Αρμονική Προσέγγιση**
- **Κανονικοί Τρόποι**

Σκοπός

Διάταξη
- **2 Δρομείς**
- **6 Δρομείς**

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- **Αποτελέσματα**
- **Υπολογιστικά**

Σχολιασμός

Αρμονική προσέγγιση

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

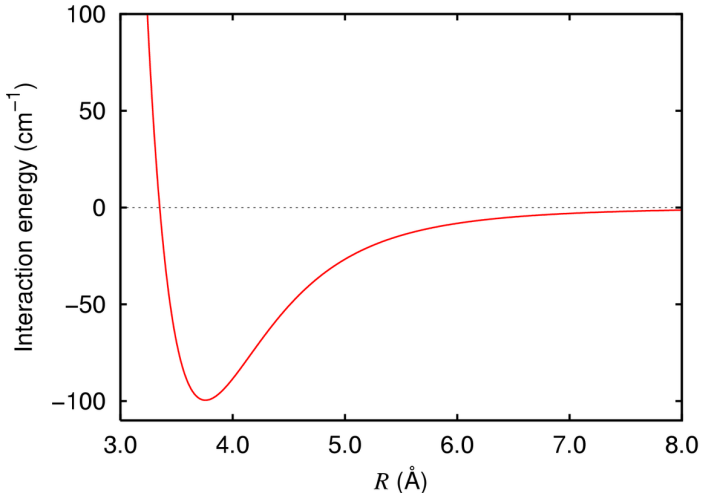
Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

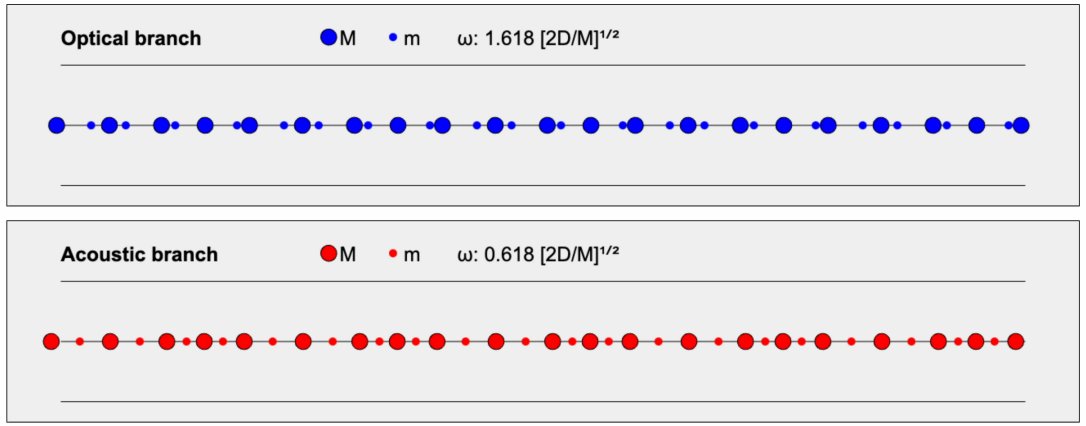
Σχολιασμός

- Τα ιόντα αλληλοεπιδρούν στα στερεά μέσω του δυναμικού **V(r)**.
- Στα μοριακά πλέγματα οι μετατοπίσεις των ιόντων (πυρήνων) από την θέση ισορροπίας έχουν δυναμικά παραβολικής μορφής:

$$\Delta V(r) \cong \frac{1}{2} D(r - r_0)^2, \text{ με } D = \frac{d^2 V(r_0)}{dr^2}$$

- Το δυναμικό έχει τη μορφή του αρμονικού ταλαντωτή γύρω από τη Θ.Ι της ταλάντωσης:





Ταλαντώσεις Περιοδικής Μονοατομικής αλυσίδας

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός

- Η αλυσίδα αποτελείται από **N** άτομα σε απόσταση **α** μεταξύ τους, όπου το κάθε ένα αλληλοεπιδρά μόνο με τα γειτονικά άτομα.
- Στην πιο απλή περίπτωση, η σταθερά αλληλεπίδρασης **D** είναι ίδια για όλα τα ζεύγη.
- Το πλάτος του **n-οστού** ιόντος περιγράφεται από την πιο κάτω διαφορική εξίσωση: $$m\ddot{u}_n(t) = D[u_{n-1}(t) + u_{n+1}(t) - 2u_n(t)]$$
- Προκύπτει ένα **NxN** γραμμικό σύστημα που επιδέχεται λύση, όπου όλα τα άτομα της αλυσίδας ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα **ω.** Η μορφή της απομάκρυνσης κάθε ατόμου είναι:

$$U_n(t) = Re\{c_n e^{-i\omega t}\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \frac{m\omega^2}{D} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$$

Κανονικοί Τρόποι Ταλάντωσης

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

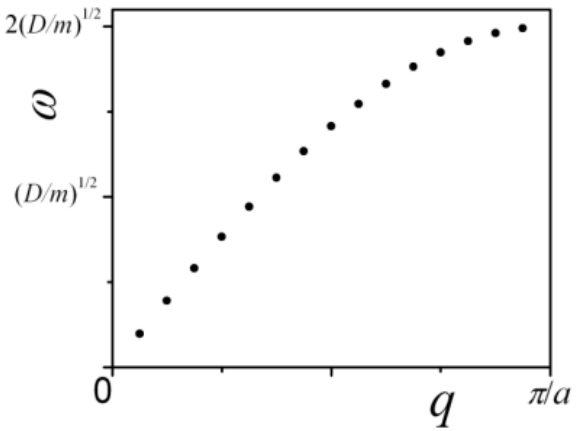
Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός

- Σχέση διασποράς: $\boxed{\boldsymbol{\omega(k) = 2\omega_0 \left|\sin\left(\frac{q_k a}{2}\right)\right|}}$

Όπου $\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{D}{m}}$ η μέγιστη συχνότητα και $\boldsymbol{q_k} = \frac{\boldsymbol{k\pi}}{\boldsymbol{Na}}$,
$\boldsymbol{k = -N/2, \ldots, N/2}$ η πρώτη ζώνη Brillouin.



Διασπορά των ιδιοσυχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης μονοδιάστατης περιοδικής αλυσίδας (15 δρομείς).

- Η γενική εξίσωση των ιδιοδιανυσμάτων θα είναι $\mathbf{c_{(\kappa)n} = \sin(q_{(k)} n\alpha)}$.
- Τελικά η λύση του πλάτους ταλάντωσης του συγκεκριμένου μοντέλου είναι:

$$\boldsymbol{u_n = \xi_k |\sin(q_k na)| \cos(\omega(k)t)}$$

όπου $\boldsymbol{\xi_k}$ το πλάτος του **k**-οστού κανονικού τρόπου ταλάντωσης.

- Το χωρικό προφίλ των απομακρύνσεων από τις διακριτές θέσεις των ιόντων αντιστοιχεί σε ένα μήκος κύματος

$$\boldsymbol{\lambda_k = \frac{2\pi}{q_k}}$$

Δύο δρομείς

Για δυο δρομείς οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι με 3 ελατήρια ,τα θεωρητικά αποτελέσματα που πρέπει να δίνει το πιο πάνω μοντέλο δίνουν τα παρακάτω:

$\boldsymbol{q_1 = \pi/3a}$, $\boldsymbol{q_2 = 2\pi/3a}$ άρα $\boldsymbol{\omega_1} = \sqrt{\frac{D}{m}}$ και $\boldsymbol{\omega_2} = \sqrt{\frac{3D}{m}}$ με αντίστοιχα ιδιοανύσματα για τους δυο φορείς $\boldsymbol{c_1}$ = ***(0.866, 0.866)***, $\boldsymbol{c_2}$ =***(0.866, -0.866)***

Τα ίδια πρόσημα στον 1ο τρόπο υποδεικνύουν ομόρροπη ταλάντωση των ατόμων, ενώ τα αντίθετα πρόσημα στον 2ο τρόπο υποδεικνύουν αντίρροπη ταλάντωση.

Εισαγωγή

Θεωρία
- **Αρμονική Προσέγγιση**
- **Κανονικοί Τρόποι**

Σκοπός

Διάταξη
- **2 Δρομείς**
- **6 Δρομείς**

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- **Αποτελέσματα**
- **Υπολογιστικά**

Σχολιασμός

Έξι δρομείς

Για έξι δρομείς οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι με 7 ελατήρια ,τα θεωρητικά αποτελέσματα που πρέπει να δίνει το πιο πάνω μοντέλο δίνουν τα παρακάτω:

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{D}{m}}\,|sin(k\pi/14)| \text{ για } k=1,2,3,4,5,6$$

c_1=(0.43, 0.78, 0.97, 0.97, 0.78, 0.43)
c_2=(0.78, 0.97, 0.43,- 0.43, -0.97,- 0.78),
c_3=(0.97, 0.43,- 0.78, -0.78, 0.43, 0.97),
c_4=(0.97,- 0.43,- 0.78, 0.78, 0.43, -0.97),
c_5=(0.78, -0.97, 0.43, 0.43,-0.97, 0.78),
c_6=(0.43, -0.78, 0.97, -0.97, 0.78,- 0.43)

Σκοπός Πειράματος

Η άσκηση αυτή αποσκοπεί στη βαθύτερη κατανόηση των αρχών που διέπουν τις ταλαντώσεις και στη σύνδεση αυτών των αρχών με τη φυσική των φωνονίων σε κρυσταλλικά πλέγματα, προσφέροντας μια πρακτική προσέγγιση μέσω της προσομοίωσης με ελατήρια.

