

Projet scientifique
Etude et réalisation d'un tyrolienne

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017/2018

BURDIN DE SAINT MARTIN - MAMECHE -LEMHABA
MANNAS - SADICK - SAIDANI - TOURE - XU
Encadrant : Paolo VANNUCCI

24 mai 2018

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier Paolo Vannucci, notre professeur encadrant. Nous le remercions pour le projet très intéressant qu'il nous a proposé.

Nous remercions aussi Frédéric Mourgues pour l'aide qu'il nous a fourni et pour le temps qu'il nous a consacré et pour la qualité de son travail.

Table des matières

1 ÉTUDE DU CÂBLE	4
1.1 ÉQUATIONS DE LA CATÉNAIRE	4
1.2 DÉTERMINATION DES CONSTANTES DU PROBLÈME	6
1.2.1 CALCUL DE LA LONGUEUR DU CÂBLE	6
1.2.2 CALCUL DU POINT LE PLUS BAS DE LA CATÉNAIRE	7
1.2.3 CALCUL DES CONSTANTES D'INTÉGRATION	8
1.3 ÉTUDES DE LA DÉFORMÉE	9
1.3.1 CALCUL DE LA TRAJECTOIRE	9
1.3.2 TRAITEMENT DES DONNÉES	11
1.4 AUTRE APPROCHE	13
2 ÉTUDE DE LA POULIE	16
2.1 CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT	16
2.1.1 RÉSISTANCE À LA CHARGE	16
2.1.2 ROTULAGE	17
2.2 MODÉLISATION	19
3 ÉTUDES DES SOLUTIONS D'ARRÊT	23
3.1 FREINAGE AVEC AMORTISSEUR ET RESSORT	23
3.1.1 MODÈLE PHYSIQUE	23
3.1.2 ÉTUDE VIBRATOIRE	23
3.1.3 ÉTUDE ANALYTIQUE	24
3.2 APPROCHE LAGRANGIENNE	25
3.3 FREINAGE AVEC UN NOEUD	26

INTRODUCTION

Une *tyrolienne* est un système de transport en hauteur basé sur l'utilisation d'un câble qui relie deux points et d'une poulie qui roule sur celui-ci. En général elle sert à traverser des obstacles dénivélés et peut être longue de plusieurs centaines de mètres. Le câble qui est utilisé, plus ou moins tendu selon l'utilisation, prend alors la forme d'une *caténaire*. La caténaire, ou *chaînette* peut être modélisée à l'aide d'un *cosinus hyperbolique*.

Dans le cadre de ce projet nous allons procéder en trois temps. En effet dans une première partie nous allons étudier les équations qui régissent notre câble, pour ensuite nous intéresser à la conception et à la réalisation de la poulie, enfin nous réfléchirons à des solutions d'arrêt.

Chapitre 1

ÉTUDE DU CÂBLE

1.1 ÉQUATIONS DE LA CATÉNAIRE

Dans un premier temps nous tenterons de déterminer une équation de la caténaire. Commençons par traiter un morceau infinitésimal de longueur dl . Soit le repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Chaque morceau est compris entre les abscisses x et $x + dx$, $dx > 0$. On supposera que le tronçon est soumis à trois forces qui sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{le poids, } \vec{p} = \mu dl g \vec{j} \\ \text{la tension à gauche, } T(\vec{x}) \\ \text{la tension à droite, } -T(x + \vec{dx}) \end{array} \right.$$

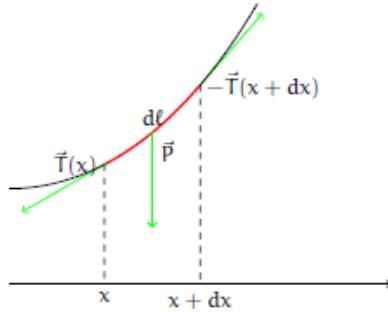


FIGURE 1.1 – Élément de la chaînette de longueur dl

On peut maintenant appliquer le principe fondamental de la statique (PFS) à ce morceau de caténaire et obtenir la relation suivante :

$$\vec{p} + T(\vec{x}) - T(x + \vec{dx}) = \vec{0} \quad (1.1)$$

Or les tensions peuvent être décomposées comme la somme d'une tension horizontale et d'une tension verticale selon les axes \vec{i} et \vec{j} telles que :

$$\vec{T} = T_h \vec{i} + T_v \vec{j} \quad (1.2)$$

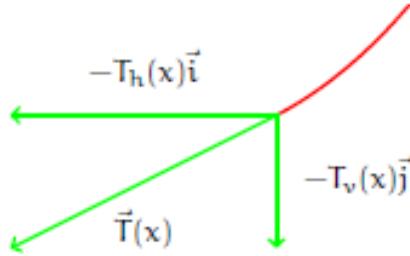


FIGURE 1.2 – Equilibre d'un morceau de chaînette

En se servant de (1.1) et de (1.2) on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} T_h(x+dx) - T_h(x) = 0 \\ T_v(x+dx) - T_v(x) - p = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

On peut tout de suite remarquer que la tension horizontale ne dépend pas de x et donc que $T_h(x+dx) = T_h(x) = T_h = \text{constante}$. On peut aussi remarquer que $dl^2 = dx^2 + dy^2$, d'où :

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt[2]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

On a alors, en divisant (1.3) par dx la formule suivante :

$$\frac{T_v(x+dx) - T_v}{dx} = \mu g \frac{dl}{dx} = \mu g \sqrt[2]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \mu g \sqrt[2]{1 + y'^2}$$

Ce qui équivaut à écrire que :

$$T'_v(x) = \mu g \sqrt[2]{1 + y'^2} \quad (1.4)$$

On peut de plus établir une relation entre T_h et T_v en fonction de l'angle α formé par $T(x)$ et un axe horizontale :

$$\begin{cases} T_h = T(x) \cos(\alpha) \\ T_v = T(x) \sin(\alpha) \end{cases}$$

D'où :

$$T_v = T_h \tan(\alpha)$$

Tout en sachant qu'ici $\tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} = y'(x)$, on a alors que :

$$\begin{cases} T_v = T_h y'(x) \\ T'_v = T_h y''(x) \end{cases} \quad (1.5)$$

En remplaçant (1.4) dans (1.5) on obtient que :

$$y''(x) = \frac{\mu g}{T_h} \sqrt{1 + y'^2} \quad (1.6)$$

En posant $a = \frac{\mu g}{T_h}$ et en intégrant (1.6) on obtient finalement l'équation de la caténaire suivante :

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a} + \alpha\right) + \beta \quad (1.7)$$

Avec α et β des constantes d'intégration à déterminer.

1.2 DÉTERMINATION DES CONSTANTES DU PROBLÈME

1.2.1 CALCUL DE LA LONGUEUR DU CÂBLE

Une fois l'équation de la caténaire obtenue, il nous reste toutes les données importantes du problème à déterminer. Commençons par calculer la longueur l de notre câble.

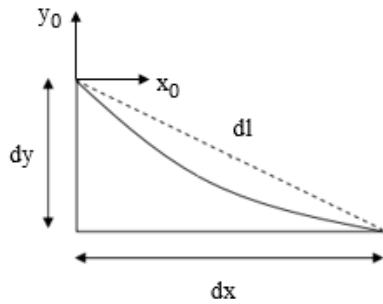


FIGURE 1.3 – Elément de longueur dl

D'après le Théorème de Pythagore on peut dire que $dl^2 = dx^2 + dl^2$ et on en déduit que :

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt[2]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (1.8)$$

D'où

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt[2]{1 + y'(x)^2} dx \quad (1.9)$$

En gardant en mémoire que l'équation de la caténaire est de la forme

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a} + \alpha\right) + \beta$$

et que

$$y'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a} + \alpha\right)$$

alors l'équation (1.9) devient :

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt[2]{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a} + \alpha\right)} dx \quad (1.10)$$

Alors si $x_0 = 0$ on a que :

$$l = a \sinh\left(\frac{x_1}{a} + \alpha\right) - a \sinh(\alpha) \quad (1.11)$$

On peut observer que la longueur de notre tyrolienne ne dépend au final que de deux paramètres extérieurs au câble utilisé, $a = \frac{\theta_h}{\mu g}$ qui s'exprime en fonction de θ_h la tension horizontale exercée et de la distance au sol qui sépare nos deux points d'accrochages.

