Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής Πανεπιστημίου Πατρών
CEID-NE509: *Οικονομική Θεωρία & Αλγόριθμοι*
Ακαδημαϊκό Έτος 2022-23
Διδάσκων: Σπύρος Κοντογιάννης

2ο Σετ Ασκήσεων: Ισορροπίες Nash σε Διμητρικά Παιχνίδια

Ανακοίνωση: Κυριακή, 14 Μαΐου 2023 **Παράδοση:** Δευτέρα, 05 Ιουνίου 2023

Τελευταία Ενημέρωση: Κυριακή, 14 Μαΐου 2023

1. Σύνοψη Εργασίας

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η εξοικείωση με την έννοια των (επακριβών ή προσεγγιστικών) ισορροπιών Nash, για στρατηγικά παιχνίδια. Συγκεκριμένα, θα ασχοληθείτε με τεχνικές ανίχνευσης αμιγών ισορροπιών, και τεχνικές εύρεσης ε-προσεγγιστικών ισορροπιών σε διμητρικά παιχνίδια **νίκης-ήττας**, όπου τα μητρώα ωφέλειας έχουν μόνο δυο επιτρεπτές τιμές (0 ή 1) σε κάθε κελί τους: $R, C \in \{0,1\}^{m\times n}$.

Στο πλαίσιο της εργασίας, θα πρέπει:

1. Να υλοποιήσετε μια ρουτίνα ανίχνευσης αμιγών ισορροπιών Nash για γενικά διμητρικά παιχνίδια (όχι απαραίτητα νίκης-ήττας).
2. Να υλοποιήσετε ρουτίνα που αποτιμά την ποιότητα ενός προφίλ στρατηγικών, τόσο ως ε-προσεγγιστικής ισορροπίας Nash (ε-ApproxNE) όσο και ως ε-καλά-στηριγμένης-προσεγγιστικής ισορροπίας (ε-WSNE). Δηλαδή, η ρουτίνα σας θα πρέπει να υπολογίζει σε κάθε περίπτωση την τιμή του ε που εξασφαλίζει το συγκεκριμένο προφίλ στρατηγικών.
3. Να υλοποιήσετε τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις για εύρεση προσεγγιστικών ισορροπιών:
   - Τον αλγόριθμο DMP των Δασκαλάκη, Mehta και Παπαδημητρίου.
   - Τον αλγόριθμο «εκμάθησης» Fictitious Play.
   - Έναν αλγόριθμο που αξιοποιεί την επιλυσιμότητα (σε πολυωνυμικό χρόνο) ισορροπιών Nash για μητρικά παιχνίδια (δλδ, μηδενικού αθροίσματος), που παρουσιάζεται στις διαφάνειες.
4. Να πειραματιστείτε με τις τρεις προαναφερθείσες προσεγγιστικές μεθόδους, για ένα μεγάλο πλήθος παιχνιδιών νίκης-ήττας δίχως αμιγείς ισορροπίες που θα δημιουργήσετε με μια γεννήτρια παραγωγής παιχνιδιών νίκης-ήττας δίχως αμιγείς ισορροπίες, η οποία σας παρέχεται υλοποιημένη, καταγράφοντας και σχολιάζοντας την επίδοση κάθε μεθόδου συγκριτικά και με τις άλλες δύο.

2. Ρουτίνα Ανίχνευσης Αμιγών Ισορροπιών Nash σε Διμητρικά Παιχνίδια

Για τη συγκεκριμένη υλοποίηση ανίχνευσης αμιγών ισορροπιών σε διμητρικά παιχνίδια $(R, C) \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]^{m\times n}$, όχι απαραίτητα νίκης-ήττας, θα πρέπει να βασιστείτε στην τεχνική των εύρεσης αμιγών βέλτιστων αποκρίσεων, σύμφωνα με την οποία:

1. Για κάθε στήλη $j \in [n]$ του μητρώου ωφελειών R, υπολογίζεται το μέγιστο στοιχείο της $maxR[j] = max_{k\in[m]}\{R_{k,j}\}$.
2. Για κάθε γραμμή $i \in [m]$ του μητρώου ωφελειών C, υπολογίζεται το μέγιστο στοιχείο της $maxC[i] = max_{k\in[n]}\{C_{i,k}\}$.

3. Για κάθε δράση (στήλη) $j \in [n]$ του παίκτη στήλης, υπολογίζεται το σύνολο $PBR_{ROW}(j) = \{i \in [m]: R_{i,j} = maxR[j]\}$ των δράσεων (γραμμών) της παίκτριας γραμμής που της εξασφαλίζουν τη μέγιστη δυνατή ωφέλεια ενάντια στη συγκεκριμένη δράση του παίκτη στήλης.
4. Για κάθε δράση (γραμμή) $i \in [m]$ της παίκτριας γραμμής, υπολογίζεται το σύνολο $PBR_{col}(i) = \{j \in [n]: C_{i,j} = maxC[i]\}$ των δράσεων (στηλών) του παίκτη στήλης που του εξασφαλίζουν τη μέγιστη δυνατή ωφέλεια ενάντια στη συγκεκριμένη δράση της παίκτριας γραμμής.
5. Εντοπίζεται, κι επιστρέφεται αν υπάρχει, ζεύγος δράσεων $(i^*, j^*) \in [m] \times [n]: j^* \in PBR_{ROW}(i^*) \wedge i^* \in PBR_{col}(j^*)$. Διαφορετικά, επιστρέφεται το ζεύγος $(0,0)$, προκειμένου να αναφερθεί η ανυπαρξία αμιγούς ισορροπίας Nash στο παιχνίδι.

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ 1: Να κατασκευαστεί ρουτίνα $\boldsymbol{checkForPNE}(m, n, R, C)$ που αναζητά αμιγείς ισορροπίες Nash, σε αυθαίρετο διμητρικό παιχνίδι, (R, C), όχι απαραίτητα νίκης-ήττας).

