

1. Allgemeine Formeln

Ampère'sches Gesetz in Integralform

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \cdot I_{\text{enclosed}}$$

Gauß'sches Gesetz in Integralform

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_V \rho(\mathbf{x}) \cdot d^3x = \frac{Q_{\text{enclosed}}}{\epsilon_0}$$

Green'sche Funktion des Laplaceoperators

$$G = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|}$$

2. Magnetostatische Maxwell-Gleichungen

1. Maxwell-Gleichung

Elektrostatik

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial_i E_i(\mathbf{x}_m) = \frac{\rho(\mathbf{x}_m)}{\epsilon_0}$$

Magnetostatik

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \partial_i B_i(\mathbf{x}_m) = 0$$

2. Maxwell-Gleichung

Elektrostatik

$$\nabla \times \mathbf{E} = \epsilon_{ijk} \partial_j E_k(\mathbf{x}_m) = 0$$

Magnetostatik

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_{ijk} \partial_j B_k(\mathbf{x}_m) = \mu_0 \cdot \mathbf{J}_i(\mathbf{x}_m)$$

4. Nabla Rechenregeln

1. $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta$
 2. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
 3. $\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi$
 4. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
 5. $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$
-

5. Erste Theoriefragen

2019

Zeigen Sie die Quelfreiheit des Magnetfelds $B_i(x_m)$ unter Verwendung des Amperéschen Ausdrucks, welcher $B_i(x_m)$ in Abhängigkeit von der Volumsstromdichte $J_i(x_m)$ darstellt.

Die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes \mathbf{B} ist über den magnetischen Hüllenfluss definiert. Dieser besagt, dass der durch eine geschlossene Fläche austretende magnetische Fluss zu jedem Zeitpunkt gleich Null sein muss:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Der Gauß'sche Integralsatz besagt, dass für ein vom Rand ∂V eingeschlossenes Volumen V , für ein beliebiges Vektorfeld \mathbf{B} , geschrieben werden kann:

$$\int d^3V \partial_i B_i = \oint_{\partial V} dA_i B_i$$

Somit kann die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes \mathbf{B} wie folgt beschrieben werden:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{B} \cdot dV = 0$$

In differentieller Form entspricht dieser Zusammenhang:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

Das Magnetfeld \mathbf{B} kann über den Ampéreschen Ausdruck, welcher das magnetische Feld \mathbf{B} in Abhängigkeit von der elektrischen Stromdichte \mathbf{J} definiert, angeschrieben werden:

$$B_i(x_m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int d^3x' \frac{\epsilon_{ijk} \cdot J_j \cdot (x_k - x'_k)}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|^3}$$

Für später wird die folgende Nebenrechnung benötigt:

$$\begin{aligned} \partial_k \underbrace{\frac{1}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|}}_{\text{Abstand}} &= \partial_k \frac{1}{|\mathbf{x}|} = \partial_k \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2}} = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2}^3}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \partial_k \mathbf{x}^2 = -\frac{1}{\cancel{\mathbf{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2}^3} \cdot \underbrace{\cancel{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}}_{\text{innere Ableitung}} \cdot \delta_{km} \\ &= -\frac{\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|^3} \cdot \delta_{km} = -\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|^3} \end{aligned}$$

Aus der Nebenrechnung lässt sich demnach ablesen:

$$-\nabla \frac{1}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|} = \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|^3}$$

Dieser Zusammenhang lässt sich nun in den Ampéreschen Ausdruck für das magnetische Feld \mathbf{B} einsetzen:

$$B_i(x_m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int d^3x' \epsilon_{ijk} \cdot J_j \cdot \left(-\partial_k \frac{1}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|} \right)$$

Das Kreuzprodukt ϵ_{ijk} sowie die Ableitung ∂_k können aus der Integration heraus gehoben werden, nachdem sie nicht von x' abhängig sind. Dadurch folgt:

$$B_i(x_m) = \epsilon_{ijk} \cdot (-\partial_k) \cdot \underbrace{\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int d^3x' \frac{J_i}{|x_m - x'_m|} \right)}_{=A_j(x_m)}$$

Der hintere Teil der Gleichung entspricht nun dem magnetischen Vektorpotential \mathbf{A} . Demnach kann der Ausdruck wie folgt vereinfacht werden:

$$B_i(x_m) = \epsilon_{ijk} \cdot (-\partial_j) \cdot A_k(x_m)$$

Wie bereits in der Einleitung des Beispiels beschrieben, muss für die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes \mathbf{B} in differentieller Form gelten:

$$\text{div } \mathbf{B} = \partial_i B_i(x_m) = 0$$

Eingesetzt folgt entsprechend:

$$\partial_i B_i(x_m) = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k(x_m) = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k(x_m)$$

