

# 1. Allgemeine Formeln

## Ampère'sches Gesetz in Integralform

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \cdot I_{\text{enclosed}}$$

## Gauß'sches Gesetz in Integralform

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_V \rho(\mathbf{x}) \cdot d^3x = \frac{Q_{\text{enclosed}}}{\epsilon_0}$$

## Green'sche Funktion des Laplaceoperators

$$G = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|}$$

---

# 2. Maxwell-Gleichungen

## 1. Maxwell-Gleichung

### Elektrostatik

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial_i E_i(\mathbf{x}_m) = \frac{\rho(\mathbf{x}_m)}{\epsilon_0}$$

### Magnetostatik

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \partial_i B_i(\mathbf{x}_m) = 0$$

## 2. Maxwell-Gleichung

### Elektrostatik

$$\nabla \times \mathbf{E} = \epsilon_{ijk} \partial_j E_k(\mathbf{x}_m) = 0$$

### Magnetostatik

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_{ijk} \partial_j B_k(\mathbf{x}_m) = \mu_0 \cdot \mathbf{J}_i(\mathbf{x}_m)$$

---

# 4. Nabla-Operator

## Rechenregeln

1.  $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta$
2.  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
3.  $\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi$
4.  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
5.  $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$

## Zylinderkoordinaten

$$\nabla = \vec{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

## Kugelkoordinaten

$$\nabla = \vec{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \vec{e}_\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

## 5. Erste Theoriefragen

2019

Zeigen Sie die Quelfreiheit des Magnetfelds  $B_i(x_m)$  unter Verwendung des Amperéschen Ausdrucks, welcher  $B_i(x_m)$  in Abhängigkeit von der Volumsstromdichte  $J_i(x_m)$  darstellt.

Die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes  $\mathbf{B}$  ist über den magnetischen Hüllenfluss definiert. Dieser besagt, dass der durch eine geschlossene Fläche austretende magnetische Fluss zu jedem Zeitpunkt gleich Null sein muss:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Der Gauß'sche Integralsatz besagt, dass für ein vom Rand  $\partial V$  eingeschlossenes Volumen  $V$ , für ein beliebiges Vektorfeld  $\mathbf{B}$ , geschrieben werden kann:

$$\int d^3V \partial_i B_i = \oint_{\partial V} dA_i B_i$$

Somit kann die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes  $\mathbf{B}$  wie folgt beschrieben werden:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{B} \cdot dV = 0$$

In differentieller Form entspricht dieser Zusammenhang:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

Das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  kann über den Ampéreschen Ausdruck, welcher das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  in Abhängigkeit von der elektrischen Stromdichte  $\mathbf{J}$  definiert, angeschrieben werden:

$$B_i(x_m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int d^3x' \frac{\epsilon_{ijk} \cdot J_j \cdot (x_k - x'_k)}{|x_m - x'_m|^3}$$

Für später wird die folgende Nebenrechnung benötigt:

$$\partial_k \underbrace{\frac{1}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|}}_{\text{Abstand}} = \partial_k \frac{1}{|\mathbf{x}|} = \partial_k \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2}} = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2}^3}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \partial_k \mathbf{x}^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2}^3} \cdot \underbrace{2 \cdot \mathbf{x}}_{\text{innere Ableitung}} \cdot \delta_{km}$$

$$= -\frac{\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|^3} \cdot \delta_{km} = -\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|^3}$$

Aus der Nebenrechnung lässt sich demnach ablesen:

$$-\nabla \frac{1}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|} = \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|^3}$$

Dieser Zusammenhang lässt sich nun in den Ampèreschen Ausdruck für das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  einsetzen:

$$B_i(\mathbf{x}_m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int d^3x' \epsilon_{ijk} \cdot J_i \cdot \left( -\partial_k \frac{1}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|} \right)$$

Das Kreuzprodukt  $\epsilon_{ijk}$  sowie die Ableitung  $\partial_k$  können aus der Integration heraus gehoben werden, nachdem sie von  $\mathbf{x}$  und nicht von  $\mathbf{x}'$  abhängig sind bzw. sich darauf beziehen. Dadurch folgt:

$$B_i(\mathbf{x}_m) = \epsilon_{ijk} \cdot (-\partial_k) \cdot \underbrace{\left( \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int d^3x' \frac{J_i}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|} \right)}_{=A_j(\mathbf{x}_m)}$$

Der hintere Teil der Gleichung entspricht nun dem magnetischen Vektorpotential  $\mathbf{A}$ . Demnach kann der Ausdruck wie folgt vereinfacht werden:

$$B_i(\mathbf{x}_m) = \epsilon_{ijk} \cdot (-\partial_j) \cdot A_k(\mathbf{x}_m)$$

Wie bereits in der Einleitung des Beispiels beschrieben, muss für die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes  $\mathbf{B}$  in differentieller Form gelten:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \partial_i B_i(\mathbf{x}_m) = 0$$

Eingesetzt folgt entsprechend:

$$\partial_i B_i(\mathbf{x}_m) = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k(\mathbf{x}_m) = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k(\mathbf{x}_m)$$

Setzt man die Symmetrien der einzelnen Ausdrücke ein, kann geschrieben werden:

$$\partial_i B_i(\mathbf{x}_m) = \epsilon_{ijk} \underset{\vee}{\partial_i} \underset{\cup}{\partial_j} A_k(\mathbf{x}_m)$$

