0. Rotation und Divergenz von E

Die folgenden Bedingungen müssen für jedes statische elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ gelten:

$$Rotation: \ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \epsilon_{ijk} \cdot \partial_j \cdot E_k = 0$$

$$Divergenz: \ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \partial_j \cdot E_j = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Der Vollständigkeit halber auch die Formel für den Gradienten:

$$Gradient: \ (\nabla g)_i = \partial_i g$$

---

1. Gauß'sches Gesetz

Integralform

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_V \rho(\boldsymbol{x}) \cdot d^3x = \frac{Q_{enclosed}}{\epsilon_0}$$

---

2. Das elektrische Feld

Allgemeine Zusammenhänge

$$F = q \cdot E$$

$$E = -\nabla V$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times (q \cdot \boldsymbol{E})$$

($\boldsymbol{r}$ entspricht dem Hebelarm)

Bedingungen für elektrisches Feld in Elektrostatik (= Maxwell-Gleichungen in Elektrostatik)

$$\nabla \times E = 0$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies Gauss'sches\, Gesetz$$

Coulomb'scher Ausdruck für $\boldsymbol{E_i(x_m)}$

$$E_i(x_m) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int d^3x' \cdot \frac{\rho(\boldsymbol{x}'_m) \cdot (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}'_i)}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m|^3}$$

x' entspricht dem Quellpunkt. x entspricht dem Referenzpunkt.

Merksatz: Wann verwendet man den Coulomb-Ansatz und wann das Gauß'sche Gesetz? Wenn ein Volumen existiert, auf dessen Oberfläche das elektrische Feld konstant ist → Gauß'sches Gesetz.
Ansonsten → Coulomb'scher Ausdruck.

Dipolmoment

$$\vec{p} = \sum q_i \cdot \vec{r}_i$$

Energie

Die Potentielle Energie U_q eines elektrischen Feldes E ist:

$$U_q(\boldsymbol{x}) = q \cdot V(\boldsymbol{x})$$

Die Abstoßungsenergie E_{ee} eines elektrischen Feldes ist: (U entspricht der elektrischen Spannung)

$$E_{ee} = q \cdot U = q \cdot \int_\Gamma E\, ds$$

Die Selbstenergie U eines elektrischen Feldes E ist:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \int E^2\, d^3x$$

---

3. Poisson's Gleichung

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

---

4. Das elektrische Potential

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int \frac{\rho(\boldsymbol{x'})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|}\, d^3x'$$