Setzt man die Symmetrien der einzelnen Ausdrücke ein, kann geschrieben werden:

$$\partial_i B_i(x_m) = \epsilon_{ijk} \underset{\vee}{\partial_i} \underset{\cup}{\partial_j} A_k(x_m)$$

Mit:

$\vee \rightarrow$ antisymmetrisch

$\cup \rightarrow$ symmetrisch

Die Multiplikation einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Funktion ergibt jedenfalls 0. Der Nachweis dafür ist wie folgt:

$$\begin{aligned} A_{ij} \cdot S_{ij} &= -A_{ji} \cdot S_{ji} \underset{\text{umbenennen}}{=} -A_{ij} \cdot S_{ij} \\ \implies 2 \cdot A_{ij} \cdot S_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

Dadurch folgt, dass die Multiplikation eines antisymmetrischen Vektors mit einem symmetrischen Vektor immer 0 ergibt. Entsprechend wurde gezeigt, dass gilt:

$$\partial_i B_i(x_m) = 0$$

Das magnetische Feld ist somit quellenfrei!

2009 / 2011 / 2013

Zeigen Sie unter Zuhilfenahme des Biot-Savart'schen Ausdrucks für das Magnetfeld $B_i(x_m)$ in Abhängigkeit von der Volumsstromdichte $J_i(x_m)$ die Divergenzfreiheit von $B_i(x_m)$.

Gemäß dem Biot-Savart-Gesetz erzeugt ein Stromleiter mit dem infinitesimalen Längenelement $d\mathbf{l}$, welcher sich an dem Ort \mathbf{r}' befindet und von einem Strom I durchflossen wird, am Ort \mathbf{r} die magnetische Flussdichte $d\mathbf{B}$:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Der Vektor $\hat{\mathbf{r}}$ ist dabei wie folgt definiert:

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\vec{r}}{|\mathbf{r}|}$$

Umgeschrieben entspricht der Ausdruck für die magnetische Flussdichte \mathbf{B} am Ort \mathbf{r} somit:

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Durch Aufsummieren der infinitesimalen Anteile und durch Umwandeln des entstehenden Wegintegrals in ein Volumensintegral folgt die Integralform des Biot-Savart-Gesetzes: (\mathbf{J} entspricht der elektrischen Stromdichte)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

Dieser kann in die bereits eingangs beschriebene Berechnung eingesetzt werden.

2013 Ersatztest

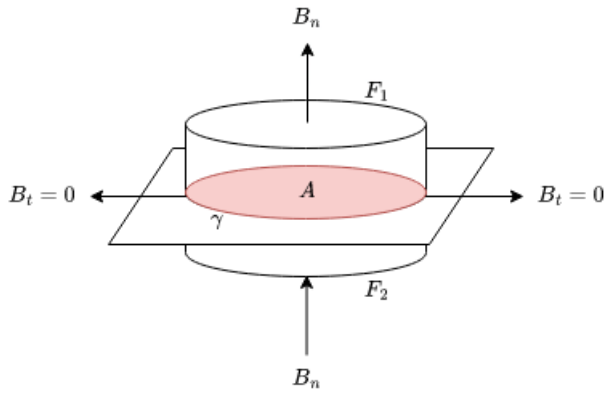
Unter Verwendung des Biot-Savart'schen Ausdrucks für das Magnetfeld $B_i(x_m)$ in Abhängigkeit von der Volumsstromdichte $J_i(x_m)$ zeige man die Abwesenheit von magnetischer Ladung.

Die Abwesenheit von magnetischer Ladung ist äquivalent zu der Quelfreiheit des magnetischen Feldes.

6. Zweite Theoriefragen

2019

Für zwei Flächen F_1 und F_2 , welche durch dieselbe Kurve γ berandet werden (d.h. $\partial F_1 = \partial F_2 = \gamma$), weise man die Gleichheit des magnetischen Flusses durch diese Flächen, unter Verwendung der magnetostatischen Maxwellgleichungen, nach.



