1. Problem Set - 09.03.2022

Elektrodynamik I - 136.015

Allgemeine Angabe

$$Gradient: \ (\boldsymbol{\nabla} g)_i = \partial_i g$$

$$Divergenz: \ \boldsymbol{\nabla} * \boldsymbol{F} = \partial_j F_j$$

$$Rotation: \ (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j F_k$$

1 Identitäten mit Gradient, Divergenz und Rotation

Seien $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F_i(r_1, r_2, r_3)$ und 1$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = G_i(r_1, r_2, r_3)$ beliebige Vektorfelder und sei $g(\boldsymbol{r}) = g(r_1, r_2, r_3)$ ein beliebiges skalares Feld. Übersetze in die Indexschreibweise und zeige:

(a) $\boldsymbol{\nabla} * (g\boldsymbol{F}) = g\boldsymbol{\nabla} * \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\nabla} g * \boldsymbol{F}$

$$Divergenz = \boldsymbol{\nabla} * \boldsymbol{F} \implies \boldsymbol{\nabla} * (g\boldsymbol{F}) = \partial_j (gF)_j$$

Aus der Produktregel für Ableitungen folgt:

$$\partial_j (gF)_j = \partial_j g * F_j + g * \partial_j F_j$$

Durch Einsetzen der Formeln für Gradient und Divergenz ergibt sich:

$$\partial_j g * F_j + g * \partial_j F_j = \underbrace{(\boldsymbol{\nabla} g)}_{Gradient} * \boldsymbol{F} + g \underbrace{\boldsymbol{\nabla} * \boldsymbol{F}}_{Divergenz}$$

(b) $\boldsymbol{\nabla} \times (g\boldsymbol{F}) = g\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\nabla} g \times \boldsymbol{F}$

$$Rotation = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})_i = \epsilon_{ijk} * \partial_j F_k \implies \boldsymbol{\nabla} \times (g * \boldsymbol{F}) = \epsilon_{ijk} * \partial_j (g * F)_k$$

Aus der Produktregel für Ableitungen folgt:

$$\epsilon_{ijk} * \partial_j (g * F)_k = \epsilon_{ijk} * (\partial_j g * F_k + g * \partial_j F_k) = \epsilon_{ijk} * \partial_j g * F_k + \epsilon_{ijk} * g * \partial_j F_k$$

Durch Einsetzen der Formeln aus der allgemeinen Angabe folgt:

$$\epsilon_{ijk} * \underbrace{\partial_j g}_{(\partial g)_j = (\boldsymbol{\nabla} g)_j} * F_k + g * \epsilon_{ijk} * \underbrace{\partial_j F_k}_{\boldsymbol{\nabla} * \boldsymbol{F}} = \boldsymbol{\nabla} g \times \boldsymbol{F} + g \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$$

(c) $\boldsymbol{\nabla} * (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} * (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} * (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{G})$

$$\boldsymbol{\nabla} * (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \partial_j (\epsilon_{ijk} * F_j * G_k) = \epsilon_{ijk} * \partial_j * (F_j * G_k)$$

Aus der Produktregel für Ableitungen folgt:

$$\epsilon_{ijk} * \partial_j * (F_j * G_k) = \epsilon_{ijk} * \partial_j F_j * G_k + \epsilon_{ijk} * F_j * \partial_j G_k$$

Durch Vertauschung der Indizes des Levi-Civita-Symbols folgt:

$$\epsilon_{ijk} * \partial_j F_j * G_k + \epsilon_{ijk} * F_j * \partial_j G_k = G_k * \epsilon_{ijk} * \partial_j F_j - F_j * \epsilon_{ikj} * \partial_j G_k$$

Durch Einsetzen der Formeln aus der allgemeinen Angabe folgt:

$$G_k * \epsilon_{ijk} * \underbrace{\partial_j F_j}_{\boldsymbol{\nabla} * \boldsymbol{F}} - F_j * \epsilon_{ikj} * \underbrace{\partial_j G_k}_{\boldsymbol{\nabla} * \boldsymbol{G}} = \boldsymbol{G} * (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} * (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{G})$$

(d) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{\nabla} * (\boldsymbol{\nabla} * \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{\nabla}^2 * \boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) = \epsilon_{ijk} * \partial_j (\epsilon_{klm} * \partial_l * F_m) = (-1) * (-1) * \epsilon_{kij} * \epsilon_{klm} * \partial_j * \partial_l * F_m$$

