Analyse I :

17/09/2018

I | - Les Nombres Réels
II | - suites Numériques
III | - Fonction : ⟶ Continuité et limite
IV | - Fonction Dérivabilité
V | - Formule de TAYLOR

Analyse Combinatoire :

Permutations :

a

a, b , b, a

abc , acb
bac , bca
cab , cba

Le Nombre de Permutations de n° éléments est $P_n = 1, 2, 3, 4, \dots n$

* On le note : $P_n = n!$
se lit " Factoriel n "

$1! = 1$

$2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

ARRANGEMENTS :

Le Nombre d'Arrangements, de n° éléments pris "p" à "p" est :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \dots\dots (n-(p-1))$$
$$= n(n-1)(n-2) \dots\dots (n-p+1)$$

ou Encore :

$$A_n^p = \frac{n(n-1)(n-2) \dots\dots (n-p+1)(n-p)(n-p-1)}{(n-p)(n-p-1) \dots\dots 3 \times 2 \times 1}$$

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Scanned by CamScanner

Combinaisons :

Le nombre de Combinaisons de n° éléments pris "p" à "p" est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \quad \text{où : } 0 \leq p \leq n$$

Exemple :

L'élève équipe de 11.

$$C_{20}^{11} = \frac{20!}{11!\,9!}$$

$$= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11! \cdot 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 19 \times 17 \times 2 \times 5 \times 12 \times 13 \in \mathbb{N}^*$$

Remarques et propositions :

1/- $(n+1)! = 1 \times 2 \times 3 \ldots\ldots n(n+1)$

$n \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{(n+1)! = n!\,(n+1)}$

Nota : $n = 0$: $1! = 0! \times 1$

Donc : $\boxed{0! = 1}$

2/- Formule du Complément :

$n, p \in \mathbb{N}$: $p \leq n$

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

3/- Formule de PASCAL :

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

4/- Formule de Newton :

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + C_n^p \cdot a^{n-p} \cdot b^p$$

$$= \boxed{\sum_{p=0}^{n} C_n^p \cdot a^{n-p} \cdot b^p}$$

$$C_n^n = C_n^0 = 1$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

$$C_n^2 = C_n^{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$$

5/-

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

Triangle de Pascal :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Exemple :

Calculer : $(2x - y)^5$

Solution :

$(2x-y)^5 = 1(2x)^5 + 5(2x)^4(-y)^1 + 10(2x)^3(-y)^2 + 10(2x)^2(-y)^3 + 5(2x)(-y^4) + (-y)^5$

$= 32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5$.

Exercice :

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq n$:

Scanned by CamScanner

* $1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + 1 = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$

* $1 - C_n^1 - C_n^2 - \dots - C_n^{n-1} - 1 = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p = 1$

2/- $\sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{n+1}}{p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n+p}$

Raisonnement par Reference :

Montrer par recurrence :

L'Inegalité (متباينة) de Bernoulli :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall a > 0 : \boxed{(1+a)^n \geq 1 + na}$

(valable aussi pour $1+a > 0$)

* $n = 0$:

$(1+a)^0 = 1$

et $1 + na = 1 + 0 = 1$

$1 \geq 1$ vrai

* L'ordre $(n+1)$: $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a)^1$$
$$\geq (1+na)(1+a)$$
$$= 1 + a + na + na^2$$
$$\geq 1 + (1+n)a$$

vrai à l'ordre $(n+1)$

Donc :

L'Inegalité est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}$

Exercice :

Démontrer l'inégalité de Bernoulli en utilisant la formule du Binôme de Newton.

Montrer par recurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

1/- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} =$

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

Scanned by CamScanner

Les Nombre RATIONNELS :

18/09/2018

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \Rightarrow$ Les Nombre ENTIÈRE naturels

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

$\mathbb{Z} = \{0 ; 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 3 ; -3 ; \ldots\} \Rightarrow$ Les ENTIÈRE RELATIFS

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$

$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n}$ où : $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^* \} \Rightarrow$ Les Nombres RATIONNELS

Remarque :

$\mathbb{Q}$ est stable pour les 4 opérations ARITHMÉTIQES.

- $\forall a, b \in \mathbb{Q}$, $a + b \in \mathbb{Q}$:

$a = \frac{m}{n}$
$b = \frac{p}{q}$

$a + b = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq}{nq} + \frac{np}{nq}$

$= \frac{mq + np}{nq}$ et $nq \neq 0$ $(n \neq 0$ et $q \neq 0)$

* Même chose pour $(a - b)$

- $\forall a, b \in \mathbb{Q}$, $ab \in \mathbb{Q}$

et si $b \neq 0$, $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}} = \frac{m}{n} \times \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}$$

Un Nombre Rationnels peut être représenté par un nombre avec des décimales

$\frac{1}{2} = 0{,}5$

$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots\ldots$

$\frac{3}{4} = 0{,}75$

(décimale = zéro)

Le Nombre de décimales être fini ou infini.

Scanned by CamScanner

Remarques :

1/- Si le nombre de décimales est un nombre fini alors c'est un nombre rationnel

$$x = 12,143$$
$$= \frac{12143}{1000}$$

2/- La suite des décimales d'un nombre rationnels possède une période.

Exemple :

$$\frac{2}{3} = 0,666$$

on notes : $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$

1	7
30	0,1428571
20	
60	
40	
50	
10	

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$$

Possède période de "0" ou "9"

$$x = 2,51\overline{0} = 2,51$$

et : $y = 0,99\ldots\ldots = 0,\overline{9}$

$$y = 1$$

Car on a :

$$10y = 9,99$$
$$= 9 + 0,99$$
$$10y = 9 + y$$
$$9y = 9$$
$$\boxed{y = 1}$$

Soit :

$$z = 2,45699\ldots\ldots 9\ldots$$
$$z = 2,457$$

Exercice :

Trouver : $x = 2,14242\overline{42}$

$$x = 2,14\overline{2}$$

Solution :

$$x = 2,1 + 0,0424\overline{2}$$

soit : $y = 0,0424\overline{2}$

$$1000y = 42,\overline{42}$$
$$= 42 + 0,\overline{42}$$
$$= 42 + 10y$$

on a :

$$990y = 42$$
$$y = \frac{42}{990} = \frac{21}{495} = \frac{7}{165}$$
$$x = 2,1 + \frac{7}{165} = \frac{21}{10} + \frac{7}{165}$$
$$= \frac{3538}{1650} = \boxed{\frac{107}{330}}$$

Scanned by CamScanner

23/09/2018

Les Nombre Irrationnels :

exp :

$$x = 0{,}1010101010\underbrace{10\ldots\ldots10}_{n \text{ fois le } 0}10\ldots\underbrace{101\ldots01}_{(n+1) \text{ fois le } 0}\ldots$$

$\boxed{\text{La partie décimale n'a pas de période}}$

soit : $y = \sqrt{2}$ c'est à dire $y^2 = 2$

Supposant que, y est <u>RATIONNEL</u>

et posant $y = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$

(Raisonnement par l'absurde)

alors : m et n Premiers intereux

alors : $y^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$ encore :

$$\boxed{m^2 = 2n^2}$$

m^2 : nombre pair (زوجي)

(si "m" est Impaires, alors :)

$$m = 2p + 1$$

$$\Rightarrow m^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1$$

$$= 2(2p^2 + 2p) + 1 : \text{Impair}$$

Donc : m^2 pair $\Longleftrightarrow$ m pair

alors : $\boxed{m = 2a}$

on a :

$$m^2 = 2n^2 \Longleftrightarrow (2a)^2 = 2n^2$$

$$\Longleftrightarrow 4a^2 = 2n^2$$

donc $\boxed{n^2 = 2a^2}$

Le même : n^2 pair $\Longleftrightarrow$ n pair

Scanned by CamScanner

Donc : $\boxed{m = 2b}$

2 devise m et n , Impossible.

Car premiers entre eux

Conclusion : y n'est pas RATIONNEL

Exercice :

Montrer que :

$Z = \frac{\ln 3}{\ln 2}$ Nombre Irrationnel

Reponse :

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, tels que :

$0 < \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{m}{n}$

$\Leftrightarrow n \ln 3 = m \ln 2$

$\Leftrightarrow \ln 3^n = \ln 2^m$

Donc :

$3^n = 2^m$

* s'est Impossible que pose : $m = n = 0$

Donc : $\boxed{Z \text{ est IRRATIONNEL}}$

Exercice :

Ces Nombre sont ils rationels ?

* $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$
* $y = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

Scanned by CamScanner

25/09/2018

Partie entière d'un nombre réel :

$1,5 \begin{cases} 1 \Rightarrow \text{partie entière} \\ 0,5 \Rightarrow \text{partie décimale} \end{cases}$

* On appelle partie ENTIÈRE, d'un nombre réel, l'UNIQUE nombre entière positif ou négatif p, (donc $p \in \mathbb{Z}$) tels que :

$$p \leqslant x < p+1$$

ou bien : $x-1 < p \leqslant x$

Souvent noté $[x]$ ou $E(x)$

Remarque :

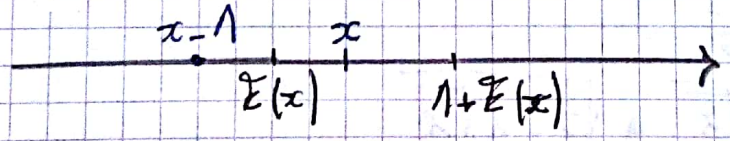
1)- $\forall x \in \mathbb{R} : E(x) \in \mathbb{Z}$

2)- $\forall x \in \mathbb{Z} : E(x) = m$

$$E(\pi) = E(3,14.....)$$
$$= 3$$

On a bien :

$$3 \leqslant \pi < 4$$



$E(\sqrt{2}) = 1$

$E(\sqrt{3}) = 1$

$$E(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = E(1,4.....+1,7.....)$$
$$= E(3,2.....)$$
$$= 3$$

On a :

$$\boxed{E(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \neq E(\sqrt{2}) + E(\sqrt{3})}$$

Scanned by CamScanner

$E(-\pi) = -4$

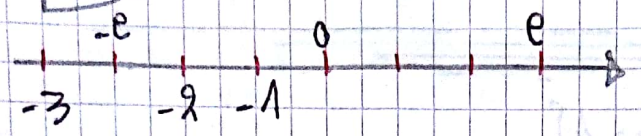
$E(-1{,}5) = E(-2 + \underline{0{,}5}) = -2$

(partie décimale)

$E(-e) = E(-2{,}71\ldots\ldots)$

$= E(-3 + 0{,}2\ldots)$

$= \boxed{-3}$

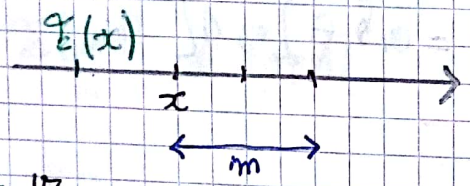


Proposition :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{[x+m] = [x] + m}$$

نستعملوها بزاف



☺ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$[x+y] = [x] + [y] + S$

Si : S peut prendre soit 0

soit 1

* si la partie décimale des deux nombre dépasse 1 on ajoute 1 ou bien si elle ne depasse pas le 1 on ajoute 0

Exemple :

$E(\pi + 13) = E(3{,}14\ldots\ldots + 13)$

$= E(16{,}14\ldots\ldots)$

$= 16$

et : $E(\pi) + 13 = 3 + 13 = 16$

Scanned by CamScanner

On a :

$$E(2x) \neq 2E(x)$$

et plus généralement : $E(nx) \neq nE(x)$

si $n \in \mathbb{Z}$ et : $x \in \mathbb{R}$

Partie décimale d'un nombre réel :

$$d : \mathbb{R} \longmapsto [0;1[$$
$$d \longmapsto x - E(x)$$

Proposition :

$$d(1{,}7) = d(1+0{,}7)$$
$$= 0{,}7 \in [0;1[$$
$$d(-0{,}2) = d(-1+0{,}8) = 0{,}8 \in [0;1[$$

Proposition :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$

$$d(x+m) = d(x)$$

et en particulier

$$d(x+1) = d(x)$$

$\boxed{d : \text{périodique de période } 1}$

1 : la période

Donc :

$$d(x+m) = (x+m) - E(x+m)$$
$$= (x+m) - (E(x)+m)$$
$$= x - E(x)$$
$$= d(x)$$

Exercice :

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$

Scanned by CamScanner

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$$

solution :

posons : $x = [x] + d$

$\Leftrightarrow \quad nx = n[x] + nd$

$$E(nx) = E(n[x] + nd)$$

$$= n[x] + E(nd)$$

$$\boxed{\frac{E(nx)}{n} = [x] + \frac{E(nd)}{n}}$$

Comme : $d \in [0;1[$

Donc : $nd \in [0;n[$

et donc : $E(nd) \in [0;n-1] \cap \mathbb{N}$

Donc : $\frac{E(nd)}{n} \in [0;1[$

Conclusion :

$$\boxed{\left[\frac{E(nx)}{n}\right] = [x]}$$

autre solution :

$nx - 1 < E(nx) \leqslant nx$ et pour : $n > 1$:

$$x - 1 < x - \frac{1}{n} < \frac{E(nx)}{n} \leqslant x$$

$$x - 1 < \frac{E(nx)}{n} \leqslant x$$

Donc : $\boxed{\left[\frac{E(nx)}{n}\right] = [x]}$

Scanned by CamScanner

Valeur Absolue d'un nombre réel :

Définition : On définit la valeur absolue d'un nombre réel x, qu'on note $|x|$, le nombre **POSITIF** tels que :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propriété :

1 - $|x| = 0 \iff x = 0$

2 - $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$|xy| = |x| \cdot |y|$

et plus généralement : $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$|x_1, x_2, \ldots, x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \ldots |x_n|$

$$\boxed{\left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |x_i|}$$

3)- INÉGALITÉ TRIANGULAIRE :

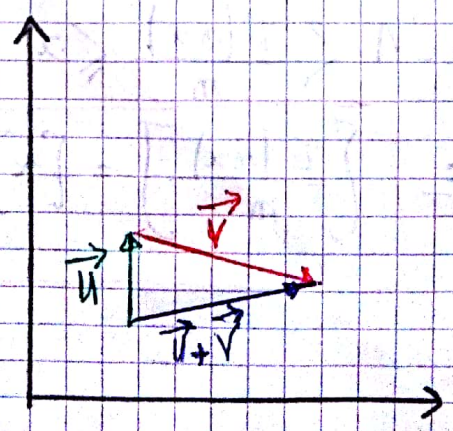
$\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\boxed{|x+y| \leq |x| + |y|}$$

et plus généralement :

$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$



$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

Scanned by CamScanner

Preuve :

$$0 \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$$

$$\Longleftrightarrow \quad |x+y|^2 \leqslant (|x|+|y|)^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x+y)^2 \leqslant (|x|+|y|)^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 + 2xy + y^2 \leqslant |x|^2 + 2|x|.|y| + |y|^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 + 2xy + y^2 \leqslant x^2 + 2|xy| + y^2$$

Donc :

$xy \leqslant |xy|$ vraie $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Il y a égalité ssi $\boxed{xy \geqslant 0}$

2) Forme de l'Inégalité ..... :

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y|$$

Preuve :

On a

$$x = x + y - y$$

$$|x| = |(x+y) + (-y)|$$

$$\leqslant |x+y| + |-y|$$

$$= |x+y| + |y|$$

Donc : $\boxed{|x| - |y| \leqslant |x+y|}$

De même pour : $y = x + y - x$

$$\boxed{|y| - |x| \leqslant |x+y|}$$

Donc : $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $\boxed{\big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y|}$

Scanned by CamScanner

Conclusion :

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\big||x| - |y|\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|}$$

Exercice :

Exprimer : $A = \big||x| - |x-5|\big|$

sans les valeurs absolues.

