0. Allgemeine Formeln

Ampérescher Ausdruck für das Magnetfeld

$$B_i(x_m) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{wire} d^3x' \, \frac{\epsilon_{ijk}J_i(x'_m)(x_k - x'_k)}{|x_m - x'_m|^3}$$

Ampéresches Gesetz in Integralform

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot dl = \mu_0 \int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{A} = \mu_0 \cdot I_{enclosed}$$

Biot-Savart'scher Ausdruck für das Magnetfeld

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{wire} d^3x' \, \frac{I\,dl \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{wire} d^3x' \, \frac{I\,dl \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3}$$

Green'sche Funktion des Laplaceoperators

$$G = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{1}{|x_m - x'_m|}$$

---

1. Magnetostatische Maxwell-Gleichungen

1. Maxwell-Gleichung

Elektrostatik

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \partial_i E_i(x_m) = \frac{\rho(x_m)}{\epsilon_0}$$

Magnetostatik

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \epsilon_{ijk}\partial_j B_k(x_m) = \mu_0 \cdot J_i(x_m)$$

2. Maxwell-Gleichung

Elektrostatik

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = \epsilon_{ijk}\partial_j E_k(x_m) = 0$$

Magnetostatik

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = \partial_i B_i(x_m) = 0$$

---

2. Nabla Rechenregeln

1. $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{\Delta}$
2. $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}$
3. $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\varphi) = \boldsymbol{\nabla}^2\varphi$

4. $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = 0$
5. $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \varphi) = 0$

---

3. Quellenfreiheit des magnetischen Feldes

> Zeigen Sie die Quellfreiheit des Magnetfelds $B_i(x_m)$ unter Verwendung des Amperéschen Ausdrucks, welcher $B_i(x_m)$ in Abhängigkeit von der Volumsstromdichte $J_i(x_m)$ darstellt.

Die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes $\boldsymbol{B}$ ist über den magnetischen Hüllenfluss definiert. Dieser besagt, dass der durch eine geschlossene Fläche austretende magnetische Fluss zu jedem Zeitpunkt gleich Null sein muss:

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{B} \cdot dA = 0$$

Der Gauß'sche Integralsatz besagt, dass für ein vom Rand ∂V eingeschlossenes Volumen V, für ein beliebiges Vektorfeld $\boldsymbol{B}$, geschrieben werden kann:

$$\int d^3V \partial_i B_i = \oint_{\partial V} dA_i B_i$$

Somit kann die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes $\boldsymbol{B}$ wie folgt beschrieben werden:

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{B} \cdot dA = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{B} \cdot dV = 0$$

In differentieller Form entspricht dieser Zusammenhang:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$$

Das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ kann über den Ampéreschen Ausdruck, welcher das magnetische Feld $\boldsymbol{B}$ in Abhängigkeit von der elektrischen Stromdichte $\boldsymbol{J}$ definiert, angeschrieben werden:

$$B_i(x_m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int d^3x' \, \frac{\epsilon_{ijk} \cdot J_i \cdot (x_k - x'_k)}{|x_m - x'_m|^3}$$

Für später wird die folgende Nebenrechnung benötigt:

$$\partial_k \frac{1}{\underbrace{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m|}_{\text{Abstand}}} = \partial_k \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} = \partial_k \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2}} = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2}^3}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \partial_k \boldsymbol{x}^2 = -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2}^3} \cdot \underbrace{\cancel{2} \cdot \boldsymbol{x}}_{innere Ableitung} \cdot \delta_{km}$$

$$= -\frac{\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m|^3} \cdot \delta_{km} = -\frac{\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}'_k}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m|^3}$$

Aus der Nebenrechnung lässt sich demnach ablesen:

$$-\boldsymbol{\nabla} \frac{1}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m|} = \frac{\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}'_k}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}'_m|^3}$$

Dieser Zusammenhang lässt sich nun in den Ampéreschen Ausdruck für das magnetische Feld $\boldsymbol{B}$ einsetzen:

$$B_i(x_m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int d^3x' \, \epsilon_{ijk} \cdot J_i \cdot \left(-\partial_k \frac{1}{|x_m - x'_m|} \right)$$