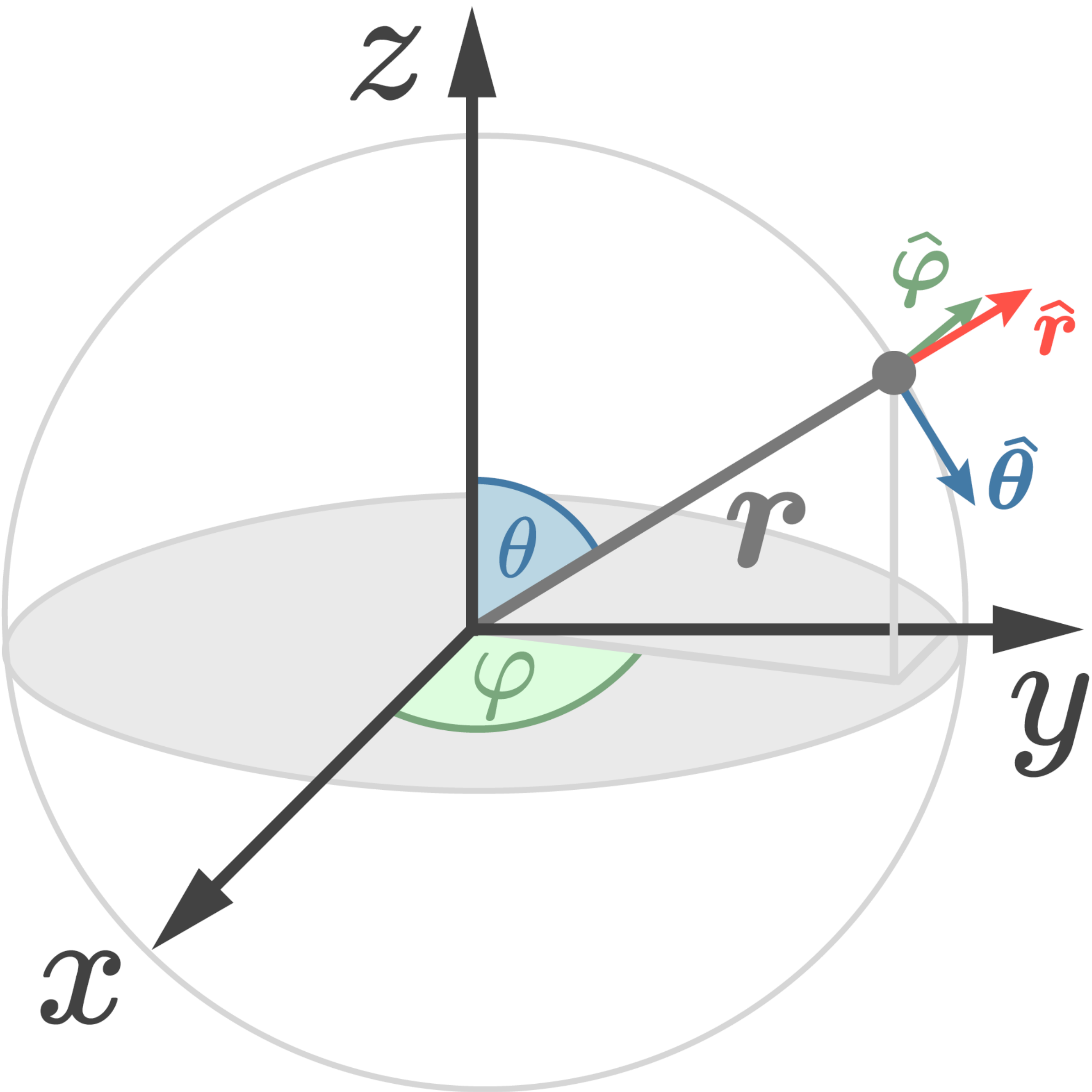
Ist das elektrische Feld bekannt, gilt für das elektrische Potential:

$$V(x) = -\int_\Gamma E\, dl$$

Das elektrische Potential entspricht dem Wegintegral von x_0 nach x.

---

5. Kugelkoordinaten



$$\vec{r}(R,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} R\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ R\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ R\cdot\cos\theta \end{bmatrix}$$

Bzw. mit einer anderen Parametrisierung:

$$\vec{r}(R,s,t) = \begin{bmatrix} R\cdot\sin s\cdot\cos t \\ R\cdot\sin s\cdot\sin t \\ R\cdot\cos s \end{bmatrix}$$

In Kugelkoordinaten gilt:

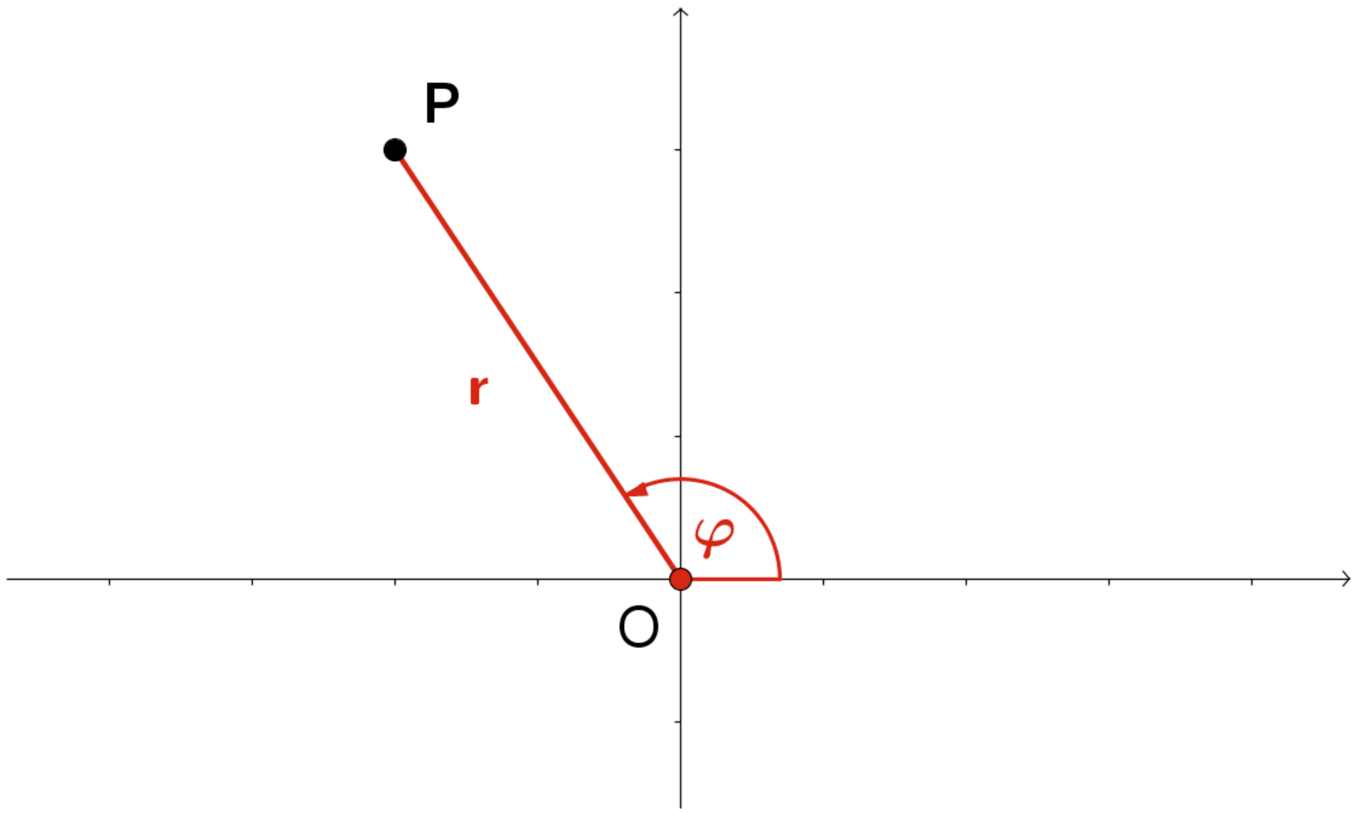
$$dV = r^2\cdot\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

Zum Beispiel:

$$\int_V E\,dV = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E\,d\theta d\varphi dr = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E\cdot r^2\cdot\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = 4\pi\cdot\int_0^R E\cdot r^2\,dr$$

