

Πείραμα 1. Περίθλαση Ηλεκτρονίων σε Κρυσταλλικό Πλέγμα Γραφίτη.

Ιάσων Καζάζης

Προς την κυρία Τσέτσερη.



HELLENIC REPUBLIC
National and Kapodistrian
University of Athens
—EST. 1837—

Προσωπικά στοιχεία | AM: 1110201900073 , email: sph1900073@uoa.gr
Εκτέλεση άσκησης Παρασκευή 2:00-5:00, 17 Μαΐου 2024.



$$n\lambda = 2d\sin\theta$$

Εργαστήριο Εισαγωγής Κατεύθυνσης Φυσικής Στερεάς Κατάστασης.

Πείραμα 1.

24 Ιουνίου 2024

Περιεχόμενα

1	Θεωρία Πειράματος.	1
2	Πειραματική Διαδικασία.	2
2.1	Οργανολογία και διάταξη.	2
3	Μετρήσεις Πειράματος και Επεξεργασία.	3
4	Σχόλια-Συμπεράσματα	5
5	Ερωτήσεις-Παρατηρήσεις	6
5.1	Ερωτήματα και Ασκήσεις.	6
5.2	Ερώτημα 2.	7
6	Παράρτημα. Pixel scaling.	8
7	Βιβλιογραφία.	10
7.1	Βιβλιογραφία.	10
7.2	Αναφορές.	10
7.3	Μετρήσεις-Δεδομένα.	10



Περίληψη

Σκοπός της παρούσας άσκησης είναι η μέτρηση της απόστασης των δύο πρώτων πλεγματικών επιπέδων του γραφίτη ($d_1 = 213 \text{ pm}$ και $d_2 = 123 \text{ pm}$). Για να γίνει αυτό αξιοποιούμε την κυματική φύση μιας δέσμης ηλεκτρονίων τα οποία περιθλώνται δημιουργώντας στην οθόνη παρατήρησης ορατούς ομόκεντρους κύκλους. Έπειτα με την χρήση του νόμου του Bragg καθίσταται εφικτή η εξαγωγή μιας σχέσης του μήκους κύματος της δέσμης ηλεκτρονίων και των γεωμετρικών χαρακτηριστικών και μέσω αυτής υπολογίζουμε τις ζητούμενες αποστάσεις των πλεγματικών επιπέδων.

1 Θεωρία Πειράματος.

Όπως ένα φωτόνιο φέρει τόσο σωματιδιακή όσο και κυματική φύση, έτσι και ένα ηλεκτρόνιο, αν και σωματίδιο με μάζα, μπορεί να συμπεριφερθεί ως ένα κύμα με μήκος κύματος όπως αυτό δόθηκε από τον de Broglie:

$$\lambda_B = \frac{h}{mv} \quad (1)$$

όπου ($h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$) η σταθερά του Planck. Τώρα τα ηλεκτρόνια αυτά όταν εστιάζονται και επιταχυνθούν εντός κάποιας διαφοράς δυναμικού (V_A) αποκτούν ενέργεια που δίνεται από την σχέση:

$$E = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{1}{2} m_e v^2 = eV_A \quad (2)$$

όπου ($m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$) η μάζα των ηλεκτρονίων και ($e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Cb}$) το φορτίο τους. Έτσι λοιπόν, σύμφωνα με τις δύο παραπάνω σχέσεις, σε κάθε ηλεκτρόνιο αποδίδεται μήκος κύματος de Broglie:

$$\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV_A}} \quad (3)$$

Επομένως τα ηλεκτρόνια φέρουν κυματικές ιδιότητες, αυτό σημαίνει ότι μπορούν να περιθλαστούν με τον ίδιο τρόπο που μια φωτεινή δέσμη περιθλάται, δημιουργώντας έτσι εικόνες ενισχυτικής και καταστρεπτικής συμβολής πάνω σε μια οθόνη παρατήρησης.

