3. Problem Set - 23.03.2022

Elektrodynamik I - 136.015

7 Satz von Gauß und Stokes

7 Satz von Gauß und Stokes

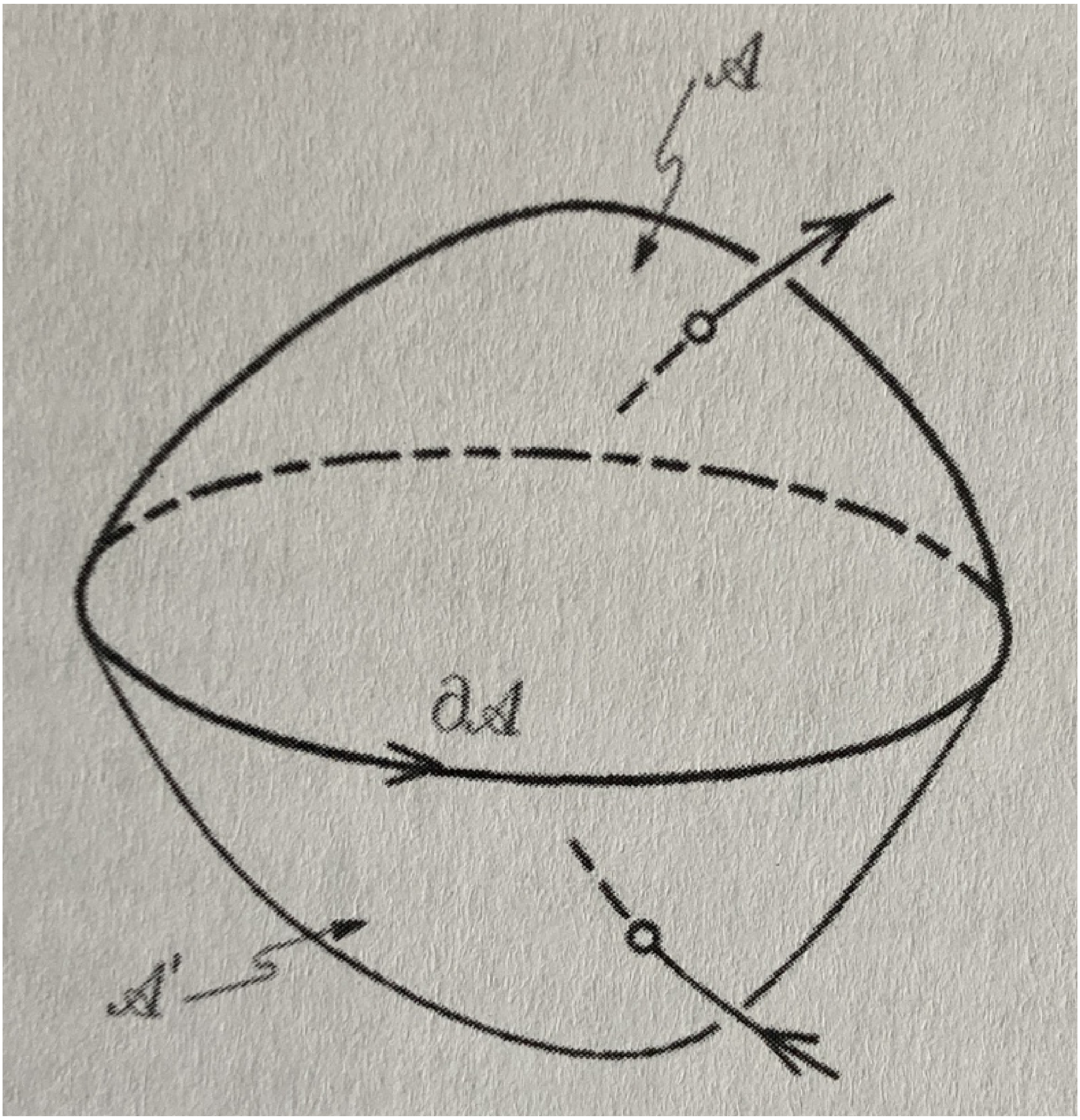
Seien S_1 und S_2 zwei offene Flächen, die von der gleichen Kurve C begrenzt werden. Zusammen schliessen $S_1 \cup S_2$ das Volumen V ein und wir orientieren die Flächen so, dass $d\boldsymbol{A}$ stets von V nach außen zeigt. Skizziere S_1, S_2 und C und zeige, für ein beliebiges Vektorfeld $F_i(r_1, r_2, r_3)$ gilt

$$\int_{S_1} dA_i \, \epsilon_{ijk} \partial_j F_k = - \int_{S_2} dA_i \, \epsilon_{ijk} \partial_j F_k$$

(a) mithilfe des Satzes von Gauß,

(b) mithilfe des Satzes von Stokes.

a)



Quelle: Vorlesungen über die Grundlagen der Elektrotechnik - Band 2, Adalbert Prechtl, Seite 14. $A = S_1$, $A' = S_2$ und $\partial A = C$. (Der untere Pfeil muss theoretisch invertiert werden.)

