# 6. Problem Set - 04.05.2022

Elektrodynamik I - 136.015

**Gerechnete Beispiele:**
16) a) & b)
17) a) & b)
18) a) & b) & c)

## 16 Quadrupolpotential

### 16 Quadrupolpotential

(a) Wie müssen die Konstanten $C_1$ und $C_2$ gewählt werden, sodass das in Kugelkoordinaten gegebene Skalarfeld

$$V(r,\vartheta,\varphi) = \frac{C_1 \cos^2\vartheta + C_2}{r^3}$$

ein elektrisches Potential im ladungsfreien Raum sein kann.

(b) Finde $C_1$ und $C_2$ für eine geladene Scheibe mit Radius $R$ in der Äquatorebene des Koordinatesystemes mit gleichmäßig verteilter Ladung $Q$, deren Zentrum im Ursprung liegt.

nur (a) oder (b): 2P, (a) und (b): 3P

### a)

Gemäß der Angabe gehen wir von einem Skalarfeld der folgenden Form aus:

$$V(r,\vartheta,\varphi) = \frac{C_1 \cdot \cos^2\vartheta + C_2}{r^3}$$

Für einen ladungsfreien Raum muss gelten:

$$\underbrace{-\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}}_{Poisson\,Gleichung} = 0$$

$\nabla^2$ ist in dabei der Laplace-Operator. Wir können demnach den Laplace in Kugelkoordinaten anschreiben: (die Formel entstammt der Formelsammlung für den ersten Test)

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\cdot\partial_r(r^2\cdot\partial_r V) + \frac{1}{r^2\cdot\sin\vartheta}\cdot\partial_\vartheta(\sin\vartheta\cdot\partial_\vartheta V) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\cdot\partial_\varphi\partial_\varphi V$$

---

$\partial_r V$ entspricht dabei:

$$\partial_r V = -3\cdot\frac{C_1\cdot\cos^2\vartheta + C_2}{r^4}$$

Damit folgt für den Term $\partial_r(r^2\cdot\partial_r V)$:

$$\partial_r(r^2\cdot\partial_r V) = \partial_r\left(\cancel{r^2}\cdot(-3)\cdot\frac{C_1\cdot\cos^2\vartheta + C_2}{r^{\cancel{4}}}\right)$$

$$= \partial_r\left((-3)\cdot\frac{C_1\cdot\cos^2\vartheta + C_2}{r^2}\right) = 6\cdot\frac{C_1\cdot\cos^2\vartheta + C_2}{r^3}$$

Für das gesamte erste Glied folgt somit:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \partial_r(r^2 \cdot \partial_r V) = 6 \cdot \frac{C_1 \cdot \cos^2\vartheta + C_2}{r^5}$$

---

Weiters entspricht $\partial_\vartheta V$:

$$\partial_\vartheta V = \partial_\vartheta \left( \frac{C_1 \cdot \cos^2\vartheta + C_2}{r^3} \right) = \partial_\vartheta \left( \frac{C_1 \cdot (\cos\vartheta \cdot \cos\vartheta) + C_2}{r^3} \right)$$

Für $\cos\vartheta \cdot \cos\vartheta$ kann die Produktregel der Ableitung angewandt werden:

$$= \frac{C_1 \cdot (-\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta - \cos\vartheta \cdot \sin\vartheta)}{r^3} = -2 \cdot \frac{C_1 \cdot (\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta)}{r^3}$$

Für den Term $\partial_\vartheta(\sin\vartheta \cdot \partial_\vartheta V)$ folgt damit:

$$\partial_\vartheta(\sin\vartheta \cdot \partial_\vartheta V) = \partial_\vartheta \left( -2 \cdot \frac{C_1 \cdot (\sin^2\vartheta \cdot \cos\vartheta)}{r^3} \right) \partial_\vartheta \left( -2 \cdot \frac{C_1 \cdot ((\sin\vartheta \cdot \sin\vartheta) \cdot \cos\vartheta)}{r^3} \right)$$

Erneut kann die Produktregel für Ableitungen angewandt werden:

$$= -2 \cdot \frac{C_1 \cdot ((\cos\vartheta \cdot \sin\vartheta + \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta) \cdot \cos\vartheta - \sin\vartheta \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\vartheta)}{r^3}$$

$$\partial_\vartheta(\sin\vartheta \cdot \partial_\vartheta V) = -2 \cdot \frac{C_1 \cdot (2 \cdot \sin\vartheta \cdot \cos^2\vartheta - \sin^3\vartheta)}{r^3}$$

