9. Problem Set - 01.06.2022

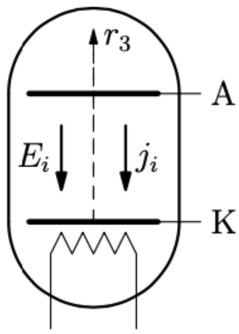
Elektrodynamik I - 136.015

Gerechnete Beispiele:
25) a)
26) a) & b)
27) a) & b)

25 Röhrendiode im Vakuum

25 Röhrendiode im Vakuum

Ein Modell einer Vakuumdiode hat zwei parallele, große Elektroden gleicher Querschnittsfläche A im Abstand d. Nur die Kathode K ist beheizt daher können Elektronen nur aus der Kathode austreten und zur Anode beschleunigt werden, wenn diese ein positives Potential V_0 gegen die geerdete Kathode aufweist. Wir studieren den stationären Fall mit konstantem Strom I und suchen das Potential $V(r_3)$ zwischen den Elektroden sowie den Zusammenhang zwischen V_0 und I.



(a) Bestimme die Geschwindigkeit der beschleunigten Elektronen $v_3(r_3)$ in Abhängigkeit von $V(r_3)$ und zeige, dass für die Elektronendichte $\rho(r_3) \propto V(r_3)^{-1/2}$ gilt.

(b) Löse das Gleichungssystem aus obigem Zusammenhang und der Poisson-Gleichung um $V(r_3)$ zu finden und zeige, dass der Diodenstrom I für ein positives Anodenpotential V_0 durch das Child–Langmuir Gesetz gegeben ist: $I = -\left(\frac{2e}{m}\right)^{1/2} \frac{4\epsilon_0 A}{9d^2} V_0^{3/2}$.

a)

Die Beschleunigung von Elektronen beudeutet, dass Energie in kinteische Energie umgesetzt wird. Diese Energie entspricht allgemein:

$$E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

In unser Beispiel kann die Masse m mit der Masse eines Elektrons angenommen werden; also $m = m_e = 9.1093837015 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$. Die Geschwindigkeit v entspricht der gesuchten Geschwindigkeit der Elektronen $v_3(r_3)$. Entsprechend folgt für die kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{m_e \cdot {v_3}^2}{2}$$

Die Energie, welche die Beschleunigung der Elektronen verursacht, ist eine elektrische Energie. Wie bereits in den vergangenen Übungen beschrieben, ist die Formel hierfür:

$$E_{el} = q \cdot V$$

In unserem Fall kann für die Ladung q die Ladung eines Elektrons angenommen werden; also $q = e = -1.602176634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Das in der Formel beschrieben Potential V entspricht dem in der Angabe definierten Potential $V(r_3)$. Somit folgt auch für die elektrische Energie:

$$E_{el} = e \cdot V(r_3)$$

Wie bereits eingangs beschrieben, löst die elektrische Energie eine Beschleunigung der Elektronen aus. Entsprechend folgt die kinetische Energie aus der elektrischen Energie. Die Umwandlung kann durch folgenden Zusammenhang, gemäß der Energieerhaltung, beschrieben werden:

$$E_{el} = E_{kin}$$

$$e \cdot V(r_3) = \frac{m_e \cdot {v_3}^2}{2}$$

Aus diesem Zusammenhang folgt für die Geschwindigkeit des Elektrons v_3:

$$v_3(r_3) = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot V(r_3)}{m_e}}$$

Die ermittelte Energie entspricht dabei der Spitzenenergie eines Elektrons vor dem Auftreffen auf die Anode. Da es sich um eine Beschleunigung handelt, ist die Geschwindigkeit nicht konstant.

