10. Problem Set - 08.06.2022

Elektrodynamik I - 136.015

Gerechnete Beispiele:
28)
29)
30) a)

28 Helmholtz Spulen

28 Helmholtz Spulen

Zwei kreisförmige dünne Spulen mit Radius R haben N dichte Wicklungen aus dünnem isolierten Draht um die r_3-Achse. Die Mittelpunkte seien bei $r_i = \pm d/2\,\delta_{3i}$ und beide Spulen werden vom gleichen Strom I im gleichen Umlaufsinn durchflossen.

(a) Zeige mit dem Gesetz von Biot–Savart, dass die magnetische Flussdichte entlang der r_3-Achse gegeben ist durch $B_i(r_3) = \frac{\mu_0 I N R^2}{2}\,\delta_{3i}\left(\frac{1}{[(r_3+d/2)^2+R^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(r_3-d/2)^2+R^2]^{3/2}}\right)$. Welchen Umlaufsinn hat der Strom I?

(b) Finde den Spulenabstand d, sodass das Magnetfeld im Zentrum möglichst homogen wird, also $\partial^n B_i/\partial r_3^n$ für möglichst viele Ordnungen n an $r_3 = 0$ verschwindet. Welche Ordnung ist dann die niedrigste nicht-verschwindende Ordnung?

nur (a) oder (b): 2P, (a) und (b): 3P

a)

b)

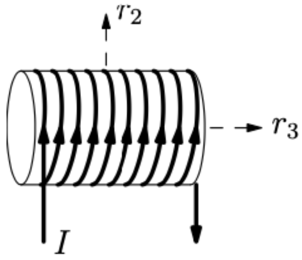
29 Luftspule - Testaufgabe 2019

29 Luftspule – Testaufgabe 2019

Eine zylindrische Spule mit Länge L und Radius R hat N dichte Wicklungen aus dünnem, isolierten Draht, durch den der Strom I fließt. Die Zylinderachse sei die r_3-Achse und der Ursprung sei im Zentrum der Spule.

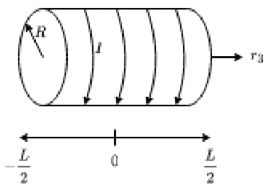
(a) Bestimme die Flächenstromdichte am Zylindermantel und berechne die magnetische Flussdichte B_i im Zentrum und an einem der Enden $r_i = L/2\,\delta_{3i}$. Zeige, dass diese beiden Flussdichten für $L \gg R$ im Verhältnis 2:1 stehen.

(b) Finde die führende Ordnung von $B_i(r_3)$ für große r_3 bei einer festen Geometrie L und R.



nur (a) oder (b): 2P, (a) und (b): 3P

a)



Die Flächenstromdichte K einer Spule ist gemäß *Electromagnetism* von Gerald L. Pollack und Daniel R. Stump, *Chapter 8 Example 6*, allgemein definiert als:

$$K = \frac{N \cdot I}{L}$$

Weiters soll die magentische Flußdichte $\boldsymbol{B}$ an zwei Punkten der Spule ermittelt werden. Allgemein gilt für die den Zusammenhang zwischen der magnetischen Flußdichte $\boldsymbol{B}$ und der magnetischen Feldstärke $\boldsymbol{H}$ gemäß *Electromagnetism* von Gerald L. Pollack und Daniel R. Stump, *Formel 9.26*:

$$\boldsymbol{B} = \mu \cdot \boldsymbol{H}$$

Außerdem ist die magnetische Feldstärke im Zentrum einer Zylinderspule $\boldsymbol{H}_z$ definiert durch: (siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Magnetische_Feldst%C3%A4rke)

$$\boldsymbol{H}_z = \boldsymbol{K} = \frac{N \cdot I}{L} \cdot \vec{e}$$

In unserem Fall entspricht die Richtung der magnetischen Feldstärke im Zentrum einer Zylinderspule $\boldsymbol{H}_z$ demnach r_3:

$$\boldsymbol{H} = \frac{N \cdot I}{L} \cdot \vec{e}_{r_3}$$

Nachdem im Inneren der Zylinderspule ein Vakuum angenommen werden kann, kann die magentische Permeabilität mit μ_0 angenommen werden. Somit folgt für die magnetische Flußdichte im Zentrum der Zylinderspule $\boldsymbol{B}_z$:

$$\boldsymbol{B}_z = \mu_0 \cdot \boldsymbol{H}_z = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{L} \cdot \vec{e}_{r_3}$$