Solution :

		0		5	
$\lvert x\rvert$	$-x$		x		x
$\lvert x-5\rvert$	$5-x$		$5-x$		$x-5$
A	5		$2x-5$		5

$A = 5$ si $x \in]-\infty ; 0] \cup [5 ; +\infty[$

$$A = |2x-5| \begin{cases} 5-2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ 2x-5 & \text{si } \frac{5}{2} \leq x \leq 5 \end{cases}$$

30/09/2018

Les RADICAUX :

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}^+$

On pose :

$$\boxed{a = \sqrt[n]{b} \iff b = a^n}$$

Propriété :

1) - $b = \sqrt[n]{a^n} \iff b^n = a^n$

d'où $b = a$

- $\forall a \in \mathbb{R}^+ : \sqrt[n]{a^n} = a$

Scanned by CamScanner

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a\,b^{n-2} + b^{n-1})$$

si $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$= \boxed{(a-b)\sum_{p=1}^{n} a^{n-p} b^{p-1}}$$

(2) - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^*$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad x \neq 1$$

Posons : $\boxed{x = \frac{a}{b}}$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

On a :

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\right)^n$$

$$ab = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$$

$$= ab$$

(3) - $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ $m, n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}^+$

On a :

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$$

$= a$ d'où $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$

Comme : $\forall a \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Si on pose :

$$\sqrt[n]{a} = a^p$$

on aura : $a^{pn} = a$

Donc : $p = \frac{1}{n}$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \text{ pour } a \in \mathbb{R}^+}$$

Exemple :

$a \in \mathbb{R}^+$

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \boxed{\sqrt{\sqrt{a}}}$$

Remarque :

(1) - $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$a, b \in \mathbb{R}^+$

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

exemple :

$a = b = 1$

$\sqrt[n]{2} \neq 1 + 1 = 2$: $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

(2) - Très dangereux :

$$\sqrt[3]{x} \neq \sqrt{x^3}$$

$x^{\frac{1}{3}}$ $\quad$ $x^{\frac{3}{2}}$

Scanned by CamScanner

Généralisation :

soit $r = \frac{m}{n}$ où $m, n \in \mathbb{N}^*$:

on pose :

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

Donc : Le Cas général :

Si r_1, r_2 sont 2 rationnels

- $\left(x^{r_1}\right)^{r_2} = x^{r_1 r_2}$
- $(xy)^{r_1} = x^{r_1} y^{r_1}$
- $x^{r_1 + r_2} = x^{r_1} x^{r_2}$

Si : $\boxed{r_1 + r_2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = -r_2}$

* alors on definit x^{r_1} pour les puissances Negatives.

$x^0 = 1 = x^{r_1} x^{-r_1}$ donc :

$$\boxed{x^{-r_1} = \frac{1}{x^{r_1}}}$$

Exercice à faire :

1/- Soient :

$a = \left(\frac{7}{6}\right)^6$ et $b = \left(\frac{7}{6}\right)^7$

Montrer que :

$$a^b = b^a$$

2/- Généraliser

$\forall m \in \mathbb{N}^*$

$a = \left(\frac{m+1}{m}\right)^m$ et $b = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}$; alors

$$\boxed{a^b = b^a}$$

07/10/2016

Intervalles :

Soit $I \subset \mathbb{R}$,

I est appelé un intervalle de $\mathbb{R}$ Si $a, b \in I$, $a \neq b$ et $a < c < b$ alors : $c \in I$

*/- $I = [a;b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

Intervalle fermé, d'extremités a et b

**/- $]a;b[= \{x \in \mathbb{R} ; a < x < b\}$

intervalle ouvert

***/- $[a;b[= \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x < b\}$

$]a;b] = \{x \in \mathbb{R} ; a < x \leq b\}$

Intervalles Semi ouverts

- $\emptyset$ = Intervalle
- $\mathbb{R} =]-\infty;\infty[$ intervalle
- $[0;1] \cup [2;5]$ n'est pas un Intervalle

Densité :

1/- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est DENSE dans $\mathbb{Q}$

C'est à dire, entre deux RATIONNELS distincts, il existe toujours un IRRATIONNEL

2/- $\mathbb{Q}$ est DENSE dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

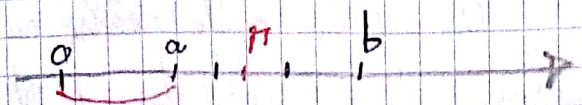
C'est à dire entre 2 irrationnels

Scanned by CamScanner

distincts, il existe toujours un RATIONNEL

Exemple :

(1) $a < b$



$\pi = a + (\pi - a) = a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}$

$\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$ on a :

$$\boxed{a < a + \frac{b-a}{\underbrace{\sqrt{2}}_{<1}} < b}$$

et : $a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ est IRRATIONNEL.

Remarque :

$\forall$ rationnel > 1

On a : $a + \frac{b-a}{\mathbb{C}} \in]a ; b[$

Exemple :

(2) - Soient a, b, 2 IRRATIONNELS distincts.

Soit p, q 2 entiers

$p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$a < \frac{p}{q} < b \Leftrightarrow aq < p < bq$

Si : $bq - aq > 1 \Leftrightarrow \boxed{q(b-a) > 1}$

d'où $\boxed{q > \frac{1}{b-a}}$ on prend :

$$\boxed{q = \left[\frac{1}{b-a}\right] + 1 \in \mathbb{N}^*}$$

Notant : $p = [aq] + 1$

Alors : $p - 1 \leq aq < p$

$aq < p$ donc : $\boxed{a < \frac{p}{q}}$ ... (1)

d'autre part :

$\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a$

d'où : $\frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q} < a + (b-a) = b$

donc : $\boxed{\frac{p}{q} < b}$ ... (2)

Alors :

$$\boxed{a < \frac{p}{q} < b}$$

et : $\frac{p}{q}$ est RATIONNEL.

09/10/2018

BORNE supérieure

Définition : (MAJORANTS, MINORANTS)

Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$.

α est dit MAJORANT (resp. Minorant) de A, si $\forall x \in A : x \leq \alpha$

(resp : $\forall x \in A : \alpha \leq x$)

Exemple :

$A = \{-2 ; 3 ; 5\} \cup [20 ; 110]$

on prend $\alpha \geq 110$

donc : $M = [110 ; +\infty[$

est appelé l'ensemble des majorants de A.

et $N =]-\infty ; -2]$

est l'ensemble des Minorants de A.

Scanned by CamScanner

Définition :

- Le plus petit des majorants de A, s'appelle borne supérieure, et est noté : Sup A
- Le plus Grand minorant est appelé BORNE Inférieure, et est noté : inf A
- Si le Sup A $\in$ A, alors Sup A est appelé le maximum de A, et est noté : max A
- Si le inf A $\in$ A, inf A est appelé MINIMUM de A, et est noté :

$$\inf A = \min A$$

Proposition :

La borne supérieure quand elle existe est UNIQUE.

(De même pour la borne inférieure)

Théorème de la borne supérieure :

- Toute partie non vide est MAJORÉE de $\mathbb{R}$, admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide est MINORÉE de $\mathbb{R}$, admet une borne inférieure.

Chapitre (II) :

Les suites NUMÉRIQUES

Définition :

On appelle suite Réelle ou Complexe, toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

NOTATION :

Une suite est souvent notée $(U_n)_n$ ou tout simplement (U_n)

$$(U_n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)}.$$
$$n \longmapsto U_n$$

Exemple :

(1) - $U_n = n^2 + 1$

$U_0 = 0^2 + 1$
$= 1$

$U_1 = 1^2 + 1$
$= 2$

(2) - $U_n = \dfrac{1}{n-3}$, $n \geq 4$

$I = [4 ; +\infty[\cap \mathbb{N}$
$= \{4, 5, 6, 7 \dots\}$

(3) - $\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n - n \\ U_0 = 1 \end{cases}$

(U_n) est définie par récurrence.

$n=0$ $\quad U_1 = 2U_0 - 0$
$= 2$

$n=1$ $\quad U_2 = 2U_1 - 1$
$= 4 - 1 = 3$

Scanned by CamScanner

$n=2$ $\quad U_3 = 2U_2 - 2$
$= 6 - 2 = 4$

Exemple :

① - U_n est l'UNIQUE racine de l'équation

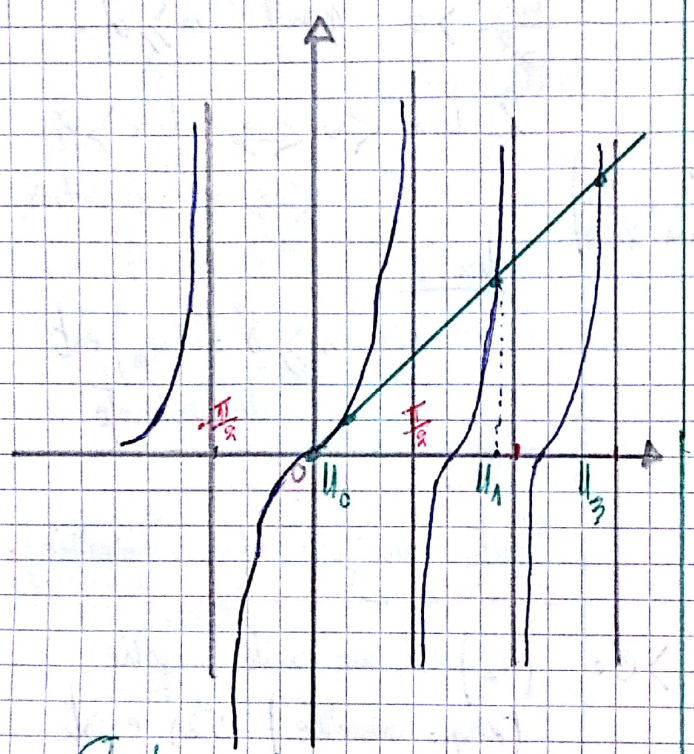
$$\operatorname{tg} x = \tan x = x$$

dans l'intervalle

$$I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi ; \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$$

où $n \in \mathbb{N}$

(U_n) est définie implicitement



Suite MONOTONE :

Définition :

Une suite RÉELLE est dite croissante (Resp : décroissante) si $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \leq U_{n+1}$ (Resp : $U_n \geq U_{n+1}$)

Remarque :

Si $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n < U_{n+1}$ (Resp : $U_n > U_{n+1}$), (U_n) est dite STRICTEMENT croissante (Resp : strictement décroissante)

Exemple :

① - $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$
$n \in \mathbb{N}^*$

$U_1 = 1$

$U_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$U_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* : U_{n+1} - U_n =$
$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) -$
$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$

$= \frac{1}{n+1} > 0$: (U_n) est strictement croissante

② - Soit (U_n) une suite réelle croissante et strictement positive. Alors la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{1}{U_n}$ est décroissante

Preuve :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n}$$
$$= \frac{U_n - U_{n+1}}{U_n U_{n+1}}$$

$(U_n) \nearrow \Rightarrow U_n - U_{n+1} \leq 0$

Scanned by CamScanner

et Comme : $U_n \quad U_{n+1} > 0$;

donc : $U_{n+1} - U_n \leq 0$:

(U_n) décroissante

(2)- $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termes}}$$

$n+n$

$U_1 = \frac{1}{2}$

$U_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$U_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$

$U_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right)$$

$$- \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 :$$

$: (U_n)$ strictement croissante

(3)- $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n = \frac{\ln^2 n}{n}$$

$U_1 = 0$

$U_2 = \frac{\ln^2 2}{2}$, $U_3 = \frac{\ln^2 3}{3}$, ...

Soit $f : [2 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x(\ln^2 x)' - \ln^2 x \,(x)'}{x^2}$$

$$= \frac{x \frac{2\ln x}{x} - \ln^2 x}{x^2}$$

$$= \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$$

$$= (2 - \ln x)\frac{\ln x}{x^2}$$

$\frac{\ln x}{x^2} > 0$ pour $n \geq 2$.

$2 - \ln x < 0 \iff \ln x > 2$

$\iff x > e^2 \approx 7{,}38\ldots$

donc :

pour $n \geq 8$: (U_n) est décroissante

Suite majorée (resp : minorée) :

(U_n) est une suite majorée (resp : minorée) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ ($\exists N \in \mathbb{R}$) tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq M \quad (\forall n \in \mathbb{N} : U_n \geq N).$$

Exemple :

$n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Scanned by CamScanner

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$U_n > 0$: (U_n) est minorée par 0.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)}$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$U_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

(U_n) est majorée par 1

Remarque :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$U_n = 1 - \frac{1}{n+1}$: croissante

Son 1er terme est : $U_1 = \frac{1}{2}$

~~Exemple :~~

~~$n \in \mathbb{N}^*$~~

~~$U_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots +$~~

~~$\frac{1}{n(n+1)}$~~

~~- $\forall n \in \mathbb{N}^*$~~

~~$U_n > 0$: U~~

- $\frac{1}{2}$ est dite la borne inférieure de (U_n)

et comme $\frac{1}{2} = U_1$

c'est le minimum

$\min(U_n) = \frac{1}{2}$

- 1 est le borne supérieure de (U_n)

14/10/2018

Suite Bornée :

(U_n) une suite réelle ou complexe est dite BORNÉE, s'il existe $M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_n| \leq M$$

Exemple :

$U_n = e^{int}$; $n \in \mathbb{N}$

$= \cos(nt) + i \sin(nt)$

Formule d'Euler

$U_0 = 1$

$U_1 = \cos t + i \sin t$

$U_2 = \cos(2t) + i \sin(2t)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad |\cos(nt) + i \sin(nt)| = 1$

(U_n) est une suite bornée

2

$U_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

Suite Alternée :

$U_0 = 0$

$U_1 = \frac{-1}{2}$

$U_2 = \frac{2}{3}$

Scanned by CamScanner

$U_3 = \frac{-3}{4}$

$U_4 = \frac{4}{5}$

$|U_n| = \left| \frac{(-1)^n n}{n+1} \right| = \frac{n}{n+1} < 1$

(U_n) est donc <u>Bornée</u>.

3) * $U_n = \sin n + \cos n$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad |U_n| = |\sin n + \cos n|$

$\leq |\sin n| + |\cos n|$

$\leq 1 + 1$

≤ 2

(U_n) est Bornée par 2.

Remarque :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \sin n + \cos n = \sqrt{2} \sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right)$

d'où $|U_n| \leq \sqrt{2}$

Suite Périodique :

Définition :

(U_n) est Périodique, S'il existe $p \in \mathbb{N}^*$,

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+p} = U_n$

Remarque :

- Le plus petit entier non nul qui vérifie $U_{n+p} = U_n$ est appelé "La Période de (U_n)"

☺ $\forall m \in \mathbb{N}^*$, mp est <u>une</u> période de (U_n)

$U_{n+p} = U_{n+mp}$

Exemple :

1) $U_n = (-1)^n$

$U_{n+1} = (-1)^{n+1} = -(-1)^n = -U_n$

$U_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n (-1)^2 = U_n$

La période de (U_n) est donc $\boxed{p = 2}$

2) $U_n = \sin\left(\frac{3}{5} n\pi\right)$

$U_{n+10} = \sin\left(\frac{3}{5}(n+10)\pi\right)$

$= \sin\left(\frac{3}{5} n\pi + 6\pi\right)$

$= \boxed{\sin\left(\frac{3}{5} n\pi\right)}$

$T = \frac{2\pi}{w}$

$\boxed{\frac{2\pi}{\frac{3}{5}\pi} = \frac{10}{3}}$

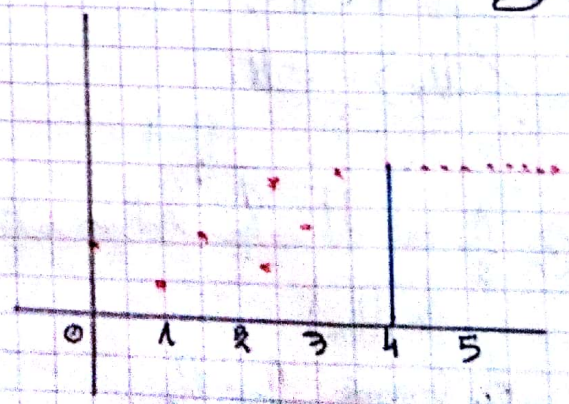
$f(x) = \sin x + \sin x\sqrt{2}$ n'est pas périodique

Suite Stationnaire :

(U_n) est dite stationnaire ou Constante, Si

$U_n = k$: Constante

à partir d'un certain Rang



Scanned by CamScanner

Convergence des Suites Numériques :

Définition :

(U_n) est dite convergente, et a pour limite $l \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |U_n - l| \leq \varepsilon$$

Remarque :

Dans ce cas on écrira :

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} U_n = l}$$

Exemple :

Montrons que $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N : \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \leq \varepsilon$$

On a : $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n - (n+1)}{n+1}\right|$

$$= \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow n + 1 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

On choisit : $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1 + 1$

$$= \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

$$\left|U_{100} - 1\right| \leq \frac{1}{100}$$

$$\left|U_{300} - 1\right| \leq \frac{1}{100}$$

Q-

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \left|\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - 0\right| \leq \varepsilon$$

On a : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \varepsilon$

$$\Longleftrightarrow \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \varepsilon$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Longleftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$$

On prend : $\boxed{N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1}$

Propriétés :

1)- Toute suite convergente est bornée.