1.2.2 CALCUL DU POINT LE PLUS BAS DE LA CATÉNAIRE

Appelons Δ la flèche maximale de notre caténaire, un paramètre important car il permet de déterminer la distance minimale à respecter pour que la tyrolienne ne touche pas le sol. On sait que ce point respecte $y'(x) = 0$, avec $y'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a} + \alpha\right)$ et $a \neq 0$.

De plus on sait que :

$$\sinh\left(\left(\frac{X}{a} + \alpha\right)\right) = \frac{e^{\left(\frac{X}{a} + \alpha\right)} - e^{-\left(\frac{X}{a} + \alpha\right)}}{2} = 0 \quad (1.12)$$

Et en posant $z = e^{\left(\frac{X}{a} + \alpha\right)}$, (1.12) peut alors s'écrire comme $\frac{z - \frac{1}{z}}{2} = 0$.

Le problème est alors de trouver les racines de $z^2 - 1 = 0$.

Deux solutions possibles $\begin{cases} z = 1 \\ \text{ou} \\ z = -1 \end{cases}$

On exclut la racine $z = -1$, car les solutions obtenues sont imaginaires. La racine est alors $z = 1$, ce qui implique que $e^{(\frac{x}{a} + \alpha)} = 1$, d'où $\frac{x}{a} + \alpha = 0$, donc que :

$$x = -a\alpha \quad (1.13)$$

Finalement (1.12) et (1.13) entraînent que :

$$\Delta = y(-a\alpha) = a \cosh\left(-\frac{a\alpha}{a} + \alpha\right) + \beta = \cosh(0) + \beta \quad (1.14)$$

Ce qui nous donne :

$$\Delta = \alpha + \beta \quad (1.15)$$

Cette équation est importante car elle nous donne une relation géométrique directe entre nos constantes d'intégration α et β et une propriété de la chaînette que l'on souhaite obtenir.

1.2.3 CALCUL DES CONSTANTES D'INTÉGRATION

Pour complètement résoudre notre problème nous devons déterminer les quatre paramètres que sont α et β , qui sont nos constantes d'intégrations, $a = \frac{\theta}{\mu g}$, qui au final revient à déterminer la tension nécessaire pour notre caténaire et enfin l la longueur de notre câble. Cependant nous n'avons que les équations (1.11), (1.15) et $a = \frac{\theta}{\mu g}$. Il nous manque donc une équation pour pouvoir résoudre notre système. Utilisons les conditions aux limites pour obtenir l'équation manquante :

$$\begin{cases} y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a} + \alpha\right) + \beta \\ y(0) = 0 \text{ et } y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

On peut alors extraire une équation liant α et β :

$$\beta = -a \cosh(\alpha) \quad (1.16)$$

Et finalement on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} l = a \sinh\left(\frac{x_1}{a} + \alpha\right) - a \sinh(\alpha) \\ \Delta = \alpha + \beta \\ \beta = -a \cosh(\alpha) \\ a = \frac{\theta}{\mu g} \end{cases} \quad (1.17)$$

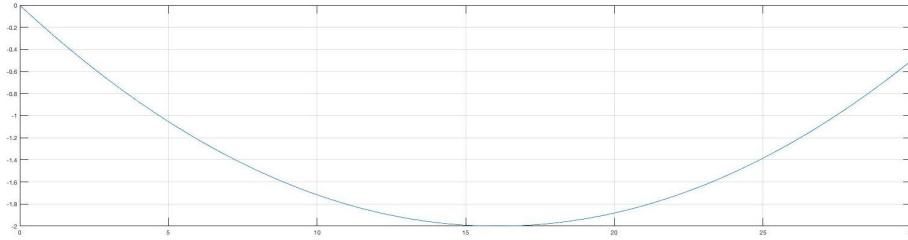


FIGURE 1.4 – Chaînette

Malheureusement il nous est impossible d'obtenir une solution analytique pour ce système, il nous faut donc passer par la voie numérique pour espérer avoir une solution.

Dans cette exemple les paramètres pris en compte sont :

$$\begin{cases} \text{la distance au sol : } 30\text{m} \\ \text{la différence de hauteur entre les points d'accrochages : } 0.5 \\ \Delta \text{ la flèche maximale : } 2\text{m} \end{cases}$$

On peut aussi extraire les données manquantes, soient :

$$\begin{cases} l = 30.2719 \\ a = 64.91 \\ \beta = 66,91 \\ \alpha = -0,25 \end{cases} \quad (1.18)$$

1.3 ÉTUDES DE LA DÉFORMÉE

1.3.1 CALCUL DE LA TRAJECTOIRE

La configuration déformée de la caténaire est essentielle pour notre projet car c'est avec elle que l'on peut déterminer la position du mobile à tout instant. On ne tiendra pas compte du poids propre du câble car il très inférieur à la charge $P = 150\text{kg}$, ainsi la caténaire peut être assimilée à deux *barres rigides*, ou plutôt deux morceaux rectilignes de longueur L_1 et L_2 , formées par les points A, B et P la position de la charge P.

Soient les points $A(0; 0)$, $B(x_b; y_b)$ et $P(x; y)$ et L la longueur initiale du câble, on peut dire que $L = L_1 + L_2$ car il inextensible avec :

$$\begin{cases} L_1 = \sqrt[2]{x^2 + y^2} \\ L_2 = \sqrt[2]{(x - x_b)^2 + (y - y_b)^2} \end{cases} \quad (1.19)$$

On préférera travailler avec $L_2 = L - L_1$ de telle sorte que :

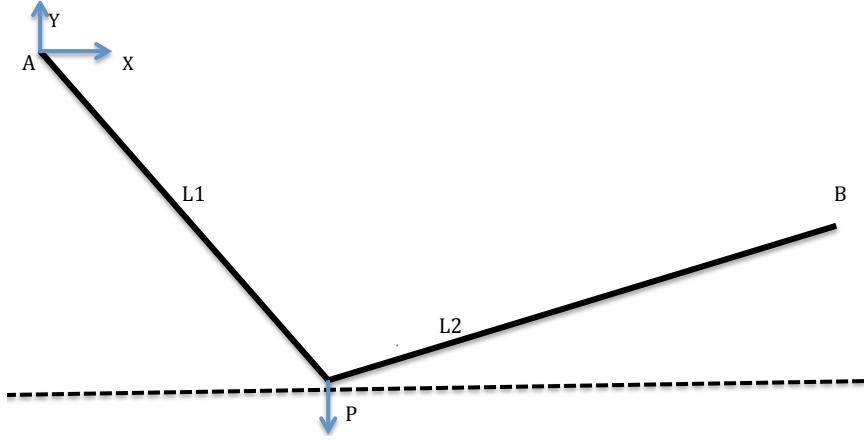


FIGURE 1.5 – Caténaire déformée par la charge P

$$\sqrt[3]{(x - x_b)^2 + (y - y_b)^2} = L - \sqrt[2]{x^2 + y^2} \quad (1.20)$$

Maintenant si on élève (1.20) au carré et en posant $\Omega = L^2 - (x_b^2 + y_b^2) = constante$, on obtient :

$$y^2(L^2 - y_b^2) - y(2xx_b y_b + \Omega y_b) + x^2(L^2 - x_b^2) - \Omega x x_b - \frac{\Omega^2}{4} = 0 \quad (1.21)$$

Ce polynôme en y est de degré 2, il suffit donc de calculer son déterminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et d'étudier son signe pour obtenir ses racines, ici :

$$\Delta = -4x^2L^2\Omega + 4L^2\Omega x x_b + \Omega^2 L^2 > 0$$

Les racines sont alors :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{(2xx_b y_b + \Omega y_b) - \sqrt[3]{\Delta}}{2(L^2 - y_b^2)} \\ y_2 = \frac{(2xx_b y_b + \Omega y_b) + \sqrt[3]{\Delta}}{2(L^2 - y_b^2)} \end{cases} \quad (1.22)$$

Le reste de l'analyse se fait numériquement avec les données suivantes :

$$\begin{cases} l = 30.2719m \\ y_b = -0.5m \\ x_b = 30m \\ P = 1500N \end{cases}$$

Si l'on compare avec la trajectoire non déformée on observe un abaissement du point le plus bas de 0.2741m. Les coordonnées de point le plus bas sont $P_{min}(16.9; -2.2741)$.