Der magnetische Fluss Φ ist allgemein als das Flächenintegral über die magnetische Flussdichte \mathbf{B} definiert:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Weiters lautet die erste Maxwell-Gleichung der Magnetostatik:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Diese Gleichung drückt aus, dass das magnetische Feld quellenfrei ist. Daraus folgt der Satz vom magnetischen Hüllenfluss, welcher besagt, dass der durch eine geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V austretende magnetische Fluss Φ stets gleich Null sein muss. Mit dem Satz von Gauß, in Integralform, folgt:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{B}}_{=0} \cdot d^3x = 0$$

An einer Fläche, wie in unserer Skizze der Fläche A , muss entsprechend, gemäß dem Satz vom magnetischen Hüllenfluss, gelten: (gedanklich wird dafür die Höhe der umgebenden "Box" gegen Null approximiert; 1 und 2 stehen für die Ober- und Unterseite der Fläche A)

$$\Phi = 0 = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

Daraus folgt, dass die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte \mathbf{B}_n jederzeit kontinuierlich über eine beliebige zweidimensionale Fläche A ist:

$$|[\mathbf{B}_n]| = 0$$

Nachdem die tangential Komponente der magnetischen Flussdichte \mathbf{B}_t gleich Null ist (der Fluss durch die Kurve γ ist annähernd Null), der gesamt durch die Fläche F austretende magnetische Fluss ebenfalls Null ist, müssen die Flüsse durch die Flächen F_1 und F_2 gleich aber entgegengesetzt sein:

$$\int_{F_1} \mathbf{B}_n \cdot d\mathbf{A} = \int_{F_2} \mathbf{B}_n \cdot d\mathbf{A}$$

2013

Unter Verwendung der magnetostatischen Maxwellgleichungen bestimme man die Rotation der Volumensstromdichte $\mathbf{J}_i(x_m)$. Den so gewonnen Ausdruck löse man nach

$B_i(x_m)$ unter Zuhilfenahme der Green-Funktion des Laplace-Operators auf.

Die zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik, das Ampéresche Gesetz, lautet:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

In diesen Ausdruck kann man den Zusammenhang zwischen der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} und des magnetischen Vektorpotentials \mathbf{A} einsetzen:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Damit folgt:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

Die linke Seite des Zusammenhangs kann gemäß der Rechenregeln des Nabla-Operators ∇ umgeformt werden:

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

Gemäß der Coulomb-Eichung ist das Vektorpotential \mathbf{A} divergenzfrei. Entsprechend gilt:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Somit folgt für den Ausdruck basierend auf dem Ampéreschen Gesetz:

$$\nabla (0) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

Nachdem der Gradient von Null $\nabla (0)$ ebenfalls Null ist, kann weiters geschrieben werden:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

In diesen Ausdruck kann gemäß der Angabe die Greensche Funktion des Laplaceoperators ∇^2 eingesetzt werden. Diese lautet im dreidimensionalen Raum:

$$G = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}'_m|}$$

Eingesetzt folgt damit:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mu_0 \cdot \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x'$$

Final folgt somit der Ausdruck für das magnetische Vektorpotential \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Gemäß der Coulomb-Eichung muss gelten, dass die Divergenz des magnetischen Vektorpotentials \mathbf{A} gleich Null ist. Auf die Lösung angewandt ist diese Beziehung gegeben, da die Divergenz der elektrischen Stromdichte $\nabla \cdot \mathbf{J}$ ebenfalls gleich Null ist.

2013 Ersatztest

Zeigen Sie unter Verwendung der zweiten magnetostatischen Maxwellgleichung, dem Ampéreschen Gesetz, die Divergenzfreiheit der Stromdichte $J_i(x_m)$.

Das Ampéresche Gesetz, die zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik, lautet:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

Leitet man aus diesem Gesetz die Divergenz der elektrischen Stromdichte \mathbf{J} ab, folgt:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \cdot (\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}))$$

Die Divergenz der Rotation eines Vektorfeldes $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ ist in allen Fällen 0. Dieser Zusammenhang lässt sich wie folgt nachweisen:

$$\epsilon_{ijk} \cdot \partial_j \cdot \partial_k B_i = 0$$

$\nabla \rightarrow$ antisymmetrisch

$\cup \rightarrow$ symmetrisch

Die Multiplikation einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Funktion ergibt jedenfalls 0. Der Nachweis dafür ist wie folgt:

$$\begin{aligned} A_{ij} \cdot S_{ij} &= -A_{ji} \cdot S_{ji} \underset{\text{umbenennen}}{=} -A_{ij} \cdot S_{ij} \\ \implies 2 \cdot A_{ij} \cdot S_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

Dadurch folgt, dass die Multiplikation eines antisymmetrischen Vektors mit einem symmetrischen Vektor 0 ergibt. Damit folgt für die Divergenz der Stromdichte $\nabla \cdot \mathbf{J}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \cdot 0 = 0$$

Somit wurde gezeigt, dass die elektrische Stromdichte \mathbf{J} für statische Systeme divergenzfrei ist.