Να διερευνηθεί πώς μεταβάλλονται η κινητική και η δυναμική ενέργεια κατά τη διάρκεια μιας ταλάντωσης και πώς αυτές σχετίζονται μεταξύ τους σε ένα περιοδικό σύστημα.

Εισαγωγή

Θεωρία
- **Αρμονική Προσέγγιση**
- **Κανονικοί Τρόποι**

Σκοπός

Διάταξη
- **2 Δρομείς**
- **6 Δρομείς**

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- **Αποτελέσματα**
- **Υπολογιστικά**

Σχολιασμός

Πείραμα 2α
5/6/2024

Διατάξεις Πειραμάτων

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

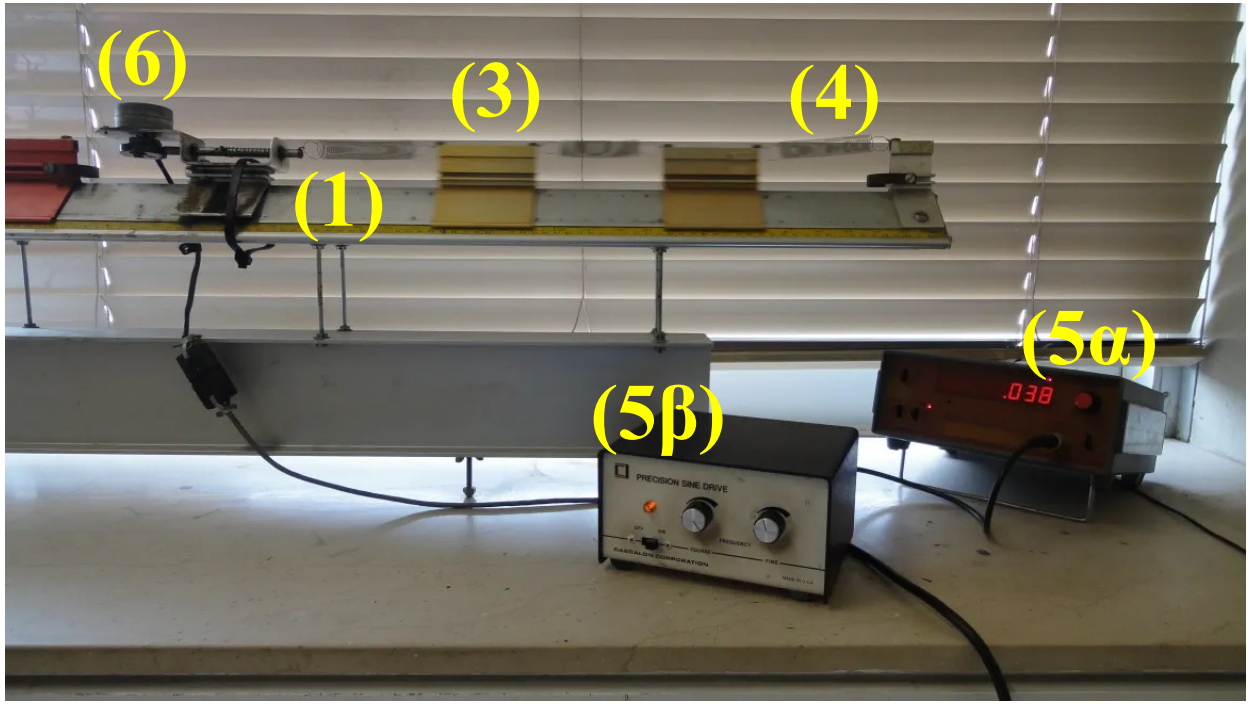
Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός



Η διάταξη αποτελείται από:

1. Αεροτροχιά
2. Παροχή αέρα
3. Δρομείς ίδιας μάζας M
4. Ελατήρια ίδιας σταθεράς K
5. Συχνόμετρο και ρυθμιστής
6. Διεγέρτης

Πείραμα 2α
5/6/2024

Πείραμα Δύο Δρομέων Χωρίς Εξαναγκασμό.

Εισαγωγή

Θεωρία
- ❖ **Αρμονική Προσέγγιση**
- ❖ **Κανονικοί Τρόποι**

Σκοπός

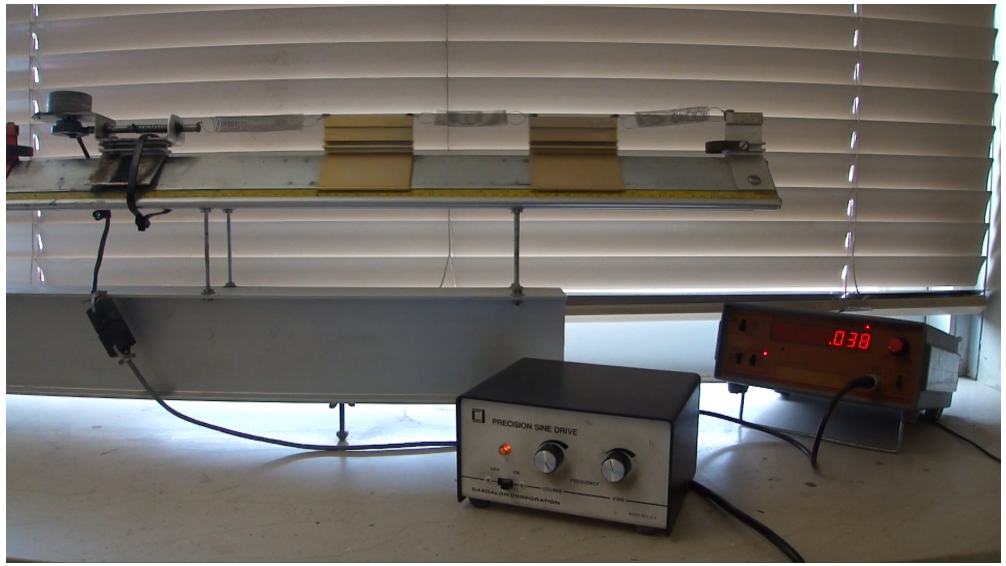
Διάταξη
- ❖ **2 Δρομείς**
- ❖ **6 Δρομείς**

Πειραματικά Δεδομένα

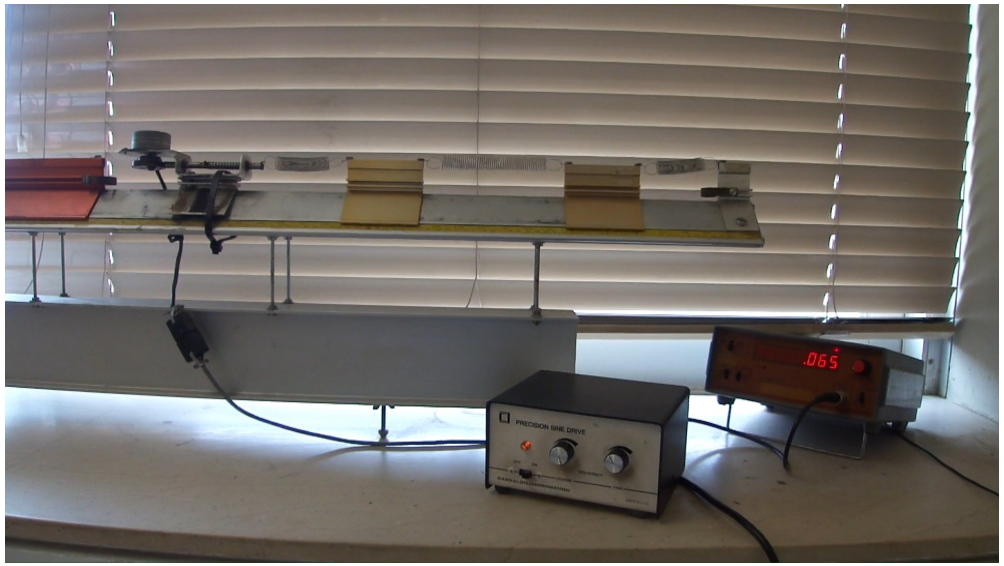
Ανάλυση
- ❖ **Αποτελέσματα**
- ❖ **Υπολογιστικά**

Σχολιασμός

Ομόρροπα



Αντίρροπα



Πείραμα 2α
5/6/2024

Πειράματα με Εξαναγκασμό

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός

Πείραμα με Δυο Δρομείς με Διεγέρτη

Πείραμα με Έξι Δρομείς με Διεγέρτη

Πείραμα 2α
5/6/2024

Πειραματικά Δεδομένα Πρώτης Διάταξης.

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός

Πειραματικά Δεδομένα N=2.			
Ομόρροπα		Αντίρροπα	
$t(min)$	$x_1(mm)$	$t(min)$	$x_1(mm)$
0	19	0	16
1	16	1	13
2	10	2	9
3	7	3	6
4	6	4	5
5	6	5	4
6	5	6	3
7	4	7	2
8	3	8	2
9	2	9	1
10	1	10	1

Περίοδος Ομόρροπα: 1.28sec
Περίοδος Αντίρροπα: 1.47sec

Πειραματικά Δεδομένα N=2.		
$f_\delta(Hz)$	$T(s)$	$x_0(mm)$
0,13	7,12	2
0,25	4,12	3
0,38	2,81	2
0,50	2,06	4
0,63	1,53	7
0,75	1,32	62
0,88	1,25	32
1,00	1,24	12
1,13	1,36	10
1,25	1,86	8
1,38	0,68	30
1,50	0,72	16
1,63	0,78	11
1,75	0,73	6
1,88	0,71	4
2,00	0,76	5
2,13	0,74	4
2,25	0,75	3
2,38	0,74	2
2,50	1,32	2
2,63	1,54	1

Πείραμα 2α
5/6/2024

Πειραματικά Δεδομένα Δεύτερης Διάταξης.

