2. Problem Set - 16.03.2022

Elektrodynamik I - 136.015

4 Elektrischer Fluss

Das elektrische Feld einer Punktladung im Ursprung ist proportional zu $E_i(r_1, r_2, r_3) = r_i/r^3$ mit r sodass $r^2 = r_j r_j$. Der Fluss des Feldes E_i durch eine Fläche S ist gegeben durch das Oberflächenintegral

$$\oint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{A} = \iint ds\, dt\, E_i(r_1(s,t), r_2(s,t), r_3(s,t))\, \epsilon_{ijk} \left(\partial_s r_j(s,t)\right) \left(\partial_t r_k(s,t)\right),$$

wobei $r_1(s,t), r_2(s,t), r_3(s,t)$ eine Parametrisierung der geschlossenen Fläche S ist. Finde für folgende Flächen S geeignete Parametrisierungen und berechne damit den Fluss von E_i durch S:

(a) Eine Kugel S_R mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung.

(b) Eine Scheibe D_R mit Radius R und Mittelpunkt in δ_{1i} und der Orientierung δ_{1i}. Ist D_R geschlossen? Was geschieht für $R \to \infty$?

(a)

$$\oint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{A} = \int\int dsdt\, E_i(r_1(s,t), r_2(s,t), r_3(s,t))\epsilon_{ijk}(\partial_s r_j(s,t))(\partial_t r_k(s,t))$$

Bei S handelt es sich um eine Kugel → dreidimensionaler Raum → bei $\vec{r}$ handelt es sich um Kugelkoordinaten:

$$r(\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} r_1(\theta,\varphi) \\ r_2(\theta,\varphi) \\ r_3(\theta,\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ r \cdot \cos\theta \end{bmatrix}$$

Mit $\theta = s$, $\varphi = t$ und $r = R$ folgt:

$$\implies r(s,t) = \begin{bmatrix} r_1(s,t) \\ r_2(s,t) \\ r_3(s,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cdot \sin s \cdot \cos t \\ R \cdot \sin s \cdot \sin t \\ R \cdot \cos s \end{bmatrix}$$

Die Terme $\partial_s r_j(s,t)$ und $\partial_t r_k(s,t)$ aus der Formel für den Fluss können daraus berechnet werden.

$$\partial_s r(s,t) = \begin{bmatrix} R \cdot \cos s \cdot \cos t \\ R \cdot \cos s \cdot \sin t \\ (-1) \cdot R \cdot \sin s \end{bmatrix}$$

$$\partial_t r(s,t) = \begin{bmatrix} (-1) \cdot R \cdot \sin s \cdot \sin t \\ R \cdot \sin s \cdot \cos t \\ R \cdot 0 \end{bmatrix}$$

Um die Formel für den Fluss weiter zu berechnen, kann nun der Term $\epsilon_{ijk}(\partial_s r_j(s,t))(\partial_t r_k(s,t))$ (das Kreuzprodukt) aufgelöst werden.

$$\epsilon_{ijk}\underbrace{(\partial_s r_j(s,t))}_{\vec{a}}\underbrace{(\partial_t r_k(s,t))}_{\vec{b}} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$$

$$= \epsilon_{ijk} a_j b_k + \epsilon_{ikj} a_k b_j + \epsilon_{jki} a_k b_i + \epsilon_{jik} a_i b_k + \epsilon_{kij} a_i b_j + \epsilon_{kji} a_j b_i$$

Nachdem $\partial_t r_3(s,t)$ bzw. in unserem Fall b_k gleich 0 ist, fallen zwei Terme direkt weg.

$$= \underbrace{\epsilon_{ijk} a_j b_k}_{=0} + \epsilon_{ikj} a_k b_j + \epsilon_{jki} a_k b_i + \underbrace{\epsilon_{jik} a_i b_k}_{=0} + \epsilon_{kij} a_i b_j + \epsilon_{kji} a_j b_i$$

Durch Einsetzen der Werte für gerade bzw. ungerade Permutationen folgt weiters:

$$= \underbrace{\epsilon_{ikj}}_{=(-1)} a_k b_j + \underbrace{\epsilon_{jki}}_{=(+1)} a_k b_i + \underbrace{\epsilon_{kij}}_{=(+1)} a_i b_j + \underbrace{\epsilon_{kji}}_{=(-1)} a_j b_i$$

$$= a_k b_i - a_k b_j + a_i b_j - a_j b_i$$

Mit den eingesetzten Werten für a und b ergibt sich

$$= (-R \cdot \sin s) \cdot (-R \cdot \sin s \cdot \sin t) - (-R \cdot \sin s) \cdot (R \cdot \sin s \cdot \cos t)$$
$$+ (R \cdot \cos s \cdot \cos t) \cdot (R \cdot \sin s \cdot \cos t) - (R \cdot \cos s \cdot \sin t) \cdot (-R \cdot \sin s \cdot \sin t)$$

$$\epsilon_{ijk}(\partial_s r_j(s,t))(\partial_t r_k(s,t)) = R^2 \cdot \sin^2 s \cdot \sin t + R^2 \cdot \sin^2 s \cdot \cos t$$
$$+ R^2 \cdot \sin s \cdot \cos s \cdot \cos^2 t + R^2 \cdot \sin s \cdot \cos s \cdot \sin^2 t$$