Mit:

$\vee \rightarrow$  antisymmetrisch

$\cup \rightarrow$  symmetrisch

Die Multiplikation einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Funktion ergibt jedenfalls 0. Der Nachweis dafür ist wie folgt:

$$\begin{aligned} A_{ij} \cdot S_{ij} &= -A_{ji} \cdot S_{ji} \underset{\text{umbenennen}}{=} -A_{ij} \cdot S_{ij} \\ \implies 2 \cdot A_{ij} \cdot S_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

Dadurch folgt, dass die Multiplikation eines antisymmetrischen Vektors mit einem symmetrischen Vektor immer 0 ergibt. Entsprechend wurde gezeigt, dass gilt:

$$\partial_i B_i(\mathbf{x}_m) = 0$$

Das magnetische Feld ist somit quellenfrei!

---

## 2009 / 2011 / 2013

Zeigen Sie unter Zuhilfenahme des Biot-Savart'schen Ausdrucks für das Magnetfeld  $B_i(x_m)$  in Abhängigkeit von der Volumsstromdichte  $J_i(x_m)$  die Divergenzfreiheit von  $B_i(x_m)$ .

Gemäß dem Biot-Savart-Gesetz erzeugt ein Stromleiter mit dem infinitesimalen Längenelement  $d\mathbf{l}$ , welcher sich an dem Ort  $\mathbf{r}'$  befindet und von einem Strom  $I$  durchflossen wird, am Ort  $\mathbf{r}$  die magnetische Flussdichte  $d\mathbf{B}$ :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Der Vektor  $\hat{\mathbf{r}}$  ist dabei wie folgt definiert:

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\vec{r}}{|\mathbf{r}|}$$

Umgeschrieben entspricht der Ausdruck für die magnetische Flussdichte  $\mathbf{B}$  am Ort  $\mathbf{r}$  somit:

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Durch Aufsummieren der infinitesimalen Anteile und durch Umwandeln des entstehenden Wegintegrals in ein Volumensintegral folgt die Integralform des Biot-Savart-Gesetzes: ( $\mathbf{J}$  entspricht der elektrischen Stromdichte)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

Dieser kann in die bereits eingangs beschriebene Berechnung eingesetzt werden.

---

## 2013 Ersatztest

Unter Verwendung des Biot-Savart'schen Ausdrucks für das Magnetfeld  $B_i(x_m)$  in Abhängigkeit von der Volumsstromdichte  $J_i(x_m)$  zeige man die Abwesenheit von magnetischer Ladung.

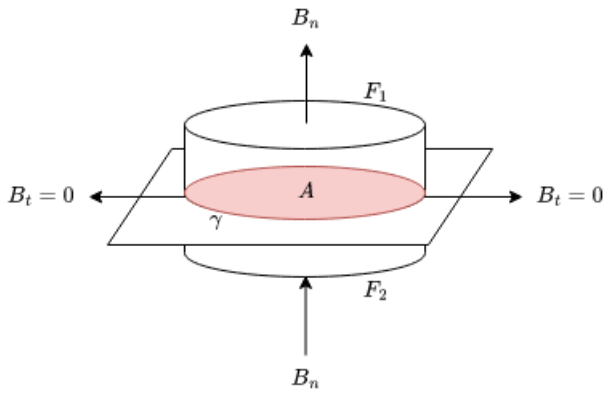
Die Abwesenheit von magnetischer Ladung ist äquivalent zu der Quelfreiheit des magnetischen Feldes.

---

## 6. Zweite Theoriefragen

### 2019

Für zwei Flächen  $F_1$  und  $F_2$ , welche durch dieselbe Kurve  $\gamma$  berandet werden (d.h.  $\partial F_1 = \partial F_2 = \gamma$ ), weise man die Gleichheit des magnetischen Flusses durch diese Flächen, unter Verwendung der magnetostatischen Maxwellgleichungen, nach.



Der magnetische Fluss  $\Phi$  ist allgemein als das Flächenintegral über die magnetische Flussdichte  $\mathbf{B}$  definiert:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Weiters lautet die erste Maxwell-Gleichung der Magnetostatik:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Diese Gleichung drückt aus, dass das magnetische Feld quellenfrei ist. Daraus folgt der Satz vom magnetischen Hüllenfluss, welcher besagt, dass der durch eine geschlossene Oberfläche  $\partial V$  eines Volumens  $V$  austretende magnetische Fluss  $\Phi$  stets gleich Null sein muss. Mit dem Satz von Gauß, in Integralform, folgt:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{B}}_{=0} \cdot d^3x = 0$$

An einer Fläche, wie in unserer Skizze der Fläche  $A$ , muss entsprechend, gemäß dem Satz vom magnetischen Hüllenfluss, gelten: (gedanklich wird dafür die Höhe der umgebenden "Box" gegen Null approximiert; 1 und 2 stehen für die Ober- und Unterseite der Fläche  $A$ )

$$\Phi = 0 = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

Daraus folgt, dass die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}_n$  jederzeit kontinuierlich über eine beliebige zweidimensionale Fläche  $A$  ist:

$$[[B_n]] = 0$$

Nachdem die tangential Komponente der magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}_t$  gleich Null ist (der Fluss durch die Kurve  $\gamma$  ist annähernd Null), der gesamt durch die Fläche  $F$  austretende magnetische Fluss ebenfalls Null ist, müssen die Flüsse durch die Flächen  $F_1$  und  $F_2$  gleich aber entgegengesetzt sein:

$$\int_{F_1} \mathbf{B}_n \cdot d\mathbf{A} = \int_{F_2} \mathbf{B}_n \cdot d\mathbf{A}$$

Unter Verwendung der magnetostatischen Maxwellgleichungen bestimme man die Rotation der Volumensstromdichte  $J_i(x_m)$ . Den so gewonnen Ausdruck löse man nach  $B_i(x_m)$  unter Zuhilfenahme der Green-Funktion des Laplace-Operators auf.