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός

Πειραματικά Δεδομένα N=6.						
m_1 (mm)	m_2 (mm)	m_3 (mm)	m_4 (mm)	m_5 (mm)	m_6 (mm)	Διέγερση
Θέση Ισορροπίας						
539	888	1265	1625	1905	2250	0
Μέγιστη Απομάκρυνση από τη Θ.Ι.						
16	7	5	10	47	40	0,25
13	17	12	10	60	60	0,48
16	12	15	15	55	62	0,688
31	33	25	40	55	85	0,854
31	43	25	25	90	65	1
11	17	5	5	55	51	1,083

$q_k(mm^{-1})$	$\omega = v/2\pi$	$v = 0,25$	$v = 0,48$	$v = 0,68$	$v = 0,85$	$v = 1$	$v = 1,08$
$v(Hz)$		m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
0,0013	1,6	16	13	16	31	31	11
0,0026	3,1	7	17	12	33	43	17
0,0039	4,3	5	12	15	25	25	5
0,0052	5,4	10	10	15	40	25	5
0,0066	6,3	47	60	55	55	90	55
0,0079	6,8	40	60	62	85	65	51

Πείραμα 2α
5/6/2024

Άντληση Δεδομένων με Pixel Scaling και Tracking

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

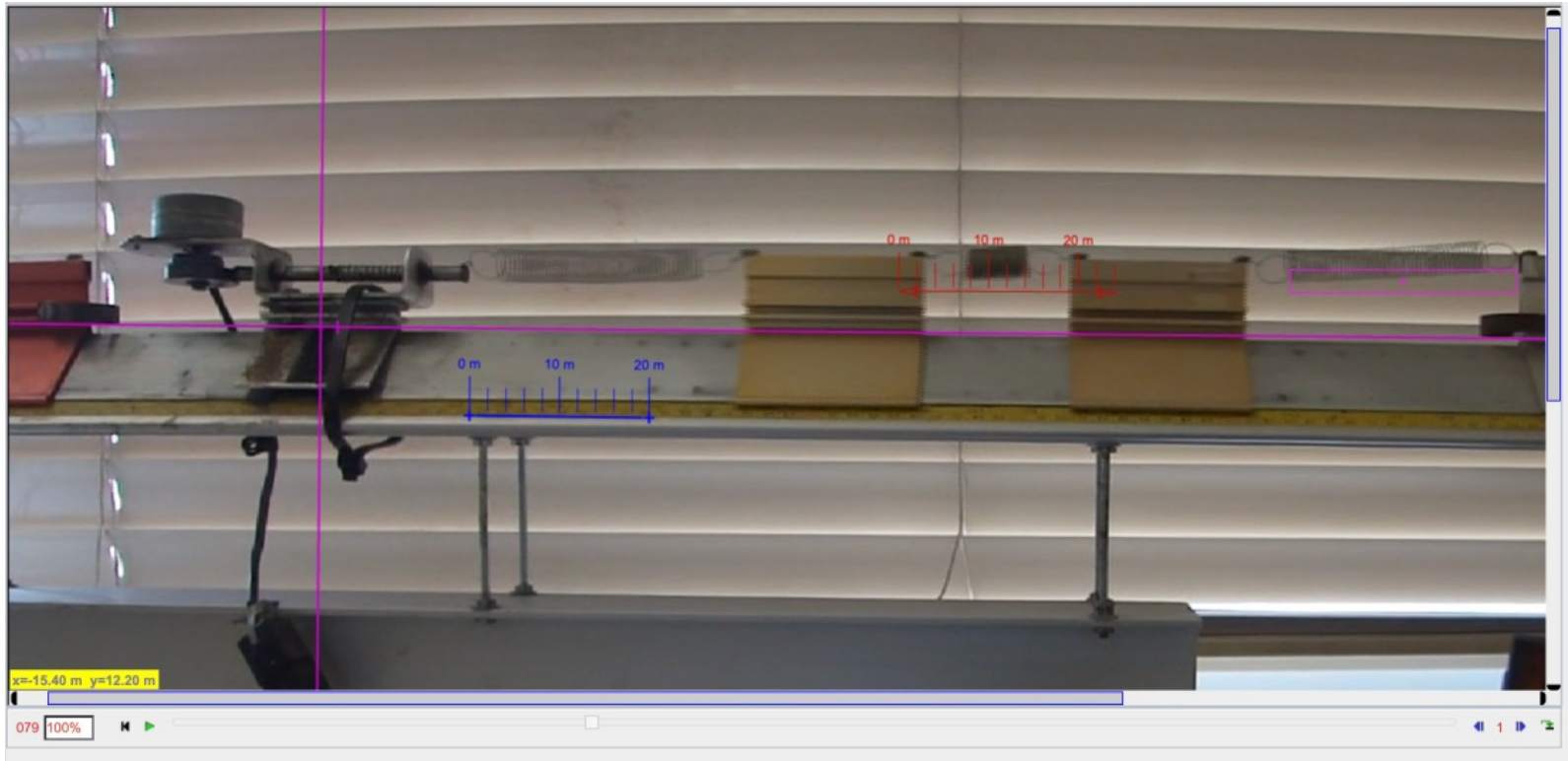
Σκοπός

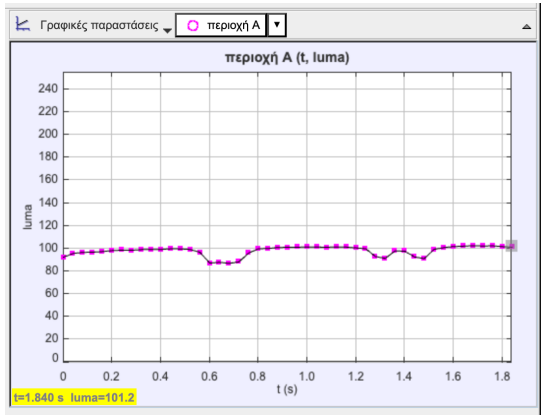
Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός





Πίνακας περιοχή A

t (s)	x (m)	y (m)	luma
1.040	454.7	-138.5	101.3
1.080	454.7	-138.5	101.1
1.120	454.7	-138.5	101.5
1.160	454.7	-138.5	101.3
1.200	454.7	-138.5	100.6
1.240	454.7	-138.5	99.8
1.280	454.7	-138.5	93.0
1.320	454.7	-138.5	91.4
1.360	454.7	-138.5	97.9
1.400	454.7	-138.5	97.7
1.440	454.7	-138.5	92.7
1.480	454.7	-138.5	91.1
1.520	454.7	-138.5	99.3

Ανάλυση Δεδομένων και Γραφήματα

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

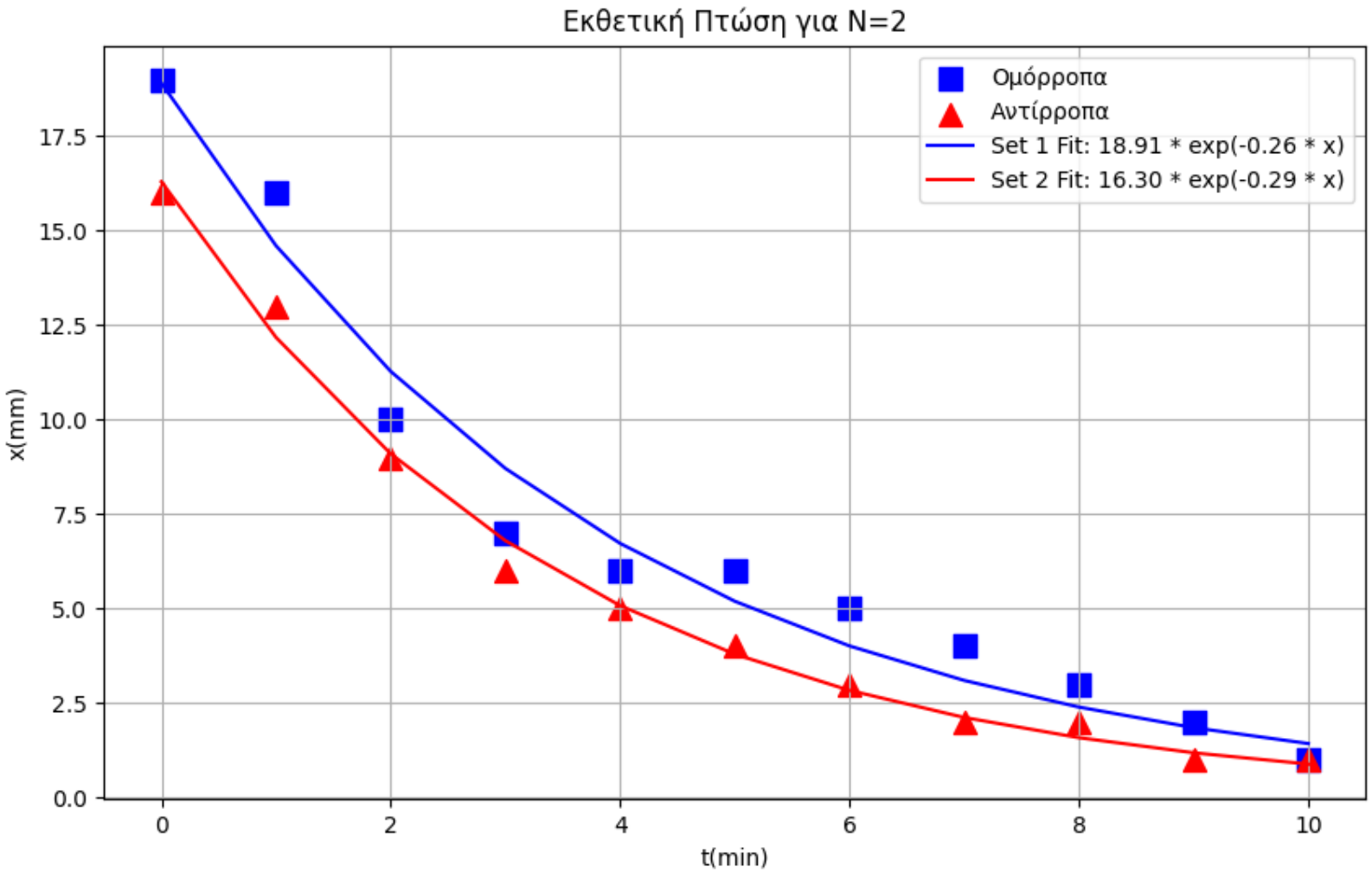
Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός



- Η απόσβεση μπορεί να βρεθεί από τον εκθέτη γ=b/2m (Hz) για κάθε περίπτωση. Βρίσκω τον συντελεστή απόσβεσης σε τιμές κοντά στο b=0.07 (kg*Hz).

Πείραμα 2α
5/6/2024

Ανάλυση Δεδομένων και Γραφήματα

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

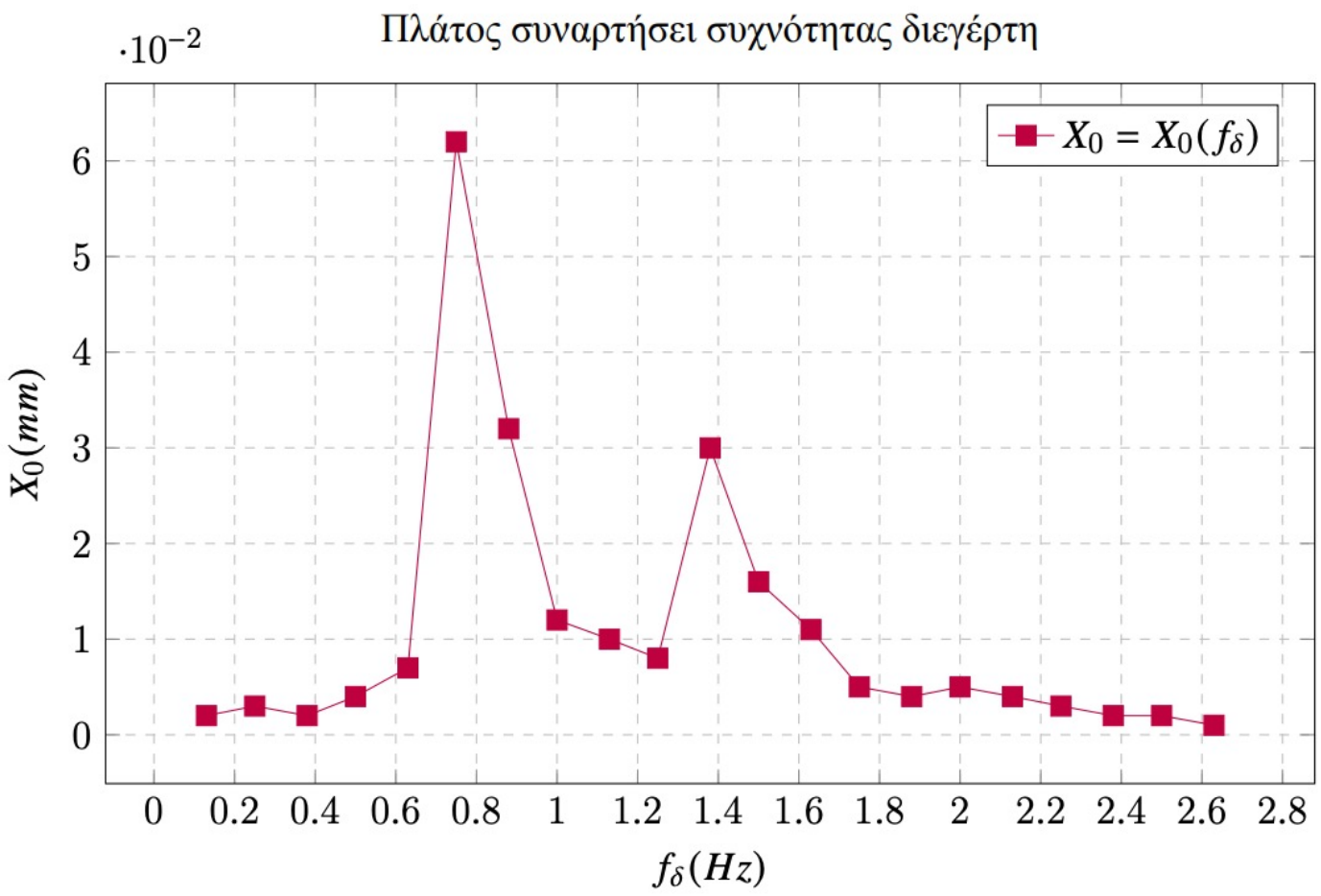
Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός



- Για f_δ 0.75 Hz και 1.38 Hz απότομη αύξηση πλάτους. Εκεί βρίσκονται οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Θεωρητικά θα περιμέναμε 0.75 και 2.25 Hz.

Ανάλυση Δεδομένων και Γραφήματα

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

Σκοπός

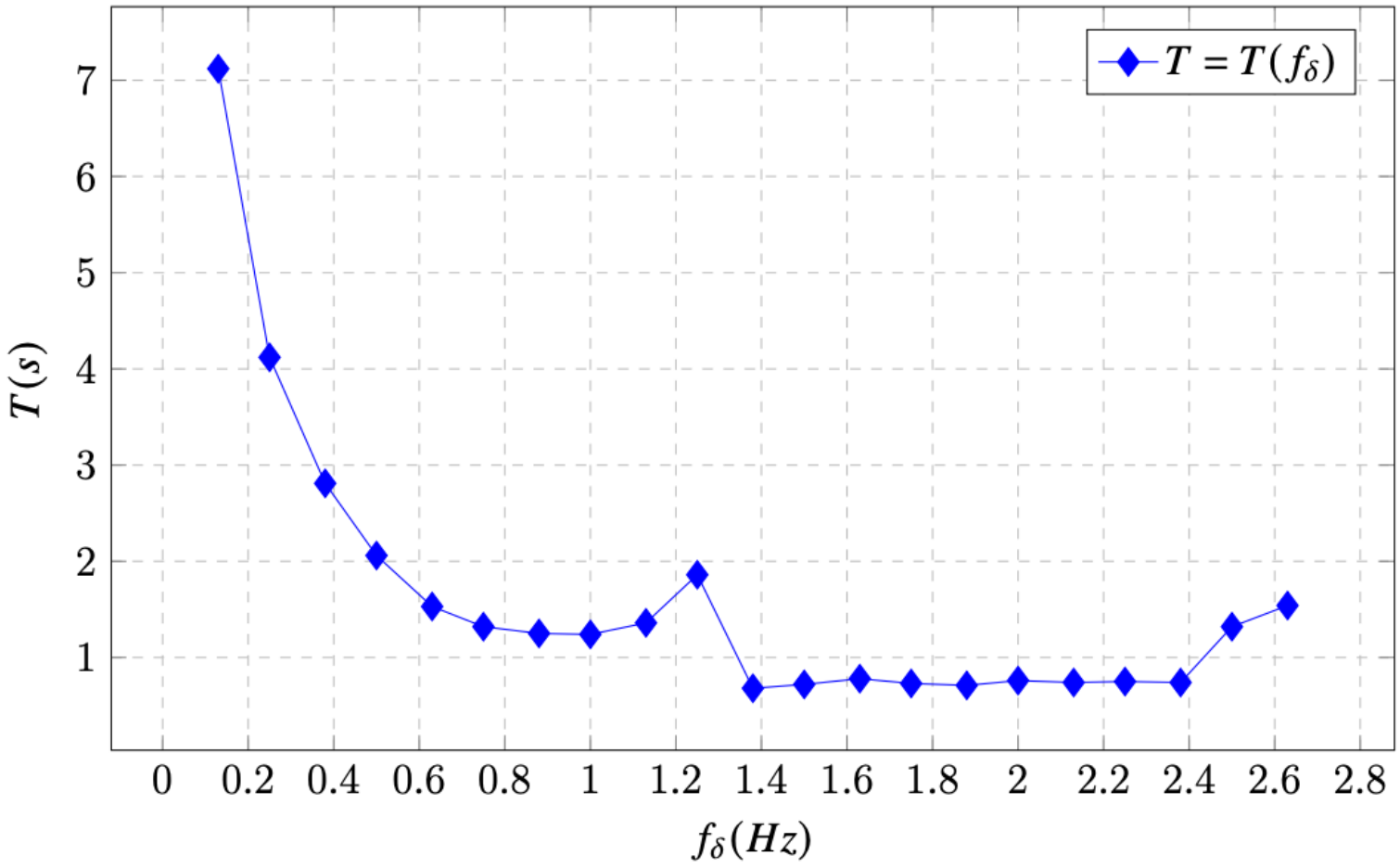
Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός

Διάγραμμα Περιόδου με συχνότητα διεγέρτη.