Folgend wird der Term $E_i(r_1(s,t), r_2(s,t), r_3(s,t))$ aufgelöst. Aus der Angabe folgt:

$$E_i(r_1, r_2, r_3) = \frac{r_i}{r^3} \, mit \, r^2 = r_j r_j$$

$$r^2 = R^2 \cdot \sin^2 s \cdot \cos^2 t + R^2 \cdot \sin^2 s \cdot \sin^2 t + R^2 \cdot \cos^2 s$$

$$r^2 = R^2 \cdot \underbrace{(\sin^2 s \cdot (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}) + \cos^2 s)}_{=1}$$

Somit gilt für $r^2 = R^2$, wodurch $r = R$ gilt. Damit lässt sich widerum r^3 berechnen:

$$r^3 = R^3 \implies E_i(r_1, r_2, r_3) = \frac{r_i}{R^3}$$

Kombiniert mit der ersten Berechnung kann somit nun in die Formel für den Fluss eingesetzt werden:

$$E_i(r_1(s,t), r_2(s,t), r_3(s,t)) \epsilon_{ijk}(\partial_s r_j(s,t))(\partial_t r_k(s,t)) =$$
$$r_i \cdot \frac{R^2}{R^3} \cdot (\underbrace{\sin^2 s \cdot \sin t}_{\epsilon_{jki} a_k b_i} + \underbrace{\sin^2 s \cdot \cos t}_{\epsilon_{ikj} a_k b_j}$$
$$+ \underbrace{\sin s \cdot \cos s \cdot \cos^2 t}_{\epsilon_{kij} a_i b_j} + \underbrace{\sin s \cdot \cos s \cdot \sin^2 t}_{\epsilon_{kji} a_j b_i})$$

$$= \frac{R^2}{R^3} \cdot ((R \cdot \sin s \cdot \sin t) \cdot (\sin^2 s \cdot \sin t) + (R \cdot \sin s \cdot \cos t) \cdot (\sin^2 s \cdot \cos t)$$
$$+ (R \cdot \cos s) \cdot (\sin s \cdot \cos s \cdot \cos^2 t + \sin s \cdot \cos s \cdot \sin^2 t))$$

$$= \underbrace{\frac{R^3}{R^3}}_{=1} \cdot ((\sin^3 s \cdot \sin^2 t) + (\sin^3 s \cdot \cos^2 t) +$$
$$(\sin s \cdot \cos^2 s \cdot \cos^2 t) + (\sin s \cdot \cos^2 s \cdot \sin^2 t))$$

$$= \sin^3 s \cdot (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}) + \sin s \cdot \cos^2 s \cdot (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1})$$

$$E_i(r_1(s,t), r_2(s,t), r_3(s,t)) \epsilon_{ijk}(\partial_s r_j(s,t))(\partial_t r_k(s,t)) = \sin^3 s + \sin s \cdot \cos^2 s$$

Der resultierende Term wird nun in die ganze Formel für den Fluss eingesetzt:

$$\oint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{A} = \int \int dsdt \, (\sin^3 s + \sin s \cdot \cos^2 s)$$

Als erstes wird die Integration nach s durchgeführt:

$$\int_s \sin^3 s + \sin s \cdot \cos^2 s \, ds = \int_s \sin s (\underbrace{\sin^2 s + \cos^2 s}_{=1}) \, ds$$

$$\int_s \sin s \, ds = -\cos s$$

Als zweites erfolgt die Integration nach t:

$$\int_t -\cos s \, dt = -t \cdot \cos s$$

Mit den Grenzen $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ sowie den Beziehungen $\theta = s$ und $\varphi = t$ für Kugelkoordinaten folgt final:

$$-t \cdot \cos s|_{s\in[0,\pi]\, t\in[0,2\pi]} = -t \cdot \underbrace{\cos \pi}_{=-1} - (-t \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1})|_{t\in[0,2\pi]} = 2t|_{t\in[0,2\pi]}$$

$$= 2 \cdot 2\pi - 0 = \underline{\underline{4\pi}}$$

$$\implies \oint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{A} = 4\pi$$

(b)

$$\oint_D \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{A} = \int\int dsdt\, E_i(r_1(s,t), r_2(s,t), r_3(s,t))\epsilon_{ijk}(\partial_s r_j(s,t))(\partial_t r_k(s,t))$$

Bei D handelt es sich um eine Scheibe mit Radius R. Dadurch kann der Vektor $\vec{r}$ in Polarkoordinaten angenommen werden:

$$r(r,\varphi) = \begin{bmatrix} r_1(r,\varphi) \\ r_2(r,\varphi) \\ r_3(r,\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{bmatrix}$$

Mit $\varphi = s$ und $r = t$ folgt:

$$\implies r(s,t) = \begin{bmatrix} r_1(s,t) \\ r_2(s,t) \\ r_3(s,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ s \cdot \cos t \\ s \cdot \sin t \end{bmatrix}$$

Betrachtet man nun erneut die Formel für den Fluss aus der Angabe, können im nächsten Schritt die Terme $\partial_s r(st)$ und $\partial_t r(s,t)$ berechnet werden:

$$\partial_s r(s,t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

$$\partial_s r(s,t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -s \cdot \sin t \\ s \cdot \cos t \end{bmatrix}$$

