

# Difracción de un rayo láser: estimación del valor de la longitud de onda mediante la difracción del haz de luz

Ibai Zubillaga Nogueira

Realización: verano de 2023

## Resumen

La luz tiene un marcado carácter ondulatorio, lo que le permite experimentar procesos de difracción. Esos procesos pueden describirse por diversas ecuaciones que han permitido estimar la longitud de onda de un láser. Se ha tratado el proceso de difracción desde un punto de vista de óptica de Fourier para obtener patrones de intensidad, y se han contrastado los valores teóricos y experimentales. Con este trabajo se demuestra que no siempre es necesario un equipo profesional para llevar a cabo experimentos concluyentes.

Keywords: Diffraction, Fourier optics, laser.

## Fundamento teórico

Es bien conocido desde la antigüedad el carácter ondulatorio de la luz. A pesar de que Newton inicialmente la definió como corpúsculos por los fenómenos de reflexión, refracción y propagación rectilínea que experimenta, Christiaan Huygens propuso un modelo que la consideraba una propagación ondulatoria por un medio invisible denominado *éter*. Más adelante se comprobó este carácter ondulatorio mediante experimentos de difracción y polarización que no pueden explicarse con un modelo corpuscular, pero que sin embargo no podían explicar la propagación rectilínea que el otro modelo sí podía. El nacimiento de la mecánica cuántica pondría fin a la discusión abrazando simultáneamente los comportamientos ondulatorios y corpusculares de los fotones.

El objetivo de nuestro trabajo es llevar a cabo diversos procesos de difracción para comprobar las propiedades ondulatorias de la luz. Nuestro experimento (fig. 1) consiste en un haz láser que atraviesa una rejilla de difracción situada en el plano  $\pi_{x'y'}$ . La luz se difracta, y viaja por el espacio a lo largo del eje  $z$ , hasta chocar con una pared situada en el plano  $\pi_{xy}$ , donde se generarán máximos de luz por las interferencias constructivas, y zonas nodales por las interferencias destructivas. Ambos planos son paralelos entre sí. Si se describe matemáticamente el proceso de difracción, es posible medir la longitud de onda del láser conociendo la distancia entre máximos.

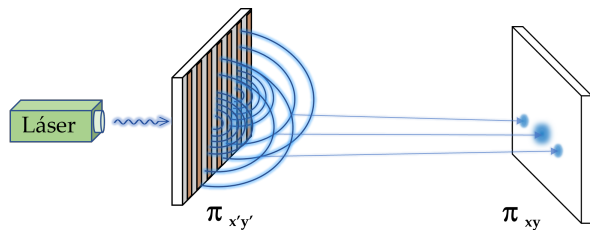


Figura 1: Descripción esquemática del montaje experimental del experimento de difracción.

Un láser es el instrumento ideal para estudiar este fenómeno, pues produce un haz de fotones coherentes (se encuentran en fase) y los emite de forma colimada (paralela). Si los fotones se encontraran desfasados, no podrían producirse interacciones

constructivas y destructivas entre ellos, y si no estuvieran colimados, fotones provenientes de otras direcciones podrían iluminar zonas nodales; en ambos casos, la apreciación del efecto de difracción se ve dificultada.

Existen diferentes modelos para explicar las propiedades de la luz. El más simple de ellos establece que una fuente de luz emite una serie de rayos en todas las direcciones. Es un modelo insuficiente si se quieren explicar fenómenos de difracción. Por otro lado, el modelo electromagnético, que considera los vectores de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y campo magnético  $\mathbf{B}$  en cada punto del espacio es innecesariamente complicado.

El **modelo de ondas** es el más apropiado en este caso. El principio de Huygens afirma que cada punto en un frente de onda actúa como un emisor de ondas esféricas. Esto puede empezar a entenderse matemáticamente en una dimensión según la ecuación 1. Donde  $U$  denota el campo,  $k$  el número de ondas ( $\frac{2\pi}{\lambda}$ ),  $\omega$  la frecuencia angular ( $2\pi f$ ) y  $r$  la distancia entre el punto de origen de la luz y  $x$ .