Ανάλυση Δεδομένων για N=6

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός

	$v(\mathrm{Hz})$	$\omega_k(\mathrm{Hz})$	$\lambda_k(\mathrm{mm})$	$g_k(\mathrm{mm}^{-1})$
1	0,250	1,5707963	4790,800	0,0013115
2	0,480	3,0159286	2395,400	0,0026230
3	0,688	4,3228314	1596,933	0,0039345
4	0,854	5,3658402	1197,700	0,0052460
5	1,000	6,2831853	958,160	0,0065575
6	1,083	6,8046896	798,466	0,0078690

- Η μικρότερη ιδιοσυχνότητα αντιστοιχεί σε κύμα σχετικά ομόρροπης/σύσσωμης κίνησης των δρομέων, ενώ η μεγαλύτερη ιδιοσυχνότητα σε κύμα με τη μεγαλύτερη δυνατή αντίρροπη/σχετική κίνηση των δρομέων μεταξύ τους.

Το πλάτος ταλάντωσης της ομόρροπης/σύμφωνης κίνησης (1ου ρυθμού) είναι μεγαλύτερο από αυτό της αντίρροπης/ασύμφωνης κίνησης (2ου ρυθμού) όπου η ενέργεια μεταφέρεται αποτελεσματικά στο σύστημα, αυξάνοντας το πλάτος της ταλάντωσης.

Πείραμα 2α
5/6/2024

Ανάλυση Δεδομένων για N=6

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

Σκοπός

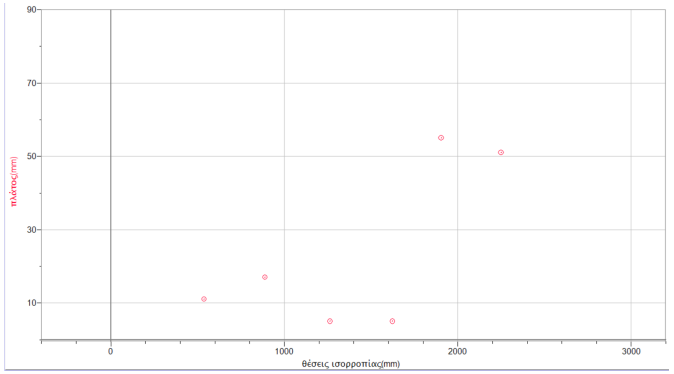
Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

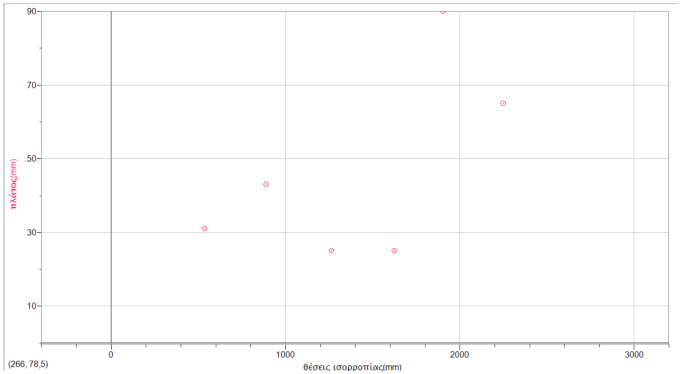
Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός

