Chap 3 (Partie2)

Résolution par Tableaux de simplexe

On commence par la transformation des contraintes d'inégalité en contraintes d'égalité en introduisant des variables d'écart.

Étape 1

On construit un tableau à deux dimensions $r_x s$ où le nombre de colonnes r est égal au nombre de variables (les variables de décision plus les variables d'écart) dans le système plus une colonne de solution. Le nombre de lignes est égal au nombre d'équation dans le système sans considération des contraintes de positivité.

A la première itération, on sélectionne la variable qui a le coefficient le **plus élevé** dans la ligne objective (fonction objective). On encadrent la colonne de la variable entrante que l'on appelle " **colonne pivot".**

Étape 2

On calcule le minimum du rapport du coefficient du membre de droite de chaque contrainte sur le coefficient correspondant à la colonne. Dans le cas ou le coefficient dans la colonne entrante est négatif ou infini, on ne le compte pas dans le calcul du minimum. On encadre alors la ligne ou le minimum se produit. Cette ligne reçoit le nom de **"ligne pivot".**

Le coefficient qui se trouve à l'intersection de la colonne pivot et de la ligne pivot est appelé **"élément pivot".**

Étape 3

On reconstruit le tableau du simplexe (il faut conserver la même dimension du tableau). On commence, d'abord, par construire la nouvelle ligne pivot qui se calcule de la manière suivante :

$$Nouvelle \quad ligne \quad pivot = \frac{Ancienne \quad ligne \quad pivot}{Element \quad pivot}$$

Puis, on calcule les autres lignes par la formule suivante :

Toutes les autres lignes y compris z=

(Ligne actuelle)-(l'élément de sa colonne pivot) * (nouvelle ligne pivot)

Exemple : Une entreprise disposant de 10 000 m2 de planches de bois en réserve fabrique et commercialise 2 types de boîtes en bois. La fabrication d'une boîte en bois de type 1 et de type 2 requiert, respectivement, 1 et 2 m2 de bois ainsi que 2 et 3 minutes de temps d'assemblage. Seules 200 heures de travail sont disponibles pendant la semaine à venir. Les boites sont clouées et, il faut quatre fois plus de clou pour une boîte du second type que pour une du premier. Le stock de clous disponible permet d'assembler au maximum 15 000 boîtes du premier type. Les boites sont vendues, respectivement, 3 et 5 du chiffre d'affaires.

Formulation du problème :

x_1 : quantité de boîtes en bois de type 1

x_2 : quantité de boîtes en bois de type 2

$$\text{Max } z = 3x_1 + 5x_2$$

Sous les contraintes :

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 \leq 10\,000 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 12\,000 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 15\,000 \\ & x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad 2.28$$

Après avoir mis le programme linéaire sous sa forme standard

$$\text{Max } z = 3x_1 + 5\,x_2$$

S.c.

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 10\,000 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12\,000 \\ & x_1 + 4x_2 + x_5 = 15\,000 \\ & x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad 2.29$$

On peut réécrire le programme linéaire en fonction de toutes les variables du système (variables de décision et variables d'écarts)

$$\text{Max } z = 3x_1 + 5\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5$$

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + x_3 + 0\,x_4 + 0x_5 = 10\,000 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 0\,x_3 + x_4 + 0\,x_5 = 12\,000 \\ & x_1 + 4x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + x_5 = 15\,000 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \text{ et } x_5 \geq 0 \end{aligned} \qquad 2.30$$

Puis, nous faisons juste une translation vers un tableau comme suit :

Itération 1

	z	x1	x2	x3	x4	x5	sol
z	-1	3	5	0	0	0	0
x3	0	1	2	1	0	0	10000
x4	0	2	3	0	1	0	12000
x5	0	1	4	0	0	1	15000

Dans ce tableau, nous allons définir la colonne pivot, la ligne pivot et l'élément pivot. Nous commençons par la colonne pivot. Pour ce faire, nous sélectionnerons la variable qui a le coefficient le **plus élevé** dans la ligne de la fonction objective qui est le 5 de la variable x2. Donc la colonne pivot est la colonne du x_2.

Ensuite, nous définirons la ligne pivot en divisant chaque solution par les éléments correspondants dans la colonne pivot.

$$10000/2 = 5000$$

$$12000/3 = 4000$$

$$15000/4 = 3750$$

On choisit la plus petite valeur. Dans ce cas c'est la valeur de : 3750. Ce qui correspond à la dernière ligne du tableau qui sera la ligne pivot.

Itération 1

Colonne pivot

	z	x1	x2	x3	x4	x5	sol	
z	-1	3	5	0	0	0	0	
x3	0	1	2	1	0	0	10000	5000
x4	0	2	3	0	1	0	12000	4000
x5	0	1	4	0	0	1	15000	3750

Ligne Pivot

Élément Pivot

L'intersection entre la colonne pivot et la ligne pivot, nous donne l'élément pivot qui est égal à 4

Itération 2

Une fois l'élément pivot déterminé, on calcule la nouvelle ligne pivot en divisant l'ancienne ligne par l'élément pivot, ce qui donne :

$$\frac{0}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{0}{4} \quad \frac{0}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{15000}{4}$$

$$0 \quad 0.25 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0.25 \quad 3750$$

On la place dans le nouveau tableau en conservant la même position que dans le premier tableau sauf que la variable dans la colonne pivot prend la place de la variable de la ligne pivot comme suit :

	z	x1	x2	x3	x4	x5	sol
z							
x3							
x4							
x2	0	0,25	1	0	0	0,25	3750

Ensuite, on remplit toutes les autres lignes par la formule suivante :

(Ligne actuelle)-(l'élément de sa colonne pivot) * (nouvelle ligne pivot)

On applique le principe sur la ligne 3 (variable x4)

Ligne actuelle $0 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1200$

L'élément de sa colonne pivot : 3

Nouvelle ligne pivot : $0 \quad 0.25 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0.25 \quad 3750$

Résultats obtenus pour cette ligne :

$$0 \quad 1.25 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -0.75 \quad 750$$

Et de la même manière, on applique le même calcule pour les lignes de x3 et de z. On les pace dans les zones appropriées dans le tableau de la deuxième itération.

	z	x1	x2	x3	x4	x5	sol	
z	-1	1,75	0	0	0	-1,25	-18750	
x3	0	0,5	0	1	0	-0,5	2500	5000
x4	0	1,25	0	0	1	-0,75	750	600
x2	0	0,25	1	0	0	0,25	3750	15000

À la fin de cette itération, on vérifie tous les coefficients de ligne z. S'ils sont négatifs ou nuls on s'arrête. On a trouvé la solution optimale. Ce n'est pas le cas ici, la valeur de x1 est positive. On construit donc une nouvelle itération et un nouveau tableau de la même manière que pour l'itération2.

Itération 3

	z	x1	x2	x3	x4	x5	sol
z	-1	0	0	0	-1,4	-0,2	-19800
x3	0	0	0	1	-0,4	-0,2	2200
x1	0	1	0	0	0,8	-0,6	600
x2	0	0	1	0	-0,2	0,4	3600

D'après le tableau de l'itération 3 on remarque que les coefficients de la ligne z, sont négatifs ou nuls. Donc on s'arrête. On a trouvé la solution optimale avec :

$$x_1 = 600$$
$$x_2 = 3600$$
$$z = 19800$$