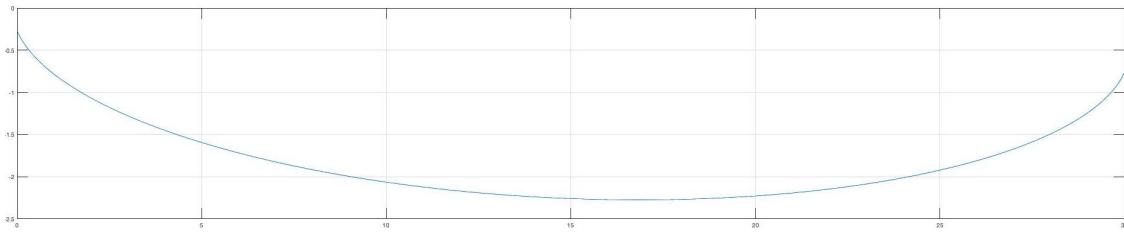


FIGURE 1.6 – Trajectoire du mobile le long de la caténaire

1.3.2 TRAITEMENT DES DONNÉES

Une fois la déformée obtenue nous pouvons pousser l'analyse de ses données. En effet d'autres paramètres peuvent nous être utiles, telle que la tension maximale subie par les segments du câble. Pour cela nous avons besoin des angles qu'ils forment pour chaque position de P.

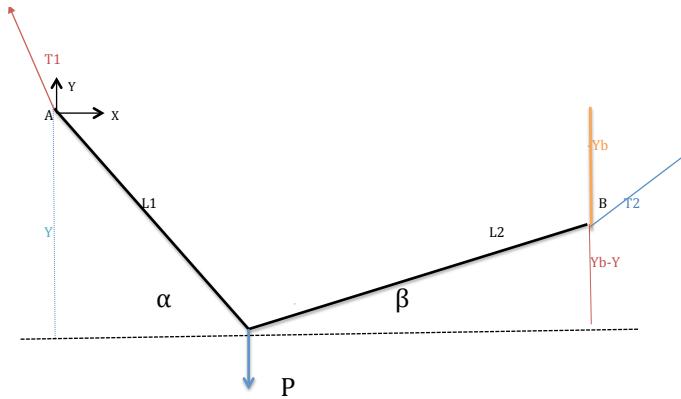


FIGURE 1.7 – Configuration déformée

On repère les angles intéressants par :

$$\begin{cases} \alpha = \arctan\left(-\frac{y}{x}\right) \\ \beta = \arctan\left(\frac{y_b - y}{x_b - x}\right) \end{cases} \quad (1.23)$$

Après traitement on obtient les courbes suivantes :

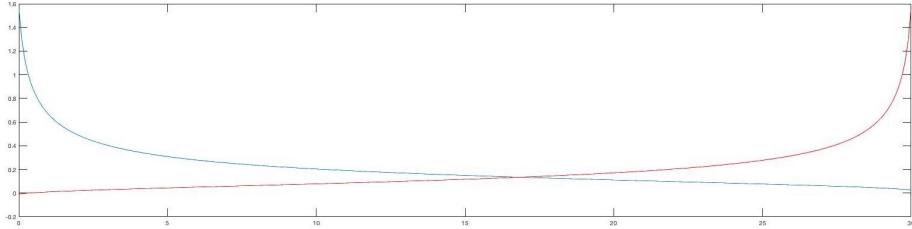


FIGURE 1.8 – Evolution de α en bleu et β en rouge

Une fois les angles connus pour toutes les positions de P, on peut déterminer, grâce à l'analyse du schéma (1.8) et du PFS, l'évolution des tensions verticales en fonction de la position de P.

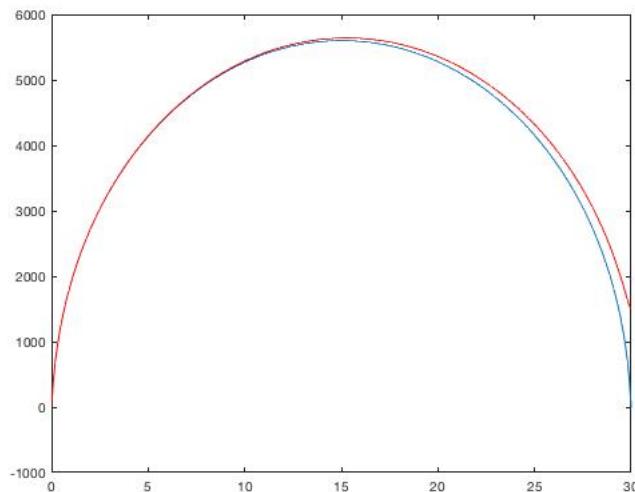


FIGURE 1.9 – Evolution de t_1 en bleu et t_2 en rouge

On appelle ici t_1 et t_2 les tensions respectives des tronçons. On peut en plus extraire la tension maximale imposée pour savoir si le câble va céder. Ici on a $t_{max} = 564dN$.

A ce stade nous disposons de toutes les informations nécessaires pour le choix du câble de la tyrolienne. On peut cependant se poser la question d'une éventuelle participation de la force centrifuge dans le bilan des forces, nous avons pour cela besoin de l'accélération centrifuge. Plaçons-nous au point le plus critique pour ce critère, c'est à dire en $P_{min}(16.9; -2.2741)$ et on rappelle que :

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (1.24)$$

Ici r représente le rayon de courbure relatif à la sphère osculatrice associée à P_{min} . Pour déterminer ce rayon on se sert du fait que $r = \frac{1}{c}$, avec $c \simeq y''(x)$ la courbure. Connaissant les valeurs autour de y_{min} on peut utiliser la formule de différences finies suivante :

$$c \simeq y''(x) = \frac{y_{min+1} - 2y_{min} + y_{min-1}}{(\Delta x)^2} \quad (1.25)$$

Finalement avec notre exemple et en utilisant (1.24) et (1.25) on obtient que $a_c = 0.4085 m.s^{-2} \ll g = 9.81 m.s^{-2}$, donc complètement négligeable pour notre étude.

1.4 AUTRE APPROCHE

Avec cette nouvelle approche nous tenterons d'obtenir directement l'équation de notre câble en fonction de la position de la charge. Nous utiliserons les résultats obtenus pour déterminer la tension dans chaque brin.

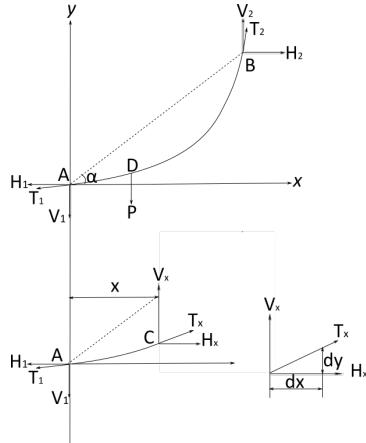


FIGURE 1.10 – Câble avec charge en déplacement

Commençons par chercher une équation de la caténaire soumise à une masse qui se déplace. Le câble est toujours attaché entre A et B, et soit un point D soumis à son poids P . On note $x = kl_0$ distance horizontale entre A et D avec l_0 la distance horizontale entre A et B et $k \in \mathbb{R}$. D'après le PFS, on peut dire que $\sum M_{(B)} = 0$, alors :

$$V_1 = H_1 \tan \alpha - \left[\frac{\omega l_0}{2} + (1 - k)P \right] \quad (1.26)$$

Soit maintenant un point C, $x = kl_0$ représente ici la distance horizontale entre A et C. On a toujours d'après le PFS, $\sum M = 0$, alors :

$$V_x = H_x \tan \alpha - \left[\frac{\omega l_0}{2} + (1-k)P \right] \quad (1.27)$$

D'où $H_1 = H_x = H = \text{constante}$

Toujours grâce au PFS, on peut cette fois dire que, $\sum V = 0$. En sachant que $ds = \frac{dy}{dx}$, on peut dire que

$$V_x = H_x \frac{dy}{dx}$$

et $T_x = H_x \frac{ds}{dx}$, alors :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_1 - \omega x}{H} \quad (1.28)$$

En combinant (1.26) et (1.28), on obtient que :

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha - \frac{1}{2H} [\omega l_0 + 2(1-k)P - 2\omega x] \quad (1.29)$$

Si on considère A comme origine, l'équation (1.29) devient :

$$y = x \tan \alpha - \frac{1}{2H} [[\omega l_0 + (1-k)P]x - \omega x^2] \quad (1.30)$$

Posons $n = \frac{P}{\omega l_0} = \frac{P}{W}$ le ratio de charge et du poids du câble, l'équation (1.30) devient :

$$y = x \tan \alpha - \frac{\omega l_0 [1 + 2n(1-k)]x - \omega x^2}{2H} \quad (1.31)$$

Cette équation représente donc notre caténaire selon la position D de notre charge P. Occupons nous maintenant de déterminer la tension qui est exercée sur les segments AP et PB de notre câble.