Die zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik, das Ampèresche Gesetz, lautet:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

Basierend auf diesem Zusammenhang kann man die Rotation der elektrischen Stromdichte  $\mathbf{J}$  ermitteln. Hierzu werden beide Seite der Gleichung um das Kreuzprodukt mit Nabla erweitert:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{J})$$

Gemäß der Rechenregeln des Nabla Operators kann die linke Seite der Gleichung  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})$  wie folgt umgeschrieben werden:

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{J})$$

Weiters ist gemäß der ersten Maxwell-Gleichung der Magnetostatik die Divergenz der magnetischen Flussdichte  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  stets gleich Null. Somit folgt:

$$\underbrace{\nabla (0)}_{=0} - \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{J})$$

Nun kann, wie in der Angabe beschrieben, die Green'sche Funktion des Laplaceoperators  $G$  angewendet werden. Diese lautet in Integralform:

$$G = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Eingesetzt folgt somit:

$$G = \mu_0 \cdot \int_V G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')) d^3x'$$

Somit folgt für den Ausdruck der magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = +\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

Beziehungsweise in Indexschreibweise:

$$B_i(x_m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\epsilon_{ijk} \cdot \partial_j \cdot J_k(x'_m)}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|} d^3x'$$

Die Ableitung des resultierenden Ausdrucks für die magnetische Flussdichte  $\mathbf{B}$  kann in weiterer Folge aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} \partial_k \underbrace{\frac{1}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|}}_{\text{Abstand}} &= \partial_k \frac{1}{|\mathbf{x}|} = \partial_k \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2}} = -\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2}}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \partial_k \mathbf{x}^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2}} \cdot \underbrace{\cancel{2} \cdot \mathbf{x}}_{\text{innere Ableitung}} \cdot \delta_{km} \\ &= -\frac{\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|^3} \cdot \delta_{km} = -\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|^3} \end{aligned}$$

Aus der Nebenrechnung lässt sich demnach ablesen:

$$-\nabla \frac{1}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|} = \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|^3}$$

Dieser Zusammenhang lässt sich nun in den Ausdruck für die magnetische Flussdichte  $\mathbf{B}$  einsetzen, wodurch final der Ampéresche Ausdruck für das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  folgt:

$$B_i(\mathbf{x}_m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int d^3x' \frac{\epsilon_{ijk} \cdot J_j(\mathbf{x}'_m) \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k)}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|^3}$$

## Herleitung ohne Altfrage

Die zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik, das Ampéresche Gesetz, lautet:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

In diesen Ausdruck kann man den Zusammenhang zwischen der magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}$  und des magnetischen Vektorpotentials  $\mathbf{A}$  einsetzen:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Damit folgt:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

Die linke Seite des Zusammenhangs kann gemäß der Rechenregeln des Nabla-Operators  $\nabla$  umgeformt werden:

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

Gemäß der Coulomb-Eichung ist das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  divergenzfrei. Entsprechend gilt:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Somit folgt für den Ausdruck basierend auf dem Ampéreschen Gesetz:

$$\nabla (0) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

Nachdem der Gradient von Null  $\nabla (0)$  ebenfalls Null ist, kann weiters geschrieben werden:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

In diesen Ausdruck kann gemäß der Angabe die Greensche Funktion des Laplaceoperators  $\nabla^2$  eingesetzt werden. Diese lautet im dreidimensionalen Raum:

$$G = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|}$$

Eingesetzt folgt damit:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mu_0 \cdot \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x'$$

Final folgt somit der Ausdruck für das magnetische Vektorpotential  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Gemäß der Coulomb-Eichung muss gelten, dass die Divergenz des magnetischen Vektorpotentials  $\mathbf{A}$  gleich Null ist. Auf die Lösung angewandt ist diese Beziehung gegeben, da die Divergenz der

elektrischen Stromdichte  $\nabla \cdot \mathbf{J}$  ebenfalls gleich Null ist.

---

## 2013 Ersatztest

Zeigen Sie unter Verwendung der zweiten magnetostatischen Maxwellgleichung, dem Ampèreschen Gesetz, die Divergenzfreiheit der Stromdichte  $\mathbf{J}_i(x_m)$ .