2011

Zeigen Sie, dass die stationäre (zeitunabhängige) Kontinuitätsgleichung $\partial_i J_i = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ eine direkte Konsequenz des Ampere'schen Gesetzes zwischen Magnetfeld $B_i(x_k)$ und Volumsstromdichte $J_i(x_k)$ darstellt.

Das Ampéresche Gesetz, die zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik, lautet:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

Dieser Ausdruck gilt lediglich für statische Systeme. In einem statischen System ist $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ und somit auch $\nabla \cdot \mathbf{J}$ gleich 0. In zeitabhängigen Systemen ist dieser Ausdruck jedoch nicht korrekt. In solchen Systemen muss zu der elektrischen Stromdichte \mathbf{J} der Verschiebungsstrom (*eng. displacement current*) berücksichtigt werden. Ergänzt man den Verschiebungsstrom in dem Ampéreschen Gesetz, erhält man das Ampère-Maxwell-Gesetz:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Basierend auf diesem Zusammenhang kann die Divergenz der elektrischen Stromdichte $\nabla \cdot \mathbf{J}$ ermittelt werden:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \cdot \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \cdot \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \epsilon_0 \cdot \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Gemäß der ersten Maxwell-Gleichung der Elektrostatik entspricht $\epsilon_0 \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E})$ gleich:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \epsilon_0 \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \rho$$

Somit kann wie folgt in die Divergenz der elektrischen Stromdichte eingesetzt werden:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \cdot \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

Die Divergenz der Rotation eines Vektorfeldes $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ ist in allen Fällen 0. Dieser Zusammenhang lässt sich wie folgt nachweisen:

$$\epsilon_{ijk} \cdot \partial_j \cdot \partial_k B_i = 0$$

$\nabla \rightarrow$ antisymmetrisch

$\cup \rightarrow$ symmetrisch

Die Multiplikation einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Funktion ergibt jedenfalls 0. Der Nachweis dafür ist wie folgt:

$$\begin{aligned} A_{ij} \cdot S_{ij} &= -A_{ji} \cdot S_{ji} \stackrel{\text{umbenennen}}{=} -A_{ij} \cdot S_{ij} \\ \implies 2 \cdot A_{ij} \cdot S_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

Dadurch folgt, dass die Multiplikation eines antisymmetrischen Vektors mit einem symmetrischen Vektor 0 ergibt. Damit folgt für die Divergenz der Stromdichte $\nabla \cdot \mathbf{J}$:

$$0 = \mu_0 \cdot \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Somit ergibt sich final:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

7. Der elektrische Strom

Allgemein gelten für den elektrischen Strom die folgenden Zusammenhänge:

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{A} = \sigma \cdot \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{A} = \sigma \cdot \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \cdot d^3x = \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot \int_V \rho \cdot d^3x = \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot Q$$

Ohm'sches Gesetz

U entspricht der elektrischen Spannung. I entspricht dem elektrischen Strom. R entspricht dem elektrischen Widerstand.

$$U = I \cdot R$$

Der elektrische Widerstand R eines Zylinders lässt sich beispielsweise wie folgt berechnen:

$$R = \frac{L}{\sigma \cdot A}$$

L entspricht der Länge des Zylinders und A dessen Querschnittsfläche.

Die elektrische Leitfähigkeit σ lässt sich auch durch den spezifischen Widerstand ρ ausdrücken:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

Lokale Form des Ohm'schen Gesetzes

Die lokale Form des Ohm'schen Gesetzes ist:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sigma \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})$$

Joule'sches Gesetz

Das Joule'sche Gesetz definiert die Leistung P basierend auf dem Strom I , der Spannung U und dem Widerstand R :

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R$$

Elektrische Stromdichte

Sei $d\mathbf{A}$ ein infinitesimales Flächenstück, dann ist dI die Ladung, welche pro Zeiteinheit das Flächenstück $d\mathbf{A}$ passiert:

$$dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

Die elektrische Stromdichte ist unter anderem wie folgt definiert. n entspricht dabei der Anzahl an Ladungen pro Volumeneinheit. q ist die Ladung der einzelnen Ladungsträger. \mathbf{v} entspricht der mittleren Geschwindigkeit der Ladungen. ρ entspricht der elektrischen Raumladungsdichte.

