8. Problem Set - 18.05.2022

Elektrodynamik I - 136.015

Gerechnete Beispiele:
22)
23) a) & b)
24) a) & b)

22 Atomare Polarisierbarkeit von Wasserstoff

22 Atomare Polarisierbarkeit von Wasserstoff

Wir nehmen an, dass sich die Elektronendichte unter dem Einfluss eines äußeren elektrischen Feldes nicht verformt. Unter dieser Annahme verschiebt sich nur das Proton um den Abstand d gegen das Zentrum der kugelsymmetrischen Elektronendichte $\rho(r) = -e/(\pi a_0^3)\,\exp(-2r/a_0)$, bis die auf das Proton wirkenden Kräfte im Gleichgewicht stehen. Auf das Proton wirken das äußere und das durch das Elektron erzeugte elektrische Feld. a_0 ist der Bohr-Radius.

(a) Zeige, dass das durch das Elektron erzeugte Potential gegeben ist durch $V(r) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{r+a_0}{ra_0}\,e^{-2r/a_0}\right)$.

(b) Entwickle das durch das Elektron erzeugte elektrische Feld für kleine Abstände d vom Zentrum. Zeige damit, dass die atomare Polarisierbarkeit von Wasserstoff in diesem Modell gegeben ist durch $\alpha = 3\pi\epsilon_0 a_0^3$, also zwischen dem Dipolmoment p_i und dem äußeren Feld $\mathcal{E}_i$ der Zusammenhang $p_i = \alpha\mathcal{E}_i$ besteht.

(c) Vergleiche das Resultat aus (b) mit dem tatsächlichen Wert $\alpha/(4\pi\epsilon_0) \approx 0.667\,\text{Å}^3$.

(a): 1P, (b): 1P, (c): 1P

a)

b)

c)

23 Kondensator mit elastischem Dielektrikum

23 Kondensator mit elastischem Dielektrikum

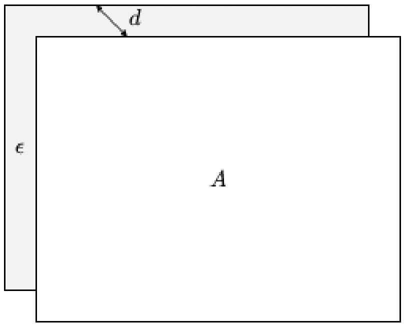
Zwischen zwei parallelen Metallplatten der Fläche A befindet sich ein mechanisch elastisches Dielektrium der elektrischen Permitivität ϵ. Die mechanische Energie im elastischen Dielektrikum sei vom Abstand d der Platten abhängig $U_\mathrm{M} = \frac{1}{2}Ak(d-d_0)^2$.

(a) Zeige, dass der Gleichgewichtsabstand $d(Q)$, abhängig von der Ladung $\pm Q$, die die Metallplatten tragen, gegeben ist durch $d_0 - Q^2/(2\epsilon A^2 k)$. Die Permitivität ϵ sei von d unabhängig.

(b) Finde damit den Spannungsunterschied $V(Q)$ zwischen den Platten und skizziere $V(Q)$. Wie verhält sich die differentielle Kapazität dQ/dV?

nur (a) oder (b): 2P, (a) und (b): 3P

a)



Es soll der Gleichgewichtsabstand $d(Q)$ ermittelt werden. Entsprechend muss zwischen der mechanischen Kraft F_m und der elektrischen Kraft F_e ein Gleichgewicht herrschen:

$$F_e - F_m = 0$$

Die mechanische Kraft ist demnach gleich zu der elektrischen Kraft F_e:

$$F_m = F_e$$

Allgemein ist die mechanische Arbeit (also die mechanische Energie) dadurch definiert, dass sie gegeben ist, wenn ein Körper einen Weg zurücklegt und dabei eine Kraft auf ihn wirkt. Die Berechnung erfolgt gemäß der folgenden Form:

$$U_m = \int_C \boldsymbol{F}_m \, d\boldsymbol{s}$$

Über diesen Zusammenhang, kann die Kraft $\boldsymbol{F}_m$ wie folgt angeschrieben werden:

$$\boldsymbol{F}_m = \frac{\partial U_m}{\partial \boldsymbol{s}}$$

Da in unserem Beispiel der Weg s der Abschand d zwischen den Platten ist, folgt daraus für die Berechnung der Kraft:

$$F_m = \frac{\partial U_m}{\partial d}$$

Mit dem in der Angabe definierten Ausdruck für die mechanische Energie U_m folgt für die mechanische Kraft F_m:

$$F_m = \partial_d U_m = \partial_d \left(\frac{1}{2} \cdot A \cdot k \cdot (d - d_0)^2\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot A \cdot k \cdot (d - d_0) \cdot 1$$

$$F_m = A \cdot k \cdot (d - d_0)$$

Die elektrische Kraft F_e ist wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{F}_e = q \cdot \boldsymbol{E}$$