2)- Si une suite (U_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors $(|U_n|)$ converge vers $|l| \in \mathbb{R}$.

* La réciproque est fausse.

3)- Toute suite croissante (Resp : décroissante) et majorée (Resp : minorée) est convergente.

Preuve :

Scanned by CamScanner

(1) - (U_n) Convergente et de limite l.

$$||U_n| - |l|| \leq |U_n - l| \leq \varepsilon$$

On a :

$$||U_n| - |l|| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq |U_n| - |l| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |l| - \varepsilon \leq |U_n| \leq |l| + \varepsilon$$

Posons : $M = |l| + \varepsilon$

on a : $\boxed{|U_n| \leq M \ , \ \forall n \in \mathbb{N}}$

Donc : U_n est bornée.

(2) - $||U_n| - |l|| \leq |U_n - l| \leq \varepsilon$

(U_n) Converge vers l.

$\Rightarrow |U_n|$ Converge vers $|l|$.

Réciproquement : $U_n = (-1)^n$

⊙ $|U_n| = 1$ Converge mais (U_n) Diverge.

⊙ (U_n) est Bornée et Diverge.

(3) - Conséquence du Théorème de la borne Supérieure.

Définition :

(1) - $\lim\limits_{n \to \infty} U_n + \infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}$:

$\forall n \geq N \ , \ \boxed{U_n \geq A}$

(2) - $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}$:

$\forall n \geq N \ , \ \boxed{U_n \leq -A}$

Exemple :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^3}{n^2 + n + 1} = +\infty$$

$\forall A > 0 : U_n \geq A \Leftrightarrow$

$$\frac{n^3}{n^2 + n + 1} \geq A$$

$$\frac{n^3}{n^2 + n + 1} \geq \boxed{\frac{n^3}{n^2 + n^2} = \frac{n}{2} \geq A}$$

Donc : $n \geq 2A$

on choisit : $\boxed{n = [2A] + 1}$

Opérations Algébriques sur les suites :

Proposition : On suppose les deux suites (U_n) et (V_n) Convergentes respectivement vers l et l' et $k \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) alors :

1) - $(U_n + V_n)$ Converge et

$$\lim_{n \to \infty} (U_n + V_n) = l + l'$$

2) - $(k U_n)$ Converge et

$$\lim_{n \to \infty} (k U_n) = k l$$

3) - $(U_n V_n)$ Converge et

Scanned by CamScanner

$$\lim_{n\to\infty} (U_n V_n) = \ell\ell'$$

4) - $V_n \neq 0$, $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ Converge et :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{U_n}{V_n}\right) = \frac{\ell}{\ell'} \quad : (\ell' \neq 0)$$

Preuve de ③ :

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} V_n = \ell'$$

Alors : Soit $\varepsilon_1 > 0$:

$$\begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : |U_n - \ell| \leq \varepsilon_1 \\ \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : |V_n - \ell'| \leq \varepsilon_1 \end{cases}$$

on a :

$$|U_n V_n - \ell\ell'| = |U_n V_n - U_n \ell' + U_n \ell' - \ell\ell'|$$

$$= |U_n (V_n - \ell') + \ell' (U_n - \ell)|$$

$$\leq |U_n| \cdot |V_n - \ell'| + |\ell'| \cdot |U_n - \ell|$$

$$\leq M\varepsilon_1 + |\ell'|\varepsilon_1 = (M + |\ell'|)\varepsilon_1 = \varepsilon$$

(U_n) Converge $\Rightarrow$ (U_n) Bornée

Soit : $\varepsilon = (M + |\ell'|)\varepsilon_1 > 0$

et $N = \max\{N_1 ; N_2\}$.

Donc :

$$\forall n \geq N : |U_n V_n - \ell\ell'| \leq \varepsilon$$

Théorème de l'ENCADREMENT :

(ou des gendarmes, ou des policiers)

Soient (U_n), (V_n) et (W_n) trois suites réelles telles que :

$\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq V_n \leq W_n$.

On suppose que (U_n) et (W_n) sont convergentes et ont même limite ℓ

Alors : (V_n) est aussi convergente et a même limite ℓ.

Preuve :

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} W_n = \ell$$

Soit : $\varepsilon_1 > 0$

$$\begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : |U_n - \ell| \leq \varepsilon_1 \\ \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : |W_n - \ell| \leq \varepsilon_1 \end{cases}$$

on a :

$$-\varepsilon_1 \leq U_n - \ell \leq \varepsilon_1$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\ell - \varepsilon_1 \leq U_n \leq \ell + \varepsilon_1}$$

De même pour (W_n)

$$\boxed{\ell - \varepsilon_1 \leq W_n \leq \ell + \varepsilon_1}$$

on a :

$$\ell - \varepsilon_1 \leq U_n \leq V_n \leq W_n \leq \ell + \varepsilon_1$$

d'où : $|V_n - \ell| \leq \varepsilon_1$, $\forall n \geq M$

et $M = \max\{N_1 ; N_2\}$.

Scanned by CamScanner

Conclusion :

(V_n) est convergente

et on a : $\boxed{\lim_{n\to\infty} V_n = \ell}$

Exemple :

Soit : $U_n = \dfrac{[e]+[2e]+[3e]+\dots+[ne]}{n^2}$; $n>0$

- Montrer que (U_n) est convergente et trouver sa limite

Preuve :

$\forall x \in \mathbb{R}$

$x-1 < [x] \leq x$

$e-1 \leq [e] \leq e$

$2e-1 \leq [2e] \leq 2e$

$\vdots$

$ne-1 \leq [ne] \leq ne$

$e(1+2+\dots+n) - n < [e]+[2e]+\dots[ne] \leq e(1+2+\dots+n)$

$\dfrac{n(n+1)}{2}e - n < [e]+[2e]+\dots[ne] \leq \dfrac{n(n+1)}{2}e$

$e\dfrac{n(n+1)}{2n^2} - \dfrac{1}{n} < \dfrac{[e]+[2e]+\dots+[ne]}{n^2} \leq \dfrac{n(n+1)}{2n^2}e$

On a :

$V_n = \dfrac{n(n+1)}{2n^2}e - \dfrac{1}{n} \to \dfrac{e}{2}$

et $W_n = \dfrac{n(n+1)}{2n^2}e \longrightarrow \dfrac{e}{2}$

Conclusion :

(U_n) est aussi convergente, et a pour limite $\dfrac{e}{2}$.

Proposition :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites réelles qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' ; alors :

1)- Si $U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq \ell'$

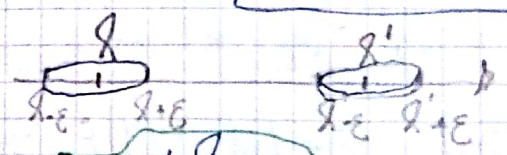
2)- Si $\ell < \ell'$ à partir d'un certain rang, alors $U_n < V_n$

Preuve :

$\ell < \ell'$

$\lim_{n\to\infty} U_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} :$
$\forall n \geq N_1 : \boxed{\ell - \varepsilon \leq U_n \leq \ell + \varepsilon}$

$\lim_{n\to\infty} V_n = \ell' \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N} :$
$\forall n \geq N_2 : \boxed{\ell' - \varepsilon \leq V_n \leq \ell' + \varepsilon}$



$\varepsilon = \dfrac{\ell' - \ell}{4} > 0$

Suites ADJACENTES :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites réelles.

(U_n) et (V_n) sont dites adjacentes,

Scanned by CamScanner

si :

1/- L'une est croissante et l'autre décroissante

2/- $\lim\limits_{n \to \infty} (V_n - U_n) = 0$

Lemme :

Si (U_n) et (V_n) sont adjacentes, (U_n) croissante et (V_n) décroissante, alors :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{U_n \leq V_n}$

Corollaire :

2 Suites Adjacentes sont Convergentes et ont même limite.

Preuve :

$U_0 \leq U_1 \leq U_2 \leq \dots \leq U_{n-1} \leq U_n \leq V_n \leq V_{n-1} \leq \dots \leq V_2 \leq V_1 \leq V_0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{U_0 \leq U_n \leq V_n \leq V_0}$

- (U_n) croissante, majorée par V_0, elle converge
- (V_n) décroissante, minorée par U_0, elle converge
- $\lim\limits_{n \to \infty} (V_n - U_n) = 0$ donc : (U_n) et (V_n) ont même limite.

Exemple :

Pour $n \geq 1$

$$\begin{cases} U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ V_n = U_n + \frac{1}{n!} \end{cases}$$

- $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$

$$\boxed{U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0}$$

(U_n croissante)

- $V_{n+1} - V_n = \left(U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(U_n + \frac{1}{n!}\right)$

$= (U_{n+1} - U_n) + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

$= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{-n+1}{(n+1)!}$

$= -\frac{n-1}{(n+1)!} \leq 0$

$\boxed{\forall n \geq 1}$

(V_n décroissante)

- $V_n - U_n = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} (V_n - U_n) = 0}$$

Conclusion :

1° (U_n) et (V_n) sont Adjacentes donc :

(U_n) et (V_n) sont convergentes et ont même limite

2° Soit ℓ la limite, on a :

$$n=1 \begin{cases} U_1 = 1 + \frac{1}{1!} = 2 \\ V_1 = \left(1 + \frac{1}{1!}\right) + \frac{1}{1!} = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{2 < \ell < 3}$$

$$n=2 \begin{cases} U_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \\ V_2 = \left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2!} = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{2{,}5 < \ell < 3}$$

3- Montrons que cette limite n'est pas rationnelle

$\forall n \geq 1 \quad U_n < \ell < V_n$

Supposons ℓ rationnel et posons :

$$\ell = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}^*$$

$$U_q < \frac{p}{q} < V_q$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} < \frac{p}{q} < 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{q!}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\underbrace{q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{q!}\right)}_{= A \in \mathbb{N}^*} < \underbrace{q! \cdot \frac{p}{q!}}_{\in \mathbb{N}^*} < \underbrace{q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) + 1}_{A+1}$$

Impossible,

Donc ℓ est irrationnel.

Les suites Extraites ou sous suites

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$n \longmapsto \varphi(n)$

où φ est strictement croissante.

* Alors on appelle sous-suite de (U_n) la sous-suite (V_n) où

$$V_n = U_{\varphi(n)}$$

Exemple :

$\varphi(n) = n^2 + n + 1$

$\forall n \in \mathbb{N} : \quad n^2 + n + 1 \in \mathbb{N}$

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = (n+1)^2 + (n+1) + 1 - n^2 - n - 1$$
$$= 2n + 1 + n + 1 - 1 - n - 1$$
$$= 2n + 2 = 2(n+1) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$(U_{\varphi(n)}) = (U_1, U_3, U_7, \dots)$$

$$\boxed{V_n = U_{n^2+n+1}}$$

Théorème :

Si (U_n) est convergente et a pour limite, alors toute sous suite de (U_n) est convergente et a pour limite ℓ.

Preuve :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) \geq 1$

$$\lim U_n = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \quad |U_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Scanned by CamScanner

$\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) \geq n \geq N$

et donc $|U_{\varphi_n} - l| \leq \varepsilon$

Corollaire :

Si (U_n) admet deux sous-suites qui convergent vers deux limites différentes, alors (U_n) est divergente.

Exemple :

$$U_n = (-1)^n$$

$$(U_{2n}) = (U_0, U_2, U_4, U_6, \dots)$$

$$U_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

$$(U_{2n+1}) = (U_1, U_3, U_5, \dots)$$

$$= (-1, -1, -1, \dots)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$U_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \xrightarrow[n \to \infty]{} -1$$

Comme $1 \neq -1$

(U_n) est donc divergente

Proposition (A Retenir)

Si les sous suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) convergent vers la même limite l, alors (U_n) est aussi convergente et a pour limite l.

Preuve :

$$\lim U_{2n} = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \quad |U_{2n} - l| \leq \varepsilon$$

$$\lim U_{2n+1} = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 \quad |U_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$$

Pour $N \geq \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$

$\forall n \geq N : |U_n - l| \leq \varepsilon$

Exo : On donne :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} U_{2n} = A \\ \lim\limits_{n \to \infty} U_{2n+1} = B \\ \lim\limits_{n \to \infty} U_{3n} = C \end{cases}$$

* Montrer que (U_n) est convergente.

Soit :

① - $U_{6n} = U_{2(3n)} = U_{2p}$

$= U_{3(2n)} = U_{3q}$

$(U_{6n}) \subset (U_{2n})$

$(U_{6n}) \subset (U_{3n})$

donc :

$$\lim_{n \to \infty} 6n = \lim_{n \to \infty} U_{2p} = \lim_{n \to \infty} {}_{3q} = A = C$$

② - $U_{6n+3} = U_{3(2n+1)} = U_{3n} =$

$= U_{2(3n+1)+1} = U_{2k+1}$

D'où $\lim\limits_{n \to \infty} U_{6n+3} = \lim\limits_{n \to \infty} U_{3n} = C$

$= \lim\limits_{n \to \infty} U_{2k+1} = B$ $\Big\}$ $B = C$

Scanned by CamScanner

Conclusion:

$$A = B = C$$

Donc: $\begin{cases} U_{2n} = A \\ U_{2n+1} = A \end{cases}$

Alors: U_n est convergente et a pour limite "A".

Exercice

On donne:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} U_{3n+2} = A \\ \lim\limits_{n \to \infty} U_{5n+3} = B \\ \lim\limits_{n \to \infty} U_{7n+4} = C \end{cases}$$

- Montrer que $A = B = C$
- U_n est elle convergente? justifier votre réponse.