$$\mathbf{J} = \underbrace{q \cdot n}_{=\rho} \cdot \mathbf{v}$$

Stationäre Kontinuitätsgleichung

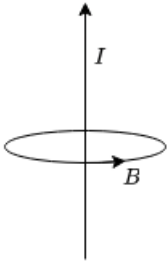
Die stationäre Kontinuitätsgleichung besagt, dass der Fluss von Ladung, aus einem Volumen V , in besagtem Volumen V zu einer Abnahme der Ladung führt. \mathbf{J} entspricht der Volumensstromdichte. ρ entspricht der Volumensladungsdichte.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

In Integralform entspricht der Zusammenhang:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot d^3x$$

8. Das magnetische Feld



Das magnetische Feld \mathbf{B} ist stets in \vec{e}_φ ausgerichtet.

Ampérescher Ausdruck für das Magnetfeld

$$B_i(x_m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{wire}} d^3x' \frac{\epsilon_{ijk} J_j(x'_m)(x_k - x'_k)}{|x_m - x'_m|^3}$$

Der Tensor x_m entspricht dem **Referenzpunkt**.

Der Tensor x'_m entspricht dem **Quellpunkt**.

Biot-Savart'scher Ausdruck für das Magnetfeld

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

In Integralform entspricht der Ausdruck:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{wire}} d^3x' \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{wire}} d^3x' \frac{I d\mathbf{l} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

Langer gerader Draht

Das magnetische Feld für einen langen geraden Draht ist über die folgende Formel definiert:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot R} \cdot \hat{\boldsymbol{\Phi}}$$

R entspricht dabei dem Radius des Leiters.

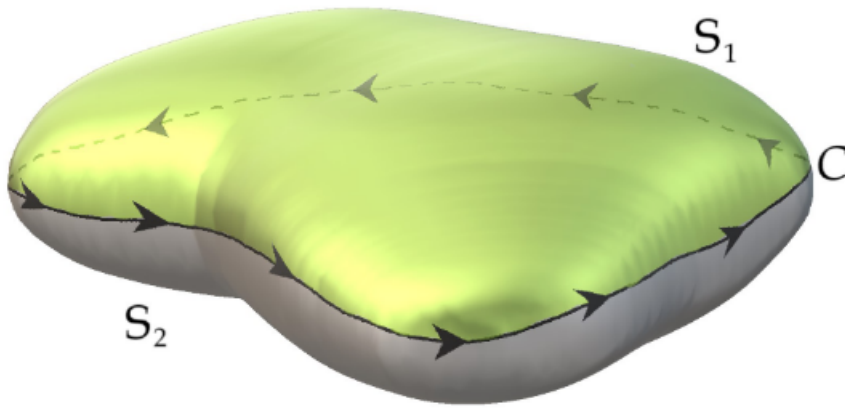
Kraft

Die auf ein Teilchen mit der Ladung q wirkende Kraft, verursacht durch ein Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} , entspricht:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

9. Das magnetische Vektorpotential

10. Integralsätze



Gaußscher Integralsatz

Der Satz von Gauß lautet für ein vom Rand ∂V eingeschlossenes Volumen V für ein beliebiges Vektorfeld mit den Komponenten E_i :

$$\int d^3V \partial_i E_i = \oint_{\partial V} dA_i E_i$$

wobei A_i die Komponenten des (stets nach außen gerichteten) Flächennormalvektors am Rand des Volumens sind.

Stokescher Integralsatz

Der Satz von Stokes verknüpft ein Oberflächenintegral über eine (gekrümmte) Fläche mit einem Kurvenintegral über den Rand der Fläche:

$$\int_S dA_i \epsilon_{ijk} \partial_j F_k = \oint_{\partial S} ds_i F_i$$

11. Randbedingungen

$$|[E_t]| = 0$$

$$|[D_n]| = 0$$

$$|[B_n]| = 0$$

12. Der Kondensator

Ladung

Allgemein gilt für die Ladung Q in einem Kondensator der folgende Zusammenhang mit der elektrischen Spannung U und der Kapazität C :

$$Q = C \cdot U$$

Daraus folgt mit dem Ohm'schen Gesetz:

$$R \cdot C = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

13. Das elektrische Feld

Allgemeine Zusammenhänge

$$U = s \cdot E$$

$$F = q \cdot E$$

$$E = -\nabla V$$