Das Ampèresche Gesetz, die zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik, lautet:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

Leitet man aus diesem Gesetz die Divergenz der elektrischen Stromdichte  $\mathbf{J}$  ab, folgt:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \cdot (\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}))$$

Die Divergenz der Rotation eines Vektorfeldes  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$  ist in allen Fällen 0. Dieser Zusammenhang lässt sich wie folgt nachweisen:

$$\epsilon_{ijk} \cdot \partial_j \cdot \partial_k B_i = 0$$

$\nabla \rightarrow$  antisymmetrisch

$\cup \rightarrow$  symmetrisch

Die Multiplikation einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Funktion ergibt jedenfalls 0. Der Nachweis dafür ist wie folgt:

$$\begin{aligned} A_{ij} \cdot S_{ij} &= -A_{ji} \cdot S_{ji} \underset{\text{umbenennen}}{=} -A_{ij} \cdot S_{ij} \\ \implies 2 \cdot A_{ij} \cdot S_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

Dadurch folgt, dass die Multiplikation eines antisymmetrischen Vektors mit einem symmetrischen Vektor 0 ergibt. Damit folgt für die Divergenz der Stromdichte  $\nabla \cdot \mathbf{J}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \cdot 0 = 0$$

Somit wurde gezeigt, dass die elektrische Stromdichte  $\mathbf{J}$  für statische Systeme divergenzfrei ist.

---

## 2011

Zeigen Sie, dass die stationäre (zeitunabhängige) Kontinuitätsgleichung  $\partial_i J_i = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  eine direkte Konsequenz des Ampere'schen Gesetzes zwischen Magnetfeld  $B_i(x_k)$  und Volumsstromdichte  $J_i(x_k)$  darstellt.

Das Ampèresche Gesetz, die zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik, lautet:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

Dieser Ausdruck gilt lediglich für statische Systeme. In einem statischen System ist  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  und somit auch  $\nabla \cdot \mathbf{J}$  gleich 0. In zeitabhängigen Systemen ist dieser Ausdruck jedoch nicht korrekt. In solchen Systemen muss zu der elektrischen Stromdichte  $\mathbf{J}$  der Verschiebungsstrom (*eng.*



*displacement current*) berücksichtigt werden. Ergänzt man den Verschiebungsstrom in dem Ampèreschen Gesetz, erhält man das Ampère-Maxwell-Gesetz:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Basierend auf diesem Zusammenhang kann die Divergenz der elektrischen Stromdichte  $\nabla \cdot \mathbf{J}$  ermittelt werden:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \cdot \nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \cdot \left( \nabla \cdot \mathbf{J} + \epsilon_0 \cdot \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Gemäß der ersten Maxwell-Gleichung der Elektrostatik entspricht  $\epsilon_0 \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E})$  gleich:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \epsilon_0 \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \rho$$

Somit kann wie folgt in die Divergenz der elektrischen Stromdichte eingesetzt werden:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \cdot \left( \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

Die Divergenz der Rotation eines Vektorfeldes  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$  ist in allen Fällen 0. Dieser Zusammenhang lässt sich wie folgt nachweisen:

$$\epsilon_{ijk} \cdot \partial_j \cdot \partial_k B_i = 0$$

$\nabla \rightarrow$  antisymmetrisch

$\cup \rightarrow$  symmetrisch

Die Multiplikation einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Funktion ergibt jedenfalls 0. Der Nachweis dafür ist wie folgt:

$$\begin{aligned} A_{ij} \cdot S_{ij} &= -A_{ji} \cdot S_{ji} \underset{\text{umbenennen}}{=} -A_{ij} \cdot S_{ij} \\ \implies 2 \cdot A_{ij} \cdot S_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

Dadurch folgt, dass die Multiplikation eines antisymmetrischen Vektors mit einem symmetrischen Vektor 0 ergibt. Damit folgt für die Divergenz der Stromdichte  $\nabla \cdot \mathbf{J}$ :

$$0 = \mu_0 \cdot \left( \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Somit ergibt sich final:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

## 7. Der elektrische Strom

Allgemein gelten für den elektrischen Strom die folgenden Zusammenhänge:

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{A} = \sigma \cdot \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{A} = \sigma \cdot \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \cdot d^3x = \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot \int_V \rho \cdot d^3x = \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot Q$$

## Ohm'sches Gesetz

$U$  entspricht der elektrischen Spannung.  $I$  entspricht dem elektrischen Strom.  $R$  entspricht dem elektrischen Widerstand.

$$U = I \cdot R$$

Der elektrische Widerstand  $R$  eines Zylinders lässt sich beispielsweise wie folgt berechnen:

$$R = \frac{L}{\sigma \cdot A}$$

$L$  entspricht der Länge des Zylinders und  $A$  dessen Querschnittsfläche.

Die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  lässt sich auch durch den spezifischen Widerstand  $\rho$  ausdrücken:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

## Lokale Form des Ohm'schen Gesetzes

Die lokale Form des Ohm'schen Gesetzes ist:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sigma \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})$$

## Joule'sches Gesetz

Das Joule'sche Gesetz definiert die Leistung  $P$  basierend auf dem Strom  $I$ , der Spannung  $U$  und dem Widerstand  $R$ :

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R$$

## Elektrische Stromdichte

Sei  $d\mathbf{A}$  ein infinitesimales Flächenstück, dann ist  $dI$  die Ladung, welche pro Zeiteinheit das Flächenstück  $d\mathbf{A}$  passiert:

$$dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

Die elektrische Stromdichte ist unter anderem wie folgt definiert.  $n$  entspricht dabei der Anzahl an Ladungen pro Volumenseinheit.  $q$  ist die Ladung der einzelnen Ladungsträger.  $\mathbf{v}$  entspricht der mittleren Geschwindigkeit der Ladungen.  $\rho$  entspricht der elektrischen Raumladungsdichte.