---

6. Kreiskoordinaten / Polarkoordinaten



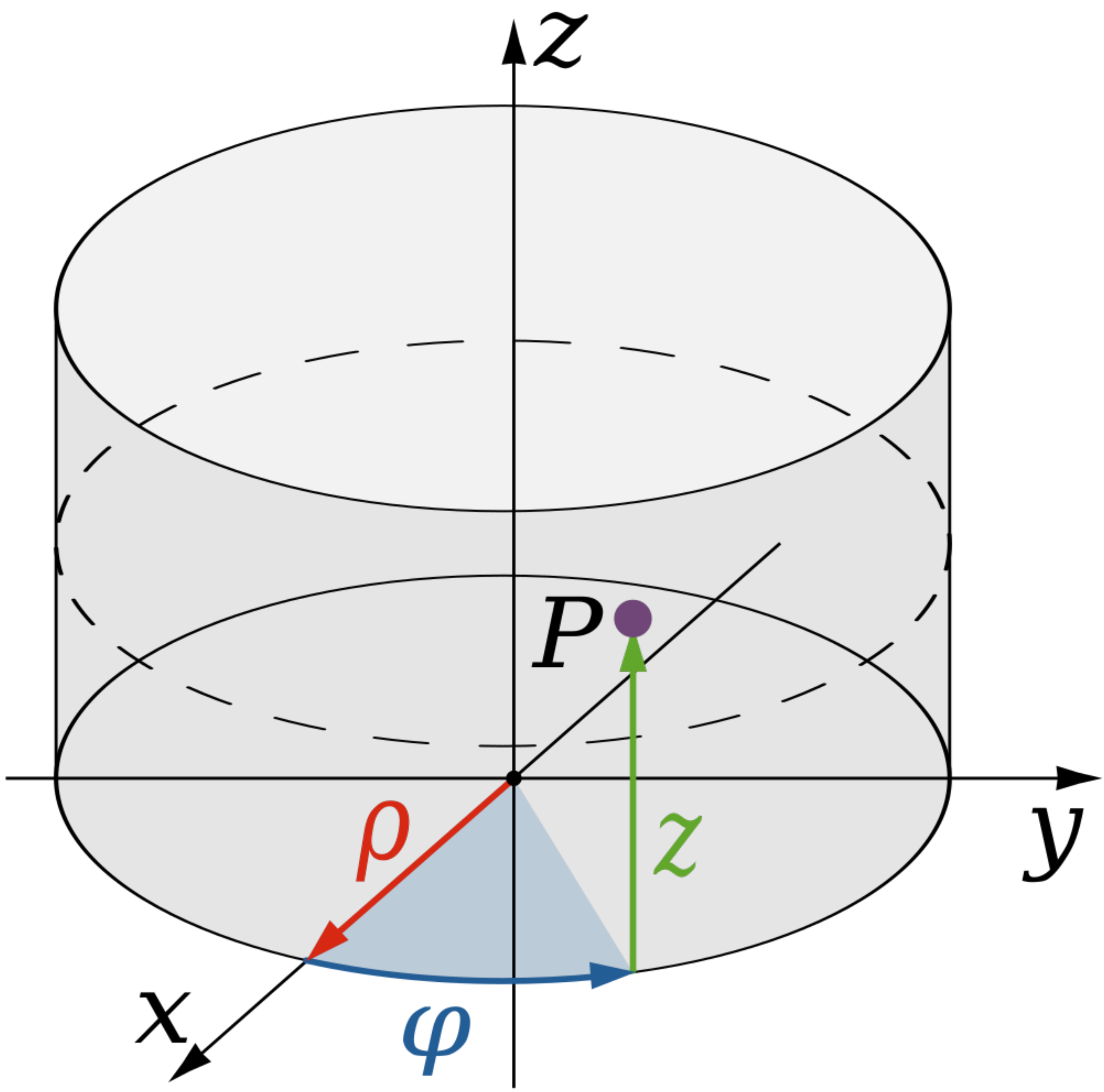
$$\vec{r}(R,\varphi) = \begin{bmatrix} R\cdot\cos\varphi \\ R\cdot\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Bzw. mit einer anderen Parametrisierung:

$$\vec{r}(s,t) = \begin{bmatrix} s\cdot\cos t \\ s\cdot\sin t \end{bmatrix}$$

---

7. Zylinderkoordinaten



$$\vec{r}(R,\varphi,z)=\begin{bmatrix}R\cdot\cos\varphi\\ R\cdot\sin\varphi\\ z\end{bmatrix}$$