Somit folgt für das zweite Glied:

$$\frac{1}{r^2 \cdot \sin\vartheta} \cdot \partial_\vartheta(\sin\vartheta \cdot \partial_\vartheta V) = \frac{1}{r^2 \cdot \sin\vartheta} \cdot (-2) \cdot \frac{C_1 \cdot (2 \cdot \sin\vartheta \cdot \cos^2\vartheta - \sin^3\vartheta)}{r^3}$$

$$= -2 \cdot \frac{C_1 \cdot (2 \cdot \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)}{r^5}$$

---

Zuletzt entspricht $\partial_\varphi V$ gleich $0$.

---

Aus den vorherigen Berechnungen folgt für für die eingangs aufgestellte Bedingung $-\nabla^2 V = 0$:

$$-\nabla^2 V = 6 \cdot \frac{C_1 \cdot \cos^2\vartheta + C_2}{r^5} - 2 \cdot \frac{C_1 \cdot (2 \cdot \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)}{r^5} = 0$$

$$= \cancel{\frac{1}{r^5}} \cdot (C_1 \cdot (\underbrace{2 \cdot \cos^2\vartheta + 2 \cdot \sin^2\vartheta}_{=2}) + 6 \cdot C_2) = 0$$

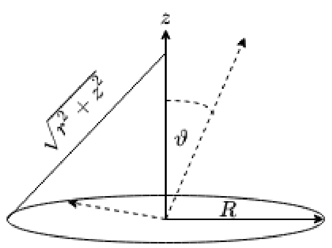
$$= 2 \cdot C_1 + 6 \cdot C_2 = 0$$

Daraus folgt für $C_1$ und $C_2$:

$$C_1 = -3 \cdot C_2$$

$$C_2 = -\frac{1}{3} \cdot C_1$$

## b)



Für die geladene Scheibe kann die Raumladungsdichte $\rho(R,\varphi,z)$ wie folgt angenommen werden:

$$\rho(R,\varphi,z) = \sigma \cdot \delta(R-|r|) = \frac{Q}{R^2 \cdot \pi} \cdot \delta(R-|r|)$$

Damit kann weiters das elektrische Potential der Scheibe ermittelt werden. $\sqrt{r^2+z^2}$ entspricht dabei dem Punkt zwischen einem Betrachtungspunkt auf der z-Achse und dem Radius der Scheibe.

$$V(R,\varphi,z) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int \frac{\rho(R,\varphi,z)}{\sqrt{r^2+z^2}}\, d^3r$$

Mit der Integration über die Zylinderkoordinaten und dem Volumenselement $dV = r\,dr\,d\varphi$ folgt daraus:

$$= \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma}{\sqrt{r^2+z^2}} \cdot r\,dr\,d\varphi$$

Der Term $r^2+z^2$ kann für die Integration wie folgt substituiert werden:

$$u = r^2 + z^2 \to du = 2 \cdot r\,dr \to dr = \frac{du}{2 \cdot r}$$

Damit ergibt sich das elektrische Potential zu:

$$= \frac{\sigma}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\cancel{r}}{\sqrt{u}} \frac{du}{2 \cdot \cancel{r}}\, d\varphi = \frac{\sigma}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{u}\,\Big|_0^R\, d\varphi$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2+z^2}\,\Big|_0^R\, d\varphi = \frac{\sigma}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{z^2}\, d\varphi$$

$$= \frac{\sigma}{\cancel{4\pi} \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{z^2}\right) \cdot \cancel{2\pi}$$

$$= \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{z^2}\right)$$

Dieser Ausdruck kann nun mit dem Ausdruck für das elektrische Potential aus dem Unterpunkt a) gleichgesetzt werden:

$$V(R,\varphi,z) = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{z^2}\right) = \frac{C_1 \cdot \cos^2\vartheta + C_2}{r^3}$$

Nachdem wir das elektrische Potential in der z-Achse betrachten, muss $\vartheta$ mit $0$ angenommen werden. (siehe Skizze)

$$\frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{z^2}\right) = \frac{C_1 \cdot \overbrace{\cos^2 0}^{=1} + C_2}{r^3} = \frac{C_1 + C_2}{r^3}$$