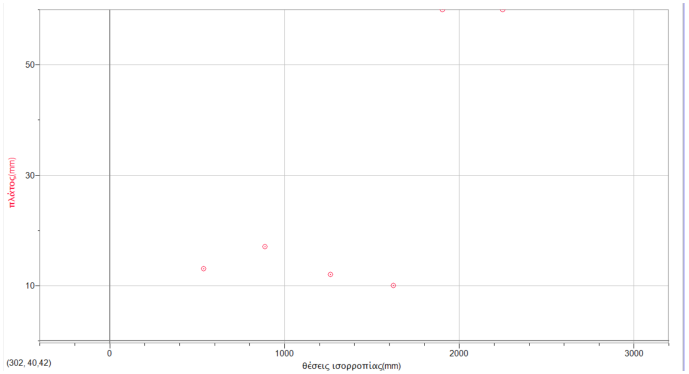
ω=1,083



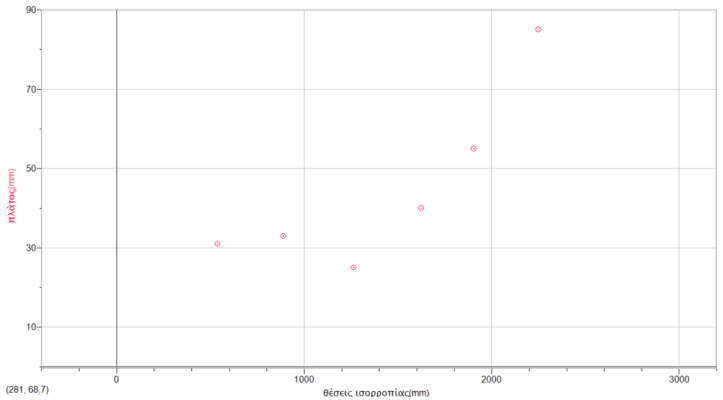
ω=1



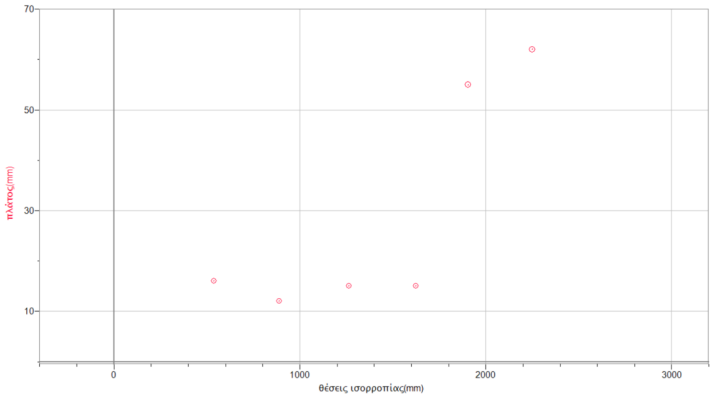
ω=0,48



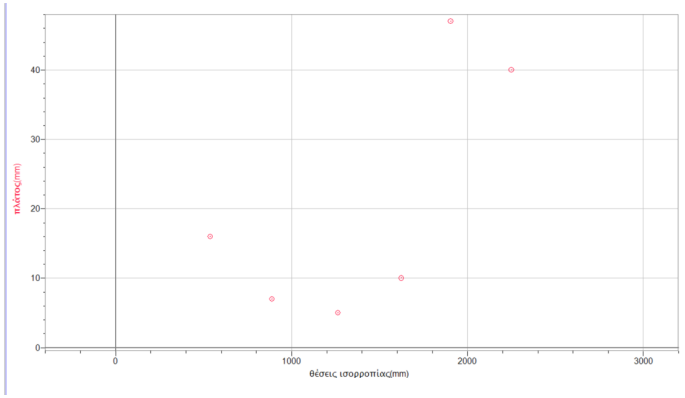
ω=0,854



ω=0,688



ω=0,25



Ανάλυση Δεδομένων και Γραφήματα

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

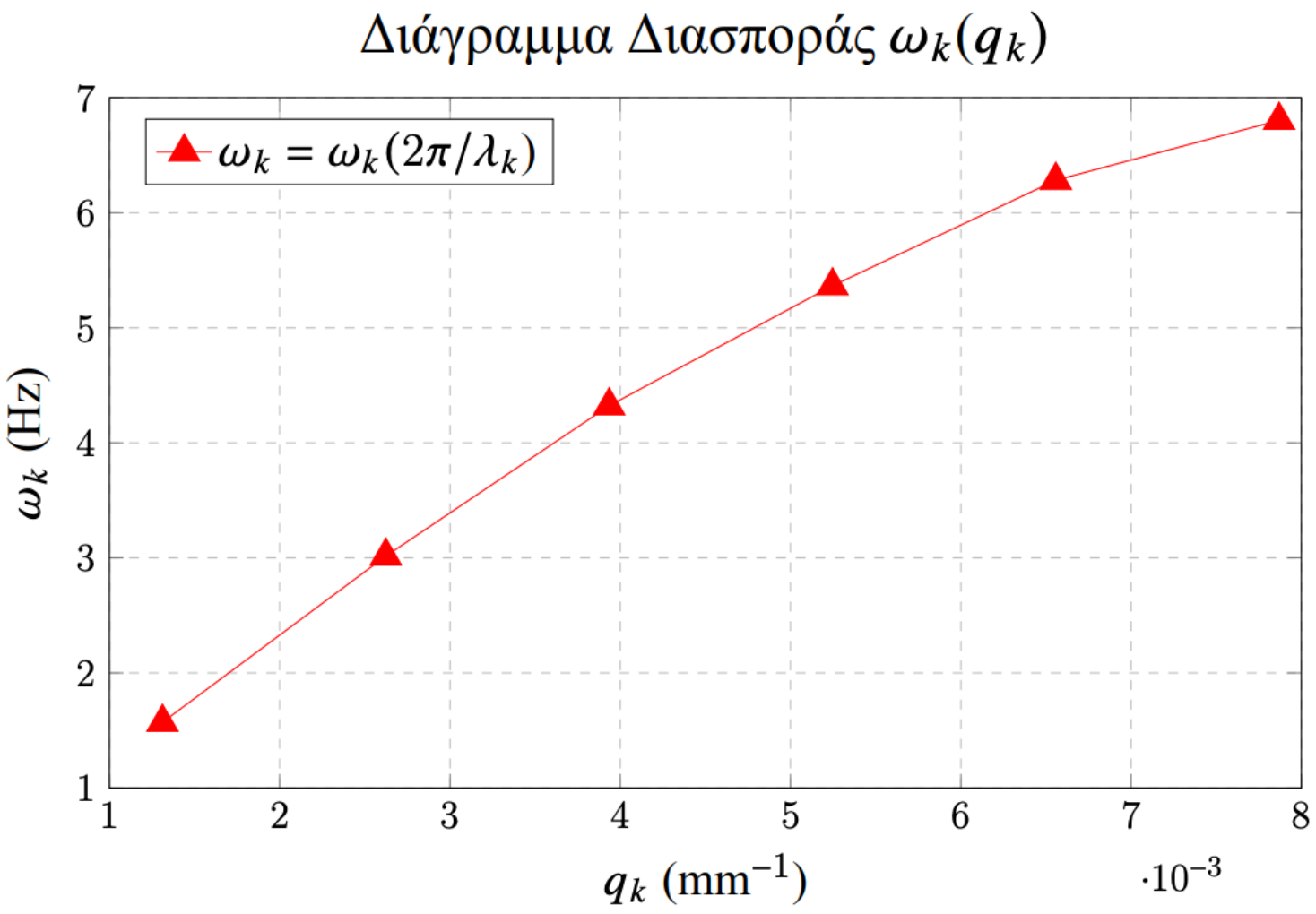
Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός



Υπολογιστική Αντιμετώπιση

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

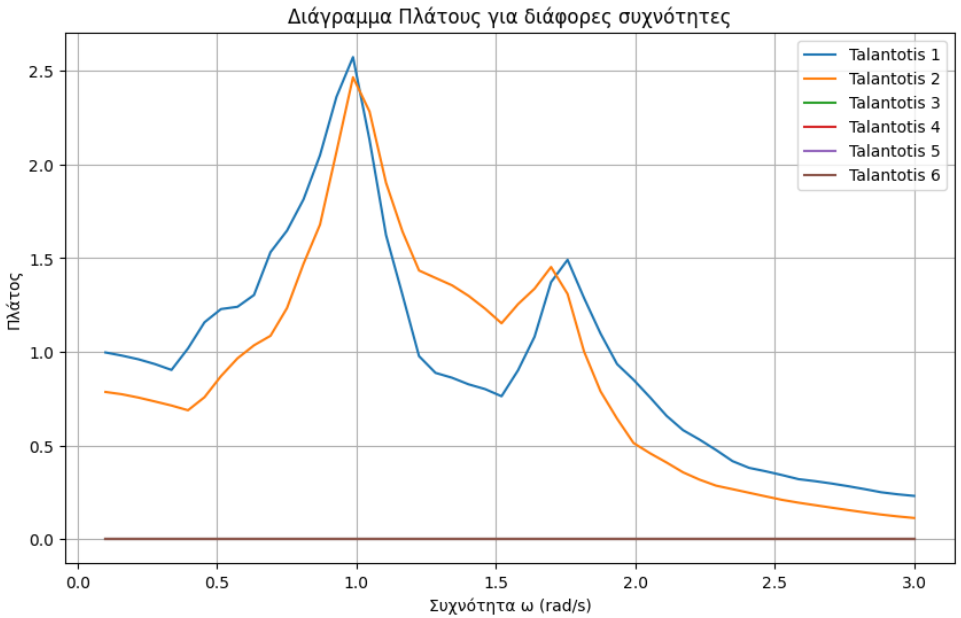
Σκοπός

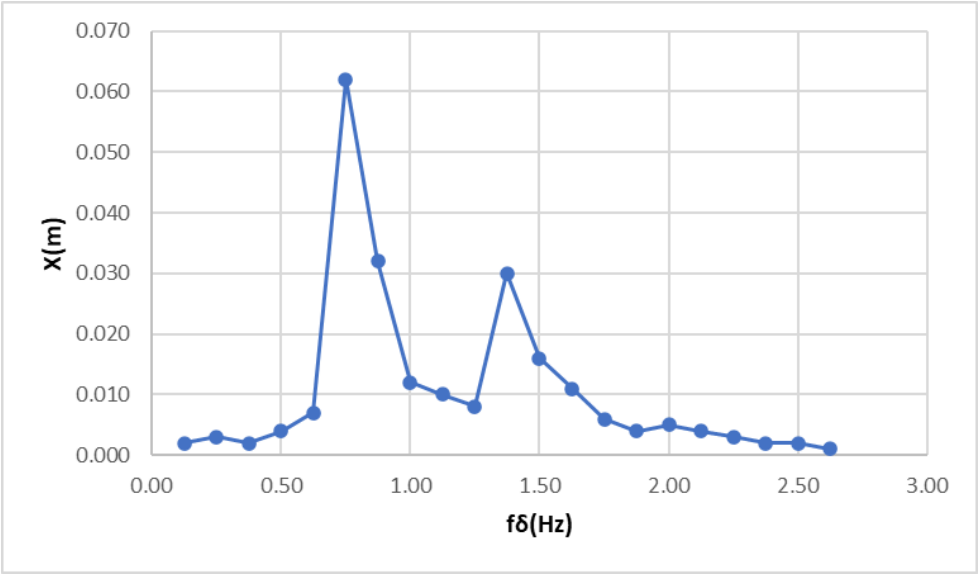
Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός





Condensed-matter-labs/2a/2a calculations.ipynb

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} + b\frac{dx_1}{dt} = -k(x_1 - x_2) + F_0\cos(\omega t)$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} + b\frac{dx_2}{dt} = -k(x_2 - x_1)$$

Με χρήση της: scipy.integrate.solve_ivp

Παράρτημα Α. Υπολογισμοί Κανονικών Τρόπων

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός

Αν X1(t) και X2(t) είναι οι θέσεις των δύο δρομέων αντίστοιχα, τότε οι δυνάμεις που δρουν σε κάθε δρομέα λόγω των ελατηρίων είναι οι εξής:

$$F_1 = -Dx_1 + D_0(x_2 - x_1)$$

$$F_2 = -Dx_2 - D_0(x_2 - x_1)$$

Αυτές οι δυνάμεις μπορούν να εκφραστούν ως εξισώσεις κίνησης:

$$m_1\ddot{x}_1 = -Dx_1 + D_0(x_2 - x_1) = -(D + D_0)x_1 + D_0x_2$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -Dx_2 - D_0(x_2 - x_1) = -(D + D_0)x_2 + D_0x_1$$

Δοκιμάζω λύσεις της μορφής:

$$x_1(t) = A_1e^{i\omega t} \qquad x_2(t) = A_2e^{i\omega t}$$

$$\begin{bmatrix} m_1\omega^2 - (D + D_0) & D_0 \\ D_0 & m_2\omega^2 - (D + D_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} m_1\omega^2 - (D + D_0) & D_0 \\ D_0 & m_2\omega^2 - (D + D_0) \end{bmatrix}\right) = 0 \qquad (m_1\omega^2 - (D + D_0))(m_2\omega^2 - (D + D_0)) - D_0^2 = 0$$

$$m_1m_2\omega^4 - \omega^2(m_1 + m_2)(D + D_0) + (D + D_0)^2 - D_0^2 = 0$$

Παράρτημα Α. Υπολογισμοί Κανονικών Τρόπων

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός

$$\omega^2 = \frac{(m_1+m_2)(D+D_0) \pm \sqrt{(m_1+m_2)^2(D+D_0)^2 - 4m_1m_2((D+D_0)^2 - D_0^2)}}{2m_1m_2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(D+D_0)(m_1+m_2) - \sqrt{D^2m_1^2 - 2D^2m_1m_2 + D^2m_2^2 + 2DD_0m_1^2 - 4DD_0m_1m_2 + 2DD_0m_2^2 + D_0^2m_1^2 + 2D_0^2m_1m_2 + D_0^2m_2^2}}{2m_1m_2}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{(D+D_0)(m_1+m_2) + \sqrt{D^2m_1^2 - 2D^2m_1m_2 + D^2m_2^2 + 2DD_0m_1^2 - 4DD_0m_1m_2 + 2DD_0m_2^2 + D_0^2m_1^2 + 2D_0^2m_1m_2 + D_0^2m_2^2}}{2m_1m_2}}$$

Περίπτωση 2.α: ($m_1 = m_2 = m$) αλλά $D \neq D_0$ Για το σύστημα με ίδιες μάζες και διαφορετικές σταθερές ελατηρίων, ο πίνακας του συστήματος μετατρέπεται σε:

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + D + D_0 & -D_0 \\ -D_0 & -m\omega^2 + D + D_0 \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$((D + D_0 - m\omega^2)^2 - D_0^2) = 0$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα:

$$m^2\omega^4 - 2m\omega^2(D + D_0) + (D^2 + 2DD_0 + D_0^2 - D_0^2) = 0$$

Παράρτημα Α. Υπολογισμοί Κανονικών Τρόπων

Εισαγωγή

Θεωρία
- **Αρμονική Προσέγγιση**
- **Κανονικοί Τρόποι**

Σκοπός

Διάταξη
- **2 Δρομείς**
- **6 Δρομείς**

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- **Αποτελέσματα**
- **Υπολογιστικά**

Σχολιασμός

$$m^2\omega^4 - 2m\omega^2(D + D_0) + D^2 + 2DD_0 = 0$$

Οι ιδιοσυχνότητες είναι:

$$\omega^2 = \frac{2(D + D_0)}{m} \quad \text{και} \quad \omega^2 = \frac{D}{m}$$

Οι ιδιοτιμές αντιστοιχούν σε:

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}}$$

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{2(D + D_0)}{m}}}$$

Τα ιδιοδιανύσματα είναι,
Αντισυμμετρικός τρόπος:

$$c(1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Συμμετρικός τρόπος:

$$c(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Περίπτωση 2.β: $m_1 = m_2 = m$ **και** $D = D_0$ Εδώ $D = D_0$, οπότε ο πίνακας και η χαρακτηριστική εξίσωση μετατρέπονται σε:

$$\begin{bmatrix} -2m\omega^2 + 2D & -D \\ -D & -2m\omega^2 + 2D \end{bmatrix}$$

Παράρτημα Α. Υπολογισμοί Κανονικών Τρόπων

Εισαγωγή

Θεωρία
- **Αρμονική Προσέγγιση**
- **Κανονικοί Τρόποι**

Σκοπός

Διάταξη
- **2 Δρομείς**
- **6 Δρομείς**

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- **Αποτελέσματα**
- **Υπολογιστικά**

Σχολιασμός

Υπολογίζοντας την ορίζουσα:

$$(2D - 2m\omega^2)^2 - D^2 = 0$$

$$4D^2 - 4Dm\omega^2 - D^2 = 0$$

Οι ιδιοσυχνότητες ειναι:

$$\omega^2 = \frac{3D}{2m} \quad \text{και} \quad \omega^2 = 0$$

Οι ιδιοτιμές αντιστοιχούν σε:
Στατικός τρόπος : $\boxed{\omega_1 = 0}$

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{3D}{2m}}}$$

Τα ιδιοδιανύσματα είναι τα ίδια όπως πριν.
Περίπτωση 2.γ: $m_1 \neq m_2$ **και** $D = D_0$
Για διαφορετικές μάζες αλλά ίσες σταθερές ελατηρίων, ο πίνακας μετατρέπεται σε:

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + 2D & -D \\ -D & -m_2\omega^2 + 2D \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοσυχνότητες ω_1 και ω_2 είναι δοθείσες από τις ακόλουθες εκφράσεις:

Παράρτημα Α. Υπολογισμοί Κανονικών Τρόπων

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D(m_1 + m_2 - \sqrt{m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2})}{m_1 m_2}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D(m_1 + m_2 + \sqrt{m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2})}{m_1 m_2}}$$

Τα ιδιοδιανύσματα $c(1)$ και $c(2)$ για τους δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης είναι τα εξής:

$$c(1) = \begin{bmatrix} -\frac{m_2}{m_1 - m_2 - \sqrt{m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c(2) = \begin{bmatrix} -\frac{m_2}{m_1 - m_2 + \sqrt{m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Όλοι οι υπολογισμοί γίνονται με python αναλυτικά στο QR code /file/2a στο GitHub.

Για τις περιπτώσεις (2.α) ($m_1 = m_2 = m$) αλλά ($D \neq D_0$) και (2.β) ($m_1 = m_2 = m$) και ($D = D_0$), ίδια ιδιοδιανύσματα:

$c(1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ (αντισυμμετρικός τρόπος) $c(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ (συμμετρικός τρόπος)

Ο λόγος είναι ότι τα ιδιοδιανύσματα εξαρτώνται από την αναλογία των σταθερών D και D_0 και τη συμμετρία του συστήματος. Σε αυτές τις δύο περιπτώσεις, τα συστήματα έχουν ουσιαστικά την ίδια συμμετρία, αν και με διαφορετικές τιμές των σταθερών ελατηρίων.

Παράρτημα Α. Υπολογισμοί Κανονικών Τρόπων

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός

Ορθογωνιότητα και Κανονικοποίηση

Τα ιδιοδιανύσματα $c(1)$ και $c(2)$ είναι ορθογώνια, επειδή το εσωτερικό τους γινόμενος είναι μηδέν:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$$

Ωστόσο, τα ιδιοδιανύσματα δεν είναι κανονικοποιημένα. Για να τα κανονικοποιήσουμε, πρέπει να διαιρέσουμε κάθε ιδιοδιάνυσμα με $\sqrt{2}$

$$c(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Πείραμα 2α
5/6/2024

Παράρτημα Β. Υπολογιστική Αντιμετώπιση

Εισαγωγή

Θεωρία
- ❖ Αρμονική Προσέγγιση
- ❖ Κανονικοί Τρόποι

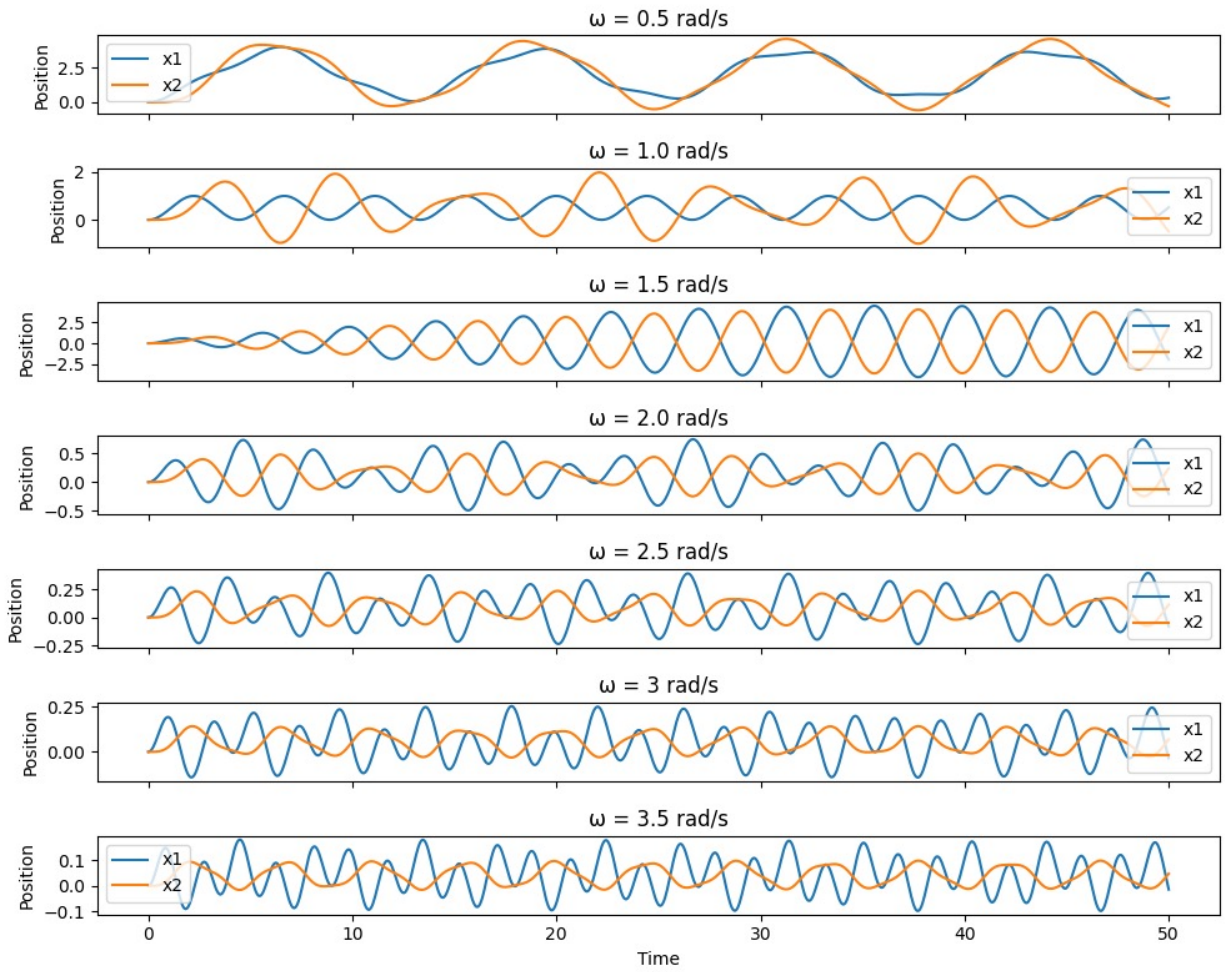
Σκοπός

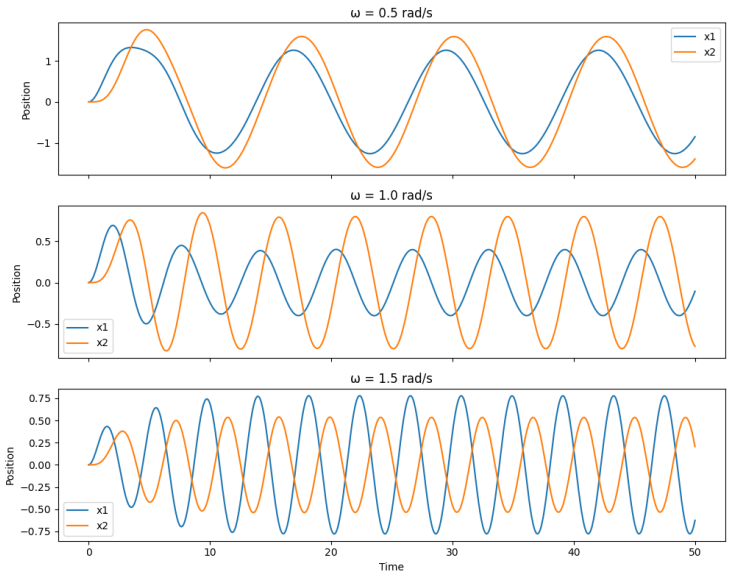
Διάταξη
- ❖ 2 Δρομείς
- ❖ 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- ❖ Αποτελέσματα
- ❖ Υπολογιστικά