Der Satz von Gauß besagt, dass das Volumensintegral einer Divergenz eines Vektorfeldes gleichbedeutend mit dem Integral des Randes multipliziert mit dem Normalvektor und dem Vektorfeld selbst ist. Er ist für ein Vektorfeld $\vec{F}$ mit dem Volumen V und dem Rand ∂V definiert als:

$$\int_V div\, \vec{F}\, dV = \oint_A \vec{F}\, d\vec{A}$$

Gemäß der Angabe ist die Gültigkeit der folgende Beziehung zu zeigen:

$$\int_{S_1} dA_i \cdot \epsilon_{ijk} \cdot \partial_j F_k = - \int_{S_2} dA_i \cdot \epsilon_{ijk} \cdot \partial_j F_k$$

$$\int_{S_1} \underbrace{\epsilon_{ijk} \cdot \partial_j F_k}_{=rot\vec{F}} \cdot dA_i + \int_{S_2} \underbrace{\epsilon_{ijk} \cdot \partial_j F_k}_{=rot\vec{F}} \cdot dA_i = 0$$

Diese Beziehung betrifft die Fläche eines Volumens. Gemäß des Satzes von Gauß können wir jedoch mit dem Volumen V auch schreiben:

$$= \int_V \underbrace{\partial_i(\epsilon_{ijk} \cdot (\partial_j F_k))}_{=div(rot\vec{F})} dV$$

Nachdem gilt $div(rot\vec{F}) = 0$, (Beweis siehe Anhang) ergibt sich auch dieser Term zu 0, womit die folgende Beziehung gezeigt wurde: (für die Gültigkeit muss $\vec{F}$ mindestens zweimal stetig differenzierbar sein. → Satz von Schwarz)

$$\int_{S_1} rot\vec{F}\, d\vec{A} + \int_{S_2} rot\vec{F}\, d\vec{A} = \int_V div(rot\vec{F}) d\vec{V} = 0$$

b)

Der Satz von Stokes verknüpft ein Oberflächenintegral über eine (gekrümmte) Fläche mit einem Kurvenintegral über den Rand der Fläche. Er is definiert als:

$$\int_A rot\vec{F}\, d\vec{A} = \oint_C \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$\int_{\partial A = C_1} F_i\, dx_i = \int_A \epsilon_{ijk} \cdot \partial_j F_k\, dA_i$$

$$\int_{C_2} F_i\, dx_i = \int_{A'} \epsilon_{ijk} \cdot \partial_j F_k\, dA_i$$

Aufgrund des gegensinnigen Durchlaufes von C_1 und C_2 folgt:

$$\int_{C_1} F_i\, dx_i = -\int_{C_2} F_i\, dx_i$$

$$= \int_{C_1} F_i\, dx_i + \int_{C_2} F_i\, dx_i = 0$$

$$\implies \int_A \epsilon_{ijk} \cdot \partial_j F_k\, dA_i + \int_{A'} \epsilon_{ijk} \cdot \partial_j F_k\, dA_i = 0$$

8 Regularisierung des Coulomb Feldes

8 Regularisierung des Coulomb Feldes

Wir modifizieren das elektrische Feld einer Punktladung Q im Ursprung zu

$$E_i(r_1, r_2, r_3) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_i}{(r^2 + \varepsilon^2)^{3/2}}$$

mit $r = \sqrt{r_j r_j}$ und $\varepsilon > 0$, sodass es überall regulär ist mit $E_i E_i < \infty$, und $\lim_{\varepsilon\to 0} E_i$ dem singulären Feld einer Punktladung entspricht.

(a) Berechne die Divergenz $\partial_i E_i$ als Funktion von r und skizziere sie für $\varepsilon \ll 1$, ≈ 1 und $\gg 1$.