$$\mathbf{J} = \underbrace{q \cdot n}_{=\rho} \cdot \mathbf{v}$$

## Stationäre Kontinuitätsgleichung

Die stationäre Kontinuitätsgleichung besagt, dass der Fluss von Ladung, aus einem Volumen  $V$ , in besagtem Volumen  $V$  zu einer Abnahme der Ladung führt.  $\mathbf{J}$  entspricht der Volumensstromdichte.  $\rho$  entspricht der Volumensladungsdichte.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

In Integralform entspricht der Zusammenhang:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot d^3x$$

---

## 8. Das elektrische Potential

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

Ist das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  bekannt, gilt für das elektrische Potential:

$$V(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l}$$

Das elektrische Potential entspricht dem Wegintegral von  $x_0$  nach  $x$ .

### Punktladung

Das elektrische Potential  $V$  einer Punktladung ist wie folgt definiert:

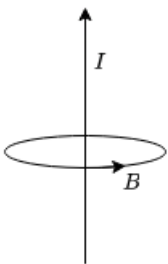
$$V = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

$q$  ist die Ladung der Quelle bzw. der Punktladung. Der Abstand  $r$  entspricht dem betraglichen Abstand zwischen dem Referenzpunkt  $\mathbf{x}$  und dem Quellpunkt  $\mathbf{x}'$ . Demnach kann man für das elektrische Potential  $V$  einer Punktladung auch schreiben:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

---

## 9. Das magnetische Feld



Das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  ist stets in  $\vec{e}_\varphi$  ausgerichtet. Die Ausrichtung entspricht im Falle einer Kugel auch:

$$\vec{e}_B = \vec{e}_\varphi = \vec{e}_I \times \vec{e}_r$$

Hierbei ist  $\vec{e}_I$  die Richtung des Stromes und  $\vec{e}_r$  die Richtung des Radius  $R$ .

### Ampèrescher Ausdruck für das Magnetfeld

$$B_i(x_m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{wire} d^3x' \frac{\epsilon_{ijk} J_j(x'_m)(x_k - x'_k)}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|^3}$$

Der Tensor  $x_m$  entspricht dem **Referenzpunkt**.

Der Tensor  $x'_m$  entspricht dem **Quellpunkt**.

### Biot-Savart'scher Ausdruck für das Magnetfeld

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

In Integralform entspricht der Ausdruck:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{wire}} d^3x' \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{wire}} d^3x' \frac{I d\mathbf{l} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

## Langer gerader Draht

Das magnetische Feld für einen langen geraden Draht ist über die folgende Formel definiert:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot R} \cdot \hat{\Phi}$$

$R$  entspricht dabei dem Radius des Leiters.

## Kraft

Die auf ein Teilchen mit der Ladung  $q$  wirkende Kraft, verursacht durch ein Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}$ , entspricht:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

## 10. Das magnetische Vektorpotential

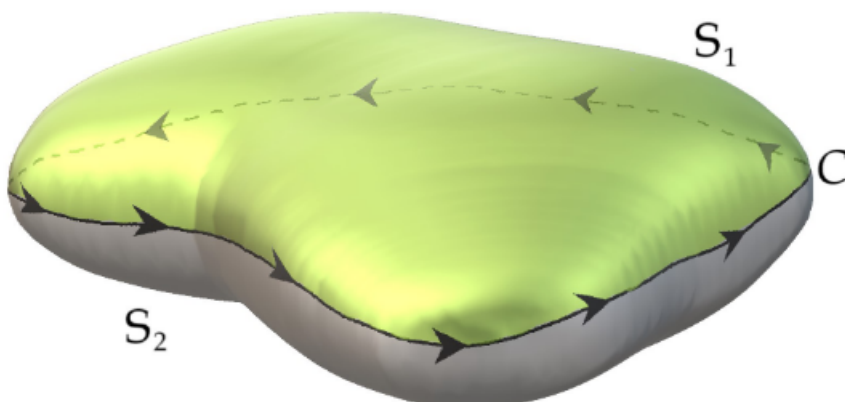
Das magnetische Vektorpotential  $\mathbf{A}$  hängt wie folgt mit der magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}$  zusammen:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Ähnlich zu dem Ampère'schen Ausdruck für das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  lässt sich das magnetische Vektorpotential wie folgt anschreiben:

$$A_i(\mathbf{x}_m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{J_i(\mathbf{x}'_m)}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|} d^3x'$$

## 11. Integralsätze



## Gaußscher Integralsatz

Der Satz von Gauß lautet für ein vom Rand  $\partial V$  eingeschlossenes Volumen  $V$  für ein beliebiges Vektorfeld mit den Komponenten  $E_i$ :

$$\int d^3V \partial_i E_i = \oint_{\partial V} dA_i E_i$$

wobei  $A_i$  die Komponenten des (stets nach außen gerichteten) Flächennormalvektors am Rand des Volumens sind.