Die Elektronendichte ρ kann in unserem Beispiel aus der Formel für die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$ ermittelt werden. Diese lautet gemäß *Electromagnetism* von Gerald L. Pollack und Daniel R. Stump, *Formel 7.4*:

$$\boldsymbol{J} = q \cdot n \cdot \boldsymbol{v}$$

Der Wert q entspricht dabei der Ladung, n ist die *volume number density* und $\boldsymbol{v}$ ist die Geschwindigkeit der Ladungen.
Die *volume number density* n ist definiert als der Quotient der Anzahl der Objekte N und dem Volumen V:

$$n = \frac{N}{V}$$

Entsprechend kann man die Formel für die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$ wie folgt anschreiben:

$$\boldsymbol{J} = \underbrace{q \cdot \frac{N}{V}}_{\rho} \cdot \boldsymbol{v}$$

Der Term $q \cdot \frac{N}{V}$ beschreibt den Zusammenhang zwischen einer Ladung q und einem Volumen V. Dieser Zusammenhand ist äquivalent zu der Elektronendichte ρ. Entsprechend folgt für die Beschreibung der elektrischen Stromdichte $\boldsymbol{J}$:

$$\boldsymbol{J} = \rho \cdot \boldsymbol{v}$$

Daraus folgend kann nun die Elektronendichte $\rho(r_3)$ ermittelt werden:

$$\rho(r_3) = \frac{\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{v}_3(r_3)}$$

Mit dem eingangs ermittelten Ergebnis für die Geschwindigkeit der Elektronen $v_3(r_3)$ folgt:

$$\rho(r_3) = \frac{J}{\sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot V(r_3)}{m_e}}}$$

Somit folgt final für die Berechnung der Elektronendichte $\rho(r_3)$:

$$\rho(r_3) = \frac{J}{\sqrt{\frac{2 \cdot e}{m_e}}} \cdot V(r_3)^{-\frac{1}{2}}$$

Es wurde somit gezeigt, dass für die Elektronendichte wie in der Angabe beschrieben gilt:

$$\rho(r_3) \propto V(r_3)^{-\frac{1}{2}}$$

b)

26 Widerstand der Atmosphäre

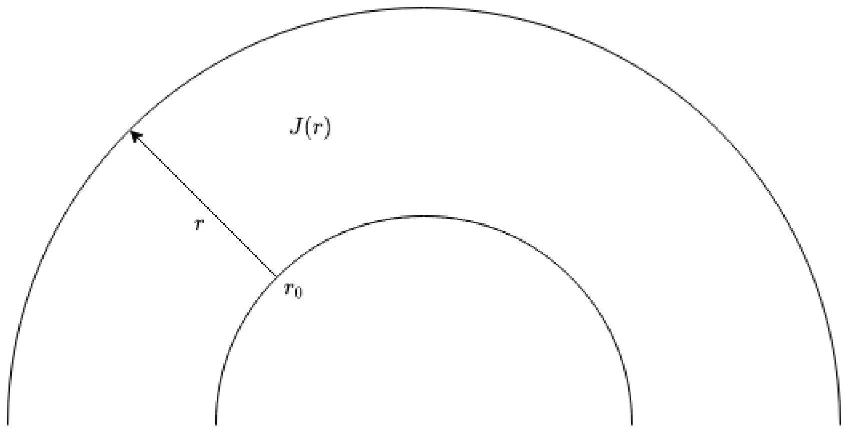
26 Widerstand der Atmosphäre

Die Leitfähigkeit der Erdatmosphäre steigt mit zunehmender Höhe bis sie bei einer Höhe von $H \approx 50\,\mathrm{km}$ als praktisch vollständig leitend angenommen werden kann. Experimentell zeigt sich, dass die Leitfähigkeit $\sigma(r)$ abhängig vom Radius r zum Erdmittelpunkt durch $\sigma(r) = \sigma_0 + A(r - r_0)^2$ angenommen werden kann, wobei $r_0 \approx 6{,}4 \times 10^6\,\mathrm{m}$ der Erdradius ist und die restlichen Parameter gegeben sind durch: $\sigma_0 \approx 3 \times 10^{-14}\,\mathrm{S/m}$, $A \approx 0{,}5 \times 10^{-20}\,\mathrm{S/m^3}$.

(a) Zeige, dass $u(r) = r^2 E_r(r)$ der Differentialgleichung $u' = -u\sigma'/\sigma$ genügt.