Solution:

$$3N + 2 = 5M + 3$$

$$\Leftrightarrow 3N - 5M = 1$$

$$3.2 - 5.1 = 1$$

$$3(N-2) - 5(M-1) = 0$$

$$3(N-2) = 5(M-1)$$

$$N - 2 = 5m \qquad \begin{cases} N = 5m + 2 \\ M = 3m + 1 \end{cases}$$

$$M - 1 = 3m \Leftrightarrow$$

$$U_{3N+2} = U_{3(5m+2)+2} = U_{15m+8} \xrightarrow[n \to \infty]{} A$$

$$U_{5M+3} = U_{5(3m+1)+3} = U_{15m+8} \xrightarrow[n \to \infty]{} B$$

Donc:

$$A = B$$

- De même pour montrer que $(A = C$ ou bien $B = C)$

Donc:

$$A = B = C$$

Remarque:

Les sous suite $3 \times 5 \times 7 = 105$ (U_{105m}) n'est aucun élément commun avec les (U_{3m+2}, U_{5m+3}) et (U_{7m+4})

- Si elle converge,

$$\boxed{(U_n) \text{ diverge}}$$

Scanned by CamScanner

30/10/2018

Exo :

Montrer que :

$U_n = \sin n$ et $V_n = \cos n$

sont divergentes

Sol :

$$U_{n+1} + U_{n-1} = \sin(n+1) + \sin(n-1)$$
$$= (\sin n \cdot \cos 1 + \cos n \cdot \sin 1) + (\sin n \cdot \cos 1 - \cos n \sin 1)$$
$$= (2\cos 1)\sin n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} + U_{n-1} = (2\cos 1)\, U_n}$$

Supposons (U_n) convergente, et notons $\ell_1 = \lim\limits_{n \to \infty} U_n$

on a donc :

$$\lim (U_{n+1} + U_{n-1}) = (2\cos 1) \lim U_n$$
$$2\ell_1 = (2\cos 1)\,\ell_1$$
$$\Leftrightarrow (1 - \cos 1)\,\ell_1 = 0$$

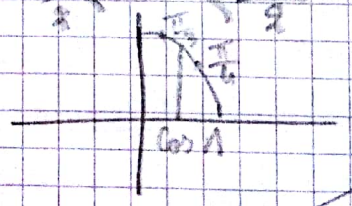
d'où : $\boxed{\ell_1 = 0}$

$\cos 1 \neq 1$

et

$\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} < \cos 1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$



De même manière pour V_n en remplace sin par cos, ℓ_1 par ℓ_2, U_n par V_n

On a donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} (\sin n) = 0 \\ \lim\limits_{n \to \infty} (\cos n) = 0 \end{cases}$$

Impossible, car $\forall n \in \mathbb{N}$ $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$ et par passage à la limite $0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$

$V_{2n} = \cos(2n)$
$= 2\cos^2 n - 1$
$\Rightarrow 2\cos^2 0 - 1 \neq 0$

Scanned by CamScanner

* Suites de CAUCHY :

Définition :

La suite numérique (U_n), où $U_n \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), est dite de Cauchy, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq N_0 \ |U_m - U_n| \leq \varepsilon$$

Théorème : (de Cauchy)

Une suite réelle est de Cauchy si et seulement si, elle est convergente

Exemple 1 : (Exo 11)

$n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = \dfrac{\sin^3(1!)}{1.2} + \dfrac{\sin^3(2!)}{2.3} + \dots + \dfrac{\sin^3(n!)}{n(n+1)}$

Soit : $m > n$

$$|U_m - U_n| = \left| \left(\frac{\sin^3(1!)}{1.2} + \dots + \frac{\sin^3(n!)}{n(n+1)} + \frac{\sin^3(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\sin^3(m!)}{m(m+1)} \right) - \left(\frac{\sin^3(1!)}{1.2} + \dots + \frac{\sin^3(n!)}{n(n+1)} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{\sin^3(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\sin^3(m!)}{m(m+1)} \right| \leq \frac{|\sin^3(n+1)!|}{(n+1)(n+2)} + \frac{|\sin^3(n+2)!|}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{|\sin^3(m!)|}{m(m+1)}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{m(m+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

d'où $n \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$, Prenons $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

Scanned by CamScanner

Donc pour $m > n \geq N$:

$$\boxed{|U_m - U_n| \leq \varepsilon}$$

(U_n) de Cauchy, donc convergente

Exemple 2 : (Exo 12)

$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$$U_{2n} - U_n = \left(1 + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termes}} = n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$

(U_n) n'est pas de Cauchy, car pour $\varepsilon > \frac{1}{2}$: impossible de trouver N

(U_n) est Divergente

Remarque :

(U_n) positive, croissante et divergente

Donc : $\boxed{\lim_{n \to \infty} U_n = +\infty}$

On a :

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32}\right)}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{64}\right)}_{> \frac{1}{2}}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{65} + \dots + \frac{1}{128}\right)}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{129} + \dots + \frac{1}{256}\right)}_{> \frac{1}{2}} > 5$$

$$\boxed{U_{2n} - U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}$$

Scanned by CamScanner

Exo B:

(U_n) Convergente $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ $\forall p \in \mathbb{N}^* : \lim\limits_{n \to \infty} (U_{n+p} - U_n) = 0$

(1) (U_n) Convergente $\Longrightarrow$ (U_{n+p}) Converge vers la même limite,

donc: $\forall p \in \mathbb{N}^* \lim\limits_{n \to \infty} (U_{n+p} - U_n) = 0$

Réciproquement:

$n \in \mathbb{N}^* : U_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$

et $U_{n+p} - U_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p}}_{p \text{ terme}}$

et $\lim\limits_{n \to \infty} (U_{n+p} - U_n) = p \cdot 0 = 0$

Autre Exemple: $\boxed{V_n = \ln n}$

La Réciproque est Fausse

* Suites Récurrentes (linéaires d'ordre 2)

Définition:

(*) $U_{n+2} = a U_{n+1} + b U_n$, a et b réels données

Proposition:

(1) (x_n) solution de (*)

alors $\forall k \in \mathbb{R}$ $(k x_n)$ est Aussi solution de (*)

Scanned by CamScanner

(2) - Si (x_n) et (y_n) deux suites indépendantes (c'est à dire $\frac{x_n}{y_n}$ non constant) solutions de (*) alors :

$(x_n + y_n)$ est aussi solution de (*)

(3) - Il existe toujours deux suite (x_n) et (y_n) indépendantes, solutions de (*) et on a :

$$U_n = \lambda x_n + \mu y_n =$$

Solution générale de (*), $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Déterminons (x_n) et (y_n) :

(-) Posons pour $r \neq 0$, $x_n = r^n$

$$x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n \quad (*)$$

$$r^{n+2} = a r^{n+1} + b r^n$$

$$r^2 = a r + b$$

$$\Leftrightarrow r^2 - a r - b = 0$$

$$\Delta = (-a)^2 - 4(-b)$$
$$= a^2 + 4b$$

$\Delta > 0$:

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \\ r_2 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \end{cases}$$

(r_1^n) et (r_2^n) deux suites indépendantes solutions de (*)

et $\frac{r_1^n}{r_2^n} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$ non constant car $r_1 \neq r_2$

Scanned by CamScanner

Conclusion :

$\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$U_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$$

est la solution générale de (*)

Exemple :

$$\boxed{U_{n+2} = U_{n+1} + U_n}$$

$U_0 = 1$, $U_1 = 1$

Suite de Fibonacci

* Posons $x_n = r^n$

$$r^{n+2} = r^{n+1} + r^n$$

$$\Leftrightarrow r^2 = r + 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r^2 - r - 1 = 0}$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

D'où $U_n = \lambda_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$n=0$ $\quad U_0 = 1 = \lambda_1 \cdot 1^0 + \lambda_2 \cdot 1^0$

$$\boxed{\lambda_1 + \lambda_2 = 1} \quad \ldots (1)$$

$n=1$ $\quad U_1 = 1 = \lambda_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \lambda_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$

$$\Leftrightarrow \boxed{2 = (1+\sqrt{5})\lambda_1 + (1-\sqrt{5})\lambda_2} \quad \ldots (2)$$

$(1)(1-\sqrt{5}) \rightarrow 1-\sqrt{5} = (1-\sqrt{5})\lambda_1 + (1-\sqrt{5})\lambda_2$

$$1+\sqrt{5} = (2\sqrt{5})\lambda_1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Scanned by CamScanner

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_2 = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

$$\boxed{U_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

(NB) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_n \in \mathbb{N}^*$

2ème Cas : $\Delta = 0$

alors r solution double,

et donc :

$$\begin{cases} x_n = r^n \\ y_n = n r^n \end{cases}$$

3ème Cas : $\Delta < 0$

$$\begin{cases} r_1 = \alpha + i\beta \\ r_2 = \alpha - i\beta \end{cases} \quad (\beta \neq 0)$$

$$r_1 = \alpha + i\beta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$r_2 = \alpha - i\beta = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$U_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$$
$$= \lambda_1 \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) + \lambda_2 \rho^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)$$
$$= \rho^n(\lambda_1 + \lambda_2)\cos(n\theta) + i\rho^n(\lambda_1 - \lambda_2)\sin(n\theta)$$

$\lambda_2 = \lambda_1$

$$U_n = 2\lambda_1\rho^n\cos(n\theta)$$

Scanned by CamScanner

D'où $x_n = \rho^n \cos(n\theta)$ est 1 solutions.

$$\begin{cases} \delta_1 + \delta_2 = 0 \\ \delta_1 - \delta_2 = -i \end{cases} \iff \boxed{U_n = \rho^n \sin(n\theta)}$$

Finalement :

$$U_n = A\rho^n \cos(n\theta) + B\rho^n \sin(n\theta)$$

$$\boxed{U_n = \left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right)\rho^n}$$

Exemple :

$$\begin{cases} U_0 = 0, \ U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 2U_{n+1} - 5U_n \end{cases}$$

1° $r^2 = 2r - 5$

$\iff r^2 - 2r + 5 = 0$

$= (r-1)^2 + 4$

$$\begin{cases} r_1 = 1 + 2i \\ r_2 = 1 - 2i \end{cases}$$

$|1 + 2i| = \sqrt{5}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$U_n = (\sqrt{5})^n \left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right)$

$\underline{n=0}$ $U_0 = 0 = 1(A + 0) \iff A = 0$

Scanned by CamScanner

$$U_n = \sqrt{5}^{\,n}\left(B\sin(n\theta)\right)$$

$$U_1 = 1 = \sqrt{5}\left(B\sin(\theta)\right)$$

$$\Longleftrightarrow B = \frac{1}{\sqrt{5}\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{5}\,\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}$$

Finalement :

$$U_n = \left(\sqrt{5}\right)^n \frac{\sin(n\theta)}{2} = \frac{1}{2}\,5^{\frac{n}{2}}\sin(n\theta) \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Chapitre III Les fonctions Réelles

04/11/2018

Définition :

f est une fonction à variable réelle et à valeurs réelles si :

$\forall x \in D \subset \mathbb{R}$ alors $f(x) \in \mathbb{R}$

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

D est appelé domaine de définition

Exemple :

1). $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$

$D_f = [0 ; \infty[$

2). $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{\ln(x)}$

$D_g = [1 ; \infty[$

3). $h(x) = \dfrac{\sin x}{1+|x|}$

$D_h = \mathbb{R}$

4). $h(x) = \dfrac{\cos x}{|x| - x} = \dfrac{\cos x}{-2x}$ Si $x < 0$

$D_h =]-\infty ; 0[$

Scanned by CamScanner

Définition :

1°)- $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

f est dite MAJORÉE sur D (Resp : Minorée)

Si $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D : |f(x)| \leq M$

(Resp : $\exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in D : |f(x)| \geq N$)

2°)- f est dite BORNÉE

Si $\exists A > 0, \forall x \in D : |f(x)| \leq A$

Exemple :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \sin x + \cos x$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$-2 \leq f(x) \leq 2$

et donc : $|f(x)| \leq 2$

Remarque :

$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

et donc :

$|f(x)| \leq \sqrt{2}$

Proposition :

Toute fonction MAJORÉE et Minorée sur D est BORNÉE.

Preuve :

f : Majorée $\Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D : f(x) \leq M$.

f : Minorée $\Longleftrightarrow \exists N \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D : f(x) \geq N$.

Donc :

$N \leq f(x) \leq M$

$\Longleftrightarrow -M \leq -f(x) \leq -N$

Soit $A = \max\{|M|, |N|\}$

et donc : $\boxed{|f(x)| \leq A}$

Scanned by CamScanner

Monotonie :

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

f est dite croissante sur D (Resp : décroissante) si

$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$

(Resp : $a \leq b \Longrightarrow f(a) \geq f(b)$)

Exemple :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$

Soit $a \leq b$

On a : $f(a) - f(b) = a^2 - b^2$

$= \underbrace{(a-b)}_{\leq 0}(a+b)$

f croissante $\Longrightarrow a+b \geq 0$

donc il faut que $a, b \in [0 ; +\infty[$

De même f : décroissante

on trouve $a, b \in]-\infty ; 0]$

Remarque :

Sur $[-1, 1]$ par exemple, la fonction n'est ni croissante ni décroissante.

La PARITÉ

Définition :

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

f est dite PAIRE (Resp : Impaire)

Si $\forall x \in D : f(-x) = f(x)$ (Resp : $f(-x) = -f(x)$)

زوجي فردي

Remarque :

Scanned by CamScanner

D est symétrique, c'est à dire Si $x \in D$ alors $(-x) \in D$

Exemple :

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f(-x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = f(x)$$

f est donc PAIRE

Remarque :

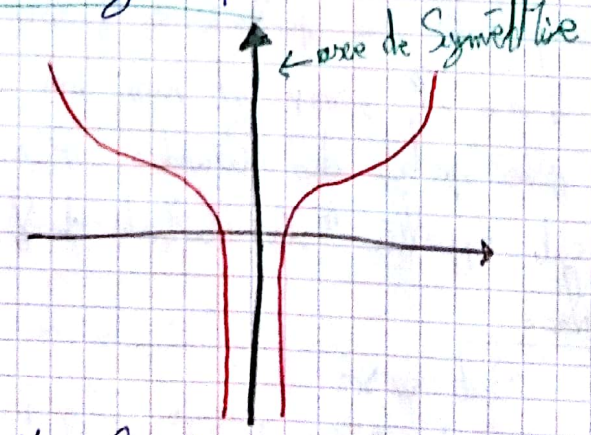
La seule fonction qui soit PAIRE et Impaire à la fois est la fonction Nulle.

Car : $f(-x) = f(x) = -f(x)$

et donc : $-f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

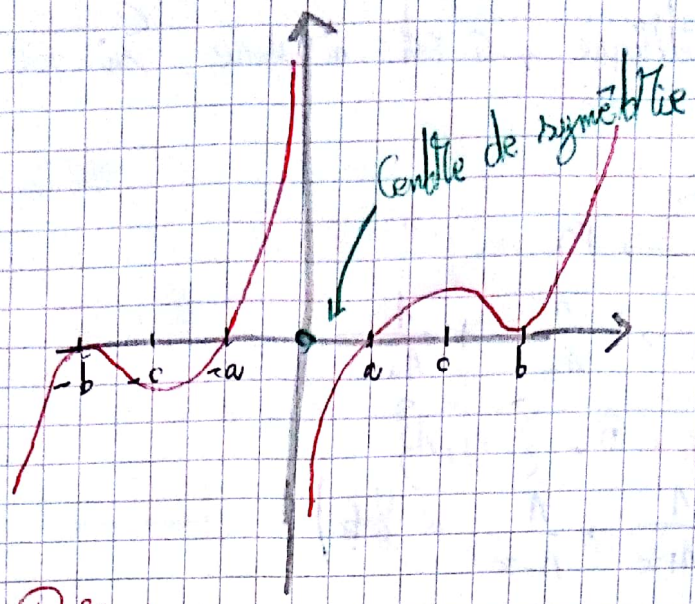
$\Leftrightarrow f = 0$

1°- Le graphe d'une fonction PAIRE admet l'axe des ordonnées (ou des y) comme axe de Symétrie



2°- Le Graphe d'une fonction Impaire a l'origine du Repère comme Centre de symétrie

Scanned by CamScanner



Fonction Périodiques :

Définition : $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

f est dite périodique, de période $P > 0$,

Si $\forall x \in I$ et $x + p \in I$

donc : $f(x+p) = f(x)$

Remarque :

- $x \in I \Rightarrow x + p \in I \Rightarrow (x+p) + p = x + 2p \in I$

  et donc $\forall m \in \mathbb{Z}$, $x + mp \in I$

  I n'est pas bornée

- Si p est une période de f alors

  $\forall m \in \mathbb{Z}$, mp est aussi une période

- Les plus petite des périodes positives est appellée « La période de f »

Exemple :

Soit $w > 0$

- $\sin(wx)$ et $\cos(wx)$: La période est $p = \frac{2\pi}{w}$

  $\sin w(x+p) = \sin w\left(x + \frac{2\pi}{w}\right) = \sin(wx + 2\pi) = \sin(wx)$

- La période de $\tan(wx)$ est $p = \frac{\pi}{w}$

- $f(x) = d(wx) = wx - [wx]$: La période est $p = \frac{1}{w}$

Scanned by CamScanner

Car $f\left(x+\frac{1}{w}\right) = d\left(w\left(x+\frac{1}{w}\right)\right) = d(wx+1) = d(wx)$

Proposition :

La somme de deux fonctions de même période de P, a aussi P comme une période.