(b) Zeige, für jede Kugel K im Ursprung mit Radius $R > 0$ und Oberfläche S gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_K d^3V\, \partial_i E_i = \lim_{\varepsilon\to 0} \oint_S dA_i\, E_i = \frac{Q}{\epsilon_0}\,.$$

a)

Gemäß der Angabe soll die Divergenz $\partial_i E_i$ als Funktion von r berechnet werden:

$$\partial_i E_i = \partial_i \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_i}{(r^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Durch die Linearität der Ableitung und die Beziehung $r = \sqrt{r_j \cdot r_j}$ aus der Angabe folgt:

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \partial_i \left(\frac{r_i}{(r_j r_j + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \partial_i \left(r_i \cdot (r_j r_j + \epsilon^2)^{-\frac{3}{2}} \right)$$

Im Weiteren kann nun die Produktregel für Ableitungen angewandt werden:

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\underbrace{\partial_i r_i}_{=\delta_{ii}=n} \cdot (r_j r_j + \epsilon^2)^{-\frac{3}{2}} + r_i \cdot \partial_i ((r_j r_j + \epsilon^2)^{-\frac{3}{2}}) \right)$$

Durch Anwenden der Kettenregel auf den zweiten Teil des Termes folgt:

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(n \cdot (r_j r_j + \epsilon^2)^{-\frac{3}{2}} + r_i \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (r_j r_j + \epsilon^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot \partial_i (r_j r_j) \right)$$

Nun kann $\partial_i(r_j r_j)$ gemäß der Produktregel aufgelöst werden:

$$\partial_i(r_j r_j) = \partial_i r_j \cdot r_j + r_j \cdot \partial_i r_j = 2 \cdot r_j \cdot \underbrace{\partial_i r_j}_{=\delta_{ij}} = 2 \cdot \underbrace{r_j \cdot \delta_{ij}}_{=r_i} = 2 \cdot r_i$$

Gesamt ergibt sich somit:

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(n \cdot (r_j r_j + \epsilon^2)^{-\frac{3}{2}} - \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot r_i^2 \cdot (r_j r_j + \epsilon^2)^{-\frac{5}{2}} \right)$$

n steht für die Anzahl der Dimensionen. Entsprechend können wir in unserem Fall $n = 3$ einsetzen:

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(3 \cdot (r_j r_j + \epsilon^2)^{-\frac{3}{2}} - 3 \cdot r_i^2 \cdot (r_j r_j + \epsilon^2)^{-\frac{5}{2}} \right)$$

$$= 3 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left((r_j r_j + \epsilon^2)^{-\frac{3}{2}} - r_i^2 \cdot (r_j r_j + \epsilon^2)^{-\frac{5}{2}} \right)$$

Umgeformt kann man nun also schreiben:

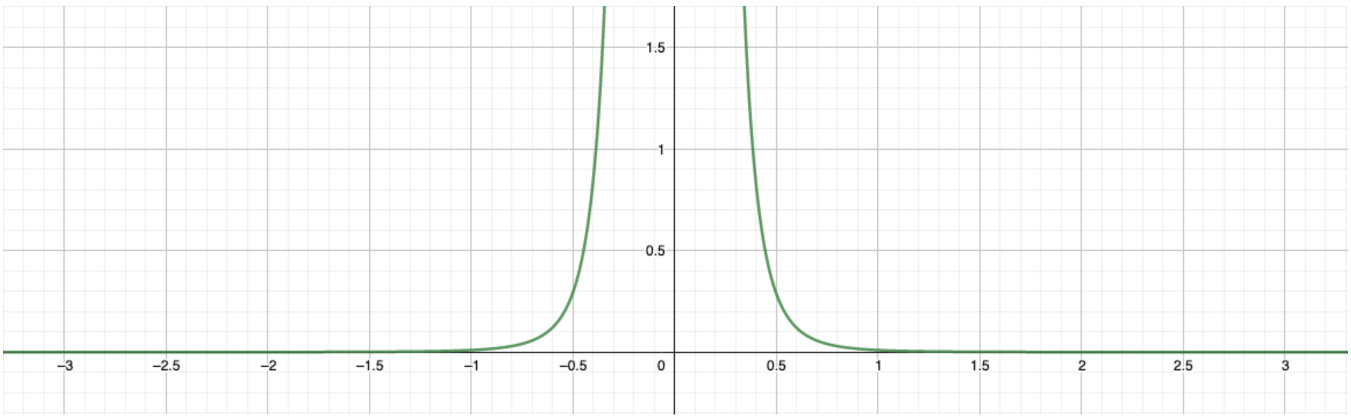
$$= 3 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left((r_j r_j + \epsilon^2)^{\frac{2}{2}} \cdot (r_j r_j + \epsilon^2)^{-\frac{5}{2}} - r_i^2 \cdot (r_j r_j + \epsilon^2)^{-\frac{5}{2}} \right)$$

$$= 3 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot (r_j r_j + \epsilon^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot \left((r_j r_j + \epsilon^2) - r_i^2 \right)$$