Mit dem Zusammenhang $C_2 = -\frac{1}{3} \cdot C_1$ aus Unterpunkt a) kann der rechte Ausruck weiter vereinfacht werden zu:

$$\frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{z^2}\right) = \frac{C_1 - \frac{1}{3} \cdot C_1}{r^3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{C_1}{r^3}$$

Für $C_1$ einer geladenen Scheibe, gemäß der Angabe, ergibt sich somit final:

$$C_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sigma \cdot r^3}{\epsilon_0} \cdot \left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$$

Dadurch folgt für $C_2$ final:

$$C_2 = -\frac{1}{3} \cdot C_1 = -\frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{\sigma \cdot r^3}{\epsilon_0} \cdot \left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$$

# 17 Wechselwirkung von Stickstoffmolekülen

## 17 Wechselwirkung von Stickstoffmolekülen

Wir modellieren die beiden positiven Ionen im $N_2$-Molekül durch zwei Punktladungen mit Ladung $+Q$ im Abstand $D$. Die Bindungselektronen nehmen wir als geladenen Stab der Länge $D$ an mit der Ladung $-2Q$, gleichmäßig verteilt.

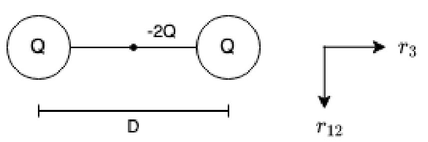
(a) Bestimme alle Multipolmomente bis zu den Quadrupolmomenten für ein Molekül, dessen Zentrum im Ursprung liegt und das entlang der $r_3$-Achse ausgerichtet ist. Zeige, dass alle Momente außer $Q_{33}$ verschwinden und dass dieses durch $QD^2/6$ gegeben ist.

(b) Bilde die Multipolentwicklung des Potentials an der Stelle $(r_1 \geq 0, r_2 = 0, r_3)$ und zeige, dass es folgende asymptotische Fernfelder hat: $V_1(r_1) = -\frac{QD^2}{24\pi\epsilon_0 r_1^3}$ für $r_1 \gg D, r_3$ und $V_3(r_3) = +\frac{QD^2}{12\pi\epsilon_0 r_3^3}$ für $r_3 \gg D, r_1$.

(c) Wir betrachten nun die Wechselwirkungsenergie zwischen dem $N_2$-Molekül im Ursprung und einem zweiten $N_2$-Molekül in hinreichend großer Entfernung $R \gg D$ an der Position $R_i$ und mit der Ausrichtung der Bindungsachse $a_i$. Verwende die asymptotischen Fernfelder und zeige, dass die führende Ordnung der Wechselwirkungsenergie gegeben ist durch $C\,Q^2D^4/(2\pi\epsilon_0 R^5)$ mit folgenden Koeffizienten $C$ für die jeweiligen Molekülkonstellationen:
koaxial ($R_i = R\,\delta_{3i}$, $a_i = \delta_{3i}$): $C = +1/3$, kreuzend ($R_i = R\,\delta_{1i}$, $a_i = \delta_{1i}$): $C = -1/6$.

(a): 1P, (b): 1P, (c): 1P

### a)




Die gesamte Multipol-Entwicklung entspricht:

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{Q}{r} + \frac{\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{p}}{r^2} + \frac{\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \mathcal{Q}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{r}}}{r^3}\right]$$

Der Term $Q$ entspricht dabei dem Multipol-Anteil. In unserem Fall ergibt sich dieser zu:

$$Q = \sum_{n=1}^{N=3} q_n = Q + Q - 2 \cdot Q = 0$$

Für den Dipol-Anteil $\boldsymbol{p}$ folgt analog:

$$\boldsymbol{p} = \sum_{n=1}^{N=3} q_n \cdot \boldsymbol{x}_n = Q \cdot \frac{D}{2} \cdot \underbrace{(\vec{e}_3 - \vec{e}_3)}_{=\vec{0}} + q_3 \cdot \boldsymbol{x}_3$$

Aus der Symmetrie des Stabes $q_3$ bzgl. der $r_{12}$-Ebene folgt, dass $q_3 \cdot \boldsymbol{x}_3$ ebenfalls $0$ ergibt. Somit folgt für den Dipol-Anteil:

$$\boldsymbol{p} = Q \cdot \frac{D}{2} \cdot \underbrace{(\vec{e}_3 - \vec{e}_3)}_{=\vec{0}} + \underbrace{q_3 \cdot \boldsymbol{x}_3}_{=0} = 0$$