3. Εξήγηση Γεννήτριας Κατασκευής Διμητρικών Παιχνιδιών Νίκης-Ήττας

Στόχος της συγκεκριμένης γεννήτριας διμητρικών παιχνιδιών νίκης-ήττας, η οποία παρέχεται υλοποιημένη, είναι να δημιουργήσει τυχαία παιχνίδια που όμως δεν έχουν αμιγείς ισορροπίες (οι οποίες μπορούν εύκολα να εντοπιστούν από τη ρουτίνα σας για κατασκευή αμιγών ισορροπιών, οπότε εκλαμβάνονται ως «εύκολα» παιχνίδια από υπολογιστικής άποψης). Συγκεκριμένα, τα τυχαία παιχνίδια που δημιουργούνται είναι τέτοια ώστε να εξασφαλίζεται ότι:

- <u>Δεν υπάρχει</u> προφίλ δράσεων $(i, j) \in [m] \times [n]$ για το οποίο να ισχύει ότι $R_{i,j} = C_{i,j} = 1$. Δηλαδή, στο διμητρώο (bimatrix) του παιχνιδιού δεν υπάρχει κανένα (1,1)-στοιχείο, καθώς θα ήταν τετριμμένη ισορροπία Nash.
- Για κάθε **γραμμή** $i \in [m]$, ισχύει ότι υπάρχει στήλη $j \in [n]$ τέτοια ώστε να ισχύει ότι $R_{i,j} = 1 - C_{i,j} = 0$. Δηλαδή, κάθε γραμμή του διμητρώο έχει τουλάχιστον ένα (0,1)-στοιχείο.
- Για κάθε **στήλη** $j \in [n]$, ισχύει ότι υπάρχει γραμμή $i \in [m]$ τέτοια ώστε να ισχύει ότι $R_{i,j} = 1 - C_{i,j} = 1$. Δηλαδή, κάθε στήλη j του διμητρώο έχει τουλάχιστον ένα (1,0)-στοιχείο.
- Στο διμητρώο, υπάρχουν ακριβώς G_{10} (1,0)-στοιχεία (επωφελή για τον παίκτη γραμμής), και ακριβώς G_{01} (0,1)-στοιχεία (επωφελή για τον παίκτη στήλης).
- Όλα τα (1,0)-στοιχεία του διπίνακα εμφανίζονται από την γραμμή $earliestRowFor10 \in [m]$ και δεξιά.
- Όλα τα (0,1)-στοιχεία του διπίνακα εμφανίζονται από τη στήλη $earliestColFor01 \in [n]$ και κάτω.

Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου παιχνιδιού, σε αναπαράσταση του διμητρώου του, είναι το εξής (για $\mathrm{m} = \mathrm{n} = 10, \mathrm{G}_{10} = \mathrm{G}_{10} = 30, earliestRowFor10 = earliestColFor01 = 4$):

```
==========================================================================
[ (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,1) | (0,1) | (0,1) | (0,1) | (0,1) | (0,0) ]
--------------------------------------------------------------------------
[ (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,1) ]
--------------------------------------------------------------------------
[ (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,1) | (0,0) | (0,1) | (0,1) ]
--------------------------------------------------------------------------
[ (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,1) | (0,1) | (0,0) | (0,0) | (0,1) | (0,0) ]
--------------------------------------------------------------------------
[ (1,0) | (1,0) | (1,0) | (0,0) | (0,1) | (0,1) | (1,0) | (0,1) | (0,1) | (0,1) ]
--------------------------------------------------------------------------
[ (0,0) | (1,0) | (1,0) | (0,0) | (0,1) | (1,0) | (0,1) | (1,0) | (0,1) | (1,0) ]
--------------------------------------------------------------------------
[ (1,0) | (1,0) | (1,0) | (1,0) | (0,1) | (0,0) | (1,0) | (1,0) | (0,1) | (1,0) ]
--------------------------------------------------------------------------
[ (1,0) | (1,0) | (1,0) | (1,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,1) | (0,1) ]
--------------------------------------------------------------------------
[ (1,0) | (0,0) | (0,0) | (1,0) | (0,1) | (0,1) | (1,0) | (1,0) | (1,0) | (0,1) ]
--------------------------------------------------------------------------
[ (0,0) | (1,0) | (0,0) | (1,0) | (1,0) | (0,1) | (0,1) | (0,1) | (1,0) | (1,0) ]
==========================================================================
```

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ ΘΕ1 (ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΩΝ): Να αποδειχθεί ότι τα παιχνίδια που δημιουργεί η συγκεκριμένη γεννήτρια δεν έχουν καμιά ισορροπία Nash στην οποία έστω κι ένας εκ των δύο παικτών επιλέγει αμιγή στρατηγική. Συγκεκριμένα, θεωρήστε προφίλ στρατηγικών $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ τέτοιο ώστε (χβτγ) για την παίκτρια γραμμής ισχύει: $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{e_1}$ (δηλαδή, η παίκτρια γραμμής διαλέγει με βεβαιότητα την πρώτη γραμμή), ενώ $\text{support}(\bar{\mathbf{y}}) = \{1,2,\dots,k\}$, για κάποιο $k \geq 1$ (δηλαδή, ο παίκτης στήλης «μιξάρει» μεταξύ των πρώτων k στηλών). Δείξτε ότι:

ΘΕ1.1: AN $\bar{\mathbf{x}}^T R \bar{\mathbf{y}} = 0$ TOTE η παίκτρια γραμμής δεν είναι σε κατάσταση ισορροπίας. Δηλαδή, υπάρχει γραμμή που δίνει αποδεδειγμένα θετικό όφελος ενάντια στο $\bar{\mathbf{y}}$).

ΘΕ1.2: AN $\bar{\mathbf{x}}^T R \bar{\mathbf{y}} > 0$ TOTE ο παίκτης στήλης δεν είναι σε κατάσταση ισορροπίας. Δηλαδή, ο παίκτης στήλης μπορεί να βρει καλύτερη στρατηγική ενάντια στη στρατηγική $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{e_1}$ της αντιπάλου.