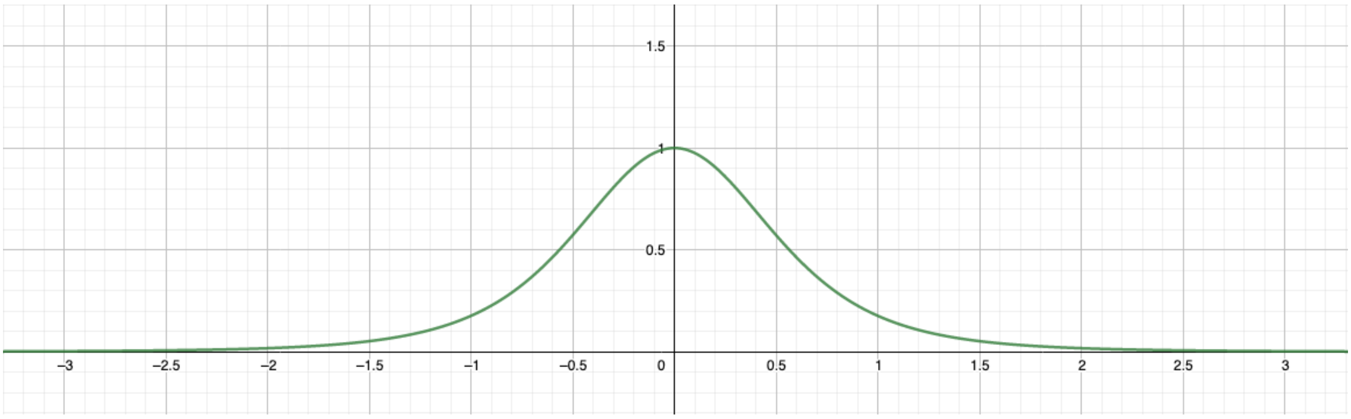
$$= 3 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot (r_j r_j + \epsilon^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot \left((\cancel{r_j r_j} + \epsilon^2) - \cancel{r_i^2} \right)$$

$$\partial_i E_i = 3 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\epsilon^2}{(r^2 + \epsilon^2)^{\frac{5}{2}}}$$

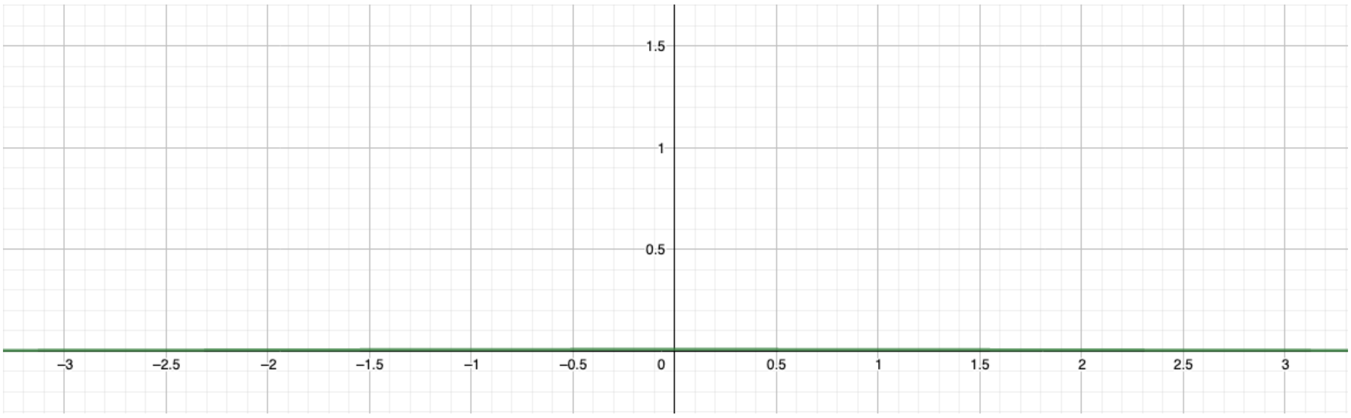
Somit ergeben sich die Skizzen zu:



mit $\epsilon \ll 1$.