Unter Anwendung der Beziehung $\epsilon_{kij} * \epsilon_{klm} = \delta_{il} * \delta_{jm} - \delta_{im} * \delta_{jl}$ folgt:

$$\epsilon_{kij} * \epsilon_{klm} * \partial_j * \partial_l * F_m = (\delta_{il} * \delta_{jm} - \delta_{im} * \delta_{jl}) * \partial_j * \partial_l * F_m$$

Durch Auflösen ergibt sich:

$$\delta_{il} * \delta_{jm} * \partial_j * \partial_l * F_m - \delta_{im} * \delta_{jl} * \partial_j * \partial_l * F_m = \partial_m * \partial_i * F_m - \partial_l * \partial_l * F_i$$

$$\partial_i * \partial_m * F_m - \partial_l * \partial_l * F_i = \boldsymbol{\nabla} * (\boldsymbol{\nabla} * \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{\nabla}^2 * \boldsymbol{F}$$

2 Rotations- und Divergenzfreiheit

Ein Vektorfeld hat die Form $F_i(r_1, r_2, r_3) = r_i f(r)$ mit r sodass $r^2 = r_j r_j$.

(a) Zeige, dass das Feld überall wirbelfrei ist: $\epsilon_{ijk}\partial_j F_k = 0 \; \forall i, r_1, r_2, r_3$

Die Rotation von F ist definiert als

$$rot\ F = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \epsilon_{ijk} * \partial_j * F_k = \epsilon_{ijk} * \partial_j (r_k * f(r))$$

Aus der Produktregel für Ableitungen folgt:

$$\epsilon_{ijk} * \partial_j (r_k * f(r)) = \underbrace{\epsilon_{ijk} * \partial_j r_k * f(r)}_{\partial_j r_k = \delta_{jk} \implies \epsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0} + \epsilon_{ijk} * r_k * \partial_j f(r) = \epsilon_{ijk} * r_k * \partial_j f(r_l)$$

Nach dem Anwenden der Kettenregel für $\partial_j f(r_l)$ ergibt sich:

$$\epsilon_{ijk} * \partial_j f(r_l) * r_k = \epsilon_{ijk} * r_k * f\acute{}(r_l) * \partial_j r_l$$

Nach dem Einsetzen von $r \to r^2 = r_j r_j$ aus der Angabe folgt:

$$\epsilon_{ijk} * r_k * f\acute{}(r_l) * \partial_j (\sqrt{r_l^2}) = \epsilon_{ijk} * r_k * f\acute{}(r_l) * \underbrace{\partial_j (\sqrt{r_l * r_l})}_{\frac{r_l}{|r_l|}} = \epsilon_{ijk} * r_k * f\acute{}(r_l) * \frac{1}{2 * \sqrt{r_l * r_l}} \partial_j (r_l * r_l)$$

Aus der Produktregel für Ableitungen folgt:

$$\epsilon_{ijk} * r_k * f\acute{}(r_l) * \frac{1}{2 * \sqrt{r_l * r_l}} \partial_j (r_l * r_l) = \epsilon_{ijk} * r_k * f\acute{}(r_l) * \frac{1}{2 * \sqrt{r_l * r_l}} \underbrace{(\partial_j r_l * r_l + r_l * \partial_j r_l)}_{2 * r_l * (\partial_j r_l)}$$

Durch Kürzen reduziert sich der Ausdruck auf:

$$\epsilon_{ijk} * r_k * f\acute{}(r_l) * \frac{1}{\underbrace{\sqrt{r_l * r_l}}_{|r_l|}} \underbrace{(r_l * \underbrace{\partial_j r_l}_{\delta_{jl}})}_{r_j} = \epsilon_{ijk} * r_j * r_k * f\acute{}(r_l) * \frac{1}{|r_l|}$$

Da bei dem Ausdruck $\epsilon_{ijk} * r_j * r_k$ die Indizes j und k ungleich sind (also gilt $j \neq k$) entspricht dieser Ausdruck 0, wodurch das Gesamtergebnis ebenfalls zu 0 ausfällt.