Der Multipol-Anteil $\mathcal{Q}$ folgt zu:

$$\mathcal{Q}_2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{N=3} \frac{q_n}{2} \cdot \left(3 \cdot \boldsymbol{x}_n \cdot \boldsymbol{x}_n - r_n^2 \cdot \boldsymbol{I}\right)$$

Aus dem Plenum ist zusätzlich der folgende Ausdruck für den Quadrupol bekannt (spurbehaftet):

$$P_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \int \rho(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j \, d^3x$$

---

Die Raumladungsdichte $\rho(\boldsymbol{x})$ kann in diesem Beispiel aus zwei Komponenten zusammengesetzt werden. Die erste Komponente sind die positiven Punktladungen $Q$:

$$\rho_P(\boldsymbol{r}) = \left(\delta(r_1) \cdot \delta(r_2) \cdot \delta\left(r_3 \pm \frac{D}{2}\right)\right) \cdot Q$$

Für die Raumladungsdichte des geladenen Stabs gilt:

$$\rho_S(\boldsymbol{r}) = \left(\delta(r_1) \cdot \delta(r_2) \cdot \Theta\left(\frac{D}{2} - |r_3|\right)\right) \cdot \left(-\frac{2 \cdot Q}{D}\right)$$

In Summe kann die Raumladungsdichte somit angeschrieben werden als:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_P(\boldsymbol{r}) + \rho_S(\boldsymbol{r})$$
$$= \delta(r_1) \cdot \delta(r_2) \cdot \left(Q \cdot \delta\left(r_3 \pm \frac{D}{2}\right) + \Theta\left(\frac{D}{2} - |r_3|\right) \cdot \left(-\frac{2 \cdot Q}{D}\right)\right)$$

Weiter vereinfacht ergibt sich somit:

$$= Q \cdot \delta(r_1) \cdot \delta(r_2) \cdot \left(\delta\left(r_3 + \frac{D}{2}\right) + \delta\left(r_3 - \frac{D}{2}\right) - \frac{2}{D} \cdot \Theta\left(\frac{D}{2} - |r_3|\right)\right)$$

*Die folgendenden Berechnungen wurden unter Zuhilfenahme von Wolfram Alpha berechnet!*

Mit der ermittelten Raumladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r})$ kann nun das Quadrupolmoment gemäß der eingangs beschriebenen Formel aus dem Plenum berechnet werden: (Die Parameter der Heaviside-Funktion können in Integralsgrenzen überführt werden.)

$$P_{11} = \frac{Q}{2} \cdot \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r_1) \cdot r_1^2 \, dr_1\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r_2) \, dr_2\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(r_3 - \frac{D}{2}\right) dr_3 + \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(r_3 + \frac{D}{2}\right) dr_3 - \frac{2}{D} \cdot \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} 1 \, dr_3\right)\right]$$

Die Integrale über $\delta(r)$ ergeben gemäß der Definition der Delta-Distribution jeweils $1$. Die Integrale nach $dr_3$ ergeben jedoch in Summe $0$, wodurch das gesamte Ergebnis für $P_{11}$ zu $0$ wird.

$$P_{11} = \frac{Q}{2} \cdot \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r_1) \cdot r_1^2 \, dr_1\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r_2) \, dr_2\right) \cdot (\underbrace{1 + 1 - 2}_{=0})\right] = 0$$

$P_{22}$ kann analog zu $P_{11}$ berechnet werden:

$$P_{22} = \frac{Q}{2} \cdot \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r_1) \, dr_1\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r_2) \cdot r_2^2 \, dr_2\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(r_3 - \frac{D}{2}\right) dr_3 + \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(r_3 + \frac{D}{2}\right) dr_3 - \frac{2}{D} \cdot \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} 1 \, dr_3\right)\right]$$

Auch hier ergeben die Integrale nach $dr_3$ in Summe $0$, wodurch das Ergebnis für $P_{22}$ ebenfalls zu $0$ ausfällt:

$$P_{22} = \frac{Q}{2} \cdot \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r_1) \, dr_1\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r_2) \cdot r_2^2 \, dr_2\right) \cdot (\underbrace{1 + 1 - 2}_{=0})\right] = 0$$