<u>Υπόδειξη:</u> Θυμηθείτε ότι στο διμητρώο υπάρχουν μόνο (1,0)-στοιχεία, (0,1)-στοιχεία και (0,0)-στοιχεία, ενώ σε κάθε γραμμή του υπάρχει τουλάχιστον ένα (0,1)-στοιχείο και σε κάθε στήλη υπάρχει τουλάχιστον ένα (1,0)-στοιχείο. Τι σημαίνει αυτό όταν η παίκτρια γραμμής έχει μηδενική ωφέλεια από το συγκεκριμένο προφίλ? Πώς μπορεί να τα πάει καλύτερα? Και τι σημαίνει αυτό για τον παίκτη στήλης, όταν η παίκτρια γραμμής έχει ΘΕΤΙΚΗ ωφέλεια επιλέγοντας αμιγώς τη γραμμή 1? Τι πρέπει να κάνει για να βρει ακόμη μεγαλύτερη ωφέλεια από $\bar{\mathbf{x}}^T C \bar{\mathbf{y}}$?

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΩΝ ΝΙΚΗΣ-ΗΤΤΑΣ ΔΙΧΩΣ ΑΜΙΓΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΕΣ: Μια μορφή της γεννήτριας τυχαίων διμητρικών παιχνιδιών νίκης-ήττας <u>παρέχεται έτοιμη</u> στο πρότυπο της άσκησης (βλ. ρουτίνα **generate_winlose_game_without_pne**).

Ως είσοδο, η συγκεκριμένη ρουτίνα δέχεται τα εξής:

- Πλήθος δράσεων ανά παίκτη/τρια, δηλαδή, τις τιμές των παραμέτρων $m, n \in \{2,3,\dots,10\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, εξασφαλίστε (ζητώντας το από τους χρήστες) ότι $m \leq n$.
- G_{10} = Πλήθος (1,0)-στοιχείων στο διμητρώο (R, C) που είναι επωφελή για την παίκτρια γραμμής.
- G_{01} = Πλήθος (0,1)-στοιχείων στο διμητρώο (R, C) που είναι επωφελή για τον παίκτη στήλης.

Θα πρέπει να ισχύει ότι $n \leq G_{10} \leq m \cdot n - m$ και $m \leq G_{01} \leq m \cdot n - n$, αφού ζητάμε τουλάχιστον ένα επωφελές στοιχείο για την παίκτρια γραμμής ανά στήλη που μπορεί να επιλέξει ο παίκτης στήλης, αλλά και τουλάχιστον ένα επωφελές στοιχείο για τον παίκτη στήλης ανά γραμμή που μπορεί να επιλέξει η παίκτρια στήλης. Θα πρέπει επίσης να ισχύει ότι τα υπόλοιπα στοιχεία του διμητρώου είναι (0,0)-στοιχεία: $G_{00} = m \cdot n - G_{01} - G_{10} \geq 0$.

Προκειμένου να αποφευχθούν άσκοπες επαναλήψεις ουσιαστικά πανομοιότυπων παιχνιδιών, θεωρούμε επίσης τις εξής βοηθητικές μεταβλητές εισόδου της διαδικασίας:

- $earliestColFor01 \in [n]$: Η πρώτη στήλη (στο διμητρώο) όπου εμφανίζεται (0,1)-στοιχείο.
- $earliestRowFor10 \in [m]$: Η πρώτη γραμμή (στο διμητρώο) όπου εμφανίζεται (1,0)-στοιχείο.

Θα πρέπει να ισχύει ότι $G_{10} \leq (m - earliestRowFor10 + 1) \cdot n$ και $G_{01} \leq m \cdot (n - earliestColFor01)$.

Στην έξοδο δημιουργούνται, εντελώς τυχαία, επιτρεπτά $m \times n$ παιχνίδια νίκης-ήττας με ακριβώς G_{00} (0,0)-στοιχεία, G_{01} (0,1)-στοιχεία, και G_{10} (1,0)-στοιχεία. Καθένα από αυτά τα παιχνίδια αναπαρίσταται μέσω των δύο μητρώων ωφέλειας R και C για τους δύο παίκτες, τα οποία και επιστρέφονται από τη γεννήτρια.

Τα βασικά βήματα της υλοποίησης είναι τα εξής:

STEP 1: Randomly choose m 01-elements, one per row, within the **01-eligible area** $[0{:}m] \times [earliestColFor01s{:}n]$ of the bimatrix.

STEP 2: Randomly choose (with no repetitions) $G_{01} - m$ 01-elements within the **01-eligible area** $[0{:}m] \times [earliestColFor01s{:}n]$ of the bimatrix, <u>different</u> from those cells chosen in STEP 1.

STEP 3: Randomly choose n 10-elements, one per column, within the **10-eligible area** $[earliestRowFor10s{:}m] \times [0{:}n]$ of the bimatrix. They should be <u>different</u> from those cells chosen in STEPS 1+2.

STEP 4: Randomly choose (with no repetitions) $G_{10} - n$ 10-elements within the **10-eligible area** $[earliestRowFor10s{:}m] \times [0{:}n]$ of the bimatrix, <u>different</u> from those cells chosen in STEP 1+2+3.

4. Ρουτίνα Αποτίμησης Προσεγγιστικών Ισορροπιών

Δεδομένου ενός $m \times n$ διμητρικού παιχνιδιού (όχι απαραίτητα νίκης-ήττας), $(R, C) \in \mathbf{R}^{m\times n} \times \mathbf{R}^{m\times n}$, κι ενός συγκεκριμένου προφίλ στρατηγικών $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta_m \times \Delta_n$, ζητείται να υλοποιήσετε το εξής:

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ 2: Να κατασκευαστεί ρουτίνα $\boldsymbol{computeApproximationGuarantees}(m, n, R, C, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ που υπολογίζει τις <u>ελάχιστες τιμές</u> $\varepsilon_{approx} > 0$ και $\varepsilon_{wsne} > 0$ τέτοιες ώστε να ισχύει ότι $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in ApproxNE(R, C, \varepsilon_{approx})$ και $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in WSNE(R, C, \varepsilon_{wsne})$.