$$(1) \quad U(x, t) = \cos(kr - \omega t)$$

Sin embargo, la ecuación está incompleta. La amplitud de la onda decrece de con la distancia mediante un factor de  $\frac{1}{r}$ . También lo hace con el ángulo, por lo que debe añadirse un factor adicional de  $\cos \theta$ , o lo que es lo mismo  $\frac{z}{r}$ .

$$(2) \quad U(x, t) = \frac{z}{r^2} \cos(kr - \omega t)$$

La ecuación 2 se obtiene con rigor matemático combinando la ecuación de Helmholtz y el teorema de Green.<sup>[1]</sup> El último paso para redondear la ecuación es integrar para un punto todos los rayos que lo iluminan, obteniéndose (en notación de números complejos), la ecuación de Rayleigh-Sommerfeld (ec. 3).

$$(3) \quad U(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(x', y', 0) \frac{z}{r^2} e^{ikr} dx' dy'$$

Esta expresión resulta intimidante, pero no nos adentraremos en su comprensión profunda y mucho menos en su deducción. La idea a entender es que en ella aparece la ecuación 2 comentada anteriormente. Las coordenadas indicadas con la prima denotan el plano de origen, del que se emite la luz; y las otras coordenadas pertenecen al plano donde se proyecta

la luz. Para obtener el campo de la proyección en un punto  $U(x, y, z)$ , se suma en forma de integral el campo de la luz emitida  $U(x', y', 0)$  que llega a dicha ubicación.

La función resultante de tomar el cuadrado de la norma de la función  $U(x, y, z)$ , que llamaremos  $I(x, y, z)$ , denota la intensidad con la que la radiación ilumina el plano  $\pi_{xy}$ . De esta forma, es posible predecir la ubicación y la intensidad de los máximos producidos tras la difracción.

Es muy común emplear aproximaciones de la ecuación 3. La primera aproximación es la **aproximación de Fresnel**; consiste en suponer que la distancia entre la fuente de luz y la pantalla es lo suficientemente grande como para asumir que,

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{1}{z^2}$$

Una aproximación análoga no es válida en la exponencial, por lo que se aproxima el radio con una expansión de Taylor de primer orden, que permite después sacar fuera de la integral diversas exponenciales, pues no dependen de las variables de integración. Finalmente queda una función multiplicada por la transformada de Fourier de  $U$  y un corrector de fase cuadrático.

Si se considera el experimento de campo lejano es posible eliminar el corrector de fase mediante la **aproximación de Fraunhofer**. Para que se cumpla esta condición es necesario que el número de Fraunhofer sea mucho menor que 1. En nuestro caso vale en torno a  $10^{-4}$ , lo que hace válida la aproximación.

$$N_F = \frac{d^2}{L\lambda}$$

La ecuación de intensidad de Fraunhofer para una rejilla de difracción tiene en cuenta el grosor de las líneas,  $m$ . Este es un valor desconocido para nosotros, por lo que se asumirá que, siendo  $d$  la separación entre líneas,  $m = \frac{d}{4}$ . Resolviendo la integral, se obtiene que la intensidad vendrá dada por<sup>[2]</sup>[pág. 483]:

$$(4) \quad I(x) = \frac{I_0}{N^2} \left( \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{\lambda} \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{L}\right)\right)\right)}{\frac{m\pi}{\lambda} \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{L}\right)\right)} \right)^2 \left( \frac{\sin\left(N \frac{d\pi}{\lambda} \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{L}\right)\right)\right)}{\sin\left(\frac{d\pi}{\lambda} \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{L}\right)\right)\right)} \right)^2$$

Mediante esta expresión es posible finalmente calcular la posición e intensidad de los máximos de difracción. Cabe destacar que la intensidad, también por la aproximación de Fraunhofer, para una única rendija viene dada por la ecuación 5.<sup>[1]</sup>[pág. 75] Nos será útil más adelante.

$$(5) \quad I(x) = \left( \frac{d}{\lambda L} \right)^2 \left( \frac{\sin\left(\frac{d}{\lambda L} x\right)}{\frac{d}{\lambda L} x} \right)^2$$

Cuando lo único que interesa son los máximos de difracción, existe una ecuación mucho más simple que resulta de gran utilidad.