Nachdem das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ in diesem Beispiel unbekannt ist, kann die elektrische Kraft F_e auch aus der elektrischen Energie U_e hergeleitet werden. Die elektrische Energie ist u.a. definiert als:

$$U_e = q \cdot V$$

Weiters gilt, dass das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ der negative Gradient des elektrischen Potentials V ist:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

Über diese Beziehungen folgt, dass die elektrische Kraft $\boldsymbol{F}_e$ gleich der Ableitung von U_e nach dem Weg (in unserem Fall dem Abstand der Platten, also d) ist:

$$\boldsymbol{F}_e = q \cdot (-\boldsymbol{\nabla} V) = -\boldsymbol{\nabla}(\underbrace{q \cdot V}_{=U_e})$$

Somit folgt für die elektrische Kraft:

$$\boldsymbol{F}_e = -\frac{\partial U_e}{\partial d}$$

Die elektrische Energie U_e ist in einem Kondensator u.a. definiert als:

$$U_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

Weiters gilt für die Kapazität C eines Plattenkondensators:

$$C = \epsilon \cdot \frac{A}{d}$$

Diese Ausdrücke kombiniert ergeben:

$$U_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2 \cdot d}{\epsilon \cdot A}$$

Daraus lässt sich nun wie folgt die elektrische Kraft F_e ableiten:

$$F_e = -\frac{\partial U_e}{\partial d} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon \cdot A}$$

Mit dem eingangs beschriebenen Zusammenhang zwischen der elektrischen und der mechanischen Kraft, bei der Verschiebung einer Ladung Q in einem elektrischen Feld E folgt:

$$F_m = F_e$$

$$\implies A \cdot k \cdot (d - d_0) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon \cdot A}$$

Daraus folgt für den Abstand d in Abhängigkeit von der Ladung Q:

$$d(Q) = d_0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon \cdot A^2 \cdot k}$$

b)

In einem Kondensator gilt allgemein die folgende Beziehung zwischen dem Spannungsunterschied (= der Spannung) V, der Ladung Q und der Kapazität C:

$$Q = C \cdot V$$

Daraus folgt für die Berechnung des Spannungsunterschiedes:

$$V = \frac{Q}{C}$$

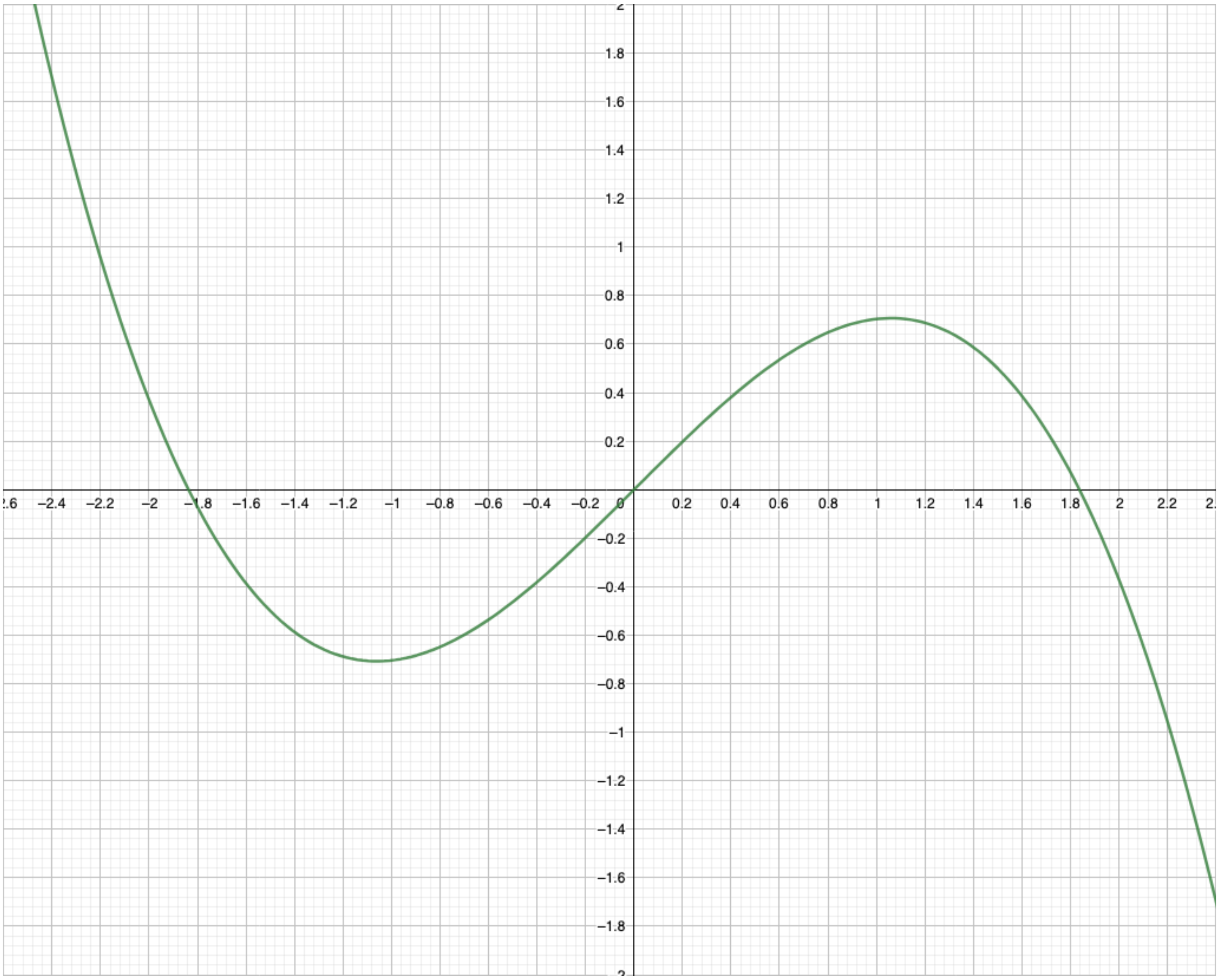
Für die Kapazität C kann erneut die Formel zur Berechnung der Kapazität eines Plattenkondensators eingesetzt werden: (siehe Unterpunkt a))

$$V = \frac{Q \cdot d}{\epsilon \cdot A}$$

Für den Abstand der Platten d kann nun weiters die in Unterpunkt a) ermittelte Formel eingesetzt werden. Daraus folgt:

$$V(Q) = \frac{Q \cdot d(Q)}{\epsilon \cdot A} = \frac{Q}{\epsilon \cdot A} \cdot \left(d_0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon \cdot A^2 \cdot k}\right)$$

Skizziert entspricht der Verlauf des Spannungsunterschiedes $V(Q)$:



(Auf der y-Achse ist $V(Q)$ aufgetragen und auf der x-Achse die Ladung Q. Für die Skizze wurden für A der Wert 1.5, für d_0 der Wert 1.5 und für k der Wert 1 angenommen.)

Die differenzielle Kapazität entspricht:

$$\frac{\partial Q}{\partial V} = \left(\frac{\partial V}{\partial Q}\right)^{-1}$$

$$= \left(\partial_Q\left(\frac{Q}{\epsilon \cdot A} \cdot \left(d_0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon \cdot A^2 \cdot k}\right)\right)\right)^{-1}$$