<u>Υπόδειξη:</u> Υπενθυμίζεται ότι

- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in ApproxNE(R, C, \varepsilon_{approx}) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}^T R\mathbf{y} \geq max_{i\in[m]}\{(R\mathbf{y})_i\} - \varepsilon_{approx} \\ \mathbf{x}^T C\mathbf{y} \geq max_{j\in[n]}\{(C^T\mathbf{x})_j\} - \varepsilon_{approx} \end{cases}$

- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in WSNE(R, C, \varepsilon_{wsne}) \Rightarrow \begin{cases} min_{i\in \mathrm{support}(\mathbf{x})}\{(R\mathbf{y})_i\} \geq max_{i\in[m]}\{(R\mathbf{y})_i\} - \varepsilon_{wsne} \\ min_{j\in \mathrm{support}(\mathbf{y})}\{(C^T\mathbf{x})_j\} \geq max_{j\in[n]}\{(C^T\mathbf{x})_j\} - \varepsilon_{wsne} \end{cases}$

5. Αποκλεισμός Ισχυρά Κυριαρχούμενων Δράσεων

Στο σημείο αυτό θεωρείται ότι ως είσοδο δεχόμαστε κάποιο διμητρικό παιχνίδι νίκης-ήττας που δημιουργήθηκε από τη γεννήτρια τυχαίων παιχνιδιών που περιγράφηκε νωρίτερα. Ζητούμενο είναι ο εντοπισμός και η διαγραφή όλων των γραμμών και στηλών του διμητρώου που δεν έχουν θετική μάζα πιθανότητας για την επιλογή τους, σε καμιά ισορροπία Nash του παιχνιδιού. Το ακόλουθο θεωρητικό ερώτημα διευκρινίζει ποιες είναι αυτές οι γραμμές και στήλες του διμητρώου, ενώ το ζητούμενο υλοποίησης είναι η δημιουργία ενός μικρότερου διμητρικού παιχνιδιού, δίχως αυτές τις ουσιαστικά «άχρηστες» γραμμές και στήλες.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ ΘΕ2 (ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΑΥΣΤΗΡΑ ΚΥΡΙΑΡΧΟΥΜΕΝΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ): Να αποδειχθεί, για οποιοδήποτε διμητρικό παιχνίδι (R, C) που παράγεται από τη γεννήτρια παιχνιδιών που κατασκευάσατε, ότι:

ΘΕ2.1: Για οποιαδήποτε δράση $i \in [m]$ για την οποία ισχύει ότι $R[i,j] = 0, \forall j \in [n]$, η αμιγής στρατηγική $\mathbf{e_i} \in \Delta_m$ της παίκτριας γραμμής που επιλέγει τη συγκεκριμένη δράση κυριαρχείται ΙΣΧΥΡΑ από κάποια στρατηγική $\mathbf{x} \in \Delta_m$ (όχι απαραίτητα αμιγή, όμως).

ΘΕ2.2: Για οποιαδήποτε δράση $j \in [n]$ για την οποία ισχύει ότι $C[i,j] = 0, \forall i \in [m]$, η αμιγής στρατηγική $\mathbf{e_j} \in \Delta_n$ του παίκτη στήλης που επιλέγει τη συγκεκριμένη δράση κυριαρχείται ΙΣΧΥΡΑ από κάποια στρατηγική $\mathbf{y} \in \Delta_n$ (όχι απαραίτητα αμιγή, όμως).

Σημείωση: Αρκεί να δείξετε το ΘΕ2.1, η απόδειξη για το ΘΕ2.2 είναι απολύτως συμμετρική.

Με βάση το παραπάνω θεωρητικό αποτέλεσμα, ζητείται το εξής:

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ 3: Να κατασκευαστεί ρουτίνα $\boldsymbol{deleteStrictlyDominatedActions}(m, n, R, C)$ που διαγράφει από το διμητρώο (R, C) το οποίο παράχθηκε από τη γεννήτρια τυχαίων διμητρικών παιχνιδιών νίκης-ήττας όλες τις δράσεις των δύο παικτών που κυριαρχούνται ισχυρά από κάποια (ακόμη και μεικτή) στρατηγική καθενός από τους δύο παίκτες.

6. Αλγόριθμοι Κατασκευής Προσεγγιστικών Ισορροπιών Nash

Στο συγκεκριμένο βήμα καλείστε να υλοποιήσετε τους αλγορίθμους DMP, FictitiousPlay (FP), και DEL, προκειμένου να εντοπίζετε προσεγγιστικές ισορροπίες σε παιχνίδια που παράγονται από τη γεννήτρια τυχαίων διμητρικών παιχνιδιών νίκης-ήττας. Οι ρουτίνες που θα δημιουργήσετε, μία για κάθε αλγόριθμο, θα πρέπει να δέχεται ως είσοδο την περιγραφή (m, n, R, C) του παιχνιδιού, και να επιστρέφει ως έξοδο μια προσεγγιστική ισορροπία του παιχνιδιού. Παρουσιάζονται οι ψευδοκώδικες που καλείστε να υλοποιήσετε, όπως συζητήθηκαν διεξοδικά και στις διαλέξεις του μαθήματος.

Αλγόριθμος DMP

Πρόκειται για έναν ιδιαίτερα απλό κι εύχρηστο αλγόριθμο, που εγγυάται 0.5-προσεγγιστικές ισορροπίες, για αυθαίρετα κανονικοποιημένα διμητρικά παιχνίδια. Ακολουθεί ο ψευδοκώδικάς του, όπως παρουσιάστηκε και στο πλαίσιο του μαθήματος.

algorithm	$DMP(R, C, m, n)$
ΕΙΣΟΔΟΣ:	$m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq 1.\ (R, C) \in [0,1]^{m \times n}$.
ΕΞΟΔΟΣ:	$(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \in ApproxNE(R, C, \epsilon = 0.5)$.
1.	Ο παίκτης γραμμής επιλέγει αυθαίρετη δράση $s \in [m]$.
2.	Ο παίκτης στήλης επιλέγει αμιγή βέλτιστη απόκριση t στο s: $t \in \arg\max_{j \in [n]} \{C_{s,j}\}$.
3.	Ο παίκτης γραμμής επιλέγει μια αμιγή βέλτιστη απόκριση r στο t: $r \in \arg\max_{i \in [m]} \{R_{r,t}\}$.
4.	**return** $\left(\tilde{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{e_s} + \mathbf{e_r}}{2}, \tilde{\mathbf{y}} := \mathbf{e_t}\right)$