Consideremos por un instante el modelo de rayos, e imaginemos que un fotón atraviesa una rendija e impacta sobre la pared en un punto. Otro fotón atraviesa otra una rendija con un

ángulo  $\theta$ , e impacta en el mismo punto. Si el recorrido adicional que ha realizado el segundo fotón,  $d \sin \theta$ , es un múltiplo entero de la longitud de onda,  $n\lambda$ , entonces los dos fotones estarán en fase. Dos fotones en fase se interfieren constructivamente, dando lugar a un máximo. Por tanto, los máximos satisfacen la siguiente ecuación:

$$(6) \quad d \sin \theta = n\lambda$$

El posicionamiento de los máximos calculados según la ecuación de Fraunhofer para una rejilla de difracción (ec. 4) coincide con los calculados según la ecuación 6. No es el caso para la ecuación de intensidad de una sola rendija (ec. 5).

A partir de esta ecuación puede despejarse nuestro dato de interés: la longitud de onda, y ponerla en términos de distancias medibles en el experimento. Para ello hay que tener en cuenta que  $d$  es la anchura de cada rendija de la rejilla de difracción,  $L$  es la distancia entre la rejilla y la pared, y  $x$  es la distancia entre el máximo de orden  $n$  y el máximo de orden cero. Se comienza despejando  $\lambda$ , de forma que:

$$\lambda = \frac{d \sin \theta}{n}$$

el ángulo  $\theta$ , a su vez es  $\arctan \frac{x}{L}$ , por lo que,

$$\lambda = \frac{d \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{L}\right)\right)}{n}$$

Una de las consecuencias de la ecuación 6, es que si se varía únicamente la longitud de onda, la posición en la que se encuentran los máximos  $x$  también debe variar. Esto permite descomponer un haz policromático en sus distintos componentes (fig. 2). Sería un problema si, como es nuestro caso, se quiere medir la ubicación exacta del máximo de intensidad. Por suerte, este fenómeno no interfiere en nuestros experimentos, pues los láseres tienden a ser casi monocromáticos, emitiendo a una única longitud de onda.

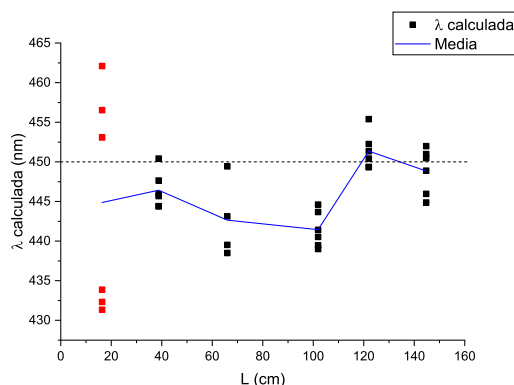


Figura 2: Descomposición de un haz policromático.

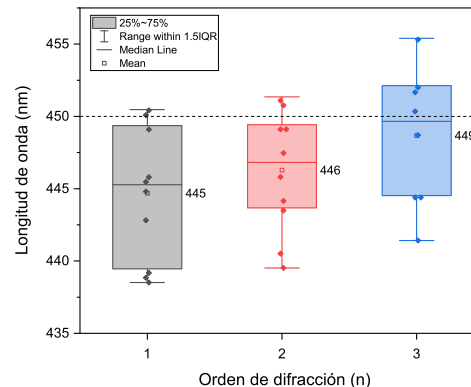
## Materiales y métodos

Se difractó un láser azul de corte, originalmente diseñado para máquinas de Control Numérico Computarizado (CNC), de 15 W de potencia, y que fue alimentado con  $\sim 600$  mA. Para la difracción, una rejilla de 300 líneas/mm fue elegida, por lo que se asumió la separación entre líneas ( $d$ ) de  $1/300$  mm.

Las distancias entre la rejilla y la pared ( $L$ ) se midieron con un metro convencional, y la de entre máximos respecto al centro ( $x$ ) fue medida por ordenador mediante una fotografía del patrón de interferencias, y una línea de 10,1 cm a modo de escala. Las fotografías se tomaron con una cámara Canon EOS 1200D, tratando de alcanzar la máxima oscuridad posible sin



(a) Valores calculados de la longitud de onda en función de la distancia desde la rendija a la pared.



(b) Valores calculados de la longitud de onda en función del orden de difracción empleado.