Wie bereits in Unterpunkt 4a) können wir nun wieder den Term $\epsilon_{ijk}(\underbrace{\partial_s r_j(s,t)}_{\vec{a}})(\underbrace{\partial_t r_k(s,t)}_{\vec{b}})$ auflösen:

$$\epsilon_{ijk}(\underbrace{\partial_s r_j(s,t)}_{\vec{a}})(\underbrace{\partial_t r_k(s,t)}_{\vec{b}}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$$

$$= \epsilon_{ijk} a_j b_k + \epsilon_{ikj} a_k b_j + \epsilon_{jki} a_k b_i + \epsilon_{jik} a_i b_k + \epsilon_{kij} a_i b_j + \epsilon_{kji} a_j b_i$$

Nachdem in unserem Fall a_i und b_i gleich Null sind, reduziert sich der Ausdruck zu:

$$= \epsilon_{ijk} a_j b_k + \epsilon_{ikj} a_k b_j$$

Durch Einsetzen der Werte für gerade bzw. ungerade Permutationen folgt weiters:

$$= \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{=+1} a_j b_k + \underbrace{\epsilon_{ikj}}_{=-1} a_k b_j$$

Nun können die Werte für a und b wieder eingesetzt werden:

$$= a_j b_k - a_k b_j = s \cdot \cos t \cdot \cos t - (-s) \cdot \sin t \cdot \sin t$$

$$= s \cdot (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}) = s$$

In Vektorschreibweise entspricht das:

$$= \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Für r^2 gilt gemäß der Angabe $r^2 = r_j \cdot r_j$, womit r^2 berechnet werden kann als:

$$r^2 = r_j(s,t) \cdot r_j(s,t)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ s \cdot \cos t \\ s \cdot \sin t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ s \cdot \cos t \\ s \cdot \sin t \end{bmatrix} = 1 + s^2 \cdot \cos^2 t + s^2 \cdot \sin^2 t$$
$$r^2 = 1 + s^2 \cdot (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}) = 1 + s^2$$

Daraus folgt für r:

$$r = \sqrt{r^2} = \sqrt{s^2+1}$$

Somit kann r^3 bestimmt werden als:

$$r^3 = (\sqrt{s^2+1})^3 = (s^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

Um die Berechnung der Formel für den Fluss weiter zu führen, ergibt sich der Term $r_i \cdot \epsilon_{ijk} \cdot (\partial_s r_j(s,t)) \cdot (\partial_t r_k(s,t))$ zu:

$$= \frac{r_i}{r^3} \cdot \epsilon_{ijk} \cdot (\partial_s r_j(s,t)) \cdot (\partial_t r_k(s,t)) = \frac{r_i}{r^3} \cdot \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{r^3} \cdot \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ s \cdot \cos t \\ s \cdot \sin t \end{bmatrix}$$
$$= \frac{s}{r^3} = \frac{s}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Nun kann das Doppelintegral der Formel für den Fluss berechnet werden:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{s}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}} ds dt$$

Durch die Substitution von s^2+1 durch u, mit $\frac{du}{ds} = 2 \cdot s \implies ds = \frac{1}{2 \cdot s} du$, ergibt sich für das innere Integral:

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \int_0^R \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} ds dt$$

Mit der Potenzregel ($\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$) für Integrationen folgt:

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \int_0^R \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} du = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \int_0^R -\frac{2}{\sqrt{u}} du = \int_0^{2\pi} \underbrace{-\frac{2}{2}}_{=-1} \cdot (\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}) \bigg|_0^R dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-1 \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2+1}}) - (-1) \, dt$$

Nun folgt die Integration nach t:

$$= t \cdot (-\frac{1}{\sqrt{R^2+1}} + 1) \bigg|_0^{2\pi} = t \cdot (-\frac{1}{\sqrt{R^2+1}} + \frac{\sqrt{R^2+1}}{\sqrt{R^2+1}}) \bigg|_0^{2\pi} = t \cdot (\frac{-1+\sqrt{R^2+1}}{\sqrt{R^2+1}}) \bigg|_0^{2\pi}$$
$$\oint_D \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{A} = 2\pi \cdot \frac{-1+\sqrt{R^2+1}}{\sqrt{R^2+1}}$$

Für $R \to \infty$ entspricht der Fluss somit 2π.
Bezüglich der Geschlossenheit der Scheibe D_R gilt: Die Scheibe D_R ist **nicht geschlossen**, da sie einen Rand besitzt und somit offen ist. (laut dem 2. Plenum)

5 Poisson-Gleichung in sphärischen Koordinaten

Wir suchen eine Funktion $V(r,\vartheta,\varphi)$ in sphärischen Koordinaten, die die Poisson-Gleichung $\boldsymbol{\nabla}^2 V(r,\vartheta,\varphi) = -4\pi e^{-\alpha r}$ mit dem Parameter $\alpha > 0$ löst.

(a) Verwende die Transformation $V(r,\vartheta,\varphi) = u(r)/r$ und zeige, dass damit die Poisson-Gleichung die Form $u''(r) = -4\pi r e^{-\alpha r}$ annimmt.

(b) Finde die allgemeine Lösung dieser Gleichung mit zwei Integrationskonstanten.