Somit kann $P_{33}$ angeschrieben werden:

$$P_{33} = \frac{Q}{2} \cdot \left[\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r_1) \, dr_1\right)}_{=1} \cdot \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r_2) \, dr_2\right)}_{=1} \cdot \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(r_3 - \frac{D}{2}\right) \cdot r_3^2 \, dr_3}_{=\frac{D^2}{4}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(r_3 + \frac{D}{2}\right) \cdot r_3^2 \, dr_3}_{=\frac{D^2}{4}} - \frac{2}{D} \cdot \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} 1 \cdot r_3^2 \, dr_3\right)\right]$$

Der letzte Term kann nun noch manuell integriert werden:

$$\frac{2}{D}\cdot\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} 1\cdot r_3^2\,dr_3 = \frac{2}{D}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot r_3^3\right)\Bigg|_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} = \frac{2}{D}\cdot\left(\frac{\frac{D^3}{8}}{3}+\frac{\frac{D^3}{8}}{3}\right)$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{D}}\cdot\left(\frac{2\cdot D^{\cancel{3}}}{\cancel{24}}\right) = \frac{D^2}{6}$$

Für $P_{33}$ folgt somit final:

$$= \frac{Q}{2}\cdot\left[1\cdot 1\cdot\left(\underbrace{\frac{D^2}{4}+\frac{D^2}{4}}_{=\frac{D^2}{2}}-\frac{D^2}{6}\right)\right] = \frac{Q}{2}\cdot\frac{2\cdot D^2}{6}$$

$$P_{33} = \frac{Q\cdot D^2}{6}$$

In diesem Beispiel müssen lediglich $P_{11}$, $P_{22}$ und $P_{33}$ betrachtet werden, da alle anderen Anteile, bei denen $i$ ungleich $j$ ist, in Summe $0$ ergeben. (Erneut aufgrund des Integrals nach $r_3$.)

## b)

Die Multipolentwicklung des elektrischen Potentials kann anhand der in Unterpunkt a) angeführten Formel ermittelt werden. Diese lautet:

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\cdot\epsilon_0}\cdot\left[\frac{Q}{r}+\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{p}}{r^2}+\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot Q_2\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^3}\right]$$

Indem man nun die Berechnungen aus Unterpunkt a) einfügt, erhält man die folgende Formel: ($P_{11}$ und $P_{22}$ können gemäß Unterpunkt a) vernachlässigt werden, nachdem sie jeweils $0$ ergeben. Somit wird für $r_i$ und $r_j$ jeweils $r_3$ eingesetzt. Für $r^2$ kann $r_1^2+r_3^2$ eingesetzt werden, nachdem das Potential an der Stelle $r_1\geq 0$, $r_2=0$, $r_3$ betrachtet werden soll. $r_2$ entfällt hier demnach, da es gemäß der Angabe gleich $0$ ist. $r^2=r_1^2+r_2^2+r_3^2$)

$$V_1(r_1) = \frac{1}{4\pi\cdot\epsilon_0}\cdot\left[\frac{0}{r}+\frac{0}{r^2}+\frac{Q\cdot D^2}{6}\cdot\frac{3\cdot r_i\cdot r_j - r^2\cdot\delta_{ij}}{r^5}+\mathcal{O}(r^{-4})\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\cdot\epsilon_0}\cdot\left[\frac{Q\cdot D^2}{6}\cdot\frac{3\cdot r_i\cdot r_j - r^2\cdot\delta_{ij}}{r^5}\right]$$

$$= \frac{Q\cdot D^2}{24\pi\cdot\epsilon_0}\cdot\left[\frac{3\cdot r_3^2-r^2}{r^5}\right] = \frac{Q\cdot D^2}{24\pi\cdot\epsilon_0}\cdot\left[\frac{3\cdot r_3^2-(r_1^2+r_3^2)}{(r_1^2+r_3^2)^{\frac{5}{2}}}\right]$$

$$= \frac{Q\cdot D^2}{24\pi\cdot\epsilon_0}\cdot\left[\frac{-r_1^2+2\cdot r_3^2}{(r_1^2+r_3^2)^{\frac{5}{2}}}\right]$$