Exemple :

$\tan x$ a pour période π

et $\sin x$ a pour période 2π,

Comme 2π est aussi une période de $\tan x$,

donc $\tan x + \sin x$ a pour période 2π.

* Remarque :

Si f a pour période P_1

et g a pour période P_2

S'il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$m P_1 = n P_2,$$

alors dans ce cas là, $f+g$ est périodique

et $m P_1$ est une période.

$m P_1$ n'est pas nécessairement la plus petite.

Exemples :

1.) $\begin{cases} f(x) = \sin(8x) \longrightarrow P_1 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \\ g(x) = \tan(14x) \longrightarrow P_2 = \frac{\pi}{14} \end{cases}$

cherchons $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$m\frac{\pi}{4} = n\frac{\pi}{14} \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

$m = 2$ et $n = 7$

$$2\frac{\pi}{4} = 7\frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{2}$$

d'où $\frac{\pi}{2}$ est une période de $f+g$

Scanned by CamScanner

2)- $\begin{cases} f(x) = \sin(5\pi x) \longrightarrow P_1 = \frac{2}{5} \\ g(x) = \frac{5}{2}x - \left[\frac{2}{2}x\right] \longrightarrow P_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$

$f(x) + g(x)$ a pour période $\boxed{P = \frac{2}{5}}$

3)- $\begin{cases} f(x) = \sin x + \cos 7x \longrightarrow P_1 = 2\pi \\ g(x) = 1 - \sin x \longrightarrow P_2 = 2\pi \end{cases}$

$f(x) + g(x) = 1 + \cos(7x) \longrightarrow \boxed{P = \frac{2\pi}{7}}$

Proposition :

Si f a pour période P_1
et g a pour période P_2

Si $\frac{P_1}{P_2} \notin \mathbb{Q}$,

alors $f+g$ n'a pas de période.

Exemple :

$f(x) = \sin(\pi x) - \sin x$
n'a pas de période.

$\begin{cases} \sin(\pi x) \longrightarrow P_1 = 2 \\ \sin x \longrightarrow P_2 = 2\pi \end{cases}$

$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\pi}{2} = \pi \notin \mathbb{Q}$

Graphe de $f(x) = x - [x]$

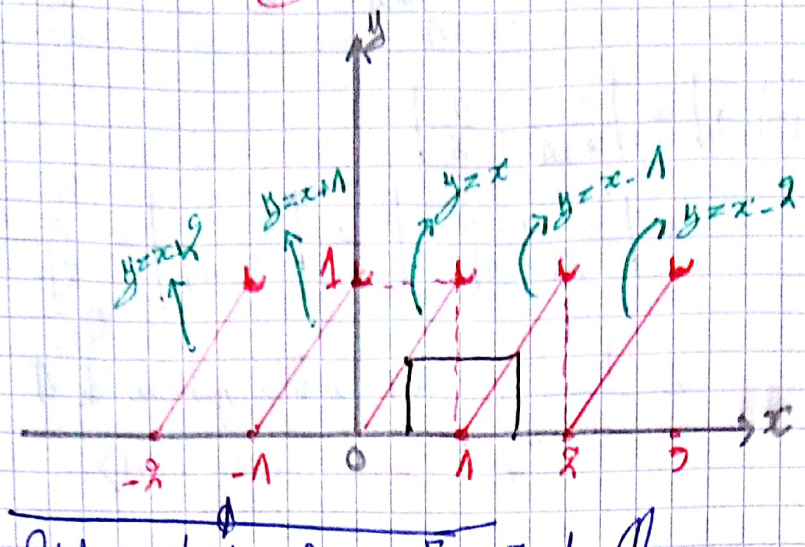
$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x+1) = f(x)$

on trace le graphe sur $[0,1[$,

$x \in [0,1[\Rightarrow [x] = 0$

Scanned by CamScanner

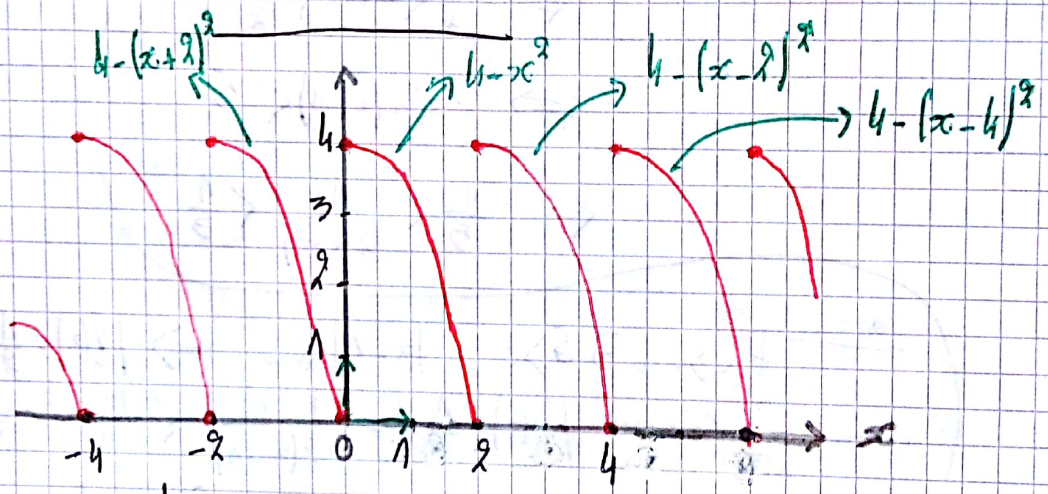
$f(x) = x - 0 = \boxed{x}$



$f(x)$ vaut $4-x^2$ sur $[0,2[$ et elle est de Période $\boxed{P=2}$

$\forall x \in \mathbb{R} : f(x+2) = f(x)$

$\forall x \in [0,2[\; : \; f(x) = 4 - x^2$



Limites :

Définitions : Limite en un point :

Soit f définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I

On dit que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I : |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

on écrit alors : $\boxed{\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = \ell}$

Scanned by CamScanner

1°) Montrer que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$

$$|f(x) - l| = \left|\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2}\right|$$

$$= \left|\frac{2x - x - 1}{2(x+1)}\right| = \left|\frac{x-1}{2(x+1)}\right| = \frac{|x-1|}{2|x+1|}$$

$$= \frac{|x-1|}{2(x+1)}$$ car x très proche de 1 donc $x+1>0$

x au voisinage de 1, donc on peut supposer

بجوار

$$|x-1| < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} < x+1 < \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3 < 2(x+1) < 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{2(x+1)} < \frac{1}{3}$$

on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x-1| \leq \delta \Rightarrow \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

Comme $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \frac{|x-1|}{2(x+1)} \leq \frac{|x-1|}{3} \leq \frac{\delta}{3} = \varepsilon$

on prend alors $\boxed{\delta = 3\varepsilon}$

$$\boxed{\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, 3\varepsilon\right\}}$$

Limite Infinie :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A$$

Scanned by CamScanner

Exemple :

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 : |x-1| \leq \delta \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \geq A$$

On a :

$$\frac{1}{(x-1)^2} \geq A \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq \frac{1}{A}$$

$$\Leftrightarrow |x-1| \leq \sqrt{\frac{1}{A}}$$

on prend :

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{1}{A}}}$$

Limite Infinie :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\forall A > 0, \exists B > 0 : x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\forall A > 0, \exists B > 0 : x \geq B \Rightarrow \frac{x^2+1}{x+1} \geq A$$

On a : $\frac{x^2+1}{x+1} \geq \frac{x^2}{x+1} \geq \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \geq \frac{B}{2} = A$

on prend : $\boxed{B = 2A}$

Proposition :

La limite d'une fonction, quand elle existe, est unique.

Preuve : Pareille que celle sur les suites.

Limite à Droite et à Gauche :

Soit $I =]a ; x_0[\cup]x_0 ; b[$.

On appelle limite à droite de x_0, (resp à gauche)
la limite de f restreinte
à l'intervalle $]x_0 ; b[$ (resp : $]a ; x_0[$)

<u>Le nombre :</u>

$$\lim_{x \mapsto x_0^+} f_{|]x_0, b[}(x) \quad \left(\text{resp } \lim_{x \mapsto x_0^-} f_{|]a, x_0[}(x) \right)$$

qu'on note aussi $\lim\limits_{x \overset{>}{\mapsto} x_0} f(x)$ $\left(\text{resp : } \lim\limits_{x \overset{<}{\mapsto} x_0} f(x) \right)$

<u>Exemple :</u>

$f(x) = E(x)$: $x \in]-1 ; 1[$

Limite en 0 ?

$$f(x) = E(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \in [0, 1[\\ -1 & \text{Si } x \in]-1, 0[\end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-} (-1) = -1 \end{cases}$$

* Les limites existe, mais sont différente, donc pas de limite de $f(x)$ en 0.

Scanned by CamScanner

Propriétés :

* Soit f et g deux fonctions respectivement sur I et J :

$$f(I) \subset J$$

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{y \to l_1} g(y) = l_2$

alors :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = l_2}$$

* Soit f et g deux fonctions définies sur I

- Si $\forall x \in I : f \leq g$ alors :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)}$$

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors :

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

Théorème de l'encadrement :

(Gendarmes | Policiers)

Soit f, h, et g trois fonction définies sur I et en suppose que $\forall x \in I : f \leq g \leq h$ et

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

alors : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

Remarque :

Théorème valable si x_0 est fini ou bien l est infini.

Démonstration :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \iff$

$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0 : |x - x_0| \leq \varepsilon_1 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon_1$

$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l \iff$

$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0 : |x - x_0| \leq \varepsilon_1 \Rightarrow |h(x) - l| \leq \varepsilon_2$

donc :

$$l - \varepsilon_1 \leq f(x) \leq l + \varepsilon_1$$
$$l - \varepsilon_2 \leq h(x) \leq l + \varepsilon_2$$

d'où

$$l - \varepsilon_1 \leq g(x) \leq l + \varepsilon_2$$

$$-\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \leq -\varepsilon_1 \leq g(x) - l \leq \varepsilon_2 \leq \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$$

$$\begin{cases} |x - x_0| \leq \varepsilon_1 \\ |x - x_0| \leq \varepsilon_2 \end{cases}$$

exemple :

$|x - x_0| \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ sinon $\delta_2 \leq \delta_1$

Posons alors $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

et $\delta = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| \leq \varepsilon \Rightarrow |g(x) - l| \leq \varepsilon$

donc :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} g(x) = l}$$

Exemple :

① - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{2} E\left[\frac{3}{x}\right]$

$$l = \frac{1}{2} \lim x E\left[\frac{3}{x}\right]$$

* $\forall z \in \mathbb{R} : z - 1 < E(z) \leq z$

donc : $\frac{3}{x} - 1 < E\left(\frac{3}{x}\right) \leq \frac{3}{x}$

$x > 0$:

$$3 - x < x E\left(\frac{3}{x}\right) \leq 3$$

Scanned by CamScanner

Comme : $\lim\limits_{x \to 0} 3 - x = 3$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} x\, E\left(\frac{3}{x}\right) = 3}$$

De même pour $x < 0$, on trouve :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} x\, E\left(\frac{3}{x}\right) = 3}$$

Finalement :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{2} E\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{3}{2}$$

autre exemple :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} ?$$

On a :

$\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

$-1 \leq -\sin x \leq 1$

Donc :

$$\begin{cases} 0 < x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1 \\ 0 < x - 1 \leq x - \sin x \leq x + 1 \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x + \sin x}{x - \sin x} \leq \frac{x+1}{x-1}$$

$x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1 < 0$ ماذا تفعل ؟!

$x - 1 \leq x - \sin x \leq x + 1 < 0$

Donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = 1$$

autre exemple :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \left(E(x) + E(2x) + \dots + E(nx) \right)$$ où $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$px - 1 < E(px) \leq px$$

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$2x - 1 < E(2x) \leq 2x$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$nx - 1 < E(nx) \leq nx$$

Par sommation :

$$(x-1) + (2x-1) + \dots + (nx-1) < E(x) + E(2x) + \dots E(nx) \leq x + 2x + \dots + nx$$

$$x(1 + 2 + \dots + n) - n < E(x) + \dots + E(nx) \leq x(1 + 2 + \dots + n)$$

$$x \frac{n(n+1)}{2} - n < E(x) + \dots + E(nx) \leq x \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\underbrace{\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{x}}_{\to \frac{n(n+1)}{2}} < E(x) + \dots + E(nx) \leq \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\to \frac{n(n+1)}{2}}$$

$-\infty$

Finalement :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \left(E(x) + E(2x) + \dots + E(nx) \right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Scanned by CamScanner

La Continuité :

Déf :

Continuité en un point

f : définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on dit que f est continue en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Remarque :

* Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ alors :

f est continue en x_0 si $\boxed{f(x_0) = l}$

* on notera $\vartheta(x_0)$ un voisinage de x_0, par exemple un intervalle de type $]x_0 - \alpha[$; $]x_0 + \alpha[$ où $\alpha > 0$, α est très petit.

exemple :

Montrons que pour $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$.

solution :

1er Cas :

Continuité en $x_0 = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 : |x - 0| \leq \varepsilon \Rightarrow |x^n - 0^n| \leq \varepsilon$$

donc :

$$|x| \leq \delta \Rightarrow |x^n| \leq \varepsilon$$

$|x^n| = |x|^n \leq \delta^n$, on prend : $\boxed{\varepsilon = \delta^n}$

d'où : $\boxed{\delta = \sqrt[n]{\varepsilon}}$

2ème Cas :

Continuité en $x_0 \neq 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |x^n - x_0^n| \leq \varepsilon.$$

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + x^{n-3} x_0^2 + \dots + x^p x_0^{n-1-p} + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)$$

x est en voisinage de x_0.

Supposons que $|x - x_0| \leq \frac{|x_0|}{2}$ $(x_0 \neq 0)$

alors :

$$\big||x| - |x_0|\big| \leq |x - x_0| \leq \frac{|x_0|}{2}$$

$$\big||x| - |x_0|\big| \leq \frac{|x_0|}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{|x_0|}{2} \leq |x| - |x_0| \leq \frac{|x_0|}{2}$$

$$|x_0| - \frac{|x_0|}{2} \leq |x| \leq |x_0| + \frac{|x_0|}{2}$$

$$\frac{|x_0|}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2}|x_0|$$

on a :

$$|x^n - x_0^n| = |x - x_0| \cdot \left|x^{n-1} + \dots + x^p x_0^{n-1-p} + \dots + x_0^{n-1}\right|$$

$$\leq |x - x_0| \sum_{p=0}^{n-1} \left|x^p x_0^{n-1-p}\right|$$

$$= |x - x_0| \sum_{p=0}^{n-1} |x^p| \cdot \left|x_0^{n-1-p}\right|$$

$$= |x - x_0| \sum_{p=0}^{n-1} |x|^p \, |x_0|^{n-1-p}$$

$$\leq |x - x_0| \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}|x_0|\right)^p |x_0|^{n-1-p}$$

$$= |x - x_0| \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^p |x_0|^{n-1}$$

$$= |x - x_0| \cdot |x_0|^{n-1} \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^p$$

on a : $\sum\limits_{p=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^p = 1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)$$

Scanned by CamScanner

Finalement :

$$|x^n - x_0^n| \leq 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)|x_0|^{n-1}\delta \leq \varepsilon$$

d'où :

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)|x_0|^{n-1}}$$

Exemple :

La continuité de $\boxed{f(x) = \sin x}$:

1)- x au voisinage de 0 :

$$(\sin x) \leq x$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x| \leq \delta \Rightarrow |\sin x| \leq \varepsilon$

Comme : $|\sin x| \leq |x| \leq \delta \leq \varepsilon$

on prend :

$$\boxed{\delta \leq \varepsilon}$$

2)- x au voisinage d'x_0 :

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|$$

$$\leq 2\left|\sin\frac{(x-x_0)}{2}\right|$$

$$\leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|$$

$$\leq \delta = \varepsilon$$

on prend :

$$\boxed{\delta = \varepsilon}$$

$\Rightarrow f$ est continue au x_0.