Das Kreuzprodukt ϵ_{ijk} sowie die Ableitung ∂_k können aus der Integration heraus gehoben werden, nachdem sie nicht von x' abhängig sind. Dadurch folgt:

$$B_i(x_m) = \epsilon_{ijk} \cdot (-\partial_k) \cdot \underbrace{\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int d^3x' \, \frac{J_i}{|x_m - x'_m|} \right)}_{=A_j(x_m)}$$

Der hintere Teil der Gleichung entspricht nun dem magnetischen Vektorpotential $\boldsymbol{A}$. Demnach kann der Ausdruck wie folgt vereinfacht werden:

$$B_i(x_m) = \epsilon_{ijk} \cdot (-\partial_j) \cdot A_k \, (x_m)$$

Wie bereits in der Einleitung des Beispiels beschrieben, muss für die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes $\boldsymbol{B}$ in differentieller Form gelten:

$$\text{div } \boldsymbol{B} = \partial_i B_i(x_m) = 0$$

Eingesetzt folgt entsprechend:

$$\partial_i B_i(x_m) = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k(x_m) = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k(x_m)$$

Setzt man die Symmetrien der einzelnen Ausdrücke ein, kann geschrieben werden:

$$\partial_i B_i(x_m) = \underset{\vee}{\epsilon_{ijk}} \underset{\cup}{\partial_i \partial_j} A_k(x_m)$$

Mit:

$$\vee \rightarrow \text{antisymmetrisch}$$

$$\cup \rightarrow \text{symmetrisch}$$

Die Multiplikation einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Funktion ergibt jedenfalls 0. Der Nachweis dafür ist wie folgt:

$$A_{ij} \cdot S_{ij} = -A_{ji} \cdot S_{ji} \underset{\textit{umbenennen}}{=} -A_{ij} \cdot S_{ij}$$

$$\implies 2 \cdot A_{ij} \cdot S_{ij} = 0$$

Dadurch folgt, dass die Multiplikation eines antisymmetrischen Vektors mit einem symmetrischen Vektor immer 0 ergibt. Entsprechend wurde gezeigt, dass gilt:

$$\partial_i B_i(x_m) = 0$$

Das magnetische Feld ist somit quellenfrei!

> Zeigen Sie unter Zuhilfenahme des Biot-Savart'schen Ausdrucks für das Magnetfeld $B_i(x_m)$ in Abhängigkeit von der Volumsstromdichte $J_i(x_m)$ die Divergenzfreiheit von $B_i(x_m)$.

Gemäß dem Biot-Savart-Gesetz erzeugt ein Stromleiter mit dem infinitesimalen Längenelement $\boldsymbol{dl}$, welcher sich an dem Ort $\boldsymbol{r}'$ befindet und von einem Strom I durchflossen wird, am Ort $\boldsymbol{r}$ die magnetische Flussdichte $d\boldsymbol{B}$:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl \times \hat{r}}{r^2}$$

Der Vektor $\hat{r}$ ist dabei wie folgt definiert:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|r|}$$

Umgeschrieben entspricht der Ausdruck für die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}$ am Ort $\boldsymbol{r}$ somit:

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I\, d\boldsymbol{l} \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

Durch Aufsummieren der infinitesimalen Anteile und durch Umwandeln des entstehenden Wegintegrals in ein Volumensintegral folgt die Integralform des Biot-Savart-Gesetzes: ($\boldsymbol{J}$ entspricht der elektrischen Stromdichte)

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\, dV'$$

Dieser kann in die bereits eingangs beschriebene Berechnung eingesetzt werden.

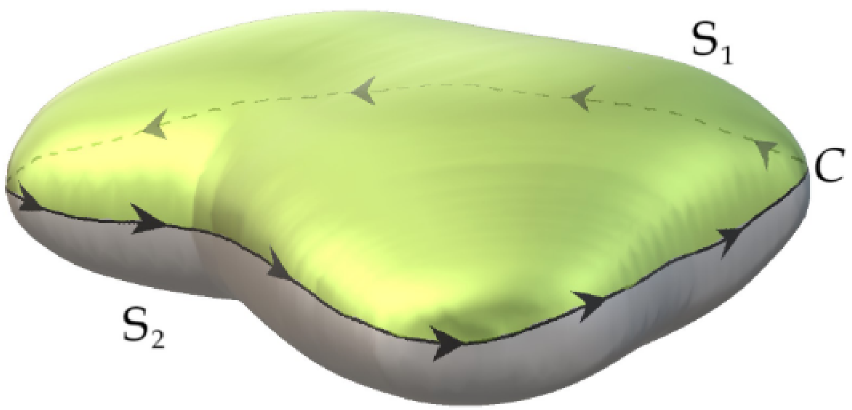
> Unter Verwendung des Biot-Savart'schen Ausdrucks für das Magnetfeld $B_i(x_m)$ in Abhängigkeit von der Volumsstromdichte $J_i(x_m)$ zeige man die Abwesenheit von magnetischer Ladung.