Gemäß der Angabe gilt für $V_1(r_1)$: $r_1 >> r_3$. Damit folgt für $V_1(r_1)$:

$$V_1(r_1) = \frac{Q\cdot D^2}{24\pi\cdot\epsilon_0}\cdot\left[\frac{-r_1^2}{(r_1^2)^{\frac{5}{2}}}\right] = \frac{Q\cdot D^2}{24\pi\cdot\epsilon_0}\cdot\frac{-\cancel{r_1^2}}{r_1^{\cancel{5}}} = -\frac{Q\cdot D^2}{24\pi\cdot\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r_1^3}$$

---

Die Berechnung von $V_3(r_3)$ erfolgt analog zu $V_1(r_1)$:

$$V_3(r_3) = \frac{Q\cdot D^2}{24\pi\cdot\epsilon_0}\cdot\left[\frac{3\cdot r_3^2-(r_1^2+r_3^2)}{(r_1^2+r_3^2)^{\frac{5}{2}}}\right]$$

$$= \frac{Q\cdot D^2}{24\pi\cdot\epsilon_0}\cdot\left[\frac{-r_1^2+2\cdot r_3^2}{(r_1^2+r_3^2)^{\frac{5}{2}}}\right]$$

Für $V_3(r_3)$ gilt gemäß der Angabe $r_3 >> r_1$: Daraus folgt:

$$V_3(r_3) = \frac{Q \cdot D^2}{\cancel{24}\,\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{\cancel{2} \cdot r_3^2}{(r_3^2)^{\frac{5}{2}}}\right] = \frac{Q \cdot D^2}{12\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \underbrace{\left[\frac{\cancel{r_3^2}}{r_3^{\cancel{5}}}\right]}_{=\frac{1}{r_3^3}}$$

$$V_3(r_3) = \frac{Q \cdot D^2}{12\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_3^3}$$

# 18 Metallkugeln

## 18 Metallkugeln

In einem Leiter können Ladungen weitgehend ohne mechanische Arbeit bewegt werden und wir können das Potential entlang einer Metallfläche als konstant annehmen. Zwei konzentrische, dünne, metallische Hohlkugeln mit Radius $R_1$ und $R_2$ mit $R_1 < R_2$ werden mit einer Spannungsquelle jeweils auf die Potentiale $V_1 \neq 0$ und $V_2 = 0$ gehalten.

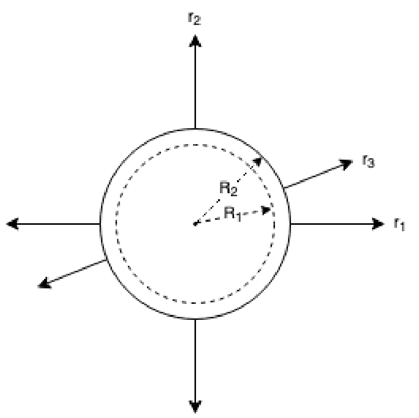
(a) Löse die Poisson-Gleichung mit diesen Randbedingungen im ladungsfreien Raum abseits der Kugeloberflächen. Berechne und skizziere das Potential $V(r)$ und das elektrische Feld $E_i(r)$ in allen Bereichen.

(b) Finde anhand der Unstetigkeiten in $E_i(r)$ an den Stellen $r = R_1$ und $r = R_2$ die Ladungen $Q_1$ und $Q_2$, die sich auf den jeweiligen Kugeloberflächen befinden.

(c) Berechne die Energie im elektrischen Feld und gib sie in Vielfachen von $Q_1V_1$ an.

(a): 1P, (b): 1P, (c): 1P

### a)




Die Poisson-Gleichung ist allgemein definiert als:

$$-\nabla^2 V(r) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Im ladungsfreien Raum außerhalb der Kugel gilt weiters:

$$-\nabla^2 V(r) = 0$$

$\nabla^2$ ist in dabei der Laplace-Operator. Wir können demnach den Laplace in Kugelkoordinaten anschreiben: (die Formel entstammt der Formelsammlung für den ersten Test)

$$\nabla^2 V(r) = \frac{1}{r^2} \cdot \partial_r(r^2 \cdot \partial_r V(r)) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin\vartheta} \cdot \partial_\vartheta(\sin\vartheta \cdot \partial_\vartheta V(r)) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \cdot \partial_\varphi \partial_\varphi V(r)$$