(c) Bestimme die Integrationskonstanten mithilfe der Dirichlet-Randbedingung und dem asymptotischen Verhalten für $r \to \infty$:

$$V(r \to \infty, \vartheta, \varphi) \to \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3V'\, e^{-\alpha r'}.$$

(a)

Gemäß der Angabe wird die folgende Transformation verwendet:

$$V(r,\vartheta,\varphi) = \frac{u(r)}{r}$$

Gesucht ist eine Funktion, welche die Poisson-Gleichung $\nabla^2 V(r,\vartheta,\varphi)$ löst.
Der Term $\nabla^2 V(r,\vartheta,\varphi)$ kann auch als Divergenz des Gradienten interpretiert werden (siehe u.a. Beispiel 6):

$$\nabla^2 V(r,\vartheta,\varphi) = \nabla \cdot (\nabla V(r,\vartheta,\varphi))$$

Wie bereits in Beispiel 6 erläutert können Gradient und Divergenz gemäß dem 1. Plenum auch geschrieben werden als:

$$\nabla V = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i}$$

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{H} \cdot \partial_j (\frac{H}{h_j} F_j)\, mit\, H = H(r,\nu,\varphi)$$

Mit den in der Angabe beschriebenen sphärischen Koordinaten (=Kugelkoordinaten) kann H berechnet werden:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \\ r \cdot \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Die Berechnung der einzelnen h erfolgt analog zu dem Vorgehen in Beispiel 6:

$$\partial_r x_1 = \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$$

$$\partial_r x_2 = \sin\vartheta \cdot \sin\varphi$$

$$\partial_r x_3 = \cos\vartheta$$

$$(\partial_r x_i) \cdot (\partial_r x_i) = \sin^2\vartheta \cdot \cos^2\varphi + \sin^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi + \cos^2\vartheta$$

$$= \underbrace{\sin^2\vartheta \cdot (\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{=1}) + \cos^2\vartheta}_{=1} = 1$$

$$h_r = 1$$

$$\partial_\vartheta x_1 = r \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi$$

$$\partial_\vartheta x_2 = r \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi$$

$$\partial_\vartheta x_3 = -r \cdot \sin\vartheta$$

$$(\partial_\vartheta x_i) \cdot (\partial_\vartheta x_i) = r^2 \cdot \cos^2\vartheta \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cos^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi + r^2 \sin^2\vartheta$$

$$= r^2 \cdot \cos^2\vartheta \cdot (\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{=1}) + r^2 \cdot \sin^2\vartheta = r^2 \cdot (\underbrace{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta}_{=1}) = r^2$$

$$h_\vartheta = r$$

$$\partial_\varphi x_1 = -r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi$$

$$\partial_\varphi x_2 = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$$

$$\partial_\varphi x_3 = 0$$

$$(\partial_r x_i) \cdot (\partial_r x_i) = r^2 \cdot \sin^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi + r^2 \sin^2\vartheta \cdot \cos^2\varphi + 0$$

$$= r^2 \cdot \sin^2\vartheta \cdot (\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{=1}) = r^2 \cdot \sin^2\vartheta$$

$$h_\varphi = r \cdot \sin\vartheta$$

Somit folgt für den Gradient:

$$\nabla V = \frac{1}{h_r} \cdot \frac{\partial V}{\partial u_r} = \frac{1}{1} \cdot (\frac{u'(r)}{r} + u(r) \cdot r^{-2} \cdot (-1))$$

$$= u'(r) \cdot r^{-1} - u(r) \cdot r^{-2}$$

Für die Divergenz ergibt sich:

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{H} \cdot \partial_r(\frac{H}{h_r} \nabla V) = \frac{1}{H} \cdot \partial_r(\frac{H}{h_r} \cdot \frac{1}{h_r} \cdot \frac{\partial V}{\partial u_r})$$

$$= \frac{1}{r^2 \cdot \sin\vartheta} \cdot \partial_r(\frac{r^2 \cdot \sin\vartheta}{1} \cdot (u'(r) \cdot r^{-1} - u(r) \cdot r^{-2}))$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \partial_r(r^2 \cdot (\frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2})))$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \partial_r(r \cdot u'(r) - u(r))$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot (u'(r) + r \cdot u''(r) - u'(r))$$

$$= \frac{r}{r^2} \cdot u''(r) = \frac{1}{r} \cdot u''(r)$$

Gemäß der Angabe soll nun eine Funktion $u(r)$ gefunden werden, für die gilt:

$$\nabla^2 V(r, \vartheta, \varphi) = -4\pi e^{-\alpha r}$$

Mit unseren Berechnungen ergibt sich also:

$$\frac{1}{r} \cdot u''(r) = -4\pi e^{-\alpha r} \implies u''(r) = -4\pi r e^{-\alpha r}$$

(b)

$$u'(r) = \int u''(r) dr = -4\pi \int r \cdot e^{-\alpha r} dr$$

Im ersten Integrationsschritt können wir partiell integrieren:

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$f' = e^{-\alpha r} \rightarrow f = -\frac{e^{-\alpha r}}{\alpha}$$

$$g = r \rightarrow g' = 1$$

Daraus folgt:

$$= -\frac{e^{-\alpha r}}{\alpha} \cdot r - \int -\frac{e^{-\alpha r}}{\alpha} \cdot 1 \, dr = -\frac{e^{-\alpha r}}{\alpha} \cdot r + \int \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha} dr$$