(b) Für welche Funktionen $f(r)$ verschwindet auch die Divergenz (fast) überall: $\partial_j F_j = 0$ Gib die allgemeinste Form der Funktion $f(r)$ an. Wo verschwindet sie nicht?

$$div\ F = \boldsymbol{\nabla} * \boldsymbol{F} = \partial_j F_j = \partial_j (r_j * f(r)) = 0$$

Aus der Produktregel für Ableitungen folgt:

$$\partial_j (r_j * f(r)) = \underbrace{(\partial_j r_j)}_{\delta_{jj}} * f(r) + r_j * (\partial_j f(r))$$

Nach dem Anwenden der Kettenregel für $\partial_j f(r_l)$ und der Berechnungen aus Beispiel 2.b ergibt sich:

$$\underbrace{\delta_{jj}}_{n} * f(r_l) + r_j * f\acute{}(r_l) * \frac{1}{\underbrace{\sqrt{r_l * r_l}}_{|r_l|}} * (r_l * \underbrace{\partial_j r_l}_{\delta_{jl}}) = n * f(r_l) + f\acute{}(r_l) * \frac{1}{|r_l|} * (r_l * \underbrace{r_j * \delta_{jl}}_{r_l})$$

Durch die Umstellung der Multiplikation im letzten Schritt und Kürzen im folgenden Schritt ergibt sich:

$$n * f(r_l) + f´(r_l) * \frac{\overbrace{r_l * r_l}^{|r_l|*|r_l|}}{|r_l|} = n * f(r_l) + f´(r_l) * |r_l|$$

Durch erneute Umformungen folgt:

$$f´(r_l) = -f(r_l) * \frac{n}{|r_l|} \implies \frac{f´(r_l)}{f(r_l)} = -n * \frac{1}{|r_l|} \implies \frac{\partial f(r_l)}{\partial r_l} * \frac{1}{f(r_l)} = -n * \frac{1}{|r_l|}$$

Durch Umformen und Integrieren über den gesamten Term ergibt sich:

$$\underbrace{\int \frac{1}{f(r_l)} \partial f(r_l)}_{=\ln(f(r_l))} = -n * \underbrace{\int \frac{1}{|r_l|} \partial r_l}_{\ln(|r_l|)}$$

Für $f(r_l)$ ergibt sich somit schlussendlich:

$$f(r) = |r|^{-n}$$

→ Für Funktionen gemäß $f(r)$ ist die Divergenz (fast) überall gleich 0. Einzig im Ursprung trifft diese Aussage nicht zu.

3 Makroskopische Definition der Rotation

Die Rotation (curl) eines Feldes $F_i(r_1, r_2, r_3)$ in einem Punkt $\boldsymbol{s}$ ist das infinitesimale Kurvenintegral pro Fläche A entlang einer Kurve C, die diese Fläche um den Punkt im Gegenuhrzeigersinn einschließt. Es ist abhängig von der Orientierung der Fläche, gegeben durch den (Einheits-) Normalvektor n_i:

$$n_i \epsilon_{ijk} \partial_j F_k = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) * d\boldsymbol{r}$$

mit dem Kurvenintegral $\oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) * d\boldsymbol{r} = \int_a^b dt F_j(r_1, r_2, r_3) \partial_t r_j(t)$ für eine Kurve C, parametrisiert durch $r_1(t)$, $r_2(t)$, $r_3(t)$ mit $t \in [a, b]$ und $r_i(a) = r_i(b)$.
Berechne die Rotation des Feldes $F_i = \epsilon_{i3k} r_k$ in einem beliebigen Punkt $\boldsymbol{s}$

(a) mikroskopisch, durch Ableitung der kartesischen Koordinaten $\epsilon_{ijk} \partial_j F_k$, und

Durch Einsetzen der Gleichung für das Feld F_i folgt:

$$n_i \epsilon_{ijk} \partial_j F_k = n_i \epsilon_{ijk} \partial_j (\underbrace{\epsilon_{k3m} r_m}_{F_k})$$

Unter Berücksichtigung des Zusammengangs $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \det \begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{bmatrix} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ ergibt sich daraus:

$$n_i * \epsilon_{ijk} * \epsilon_{k3m} * \partial_j r_m = n_i * (\delta_{i3}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j3}) * \partial_j r_m$$

$$\underbrace{n_i * \delta_{i3}}_{n_3} * \underbrace{\underbrace{\delta_{jm} * \partial_j}_{\partial_m} * r_m}_{\delta_{mm} = n = allg.\ 3} - \underbrace{n_i * \delta_{im}}_{n_m} * \underbrace{\underbrace{\delta_{j3} * \partial_j}_{\partial_3} * r_m}_{\delta_{3m}}$$

Zusammengefasst ergibt sich daraus:

$$\underbrace{n_3 * n}_{3*n_3} - \underbrace{n_m * \delta_{3m}}_{n_3} = 3 * n_3 - n_3 = \underline{\underline{2 * n_3}}$$

(b) makroskopisch, durch obige Limesbildung mit freisförmigen Kurven C um s, parametrisiert durch $r_1(t) = s_1 + R\cos(t)$, $r_2(t) = s_2 + R\sin(t)$, $r_3(t) = s_3$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Welche Orientierung n_i haben die Kurven C und welche Fläche A schließen sie ein?