Συγκεκριμένα η δέσμη ηλεκτρονίων προσκρούει σε υμένιο πολυκρυσταλλικού γραφίτη και λόγω ανάκλασης Bragg από τα πλεγματικά επίπεδα δίνει ενισχυτική συμβολή σύμφωνα με την σχέση:

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Όπου (d) είναι η απόσταση μεταξύ των πλεγματικών επιπέδων των ατόμων άνθρακα, (θ) η γωνία ανάκλασης κατά Bragg και (n) η τάξη της περίθλασης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση του πολυκρυσταλλικού γραφίτη η προσπίπτουσα δέσμη ανακλάται κατά Bragg πάνω σε όλα τα πλεγματικά επίπεδα με αποτέλεσμα αυτή να διασκορπίζεται σε γεωμετρία κώνων την οποία εμείς αντιλαμβανόμαστε στην φθορίζουσα οθόνη παρατήρησης ως ομόκεντρους κύκλους

Για κάθε τάξης περίθλασης εμφανίζεται μια ομάδα δακτυλίων ενώ κάθε δακτύλιος αντιστοιχεί σε ανάκλαση Bragg των φωτονίων από ένα συγκεκριμένο πλεγματικό επίπεδο, έτσι ο δακτύλιος με διάμετρο D_1 προέρχεται από την σκέδαση στα πλεγματικά επίπεδα που απέχουν απόσταση d_1 , ο δακτύλιος με διάμετρο D_2 από τα πλεγματικά επίπεδα d_2 κ.ο.κ.

Είναι σημαντικό το γεγονός ότι υψηλότερης τάξης περίθλαση οδηγεί σε δακτυλίους ασθενέστερης έντασης, έτσι για το συγκεκριμένο πείραμα θεωρούμε ότι έχουμε περίθλαση πρώτης τάξης $n=1$.

Αν (D) η διάμετρος του εκάστοτε δακτυλίου και ($L = 13,5 \text{ cm}$) η απόσταση του υμενίου πολυκρυσταλλικού γραφίτη και της οθόνης παρατήρησης και (θ) η γωνία εκτροπής της ακτίνας που δημιουργεί τον αντίστοιχο δακτύλιο, τότε σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα ισχύει:

$$\tan(2\theta) = \frac{D}{2L} \quad (5)$$

και επειδή η γωνία εκτροπής είναι πολύ μικρή:

$$\tan(2\theta) \approx \sin(2\theta) = 2 \sin(\theta)$$



Επομένως ισχύει ότι

$$2 \sin(\theta) = \frac{D}{2L} \quad (6)$$

Η παραπάνω σχέση σε συνδυασμό με την (4) δίνει

$$D = \frac{2L}{d} \lambda_B \quad (7)$$

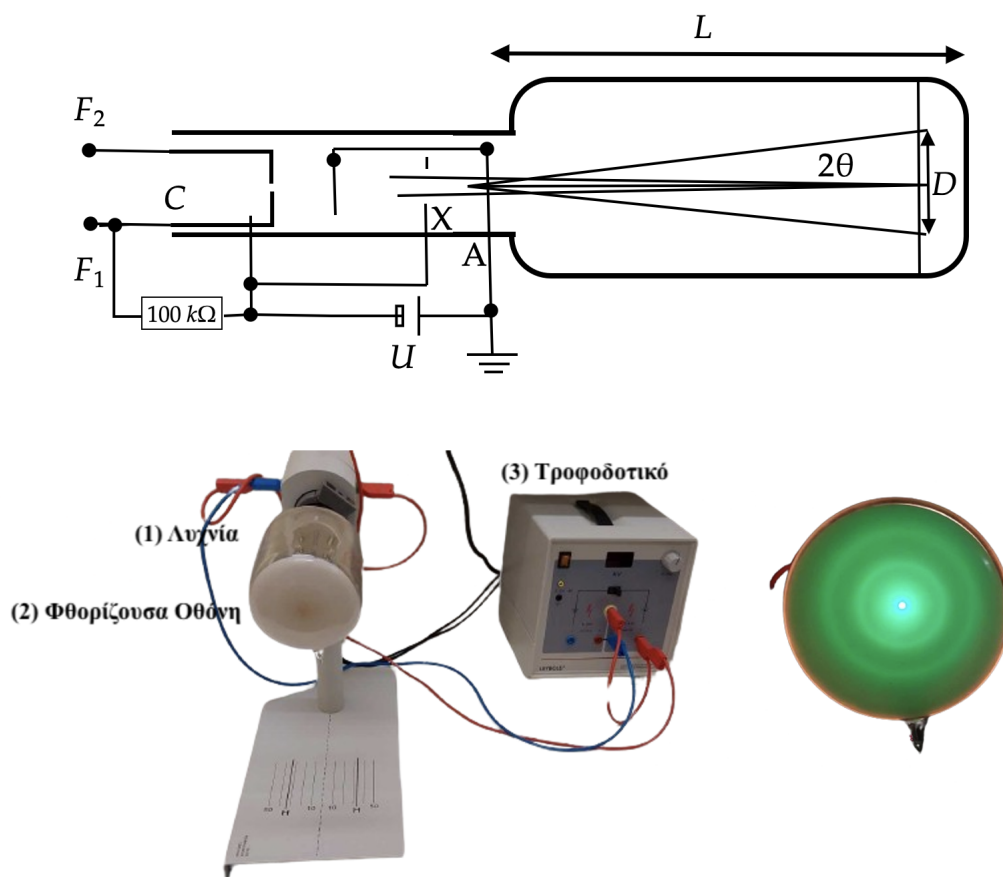
Αυτό σημαίνει ότι χαράσσοντας την γραφική παράσταση $D = f(\lambda_B)$ και βρίσκοντας την κλίση της ευθείας για δεδομένη τάξη περίθλασης μπορούμε να βρούμε τις αντίστοιχες αποστάσεις των πλεγματικών επιπέδων.