Mit Hilfe der Substitution nach $u = -\alpha r$ und $\frac{du}{dr} = -\alpha \rightarrow dr = -\frac{1}{\alpha} du$ folgt:

$$= -\frac{1}{\alpha^2} \int e^u du = -\frac{1}{\alpha^2} e^u$$

Mit der Rücksubstitution ergibt sich:

$$= -\frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha r}$$

Eingesetzt in den Term für $u'(r)$ folgt:

$$u'(r) = -4\pi \cdot (-\frac{e^{-\alpha r}}{\alpha} \cdot r - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha r}) + C_1$$

$$= \frac{4\pi}{\alpha} \cdot (\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha r} + e^{-\alpha r} \cdot r) + C_1$$

Nun ergibt sich $u(r) = \int u'(r) dr$:

$$u(r) = \int u'(r) dr = \int \frac{4\pi}{\alpha} \cdot (\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha r} + e^{-\alpha r} \cdot r) \, dr$$

$$= \frac{4\pi}{\alpha} \cdot \int \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha r} + e^{-\alpha r} \cdot r \, dr$$

$$= \frac{4\pi}{\alpha^2} \cdot \int e^{-\alpha r} + e^{-\alpha r} \cdot r \cdot \alpha \, dr$$

$$= \frac{4\pi}{\alpha^2} \cdot \int e^{-\alpha r} \cdot (\alpha \cdot r + 1) \, dr$$

Wir können nun wieder partiell integrieren:

$$f' = e^{-\alpha r} \rightarrow f = -\frac{e^{-\alpha r}}{\alpha}$$

$$g = \alpha \cdot r + 1 \rightarrow g' = \alpha$$

$$= -\frac{(\alpha \cdot r + 1) \cdot e^{-\alpha r}}{\alpha} - \int -\alpha \cdot \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha} dr = -\frac{(\alpha \cdot r + 1) \cdot e^{-\alpha r}}{\alpha} + \int e^{-\alpha r} dr$$

Mit der Substitution von der ersten Integration folgt erneut:

$$= -\frac{(\alpha \cdot r + 1) \cdot e^{-\alpha r}}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha}$$

Somit ergibt sich für die Integration final:

$$u(r) = \frac{4\pi}{\alpha^2} \cdot (-\frac{(\alpha \cdot r + 1) \cdot e^{-\alpha r}}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha})$$

$$= \frac{4\pi}{\alpha^2} \cdot (-\frac{(\alpha \cdot r + 2) \cdot e^{-\alpha r}}{\alpha})$$

$$u(r) = -\frac{4\pi \cdot e^{-\alpha r}}{\alpha^3} \cdot (\alpha \cdot r + 2) + r \cdot C_1 + C_2$$

6 Geladener Stab

Das elektrische Potential eines geladenen Stabes der Länge $2a$ lässt sich kompakt in prolaten spheroidalen Koordinaten (μ, ν, φ) anschreiben, in denen die kartesischen Koordinaten gegeben sind durch

$$x_1 = a \sinh\mu \sin\nu \cos\varphi\,, \qquad x_2 = a \sinh\mu \sin\nu \sin\varphi\,, \qquad x_3 = a \cosh\mu \cos\nu\,,$$

mit $0 < \mu$, $0 \leq \nu \leq \pi$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

(a) Bestimme die Divergenz des Gradienten von $V(\mu, \nu, \varphi)$ in prolaten spheroidalen Koordinaten

$$V(\mu, \nu, \varphi) = \log\left(\frac{\cosh(\mu) + 1}{\cosh(\mu) - 1}\right).$$

(b) Zeige, dass das äquatoriale Nahfeld ($\mu \ll 1$, $\nu \approx \pi/2$) asymptotisch Zylinderkoordinaten, und das Fernfeld ($1 \ll \mu$) asymptotisch Kugelkoordinaten entspricht. Gib die entsprechenden approximativen Transformationen des Potentiales V an.

(a)

Aus der Angabe kann der Vektor $\vec{x}$ folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\vec{x}(\mu, \nu, \varphi) = \begin{bmatrix} x_1(\mu, \nu, \varphi) \\ x_2(\mu, \nu, \varphi) \\ x_3(\mu, \nu, \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \sinh\mu \cdot \sin\nu \cdot \cos\varphi \\ a \cdot \sinh\mu \cdot \sin\nu \cdot \sin\varphi \\ a \cdot \cosh\mu \cdot \cos\nu \end{bmatrix}$$

Die Divergenz des Gradienten von $V(\mu, \nu, \varphi)$ kann angeschrieben werden als

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{V}(\mu, \nu, \varphi)) = \partial_i \partial_i (\log \frac{\cosh\mu + 1}{\cosh\mu - 1})$$

Der Term $\partial_i \partial_i$ entspricht dabei dem Laplaceoperator und kann auch angeschrieben werden als:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 (\log \frac{\cosh\mu + 1}{\cosh\mu - 1})$$

Zuerst kann der Termin $\log \frac{\cosh\mu+1}{\cosh\mu-1}$ vereinfacht werden:

$$\log \frac{\cosh\mu + 1}{\cosh\mu - 1} = \log \frac{\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2} + 1}{\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2} - 1} = \log \frac{\frac{e^\mu + e^{-\mu} + 2}{2}}{\frac{e^\mu + e^{-\mu} - 2}{2}} = \log \frac{e^\mu + e^{-\mu} + 2}{e^\mu + e^{-\mu} - 2}$$