Αλγόριθμος DEL

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος, που προτάθηκε στη διδακτορική διατριβή του Αργύρη Δελίγκα (2016), εγγυάται **0.667-καλά-στηριγμένες προσεγγιστικές ισορροπίες**, για αυθαίρετα κανονικοποιημένα διμητρικά παιχνίδια. Ακολουθεί ο ψευδοκώδικάς του, όπως παρουσιάστηκε και στο πλαίσιο του μαθήματος.

algorithm	$DEL(R, C, m, n)$
ΕΙΣΟΔΟΣ:	$m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq 1.\ (R, C) \in [0, 1]^{m \times n}$.
ΕΞΟΔΟΣ:	$(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \in WSNE(R, C, \epsilon = 0.667)$.
/* ΑΡΧΙΚΟΠΟΙΗΣΗ: Υπολογισμός MAXMIN στρατηγικών και εγγυημένων ωφελειών για τους δύο παίκτες */	
A.1.	$(\mathbf{x}_{row}, \mathbf{y}_{row}) \in NASH(R, -R)$. /* $\mathbf{x}_{row}$ είναι η MAXMIN στρατηγική της παίκτριας γραμμής. */
A.2.	$V_{row} = \mathbf{x}_{row}{}^T R \mathbf{y}_{row}$. /* V_{row} είναι η εγγυημένη ωφέλεια της παίκτριας γραμμής. */
A.3.	$(\mathbf{x}_{col}, \mathbf{y}_{col}) \in NASH(-C, C)$. /* $\mathbf{y}_{col}$ είναι η MAXMIN στρατηγική του παίκτη στήλης. */
A.4.	$V_{col} = \mathbf{x}_{col}{}^T C \mathbf{y}_{col}$. /* V_{col} είναι η εγγυημένη ωφέλεια του παίκτη στήλης. */
A.5.	**if** $V_{row} < V_{col}$ **then** αντάλλαξε ρόλους των δύο παικτών. /* Στο εξής (χβτγ): $V_{row} \geq V_{col}$. */
/* ΣΕΝΑΡΙΟ 1: Κανένας παίκτης δεν έχει εγγυημένη ωφέλεια μεγαλύτερη από $2/3$ */	
Σ1.1.	**if** $V_{row} \leq 2/3$
Σ1.2.	**then return** $(\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{col}, \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_{row})$
/* ΣΕΝΑΡΙΟ 2: Εγγυημένη ωφέλεια $> 2/3$ για παίκτρια γραμμής, αλλά ο παίκτης στήλης δεν βρίσκει ωφέλεια $> 2/3$ ενάντια στο $\mathbf{x}_{row}$ */	
Σ2.1.	**else** **if** $max(\mathbf{x}_{row}{}^T C) \leq 2/3$ /* δεδομένου ότι $V_{row} > 2/3$ */
Σ2.2.	**then return** $(\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{row}, \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_{row})$
/* ΣΕΝΑΡΙΟ 3: Η παίκτρια γραμμής έχει εγγυημένη ωφέλεια $> 2/3$ και ο παίκτης στήλης βρίσκει ωφέλεια $> 2/3$ ενάντια στο $\mathbf{x}_{row}$ */	
Σ3.1.	**else** :
Σ3.2.	Βρες $j^* \in PBR(\mathbf{x}_{row}{}^T C)$
Σ3.3.	Βρες $i^* \in [m] : R_{i^*, j^*} > 1/3 \wedge C_{i^*, j^*} > 1/3$
Σ3.4.	**return** $(\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_{i^*}, \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{e}_{j^*})$

Σημειώνεται ότι για την επίλυση αυθαίρετων (όχι απαραίτητα κανονικοποιημένων) $m \times n$ μητρικών παιχνιδιών $(A, -A)$, παρέχεται στο πρότυπο της εργασίας η ρουτίνα **solveZeroSumGame(m,n,A)**.

Αλγόριθμος FP

Ο τελευταίος προσεγγιστικός αλγόριθμος για ισορροπίες Nash που θα μας απασχολήσει είναι ο FICTITIOUS PLAY. Θα υλοποιήσετε δύο παραλλαγές του.

- **FPPBR**: Η συγκεκριμένη παραλλαγή θεωρεί ότι στην εκκίνηση (βήματα 1 και 2) αλλά και σε κάθε επανάληψη του βρόχου (βήματα 3.1 και 3.3) ο αλγόριθμος δίνει «ψήφο εμπιστοσύνης» σε **μόνο σε μια αμιγή βέλτιστη απόκριση** (στην αμιγή βέλτιστη απόκριση που αντιστοιχεί στη γραμμή / στήλη με τον μικρότερο δείκτη):

algorithm	$FP_{PBR}(R, C, m, n)$
ΕΙΣΟΔΟΣ:	$m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq 2.\ (R, C) \in [0, 1]^{m \times n}$
	$T \in \mathbb{N} : T \geq 1$ /* πλήθος επαναλήψεων */
ΕΞΟΔΟΣ:	$(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \in ApproxNE(R, C, \epsilon)$, για κάποιο (μικρό;) $\epsilon > 0$
1.	$\chi(1) = \mathbf{x}(1) := \mathbf{e}_1$ /* αμιγής στρατηγική εκκίνησης για παίκτρια γραμμής */
2.	$\psi(1) = \mathbf{y}(1) := \mathbf{e}_1$ /* αμιγής στρατηγική εκκίνησης για παίκτη στήλης */
3.	**for** $t = 2$ **to** $T \in \mathbb{N}$ **do** :
/* ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΠΑΙΚΤΡΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ: Αμιγείς βέλτιστες αποκρίσεις ενάντια στις στρατηγικές του αντιπάλου */	
3.1.	$\mathbf{x}(t) \in PBR_{ROW}(R \cdot \psi(t-1))$ /* επίλυση ισοπαλιών υπέρ γραμμών με μικρότερο δείκτη */
3.2.	$\chi(t) := \frac{1}{t} \cdot ((t-1) \cdot \chi(t-1) + \mathbf{x}(t))$ /* $\chi(t) = \frac{1}{t} \cdot \sum_{k=1}^{t} \mathbf{x}(k)$ */
/* ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΠΑΙΚΤΗ ΣΤΗΛΗΣ: Αμιγείς βέλτιστες αποκρίσεις ενάντια στις στρατηγικές της αντιπάλου */	
3.3.	$\mathbf{y}(t) \in PBR_{col}(C^T \cdot \chi(t-1))$ /* επίλυση ισοπαλιών υπέρ στηλών με μικρότερο δείκτη */
3.4.	$\psi(t) := \frac{1}{t} \cdot ((t-1) \cdot \psi(t-1) + \mathbf{y}(t))$ /* $\psi(t) = \frac{1}{t} \cdot \sum_{k=1}^{t} \mathbf{y}(k)$ */
/* ΑΝΤΑΛΛΑΓΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΑΙΚΤΩΝ (δεν χρειάζεται να υλοποιηθεί) */	
3.5.	Η παίκτρια γραμμής αποστέλλει το $\chi(t)$ στον παίκτη στήλης.
3.6.	Ο παίκτης στήλης αποστέλλει το $\psi(t)$ στην παίκτρια γραμμής.
4.	**return** $(\tilde{\mathbf{x}} := \chi(T), \tilde{\mathbf{y}} := \psi(T))$