2 Πειραματική Διαδικασία.

2.1 Οργανολογία και διάταξη.

Για το πείραμα αυτό χρησιμοποιείται ειδική λυχνία (1) στο εσωτερικό της οποίας τα ηλεκτρόνια εστιάζονται και επιταχύνονται από την κάθοδο στην άνοδο. Πάνω στην τελευταία επικαθίζεται λεπτό υμένιο πολυκρυσταλλικού γραφίτη, διερχόμενα από το οποίο τα ηλεκτρόνια περιθλώνται και προσβάλλουν μια φθορίζουσα οθόνη (2). Διαφορετικό μήκος κύματος de Broglie για τα ηλεκτρόνια επιτυγχάνεται μέσω της μεταβολής της διαφοράς δυναμικού που επικρατεί μεταξύ της ανόδου και της καθόδου. Για την μεταβολή αυτή χρησιμοποιούμε ένα τροφοδοτικό υψηλής τάσης (3). Τέλος, προκειμένου να μετρήσουμε την διάμετρο των δακτυλίων χρησιμοποιήσαμε ένα παχύμετρο.

Η διάταξη



Εικόνα 2,3. Η εργαστηριακή διάταξη



3 Μετρήσεις Πειράματος και Επεξεργασία.

Πειραματικά Δεδομένα Διάταξης.						
$V(kV)$	$\lambda(pm)$	Εσωτ(mm)	Εξωτ(mm)	$D_1(mm)$	$\Delta d(mm)$	$d\lambda$
2,8	23,17904	27,5	29,5	28,5	0,1	0,83
3	22,39308	25,1	33,5	29,3	0,1	0,75
3,2	21,682	24,4	30,5	27,45	0,1	0,68
3,4	21,03463	24,5	31,4	27,95	0,1	0,62
3,6	20,44199	24,3	29,4	26,85	0,1	0,57
3,8	19,89677	23,3	28,6	25,95	0,1	0,52
4	19,39297	23,6	29	26,3	0,1	0,48
4,2	18,92561	22,1	28,9	25,5	0,1	0,45
4,4	18,49048	22,3	26,7	24,5	0,1	0,42
4,6	18,08404	21,9	27,4	24,65	0,1	0,39
4,8	17,70328	21,3	24,4	22,85	0,1	0,37

Πίνακας 1:

Πειραματικά Δεδομένα Διάταξης.						
$V(kV)$	$\lambda(pm)$	Εσωτ(mm)	Εξωτ(mm)	$D_2(mm)$	$\Delta d(mm)$	$d\lambda$
2,8	23,179	49,4	58,7	54,05	0,1	0,828
3,0	22,393	46,6	58,4	52,50	0,1	0,746
3,2	21,682	45,9	58,2	52,05	0,1	0,678
3,4	21,035	44,4	55,3	49,85	0,1	0,619
3,6	20,442	43,4	53,3	48,35	0,1	0,568
3,8	19,897	43,6	51,5	47,55	0,1	0,524
4,0	19,393	41,3	51,0	46,15	0,1	0,485
4,2	18,926	41,1	50,9	46,00	0,1	0,451
4,4	18,490	40,0	50,2	45,10	0,1	0,420
4,6	18,084	38,1	49,5	43,80	0,1	0,393
4,8	17,703	38,200	39,3	38,75	0,1	0,369

Πίνακας 2:

Από το linear fit προκύπτει μια ευθεία $y = mx + b$ με το σφάλμα της στην κλίση.