## Stokescher Integralsatz

Der Satz von Stokes verknüpft ein Oberflächenintegral über eine (gekrümmte) Fläche mit einem Kurvenintegral über den Rand der Fläche:

$$\int_S dA_i \epsilon_{ijk} \partial_j F_k = \oint_{\partial S} ds_i F_i$$

---

## 12. Randbedingungen

$$|[E_t]| = 0$$

$$|[D_n]| = 0$$

$$|[B_n]| = 0$$

---

## 13. Der Kondensator

### Ladung

Allgemein gilt für die Ladung  $Q$  in einem Kondensator der folgende Zusammenhang mit der elektrischen Spannung  $U$  und der Kapazität  $C$ :

$$Q = C \cdot U$$

Daraus folgt mit dem Ohm'schen Gesetz:

$$R \cdot C = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

### Energie

Die Energie  $U$  eines Kondensators lässt sich wie folgt berechnen:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d^3x$$

Alternativ kann man die Energie  $U$  auch wie folgt berechnen, wobei  $C$  die Kapazität darstellt und  $V$  die elektrische Spannung:

$$U = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$$

---

## 14. Das elektrische Feld

## Allgemeine Zusammenhänge

$$U = s \cdot E$$

$$F = q \cdot E$$

$$E = -\nabla V$$

## Elektrische Flussdichte

Die elektrische Flussdichte  $\mathbf{D}$  ist allgemein wie folgt definiert:

$$\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$\mathbf{E}$  entspricht in diesem Kontext dem elektrischen Feld und  $\mathbf{P}$  dem Polarisations-Feld, welches selbst über folgende Formel definiert ist:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\delta V} \cdot \sum_{i=0}^{\delta N} \mathbf{p}_i$$

$\delta V$  ist in diesem Kontext eine Volumenseinheit,  $\delta N$  ist die Anzahl an Atomen und  $\mathbf{p}$  ist der Dipol des  $i$ -ten Atoms.

## Gauß'sches Gesetz

Die Definition des Gauß'schen Gesetzes für die elektrische Flussdichte  $\mathbf{D}$  lautet wie folgt:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{enclosed}}$$

Basierend auf der ersten Maxwell-Gleichung der Elektrostatik lässt sich auch der folgende Zusammenhang herleiten:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{free}}$$

## Vakuum

Im Vakuum und bei isotropen Leitern vereinfacht sich die Definition der elektrischen Flussdichte  $\mathbf{D}$  wie folgt:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}$$

Die relative Permittivität  $\kappa$  stellt das Verhältnis zwischen der Permittivität im Vakuum und der Permittivität im Dielektrikum dar:

$$\kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

Unter anderem lässt sich so die Energie  $U$  eines Kondensators ableiten:

$$\frac{U_0}{U} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa$$

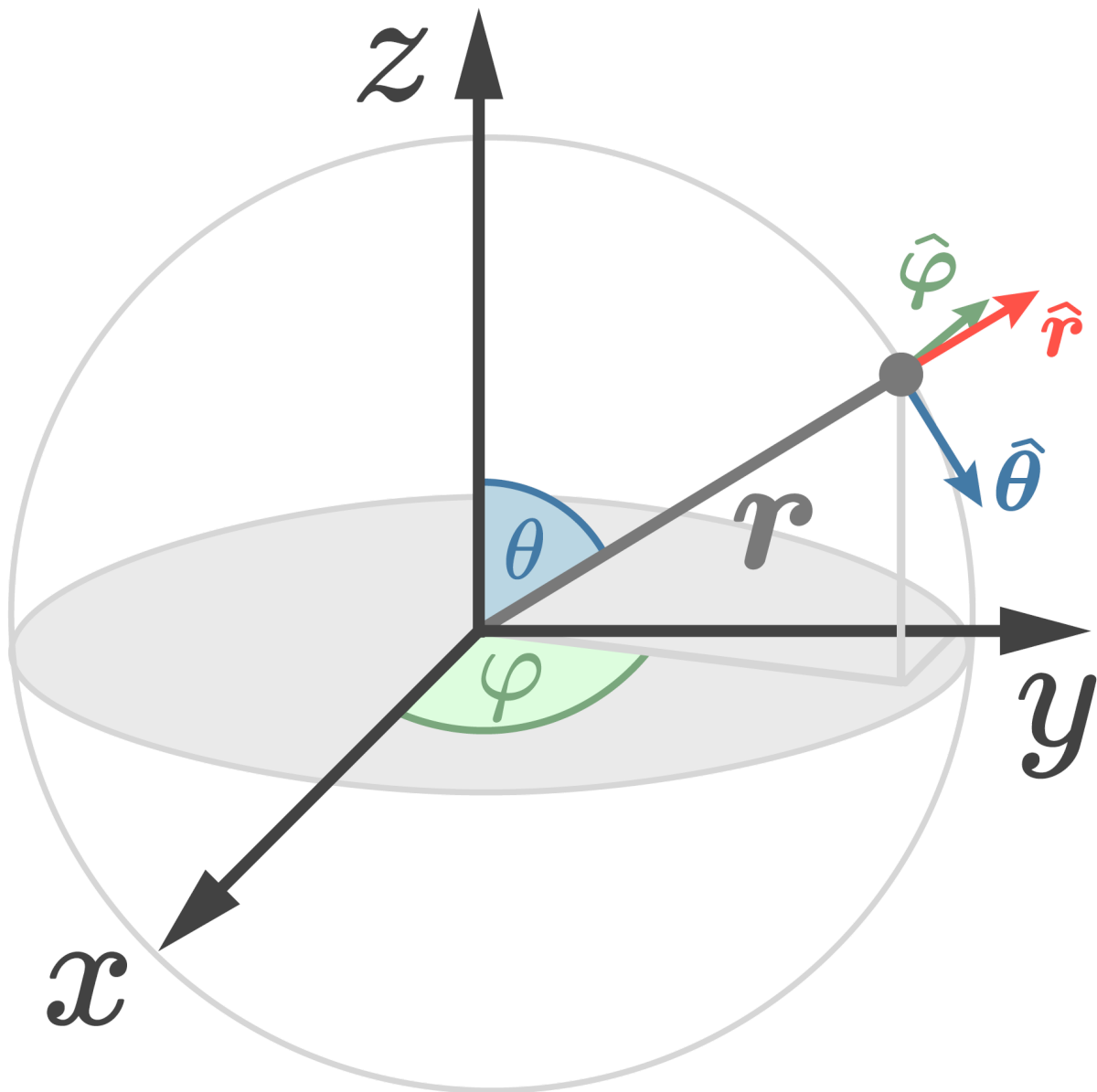
$U_0$  entspricht dabei der Energie des Kondensators, wenn die Leiterplatten durch ein Vakuum getrennt sind.

