1. Klausur - 29.04.2022

1. Weisen Sie, unter Verwendung des Coulombschen Ausdrucks für das elektrische Feld $E^i\left(x^m\right)$ in Abhängigkeit von der Raumladungsdichte $\rho\left(x^m\right)$, die Wirbelfreiheit von $E^i\left(x^m\right)$ nach. **25 Punkte**

---

2. Unter Verwendung der zweiten elektrostatischen Maxwellgleichung, zeige man die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals des elektrischen Feldes $E^i\left(x^m\right)$ anhand zweier Kurven $x_1^i(t), x_2^i(t); 0 \leq t \leq 1$, welche an denselben Punkten beginnen und enden, d.h. $x_1^i(0) = x_2^i(0) = x_0^i$ und $x_1^i(1) = x_2^i(1) = x_1^i$. **25 Punkte**

---

3. Wir vergleichen die elektrischen Felder zweier Elektroden: (A) einer dünnen quadratischen Platte der Kantenlänge $2a$, und (B) einer dünnen Scheibe mit Radius R. Die Elektroden tragen die gleiche Ladung Q, gleichmäßig verteilt, seien jeweils im Ursprung zentriert und rechtwinkelig auf die r_3-Achse.
    1. Gib Monopol- und Dipolmomente beider Elektroden an. (Hinweis: Keine Rechnung notwendig.) Berechne weiters alle kartesischen Quadrupolmomente (primitiv oder spurfrei) beider Elektroden und zeige, dass für $R = 2a/\sqrt{3}$ alle Momente übereinstimmen. **15 Punkte**
    2. Finde das Verhältnis zwischen R' und a, sodass das zentrale Nahfeld $E_3\left(r_3\right)$ für $0 < r_3 \ll R'$ beider Elektroden in führender Ordnung gleich ist. Gib die führende Ordnung an. **10 Punkte**

---

4. Ein mikroskopisches Modell der Raumladungsdichte eines Metalles im Halbraum $r_3 < 0$ besteht aus einer positiven und einer negativen Ladungsverteilung:

$$\rho_+\left(r_3\right) = \begin{cases} \hat{\rho} & r_3 < 0, \\ 0 & r_3 \geq 0, \end{cases} \quad \rho_-\left(r_3\right) = \begin{cases} -\hat{\rho}\left[1 - \frac{1}{2}\exp\left(\kappa r_3\right)\right] & r_3 < 0, \\ -\hat{\rho}\frac{1}{2}\exp\left(-\kappa r_3\right) & r_3 \geq 0. \end{cases}$$

   mit den positiven Konstanten $\hat{\rho}$ und κ.
    1. Löse die Poisson-Gleichung $-\partial_i \partial_i V\left(r_3\right) = \rho\left(r_3\right)/\epsilon_0$ mit der Gesamtladungsdichte $\rho\left(r_3\right)$ durch direkte Integration von $-\infty$ bis r_3 mit der Randbedingung $E_i\left(r_3\right) = 0$ für $r_3 \to -\infty$ und skizziere ρ, E_3 und V als Funktion von r_3. Berechne damit die elektrostatische Austrittsarbeit eines Elektrons der Ladung $-e$ aus dem Inneren des Metalls von $r_3 \to -\infty$ in den äußeren feldfreien Raum. **15 Punkte**
    2. Aufgrund äuRerer Umstände verschiebt sich die Elektronendichte um den Abstand d, sodass die neue Dichte im Metall $\rho\left(r_3\right) = \rho_+\left(r_3\right) + \rho_-\left(r_3 + d\right)$ im Äußeren für $r_3 \to +\infty$ das elektrische Feld $E_i = \delta_{3i}\mathcal{E}$ erzeugt, während das Innere bei $r_3 \to -\infty$ feldfrei bleibt. Finde d als Funktion der äußeren Feldstärke $\hat{\mathcal{E}}$ und achte auf das Vorzeichen. **10 Punkte**