Mit den Werten aus der Angabe folgt für den Vektor $r_i(t)$:

$$r_i(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 + R * \cos(t) \\ s_2 + R * \sin(t) \\ s_3 \end{bmatrix}$$

Nach der Zeit abgeleitet ergibt sich für den Vektor $r_i(t)$:

$$\partial_t r_i(t) = \begin{bmatrix} -R * \sin(t) \\ R * \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mit dem Term $F_i = \epsilon_{i3k} r_k$ aus der Angabe folgt:

$$\oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) * d\boldsymbol{r} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \int_a^b dt F_j(r_1, r_2, r_3) \partial_t r_i(t) = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \int_a^b dt * \epsilon_{i3k} * r_k * \partial_t r_i(t)$$

Durch Einsetzen des Vektors für $\partial_i r_i(t)$ ergibt sich:

$$\lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \int_a^b dt * \epsilon_{i3k} * r_k * \begin{bmatrix} -R * \sin(t) \\ R * \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Der Term $\epsilon_{i3k} * r_k * \begin{bmatrix} -R * \sin(t) \\ R * \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}$ wird folgend zeilenweise multipliziert:

$$= \epsilon_{i3k} * r_k * \partial_t r_1(t) + \epsilon_{k3i} * r_i * \partial_t r_2(t) + 0$$

Durch Einsetzen der numerischen Werte für $\epsilon\ (mit\ i = 1\ und\ k = 2)$ und Einsetzen der Terme aus $\partial_t r_i(t)$ folgt:

$$\underbrace{\epsilon_{i3k}}_{\underbrace{\epsilon_{132}}_{-1}} * r_k * \partial_t r_1(t) + \underbrace{\epsilon_{k3i}}_{\underbrace{\epsilon_{231}}_{+1}} * r_1 * \partial_t r_2(t) = (-1) * r_2 * \partial_t r_1(t) + (+1) * r_1 * \partial_t r_2(t)$$

$$-(s_2 + R * \sin(t)) * (-R * \sin(t)) + (s_1 + R * \cos(t)) * (R * \cos(t))$$

Ausmultiplizieren und trigonometrische Umformungen ergeben:

$$s_2 * R * \sin(t) + \underbrace{R^2 * \sin^2(t) + R^2 * \cos^2(t)}_{=R^2 * 1} + s_1 * R * \cos(t)$$

In das Integral eingesetzt folgt:

$$\lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \int_a^b dt(R^2 + R * (s_1 * \cos(t) + s_2 * \sin(t)))$$

Mit den Grenzen $[0, 2\pi]$ für t aus der Angabe folgt:

$$\lim_{A \to 0} \frac{1}{A} (R^2 * t + R * (s_1 * \underbrace{\sin(t)}_{=0} + s_2 * \underbrace{\cos(t)}_{=+1-1}))_0^{2\pi}$$

$$\lim_{A \to 0} \frac{1}{A} (2\pi * R^2)$$

Indem die Formel $A = R^2 * \pi$ eingesetzt wird, ergibt sich final:

$$\lim_{A \to 0} \frac{1}{A} (2 * A) = \underline{\underline{2}}$$

Für die Orientierung der Kurven C folgt:

$$n_i \epsilon_{ijk} \partial_j F_k = 2$$

Mit dem Ergebnis aus Unterpunkt 3.a folgt:

$$2 * n_3 = 2$$

Demnach ist n_3 gleich 1. Das Ergebnis ist unabhängig von n_1 und n_2.
Folgend muss die Orientierung normal auf die 3-Achse und gegen den Uhrzeigersinn sein. Die eingeschlossene Fläche ist $R^2\pi$.

Anhang

Indexschreibweise - Rechenregeln und Umformungen

- $Inneres Produkt: \ a * b \to a_i b_i$
- $Kreuzprodukt: \ \vec{a} \times \vec{b} \to \epsilon_{ijk} a_j b_k$
- $\partial_i x_j = \delta_{ij}$
- $\delta_{ij} a_i = a_j$
- $\partial_i x_i = \delta_{ii} = n$
- $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \det \begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{bmatrix} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$

Levi-Civita-Symbol

Das Levi-Civita-Symbol ändert unter Vertauschung zweier Indizes das Vorzeichen.
Zum Beispiel:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$$

Produktregel für Ableitungen

$$f(x) = u(x) * v(x) \implies f´(x) = u(x) * v´(x) + u´(x) * v(x)$$