(b) Löse diese Differentialgleichung und schätze damit den Gesamtwiderstand der Erdatmosphäre zwischen Erdoberfläche und Ionosphäre auf 2 Nachkommastellen ab. (Kann auch mit dem Computer gelöst werden. $R \approx 241\,\Omega$)

a)



Für $u(r)$ gilt gemäß der Angabe:

$$u(r) = r^2 \cdot E_r(r)$$

Das elektrische Feld $E_r(r)$ kann hierbei durch die elektrische Stromdichte $J(r)$ dargestellt werden. Der entsprechende Zusammenhang, die lokale Form des ohm'schen Gesetzes, lautet gemäß *Electromagnetism* von Gerald L. Pollack und Daniel R. Stump, *Formel 7.11*:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \sigma(r) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

Damit ergibt sich für $u(r)$:

$$u(r) = r^2 \cdot \frac{J(r)}{\sigma(r)}$$

Dieser Ausdruck kann nun in die Differentialgleichung der Angabe eingesetzt werden:

$$u'(r) = -u(r) \cdot \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} = -r^2 \cdot \frac{J(r)}{\sigma(r)} \cdot \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)}$$

Der Ausdruck $u'(r)$, der linken Seite, kann ebenfalls durch den zuvor ermittelten Zusammenhang für $E_r(r)$ dargestellt werden:

$$u'(r) = \partial_r \left(r^2 \cdot \frac{J(r)}{\sigma(r)} \right)$$

Mit der Produktregel für Ableitungen folgt daraus:

$$= \partial_r r^2 \cdot \frac{J(r)}{\sigma(r)} + r^2 \cdot \partial_r \left(\frac{J(r)}{\sigma(r)} \right)$$

Weiters kann die Quotientenregel für Ableitungen angewandt werden, woraus folgt:

$$= 2 \cdot r \cdot \frac{J(r)}{\sigma(r)} + r^2 \cdot \frac{J'(r) \cdot \sigma(r) - J(r) \cdot \sigma'(r)}{\sigma^2(r)}$$

Die beiden Brüche können nun auf den selben Nenner gebracht werden:

$$= 2 \cdot r \cdot \frac{J(r) \cdot \sigma(r)}{\sigma^2(r)} + r^2 \cdot \frac{J'(r) \cdot \sigma(r) - J(r) \cdot \sigma'(r)}{\sigma^2(r)}$$

Dieser Ausdruck für $u'(r)$ wird folgend wieder in die Differentialgleichung eingesetzt:

$$2 \cdot r \cdot \frac{J(r) \cdot \sigma(r)}{\sigma^2(r)} + r^2 \cdot \frac{J'(r) \cdot \sigma(r) - J(r) \cdot \sigma'(r)}{\sigma^2(r)} = -r^2 \cdot \underbrace{\frac{J(r)}{\sigma(r)} \cdot \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)}}_{=\frac{J(r) \cdot \sigma'(r)}{\sigma^2(r)}}$$

Die Gleichung kann nun mit $\sigma^2(r)$ multipliziert werden. Dadurch ergibt sich:

$$2 \cdot r \cdot J(r) \cdot \sigma(r) + r^2 \cdot J'(r) \cdot \sigma(r) \cancel{- r^2 \cdot J(r) \cdot \sigma'(r)} = \cancel{-r^2 \cdot J(r) \cdot \sigma'(r)}$$

Weiter vereinfacht folgt:

$$2 \cdot r \cdot J(r) \cdot \sigma(r) + r^2 \cdot J'(r) \cdot \sigma(r) = 0$$

$$\sigma(r) \cdot \big(2 \cdot r \cdot J(r) + r^2 \cdot J'(r)\big) = 0$$

Die Kontinuitätsgleichung der Ladungsdichte entspricht:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

In unserem Fall kann eine Quasi-Elektrostatik angenommen werden, wodurch der Ausdruck $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ gleich 0 entspricht. Daraus folgt:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

Gemäß der Berechnung der Divergenz, eines in Kugelkoordinaten gegebenen Vektorfeldes, folgt:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial_r}(r^2 \cdot \boldsymbol{J}) = 0$$

