11. Problem Set - 15.06.2022

Elektrodynamik I - 136.015

Gerechnete Beispiele:

31)

32)

33) a)

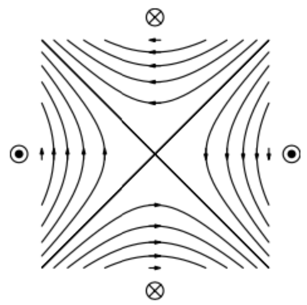
31 Starke Magnetische Fokusierung

31 Starke Magnetische Fokusierung

(a) Wir betrachten 4 Leiter im Abstand a zur r_3-Achse, die den Strom I in abwechselnder Richtung parallel zur r_3-Achse führen. Zeige, dass diese Geometrie ein Magnetfeld in Achsnähe erzeugt von der Form $B_i(r_1, r_2) = -B_0/b\,\partial_i(r_1 r_2)$ und bestimme B_0/b.

(b) Zeige, dass das achsnahe Magnetfeld für Elektronen, die sich mit (klassischem) Impuls p_3 achsnah entlang $+r_3$ bewegen, einer Linse entspricht mit entgegengesetzten Brechkräften entlang r_1 und r_2: $1/f_{1,2} = \pm\frac{B_0}{b}\frac{e\alpha L}{p_3}$, wobei αL dem effektiven Weg des Strahles durch das Zentralfeld der Linse entspricht.

(c) Mit geeigneten Spulen kann man ein solches Quadrupolfeld für eine begrenzte Strecke entlang r_3 erzeugen. Wie muss man zwei solcher Quadrupolspulen im Abstand d entlang r_3 anordnen, sodass die gesamte Anordnung für Elektronen sowohl in r_1-Richtung, als auch in r_2-Richtung fokusierend wirkt? (Hinweis: die effektive Brechkraft $1/f$ zweierer achsparalleler Linsen mit Brechkraft f_A und f_B im Abstand d ist $1/f_A + 1/f_B - d/(f_A f_B)$.)



und a)

b)

c)

32 Eichbedingungen

32 Eichbedingungen

(a) Sei $D(r_m, r'_m) = \sqrt{(r_l - r'_l)(r_l - r'_l)}$. Zeige für stationäre Ströme, dass das Vektorpotential $A_i(r_m) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, j_i(r'_m)/D(r_m, r'_m)$ die Coulomb-Eichbedingug $\partial_i A_i = 0$ erfüllt. Sie gilt für diese Wahl von $A_i(r_m)$ auch für nicht-stationäre Ströme.
(Hinweis: drücke $\partial_i(1/D(r_m, r'_m))$ durch $\partial'_i(1/D(r_m, r'_m))$ aus mit $\partial'_i = \partial/\partial r'_i$ und verwende die Kontinuitätsgleichung.)

(b) Zeige, dass $A_i(r_m) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\, \epsilon_{ijk} B_j(r'_m)(r_k - r'_k)/D^3(r_m, r'_m)$ ein gültiges Vektorpotential ist mit der Eichbedingung, dass alle Ströme stationär sind.

a)

b)

33 Elektromagnetische Wellen

33 Elektromagnetische Wellen

(a) Sei $\partial_0 = \partial/\partial t$. Setze die Vakuum Maxwell-Gleichungen $\epsilon_{ijk}\partial_j E_k = -\partial_0 B_i$ und $\epsilon_{ijk}\partial_j B_k = +\mu_0\epsilon_0\partial_0 E_i$ ineinander ein und zeige, dass sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld einer Vektor-Wellengleichung genügt: $\partial_j\partial_j E_i - \frac{1}{c^2}\partial_0\partial_0 E_i = 0$ und $\partial_j\partial_j B_i - \frac{1}{c^2}\partial_0\partial_0 B_i = 0$ mit $1/c^2 = \mu_0\epsilon_0$.

(b) Sei $A_i(r_m) = a_i\cos(k_j r_j - ct + \phi_i)$ ein Vektorpotential in Coulomb-Eichung mit den konstanten Parametern a_i, k_i und ϕ_i. Zeige, dass die daraus resultierenden eletrischen und magnetischen Felder die Maxwell-Gleichungen in Vakuum erfüllen.