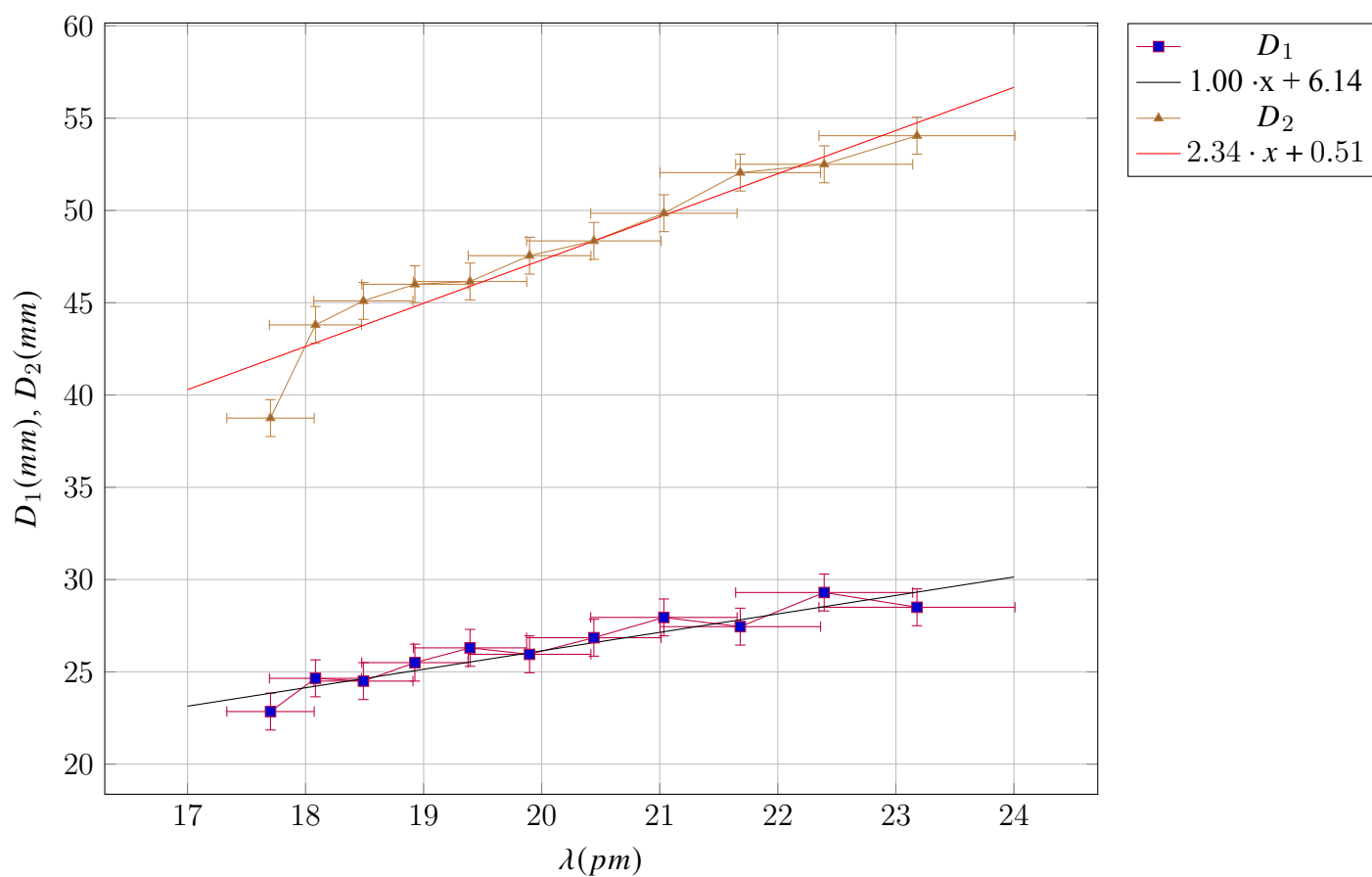
$$\frac{2L}{d} = m$$

Λύνοντας ως προς d με $L = 135nm$ και με διάδοση σφάλματος, προκύπτουν τα,

$$d_1 = 206.42 \pm 1.89pm$$

$$d_2 = 113.97 \pm 0.87pm$$

Αποκλίσεις 3.09% για το d_1 και 7.34% για το d_2 αντίστοιχα. Τα ενδεχομένως σφάλματα οφείλονται κυρίως σε σφάλματα ανάγνωσης και όχι τόσο στην οργανολογία, στην διάταξη ή στις θεωρητικές προσεγγίσεις που έγιναν.