Exemple 2 :

$f(x) = \sqrt{x}$; $x \geq 0$

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \sqrt{|x - x_0|}$$

(Voir exo 10 TD01)

$$\leq \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

donc : on prend :

$$\boxed{\delta = \varepsilon^2}$$

Fonction Uniformément Continues :

Déf :

f est dite uniformément continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall x_1, x_2 \in I : |x_1 - x_2| \leq \delta$

$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$

Exemple :

$\sin x$ et $\sqrt{x}$ sont uniformément continues respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+$.

$\Rightarrow f(x) = x^2$; $I = [0; +\infty[$:

Prenons :

$$x_1 = n^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

et $x_2 = n^2 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(n^2 + \frac{1}{n}\right)^2 - n^4 = \boxed{2n + \frac{1}{n^2}}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \\ \text{et} \\ f(x_2) - f(x_1) = 2n + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ n'est pas uniformément continue sur $[0; +\infty[$.

Théorème (Th) :

Toute fonction continue sur $[a; b]$ est uniformément continue.

Prolongement par continuité :

Soit : $f(x) = x \ln|x|$; $x \in \mathbb{R}^*$

Scanned by CamScanner

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Posons:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ c'est le prolongement par continuité de f.

Soit:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \; ; \; x \neq 0$$

- $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{1/n\pi}\right) = \sin(n\pi) = 0$$

- $t_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$f(t_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \neq 0$$

Impossible de prolonger f en 0.

Théorème:

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

f continue en $x_0 \iff$ Pour toute suite réelle (U_n) qui converge vers x_0 : $f(U_n)$ converge vers $f(x_0)$.

Théorème des valeurs intermédiaires:

Soit $f : [a ; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

alors: $\forall y$ réelle comprise entre $f(a)$ et $f(b)$; $\exists\, c \in [a ; b]$ tels que: $\boxed{y = f(c)}$

Corollaire:

f: continue sur $[a ; b]$ et telle que $f(a) \times f(b) < 0$ alors:

$\exists\, c \in [a ; b]$ tel que: $f(c) = 0$

Soit $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ pour $a = U_0$ et $b = V_0$

Soit $\frac{U_0 + V_0}{2}$ si $f\left(\frac{U_0 + V_0}{2}\right) > 0$

posons:

$$V_1 = \frac{U_0 + V_0}{2}$$

soit $\frac{U_0 + V_1}{2}$ si $f\left(\frac{U_0 + V_1}{2}\right) < 0$

on pose alors:

$$U_1 = \frac{U_0 + V_1}{2}$$

on construit ainsi 2 suites: (U_n) croissante et (V_n) décroissante.

$V_0 - U_0 = b - a$

$V_n - U_n = \frac{b-a}{4}$ et alors:

$$V_n - U_n = \frac{b-a}{4^n}$$

$$V_n - U_n = \frac{b-a}{4^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

(U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes.

Soit $l = \lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} V_n$ Comme: $U_n \in \mathbb{N}$

$f(V_n) > 0$ et $f(U_n) < 0$ et

$U_n < l < V_n$

Scanned by CamScanner

f : Continue $\longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(U_n) \leq f(\alpha) \leq \lim\limits_{n\to\infty} f(V_n)$

Donc : $0 < f(\alpha) < 0 \iff \boxed{f(\alpha) = 0}$

Tout polynome de degré impair a au moins une racine réelle.

Preuve :

$$f(x) = a_{2n+1} x^{2n+1} + a_{2n} x^{2n} + \dots + a_1 x + a_0$$

$a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 0, 1, \dots, 2n+1$ et $a_{2n+1} \neq 0$

Par exemple : si $a_{2n+1} > 0$, alors

* $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(a_{2n+1} x^{2n+1}\right) = \boxed{+\infty}$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = a_{2n+1} \lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n+1} = \boxed{-\infty}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty \iff \forall A > 0 ; \exists x_0 > 0 : \forall x \geq x_0 : P(x) \geq A$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \iff \forall B > 0 ; \exists x_1 < 0 : \forall x \leq x_1 : P(x) \leq -B$

donc :

$P(x_0) \cdot P(x_1) < 0$: il existe alors $x_2 \in [x_1 ; x_0]$ tels que :

$$\boxed{P(x_2) = 0}$$

* Si le degrés de P est pair, alors on ne peut pas savoir.

$P_1(x) = x^2 + 1 \Rightarrow$ pas de racines réelles

$P_2(x) = x^2 - 1 \Rightarrow$ deux racines réelles

Théorème :

f continue sur $[a ; b]$, alors : f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure ; c.à.d :

$$f([a ; b]) = [N , M]$$

où $\begin{cases} N = \min f(x) & ; x \in [a ; b] \\ M = \max f(x) & ; x \in [a ; b] \end{cases}$

Théorème de la bijection :

$f : I \to \mathbb{R}$, si f est continue et strictement monotone sur I, alors :

(I) - f établit une bijective de l'intervalle I dans l'intervalle $J = f(I)$

(II) - La fonction réciproque : $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J, elle a le même sens de variation que celui de f.

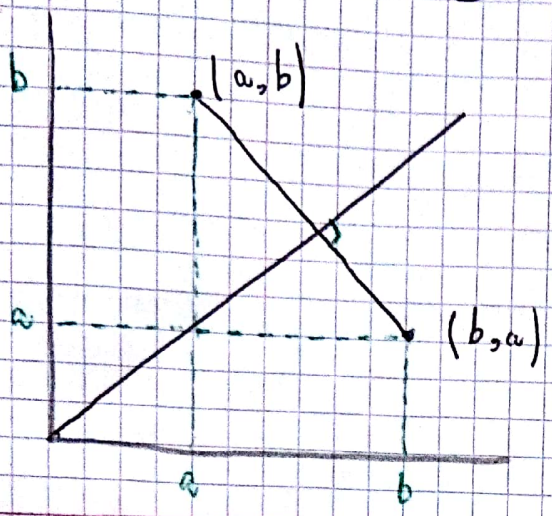
Remarque :

$(a ; b) \in \Gamma_1 \iff (b ; a) \in \Gamma_2$

$\begin{cases} (\Gamma_1) \text{ graphe de } f \\ (\Gamma_2) \text{ graphe de } f^{-1} \end{cases}$

Scanned by CamScanner

Les points sont symétrique par rapport à la droite $y = a$



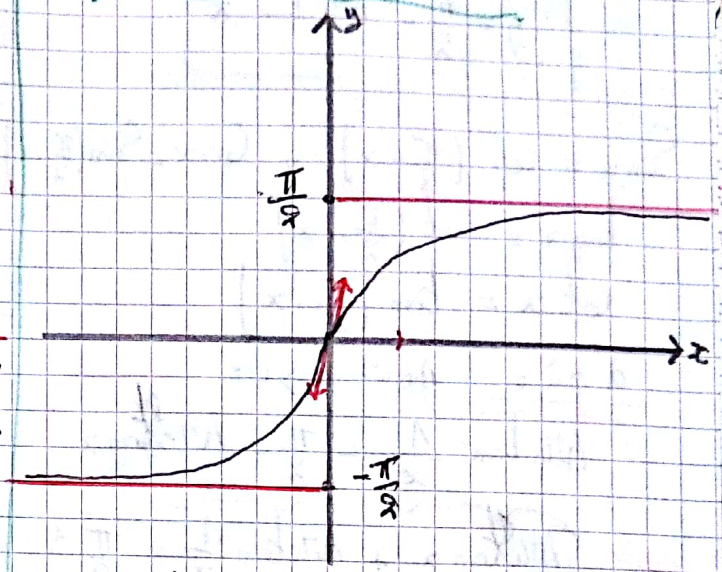
02/12/2018

Scanned by CamScanner

$y = \text{Arctan } x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Arc tan : impair, continue (bijective), strictement croissante

Graphe de l'Arc tan :



Arc tan $0 = 0$

Arc tan $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

$\boxed{\text{Arc tan } 1 = \frac{\pi}{4}}$ important

Arc tan $\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$\lim_{x \to \pm\infty} \text{Arc tan } x = \frac{\pi}{2}$

Propriétés :

$\forall x \in \mathbb{R} : \tan(\text{Arc tan } x) = x$

Preuve :

Soit $y = \tan(\text{Arc tan } x) \in \mathbb{R}$

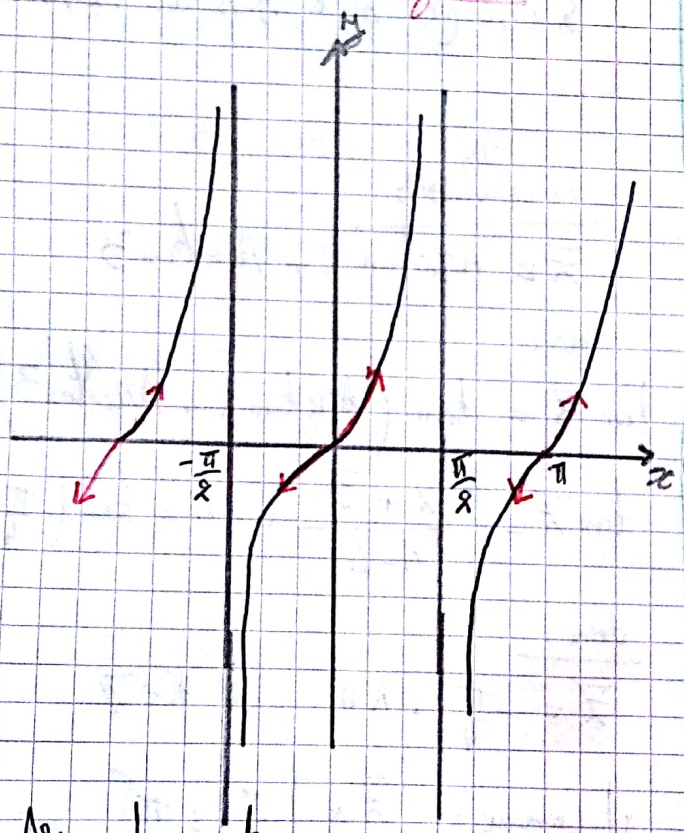
$\text{Arc tan } x = \text{Arc tan } y \Rightarrow y = x$

Exercice :

Que vaut $y = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)$

3 - Arc tangente : 04/12/2018

Graphe de tangente :



Arc tangente :

$\mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$x \longrightarrow \text{Arc tan } x$

on a pour $x > 0$

$\tan y = \frac{1}{x}$

$x = \frac{1}{\tan y} = \cot y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

$\text{Arctan } x = \frac{\pi}{2} - y$ d'où :

$$\boxed{y = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } x}$$

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

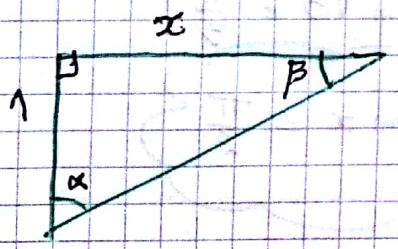
d'où : pour $x > 0$:

$$\boxed{\text{Arctan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } x}$$

$\Longleftrightarrow$ $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

Finalement :

$$\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



$\tan \alpha = x \Rightarrow \alpha = \text{Arctan } x$

$\tan \beta = \frac{1}{x} \Rightarrow \beta = \text{Arctan } \frac{1}{x}$

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ donc :

$$\boxed{\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}}$$

pour : $x > 0$

Ex :

Résoudre l'équ suivante :

$\text{Arctan } 2 + \text{Arctan } 3 = \text{Arctan } z$ (1)

Sol :

on a :

$$\boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}}$$

$\text{Arctan } 2 > \text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{4}$

$\text{Arctan } 3 > \text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{4}$

alors :

$\text{Arctan } 2 + \text{Arctan } 3 > \frac{\pi}{2}$

Comme : $\text{Arctan } z \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

donc :

l'équ (1) n'a pas de sols.

Exercice :

simplifier :

$Z = \text{Arctan } 2 + \text{Arctan } 3$

Sol :

$\tan Z = \tan(\text{Arctan } 2 + \text{Arctan } 3)$

$\tan Z = \frac{2+3}{1-6} = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

donc :

$Z = -\frac{\pi}{4} + K\pi$ où $K \in \mathbb{Z}$

et Comme : $Z \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$

donc : seulement $K = 1$ convient

Finalement :

$$\boxed{Z = \text{Arctan } 2 + \text{Arctan } 3 = \frac{3\pi}{4}}$$

Scanned by CamScanner

Exercice :

Que vaut :

$y = \text{Arc sin}(\cos x) = f(x)$

$b \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Sol :

f : fonction paire, continue et périodique, de période $p = 2\pi$.

Etudions f dans :

$I = [0; \pi]$

$\sin y = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$y = \frac{\pi}{2} - x$

- $x \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow : y \geq 0$

  $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi] \Rightarrow : y \leq 0$

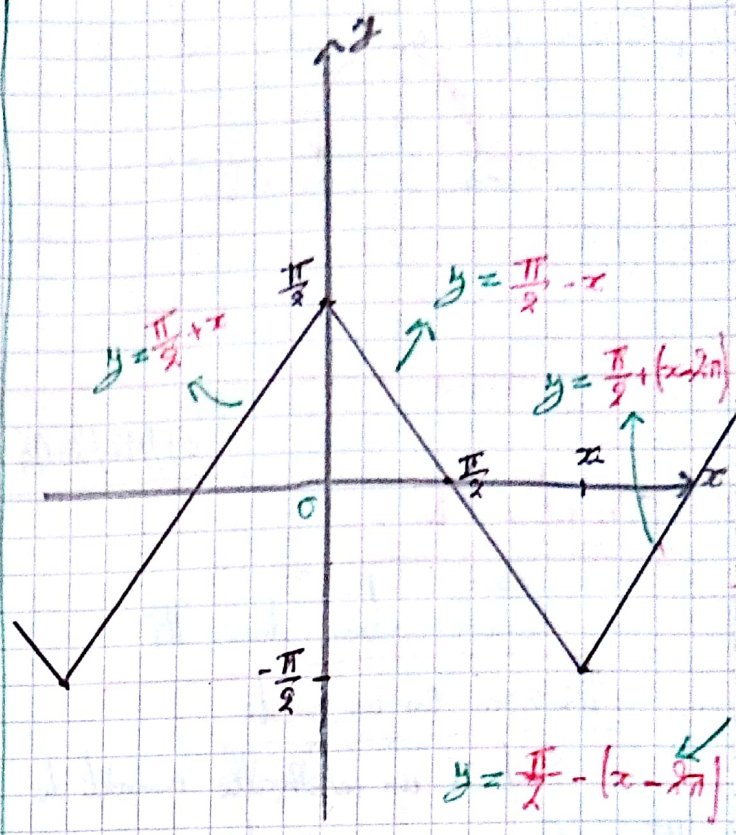
- $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$: $y = \frac{\pi}{2} - x$

$\Leftrightarrow x + y = \frac{\pi}{2}$

- $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$: $y \leq 0$

  donc : $y + x = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{y = \frac{\pi}{2} - x, \ \forall x \in [0; \pi]}$$



Exo :

Simplifier :

$y = \sin(\text{Arccos } x)$

Sol :

$x \in [-1; 1]$ et

$\text{Arccos } x \in [0; \pi]$

donc :

$\sin(\text{Arccos } x) \in [0; 1]$

$y : [-1; 1] \longrightarrow [0; 1]$

$x \longmapsto \sin(\text{Arccos } x)$

$y^2 = \sin^2(\text{Arc cos } x)$

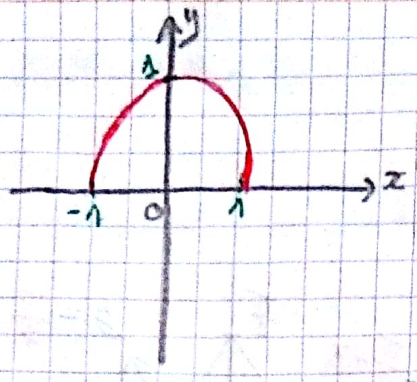
$= 1 - \cos^2(\text{Arc cos } x)$

$= 1 - (\cos(\text{Arc cos } x))^2$

$y^2 = 1 - x^2$

$\boxed{y = \sqrt{1 - x^2}}$ Car : $y \in [0; 1]$

Scanned by CamScanner



09/12/2018

Chapitre IV :

Dérivation dans $\mathbb{R}$

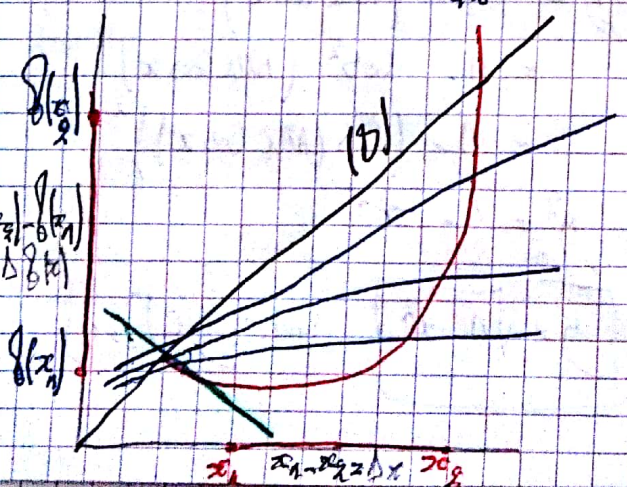
Dérivée en un point :

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

f est dit dérivable en x_0, si le TAUX de Croissance $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0.