- **FPUNIFORM**: Η συγκεκριμένη παραλλαγή θεωρεί ότι στην εκκίνηση (βήματα 1 και 2) αλλά και σε κάθε επανάληψη του βρόχου (βήματα 3.1 και 3.3) ο αλγόριθμος δίνει «ψήφο εμπιστοσύνης» σε μια κατανομή πιθανότητας που αναθέτει ακριβώς την **ίδια μάζα πιθανότητας σε όλες τις δράσεις που χρησιμοποιεί**:

algorithm $FP_{UNIFORM}(R, C, m, n)$

ΕΙΣΟΔΟΣ: $m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq 2.\ (R, C) \in [0, 1]^{m \times n}$

$T \in \mathbb{N} : T \geq 1$ /* πλήθος επαναλήψεων */

ΕΞΟΔΟΣ: $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \in ApproxNE(R, C, \epsilon)$, για κάποιο (μικρό;) $\epsilon > 0$

1. $\chi(1) = \mathbf{x}(1) := \frac{1}{m}\mathbf{1_m}$ /* ομοιόμορφη στρατηγική εκκίνησης για παίκτρια γραμμής */

2. $\psi(1) = \mathbf{y}(1) := \frac{1}{n}\mathbf{1_n}$ /* ομοιόμορφη στρατηγική εκκίνησης για παίκτη στήλης */

3. **for** $t = 2$ **to** $T \in \mathbb{N}$ **do** :

/* ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΠΑΙΚΤΡΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ: Ομοιόμορφες βέλτιστες αποκρίσεις ενάντια στις στρατηγικές του αντιπάλου */

3.1. $\mathbf{x}(t) := \frac{1}{|PBR_{ROW}(R \cdot \psi(t-1))|} \cdot \left(\mathcal{E}_{i \in PBR_{ROW}(R \cdot \psi(t-1))}\right)_{i \in [m]}$

3.2. $\chi(t) := \frac{1}{t} \cdot ((t-1) \cdot \chi(t-1) + \mathbf{x}(t))$ /* $\chi(t) = \frac{1}{t} \cdot \sum_{k=1}^{t} \mathbf{x}(k)$ */

/* ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΠΑΙΚΤΗ ΣΤΗΛΗΣ: Ομοιόμορφες βέλτιστες αποκρίσεις ενάντια στις στρατηγικές της αντιπάλου */

3.3. $\mathbf{y}(t) := \frac{1}{|PBR_{col}(C^T \chi(t-1))|} \cdot \left(\mathcal{E}_{j \in PBR_{col}(C^T \cdot \chi(t-1))}\right)_{j \in [n]}$

3.4. $\psi(t) := \frac{1}{t} \cdot ((t-1) \cdot \psi(t-1) + \mathbf{y}(t))$ /* $\psi(t) = \frac{1}{t} \cdot \sum_{k=1}^{t} \mathbf{y}(k)$ */

/* ΑΝΤΑΛΛΑΓΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΑΙΚΤΩΝ (δεν χρειάζεται να υλοποιηθεί) */

3.5. Η παίκτρια γραμμής αποστέλλει το $\chi(t)$ στον παίκτη στήλης.

3.6. Ο παίκτης στήλης αποστέλλει το $\psi(t)$ στην παίκτρια γραμμής.

4. **return** $(\tilde{\mathbf{x}} := \chi(T), \tilde{\mathbf{y}} := \psi(T))$

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ 4: Να κατασκευαστούν ρουτίνες για τους εξής αλγορίθμους εύρεσης προσεγγιστικών ισορροπιών Nash.

- $\boldsymbol{approxNEconstructionDMP}(m, n, R, C)$
- $\boldsymbol{approxNEconstructionFP}(m, n, R, C)$
- $\boldsymbol{approxNEconstructionDEL}(m, n, R, C)$

Οι ρουτίνες αυτές θα δέχονται ως είσοδο την περιγραφή $(R, C, m, n,)$ ενός διμητρώου (πχ, που παράχθηκε από τη γεννήτρια τυχαίων διμητρικών παιχνιδιών νίκης-ήττας), και θα επιστρέφουν ως έξοδο την πλειάδα $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon_{approx}, \varepsilon_{wsne})$, δηλαδή, ένα προφίλ στρατηγικών και τις δυο τιμές προσέγγισης όπως αυτές υπολογίζονται από τη δική σας ρουτίνα υπολογισμού εγγυήσεων προσέγγισης.