Die Abwesenheit von magnetischer Ladung ist äquivalent zu der Quellfreiheit des magnetischen Feldes.

---

4. Ampéresches Gesetz und Stromdichte

> Für zwei Flächen F_1 und F_2, welche durch dieselbe Kurve γ berandet werden (d.h. $\partial F_1 = \partial F_2 = \gamma$), weise man die Gleichheit des magnetischen Flusses durch diese Flächen, unter Verwendung der magnetostatischen Maxwellgleichungen, nach.



Der magentische Fluss Φ ist allgemein als das Flächenintegral über die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}$ definiert:

$$\Phi = \int_{\partial V} \boldsymbol{B} \cdot dA$$

Der Satz von Gauß lautet für ein vom Rand ∂V eingeschlossenes Volumen V, für ein beliebiges Vektorfeld mit den Komponenten B_i:

$$\int_V \partial_i B_i \, dV = \oint_{\partial V} B_i \, dA$$

Die zweite Maxwell-Gleichung in der Magnetostatik lautet:

$$\partial_i B_i(x_m) = 0$$

Demnach folgt für das Flächenintegral:

$$\int_V \underbrace{\partial_i B_i}_{=0} dV = \oint_{\partial V} B_i \, dA$$

$$0 = \oint_{\partial V} B_i \, dA$$

Nachdem sowohl die Fläche F_1, als auch die Fläche F_2 ein Rand ∂V des Volumens V sind, folgt:

$$\oint_{F_1} B_i \, dA = \oint_{F_2} B_i \, dA = 0$$

TODO! Reicht das als Nachweis? (ggf. Stokes, um auf den Rand zu kommen?)

> Unter Verwendung der magnetostatischen Maxwellgleichungen bestimme man die Rotation der Volumensstromdichte $J_i(x_m)$. Den so gewonnen Ausdruck löse man nach $B_i(x_m)$ unter Zuhilfenahme der Green-Funktion des Laplace-Operators auf.

Die erste Maxwell-Gleichung der Magnetostatik lautet:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \cdot \boldsymbol{J}$$

Ermittelt man basierend darauf die Rotation der Volumensstromdichte $\boldsymbol{J}$, folgt daraus:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla} \times (\mu_0 \cdot \boldsymbol{J})$$

Gemäß der Rechenregeln für den Rotations-Operator ergibt sich daraus:

$$\boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times (\mu_0 \cdot \boldsymbol{J})$$

Nachdem die Divergenz der magnetischen Flussdichte $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}$ gemäß der zweiten Maxwell-Gleichung der Magnetostatik gleich 0 ist, folgt:

$$0 - \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times (\mu_0 \cdot \boldsymbol{J})$$

Umgeformt nach der magnetischen Flussdichte $\boldsymbol{B}$ ergibt sich daraus:

$$\boldsymbol{B} = -\mu_0 \cdot \frac{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{J}}{\boldsymbol{\nabla}^2}$$

Die Green-Funktion des Laplaceoperators entspricht außerdem:

$$G = -\frac{1}{4\pi} \cdot \int d^3x' \frac{1}{|x_m - x'_m|}$$

TODO! wohin verschwindet das ^-2?

Setzt man die Green-Funktion des Laplaceoperators in die Formel für die magnetische Flußdichte $\boldsymbol{B}$ ein, folgt daraus:

$$\boldsymbol{B} = +\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int d^3x \frac{\epsilon_{ijk}\partial_j J_k}{|x_m - x'_m|}$$

Der resultierende Ausdruck entspricht dem Ampére'schen Ausdruck für das magnetische Feld $\boldsymbol{B}$.

> Zeigen Sie unter Verwendung der zweiten magnetostatischen Maxwellgleichung, dem Ampéreschen Gesetz, die Divergenzfreiheit der Stromdichte $J_i(x_m)$.