Posons maintenant $f_1 = \frac{\omega l_0 [1 + 2n(1-k)]x - \omega x^2}{2H}$ de telle sorte que (1.31) devienne :

$$y = x \tan \alpha - f_1 \quad (1.32)$$

En réalité, f_1 représente ici la distance verticale entre AB et un point de AD. Considérons cette fois B comme origine et posons $X = (1-k)l_0$. Par analogie on obtient $f_2 = \frac{\omega l_0 [1 + 2n(1-k)]X - \omega X^2}{2H}$ et ainsi que :

$$Y = X \tan \alpha + f_2 \quad \text{Avec ici } f_2 \text{ la distance verticale entre AB et un point de BD.} \quad (1.33)$$

On peut maintenant calculer f_1 et f_2 en D, c'est à dire :

$$f_1 = f_2 = f_D = \frac{\omega l_0^2(2n+1)(k-k^2)}{2H} \quad (1.34)$$

On en déduit que :

$$H_x = \frac{\omega l_0^2(2n+1)(k-k^2)}{2f_D} \quad (1.35)$$

Nous savons aussi que la longueur du câble est telle que $l_0 = l_1 + l_2$ avec l_1 et l_2 les longueurs des tronçons AD et DB telles que :

$$l_1 = \int_0^{l_0} \sqrt[2]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (1.36)$$

$$l_2 = \int_0^{(1-k)l_0} \sqrt[2]{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2} dx \quad (1.37)$$

Tout en sachant que :

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha - \frac{f_D [\omega l_0 [1 + 2n(1 - k)] - 2\omega x]}{\omega l_0^2 (1 + 2n)(k - k^2)} \quad (1.38)$$

$$\frac{dY}{dX} = \tan \alpha - \frac{f_D [\omega l_0 [1 + 2n(1 - k)] - 2\omega X]}{\omega l_0^2 (1 + 2n)(k - k^2)} \quad (1.39)$$

Regardons maintenant notre chaînette sans prendre en compte la charge en D, l'équation peut se réécrire comme :

$$y = x \tan \alpha - \frac{\omega(l_0 - x)}{2H_0} \quad (1.40)$$

Posons $f_{0x} = x \tan \alpha - y = \frac{\omega(l_0 - x)}{2H_0}$ et $f_0 = f_{0max} = \frac{\omega l_0^2}{2H_0}$ en $x = \frac{l_0}{2}$. On peut déterminer une équation de f_D en fonction de f_0 :

$$f_D = \frac{4(1+2n)(k-k^2)}{\sqrt[2]{1+12(n+n^2)(k-k^2)}} f_0 \quad (1.41)$$

L'équation (1.35) devient alors $H_x = H_0 \sqrt[2]{1+12(n+n^2)(k-k^2)}$. Finalement on obtient les tensions dans les brins en projetant les tensions horizontales de la façon suivante :

$$\begin{cases} T_1 = H_x \frac{ds}{dx} = H_x \sqrt[2]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \\ T_2 = H_x \frac{ds}{dX} = H_x \sqrt[2]{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2} \end{cases} \quad (1.42)$$

Chapitre 2

ÉTUDE DE LA POULIE

2.1 CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT

2.1.1 RÉSISTANCE À LA CHARGE

La géométrie de la poulie est cylindrique. On doit pouvoir y passer différents éléments (Axe, câble, roulement, écrou...etc.). Cela implique que l'on doit déterminer un diamètre intérieur et un diamètre extérieur pour les éléments axiaux ainsi qu'un diamètre de gorge pour le câble. Concernant sa résistance, et pour des raisons de sécurité, nous dimensionnerons chaque poulie pour résister individuellement à 150kg de charge verticale.

En raison des pièces que nous avons à notre disposition, quelques contraintes sont à prendre en compte :

- diamètre du disque en aluminium des poulie $d = 40mm$;
- dimensions des roulements $d_{ext} = 22mm$ et $d_{int} = 10mm$;
- coefficient de sécurité $c = 2$.
- $E_{acier} = 210GPa$
- $R_{eacier} = 235GPa$

On creuse une cavité cylindrique dans la poulie de sorte à y loger une paire de roulements. D'un côté de la cavité on aura un diamètre d_e égal à celui de la bague extérieure du roulement et de l'autre côté, un diamètre d_i inférieur à d_e , de cette façon, le roulement sera encastré avec serrage dans la poulie (cf annexes). Commençons par déterminer le diamètre d_i de la cavité :

$$\begin{cases} S = \frac{\pi}{4}(d_{ext}^2 - d_{int}^2) = \frac{\pi}{4}D^2 : \text{surface d'application de la charge} \\ \sigma_{max} = \frac{R_e}{d_e^2} \\ \sigma_{adm} = \frac{F}{S} \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec comme condition que $\sigma_{adm} < \sigma_{max}$, on obtient la relation suivante :

$$d_i < \sqrt[2]{D^2 - \frac{4F}{\pi\sigma_{max}}} = 21.5mm \text{ on choisit } d_i = 20mm \quad (2.2)$$

Nous devons maintenant faire attention à la flexion de l'axe qui va subir la charge. L'axe sera de section circulaire de diamètre maximal 10 mm. Le point d'application de la charge est au centre de l'axe comme nous le voyons sur ce schéma :

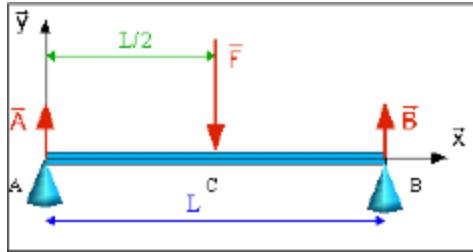


FIGURE 2.1 – Schéma d'application de la charge

La flèche maximale est $\Delta_{max} = \frac{FL^3}{48EI} = 1.023\mu m$, avec $I = \frac{\pi D^4}{32}$. Ce résultat satisfait largement aux critères de dénombrabilité.

2.1.2 ROTULAGE

Le *rotulage* est la différence d'angle entre les axes des cages intérieures et extérieures du roulement à billes présent dans la poulie.

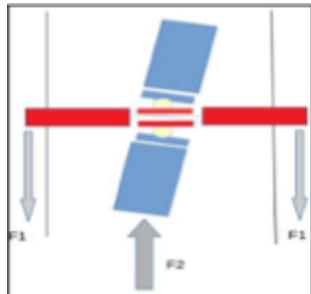


FIGURE 2.2 – Efforts sur la poulie

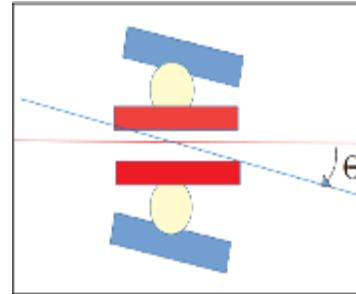


FIGURE 2.3 – Angles de rotulage

Sur le schéma (2.1.2), les deux forces F_1 correspondent au poids de la masse suspendue à la tyrolienne et la force F_2 est la réaction de la corde sur la poulie.

Le dispositif étant composé de deux poulies, on suppose donc que le poids est réparti sur celles-ci. De plus on peut dire que F_1 est réparti sur les quatre roulements présents dans les deux poulies. On a alors :

$$\begin{cases} F_1 = \frac{mg}{4} = 375N \\ F_2 = \frac{mg}{2} = 750N \end{cases} \quad (2.3)$$

Notre travail consiste à déterminer le couple subit par le roulement afin de correctement dimensionner notre pièce.

D'après la figure (2.1.2), la réaction F_2 possède une composante radiale, représentée en vert, et une composante axiale, représentée par la force rouge qui

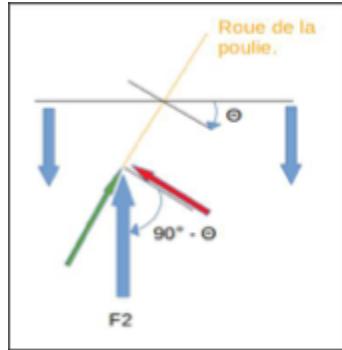


FIGURE 2.4 – Schéma de détermination des couples

va créer un moment au centre du roulement. Ainsi le moment interne M_i au niveau du centre du roulement s'écrit :

$$F_{verte} = F_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) M_i = F_{verte} * \text{rayon de poulie}$$

Pour le type de roulement utilisé, l'angle maximal de rotulage est de : $\theta = 16' \simeq 0.0045^\circ$, Donc :

$$\begin{cases} F_{verte} \simeq 0.058N \\ M_i \simeq 2.3 \cdot 10^{-3} Nm \end{cases} \quad (2.4)$$

2.2 MODÉLISATION

La modélisation permet d'avoir un rendu 3D de notre système et ainsi d'étudier plusieurs de ses aspects, à travers de simulations numériques. Nous avons décidé de réaliser notre étude sur *SolidWorks* pour les nombreux outils qu'il propose.