Durch $\frac{e^\mu}{e^\mu}$ erweitert folgt:

$$\log(\frac{e^\mu + e^{-\mu} + 2}{e^\mu + e^{-\mu} - 2} \cdot \frac{e^\mu}{e^\mu}) = \log \frac{e^\mu \cdot e^\mu + e^{-\mu} \cdot e^\mu + 2 \cdot e^\mu}{\underbrace{e^\mu \cdot e^\mu}_{e^{2 \cdot \mu}} + \underbrace{e^{-\mu} \cdot e^\mu}_{=e^0 = +1} - \underbrace{2 \cdot e^\mu}_{=-2 \cdot e^\mu}} = \log \frac{e^{2 \cdot \mu} + 2 \cdot e^\mu + 1}{e^{2 \cdot \mu} - 2 \cdot e^\mu + 1}$$

$$= \log \frac{(e^\mu + 1)^2}{(e^\mu - 1)^2}$$

Weiter vereinfacht, durch die für den Logarithmus gültigen Rechenregeln, ergibt sich:

$$= 2 \cdot \log(e^\mu + 1) - 2 \cdot \log(e^\mu - 1)$$

Mit den Berechnungen des 1. Plenums kann man den Gradienten auch schreiben als:

$$(\nabla f)_i = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i}$$

Analog kann die Divergenz beschrieben werden als:

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{H} \cdot \partial_j (\frac{H}{h_j} F_j)\, mit\, H = H(r, \nu, \varphi)$$

Folgend können in unserem Fall h_μ,h_ν und h_φ berechnet werden.
Wir beginnen mit der Herleitung von h_μ:

$$\partial_\mu x_1 = a \cdot \cosh\mu \cdot \sin\nu \cdot \cos\varphi$$

$$\partial_\mu x_2 = a \cdot \cosh\mu \cdot \sin\nu \cdot \sin\varphi$$

$$\partial_\mu x_3 = a \cdot \sinh\mu \cdot \cos\nu$$

$$(\partial\mu x_i) \cdot (\partial\mu x_i) = h_\mu^2 = a^2 \cdot \cosh^2\mu \cdot \sin^2\nu \cdot \cos^2\varphi + a^2 \cdot \cosh^2\mu \cdot \sin^2\nu \cdot \sin^2\varphi + a^2 \cdot \sinh^2\mu \cdot \cos^2\nu$$

$$= a^2 \cdot \cosh^2\mu \cdot \sin^2\nu \cdot (\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{=1}) + a^2 \cdot \sinh^2\mu \cdot \cos^2\nu$$

$$= a^2 \cdot \cosh^2\mu \cdot \sin^2\nu + a^2 \cdot \sinh^2\mu \cdot \cos^2\nu$$

$$= a^2 \cdot (\cosh^2\mu \cdot \sin^2\nu + \sinh^2\mu \cdot \cos^2\nu)$$

Im zweiten Schritt berechnen wir h_ν:

$$\partial_\nu x_1 = a \cdot \sinh\mu \cdot \cos\nu \cdot \cos\varphi$$

$$\partial_\nu x_2 = a \cdot \sinh\mu \cdot \cos\nu \cdot \sin\varphi$$

$$\partial_\nu x_3 = a \cdot \cosh\mu \cdot (-\sin\nu)$$

$$(\partial\nu x_i) \cdot (\partial\nu x_i) = h_\nu^2 = a^2 \cdot \sinh^2\mu \cdot \cos^2\nu \cdot \cos^2\varphi + a^2 \cdot \sinh^2\mu \cdot \cos^2\nu \cdot \sin^2\varphi + a^2 \cdot \cosh^2\mu \cdot \sin^2\nu$$

$$= a^2 \cdot \sinh^2\mu \cdot \cos^2\nu \cdot (\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{=1}) + a^2 \cdot \cosh^2\mu \cdot \sin^2\nu$$

$$= a^2 \cdot (\sinh^2\mu \cdot \cos^2\nu + \cosh^2\mu \cdot \sin^2\nu)$$

Als letztes wird h_φ berechnet:

$$\partial_\varphi x_1 = a \cdot \sinh\mu \cdot \sin\nu \cdot (-\sin\varphi)$$

$$\partial_\varphi x_2 = a \cdot \sinh\mu \cdot \sin\nu \cdot \cos\varphi$$

$$\partial_\varphi x_3 = 0$$

$$(\partial\varphi x_i) \cdot (\partial\varphi x_i) = h_\varphi^2 = a^2 \cdot \sinh^2\mu \cdot \sin^2\nu \cdot \sin^2\varphi + a^2 \cdot \sinh^2\mu \cdot \sin^2\nu \cdot \cos^2\varphi$$

$$= a^2 \cdot \sinh^2\mu \cdot \sin^2\nu \cdot (\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{=1})$$

$$= a^2 \cdot \sinh^2\mu \cdot \sin^2\nu$$

$$h_\varphi = \sqrt{h_\varphi^2} = a \cdot \sinh\mu \cdot \sin\nu$$

Für H ergibt sich somit:

$$H = h_\mu \cdot h_\nu \cdot h_\varphi$$

Nachdem h_μ und h_ν gleich sind, kann die Formel vereinfacht werden zu:

$$H = h_\mu^2 \cdot h_\varphi$$

$$= a^2 \cdot (\sinh^2\mu \cdot \cos^2\nu + \cosh^2\mu \cdot \sin^2\nu) \cdot a \cdot \sinh\mu \cdot \sin\nu$$

$$= a^3 \cdot \sinh^3\mu \cdot \cos^2\nu \cdot \sin\nu + a^3 \cdot \sin^3\nu \cdot \cosh^2\mu \cdot \sin\nu$$