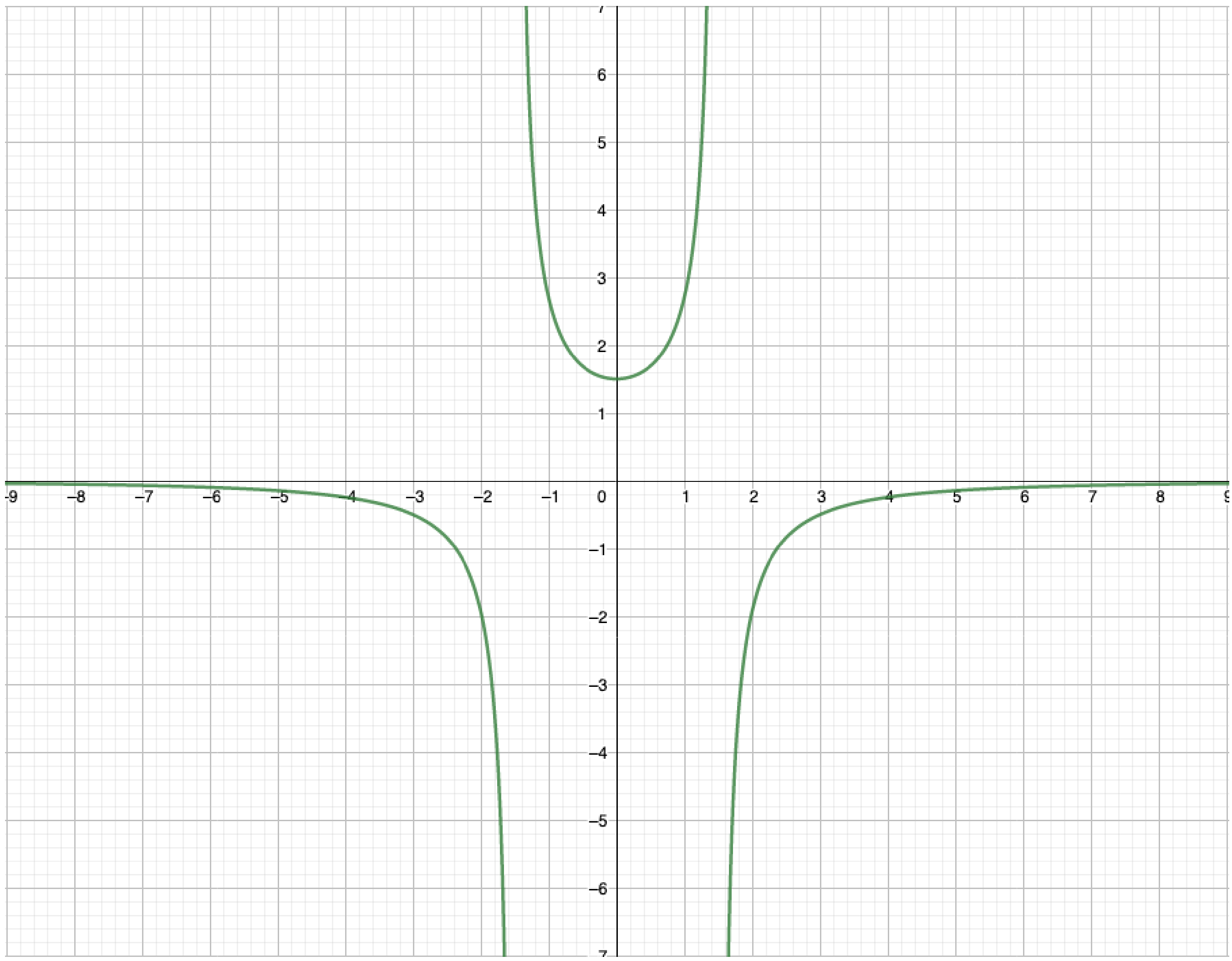
Damit folgt für $\left(\frac{\partial V}{\partial Q}\right)^{-1}$: *(Mit Wolfram Alpha berechnet)*

$$\left(\frac{\partial V}{\partial Q}\right)^{-1} = -\frac{3 \cdot Q^2 - 2 \cdot A^2 \cdot d_0 \cdot \epsilon \cdot k}{2 \cdot A^3 \cdot \epsilon^2 \cdot k}$$

Die differenzielle Kapazität entspricht somit:

$$\frac{\partial Q}{\partial V} = -\frac{2 \cdot A^3 \cdot \epsilon^2 \cdot k}{3 \cdot Q^2 - 2 \cdot A^2 \cdot d_0 \cdot \epsilon \cdot k}$$

Der skizzierte Verlauf sieht demnach wie folgt aus: (es wurden die Parameter aus der voran gegangenen Skizze angewandt)



24 Kugelkondensator mit Dielektrikum

24 Kugelkondensator mit Dielektrikum

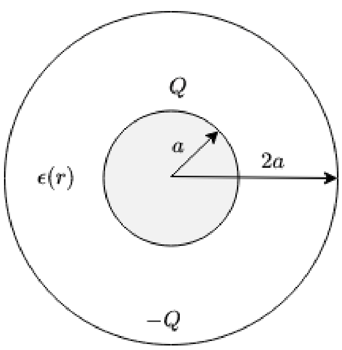
Zwei dünne Metallkugelschalen mit Radius a und $2a$ tragen jeweils die Ladung $+Q$ und $-Q$. Der Zwischenraum ist mit einem Dielektrikum gefüllt, dessen Permittivität vom Radius abhängt: $\epsilon(r) = \epsilon_0\, 2a/(3a - r)$.