On commence par modéliser chaque pièce de notre système, pour pouvoir ensuite les assembler à l'aide de *contraintes*, qui vont faire le travail des *liaisons* et par exemple simuler les contacts.

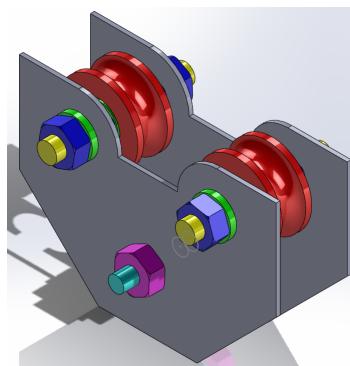


FIGURE 2.5 – Vu $\frac{3}{4}$ de la double poulie

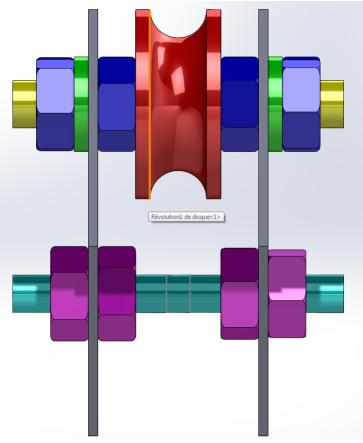


FIGURE 2.6 – Vu profil de la double poulie

Une fois cette étape terminée nous pouvons commencer l'étude mécanique, dans notre cas nous voulons savoir si la double poulie va résister à un chargement de 150Kg. On commence par assigner un matériau à chacune de nos pièces. SolidWorks dispose d'un large choix de matériaux disponibles, il nous suffit de choisir ceux qui conviendrons le plus aux pièces que nous utilisons. En effet comme le montre la figure (2.2), la plus part des pièces sont en acier.

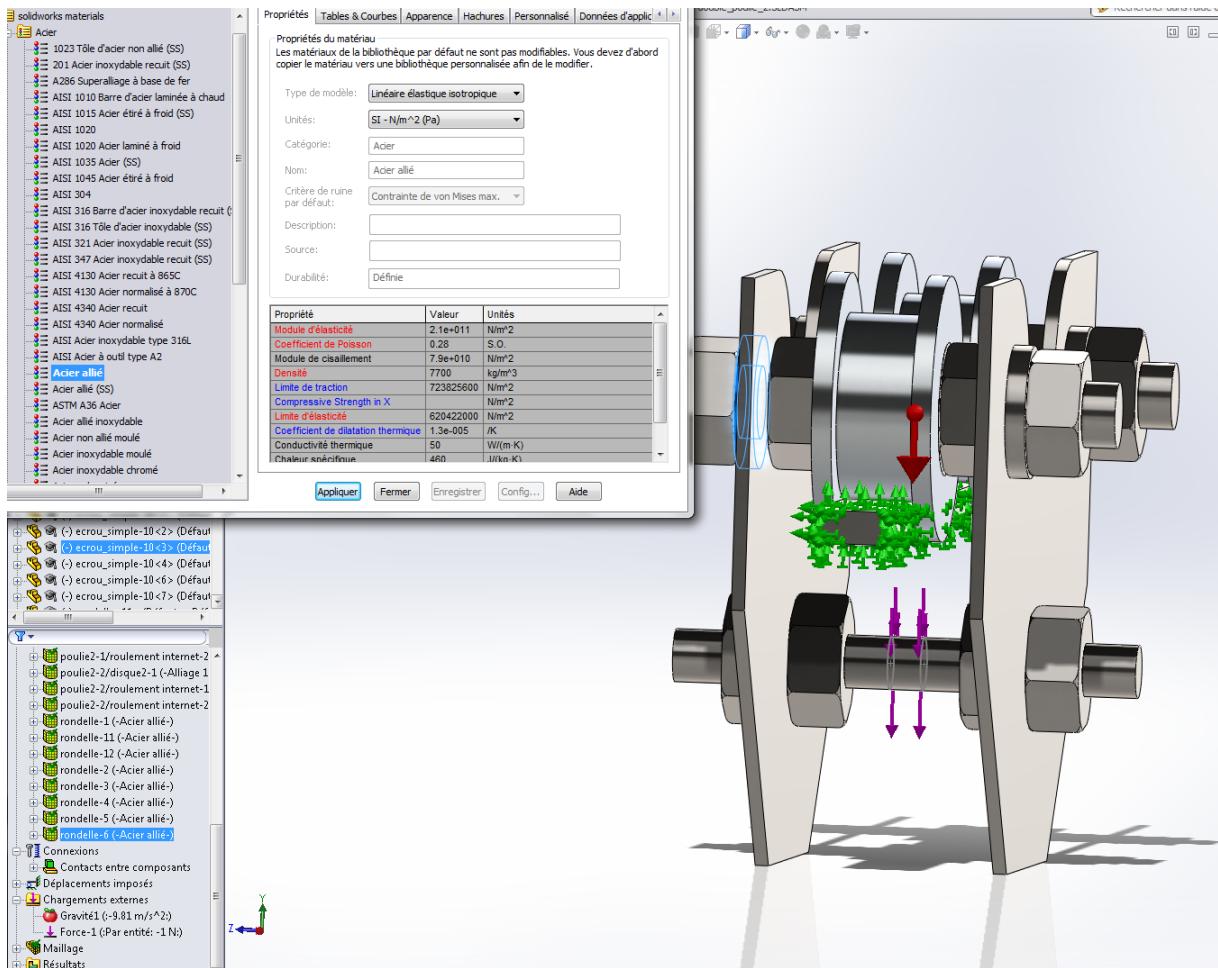


FIGURE 2.7 – Sélection d'un matériau

Maintenant que le modèle est réalisé, on lance les simulations et on interprète les résultats. Pour cela il faut décomposer nos pièces en petits éléments à l'aide d'un *maillage*. Le logiciel laisse le choix de la finesse du maillage pour chaque pièce mais traite les modèle en *volumique* par défaut. Intéressons-nous d'abord à la distribution des contraintes.

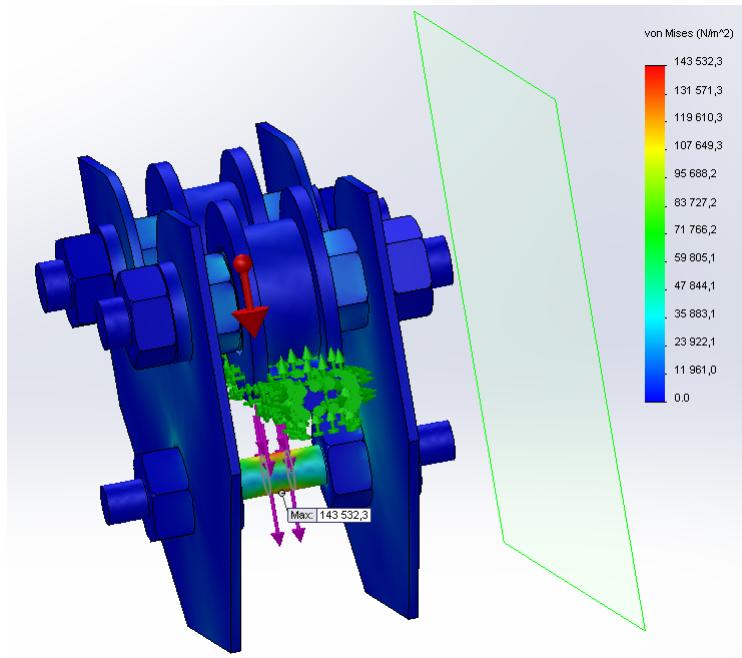


FIGURE 2.8 – Distribution des contraintes dans la double poulie

Grâce à la figure (2.2) on peut dire que la zone critique de notre modèle est la barre sur laquelle est imposée le chargement. La légende nous informe que la *contrainte équivalente de V.MISES* maximale est $\sigma \simeq 1.43 \cdot 10^5 N.m^{-2}$. Cette contrainte est très inférieure à la contrainte élastique limite de notre matériau qui est $\sigma_y = 7.20 \cdot 10^8 N.m^{-2}$, d'après le catalogue des matériaux de SolidWorks.