mit $\epsilon = 1$.



mit $\epsilon \gg 1$.

b)

Gemäß der Angabe soll die Gültigkeit der folgenden Beziehung gezeigt werden: (Es handelt sich hier um eine Anwendung des Satzes von Gauß; siehe Beispiel 7a)

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_K d^3V \partial_i E_i = \lim_{\epsilon \to 0} \oint_S dA_i E_i = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Um die Gültigkeit zu zeigen, kann im ersten Schritt E_i aus der Angabe eingesetzt werden:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \oint_S dA_i E_i = \lim_{\epsilon \to 0} \oint_S dA_i \cdot \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_i}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Weiters können wir die Formel für das Flächenelement einer Kugel einsetzen:

$$dA = r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta d\varphi$$

Somit ergibt sich mit den Integrationsgrenzen für die Berechnung der Oberfläche einer Kugel:

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_i}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \right) d\vartheta d\varphi$$

Gemäß der Linearität der Integration und der Beziehung $r^2 = r_j \cdot r_j$, kann der Term umgeformt werden zu:

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\vartheta \cdot \frac{\overbrace{r^2 \cdot r_i}^{=r_i^3}}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} d\vartheta d\varphi$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lim_{\epsilon\to 0} \frac{r_i^3}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi$$

Nun können die Integrale berechnet werden:

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lim_{\epsilon\to 0} \frac{r_i^3}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^{2\pi} -\cos\vartheta \Big|_0^{\pi} d\varphi$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lim_{\epsilon\to 0} \frac{r_i^3}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{1-(-1)}_{=2} d\varphi$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lim_{\epsilon\to 0} \frac{r_i^3}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (2\cdot\varphi)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lim_{\epsilon\to 0} \frac{r_i^3}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 4\pi$$

$$= \frac{Q}{\cancel{4\pi}\,\epsilon_0} \cdot \lim_{\epsilon\to 0} \frac{r_i^3}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \cancel{4\pi}$$

Zusammengefasst ergibt sich die Berechnung zu:

$$= \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \lim_{\epsilon\to 0} \frac{r_i^3}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Mit dem Limes folgt somit final:

$$= \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{r_i^3}{(r^{\cancel{2}})^{\frac{3}{\cancel{2}}}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \underbrace{\frac{r_i^3}{r^3}}_{=1} = \underline{\underline{\frac{Q}{\epsilon_0}}}$$

Das Volumensintegral kann nun auch berechnet werden: (Mit Unterstützung von Wolfram Alpha berechnet, nachdem die Information aus dem Plenum, dass das Integral ebenfalls auszurechnen sei, etwas kurzfristig kam.)

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_K d^3V \partial_i E_i$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int_K 3 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\epsilon^2}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} d^3V$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} 3 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\epsilon^2}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} dr d\vartheta d\varphi$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} 3 \cdot \frac{Q\cdot\epsilon^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\vartheta \cdot \frac{R^3\cdot\sqrt{\epsilon^2+R^2}}{3\cdot(\epsilon^4+2R^2\epsilon^2+R^4)} d\vartheta d\varphi$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \cancel{3} \cdot \frac{Q\cdot\epsilon^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R^3\cdot\sqrt{\epsilon^2+R^2}}{\cancel{3}\cdot(R^2+\epsilon^2)^2} \cdot \int_0^{2\pi} 2\, d\varphi$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{Q\cdot\epsilon^2}{\cancel{4\pi}\,\epsilon_0} \cdot \frac{R^3\cdot\sqrt{\epsilon^2+R^2}}{(R^2+\epsilon^2)^2} \cdot \cancel{4\pi} = \underline{\underline{\frac{Q}{\epsilon_0}}}$$

9 Elektronenlinse

9 Elektronenlinse

Zwei Punktladungen gleicher Ladung Q befinden sich in den Punkten $\pm a\delta_{2i}$.

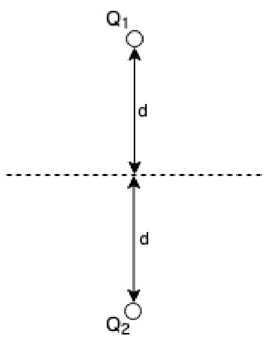
(a) Zeige, dass, obwohl das elektrische Feld im Ursprung verschwindet, eine Testladung q dort nicht stabil ruhen kann für $|qQ| > 0$. Gib die jeweils instabilen Richtungen für $qQ > 0$ und $qQ < 0$ an.