Weiter vereinfacht entspricht der Ausdruck somit:

$$\frac{\partial}{\partial_r}(r^2 \cdot \boldsymbol{J}) = 0$$

Löst man die Ableitung auf, folgt gemäß der Produktregel für Ableitungen:

$$\underbrace{\partial_r r^2}_{=2 \cdot r} \cdot J + r^2 \cdot \partial_r J = 0$$

$$-2 \cdot r \cdot J = r^2 \cdot \partial_r J$$

Daraus folgt final für $\partial_r J$:

$$\partial_r J = \frac{-2 \cdot \cancel{r} \cdot J}{r \cancel{2}} = \frac{-2 \cdot J}{r}$$

Der eben ermittelte Ausdruck für $\partial_r J$ kann nun in die zuvor vereinfachte Differentialgleichung eingesetzt werden:

$$\sigma(r) \cdot \left(2 \cdot r \cdot J(r) + r^2 \cdot \underbrace{J'(r)}_{=\partial_r J(r)} \right) = 0$$

Daraus folgt:

$$\sigma(r) \cdot \left(2 \cdot r \cdot J(r) + r^{\cancel{2}} \cdot \frac{-2 \cdot J(r)}{\cancel{r}} \right) = 0$$

Final ergibt sich somit für die Differentialgleichung:

$$\sigma(r) \cdot \left(\cancel{2 \cdot r \cdot J(r)} - \cancel{2 \cdot r \cdot J(r)} \right) = 0$$

Dadurch wurde gezeigt, dass $u(r) = r^2 \cdot E_r(r)$ der Differentialgleichung $u' = -r \cdot \frac{\sigma'}{\sigma}$ genügt:

$$0 = 0$$

b)

Der Widerstand eines geometrischen Objektes kann gemäß *Electromagnetism* von Gerald L. Pollack und Daniel R. Stump, *Formel 7.12* wie folgt berechnet werden:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{L}{\sigma \cdot A}$$

Die Formel entstammt u.a. dem Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld E und dem Potential V: $E = V/L$. Entsprechend steht L für die Strecke, über welche das Potential gemessen wurde. In unserem Fall entspricht das der Strecke zwischen dem Erdradius r_0 und der Ionosphäre in einer Entfernung H von dem Erdradius r_0. A entspricht weiters der Querschnittsfläche und σ der Leitfähigkeiten. In unserem Beispiel ergibt sich daher das folgende Integral:

$$R = \int_{r_0}^{r_0+H} \frac{1}{\sigma \cdot A} \, dr$$

Setzt man in diese Formel die Werte für die Leitfähigkeit σ und die Querschnittsfläche A (sie entspricht, gemäß der Geometrie des Beispiels, der Oberfläche einer Kugel) ein, folgt:

$$R = \int_{r_0}^{r_0+H} \frac{1}{(\sigma_0 + A \cdot (r - r_0)^2) \cdot (4\pi \cdot r^2)} \, dr$$

Weiters können nun die Zahlenwerte der Angabe für σ_0, A, H und r_0 eingesetzt werden:

$$R = \int_{6.4 \cdot 10^6}^{6.4 \cdot 10^6 + 50 \cdot 10^3} \frac{1}{\left(\frac{3}{10^{14}} + \frac{0.5}{10^{20}} \cdot (r - 6.4 \cdot 10^6)^2\right) \cdot (4\pi \cdot r^2)} \, dr$$

Damit folgt final für den Gesamtwiderstand R der Erdatmosphäre: *(Mit Wolfram Alpha berechnet)*

$$R = 241.045\,\Omega \approx 241.05\,\Omega$$

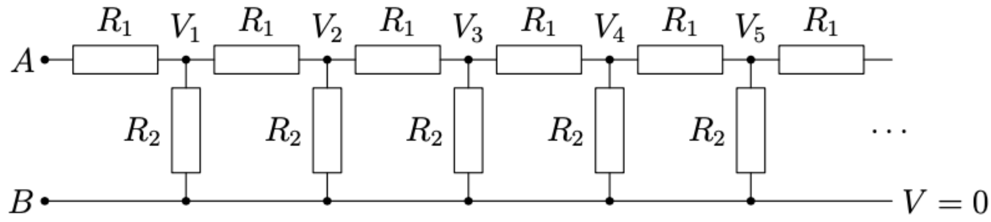
27 Modell eines Neurons

27 Modell eines Neurons

Das gezeigte Widerstandsnetz dient als Modell für den Spannungsverlauf entlang eines Axons in einem Neuron.