On peut maintenant vérifier que les déformations engendrées ne seront pas néfastes pour notre système.

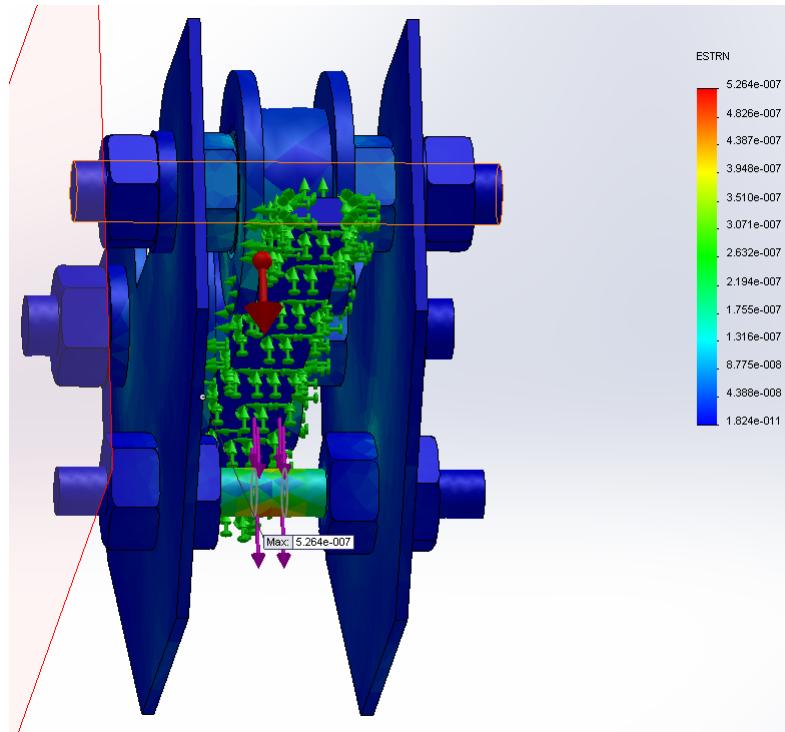


FIGURE 2.9 – Distribution des déformations dans la double poulie

Sans surprise, c'est la barre qui supporte le chargement qui est le plus déformée, mais de façon totalement négligeable. En effet le taux de déformation est $\epsilon = 5.264 \cdot 10^{-7}$.

Chapitre 3

ÉTUDES DES SOLUTIONS D'ARRÊT

Le système doit être en mesure d'arrêter une charge de 150Kg. Le but recherché est de pouvoir absorber le choc de manière à ce que la décélération n'excède pas l'accélération de la pesanteur soit environ $10m.s^{-2}$.

3.1 FREINAGE AVEC AMORTISSEUR ET RESSORT

3.1.1 MODÈLE PHYSIQUE

On peut représenter le problème en assimilant une personne à une masse m et l'absorbeur de choc par un ressort de raideur k et un amortisseur de constante d'amortissement C . Le mouvement de la masse m est une translation le long du câble.

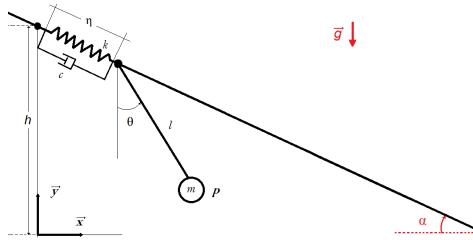


FIGURE 3.1 – Modèle de la tyrolienne avec système d'arrêt

3.1.2 ÉTUDE VIBRATOIRE

Le problème étant plan, nous pouvons simplifier le schéma en considérant uniquement la masse au moment de l'impact, soumise à une résultante composée de 4 types de forces :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{force d'inertie, } f_{iner} \\ \text{force de gravité, } f_{pot} \\ \text{force de dissipation, } f_{dis} \\ \text{force élastique, } f_{elas} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

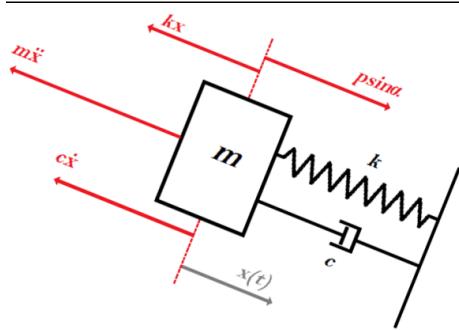


FIGURE 3.2 – Modèle rhéologique du système d'arrêt

Dans ce modèle physique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{force d'inertie, } m\ddot{x} \\ \text{force de dissipation, } C\dot{x} \\ \text{force élastique, } kx \\ \text{force potentielle de gravité, } P \sin(\alpha) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

D'après les formules (3.2) nous avons de la vitesse de notre mobile, or une condition aux limites au moment de l'impact est $v_0 = \sqrt[2]{2gh}$, h étant la différence de hauteur entre les points de départ et d'arrivée.

Il nous faut aussi définir le type d'amortissement que l'on souhaite avoir. Dans notre cas nous voulons que la poulie subisse le moins d'oscillation possible, il nous faut donc un *amortissement critique*, qui se traduit par un *taux d'amortissement* $\xi = 1$. Ce régime correspond à un mouvement apériodique.

3.1.3 ÉTUDE ANALYTIQUE

On veut maintenant étudier le mouvement du système, on utilise pour cela le principe fondamental de la dynamique (PFD), $\sum \vec{f}_{ext} = m\vec{a}$ • On obtient l'équation suivante :

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_p\dot{y} + \omega_p^2 = g \sin(\alpha) \left\{ \begin{array}{l} \text{avec, } \omega_p^2 = \frac{k}{m} \\ \text{et, } \xi = \frac{C}{2m\omega_p} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

On connaît aussi les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t=0) = 0 \\ \dot{y}(t=0) = v_0 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

On préfèrera travailler avec l'équation caractéristique de (3.3), c'est à dire $r^2 + 2\xi\omega_p^2 r + \omega_p^2 = 0$ et son déterminant $\Delta = 4\omega_p^2(\xi^2 - 1) = 0$, avec $\xi = 1$, d'où la solution générale :

$$\begin{cases} y(t) = e^{-\omega_p t}(At + B) + \frac{g}{\omega_p^2} \sin(\alpha) \\ \ddot{y}(t) = \omega_p e^{-\omega_p t}[A(\omega_p t - 2) + B] \\ \text{avec, } A = \left(v_0 - \frac{g}{\omega_p \sin(\alpha)}\right) \\ \text{et } B = -\frac{g}{\omega_p^2} \sin(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Il faut maintenant déterminer les paramètres k et C. On sait que l'on ne veut $a_{max} < g$ à l'impact, soit à $t = 0$, avec :

$$a_{max} = |\ddot{y}(t=0)| = | -2\omega_p A + \omega_p^2 B | \quad (3.6)$$

Si on suppose que $a_{max} = 2\omega_p A - \omega_p^2 B > 0$ et donc que :

$$\begin{cases} \omega_p < \frac{g(1+\sin(\alpha))}{2v_0} \\ k < m \frac{[g(1+\sin(\alpha))]^2}{4v_0} \\ C < m\xi \frac{g(1+\sin(\alpha))}{v_0} \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2 APPROCHE LAGRANGIENNE

Dans ce modèle physique, on est confronté à un système à deux degrés de libertés, une rotation d'angle θ et une translation de longueur η . Par conséquent, on définit les coordonnées lagrangiennes : (θ, η) . Le but est de se renseigner sur l'oscillation maximale de θ , qui ne doit pas dépasser 90° . On tiendra compte que le système dissipe de l'énergie par le billet de l'absorbeur visqueux, on pourra donc considérer la fonction de dissipation de Rayleigh dans le bilan énergétique suivant :

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m[\dot{\eta}^2 + \dot{\theta}^2l^2 + 2\dot{\eta}\dot{\theta}l \cos(\alpha + \theta)] \text{ énergie cinétique} \\ U = mg(h - \eta \sin(\alpha) - l \cos(\theta)) - \frac{1}{2}k\eta^2 \text{ énergie potentielle} \\ D = \frac{1}{2}c\dot{\eta}^2 \text{ fonction de dissipation} \end{cases} \quad (3.8)$$