(c) Zeige, dass nur 2 der 3 Komponenten der Amplituden a_i unabhängig voneinander sind. Es gibt daher 2 Polarisationsrichtungen für einen Wellenvektor k_i.

(a): 1P, (b): 1P, (c): 1P

a)

Gemäß der Angabe sollen die zwei Maxwell-Gleichungen im Vakuum ineinander eingesetzt werden. Diese lauten:

$$\epsilon_{ijk}\partial_j E_k = -\partial_0 B_i \to \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial_t}$$

und

$$\epsilon_{ijk}\partial_j B_k = \mu_0\epsilon_0\partial_0 E_i \to \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial_t}$$

Begonnen mit der ersten Maxwell-Gleichung im Vakuum, kann diese wie folgt angeschrieben werden:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial_t}$$

Um die zweite Maxwell-Gleichung im Vakuum in die erste Maxwell-Gleichung im Vakuum einsetzen zu können, wird der Zusammenhang um $\boldsymbol{\nabla}\times$ erweitert. Damit folgt:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) = -\left(\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial_t}\right)$$

Die rechte Seite der Gleichung kann weiters umgeschrieben werden zu:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) = -\frac{\partial}{\partial_t}(\underbrace{\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}}_{2.\,\mathrm{MG}})$$

Dadurch kann in den Term auf der rechten Seite die zweite Maxwell-Gleichung im Vakuum eingesetzt werden:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) = -\frac{\partial}{\partial_t}\left(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial_t}\right)$$

Zusammengefasst ergibt sich somit:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial_t^2}$$

Die linke Seite der Gleichung kann gemäß den Rechenregeln für den Rotationsoperator umgeformt werden. Diese besagen unter anderem, dass gilt (siehe u.a. *Electromagnetism* von Gerald L. Pollack und Daniel R.

Stump, *Formel 8.59*)

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = \text{grad div } \vec{E} - \text{div grad } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta\vec{E} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E}$$

(Der Gradient eines Skalars entspricht $\text{grad } g = (\boldsymbol{\nabla} g)_i$*. Die Divergenz eines Vektorfeldes entspricht* $\text{div } \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}$*.)*

Mit diesem Zusammenhang folgt für die Gleichung:

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial_t^2}$$

Für die Divergenz des elektrischen Feldes $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}$ gilt gemäß der ersten elektrostatischen Maxwell-Gleichung:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Nachdem in diesem Fall das elektrische Feld in einem Vakuum betrachtet wird, ist die Ladungsdichte ρ gleich 0. Somit folgt:

$$\boldsymbol{\nabla}(\underbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}}_{=0}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial_t^2}$$

Nachdem der Gradient von Null $\nabla(0)$ ebenfalls Null entspricht, folgt:

$$\underbrace{\boldsymbol{\nabla}(0)}_{=0} - \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial_t^2}$$

$$-\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial_t^2}$$

Umgeformt ergibt sich somit:

$$0 = \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial_t^2}$$

Setzt man nun für den Laplace-Operator $\boldsymbol{\nabla}^2$ den Ausdruck $\partial_j \partial_j$ ein, für das Produkt aus der Permittivität und der magnetischen Permeabilität $\mu_0 \epsilon_0$ den Ausdruck $\frac{1}{c^2}$, wobei c für die Lichtgeschwindigkeit steht, und für $\frac{\partial}{\partial_t}$ den in der Angabe beschrieben Ausdruck ∂_0, folgt die Vektor-Wellengleichung für das elektrische Feld:

$$0 = \partial_j \partial_j \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2} \partial_0 \partial_0 \boldsymbol{E}$$

Analog zu der vorangehenden Berechnung basierend auf der ersten Maxwell-Gleichung im Vakuum, kann die Berechnung auf der zweiten Maxwell-Gleichung im Vakuum basieren. Diese lautet:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial_t}$$

Wir erweitern den Zusammenhang erneut um ein Kreuzprodukt mit $\boldsymbol{\nabla}$, wodurch folgt:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial_t} \right)$$

Wie bereits in der ersten Berechnung kann auch hier der rechte Ausdruck umgeschrieben werden zu:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial_t} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})$$

Für $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}$ kann die erste Maxwell-Gleichung im Vakuum eingesetzt werden. Dadurch ergibt sich:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial_t} \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial_t} \right)$$