Nachdem wir in diesem Unterpunkt das elektrische Potential in Abhängigkeit von $r$ betrachten wollen, können wir ausschließlich den Term $\frac{1}{r^2} \cdot \partial_r(r^2 \cdot \partial_r V)$ betrachten. Dieser kann wie bereits die Poisson-Gleichung gleich $0$ gesetzt werden:

$$\cancel{\frac{1}{r^2}} \cdot \partial_r(r^2 \cdot \partial_r V(r)) = 0$$

Durch beidseitige Integration folgt:

$$\partial_r(r^2 \cdot \partial_r V(r)) = 0 \,\Big|\, \int$$

$$r^2 \cdot \partial_r V(r) = C_1$$

Dieser Term kann umgeformt werden zu:

$$\partial_r V(r) = \frac{C_1}{r^2}$$

Das Ergebnis kann erneut beidseitig integriert werden:

$$\partial_r V(r) = \frac{C_1}{r^2} \,\Big|\, \int$$

Damit ergibt sich die Form für das elektrische Potential zu:

$$\implies V(r) = \int \frac{C_1}{r^2}\, dr = -\frac{C_1}{r} + C_2 = 0$$

---

Im Zwischenraum der Kugel kommen die beiden Randbedingungen $V(R_2) = 0$ und $V(R_1) \neq 0$, aus der Angabe, zum Tragen. Daraus folgt für $V(R_2)$:

$$V(R_2) = 0 = -\frac{C_1}{R_2} + C_2 \implies C_2 = \frac{C_1}{R_2}$$

Für $V(R_1)$ ergibt sich damit:

$$V(R_1) \neq 0 = -\frac{C_1}{R_1} + \underbrace{C_2}_{\frac{C_1}{R_2}} = -\frac{C_1}{R_1} + \frac{C_1}{R_2}$$

$$V(R_1) = C_1 \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$= C_1 \cdot \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 \cdot R_2}\right)$$

$$\implies C_1 = V(R_1) \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2}$$

Damit folgt für $C_2$ gemäß dem eingangs festgestellten Zusammenhang zwischen $C_2$ und $C_1$:

$$C_2 = \frac{C_1}{R_2} = V(R_1) \cdot \left(\frac{R_1}{R_1 - R_2}\right)$$

Nun können die Ergebnisse für $C_1$ und $C_2$ in die Form für $V_(r)$ eingesetzt werden, wodurch folgt:

$$V(r) = V(R_1) \cdot \left(-\frac{1}{r} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2} + \frac{R_1}{R_1 - R_2}\right)$$

---

Das elektrische Feld im Zwischenraum der Kugeln kann nun über den Zusammenhang zwischen $E$ und $V$ bestimmt werden:

$$E(r) = -\nabla V(r)$$

Damit folgt für $E(r)$ im Zwischenraum der Kugeln:

$$E(r) = -\partial_r \left( V(R_1) \cdot \left( -\frac{1}{r} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2} + \frac{R_1}{R_1 - R_2} \right) \right)$$
$$= -V(R_1) \cdot \left( \frac{1}{r^2} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2} + 0 \right)$$
$$E(r) = -\frac{V(R_1)}{r^2} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2}$$

---

Für das elektrische Feld im Innenraum der Kugel gilt aufgrund der Symmetrie:

$$E(r) = 0$$

(Dieser Zusammenhang wurde bereits in vergangenen Problem-Sets nachgewiesen.)

---

Für den Außenraum entspricht das elektrische Potential $V(r)$:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(r')}{|r - r'|} d^3r'$$

Nachdem wir den ladungsfreien Raum betrachten, ist auch hier $V(r) = 0$.
Über den eingangs aufgestellten Zusammenhang zu $V(r)$ folgt somit:

$$V(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 = 0$$

Betrachtet man diesen Zusammenhang im Unendlichen, folgt:

$$\lim_{r \to 0} \left( -\frac{C_1}{r} + C_2 \right) = 0$$

Der Term $-\frac{C_1}{r}$ ergibt sich mit $\lim_{r \to 0}$ zu $0$. Somit folgt für $C_2$:

$$C_2 = 0$$

Weiters kann aus der Randbedingung $V(R_2)$ abgeleitet werden:

$$V(R_2) = -\frac{C_1}{R_2} + \underbrace{C_2}_{=0} = 0$$
$$\implies -\frac{C_1}{R_2} = 0$$