Bzw. mit einer anderen Parametrisierung:

$$\vec{r}(s,t,z)=\begin{bmatrix}s\cdot\cos t\\ s\cdot\sin t\\ z\end{bmatrix}$$

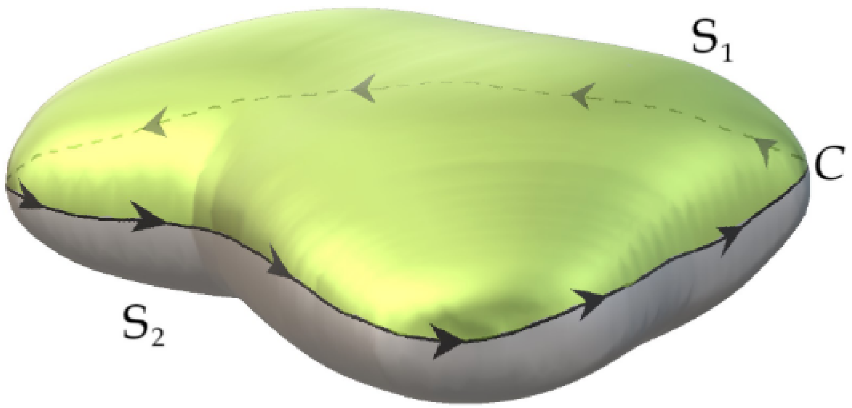
In Zylinderkoordinaten gilt:

$$dV=r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Zylindersymmetrie

An den Deckflächen eines zylindersymmetrischen Systems ist $\vec{E}\perp dA$. Daher sind diese für den Betrag des elektrischen Feldes irrelevant. ($\vec{E}=0$)

8. Integralsätze



Gaußscher Integralsatz

Der Satz von Gauß lautet für ein vom Rand ∂V eingeschlossenes Volumen V für ein beliebiges Vektorfeld mit den Komponenten E_i:

$$\int d^3V \partial_i E_i = \oint_{\partial V} dA_i E_i$$

wobei A_i die Komponenten des (stets nach außen gerichteten) Flächennormalvektors am Rand des Volumens sind.

Stokescher Integralsatz

Der Satz von Stokes verknüpft ein Oberflächenintegral über eine (gekrümmte) Fläche mit einem Kurvenintegral über den Rand der Fläche:

$$\int_S dA_i \epsilon_{ijk} \partial_j F_k = \oint_{\partial S} ds_i F_i$$

---

9. Integrationsregeln

Potenzregel

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$$

Faktorregel

$$\int c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx$$

Summenregel

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

Differenzregel

$$\int (f(x) - g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$$

Partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)$$

Integration durch Substitution

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\, du$$

Besondere Regeln

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$$

$$\int \tanh x\, dx = \ln(\cosh x) + C$$

---

10. Ableitungsregeln

Ableitung einer Konstanten

$$f(x) = C \rightarrow f'(x) = 0$$

Ableitung von x

$$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$$

Potenzregel

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Faktorregel

$$f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Summenregel

$$f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Differenzregel

$$f(x) = g(x) - h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) - h'(x)$$

Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

Kettenregel

$$f(x) = g(h(x)) \to f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Besondere Regeln

$$f(x) = \sqrt{x} \to f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$f(x) = e^x \to f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln(x) \to f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sin x \to f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \sinh x \to f'(x) = \cosh x$$

$$f(x) = \cos x \to f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \cosh x \to f'(x) = \sinh x$$

$$f(x) = \tan x \to f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \tanh x \to f'(x) = (1 - \tanh^2 x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

---

11. Indexschreibweise

$$a \cdot b = a_i \cdot b_i$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{ijk} \cdot a_j \cdot b_k$$

$$\partial_i a_j = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} \cdot a_i = a_j$$

$$\delta_{ij} \cdot \delta_{jk} = \delta_{ik}$$

$$\partial_i x_i = \delta_{ii} = n = 3$$

$$\epsilon_{ijk} \cdot \epsilon_{klm} = det \begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{bmatrix} = \delta_{il} \cdot \delta_{jm} - \delta_{jl} \cdot \delta_{im}$$

Das Levit-Civita-Symbol ändert unter Vertauschung zweier Indizes das Vorzeichen. z.B.:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$$

$$\epsilon_{123} = 1$$

$$\epsilon_{132} = -1$$

$$\epsilon_{122} = 0$$

---

12. Taylorreihe

Eindimensional

$$T_f(x, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2} \cdot (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6} \cdot (x-a)^3 + \dots$$