Zusammengefasst entspricht dieser Ausdruck:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial_t^2}$$

Für die linke Seite kann erneut die Rechenregel des Rotationsoperators angewandt werden (siehe die Berechnung basierend auf der ersten Maxwell-Gleichung im Vakuum; siehe *Electromagnetism* von Gerald L. Pollack und Daniel R. Stump, *Formel 8.59*), wodurch folgt:

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \nabla^2 \boldsymbol{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial_t^2}$$

Für die Divergenz der magentischen Flußdichte $\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ entspricht gemäß der zweiten magnetostatischen Maxwell-Gleichung:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

Somit folgt für die Gleichung basierend auf der zweiten Maxwell-Gleichung im Vakuum:

$$\underbrace{\nabla(0)}_{=0} - \nabla^2 \boldsymbol{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial_t^2}$$

Umgeformt entspricht der Ausdruck:

$$0 = \nabla^2 \boldsymbol{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial_t^2}$$

Setzt man nun für den Laplace-Operator ∇^2 den Ausdruck $\partial_j \partial_j$ ein, für das Produkt aus der Permittivität und der magnetischen Permeabilität $\mu_0 \epsilon_0$ den Ausdruck $\frac{1}{c^2}$, wobei c für die Lichtgeschwindigkeit steht, und für $\frac{\partial}{\partial_t}$ den in der Angabe beschrieben Ausdruck ∂_0, folgt die Vektor-Wellengleichung für das magnetische Feld:

$$0 = \partial_j \partial_j \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2} \partial_0 \partial_0 \boldsymbol{B}$$

b)

Gemäß der Angabe sei der folgende Ausdruck ein Vektorpotential in Coulomb-Eichung:

$$A_i(r_m) = a_i \cdot \cos\left(k_j r_j - ct + \phi_i\right)$$

Die erste Maxwell-Gleichung im Vakuum, entspricht gemäß der Angabe aus Unterpunkt a):

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial_t}$$

Weiters gilt gemäß *Electromagnetism* von Gerald L. Pollack und Daniel R. Stump, *Formel 11.19* der folgende Zusammenhang zwischen der magnetischen Flußdichte $\boldsymbol{B}$ und dem magnetischen Vektorpotential $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

Kombiniert folgt daraus für den Zusammenhang aus dem elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$ und dem magnetischen Vektorpotential $\boldsymbol{A}$:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \left(\nabla \times \boldsymbol{A}\right)$$

Umgeformt entspricht der Ausdruck:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \times \left(-\partial_t \boldsymbol{A}\right)$$

Daraus folgt:

$$\boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{A}$$

Dieser Zusammenhang kann wie folgt in die zweite Maxwell-Gleichung im Vakuum eingesetzt werden:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial_t^2}$$

Die linke Seite der Gleichung ergibt sich, wie bereits in Unterpunkt a) gezeigt, zu:

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial_t^2}$$

Gemäß *Electromagnetism* von Gerald L. Pollack und Daniel R. Stump, *Formel 11.27* gilt: (Coulomb Gauge)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

Dadurch folgt für die Gleichung:

$$-\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial_t^2}$$

Unter Anwendung der bereits in Unterpunkt a) beschriebenen Schreibweise ergibt sich somit:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial_t^2}$$

Für $\boldsymbol{A}$ kann der Ausdruck für ein Vektorpotential in Coulomb-Eichung, aus der Angabe, eingesetzt werden.

Der rechte Ausdruck der Gleichung entspricht durch Einsetzen des Ausdrucks für ein Vektorpotential in Coulomb-Eichung, aus der Angabe:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial_t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial_t^2} (\boldsymbol{a} \cdot \cos(\boldsymbol{kr} - ct + \boldsymbol{\phi}))$$

Durch zweifaches Anwenden der Kettenregel für Ableitungen auf das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ folgt:

$$= -\frac{1}{\cancel{c^2}} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \cancel{c^2} \cdot \cos(\boldsymbol{kr} - ct + \boldsymbol{\phi})$$

$$= -\boldsymbol{a} \cdot \cos(\boldsymbol{kr} - ct + \boldsymbol{\phi})$$

---

c)