(b) Zeige, dass diese Anordnung für in der r_1r_2-Ebene, nahe der r_1-Achse laufenden Elektronenstrahlen einer Linse entspricht mit einer Brechkraft von

$$\frac{1}{f} = \frac{2Qe}{4\pi\epsilon_0 E_{\text{kin}}} \frac{\alpha}{a^2} .$$

E_{kin} ist die kinetische Energie der Elektronen und αa entspricht dem effektiven Weg des Strahles durch das Zentralfeld der Linse.

a)



Das elektrische Feld einer Punktladung ist definiert als:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{|r|^3}$$

In unserem Fall entspricht $\boldsymbol{r}$ dabei:

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \pm d \end{bmatrix}$$

Für unsere beiden Punktladungen entspricht die Formel somit:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \left(q_1 \cdot \frac{\begin{bmatrix} x \\ y+d \end{bmatrix}}{(\sqrt{x^2+(y+d)^2})^3} + q_2 \cdot \frac{\begin{bmatrix} x \\ y-d \end{bmatrix}}{(\sqrt{x^2+(y-d)^2})^3} \right)$$

Nachdem im ersten Schritt das Verschwinden des elektrischen Feldes im Ursprung bewiesen werden soll, können wir $x = 0$ und $y = 0$ setzen. Zusätzlich sind gemäß der Angabe die Ladungen von Q_1 und Q_2 gleich. ($q_1 = q_2 = Q$) Dadurch folgt:

$$\boldsymbol{E}(x,0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \left(\frac{\begin{bmatrix} x \\ d \end{bmatrix}}{(\sqrt{x^2+d^2})^3} + \frac{\begin{bmatrix} x \\ -d \end{bmatrix}}{(\sqrt{x^2+d^2})^3} \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \left(\frac{x \cdot \vec{e}_x + d \cdot \vec{e}_y}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x \cdot \vec{e}_x - d \cdot \vec{e}_y}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$= \frac{Q}{\cancel{4}\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot x \cdot \vec{e}_x}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{x \cdot \vec{e}_x}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Für den Ursprung (also mit $x = 0$) folgt somit:

$$E(0,0) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{0 \cdot \vec{e}_x}{(0^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Im zweiten Schritt soll bewiesen werden, dass eine Testladung q trotz Verschwinden des Feldes nicht stabil im Ursprung ruhen kann.
Die Stabilität kann über die auf die Testladung wirkende Kraft gezeigt werden. Gemäß dem 3. Plenum gilt:
$F'(0) > 0$ → instabil

$$F = q \cdot E = \frac{q \cdot Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{e}_x$$

$F'(x)$ entspricht dabei dem zweiten Taylorpolynom. Die Taylorreihe ist in diesem Fall:

$$T_F(0) = F(0) + F'(0) \cdot (x - 0)$$

$$F'(x) = \frac{q \cdot Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot (x^2 + d^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2} \cdot x}{(x^2 + d^2)^3}$$

$$= \frac{q \cdot Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot x^2 \cdot (x^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + d^2)^3}$$

Für $x = 0$ entspricht $F'(x)$ somit:

$$F'(0) = \frac{q \cdot Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d^3}{d^6} = \frac{q \cdot Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d^3}$$

Dieser Ausdruck ist positiv, womit gemäß der obrigen Bedingungen die Situation der Testladung im Ursprung **instabil** ist.

Der Vollständigkeit halber ergibt sich für $T_F(0)$:

$$T_F(0) = 0 + \frac{q \cdot Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d^3}$$

Daraus folgt, dass für $q \cdot Q > 0$ $\vec{e}_x$ instabil ist. Für $q \cdot Q < 0$ ist $\vec{e}_y$ die instabile Richtung.

Anhang

$div(rot\vec{F}) = 0$:
Ein Vektor $\vec{F}$, eine Divergenz $div\vec{F}$ und eine Rotation $rot\vec{F}$ können angenommen werden als:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$rot\vec{F} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Somit folgt:

$$div(rot\vec{F}) = div \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 F_z}{\partial_y \partial_x} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial_z \partial_x} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial_z \partial_y} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial_x \partial_y} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial_x \partial_z} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial_y \partial_z}$$

Mit dem Satz von Schwarz gilt nun:

$$\frac{\partial^2 F_z}{\partial_x \partial_y} = \frac{\partial^2 F_z}{\partial_y \partial_x}, etc.$$

Somit ergibt sich für den Ausdruck gesamt 0, da sich die Terme gegenseitig aufheben.