Multidimensional

$$f(a_m + y_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot y_m^1 \dots y_m^n \cdot \partial_m^1 \dots \partial_m^n \cdot \frac{1}{r}$$

Wichtige Taylorreihen

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

---

13. Allgemeine Rechenregeln

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|r|}$$

Trigonometrische Zusammenhänge

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

---

14. Regel von de L'Hospital

Die Regel von de L'Hospital erlaubt es in vielen Fällen, den Grenzwert von Funktionen selbst dann noch zu bestimmen, wenn deren Funktionsterm beim Erreichen der betreffenden Grenze einen unbestimmten Ausdruck liefert. Zum Beispiel: $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$,$\infty - \infty$,$\frac{\infty}{\infty}$,0^0,∞^0,1^∞

Die Regel von de L'Hospital besagt dann, dass, *falls* der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dieser zugleich der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ sei, wobei $f'(x)$ und $g'(x)$ hier die ersten Ableitungen der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sein sollen.

---

15. Geometrische Formen

Kreis

Umfang: $2\pi \cdot r$
Fläche: $r^2 \cdot \pi$

Zylinder

Mantelfläche: $2\pi \cdot r \cdot h$
Volumen: $r^2 \cdot \pi \cdot h$

Kugel

Oberfläche: $4\pi \cdot r^2$
Volumen: $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

---

16. Heaviside Funktion

Die Heaviside-Funktion hat für jede beliebige negative Zahl den Wert 0, andernfalls den Wert 1. Die Heaviside-Funktion ist mit Ausnahme der Stelle $x = 0$ überall stetig.

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

---

17. Dirac Funktion

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

---

18. Wirbelfreiheit

> Zeigen Sie die Rotationsfreiheit des elektrischen Feldes $E^i\left(x^m\right)$ unter Verwendung des Coulomb'schen Ausdrucks für $E^i\left(x^m\right)$ in Abhängigkeit von der Raumladungsdichte $\rho\left(x^m\right)$.

Der Coulomb-Ausdruck für das elektrische Feld ist:

$$E_i(x_m) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_V \rho(\boldsymbol{x}'_m) \cdot \frac{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}'_i}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m|^3} \, d^3x'$$

Das elektrische Feld ist der negative Gradient des elektrischen Potentials. Für später wird daher die folgende Nebenrechnung benötigt:

$$\partial_i \underbrace{\frac{1}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m|}}_{\text{Abstand}} = \partial_i \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} = \partial_i \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2}} = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2}^3}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \partial_i \boldsymbol{x}^2 = -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2}^3} \cdot \underbrace{\cancel{2} \cdot \boldsymbol{x}}_{inner e Ableitung} \cdot \delta_{im}$$

$$= -\frac{\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m|^3} \cdot \delta_{im} = -\frac{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}'_i}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m|^3}$$

Aus der Nebenrechnung lässt sich demnach ablesen:

$$-\boldsymbol{\nabla} \frac{1}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m|} = \frac{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}'_i}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m|^3}$$

Dieser Zusammenhang lässt sich nun in den Coulomb-Ausdruck für das elektrische Feld einsetzen:

$$E_i(x_m) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_V \rho(\boldsymbol{x}'_m) \cdot \left(-\boldsymbol{\nabla} \frac{1}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m|}\right) d^3x'$$

Dieser Ausdruck kann vereinfacht werden zu:

$$E_i(x_m) = -\boldsymbol{\nabla} \underbrace{\left(\frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{x}'_m)}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m|} \, d^3x'\right)}_{=V(\boldsymbol{x}_m)}$$