Σχολιασμός





Πείραμα 2α
5/6/2024

Παράρτημα Β. Υπολογιστική Αντιμετώπιση

Εισαγωγή

Θεωρία
- **Αρμονική Προσέγγιση**
- **Κανονικοί Τρόποι**

Σκοπός

Διάταξη
- **2 Δρομείς**
- **6 Δρομείς**

Πειραματικά Δεδομένα

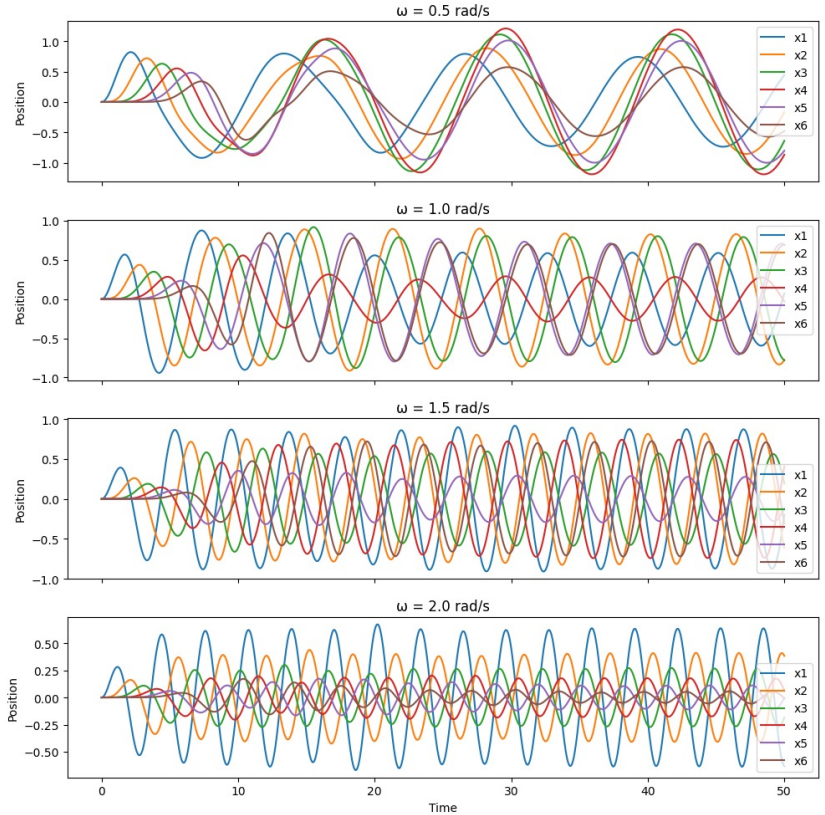
Ανάλυση
- **Αποτελέσματα**
- **Υπολογιστικά**

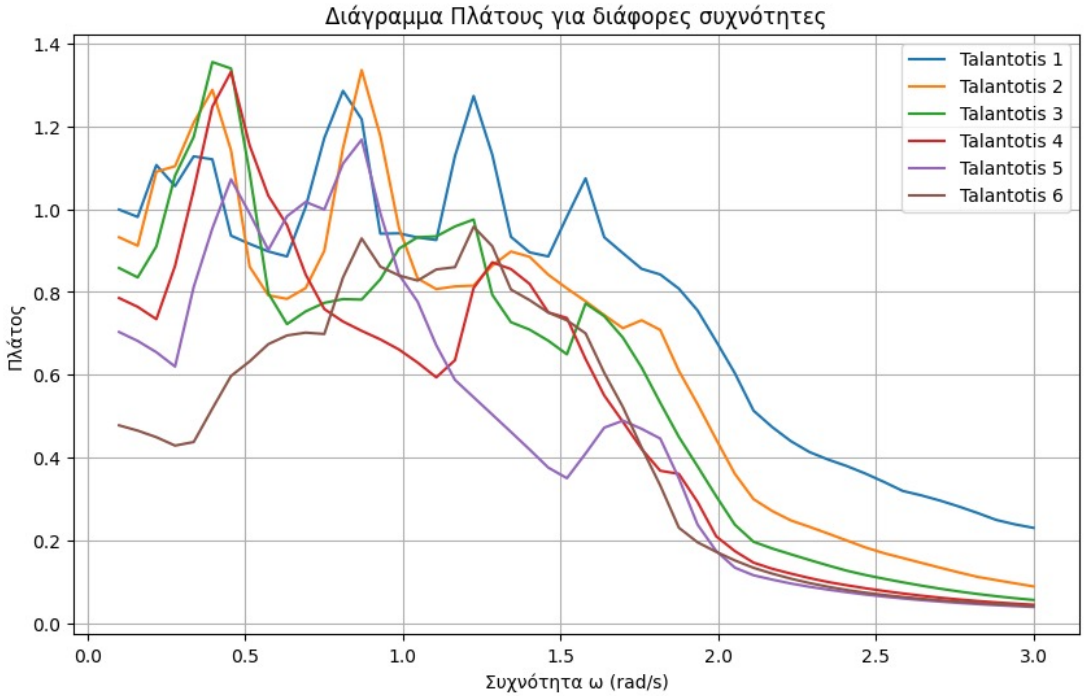
Σχολιασμός

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} + b\frac{dx_i}{dt} = -k(x_i - x_{i-1}) - k(x_i - x_{i+1}) + F_0\cos(\omega t)\,\delta_{i1}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{m}\left(-k(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}) - bv_i + F_0\cos(\omega t)\,\delta_{i1}\right)$$





for i in range(2): Γενικεύει και για άλλους ταλαντωτές.
Με τριβές και εξαναγκασμένη
Θέλει καλιμπράρισμα 0.159155 Hz για ένα 1rad/s

Βιβλιογραφία.

Εισαγωγή

Θεωρία
- Αρμονική Προσέγγιση
- Κανονικοί Τρόποι

Σκοπός

Διάταξη
- 2 Δρομείς
- 6 Δρομείς

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- Αποτελέσματα
- Υπολογιστικά

Σχολιασμός

Βιβλιογραφία.

[Βλ1] Εργαστηριακός Οδηγός Κατεύθυνσης Φυσικής Συμπυκνωμένης ύλης 2020.
[Βλ2] Εισαγωγή στη φυσική στερεάς κατάστασης. Kittel. Έκδοση 5, Πνευματικός.
[Βλ3] Φυσική στερεάς κατάστασης, Ashcroft, Mermin, Πνευματικός.
[Βλ4] Φυσική στερεάς κατάστασης, Ibach Harald, Lüch Hans, ZHTH.
[Βλ5] Φυσική στερεάς κατάστασης, Ε.Ν. Οικονόμου, ΠΕΚ.
[Βλ6] Φυσική στερεάς κατάστασης, Philip Hofmann, Παπαζήση. [Βλ7] Οπτοηλεκτρονική, Jasprit Singh, Τζιόλα.

Αναφορές.

[1] Οδηγίες για το Πείραμα 2α εργαστηριακού οδηγού.
[2] Phonos, άρθρο Wikipedia.
[3] Georgiou, I. T., & Romeo, F. (2015). Multi-physics dynamics of a mechanical oscillator coupled to an electro-magnetic circuit. International Journal of Non-Linear Mechanics, 70, 153-164. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.12.001
[4] Matthew Schwartz Lecture 3, Coupled oscillators.
[5] Wolfs, F. L. H. (n.d.). Chapter 12: Coupled Oscillations. In Physics Course Notes.

Μετρήσεις-Δεδομένα.

[Data-1]: Πρώτο σετ μετρήσεων set1.txt
[Data-2]: Δεύτερο σετ μετρήσεων set2.txt
[Video]: Βίντεο από το eclass για την άσκηση.

Εισαγωγή

Θεωρία
- **Αρμονική Προσέγγιση**
- **Κανονικοί Τρόποι**

Σκοπός

Διάταξη
- **2 Δρομείς**
- **6 Δρομείς**

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- **Αποτελέσματα**
- **Υπολογιστικά**

Σχολιασμός

Ευχαριστούμε για την προσοχή σας!

Πείραμα 2α
5/6/2024

Εισαγωγή

Θεωρία
- **Αρμονική Προσέγγιση**
- **Κανονικοί Τρόποι**

Σκοπός

Διάταξη
- **2 Δρομείς**
- **6 Δρομείς**

Πειραματικά Δεδομένα

Ανάλυση
- **Αποτελέσματα**
- **Υπολογιστικά**

Σχολιασμός