On note cette limite $f'(x_0)$

- Si f est dérivable pour tout $x \in I$, on dit que f est dérivable sur I, et sa dérivée sera notée : $f'(x)$ ou bien $\frac{df(x)}{dx}$



- $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ Pente de (D)
- $f'(x_0)$ est appelé "Nombre dérivé de f en x_0"
- Si f admet l comme nombre dérivé en x_0, alors l'équation de la tangente en x_0 est :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$$

$$\boxed{f(x) = (x-x_0)l + f(x_0)}$$

Exemples :

1. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0}$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x^{n-p}x_0^{p-1} + \dots + x_0^{n-1} \quad \text{pour : } x \neq x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{p=1}^{n} x^{n-p} x_0^{p-1} = n x_0^{n-1}$$

donc : $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\boxed{f'(x) = n x^{n-1}}$$

2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad \text{si } x_0 > 0$$

- f est dérivable pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ et on a :

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Scanned by CamScanner

3°) $f(x) = x^2 E(x)$

dérivée en 0.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0;1[\\ -x^2 & \text{si } x \in [-1;0[\end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

1)- $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$= \frac{0 - 0}{x - 0} = \boxed{0}$

2)- $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0}$

$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \to 0^-} -x = \boxed{0}$

d'où :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0}$$

f est dérivable en 0 et on a :

$$\boxed{f'(0) = 0}$$

4°) - $f(x) = \sin x$; $I = \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$$

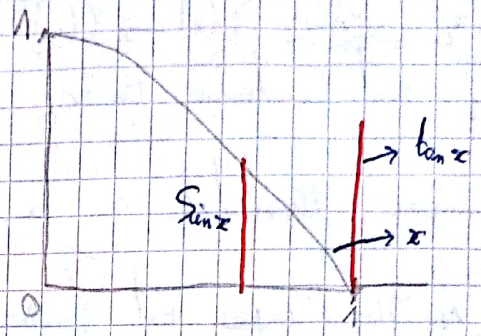
$$= \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0}$$

$$= \left(\cos \frac{x + x_0}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}$$

$$\xrightarrow[x \to x_0]{} (\cos x_0) \times 1 = \cos x_0$$

* $\sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$



$\sin x \leq x \leq \tan x$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

d'où : $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1}$

Proposition :

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

f dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ est continue en x_0.

La réciproque est fausse

Preuve :

f : dérivable en x_0, $\exists \ell \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

ou encore :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists m > 0 : |x - x_0| < m \Rightarrow$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \ell \right| \leq \varepsilon$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \ell-\varepsilon \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \ell+\varepsilon$$

① - Si $x-x_0>0$:

$$(x-x_0)(\ell-\varepsilon) \leq f(x)-f(x_0) \leq (\ell+\varepsilon)(x-x_0)$$
$$= (x-x_0)\ell + (x-x_0)\varepsilon$$

$\lim\limits_{x \to x_0} T(x)$

$x \longrightarrow x_0$ alors : $f(x) \longrightarrow f(x_0)$

$\Rightarrow$ f est Continue en x_0

② - même résultat si $x-x_0<0$

$\Rightarrow$ La réciproque est fausse

Exemple :

$f(x) = |x|$

$$\begin{cases} f : \text{Continue en } 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim \frac{x}{x} = \boxed{1} \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \boxed{-1} \end{cases}$$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ n'a pas de limite en 0,

f n'est pas dérivable.

Remarque :

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I ouvert)

f : dérivable en $x_0 \Leftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{R}$ et

$T : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto T(x)$

$$f(x) = f(x_0) + \ell(x-x_0) + T(x) \times (x-x_0)$$

où : $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} T(x) = 0}$

ℓ est appelé nombre dérivé de f en x_0.

Proposition :

$f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables,

alors : $f+g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables aussi et on a :

$$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Linéarité de la dérivation

$$(\lambda f(x))' = \lambda f'(x) \; ; \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \times g(x) - g'(x) \times f(x)}{(g(x))^2} \; ; \; g(x) \neq 0$$

Preuve :

③ $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)(f(x)-f(x_0)) + f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} g(x) \times \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0) \times \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \boxed{g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}$$

Proposition :

Dérivée de la composée.

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0.

$g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f(I) \subset J$, une fonction dérivable en $y_0 = f(x_0)$,

alors :

Scanned by CamScanner

$g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0, et on a :

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(f(x_0))}$$

Preuve :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \boxed{g'(f(x_0)) \times f'(x_0)}$$

Exemple :

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$(\cos x)' = y' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \boxed{-\sin x}$$

Dérivées successives :

$$u \to u' \to u'' \to (u'')' \to (u''')' = u^{(4)}$$

Donc : pour $n \in \mathbb{N}$

$$\left\{ u^{(n)} = \left(u^{(n-1)}\right)' \; ; \; u^{(0)} = u \; ; \; u^{(1)} = u' \; \ldots \; u^{(3)} = u''' \right\}$$

Exemple :

u, v admettant des dérivées à l'ordre 2.

$(uv) = 1 \times uv$ Pascal mini!

$(uv)' = 1 \times u'v + 1 \times uv'$

$(uv)'' = 1 \times u''v + u'v' + u'v' + uv''$

$= 1\, u''v + 2\, u'v' + 1\, uv''$

Formule de Leibniz :

Si u et v ont des dérivées jusqu'à l'ordre n, alors : $u.v$ est dérivable à l'ordre n et on a :

$$\boxed{(u.v)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, u^{(n-p)} v^{(p)}}$$

Preuve :

A faire par récurrences, en utilisant la formule de pascal.

Exemple :

Calculer la dérivée à l'ordre n de : $f(x) = (x^3 + x + 1)e^x$

Solution :

$\forall\, p \in \mathbb{N}$, $(e^x)^{(p)} = e^x$

et pour $p > 3$: $(x^3 + x + 1)^{(p)} = 0$

$$\boxed{\left((x^3 + x + 1)e^x\right)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (x^3 + x + 1)^{(n-p)} \times e^x}$$

donc :

$$\left(e^x(x^3 + x + 1)\right)^{(n)} = C_n^0 (x^3 + x + 1)^{(0)} (e^x)^{(n)} + C_n^1 (x^3 + x + 1)^{(1)} (e^x)^{(n-1)} + C_n^2 (x^3 + x + 1)^{(2)} (e^x)^{(n-2)} + C_n^3 (x^3 + x + 1)^{(3)} (e^x)^{(n-3)} + 0 + \cdots + 0.$$

$$= (x^3 + x + 1)e^x + n(3x^2 + 1)e^x + \frac{n(n-1)}{2}(6x)e^x + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}(6)e^x$$

$$= \boxed{\left(x^3 + 3nx^2 + (3n^2 - 3n + 1)x + (n^3 - 3n^2 + 3n + 1)\right)e^x}$$

Scanned by CamScanner

Exercice A faire :

- $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$;
- $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

• montrer par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$(x^n \ln x)^{(n)} = n!\left(\ln x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$(x^{n+1}\ln x)^{(n+1)} = \left(x \times (x^n \ln x)\right)^{(n+1)} ?$$

Proposition :

Dérivée de la réciproque

$f : I \longrightarrow J$ une bijection, f dérivable sur I,

et $f^{-1} : J \longrightarrow I$ la bijection réciproque, si f' ne s'annule pas sur I alors, f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Merci !

$f : I \longrightarrow J$

$f^{-1} : J \longrightarrow I$

$\forall x \in I \ : \ f^{-1} \circ f(x) = x = id_I(x)$

$\forall x \in J \ : \ f \circ f^{-1}(x) = x = id_J(x)$ identité

Merci !

Dérivées des fonction réciproque trigonométriques :

• $f : [-1;1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$x \longmapsto \text{Arcsin}(x)$

$y = \text{Arcsin}\, x \iff \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow (x)' = (\sin y)' \iff 1 = y' \cos y$

d'où

$y' = \frac{1}{\cos y}$ ssi : $y \neq \pm\frac{\pi}{2}$

$= \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x \in]-1;1[$:

$$\boxed{(\text{Arcsin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$(-\text{Arcsin}\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(ii) - Fonction Arccos x :

$[-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$

$\boxed{y = \text{Arccos}\, x}$

$\forall x \in [-1;1]$:

$\text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}$

$\iff \text{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, x$

d'où :

$\forall x \in]-1;1[$:

$$\boxed{(\text{Arccos}\, x)' = \frac{-1}{+\sqrt{1-x^2}}}$$

$0 \longrightarrow \pi$

$\sin x \geq 0$

(iii) - Fonction Arctg x :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$x \longmapsto \text{Arctg}\, x$

Scanned by CamScanner

On a donc :

$$x = \operatorname{tg} y$$

$$\Leftrightarrow (x)' = (\operatorname{tg} y)'$$

$$\Leftrightarrow 1 = y'(1+\tan^2 y)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(\operatorname{Arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

Remarque :

Le nombre dérivé est rationnelle, alors son integrale est soit rationnelle

ln

Arc . . . . .

On a :

- $\operatorname{Argtanh} :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto y = \operatorname{Argth} x$$

donc :

$$x = \operatorname{th} y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

Posons :

$$t = e^{2y} \quad : x(1+t) = t-1$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1+x}{1-x} = e^{2y}$$

Comme $-1 < x < 1$ donc :

$$\frac{1+x}{1-x} > 0$$

d'où :

$$2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$= \boxed{\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

Calculons la dérivée :

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-x+1+x}{1-x^2}\right)$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{1-x^2} = (\operatorname{Argth})'}$$

Autre méthode :

- $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$y = \operatorname{Argsh} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sh} y$$

par dérivation :

$$1 = y' \operatorname{ch} y$$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

Exercice :

Donnez le domaine de definition de $y = f(x) = \operatorname{Argth}\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)$, puis exprimer f avec les logarithmes :

Scanned by CamScanner

Solution:

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 , \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 1\}$

$x + \frac{1}{x} \geq 2 \iff x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$

$\iff \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} \geq 0$

$\iff \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

D'où:

$$\boxed{D_f =]0;+\infty[}$$

- $\forall t \geq 1 : \operatorname{Argch} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2-1}\right)$

donc:

$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)^2 - 1}\right)$

$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{2x} + \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{4x^2} - 1}\right)$

$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{2x} + \sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{4x^2}}\right)$

$= \ln\left(\frac{x^2+1}{2x} + \frac{x^2-1}{2x}\right)$

$= \ln\left(x^2+1 + (x^2-1)\right) - \ln(2x)$

1er Cas:

$0 < x \leq 1$

$f(x) = \ln\left(x^2+1+1-x^2\right) - \ln(2x)$

$f(x) = \ln 2 - \ln 2x = \boxed{-\ln x}$

2ème Cas:

$x \geq 1$

$f(x) = \ln\left(x^2+1+x^2-1\right) - \ln(2x)$

$f(x) = \ln(2x^2) - \ln(2x)$

$f(x) = \boxed{\ln x}$

Extremum local et Théorème de Rolle:

Déf:

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On dit que: $x_0 \in I$ est un point critique de f si: $f'(x_0) = 0$

Exemple:

- $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ pour $x > 0$,

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

Donc: $x_0 = 1$ est un point critique

- $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \cos x$

Donc: $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ où: $k \in \mathbb{Z}$ sont des points critiques, et j'en a une infinité.

- $f(x) = e^x$,

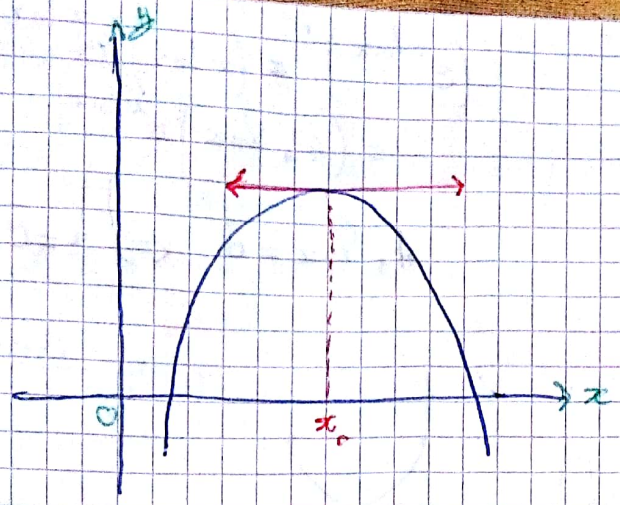
$f'(x) = e^x > 0$

pas de points critiques

Déposition:

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, f dérivable sur I si: x_0 est un extremum local, alors: $f'(x_0) = 0$

Scanned by CamScanner



En x_0 on a un Extremum (par exemple un maximum)

$\forall x \in]\alpha ; x_0[$, $f(x) < f(x_0)$ $(\alpha > 0)$

$\forall x \in]x_0 ; \beta[$, $f(x_0) < f(x)$ $(\beta > 0)$

$x \in]\alpha ; x_0[$, alors : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$

et $x \in]x_0 ; \beta[$, alors : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$

f : dérivable au voisinage de x_0 ,

d'où : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$

et : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0$

d'où : $\boxed{f'(x_0) = 0}$

Théorème de Rolle :

(1) $f : [a ; b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \neq b$ Continue , et dérivable sur $]a ; b[$, si : $f(a) = f(b)$

Alors : $\exists c \in]a ; b[$ tel que :

$$\boxed{f'(c) = 0}$$

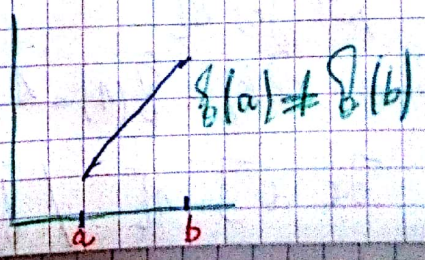
Preuve :

$I = [a ; b]$ et f Continue, donc f atteint son maximum et son Minimum.