Tout en sachant que le lagrangien s'exprime comme

$$L = T+U = \frac{1}{2}m \left[\dot{\eta}^2 + \dot{\theta}^2l^2 + 2\dot{\eta}\dot{\theta}l \cos(\alpha + \theta) + \frac{k}{2}\eta^2 - mg(h - \eta \sin(\alpha) - l \cos(\theta)) \right] \quad (3.9)$$

et que les équations de Lagrange peuvent s'écrire $\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0$, les équations du mouvement du notre système sont alors :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}l + \dot{\eta} \cos(\alpha + \theta) + g \sin(\theta) = 0 \\ m \left[\ddot{\eta} + \dot{\theta}l \cos(\alpha + \theta) - \dot{\theta}^2l \sin(\alpha + \theta) \right] + c\dot{\eta} + k\eta - mg \sin(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

On rappelle que les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 ; \eta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 ; \eta(0) = v_0 \end{cases}$$

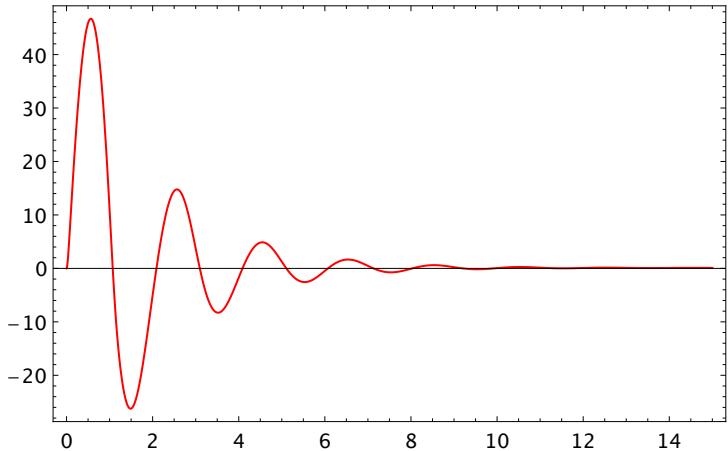


FIGURE 3.3 – déplacement angulaire du pendule

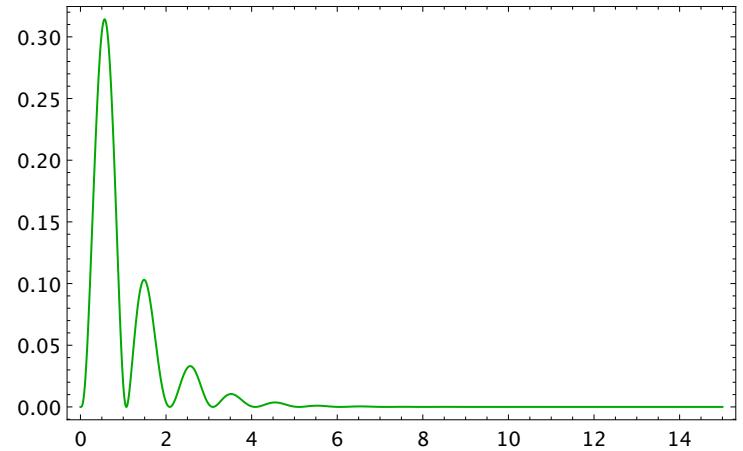


FIGURE 3.4 – déplacement verticale de la masse du pendule en mètre

Données pour tracer les figures (3.3) et (3.4) sont :

$$\begin{cases} m = 150\text{kg} ; L = 1\text{m} \\ k = 50\text{N/m} ; c = 1000\text{Ns/m} \\ \text{alpha} = 30^\circ ; \Delta_h = 1\text{m} \end{cases}$$

3.3 FREINAGE AVEC UN NOEUD

Le modèle se réduit à un simple pendule de rayon R et de masse m avec une vitesse initiale v_0 .

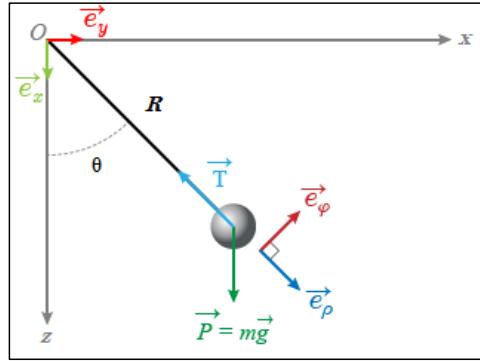


FIGURE 3.5 – Modèle réduit à un pendule simple

En gardant l'hypothèse d'un système conservatif, et appliquant le théorème de l'énergie mécanique, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR(1 - \cos(\theta)) \quad (3.11)$$

On se fixe pour objectif de ne pas dépasser 90° lors du balancement avec $R = 1.2m$, la distance entre la poulie et le mobile. A partir de ces données, on peut en déduire que la masse en mouvement ne devra pas dépasser une vitesse $v_{0max} = \sqrt[2]{2gh} = 4.9m.s^{-1}$. Ce résultat met en évidence une relation directe entre le déplacement angulaire maximum θ et le dénivelé h . En effet, la vitesse d'impact s'écrit :

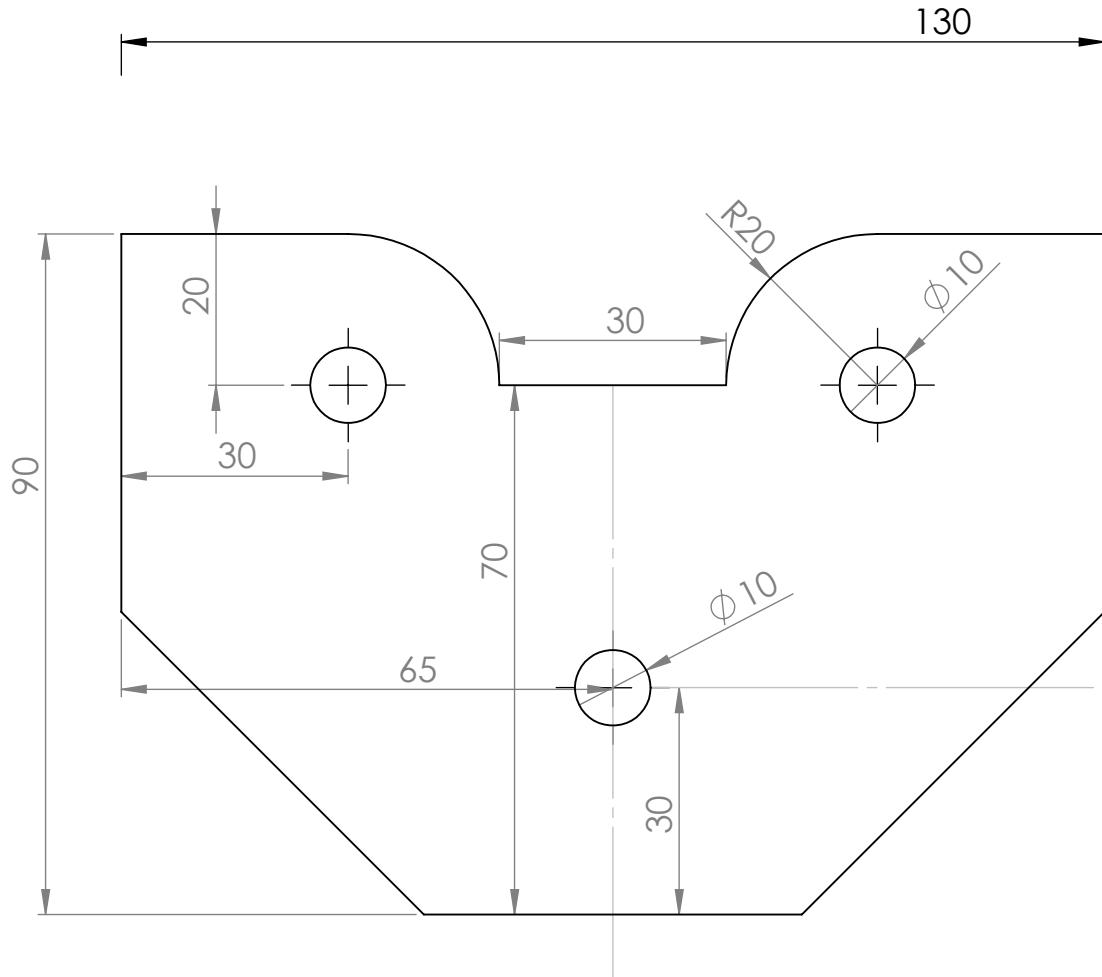
$$v_0 = \sqrt[2]{2gh} \leq v_{0max} = \sqrt[2]{2gR}$$

Dans le cas d'un freinage avec un noeud, si l'on souhaite rester en dessous d'une valeur $\frac{\pi}{2}$ pour l'angle θ , il suffit d'imposer un déniveler h et un rayon R tels que $h \leq R$.