Die Rotation des elektrischen Feldes kann damit wie folgt angeschrieben werden:

$$\epsilon_{ijk} \cdot \partial_j \cdot E_k = \epsilon_{ijk} \cdot \partial_j \cdot (-\partial_k V) = -\underset{\vee}{\epsilon_{ijk}} \cdot \underset{\cup}{\partial_j \cdot} \partial_k V = 0$$

$$\vee \rightarrow \text{antisymmetrisch}$$

$$\cup \rightarrow \text{symmetrisch}$$

Die Multiplikation einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Funktion ergibt jedenfalls 0.
Der Nachweis dafür ist wie folgt:

$$A_{ij} \cdot S_{ij} \underset{vertauschen}{=} -A_{ji} \cdot S_{ji} \underset{umbenennen}{=} -A_{ij} \cdot S_{ij}$$

$$\implies 2 \cdot A_{ij} \cdot S_{ij} = 0$$

Dadurch folgt, dass die Multiplikation eines antisymmetrischen Vektors mit einem symmetrischen Vektor 0 ergibt.

---

19. Maxwell-Gleichungen in der Elektrostatik

Erste Maxwell-Gleichung

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$$

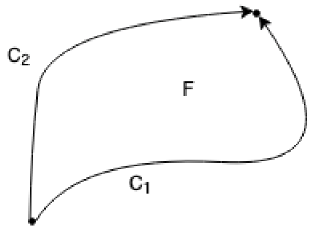
Zweite Maxwell-Gleichung

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

---

20. Wegunabhängigkeit

> Für das elektrische Feld $E^i(x^m)$ weise man mithilfe des Stoke'schen Satzes, die Gleichheit der Transportintegrale entlang zweier Kurven $x_1^i(t)$ und $x_2^i(t)$, welche respektive gleichen Anfangs- und Endpunkt besitzen und eine Fläche F beranden, nach.



Der Satz von Stokes verknüpft allgemein ein Oberflächenintegral über eine (gekrümmte) Fläche mit einem Kurvenintegral über den Rand der Fläche:

$$\int_S dA_i \epsilon_{ijk} \partial_j F_k = \oint_{\partial S} ds_i F_i$$

Angewandt auf das elektrische Feld $E_i(x_m)$ entspricht der Satz von Stokes:

$$\int_F \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} \, dF = \oint_C E \, ds$$

Mit der Fläche F aus der Skizze, kann man das Wegintegral über C auf C_1 und C_2 aufteilen: (Nachdem für eine geschlossene Kurve C_2 gegen den Richtungssinn der Kurve C laufen muss, hat das Integral ein negatives Vorzeichen.)

$$\int_F \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}}_{=0} \, dF = \oint_{C_1} E \, ds - \oint_{C_2} E \, ds$$

Wie bereits bei der Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes in der Elektrostatik gezeigt, ist die Rotation von E gleich 0. (Zudem ist dieser Zusammenhang eine Maxwell-Gleichung.) Das elektrische Feld ist ein **Gradientenfeld**. Damit ergibt sich:

$$0 = \oint_{C_1} E\, ds - \oint_{C_2} E\, ds$$

Vereinfacht zeigt sich somit, dass das elektrische Potential unabhängig von der Kurve C_n (also unabhängig von dem Weg) ist:

$$-\oint_{C_1} E\, ds = -\oint_{C_2} E\, ds$$

Nachsatz: Das elektrische Feld ist der negative Gradient des elektrischen Potentials. Daher gilt der Zusammenhang:

$$V(\boldsymbol{x}) = -\int_{\Gamma} E\, dl$$

---

21. Gradientenfeld

Es gibt für ein Gradientenfeld mehrere äquivalente Definitionen:

1. Ein Vektorfeld $\boldsymbol{F}$ heißt Gradientenfeld, wenn es ein Skalarfeld Φ gibt, sodass gilt $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}\Phi$.
2. Das Kurvenintegral ist wegunabhängig: Der Wert des Kurvenintegrals entlang einer beliebigen Kurve S innerhalb des Feldes ist nur von ihrem Anfangs- und Endpunkt abhängig, nicht dagegen von ihrer Länge.
3. Kurvenintegrale über eine beliebige geschlossene Randkurve S ergeben immer Null: $\oint_S \boldsymbol{F}\, dr = 0$.