(a) Bestimme die elektrische Verschiebungsdichte D_i und die gebundene Ladungsdichte ρ_b zwischen den Kugelschalen.

(b) Berechne damit die Energie im elektrischen Feld $\frac{1}{2}\int D_i E_i\, d^3r$ und zeige, dass diese Anordnung die Kapazität $C = 16\pi\epsilon_0 a/(3 - 2\log 2)$ hat.

(a): 2P, (b): 1P

a)



Für die elektrische Verschiebungsdichte $\boldsymbol{D}$ gilt eine Abwandlung des gauß'schen Gesetzes in Integralform. Diese entspricht:

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = Q_{enclosed}$$

Aus dieser Beziehung kann die elektrische Verschiebungsdichte $\boldsymbol{D}$ ermittelt werden. Nachdem es sich bei der Oberfläche S um eine Kugel handelt (die Oberfläche einer Kugel ist definiert durch $4\pi \cdot \boldsymbol{r}^2$), kann geschrieben werden:

$$\boldsymbol{D} \cdot (4\pi \cdot r^2) = Q_{enclosed}$$

Daraus folgt für die elektrische Verschiebungsdichte$\boldsymbol{D}$:

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q_{enclosed}}{4\pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$$

Darüber hinaus soll die gebundene Ladungsdichte ρ_b ermittelt werden. Diese entspricht der negativen Polarisierung $\boldsymbol{P}$:

$$\rho_b(\boldsymbol{x}) = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

Die Polarisierung $\boldsymbol{P}$ kann aus dem folgenden Zusammenhang für die elektrische Verschiebungsdichte $\boldsymbol{D}$ ermittelt werden:

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$
$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} - \epsilon_0 \cdot \boldsymbol{E}$$

Mit dem zuvor beschriebenen Zusammenhang für die gebundene Ladungsdichte ρ_b folgt:

$$\begin{aligned}\rho_b &= -\nabla(\boldsymbol{D} - \epsilon_0 \cdot \boldsymbol{E}) \\ &= -\nabla\boldsymbol{D} + \epsilon_0 \cdot \nabla\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$ und der elektrischen Verschiebungsdichte $\boldsymbol{D}$ ist definiert durch:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\epsilon}$$

Gemäß der Angabe ist die Permittivität ϵ definiert durch:

$$\epsilon(r) = \frac{\epsilon_o \cdot 2 \cdot a}{3 \cdot a - r}$$

Dadurch folgt für das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q_{enclosed}}{4\pi \cdot r^2} \cdot \frac{3 \cdot a - r}{\epsilon_o \cdot 2 \cdot a} \cdot \vec{e}_r = \frac{Q_{enclosed} \cdot (3 \cdot a - r)}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$ in Kugelkoordinaten ist allgemein definiert als:

$$\nabla\boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial_r}(r^2 \cdot F_r) + \frac{1}{r \cdot \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial_\theta}(F_\theta \cdot \sin\theta) + \frac{1}{r \cdot \sin\theta} \cdot \frac{\partial F_\varphi}{\partial_\varphi}$$

Somit folgt für die Berechnung der gebundenen Ladungsdichte ρ_b :

$$\rho_b = \epsilon_0 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \partial_r(r^2 \cdot \boldsymbol{E}) - \frac{1}{r^2} \cdot \partial_r(r^2 \cdot \boldsymbol{D})$$

Setzt man die Ergebnisse der vorangegangenen Berechnungen für das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ und die elektrische Verschiebungsdichte $\boldsymbol{D}$ ein, folgt:

$$\rho_b = \epsilon_0 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \partial_r\left(\cancel{r^2} \cdot \frac{Q_{enclosed} \cdot (3 \cdot a - r)}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a \cdot \cancel{r^2}}\right) - \frac{1}{r^2} \cdot \partial_r\left(\cancel{r^2} \cdot \frac{Q_{enclosed}}{4\pi \cdot \cancel{r^2}}\right)$$

$$= \epsilon_0 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \partial_r \left(\frac{Q_{enclosed} \cdot (3 \cdot a - r)}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \right) - \underbrace{\frac{1}{r^2} \cdot \partial_r \left(\frac{Q_{enclosed}}{4\pi} \right)}_{=0}$$