---

b)

30 Koaxialkabel

30 Koaxialkabel

Ein Koaxialkabel besteht aus einem zylindrischen Draht mit Radius a und einem umgebenden koaxialen Hohlzylinder mit Innen- und Außenradius b und c. Durch den Draht fließt ein konstanter Strom I und durch den Hohlzylinder fließt der Rückstrom I in die Gegenrichtung, jeweils gleichmäßig auf den ganzen Querschnitt verteilt.

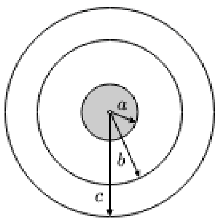
(a) Berechne mit dem Ampèreschen Gesetz die magnetische Flußdichte $B_i(r)$ als Funktion des Abstandes r von der Achse für alle r und skizziere sie.

(b) Bestimme die im Magnetfeld enthaltene Energie pro Länge aus $U = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r B_i^2(r_m) = \frac{1}{2}LI^2$ und zeige, dass die Induktivität pro Länge L/l für dünne Hohlzylinder $c-b \ll b$ gegeben ist durch:

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{24\pi} \left(3 + 12 \log(b/a) + 4 \frac{c-b}{b} \right).$$

(a): 2P, (b): 1P

a)



Die integrale Form des Ampéreschen Gesetzes lautet gemäß *Electromagnetism* von Gerald L. Pollack und Daniel R. Stump, *Formel 8.42*:

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot dl = \mu_0 \cdot \int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{A} = \mu_0 \cdot I_{enclosed}$$

Basierend auf diesem Zusammenhang kann in weiterer Folge die magnetische Flußdichte $\boldsymbol{B}$ in allen drei Bereichen ermittelt werden.

Als erstes wird die magnetische Flußdichte $\boldsymbol{B}$ im Bereich $r \leq a$ betrachtet. Nachdem der Radius r jeden Wert zwischen 0 und a annehmen kann, kann nicht davon ausgegangen werden, dass der gesamte Strom I von dem Radius r umschlossen wird. Entsprechend berechnen wir in dem ersten Bereich die magnetische Flußdichte $\boldsymbol{B}$ über die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$:

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{B} \cdot dl = \mu_0 \cdot \int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Das Integral über die magnetische Flußdichte $\boldsymbol{B}$ wird über den Rand ∂S einer eingeschlossenen Fläche S berechnet. In unserem Fall entspricht die eingeschlossene Fläche S einem Kreis mit Radius r. Entsprechend ist der Rand ∂S der Umfang des Kreises. Für diesen gilt: $\partial S = 2\pi \cdot r$
Das Integral über die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$ wird über die Fläche S integriert. Diese entspricht wie bereits festgestellt einem Kreis, wodurch für die Fläche S folgt: $S = r^2 \cdot \pi$

Somit kann die magnetische Flußdichte des ersten Bereichs $\boldsymbol{B}_1$ wie folgt berechnet werden:

$$2\pi \cdot \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}_1 = \mu_0 \cdot \boldsymbol{r}^2 \cdot \pi \cdot \boldsymbol{J}$$

Die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$ entspricht gemäß ihrer Definition:

$$\boldsymbol{J} = \frac{I}{\boldsymbol{A}}$$

Die Fläche $\boldsymbol{A}$ entspricht dabei der Querschnittsfläche, durch welche gemäß der Angabe der Strom I fließt. Besagte Querschnittsfläche des inneren Drahtes hat den Radius a. Somit folgt:

$$\boldsymbol{J} = \frac{I}{\boldsymbol{a}^2 \cdot \pi}$$

Dieser Zusammenhang kann nun in die Beziehung zwischen der magnetischen Flußdichte im ersten Bereich $\boldsymbol{B}_1$ eingesetzt werden, wodurch folgt:

$$2\pi \cdot \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}_1 = \mu_0 \cdot \boldsymbol{r}^2 \cdot \cancel{\pi} \cdot \frac{I}{\boldsymbol{a}^2 \cdot \cancel{\pi}}$$