**Figura 3:** Valores de  $\lambda_{\text{Láser}}$  calculados mediante la ecuación 6, agrupados de dos maneras distintas. La primera de ella en función de la distancia, y la segunda en función del orden de difracción.

invisibilizar los máximos ni la escala, de forma que se facilita la localización de las zonas de mayor intensidad. Para la medición de las fotografías se empleó el software gratuito *ImageJ*, asignando tanto la longitud de la escala como la ubicación de los máximos de forma manual.

Además de experimentos de difracción, se llevaron a cabo también medidas de intensidad lumínica. Para ello se situó la rejilla a 50 cm de la pared, y se midieron los máximos con un luxómetro. Se registraron datos para distintas intensidades de corriente que alimentaban el láser.

lo hace la intensidad y a partir de cierto valor de  $n$  resulta imposible localizar el máximo experimentalmente.

Tomando la totalidad de los resultados, a excepción de los destacados en rojo en la figura 3a, se obtiene, a una desviación de error, el siguiente valor para la longitud de onda del láser:

$$\lambda = (446 \pm 5) \text{ nm}$$

## Discusión de resultados

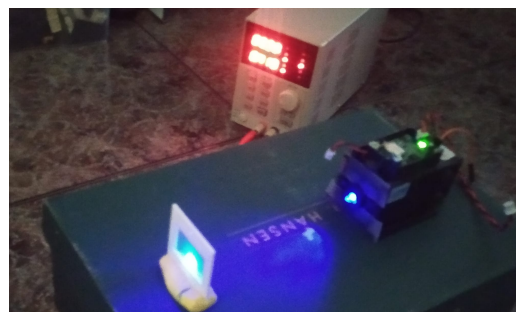
### Experimentos de difracción

Los experimentos de difracción se llevaron a cabo a distintos valores de  $L$ , la distancia entre la pared y la rejilla de difracción. Se calculó el valor de  $\lambda$  para cada dato mediante la ecuación 6, y se han agrupado los experimentos de dos formas.

La primera de ellas los agrupa en función de  $L$ , y se encuentra representado gráficamente en la figura 3a. No se observa una tendencia general, aunque los experimentos a distancias más lejanas obtienen los mejores resultados. Los datos tomados a menos de 20 cm son muy dispares y han sido descartados en el cálculo final de la longitud de onda del láser. Se observa, por tanto, que a mayor distancia entre el plano de difracción y la pantalla, mejores resultados se obtienen. Esto tiene sentido pues a mayor  $L$ , una misma distancia tiene una menor variación en  $\theta$ , lo que minimiza el error.

Por otro lado, se han agrupado los datos en función del orden de difracción al que pertenecen, y se encuentra representado en la figura 3b. El valor teórico de  $\lambda$  es de 450 nm, y se observa que a medida que aumenta el orden, el valor medio se acerca cada vez más al valor teórico (representado con una línea punteada). De estos datos se deduce por tanto que el error también disminuye cuando incrementa el orden de difracción. Sin embargo, es necesario encontrar un compromiso, pues también

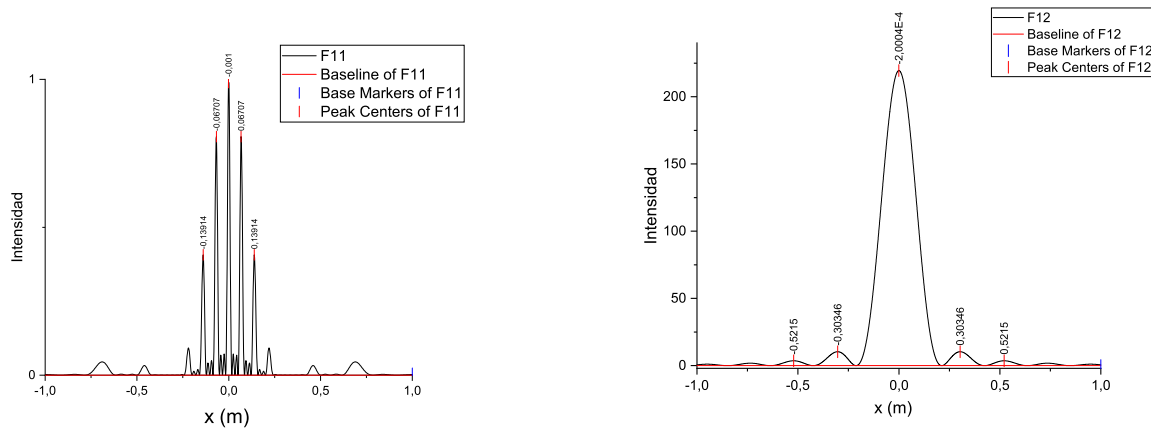
El resultado es satisfactorio, pues incluye en su intervalo el valor teórico del láser y tiene un error aceptable teniendo en cuenta el rudimentario montaje empleado (fig. 4).