Das Ampéresche Gesetz, die erste Maxwell-Gleichung der Magnetostatik, lautet:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \cdot \boldsymbol{J}$$

Leitet man aus diesem Gesetz die Divergenz der elektrischen Stromdichte $\boldsymbol{J}$ ab, folgt:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = \mu_0 \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}))$$

Die Divergenz der Rotation eines Vektorfeldes $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})$ ist in allen Fällen 0. Dieser Zusammenhang lässt sich wie folgt nachweisen:

$$\underset{\vee}{\epsilon_{ijk}} \cdot \partial_j \underset{\cup}{\cdot} \partial_k B_i = 0$$

$$\vee \rightarrow \text{antisymmetrisch}$$

$$\cup \rightarrow \text{symmetrisch}$$

Die Multiplikation einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Funktion ergibt jedenfalls 0. Der Nachweis dafür ist wie folgt:

$$A_{ij} \cdot S_{ij} = -A_{ji} \cdot S_{ji} \underset{umbenennen}{=} -A_{ij} \cdot S_{ij}$$

$$\implies 2 \cdot A_{ij} \cdot S_{ij} = 0$$

Dadurch folgt, dass die Multiplikation eines antisymmetrischen Vektors mit einem symmetrischen Vektor 0 ergibt. Damit folgt für die Divergenz der Stromdichte $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J}$:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = \mu_0 \cdot 0 = 0$$

Somit wurde gezeigt, dass die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$ für statische Systeme divergenzfrei ist.

> Zeigen Sie, dass die stationäre (zeitunabhängige) Kontinuitätsgleichung $\partial_i J_i = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ eine direkte Konsequenz des Ampere'schen Gesetzes zwischen Magnetfeld $B_i(x_k)$ und Volumsstromdichte $J_i(x_k)$ darstellt.

Das Ampéresche Gesetz, die erste Maxwell-Gleichung der Magnetostatik, lautet:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \cdot \boldsymbol{J}$$

Dieser Ausdruck gilt lediglich für statische Systeme. In einem statischen System ist $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ und somit auch $\nabla \cdot \boldsymbol{J}$ gleich 0. In zeitabhängigen Systemen ist dieser Ausdruck jedoch nicht korrekt. In solchen Systemen muss zu der elektrischen Stromdichte $\boldsymbol{J}$ der Verschiebungsstrom *(eng. displacement current)* berücksichtigt werden. Ergänzt man den Verschiebungsstrom in dem Ampéreschen Gesetz, erhält man das Ampére-Maxwell-Gesetz:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \cdot \left(\boldsymbol{J} + \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$$

Basierend auf diesem Zusammenhang kann die Divergenz der elektrischen Stromdichte $\nabla \cdot \boldsymbol{J}$ ermittelt werden:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 \cdot \nabla \cdot \left(\boldsymbol{J} + \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \cdot \left(\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \epsilon_0 \cdot \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$$

Gemäß der ersten Maxwell-Gleichung der Elektrostatik entspricht $\epsilon_0 \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{E})$ gleich:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \to \epsilon_0 \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{E}) = \rho$$

Somit kann wie folgt in die Divergenz der elektrischen Stromdichte eingesetzt werden:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 \cdot \left(\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

Die Divergenz der Rotation eines Vektorfeldes $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$ ist in allen Fällen 0. Dieser Zusammenhang lässt sich wie folgt nachweisen:

$$\underset{\vee}{\epsilon_{ijk}} \cdot \underset{\cup}{\partial_j \cdot \partial_k} B_i = 0$$

$$\vee \to \text{antisymmetrisch}$$

$$\cup \to \text{symmetrisch}$$

Die Multiplikation einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Funktion ergibt jedenfalls 0. Der Nachweis dafür ist wie folgt:

$$A_{ij} \cdot S_{ij} = -A_{ji} \cdot S_{ji} \underset{umbenennen}{=} -A_{ij} \cdot S_{ij}$$

$$\implies 2 \cdot A_{ij} \cdot S_{ij} = 0$$

Dadurch folgt, dass die Multiplikation eines antisymmetrischen Vektors mit einem symmetrischen Vektor 0 ergibt. Damit folgt für die Divergenz der Stromdichte $\nabla \cdot \boldsymbol{J}$:

$$0 = \mu_0 \cdot \left(\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Somit ergibt sich final:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

5.