Daraus folgt für die magnetische Flußdichte im ersten Bereich $\boldsymbol{B}_1$:

$$\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot \boldsymbol{r}^{\cancel{2}}}{\boldsymbol{a}^2 \cdot 2\pi \cdot \cancel{\boldsymbol{r}}} = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{a}^2 \cdot 2\pi}$$

Der zweite Bereich wird mit $a \leq r \leq b$ angenommen. Dieser Bereich ist gemäß der Angabe stromfrei. Für den zweiten Bereich gelten die selben geometrischen Annahmen wie bereits im ersten Bereich. In diesem Fall kann jedoch der eingeschlossene Strom $I_{enclosed}$ eindeutig mit I angenommen werden, da sich dieser auch mit einem veränderten Radius r nicht ändert. Das Ampéresche Gesetz kann demnach für den zweiten Bereich wie folgt angeschrieben werden:

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{B} \cdot dl = \mu_0 \cdot I_{enclosed}$$

Mit den geometrischen Bestimmungen des ersten Bereichs folgt daraus:

$$2\pi \cdot \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}_2 = \mu_0 \cdot I_{enclosed}$$

Damit folgt für die magnetische Flußdichte im zweiten Bereich $\boldsymbol{B}_2$:

$$\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi \cdot \boldsymbol{r}}$$

Für den Bereich $b \leq r \leq c$ gelten weiterhin die Annahmen des ersten Bereiches, wobei das Vorgehen ebenfalls analog zu dem ersten Bereich ist. Nachdem der dritte Bereich ebenfalls von einem Strom $-I$ durchflossen ist, erfolgt die Berechnung der magnetischen Flußdichte im dritten Bereich $\boldsymbol{B}_3$ erneut über die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$. Somit folgt für das Ampéresche Gesetz:

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{B} \cdot dl = \mu_0 \cdot \int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Setzt man erneut die geometrischen Zusammenhänge des ersten Bereiches ein, folgt daraus:

$$2\pi \cdot \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}_{3_{self}} = \mu_0 \cdot \boldsymbol{r}^2 \cdot \pi \cdot \boldsymbol{J}$$

Die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$ entspricht gemäß ihrer Definition:

$$\boldsymbol{J} = \frac{I}{\boldsymbol{A}}$$

Die gesamte Querschnittsfläche $\boldsymbol{A}$ des dritten Bereiches entspricht dabei:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^2 \cdot \pi - \boldsymbol{b}^2 \cdot \pi = \pi \cdot (\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2)$$

Der Strom I entspricht im dritten Bereich, gemäß der Angabe:

$$I = -I$$

Somit folgt für die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$ im dritten Bereich:

$$\boldsymbol{J} = -\frac{I}{\pi \cdot (\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2)}$$

Eingesetzt in den Zusammenhang zwischen der magnetischen Flußdichte im dritten Bereich $\boldsymbol{B}_{3_{self}}$ und der elektrischen Stromdichte $\boldsymbol{J}$ ergibt sich damit: (Der Bereich $\boldsymbol{r}^2 \cdot \pi - \boldsymbol{b}^2 \cdot \pi = (\boldsymbol{r}^2 - \boldsymbol{b}^2) \cdot \pi$ entspricht der Fläche, durch welche die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$ bei einem Radius $\boldsymbol{r}$ geht.)

$$2\pi \cdot \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}_{3_{self}} = \mu_0 \cdot (\boldsymbol{r}^2 - \boldsymbol{b}^2) \cdot \pi \cdot \left(-\frac{I}{\pi \cdot (\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2)}\right)$$

Die magnetische Flußdichte im dritten Bereich $\boldsymbol{B}_3$ folgt damit zu:

$$\boldsymbol{B}_{3_{self}} = \mu_0 \cdot \frac{(\boldsymbol{r}^2 - \boldsymbol{b}^2) \cdot \cancel{\pi}}{2\pi \cdot \boldsymbol{r}} \cdot \left(-\frac{I}{\cancel{\pi} \cdot (\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2)}\right) = -\mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi \cdot \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\boldsymbol{r}^2 - \boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2}$$