Weiters kann auch die Kapazität  $C$  über ein ähnliches Verhältnis, basierend auf der Kapazität im Vakuum  $C_0$ , ermittelt werden:

$$\frac{C}{C_0} = \kappa$$

## 15. Geometrien

### Kugelkoordinaten



$$\vec{r}(R, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} R \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ R \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ R \cdot \cos \theta \end{bmatrix}$$

Bzw. mit einer anderen Parametrisierung:

$$\vec{r}(R, s, t) = \begin{bmatrix} R \cdot \sin s \cdot \cos t \\ R \cdot \sin s \cdot \sin t \\ R \cdot \cos s \end{bmatrix}$$

In Kugelkoordinaten gilt:

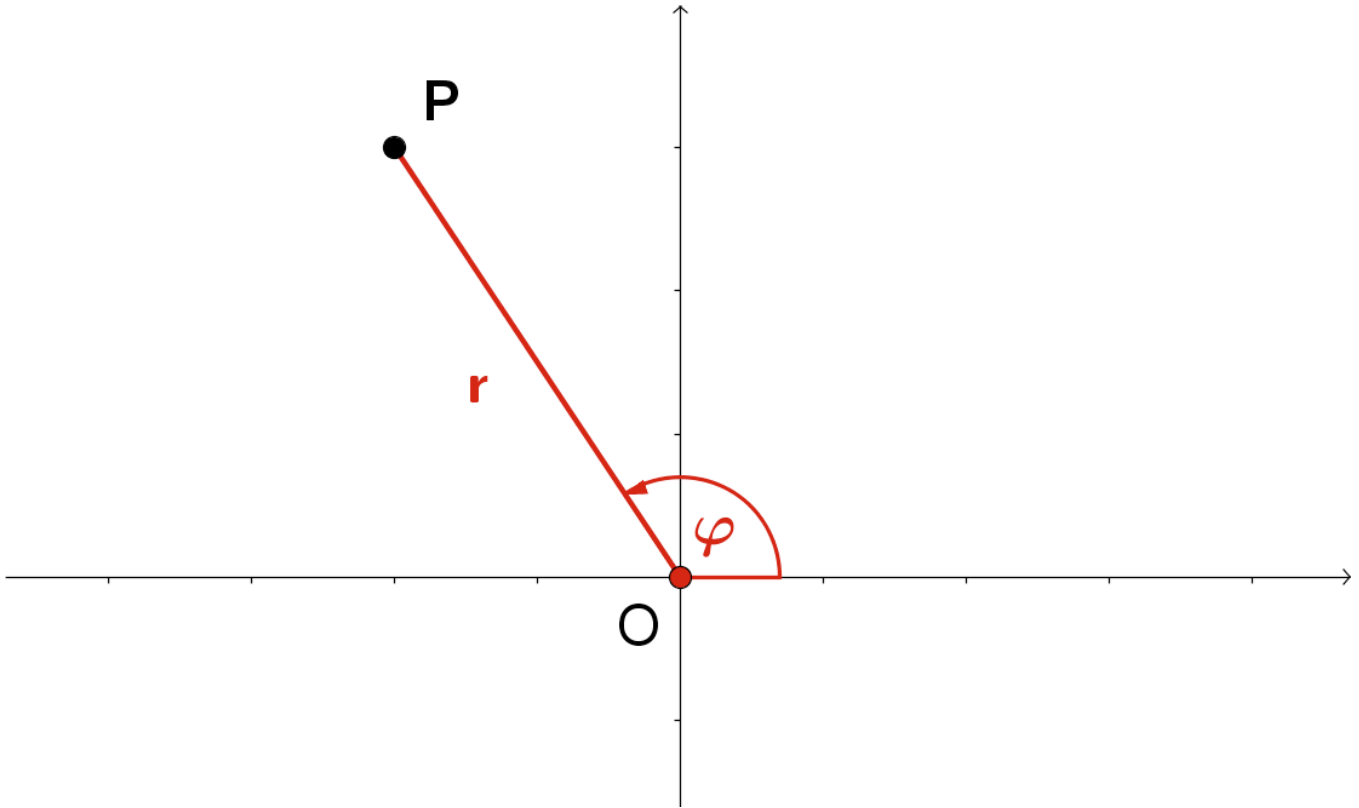
$$dV = r^2 \cdot \sin \theta$$

Zum Beispiel:

$$\int_V E dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E d\theta d\varphi dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E \cdot r^2 \cdot \sin \theta dr = 4\pi \cdot \int_0^R E \cdot r^2 dr$$