Nachdem in dem zweiten Term keine Abhängigkeit von r besteht, ergibt dieser sich bei der Ableitung nach r zu 0 :

$$\rho_b = \epsilon_0 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \partial_r \left(\frac{Q_{enclosed} \cdot (3 \cdot a - r)}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \right) = \cancel{\epsilon_0} \cdot \frac{Q_{enclosed}}{8\pi \cdot \cancel{\epsilon_0} \cdot r^2 \cdot a} \cdot \underbrace{\partial_r (3 \cdot a - r)}_{=-1}$$

Daraus folgt final für die gebundene Ladungsdichte ρ_b:

$$\rho_b = -\frac{Q}{8\pi \cdot r^2 \cdot a}$$

b)

Die Energie U im elektrischen Feld kann gemäß der Angabe über den folgenden Zusammenhang berechnet werden:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int D_i E_i \, d^3 r$$

Durch Einsetzen der Berechnungen aus Unterpunkt a) folgt für die Energie U:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} \cdot \frac{Q \cdot (3 \cdot a - r)}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a \cdot r^2} \, d^3 r$$

Durch die Linearität der Integration folgt:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot \int \frac{3 \cdot a - r}{r^4} \, d^3 r$$

Weiters kann nun für die Volumensintegration einer Kugel eingesetzt werden:

$$dV = r^2 \cdot \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

Damit folgt für die Energie U:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^{2a} \frac{3 \cdot a - r}{r^{\cancel{4}}} \cdot \cancel{r^2} \cdot \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{Q^2}{\cancel{64}^{16} \cdot \pi^{\cancel{2}} \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot \cancel{4} \cancel{\pi} \cdot \int_a^{2a} \frac{3 \cdot a - r}{r^2} \, dr$$

$$= \frac{Q^2}{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot \int_a^{2a} \frac{3 \cdot a - r}{r^2} \, dr$$

Das Integral $\int_a^{2a} \frac{3 \cdot a - r}{r^2} \, dr$ kann separat berechnet werden:

$$\int_a^{2a} \frac{3 \cdot a - r}{r^2} \, dr = \int_a^{2a} \frac{3 \cdot a}{r^2} \, dr - \int_a^{2a} \frac{1}{r} \, dr$$

$$= \left(-\frac{3 \cdot a}{r} \right) \Bigg|_a^{2a} - \ln r \Bigg|_a^{2a}$$

Damit folgt für den Term:

$$\int_a^{2a} \frac{3 \cdot a - r}{r^2} \, dr = \underbrace{-\frac{3 \cdot \cancel{a}}{2 \cdot \cancel{a}} + \frac{3 \cdot \cancel{a}}{\cancel{a}}}_{=-\frac{3}{2}+\frac{6}{2}=\frac{3}{2}} - \underbrace{\ln(2 \cdot a) + \ln(a)}_{=\ln\left(\frac{a}{2 \cdot a}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{3}{2} + \ln \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \ln 2$$

Eingesetzt in die Berechnung der Energie U folgt somit final:

$$U = \frac{Q^2}{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot \left(\frac{3}{2} - \ln 2\right)$$

Im letzten Schritt soll gezeigt werden, dass diese Anordnung die in der Angabe bezeichnete Kapazität hat. Die Kapazität C kann über den folgenden Zusammenhang zwischen der Energie U und der Kapazität C ermittelt werden:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

Damit folgt für die Berechnung der Kapazität C:

$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{U}$$

In diesen Zusammenhang kann nun die voran gegangene Berechnung für die Energie U eingesetzt werden:

$$C = \frac{\cancel{Q^2} \cdot 16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a}{2 \cdot \cancel{Q^2} \cdot (\frac{3}{2} - \ln 2)} = \frac{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a}{2 \cdot (\frac{3}{2} - \ln 2)}$$

Somit wurde gezeigt, dass die Kapazität C dem in der Angabe beschriebenen Term entspricht:

$$C = \frac{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a}{3 - 2 \cdot \ln 2}$$