Γραφικές παραστάσεις $D(\lambda)$ 

Γράφημα των D_1 και D_2 συναρτήσεων του λ με γραμμικές προσαρμογές. Τα σφάλματα δίνονται από τους πίνακες.



4 Σχόλια-Συμπεράσματα

Συνολικά λοιπόν, καταφέραμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις των δύο πρώτων πλεγματικών επιπέδων του γραφίτη, d_1 και d_2 που είναι τάξης picometer, χρησιμοποιώντας μόνο μακροσκοπικά μεγέθη όπως η διάμετρος των δακτυλίων και η τάση και αξιοποιώντας παράλληλα την κυματική φύση των ηλεκτρονίων χωρίς την οποία το φαινόμενο της περίθλασης δεν θα λάμβανε χώρα. Φυσικά, όπως αναμέναμε, υπάρχει απόκλιση 3,09% και 7,34% αντίστοιχα σε σχέση με τις πραγματικές αποστάσεις που είναι $d_1 = 113.97$ pm και $d_2 = 123$ pm. Βέβαια δεδομένου της σχετικά απλής διάταξης που χρησιμοποιήθηκε και της χρήσης μόνο μακροσκοπικών μεγεθών μπορούμε να θεωρήσουμε ότι απόκλιση κάτω του 10% είναι αποδεκτή. Ας μην ξεχνάμε άλλωστε ότι στις μετρήσεις υπεισέρχονται σημαντικά συστηματικά σφάλματα:

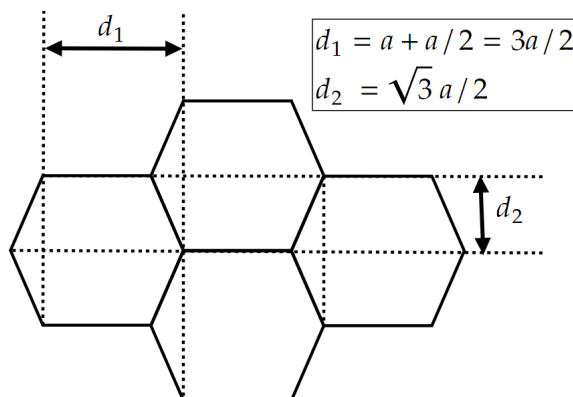
- Η εφαρμοζόμενη τάση, λόγω της υψηλής τιμής, συχνά δεν μένει σταθερή με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται κάποιες φορές κατά 0,1 kV αλλάζοντας έτσι το μήκος κύματος των ηλεκτρονίων.
- Τα όρια των δακτυλίων πάνω στην φωσφόρουσα οθόνη δεν είναι ξεκάθαρα ακόμα και για περίθλαση πρώτης τάξης γεγονός που δημιουργεί δυσκολία στην πραγματική μέτρηση της διαμέτρου ενώ άρει και οποιοδήποτε είδος επαναληψιμότητας της μέτρησης καθώς δύσκολα δύο διαφορετικοί πειραματιστές καταλήγουν στις ίδιες τιμές της διαμέτρου.

Με δεδομένο ότι τα παραπάνω πρόκειται για σημαντικά συστηματικά σφάλματα που δεν μπορούμε να εξαιρέσουμε στην συγκεκριμένη διάταξη θεωρούμε ότι τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά.



5 Ερωτήσεις-Παρατηρήσεις

5.1 Ερωτήματα και Ασκήσεις.