**Figura 4:** Imagen real del montaje experimental, que consta de la fuente de alimentación, el láser y la rejilla de difracción.

### Experimentos de intensidad

Los resultados de los experimentos de intensidad se encuentran recogidos en la figura 6a. La variación en la intensidad del láser no debería tener efecto sobre la intensidad relativa. Las pequeñas variaciones observadas deben deberse a errores experimentales, pues su variación es mínima. Sin embargo, la variación de segundo orden parece seguir una tendencia lineal.



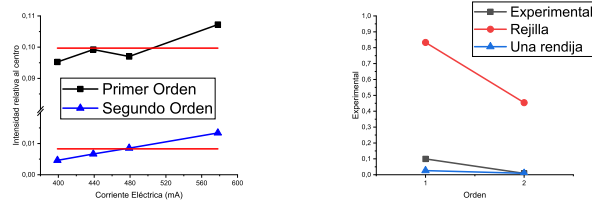
(a) Patrón de intensidad para una rejilla de difracción con  $N = 4$  según la ecuación 4.

(b) Patrón de intensidad para una única rendija de difracción según la ecuación 5.

**Figura 5:** Ambos patrones se han construido para las mismas condiciones experimentales:  $L = 0,5$  m,  $d = 1/300 \cdot 10^{-3}$  m y  $\lambda = 450 \cdot 10^{-9}$  m.

Este presenta un coeficiente de determinación ( $R^2$ ) de 0,99988, por lo que no debe descartarse su carácter lineal. Una posible explicación a esto es que el luxómetro no sea muy exacto a intensidades tan bajas, pues los valores oscilaban entre 0 y 10 lx.

Tomando la media de los datos y considerando del 100 % la intensidad del máximo de orden cero, la intensidad del máximo de orden uno ronda el 10 % y la de orden dos el 1 % (fig. 6a).



(a) Intensidad lumínica experimental relativa en función de la corriente eléctrica.

(b) Intensidad lumínica experimental relativa en función del orden de difracción.

**Figura 6:** Datos de intensidad relativa en función de la corriente eléctrica aplicada y en función del orden de difracción.

Estos valores de intensidad relativa se comparan en la figura 6b con los valores predichos integrando las distribuciones de intensidad tratadas en el apartado teórico, y que se encuentran graficadas en la figura 5. Tal y como se observa en la comparación, el gráfico correspondiente a una única rendija predice la intensidad relativa muchísimo mejor que la función de intensidad de la rejilla. Sin embargo, la posición de los máximos falla estrepitosamente (tabla 1).

Orden	Ecuación 6	Rejilla	Rendija
0	0,0000	0,0010	0,0002
1	0,0681	0,0670	0,3034
2	0,1402	0,1391	0,5215

**Tabla 1:** Posición de máximos según la figura 5.

## Conclusiones

Aun con un montaje sencillo, es posible calcular con cierta exactitud la longitud de onda de un láser estudiando su difracción. El error es mínimo cuando:

- La distancia entre la rendija y la pantalla ( $L$ ) es máxima.
- Se incrementa el orden de difracción ( $n$ ).

La ecuación de intensidad para una rejilla acierta la ubicación de los máximos, pero no es el caso para el valor de la intensidad relativa. La ecuación de intensidad para una rendija no acierta la ubicación de los máximos, pero se acerca mucho más a los valores experimentales de intensidad relativa.

## Bibliografía

- [1] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company publishers, 2005.
- [2] E. Hecht, *Optics*, 5th ed. Pearson Education India, 2012.
- [3] A. Konijnenberg, A. Adam, and P. Urbach, *BSc Optics*. TU Delft Open, 2021.