Mit den obrigen Berechnungen können wir nun die Divergenz des Gradienten von $V(\mu, \nu, \varphi)$ anschreiben als:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{V} = \frac{1}{H} \partial_j \left(\frac{H}{h_j} \cdot \frac{1}{h_j} \cdot \underbrace{\frac{\partial V}{\partial u_j}}_{\frac{\partial V(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu}} \right) mit\, j = \mu$$

Für $\frac{\partial V(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu}$ kann nun berechnet werden:

$$\frac{\partial V(\mu, \nu, \varphi)}{\partial \mu} = 2 \cdot \frac{1}{e^\mu + 1} \cdot e^\mu - 2 \cdot \frac{1}{e^\mu - 1} \cdot e^\mu = 2 \cdot e^\mu \cdot \left(\frac{1}{e^\mu + 1} - \frac{1}{e^\mu - 1} \right)$$

$$= 2 \cdot e^\mu \cdot \frac{(e^\mu - 1) - (e^\mu + 1)}{(e^\mu + 1) \cdot (e^\mu - 1)} = 2 \cdot e^\mu \cdot \frac{-2}{(e^{2 \cdot \mu} - 1)} = -4 \cdot \frac{e^\mu}{e^{2 \cdot \mu} - 1}$$

Eingesetzt in die Formel für $\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{V}$ folgt:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{V} = \frac{1}{H} \cdot \partial_\mu \left(\frac{H}{h_\mu} \cdot \frac{1}{h_\mu} \cdot \left(-4 \cdot \frac{e^\mu}{e^{2\cdot\mu} - 1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{H} \cdot \partial_\mu \left(\frac{h_\mu^2 \cdot h_\varphi}{h_\mu^2} \cdot \left(-4 \cdot \frac{e^\mu}{e^{2\cdot\mu} - 1}\right)\right) = -\frac{4}{H} \cdot \partial_\mu \left(h_\varphi \cdot \frac{e^\mu}{e^{2\cdot\mu} - 1}\right)$$

$$= -\frac{4 \cdot a \cdot \sin\nu}{a^3 \cdot \sinh^3\mu \cdot \cos^2\nu \cdot \sin\nu + a^3 \cdot \sin^3\nu \cdot \cosh^2\mu \cdot \sin\nu} \cdot \partial_\mu \left(\sinh\mu \cdot \frac{e^\mu}{e^{2\cdot\mu} - 1}\right)$$

$$= -\frac{4}{a^2 \cdot (\sinh^3\mu \cdot \cos^2\nu + \sin^3\nu \cdot \cosh^2\mu)} \cdot \partial_\mu \left(\underbrace{\sinh\mu}_{=\frac{e^\mu - e^{-\mu}}{2}} \cdot \frac{e^\mu}{e^{2\cdot\mu} - 1}\right)$$

$$= -\frac{4}{a^2 \cdot (\sinh^3\mu \cdot \cos^2\nu + \sin^3\nu \cdot \cosh^2\mu)} \cdot \partial_\mu \left(\frac{e^\mu - e^{-\mu}}{2} \cdot \frac{e^\mu}{e^{2\cdot\mu} - 1}\right)$$

$$= -\frac{4}{a^2 \cdot (\sinh^3\mu \cdot \cos^2\nu + \sin^3\nu \cdot \cosh^2\mu)} \cdot \partial_\mu \left(\underbrace{\frac{e^{2\cdot\mu} - 1}{2 \cdot (e^{2\cdot\mu} - 1)}}_{=\frac{1}{2}}\right)$$

Nachdem der Term $\partial_\mu(\frac{1}{2})$ Null ergibt, folgt für $\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{V}$ final:

$$= -\frac{4}{a^2 \cdot (\sinh^3\mu \cdot \cos^2\nu + \sin^3\nu \cdot \cosh^2\mu)} \cdot \partial_\mu \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{=0}\right) = \underline{\underline{0}}$$

$$\implies \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{V} = 0$$

(b)

Aus der Angabe kann der Vektor $\vec{x}$ folgendermaßen angeschrieben werden (siehe Unterpunkt 6)a)):

$$\vec{x}(\mu,\nu,\varphi) = \begin{bmatrix} x_1(\mu,\nu,\varphi) \\ x_2(\mu,\nu,\varphi) \\ x_3(\mu,\nu,\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \sinh\mu \cdot \sin\nu \cdot \cos\varphi \\ a \cdot \sinh\mu \cdot \sin\nu \cdot \sin\varphi \\ a \cdot \cosh\mu \cdot \cos\nu \end{bmatrix}$$