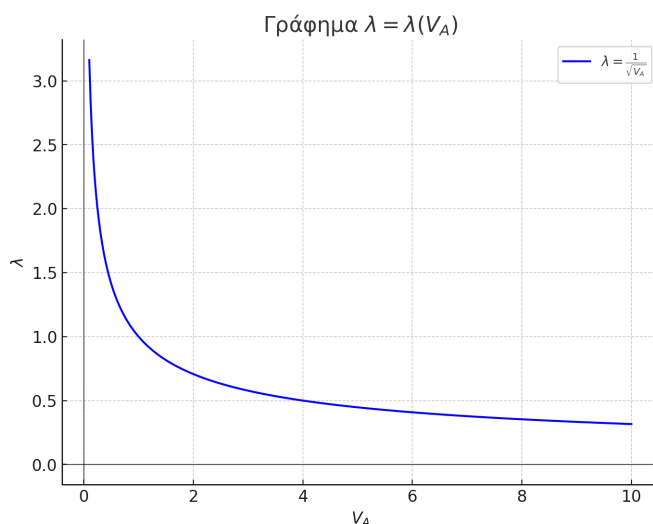


Από τη γεωμετρία του παραπάνω σχήματος βλέπουμε ότι $d_1 = \cos(120^\circ/2) \times a + a$, και αντίστοιχα πως $d_2 = \sin(120^\circ/2) \times a$. Έτσι προκύπτει πως,

$$d_1 = \frac{a}{2} + a = \frac{3a}{2} = 213 \text{ pm}$$

$$d_2 = \frac{\sqrt{3}a}{2} = 123 \text{ pm}$$

1. Η διάμετρος καθώς αυξάνουμε την τάση V_A φθίνει κατά $D \sim V_A^{-1/2}$.