---

## Kreiskoordinaten / Polarkoordinaten



$$\vec{r}(R, \varphi) = \begin{bmatrix} R \cdot \cos \varphi \\ R \cdot \sin \varphi \end{bmatrix}$$

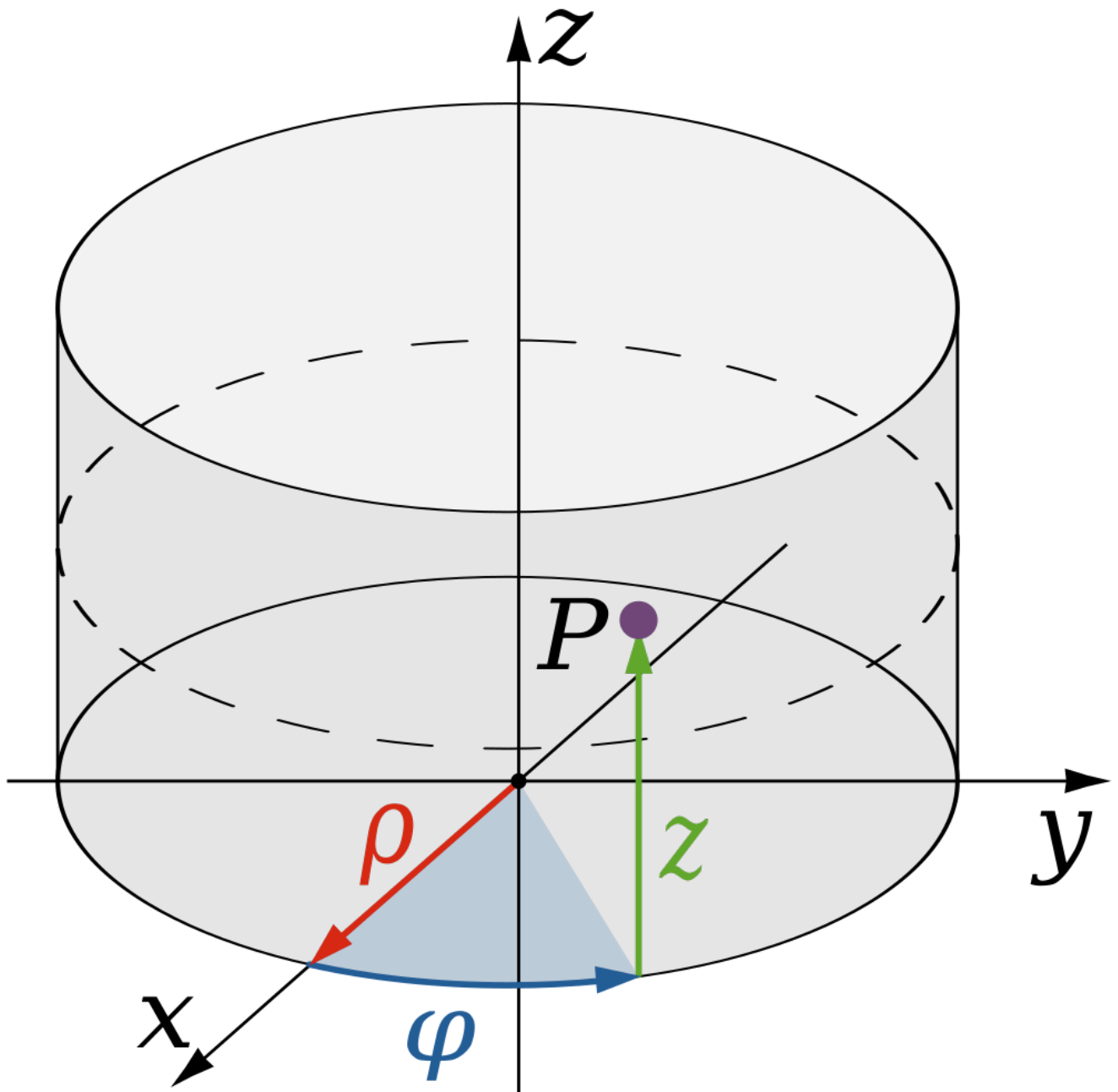
Bzw. mit einer anderen Parametrisierung:

$$\vec{r}(s, t) = \begin{bmatrix} s \cdot \cos t \\ s \cdot \sin t \end{bmatrix}$$


---

## Zylinderkoordinaten





$$\vec{r}(R, \varphi) = \begin{bmatrix} R \cdot \cos \varphi \\ R \cdot \sin \varphi \end{bmatrix}$$

Bzw. mit einer anderen Parametrisierung:

$$\vec{r}(s, t) = \begin{bmatrix} s \cdot \cos t \\ s \cdot \sin t \end{bmatrix}$$


---