Somit ergibt sich auch $C_1$ zu $0$.
Für das elektrische Feld im ladungsfreien Außenraum abseits der Kugeloberfläche folgt somit final:

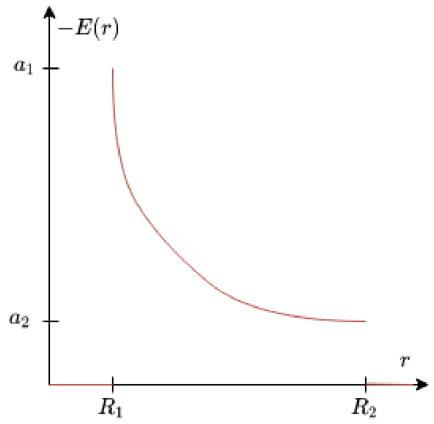
$$E(r) = -\nabla V(r)$$

Für $V(r) = 0$ entpricht das elektrische Feld $E$ somit:

$$E(r) = 0$$

---

Skizziert verläuft $E(r)$ wie folgt:



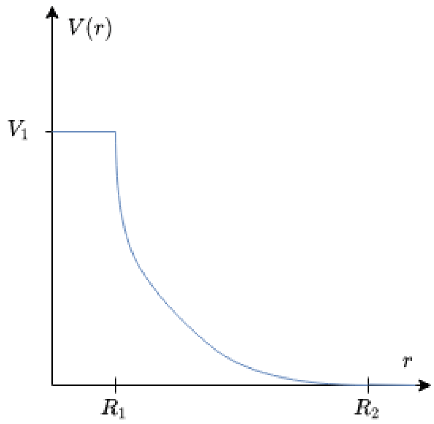

Die Faktoren $a_1$ und $a_2$ entsprechen dabei:

$$a(r) = -\frac{R_2 \cdot V(R_1)}{(R_1 - R_2) \cdot r}$$

$$a_1 = a(R_1) = -\frac{R_2 \cdot V(R_1)}{(R_1 - R_2) \cdot R_1}$$

$$a_2 = a(R_2) = -\frac{R_2 \cdot V(R_1)}{(R_1 - R_2) \cdot R_2}$$

Das elektrische Potential $V(r)$ entspricht skizziert:




## b)

Aufgrund der Sprungbedingungen für die Normalprojektion der elektrischen Flußdichte folgt: (Quelle: Vorlesungen über die Grundlagen der Elektrotechnik Band 1 von Adalbert Prechtl, Seite 273)

$$[|D_n|] = \sigma$$

Aus dem Zusammenhang $D = \epsilon_0 \cdot E$ folgt:

$$[|\epsilon_0 \cdot E_n|] = \frac{Q}{A}$$

Somit kann die Ladung $Q$ wie folgt berechnet werden:

$$Q = A \cdot \epsilon_0 \cdot E(r)$$

$$= \left(4\pi \cdot \cancel{r^2}\right) \cdot \epsilon_0 \cdot \left(-\frac{V(R_1)}{\cancel{r^2}} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2}\right)$$

$$= -4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2} \cdot V(R_1)$$

Wie bei einem Kugelkondensator sind auch in diesem Fall die Ladungen gegengleich. Somit gilt:

$$Q_{innen} = -Q_{außen}$$

## c)

Die elektrische Energie ist definiert durch:

$$W = \int \boldsymbol{F}\, ds$$

Durch den Zusammenhang, dass die Kraft $F$ gleich $q \cdot E$ ist, kann der Ausdruck umgeformt werden zu:

$$W = \int Q \cdot \boldsymbol{E}\, ds$$

Weiters gilt für das elektrische Potential und das elektrische Feld:

$$V = -\int \boldsymbol{E}\, ds$$

Somit folgt der Zusammenhang:

$$W = \int Q \cdot \boldsymbol{E}\, ds = -Q \cdot V$$

Eingesetzt ergibt sich die elektrische Energie somit zu:

$$W = -Q \cdot V(R_1) \cdot \left( -\frac{1}{r} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2} + \frac{R_1}{R_1 - R_2} \right)$$

Als Vielfaches von $Q_1 \cdot V_1$ geschrieben, folgt somit für die elektrische Energie:

$$\frac{W}{Q_1 \cdot V_1} = \frac{1}{r} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2} - \frac{R_1}{R_1 - R_2}$$