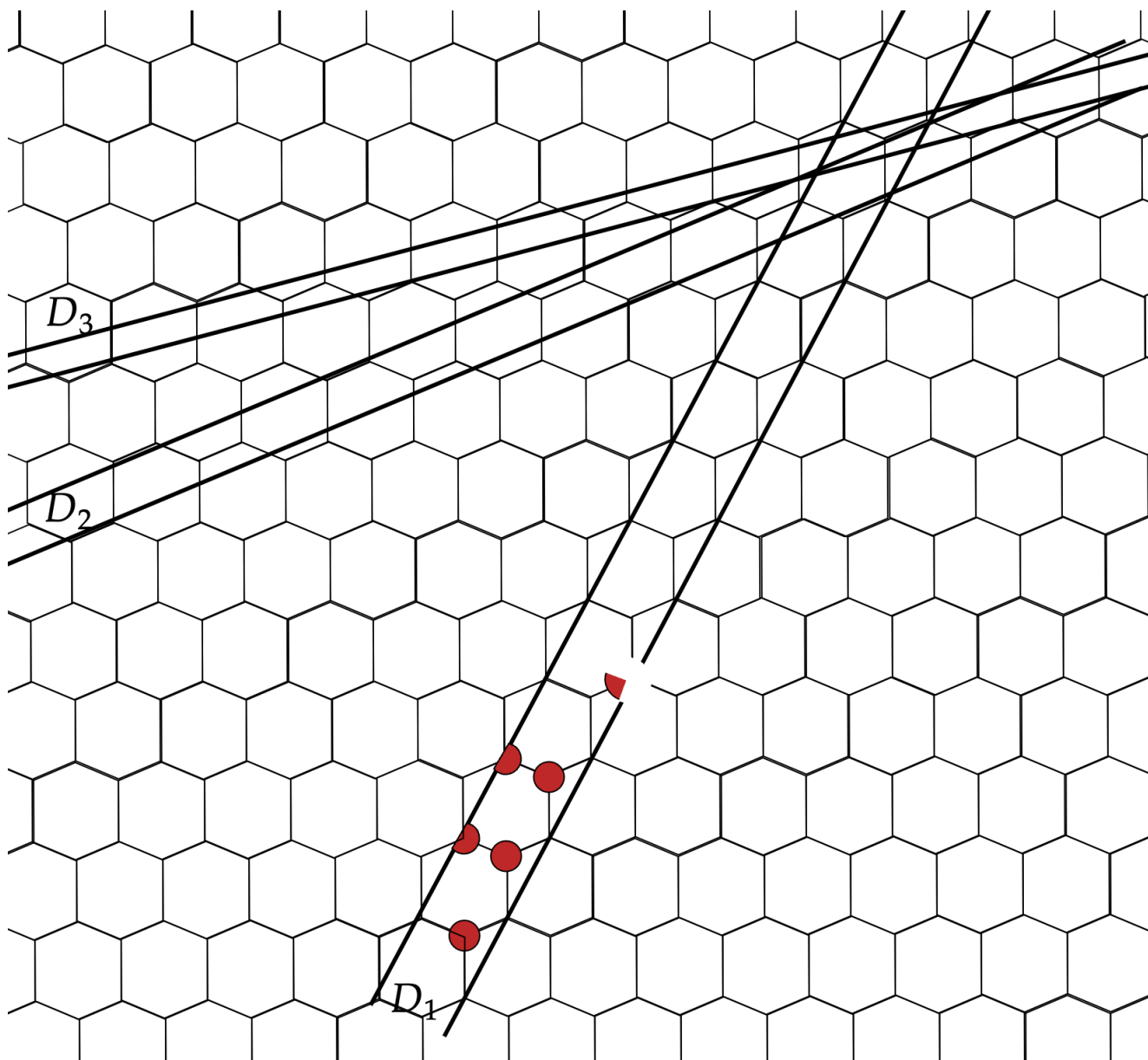


2. Οι δακτύλιοι δεν έχουν την ίδια ένταση. Ανάλογα το d_i έχουμε και μεγαλύτερη ένταση ($I(d_1) > I(d_2) > \dots$) και μικρότερες ακτίνες ($R_{d_1} < R_{d_2} < \dots$). Λόγω μεγάλης απορρόφησης των ηλεκτρονίων δε βλέπουμε δεύτερης τάξης. Αν είχαμε όμως x-ray θα βλέπαμε.
3. Οι ομόκεντροι κύκλοι αντιστοιχούν σε πρώτης τάξης περίθλαση. Οι δακτύλιοι δεν έχουν την ίδια ένταση, αυτοί των υψηλότερης τάξης είναι πολύ ασθενέστεροι και τους αγνοούμε.



4. Η έντονη φωτεινότητα στο κέντρο αντιστοιχεί στις ακτίνες φωτός που δεν αλληλεπιδρούν με το υλικό και δε σκεδάζονται, οπότε απεικονίζονται στο κέντρο.

5.2 Ερώτημα 2.



Το εξαγωνικό πλέγμα. Εδώ στον σχεδιασμό του δεν ήταν απόλυτα ισόπλευρο εξάγωνο και υπάρχουν αποκλίσεις στα D_2, D_3 . Γι' αυτό για τα παρακάτω θα βασιστούμε στο σχήμα του φυλλαδίου. Σχηματικά φαίνεται πως θα γίνει η μέτρηση της πυκνότητας των ατόμων εντός της κάθε περιοχής D που θα μας δώσει μια αίσθηση της αναλογίας των μεγεθών και άρα και της έντασης.

Για το d_1 υπολογίζουμε την γραμμική πυκνότητα. Στις πυκνότητες ρόλο παίζει και το $d_{1,2,3}$, με τα οποία θα μπορούσαμε να διαιρέσουμε για να βρούμε στη λωρίδα την πυκνότητα. Εδώ θα βρούμε μόνο τη γραμμική πυκνότητα για κάθε λωρίδα θεωρώντας πως αυτή από μόνη της δίνει τη σχέση αναλογίας με την ένταση του κροσσού. Βρίσκουμε τον αριθμό σημείων για ένα διάστημα περιοδικότητας.

$$N_1 = \frac{360^\circ + 60^\circ + 60^\circ + +180^\circ}{360^\circ} = \frac{660^\circ}{360^\circ}$$



Και άρα η γραμμική πυκνότητα προκύπτει να είναι για απόσταση $L = (2\cos(30^\circ))a = \sqrt{3}a$, όπου a η πλευρά του εξαγώνου,

$$\rho_1 = \frac{N_1}{L} = \frac{1.833}{\sqrt{3}} \approx 1.06 \cdot a^{-1}$$

Για το d_2 υπολογίζουμε την γραμμική πυκνότητα. Βρίσκουμε τον αριθμό σημείων για ένα διάστημα περιοδικότητας.

$$N_2 = \frac{120^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 120^\circ}{360^\circ} = \frac{360^\circ}{360^\circ}$$

Και άρα η γραμμική πυκνότητα προκύπτει να είναι για απόσταση $L = (2\cos(60^\circ) + 1)a$, όπου a η πλευρά του εξαγώνου,

$$\rho_2 = \frac{N_2}{L} = \frac{1}{2a} = 0.5 \cdot a^{-1}$$

Για το d_3 υπολογίζουμε την γραμμική πυκνότητα. Βρίσκουμε τον αριθμό σημείων για ένα διάστημα περιοδικότητας.