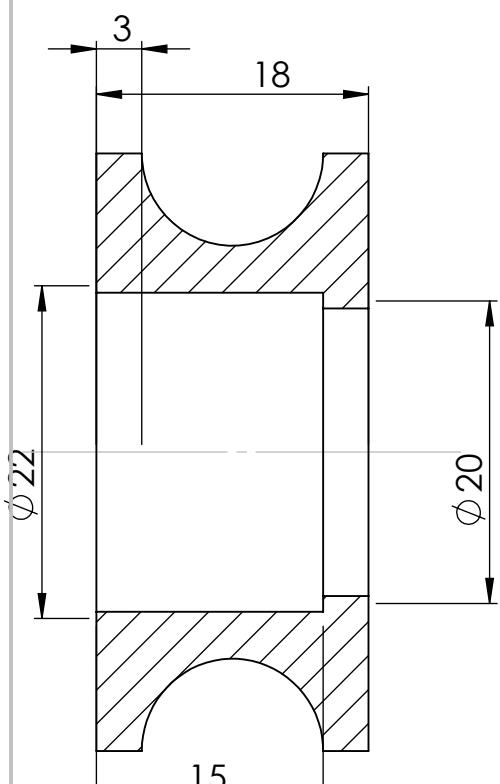
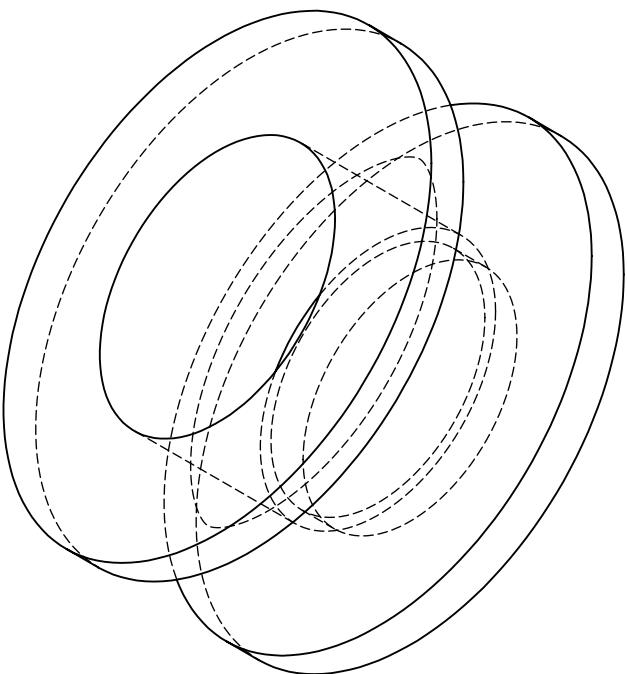
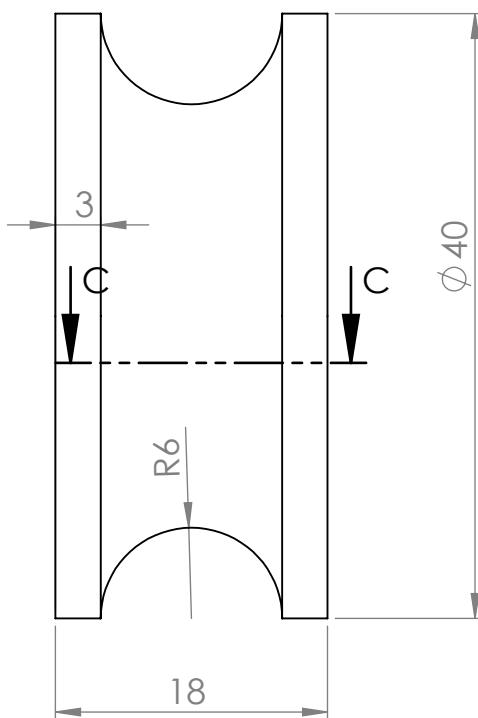
BIBLIOGRAPHIE

- [1] Arnaud BODIN,
http://math.univ-lille1.fr/bodin/geometrie/ch_chainette.pdf, La chaînette
- [2] Xinnian ZHOU, *Engineering cableway and suspension bridge*
- [3] Jean-Philippe PEREZ, *Mécanique points matériels - solides - fluides*

ANNEXES



SAUF INDICATION CONTRAIRE: LES COTES SONT EN MILLIMETRES ETAT DE SURFACE: TOLERANCES: LINEAIRES: ANGULAIRES:		FINITION:			CASSER LES ANGLES VIFS	NE PAS CHANGER L'ECHELLE	REVISION
AUTEUR	NOM	SIGNATURE	DATE			TITRE:	
VERIF.							
APPR.							
FAB.							
QUAL.	Produit d'éducation SOLIDWORKS® A titre éducatif uniquement.			DE PLAN		PLAQUE	
			MASSE:		ECHELLE:1:2	FEUILLE 1 SUR 1	
						A4	



COUPE C-C

SAUF INDICATION CONTRAIRE:

LES COTES SONT EN MILLIMETRES

ETAT DE SURFACE:

TOLERANCES:

LINEAIRES:

ANGULAIRES:

FINITION:

CASSER LES
ANGLES VIFS

NE PAS CHANGER L'ECHELLE

REVISION

AUTEUR

NOM

SIGNATURE

DATE

TITRE:

VERIF.

APPR.

FAB.

QUAL.

Produit d'éducation SOLIDWORKS® à titre éducatif uniquement. N° DE PLAN

disque

A4

MASSE:

ECHELLE: 2:1

FEUILLE 1 SUR 1

Calcul de la tyrolienne - cas de profil de terrain irregulier

■ Input

```
 $\mu = 0.1$  (*masse linéique, kg*);  
 $x_0 = 0$  (*abscisse du point de départ, m*);  
 $z_0 = 0$  (*côte du terrain au point de départ, m*);  
 $x_1 = 4$  (*abscisse du premier point du terrain, m*);  
 $z_1 = 0$  (*côte du premier point du terrain, m*);  
 $x_2 = 10$  (*abscisse du second point du terrain, m*);  
 $z_2 = 0$  (*côte du second point du terrain, m*);  
 $x_3 = 15$  (*abscisse du point d'arrivée, m*);  
 $z_3 = 0$  (*côte du point d'arrivée*);  
 $t_0 = 7.$  (*hauteur sur le terrain de la tyrolienne au point de départ, m*);  
 $t_3 = 3.$  (*hauteur arrivée*);  
 $\delta = 1$  (*longueur du câble d'attache, m*);  
 $\delta_{\min} = 3.$  (*hauteur minimale de la caténaire sur le terrain*);  
 $P = 1000$  (*charge ponctuelle, N*);
```

■ Output

```
c1=-0.521413, c2=-25.768; constants of the catenary  
L=15.689 m; length of the cable  
x_min=15. m, y_min=3. m; lowest point of the catenary  
θ_in=32.1454 N, θ_fin=28.2214 N; tension in the catenary at the two ends  
θ_0=28.2214 N; horizontal tension in the catenary  
x=14.0242 m, y=2.70087  
m; lowest point of the cable under the action of the travelling force  
x=14.0242 m, y=1.70087  
m; lowest point of the seat under the action of the travelling force  
δ_catmin=3. m; minimum distance between the catenary and the ground, at x=15. m  
δ_force=2.70087  
m; minimum distance between the travelling force and the ground, at x=14.0242 m  
δ_min=1.70087  
m; clearance: minimum distance between the seat and the ground, at x=14.0242 m  
δ_max=6. m; starting distance between the seat and the ground, at x=0 m  
θ_max=3472.63 N; max tension in the left part of the cable, at x=7.33987 m  
θ+max=3217.68 N; max tension in the right part of the cable, at x=7.66066 m  
v_max=9.18417 m/s (=33.063 km/h); maximum speed  
v_fin=8.85889 m/s (=31.892 km/h); final speed
```