7. Πειραματική Αξιολόγηση

Σε αυτό το τελικό βήμα της εργασίας σας, καλείστε να εκτελέσετε ορισμένα εκτενή πειράματα με 10×10 παιχνίδια που παράγει η γεννήτρια τυχαίων διμητρικών παιχνιδιών νίκης-ήττας, επιτρέποντας μη-(0,0)-στοιχεία σε όλες τις γραμμές και στήλες του διμητρώου (δηλαδή, για $earliestRowFor10 = earliestColFor01 = 0$), προκειμένου να συγκρίνετε τις επιδόσεις των τριών προσεγγιστικών αλγορίθμων DMP,FP και DEL που υλοποιήσατε, στην εύρεση προσεγγιστικών ισορροπιών. Σε κάθε πείραμα που θα υλοποιήσετε, θα χρησιμοποιήσετε (τα ίδια και για τους τρεις αλγορίθμους) τυχαία παιχνίδια νίκης-ήττας, για καθένα από τα οποία θα υπολογίζετε τις προσεγγιστικές ισορροπίες που δίνουν οι τρεις αλγόριθμοι, ενώ θα καταγράφετε (σε ένα μητρώο για τη μετέπειτα παραγωγή ιστογράμματος), ανά αλγόριθμο, το πλήθος των παιχνιδιών με προσέγγιση ε_{approx} και ε_{wsne} σε καθένα από τα διαστήματα [0,0.1), [0.1,0.2), [0.2,0.3),… [0.8,0.9), [0.9,1.0].

Επίσης, σε κάθε πείραμα ξεχωριστά, θα πρέπει να αποθηκεύετε σε αρχεία τα μητρώα (R,C) των παιχνιδιών με τις 2 χειρότερες (δλδ, μεγαλύτερες) επιδόσεις προσέγγισης.

- **ΠΕΙΡΑΜΑ Π1:** $P = 1000$ 10x10 παιχνίδια νίκης-ήττας, με $G_{10} = 20$ και $G_{01} = 20$.
- **ΠΕΙΡΑΜΑ Π2:** $P = 1000$ 10x10 παιχνίδια νίκης-ήττας, με $G_{10} = 20$ και $G_{01} = 50$.
- **ΠΕΙΡΑΜΑ Π3:** $P = 1000$ 10x10 παιχνίδια νίκης-ήττας, $\mu\varepsilon G_{10} = 20$ και $G_{01} = 70$.
- **ΠΕΙΡΑΜΑ Π4:** $P = 1000$ 10x10 παιχνίδια νίκης-ήττας, $\mu\varepsilon G_{10} = 35$ και $G_{01} = 35$.

Προκειμένου να είναι οργανωμένη η πληροφορία που παράγεται από την πειραματική σας αξιολόγηση, θα πρέπει (από τον βασικό κατάλογο του κώδικά σας) να δημιουργήσετε την εξής δομή καταλόγων:

- ./EXPERIMENTS/P1

- ./EXPERIMENTS/P2
- ./EXPERIMENTS/P3
- ./EXPERIMENTS/P4

Σε κάθε υποφάκελο ./EXPERIMENTS/Pk θα αποθηκεύσετε τα εξής, για κάθε αλγόριθμο προσέγγισης $ALG \in \{DMP, DEL, FPPBR, FPUNIFORM\}$:

- Δύο αρχεία PkALGApproxNEHistogram και PkALGWSNEHistogram για τα 10×1 μητρώα (ένα για κάθε μετρική προσέγγισης) με τα δεδομένα προσέγγισης, όπου σε κάθε κελί του εκάστοτε μητρώου αποθηκεύεται το ΠΛΗΘΟΣ των παιχνιδιών που έλαβαν εγγύηση προσέγγισης στο κατάλληλο διάστημα. Πχ, στο PkDMPApproxNEHistogram[0] αποθηκεύεται το πλήθος των παιχνιδιών για τα οποία ο αλγόριθμος DMP εντόπισε προσεγγιστική ισορροπία $\varepsilon_{approx} < 0.1$, ενώ στο PkDMPWSNEHistogram[3] αποθηκεύεται το πλήθος των παιχνιδιών για τα οποία ο αλγόριθμος DMP εντόπισε προσεγγιστική ισορροπία $0.2 \leq \varepsilon_{wsne} < 0.3$.
- Δυο εικόνες PkALGApproxNEHistogram.jpg και PkALGWSNEHistogram.jpg που οπτικοποιούν τα αντίστοιχα ιστογράμματα.
- Τέσσερα αρχεία (για τα 2 χειρότερα παιχνίδια) με την εξής ονοματολογία:
  - PkALGApproxNEWorstGame1ROW, PkALGApproxNEWorstGame1COL
  - PkALGApproxNEWorstGame2ROW, PkALGApproxNEWorstGame2COL

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ 5: Να κατασκευαστεί ρουτίνα για την επιλογή και την εκτέλεση καθενός από τα προαναφερθέντα πειράματα, δίνοντας στον χρήστη τη δυνατότητα να επιλέγει ποιο ακριβώς πείραμα θέλει να εκτελέσει, καθώς επίσης και όλες τις απαιτούμενες παραμέτρους $(m, n, G_{10}, G_{01}, numRandomGamesToSolve)$. Κάθε πείραμα θα αποθηκεύει στον κατάλληλο κατάλογο τα ζητούμενα αποτελέσματα (αριθμητικές τιμές και εικόνες ιστογραμμάτων, καθώς και τα χειρότερα παιχνίδια που εντοπίστηκαν για κάθε αλγόριθμο).

8. Λεπτομέρειες Υλοποίησης

Κύριο Πρόγραμμα Εργασίας

Το κύριο πρόγραμμά σας θα δίνει την επιλογή στους χρήστες:

1. Να «φορτώνουν» ένα αυθαίρετο διμητρικό παιχνίδι (R, C) από δύο αρχεία, στα οποία είναι αποθηκευμένα τα μητρώα ωφέλειας R και C. Τα ονόματα των συγκεκριμένων αρχείων θα παρέχονται από τους χρήστες του προγράμματός σας. Τα μητρώα ωφέλειας που θα δημιουργηθούν θα είναι σε τύπο δεδομένων **numpy array**.
2. Να «αποθηκεύουν» ένα διμητρικό παιχνίδι (R, C) σε δύο αρχεία, ένα για κάθε τα μητρώα ωφέλειας R και C (τα οποία θα είναι σε τύπο δεδομένων **numpy array**). Τα ονόματα των συγκεκριμένων αρχείων θα παρέχονται από τους χρήστες του προγράμματός σας.
3. Να ανιχνεύουν αν υπάρχει αμιγής ισορροπία Nash, σε ένα ήδη γνωστό στο πρόγραμμά σας διμητρικό παιχνίδι (R, C).
4. Να εκτελούν κάποιον από τους τρεις αλγορίθμους επίλυσης σε ένα γνωστό στο πρόγραμμά σας διμητρικό παιχνίδι (R, C).
5. Να εκτελούν ένα μαζικό πείραμα, για ένα συγκεκριμένο μέγεθος παιχνιδιού (οι τιμές των m, n θα καθορίζονται από τους χρήστες), για συγκεκριμένο πλήθος τυχαίων παιχνιδιών (η τιμή της μεταβλητής $numRandomGamesToSolve$ θα καθορίζεται από τους χρήστες), που θα χρησιμοποιεί είτε έναν από τους τρεις προσεγγιστικούς αλγορίθμους (οι χρήστες θα μπορούν να προσδιορίσουν ποιον), είτε και τους τέσσερεις προσεγγιστικούς αλγορίθμους (DMP, DEL, FPPBR, FPUNIVOFM) ταυτόχρονα. Θα πρέπει να

καταγράφεται, για κάθε παιχνίδι και για κάθε αλγόριθμο προσέγγισης ξεχωριστά, η πλειάδα $(e_{approx}, e_{wsne}, runtime)$, και να **αποθηκεύονται** (τελικά) τα δύο χειρότερα παιχνίδια ανά αλγόριθμο (ένα για κάθε τύπο προσέγγισης). Θεωρήστε πάντοτε $earliestRowFor10 = earliestColFor01 = 1$.

6. Να γίνεται οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων της εκτέλεσης ενός πειράματος, μέσω δυο ιστογραμμάτων (ένα για κάθε τύπο προσέγγισης) που αποτυπώνουν το πλήθος των παιχνιδιών με τιμή προσέγγισης σε καθένα από τα διαστήματα $[0,0.1), [0.1,0.2), [0.2,0.3), \dots , [0.8,0.9), [0.9,1]$.

Αποθήκευση / Φόρτωση NUMPY μητρώου σε / από αρχείο

Ακολουθεί παράδειγμα δημιουργίας ενός NUMPY μητρώου (ως τέτοια θα θεωρείτε και τα μητρώα R, C) που υποδεικνύεται από τη μεταβλητή w, που στη συνέχεια αποθηκεύεται σε αρχείο **test.out**. Στο επόμενο βήμα, το ίδιο αρχείο φορτώνεται σε μια μεταβλητή r, που προφανώς επίσης υποδεικνύει πανομοιότυπο μητρώο τύπου **np.array** με αυτό της μεταβλητής w.

```
>>> import numpy as np
>>> w = np.array([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])
>>> np.savetxt('test.out',w,delimiter=',',fmt='%1.4e')
>>> w
array([[1, 2, 3],
       [4, 5, 6],
       [7, 8, 9]])
>>> r = np.genfromtxt('./test.out', delimiter=',', skip_header = 0)
>>> r
array([[1., 2., 3.],
       [4., 5., 6.],
       [7., 8., 9.]])
>>>
```

Αναπαράσταση και Πράξεις μεταξύ Μητρώων ή/και Διανυσμάτων

Θα πρέπει να κάνετε χρήση της βιβλιοθήκης NUMPY, η οποία επιτρέπει την αναπαράσταση μητρώων και διανυσμάτων, καθώς και την εκτέλεση σημαντικών αλγεβρικών πράξεων και λειτουργιών ως προς αυτές.

Επίλυση Παιχνιδιών Μηδενικού Αθροίσματος μεταξύ δύο Παικτών

Για την επίλυση γραμμικών προγραμμάτων, παρέχεται στο template έτοιμη μια συνάρτηση υπολογισμού ισορροπίας Nash για αυθαίρετα $m \times n$ μητρικά παιχνίδια $(A, -A)$, που αξιοποιεί τη βιβλιοθήκη επιστημονικών υπολογισμών **scipy** της Python.

9. ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Δημιουργήστε τα εξής αρχεία:

(α) ΠΗΓΑΙΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ: Ένα συμπιεσμένο (ZIP) αρχείο, που να περιέχει ολόκληρο τον κατάλογο (και τους υποκαταλόγους του) με τα αρχεία του πηγαίου κώδικα που δημιουργήσατε για τις ανάγκες της εργασίας σας, και τα πειραματικά αποτελέσματα που καταγράψατε. Χρησιμοποιήστε την εξής ονοματολογία για το ZIP αρχείο που θα παραδώσετε: **NE509_LAB2_<PROVIDE YOUR AM HERE>_SOURCE-FILES.zip**.

(β) ΓΡΑΠΤΗ ΑΝΑΦΟΡΑ: Για τη γραπτή αναφορά σας (σε DOCX ή/και σε PDF μορφή), χρησιμοποιήστε την εξής ονοματολογία: **NE509_LAB2_<PROVIDE YOUR AM HERE>_REPORT.docx** ή **NE509_LAB2_<PROVIDE YOUR AM HERE>_REPORT.pdf**.

Στη γραπτή αναφορά σας θα πρέπει:

- να απαντήσετε στο θεωρητικό μέρος όσο πιο εμπεριστατωμένα και τεκμηριωμένα μπορείτε.
- να περιγράψετε αναλυτικά τις μεθόδους που υλοποιήσατε για το προγραμματιστικό μέρος της εργασίας (σαν ένα εγχειρίδιο χρήστη για το πρόγραμμά σας, δίνοντας τη σύνταξη, την είσοδο, την έξοδο και το σκεπτικό της υλοποίησής σας, αλλά όχι τον ίδιο τον κώδικα, δεν χρειάζεται στην αναφορά).
- να παραθέσετε μια σύνοψη των πειραματικών σας αποτελεσμάτων, δίνοντας τα ιστογράμματα (εικόνες) για τις επιδόσεις των τριών προσεγγιστικών αλγορίθμων, και σχολιάζοντας τα συγκεκριμένα αποτελέσματα (κατά την κρίση σας).