Posons : $M = \max f(x)$, $x \in [a ; b]$ et $m = \min f(x)$

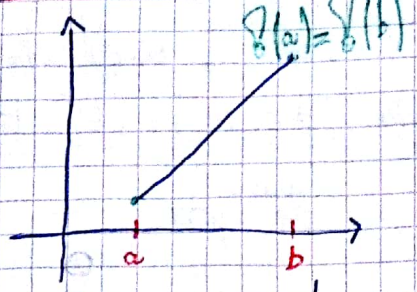
Alors : $f([a ; b]) = [m ; M]$

- $M = m$: alors f est Constante et donc : $f'(x) = 0$ tous les point de $[a ; b]$ vérifient : $f'(c) = 0$
- Si $M \neq m$: on suppose que le Maximum (ou le Minimum) est atteint dans $]a ; b[$: Comme f est dérivable , donc on a un point Critique.

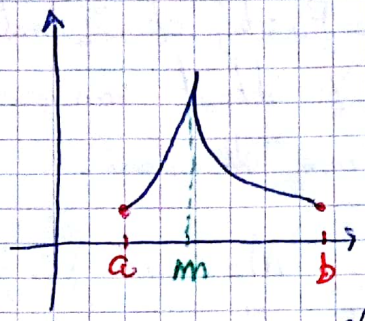


Scanned by CamScanner

Remarque :



f : non continue sur $[a;b]$



f : non dérivable sur $]a;b[$

Cas particuliers :

(1) - $f(x) = x^x$; $x \in]0;1]$

$f(1) = 1$ et :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = \boxed{1}$$

posons : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0;1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

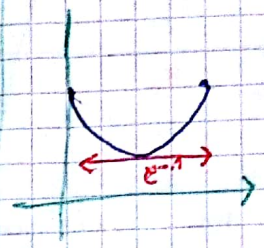
$\tilde{f}$ continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$

Comme : $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 1$ donc :

$\exists c \in]0;1[\ / \ \tilde{f}'(c) = f'(c) = 0$

$$(e^{x \ln x})' = (x \ln x)' e^{x \ln x} = \boxed{(1 + \ln x) e^{x \ln x}}$$

$1 + \ln x = 0 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e} \in]0;1[$



(2) - $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $I = [1;+\infty[$

$\begin{cases} f(1) = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$ $\exists c \in]1;+\infty[: f'(c) = 0$

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ donc :

$\boxed{c = 2}$

Exercice :

Soit P un polynôme ayant exactement n racines distincts, démontrer que le polynôme P' a exactement $(n-1)$ racines distincts qui séparent celles du polynôme P.

Solution :

posons :

$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$

où : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ et a constante

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} p(x_1)=0 \\ p(x_2)=0 \end{cases} \Rightarrow \exists\, \alpha_1 \in \,]x_1, x_2[\, \,/\, p'(\alpha_1)=0$$

$$\begin{cases} p(x_2)=0 \\ p(x_3)=0 \end{cases} \Rightarrow \exists\, \alpha_2 \in \,]x_2, x_3[\, \,/\, p'(\alpha_2)=0$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} p(x_{n-1})=0 \\ p(x_n)=0 \end{cases} \Rightarrow \exists\, \alpha_{n-1} \in \,]x_{n-1}, x_n[\, \,/\, p'(x_{n-1})=0$$

<u>Finalement on a :</u>

$$x_1 < \alpha_1 < x_2 < \alpha_2 < \dots < x_{n-1} < \alpha_{n-1} < x_n$$

* $(n-1)$ racines de p' qui séparent les x_n.

Scanned by CamScanner

Théorème des Accroissements Finis

Théorème :

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \neq b$

on suppose que f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$,

alors : $\exists\, c \in]a;b[$ tel que :

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)}$$

Preuve :

posons : $g(x) = f(x) - k(x-a)$

on a :

$$g(a) = f(a) - a$$
$$= f(a)$$

et

$$g(b) = f(b) - k(b-a)$$

$g(a) = g(b) \Leftrightarrow f(b) - k(b-a) = f(a)$

d'où :

$$\boxed{k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Alors :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

g : continue sur $[a;b]$

et dérivable sur $]a;b[$;

Comme $g(a) = g(b)$,

d'après le théorème de Rolle :

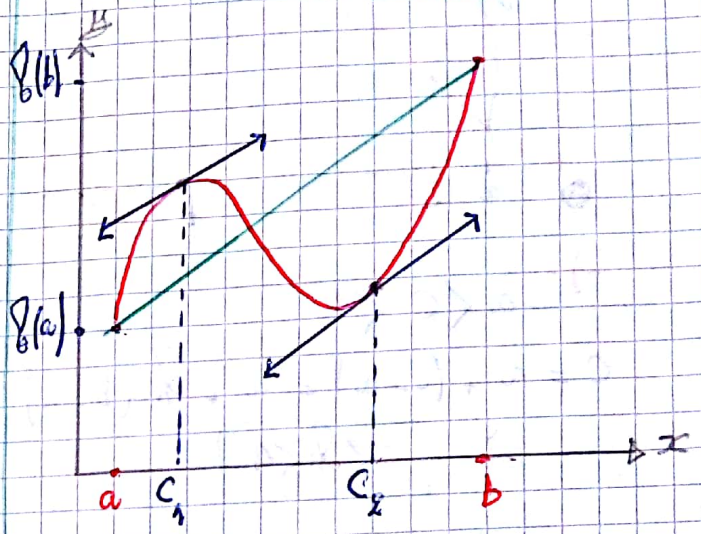
$\exists\, c \in]a;b[$ tels que $g'(c) = 0$

on a : $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

d'où :

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$



Conséquence :

1) si $\forall\, c \in]a;b[$, $f'(c) = 0$

alors :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

Comme : $b \neq a$

donc : $\forall\, x \in]a;b[$

$f(x) = f(a) = f(b)$

f : constante

2) Si $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in]a;b[$

(resp : $f'(x) \leq 0$)

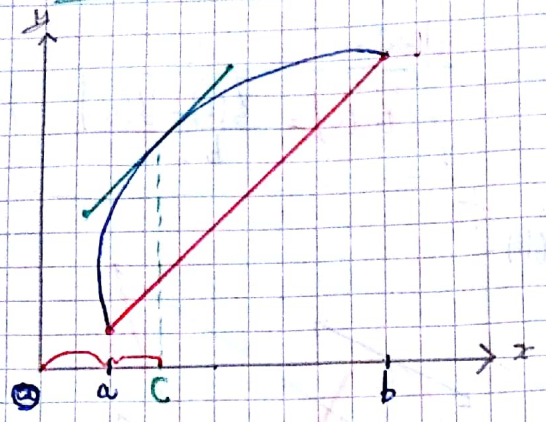
donc : $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

d'où : f est croissante

(resp : décroissante)

Scanned by CamScanner

2ème Formule des Accroissements finis :



-)- $a < c < b$

$c = a + (c-a) = a + k(b-a)$

où $\boxed{0 < k < 1}$

on a donc :

$f(b) = f(a) + (b-a) f'(c)$

d'où

$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a + k(b-a))$

posons : $h = b - a \Leftrightarrow b = a + h$

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + h f'(a + kh) \quad \text{où : } 0 < k < 1}$$

Exemple :

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ où $a > 0$

$x \longmapsto \ln x$

f : Continue sur $[a ; b]$

f : dérivable sur $]a ; b[$

et on a : $f'(x) = \frac{1}{x}$

Alors :

$\exists\, c \in]a ; b[$ tel que :

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)}$$

d'où

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{c}$$

où, $0 < a < c < b$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

donc :

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}}$$

Exemple : pour $b = 3$ et $a = e$

$$\frac{3-e}{3} < \ln 3 - \ln e < \frac{3-e}{e}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{6-e}{3} = \frac{3-e}{3} + 1 < \ln 3 < 1 + \frac{3-e}{e} = \frac{3}{e}$$

$$\boxed{\frac{6-e}{3} < \ln 3 < \frac{3}{e}}$$

Propositions :

Soient f et g 2 fonctions continues sur $[a ; b]$ et dérivables sur $]a ; b[$ alors :

$\exists\, c \in]a ; b[$ tel que :

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

Scanned by CamScanner

Théorème des accroissements finis généralisés :

Soient f et g deux fonction continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$, alors :

$\exists c \in]a;b[$ tels que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

où g' ne s'annulle pas sur $]a;b[$

Preuve :

Posons : $h(x) = f(x) - k(g(x))$.

déterminons k pour que h vérifie les conditions de théorème de Rolle.

1- h est continue sur $[a;b]$

2- h est dérivable sur $]a;b[$

3- $\begin{cases} h(a) = f(a) - k\,g(a) \\ h(b) = f(b) - k\,g(b) \end{cases}$

$$h(a) = h(b) \Leftrightarrow f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b)$$

$$\Leftrightarrow f(a) - f(b) = k(g(a) - g(b))$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$$

$$h(x) = f(x) - \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}\, g(x)$$

h vérifie les 3 conditions de théorème de Rolle donc, $\exists c \in]a;b[$

$h'(c) = 0$ et comme :

$$h'(x) = f'(x) - k\,g'(x)$$

Alors :

$$f'(c) - \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}\, g'(c) = 0$$

donc :

$$\boxed{\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

Exemple :

$\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = x^3 \end{cases}$ et $I = [-1;1]$

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)} = \frac{0}{2} = \boxed{0} \text{ et}$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{2c}{3c^2} = \boxed{\frac{2}{3c}}$$

$$\Downarrow$$

$0 = \frac{2}{3c}$ Impossible

Car g' s'annule pas sur $]-1;1[$

II) a

Formule :

f, g continues sur $[a; a+h]$ et dérivables sur $]a; a+h[$, g' ne s'annule pas sur $]a; a+h[$,

alors : ~~$\exists \theta \in]a;a+h[$~~

$\exists\, \theta \in]0;1[$ tel que :

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}}$$

Scanned by CamScanner

Théorème de l'Hôpital :

Soient f et g deux fonctions continues et dérivables sur I.

Soit $x_0 \in I$.

On suppose que $f(x_0) = g(x_0) = 0$

et $\forall x \in I / \{x_0\}$: $g(x) \neq 0$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ alors :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l}$$

Remarque :

On n'a pas la réciproque.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$g(x) = x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

donc :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

Mais :

$$x \neq 0 : \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{1}$$

mais $\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand $x \to 0$

donc : $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'a pas de limite.

Exemples :

1. Calculer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \quad \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = 1$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \boxed{1}$$

On applique la règle de l'Hôpital autant de fois quand c'est possible :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\operatorname{ch} x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} = -\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}$$

$$= \boxed{-1}$$

Cas où $x \to \infty$ (ou $-\infty$)

$t = \frac{1}{x} \to 0$

$$\frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'} = \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Calculer :

$$l = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln 2x^2 + x + 1}{\ln x} : \frac{\infty}{\infty}$$

On applique les règles de l'Hôpital :

$$l = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{4x+1}{2x^2+x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x(4x+1)}{2x^2+x+1}$$

$$= \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

Scanned by CamScanner

③ -

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt{x}}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$$

posons : $x = t^6 \to t = \sqrt[6]{x}$

$x \geq 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^4 - t^3}{2t^2 + t^3} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 - t}{2 + t} = \boxed{0}$$

④ - Calculer :

$$l = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x} \to \infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}} = -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

$$= -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-3\sin 3x}{-\sin x} = \boxed{3}$$

⑤ - Calculer :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x \qquad 0 \times \infty$$

Forme indéterminée

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \times \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \frac{-1}{-\sin x} = \boxed{1}$$

Exo 17 :

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres strictement positifs, Trouvez la limite suivante :

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^x$$

Solution :

$$y = \left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^x$$

$$\ln y = x \ln\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)}{t}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{a_1^{t} + \cdots + a_n^{t}}{n}\right)}{t}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{e^{t \ln a_1} + \cdots + e^{t \ln a_n}}{n}\right)}{t}$$

$$\lim_{x \to \infty} (\ln y) = \lim_{t \to 0} \frac{\left(\frac{e^{t \ln a_1} + \cdots + e^{t \ln a_n}}{n}\right)'}{\frac{e^{t \ln a_1} + \cdots + e^{t \ln a_n}}{n}}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\ln a_1 e^{t \ln a_1} + \cdots + \ln a_n e^{t \ln a_n}}{e^{t \ln a_1} + \cdots + e^{t \ln a_n}}$$

$$= \frac{\ln a_1 + \cdots + \ln a_n}{1 + 1 + \cdots + 1}$$

$$= \frac{\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)}{n}$$

$$= \ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} y = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}$$

Scanned by CamScanner

Exo 14:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \dots + a_n^{\frac{1}{x}}}{n} \right)^x = \sqrt[n]{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

2) trouver $a > 0$ tel que :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^{2x} + 1}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \pi\sqrt{2} = l$$

on a :

$$l = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{(a^2)^{\frac{1}{t}} + 1^{\frac{1}{t}}}{2} \right)^t = \sqrt{(a^2) + 1} = a$$

d'où $\boxed{a = \pi\sqrt{2}}$

Remarque :

$$\begin{cases} U(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1 \\ V(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty \end{cases}$$

alors : $\lim_{x \to a} (U^v) = e^{\lim_{x \to a} v(U-1)}$

Exo 15 :

Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction :

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

Sur l'intervalle : $I = [0 ; \frac{1}{n}]$; $n \in \mathbb{N}^*$

Pour montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Sol :

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

est continue sur $[0 ; \frac{1}{n}] \subset]-1 ; +\infty[$ et dérivable sur $]0 ; \frac{1}{n}[$,

Alors :

$\exists c \in]0 ; \frac{1}{n}[$ tel que :

$$\boxed{\frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = f'(c)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x}$$

d'où

$$\boxed{\frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + c}}$$

$$0 < c < \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow 1 < 1 + c < 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{n}{n+1} < \frac{1}{1+c} < 1}$$

d'où :

$$\frac{n}{n+1} < n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$$

☺ - $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e}$$

☺ - $\frac{n}{n+1} < n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Scanned by CamScanner

$$\Longleftrightarrow \boxed{e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

Remarque :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

d'où : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

donc :

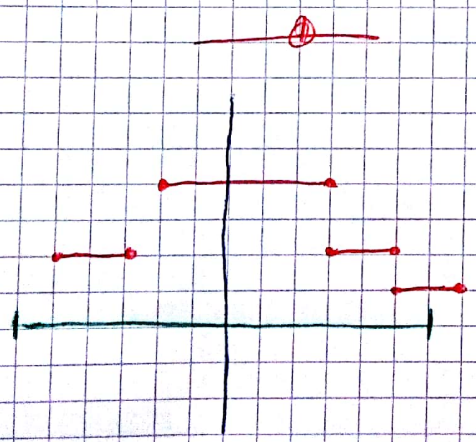
$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e}$$

Exercice :

Remarque :

f : Continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$

$\forall x \in]a;b[: f'(x) = 0 \Longleftrightarrow f$: Constante



Ex :

Soit : $f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

1)- Calculer $f'(x)$

2)- Que peut-on en déterminer ?

Sol :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

1)- f Continue sur $]0;+\infty[$ donc elle est Constante sur $]0;+\infty[$

Pour $n=1$ on a :

$\operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$

d'où $f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

donc : $\forall n > 0$ $\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2}}$

2)- f Continue sur $]-\infty;0[$

On peut prendre $x = 0^-$ (les bornes)

$$\begin{cases} \operatorname{Arctan} 0^- = 0 \\ \operatorname{Arctan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

d'où :

$$f(x) = 0 + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Donc : $\forall n < 0$ $\boxed{f(x) = -\frac{\pi}{2}}$

Scanned by CamScanner