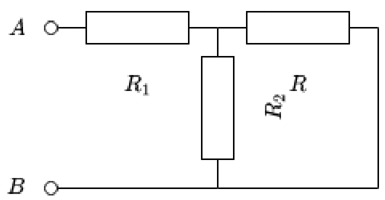
(a) Zeige, dass der Gesamtwiderstand R zwischen A und B die Gleichung $R = R_1 + R_2R/(R_2 + R)$ erfüllt.

(b) Löse die Gleichung nach R und zeige damit, dass die Spannungen V_n entlang des Axons exponentiell abnehmen.



a)

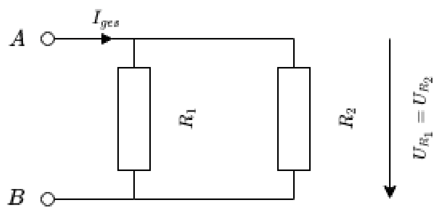
Das Widerstandsnetz der Angabe kann in ein Ersatzschaltbild der folgenden Form überführt werden:



Der Ersatzwiderstand R stellt die weiter folgenden Glieder des Widerstandsnetzes dar. Diese sind in Parallelschaltung zu R_2 angeordnet.

Gemäß dem Ersatzschaltbild kann der Gesamtwiderstand R_{ges} durch den folgenden Zusammenhang berechnet werden:

$$R_{ges} = R_1 + (R_2 \parallel R)$$



Für zwei parallel geschaltete Widerstände $R_1 \parallel R_2$ gilt, dass die Spannung über beide Widerstände gleich ist. Es gilt also:

$$U_{R_1} = U_{R_2}$$

Außerdem kann an den oberen und unteren Knotenpunkten die Kirchhoff-Regel angewandt werden, welche in diesem Fall besagt:

$$I_{ges} = I_{R_1} + I_{R_2}$$

Aus dem ohm'schen Gesetz ($U = I \cdot R$) folgt weiters der folgende Zusammenhang:

$$I_{ges} = \frac{U_{R_1}}{R_1} + \frac{U_{R_2}}{R_2}$$

Nachdem, wie eingangs bereits dargelegt, die Spannungen U_{R_1} und U_{R_2} gleich sind, folgt:

$$I_{ges} = U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Die Brüche der Widerstände R_1 und R_2 können in weiterer Folge zu einem Bruch zusammengefasst werden:

$$I_{ges} = U \cdot \left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2} \right)$$

Gemäß dem ohm'schen Gesetz gilt für den Zusammenhang zwischen Strom und Spannung:

$$\frac{I_{ges}}{U} = \frac{1}{R} \to \frac{U}{I_{ges}} = R$$

Somit folgt für die Gesamtschaltung der beiden parallelen Widerstände:

$$\underbrace{\frac{I_{ges}}{U}}_{=\frac{1}{R_{ges}}} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}$$

Daraus folgt mit dem Kehrwert des Bruches:

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 + R_1}$$

Mit der eben ermittelten Regel für Widerstände in Parallelschaltung folgt daraus für den Gesamtwiderstand R_{ges} des Widerstandsnetzes:

$$R_{ges} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R}$$

b)

Die Gleichung aus Unterpunkt a) entspricht nach R gelöst:

$$R_{ges} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R}$$

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R + R_2 \cdot R}{R_2 + R}$$

$$R_{ges} \cdot (R_2 + R) = R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R + R_2 \cdot R$$

$$R_{ges} \cdot R - R_1 \cdot R - R_2 \cdot R = R_1 \cdot R_2 - R_{ges} \cdot R_2$$

$$R \cdot (R_{ges} - R_1 - R_2) = R_2 \cdot (R_1 - R_{ges})$$

Somit folgt für R:

$$R = R_2 \cdot \frac{R_1 - R_{ges}}{R_{ges} - R_1 - R_2}$$

Wäre das Widerstandsnetz **unendlich lange**, könnte man davon ausgehen, dass R_{ges} gleich zu R ist. In diesem Fall würde für R gelten:

$$R = R_1 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R}$$

$$R \cdot (R_2 + R) = R_1 \cdot (R_2 + R) + R_2 \cdot R$$

$$R^2 + \cancel{R \cdot R_2} = R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R + \cancel{R_2 \cdot R}$$

$$R^2 - R \cdot R_1 - R_1 \cdot R_2 = 0$$

Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen folgt somit für R, im Falle, dass das Widerstandsnetz unendlich lange ist:

$$R = \frac{R_1}{2} + \sqrt{\frac{R_1^2}{4} + R_1 \cdot R_2}$$

Im weiteren Schritt sollen die Spannungsabfälle V_n berechnet werden. Für den ersten Spannungsabfall V_1 gilt, dass sich die Spannung V_0, zwischen A und B, gemäß dem Spannungsteiler-Gesetz aufteilt. Dieses besagt, dass durch zwei Widerstände R_1 und R_2 der selbe Strom fließt. Entsprechend gilt:

$$I_1 = I_2$$

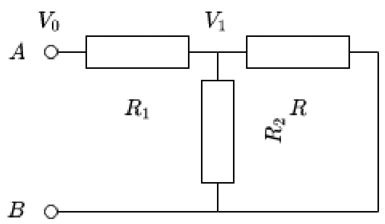
Beziehungsweise nach dem ohm'schen Gesetz:

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$$

Nachdem wir in unserem Fall das Verhältnis zwischen U_1 und U_2 wissen möchten, können wir den Zusammenhang umschreiben zu:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

R_1 und R_2 entsprechen dabei jeweils den Widerständen, über welche die Spannungen U_1 und U_2 anliegen.

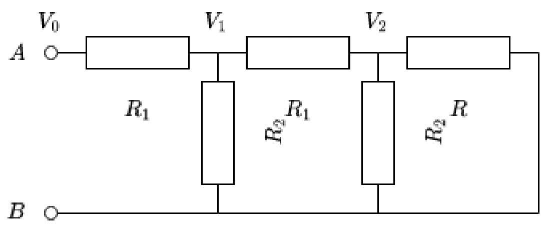


Wendet man diese Erkenntnis auf die Spannungen V_0 und V_1 an, folgt daraus:

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{R_1 + (R_2 \parallel R)}{R_2 \parallel R}$$

Umgestellt nach V_1 folgt:

$$V_1 = V_0 \cdot \frac{R_2 \parallel R}{R_1 + (R_2 \parallel R)}$$

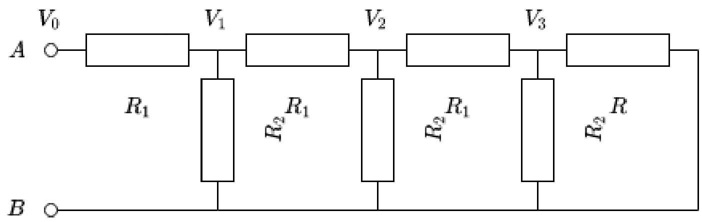


Analog dazu kann die Spannung V_2 ermittelt werden. Diese entspricht:

$$V_2 = V_1 \cdot \frac{R_2 \parallel R}{R_1 + (R_2 \parallel R)}$$

Setzt man für V_1 den vorhin bestimmten Zusammenhang ein, ergibt sich daraus:

$$V_2 = V_0 \cdot \frac{R_2 \parallel R}{R_1 + (R_2 \parallel R)} \cdot \frac{R_2 \parallel R}{R_1 + (R_2 \parallel R)} = V_0 \cdot \left(\frac{R_2 \parallel R}{R_1 + (R_2 \parallel R)} \right)^2$$



Die Berechnung von V_3 erfolgt analog zu den Berechnungen von V_1 und V_2 und ergibt:

$$V_3 = V_0 \cdot \left(\frac{R_2 \parallel R}{R_1 + (R_2 \parallel R)} \right)^3$$

Demnach wurde der folgende exponentielle Zusammenhang für die Berechnung der Spannung V_n nachgewiesen:

$$V_n = V_0 \cdot \left(\frac{R_2 \parallel R}{R_1 + (R_2 \parallel R)} \right)^n$$