Für ein **Nahfeld** gilt gemäß der Angabe $\mu << 1$ und $\nu \approx \frac{\pi}{2}$.
Aufgrund des annähernd linearen Verlaufes von $\sinh$, mit Anstieg $k = 1$, für alle Werte unter 1, kann man schreiben:

$$\sinh\mu \approx \mu$$

Der $\cosh$ auf der anderen Seite ist für Werte um 0 ungefähr gleich 1. Daher kann man schreiben:

$$\cosh\mu \approx 1$$

Betrachtet man den Vektor $\vec{x}$ vor dem Hintergrund, dass $\nu \approx \frac{\pi}{2}$ ist, kann man die betroffenen Terme schreiben als:

$$\sin\nu \approx 1$$

$$\cos\nu \approx 0$$

Diese Angaben können nun in den Vektor $\vec{x}$ eingesetzt werden, wodurch folgt:

$$\vec{x}(\mu,\nu,\varphi) = \begin{bmatrix} a \cdot \underbrace{\sinh\mu}_{\approx\mu} \cdot \underbrace{\sin\nu}_{\approx 1} \cdot \cos\varphi \\ a \cdot \underbrace{\sinh\mu}_{\approx\mu} \cdot \underbrace{\sin\nu}_{\approx 1} \cdot \sin\varphi \\ a \cdot \underbrace{\cosh\mu}_{\approx 1} \cdot \underbrace{\cos\nu}_{\approx 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \mu \cdot \cos\varphi \\ a \cdot \mu \cdot \sin\varphi \\ a \cdot \underbrace{\cos\nu}_{\approx 0} \end{bmatrix}$$

Die Differenz von ν zu $\frac{\pi}{2}$ kann ausgedrückt werden als:

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos\nu = 0 + \Delta$$

Dadurch lässt sich der Vektor $\vec{x}$ anschreiben als:

$$= \begin{bmatrix} a \cdot \mu \cdot \cos\varphi \\ a \cdot \mu \cdot \sin\varphi \\ a \cdot \Delta \end{bmatrix}$$

Verglichen mit Zylinderkoordinaten $\begin{bmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ h \end{bmatrix}$ ergeben sich die Zusammenhänge:

$$r = a \cdot \mu$$

$$h = a \cdot \Delta$$

Nachdem es sich um ein Nahfeld und somit um den unmittelbaren Bereich bei der Quelle handelt, kann man die Höhe vernachlässigen.

Für das Potential $V(\mu,\nu,\varphi)$ folgt daraus:

$$V(\mu,\nu,\varphi) = \log \frac{\overbrace{\cosh\mu}^{\approx 1} + 1}{\underbrace{\cosh\mu}_{\approx 1} - 1} = \log \frac{1+1}{1-1} = \log\infty = \underline{\underline{\infty}}$$

Die Lösung divergiert somit.

Für das **Fernfeld** gilt gemäß Angabe $1 << \mu$. Somit können für $\sinh$ und $\cosh$ die asymptotischen Funktionen eingesetzt werden, welche definiert sind als:

$$\sinh\mu = \cosh\mu = \frac{1}{2} \cdot e^{\mu}$$

$$\sin\nu = \sin\nu$$

$$\cos\nu = \cos\nu$$

Betrachten wir den Vektor $\vec{x}$ unter diesen Bedingungen folgt:

$$\vec{x}(\mu,\nu,\varphi) = \begin{bmatrix} a \cdot \underbrace{\sinh\mu}_{=\frac{1}{2}\cdot e^{\mu}} \cdot \sin\nu \cdot \cos\varphi \\ a \cdot \underbrace{\sinh\mu}_{=\frac{1}{2}\cdot e^{\mu}} \cdot \sin\nu \cdot \sin\varphi \\ a \cdot \underbrace{\cosh\mu}_{=\frac{1}{2}\cdot e^{\mu}} \cdot \cos\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\mu} \cdot \sin\nu \cdot \cos\varphi \\ a \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\mu} \cdot \sin\nu \cdot \sin\varphi \\ a \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\mu} \cdot \cos\nu \end{bmatrix}$$

Verglichen mit Kugelkoordinaten der Form $\begin{bmatrix} a \cdot \sin\nu \cdot \cos\varphi \\ a \cdot \sin\nu \cdot \sin\varphi \\ a \cdot \cos\nu \end{bmatrix}$ ergeben sich somit folgende Zusammenhänge für ein Fernfeld:

$$r = a \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\mu}$$

Für das Potential $V(\mu,\nu,\varphi)$ folgt daraus:

$$V(\mu,\nu,\varphi) = \log \frac{\overbrace{\cosh\mu}^{\frac{1}{2}\cdot e^{\mu}} + 1}{\underbrace{\cosh\mu}_{\frac{1}{2}\cdot e^{\mu}} - 1}$$

Nachdem $1 << \mu$ gilt, kann daraus die Beziehung $1 << \frac{1}{2} \cdot e^{\mu}$ abgeleitet werden. Unter dieser Annahme ergibt sich für das Potential im Fernfeld:

$$V(\mu,\nu,\varphi) = \log \frac{\frac{1}{2} \cdot e^{\mu}}{\frac{1}{2} \cdot e^{\mu}} = \log 1 = \underline{\underline{0}}$$

Allgemeine Formeln

Mit dem Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} schreibt sich das Kreuzprodukt als

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$$