Weiters muss in dem dritten Bereich die magnetische Flußdichte des zweiten Bereiches $\boldsymbol{B}_2$ ebenfalls berücksichtigt werden, nachdem diese in dem dritten Bereich ebenfalls wirkt. Somit ergibt sich für die finale Ermittelung der magnetischen Flußdichte im dritten Bereich $\boldsymbol{B}_3$:

$$\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_{3_{self}}$$

Mit den Ergebnissen für $\boldsymbol{B}_2$ und $\boldsymbol{B}_{3_{self}}$ folgt für $\boldsymbol{B}_3$ final:

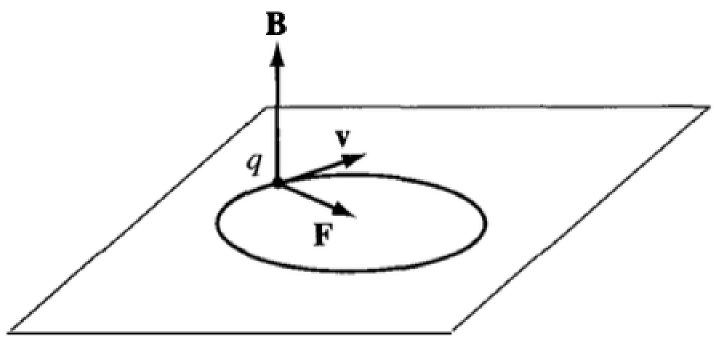
$$\boldsymbol{B}_3 = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi \cdot \boldsymbol{r}} - \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi \cdot \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\boldsymbol{r}^2 - \boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2}$$

$$\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{r}) = \mu \cdot \frac{I}{2\pi \cdot \boldsymbol{r}} \cdot \left(1 - \frac{\boldsymbol{r}^2 - \boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2}\right)$$

Im vierten Bereich, für $\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{r}$, entspricht die magnetische Flußdichte $\boldsymbol{B}_4$ gleich 0:

$$\boldsymbol{B}_4(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{c}) = \mu \cdot \frac{I}{2\pi \cdot \boldsymbol{r}} \cdot \left(1 - \frac{\boldsymbol{r}^2 - \boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2}\right) = \mu \cdot \frac{I}{2\pi \cdot \boldsymbol{r}} \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2}}_{=1}\right)$$

$$\boldsymbol{B}_4(\boldsymbol{r}) = \mu \cdot \frac{I}{2\pi \cdot \boldsymbol{r}} \cdot \underbrace{(1 - 1)}_{=0} = 0$$



Die Ausbreitungsrichtung aller magnetischer Flußdichten $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$ und $\boldsymbol{B}_4$ ist jeweils $\vec{e}_\varphi$:

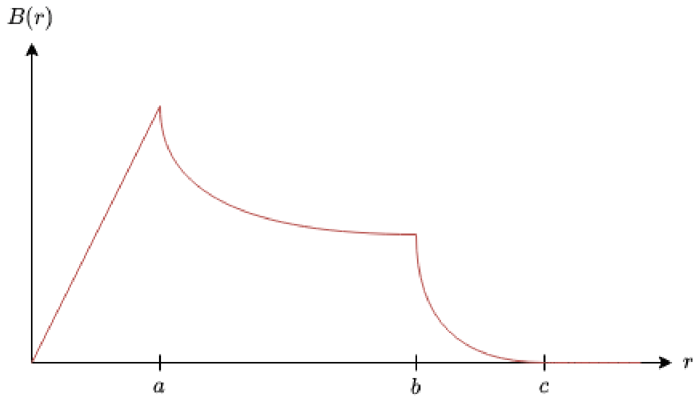
$$\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot r}{a^2 \cdot 2\pi} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi \cdot r} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{r}) = \mu \cdot \frac{I}{2\pi \cdot r} \cdot \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right) \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{B}_4(\boldsymbol{r}) = 0$$

Skizziert entspricht die magnetische Flußdichte $\boldsymbol{B}$ des Koaxialkabels abhängig von dem Radius $\boldsymbol{r}$:



b)