$$N_3 = \frac{120^\circ + 60^\circ}{360^\circ} = \frac{180^\circ}{360^\circ}$$

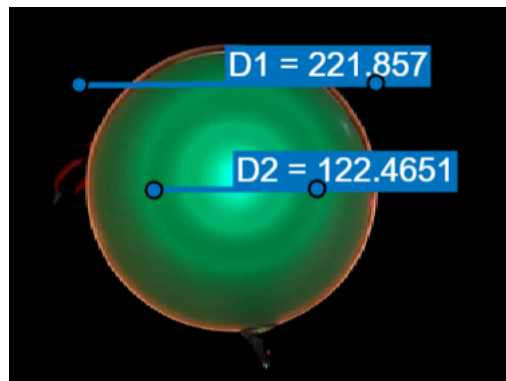
Και άρα η γραμμική πυκνότητα προκύπτει να είναι για απόσταση $L = (2\cos(60^\circ) + 1)a$, όπου a η πλευρά του εξαγώνου,

$$\rho_3 = \frac{N_3}{L} = \frac{0.5}{2a} = 0.25 \cdot a^{-1}$$

Άρα βλέπουμε ότι η γραμμική πυκνότητα υποδιπλασιάζεται σε κάθε κροσσό. Κάτι που εξηγεί σε έναν βαθμό γιατί δε μπορούμε να τους διακρίνουμε στην περίπτωση των d_3 . Στην πραγματικότητα ρόλο παίζει και η ακτίνα του κροσσού, η οποία μπορεί να μεγαλώνει αρκετά ώστε να μη μπορεί να γίνει διακριτός με αυτή τη λυχνία πιθανόν μικρότερης διαμέτρου από την απαραίτητη. Κανονικά δηλαδή θα βλέπαμε πέντε (d_1, \dots, d_5) δακτυλίους.

6 Παράρτημα. Pixel scaling.

Η μέτρηση με το παχύμετρο δίνει μεγάλη ακρίβεια αλλά απαιτεί έναν σταθερό χειρισμό και καλή ευκρίνεια στην ανάγνωση. Λόγω του χαμηλού φωτισμού και άλλων παραγόντων το σφάλμα ανάγνωσης είναι σημαντικό. Ένας διαφορετικός τρόπος για να γίνει αυτή η μέτρηση είναι μετρώντας την απόσταση από τη φωτογραφία. Καλιμπράροντας την βάσει μιας σταθερής απόστασης (το πάχος της λυχνίας) και ύστερα με ανάλυση σε pixels μπορούμε να κάνουμε με μεγαλύτερη ευκρίνεια τις μετρήσεις με χρήση κάποιου προγράμματος όπως του matlab image app.



Το βασικό για να έχει επιτυχία η συγκεκριμένη μέθοδος είναι η χαμηλή παράλλαξη κατά τη λήψη της φωτογραφίας, επιπλέον ο φωτισμός να επιτρέπει να διακρίνονται οι δακτύλιοι στο ίδιο πάχος που τους αντιλαμβάνεται και το μάτι μας για να υπάρχει συμφωνία μεταξύ των μεθόδων.



7 Βιβλιογραφία.

7.1 Βιβλιογραφία.

[Bλ1] Εργαστηριακός Οδηγός Εισαγωγής Φυσικής Στερεάς Κατάστασης.

[Bλ2] Εισαγωγή στη φυσική στερεάς κατάστασης. Kittel. Έκδοση 5, Πνευματικός.

[Bλ3] Φυσική στερεάς κατάστασης, Ashcroft, Mermin, Πνευματικός.

[Bλ4] Φυσική στερεάς κατάστασης, Ibach Harald, Lüch Hans, ΖΗΤΗ.

[Bλ5] Φυσική στερεάς κατάστασης, Ε.Ν. Οικονόμου, ΠΕΚ.

[Bλ6] Φυσική στερεάς κατάστασης, Philip Hofmann, Παπαζήση.

[Bλ7] Οπτοηλεκτρονική, Jasprit Singh, Τζιόλα.

7.2 Αναφορές.

[1] Οδηγίες για την άσκηση 1 του εργαστηριακού φυλλαδίου.

[2] Bragg's Law, άρθρο Wikipedia.

7.3 Μετρήσεις-Δεδομένα.

[Data-1]: Πρώτο σετ μετρήσεων set1.txt