Das elektrische Feld E ist ein Gradientenfeld.

---

22. Herleitung des elektrischen Feldes eines Punktdipols

Das Potential eines Punktdipols im Ursprung ist:

$$V = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{p_i \cdot r_i}{r^3}$$

Allgemein ist das elektrische Feld:

$$E = -\nabla V$$

Mit den folgenden Nebenrechnungen kann daraus das elektrische Feld ermittelt werden:

$$\partial_i \left(\frac{r_j}{r^3}\right) = \frac{\delta_{ij}}{r^3} + r_j \cdot \partial_j \left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\partial_j \left(\frac{1}{(r^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \partial_j \left(\frac{1}{(r_k \cdot r_k)^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\partial_i (r_l \cdot r_l)}{(r_k \cdot r_k)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{2 \cdot \delta_{il} \cdot r_l}{r^5}$$

Damit ergibt sich das elektrische Feld zu:

$$E_i = -\frac{p_j}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3 \cdot r_j \cdot \frac{r_i}{r^5}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(3 \cdot \frac{p_j \cdot r_j}{r^5} \cdot r_i - \frac{1}{r^3} \cdot p_i\right)$$

---

23. Bedingungen für Leiter

Feldfreiheit innerhalb eines Leiters

$$E_i\Big|_{L_0} = 0$$

Radiale Ausbreitung des elektrischen Feldes

$$E_i \perp \partial L$$

Äquipotentialfläche

∂L (der Rand eines Leiters) ist eine Äquipotentialfläche

Ladungsverteilungs-freiheit innerhalb eines Leiters

$$\rho(x_m)\Big|_{L_0} = 0 \text{ , da } \partial_i E_i(x_m) = \frac{\rho(x_m)}{\epsilon_0}$$

Der Fluss ist senkrecht zu der Oberfläche

$$E_i \cdot n_i\Big|_{\partial L} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ , mit } n_i = \text{Flächennormale von } \partial L$$

---

24 Herleitung Energie

Ausgangspunkt potenzielle Energie:

$$U_q = qV(x_m)$$

für ein System von N Punktladungen gilt:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{|x_i^m - x_j^m|}$$

$$q_i = \rho(x_m)d^3x$$

$$q_j = \rho(x'_m)d^3x'$$

$$U = \frac{1}{2}\int d^3x d^3x' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(x_m)\cdot\rho(x'_m)}{|x_m - x'_m|}$$

Alle x'_m-Terme werden zu einem $V(x_m)$ zusammengefasst.

$$= \frac{1}{2}\int d^3x \rho(x_m)\cdot V(x_m)$$

1.MG anwenden $\partial_i E_i = \frac{\rho(x_m)}{\varepsilon_0} \to \rho(x_m) = \partial_i E_i \varepsilon_0$:

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon_0}{2}\int \partial_i E_i(x_m)V(x_m)d^3x =$$

Mit umgekehrte Produktregel folgt:

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int \underbrace{\partial_i(E_i(x_m)V(x_m))}_{=0,\text{ durch Vektoridentitäten}} - E_i(x_m)\partial_i V(x_m)d^3x$$

Mittels $E_i = -\partial_i V$ Zusammenhang folgt:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3x E^2(x_m)$$

25 Multipolmoment Formeln

Die gesamte Entwicklung

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + Q_i\frac{r_i}{r^3} + P_{ij}\frac{3\cdot r_i r_j - r^2\delta_{ij}}{2\cdot r^5} + \mathcal{O}(r^{-4})\right)$$

Einzel Momente mittels ρ berechnen:

$$Q = \int \rho(x_m) d^3x$$

$$Q_i = \int \rho(x_m)\cdot x_i d^3x$$

$$P_{ij} = \frac{1}{2}\cdot\int \rho(x_m)\cdot x_i x_j d^3x$$