Разложение Холецкого

Драгунов Никита

МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ММП

21 ноября 2017 г.

Постановка задачи

Дано: $A = A^T > 0$.
Найти: $A = LL^T$, где L — нижнетреугольная матрица с положительными элементами на диагонали.
Иногда разложение записывается в эквивалентной форме: $A = U^T U$, где $U = L^T$ — верхнетреугольная матрица.

Применение

1. Решение СЛАУ $Ax = b$ сводится к последовательному решению двух систем $Ly = b$, $L^T x = y$
2. Поиск обратной матрицы $A^{-1} = L^{-T} L^{-1}$
3. Генерация вектора случайных величин Y с заданной ковариационной матрицей $\Sigma = LL^T$: если X — вектор из независимых стандартных нормальных случайных величин, то $Y = LX$

Поиск разложения

$A = LL^T$, следовательно, $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{kj}^T$

L — нижнетреугольная, а потому
$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk} + l_{ii} l_{ji} + \sum_{k=i+1}^{n} l_{ik} l_{jk} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk} + l_{ii} l_{ji}$

При $i = j$ получим $a_{ii} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 + l_{ii}^2$ и $l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$

При $i < j$ имеем $l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}} (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk})$

Поиск разложения

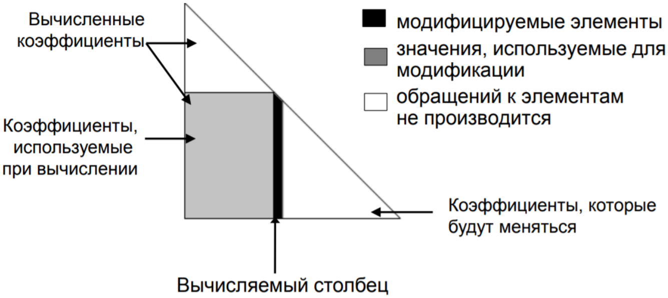
Таким образом,

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{j1} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}, \quad j \in [2, n]$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, \quad i \in [2, n]$$

$$l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}), \quad i \in [2, n-1], \quad j \in [i+1, n]$$



Вычисления по формуле

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$

потребуют

$$\sum_{i=1}^{n} 2(i-1) + n = n(n-1) + n = n^2 = O(n^2)$$

арифметических операций

Вычислительная сложность

Вычисления по формуле

$$l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk})$$

при фиксированном j потребуют

$$\sum_{i=1}^{j-1} 2(i-1) + (j-1) = (j-1)(j-2) + (j-1) = (j-1)^2$$

арифметических операций
Суммируя по всем j, получим

$$\sum_{j=1}^{n} (j-1)^2 = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

Вычислительная сложность $= \frac{n^3}{3} + O(n^2)$

Преимущества подхода

1. Примерно вдвое быстрее LU-разложения и метода Гаусса
2. Храним в памяти половину элементов
3. Разложение методом Холецкого имеет наименьшее эквивалентное возмущение из всех известных разложений матриц
4. Имеется блочный вариант разложения, который показывает хорошую эффективность на больших матрицах