TD1 – Lois de probabilités discrètes

1 – Lois usuelles en R

Le logiciel R connaît les principales lois de probabilités, aussi bien discrètes que continues ; pour chaque loi R permet

- ⋆ de simuler un (ou plusieurs tirages) suivant cette loi : c'est à dire de produire des nombres aléatoires dont la distribution suit la loi donnée : ce sont les fonctions commençant par `r` comme random
- ⋆ de calculer la fonction de densité de probabilité (pour les lois continues) ou les probabilités élémentaires de cette loi : fonctions commençant par `d` comme distribution
- ⋆ de calculer la fonction de répartition de la loi : fonctions commençant par `p`
- ⋆ de calculer la fonction de quantile qui est la réciproque de la fonction de répartition : fonctions commençant par `p`

Exercice 1 **Loi binomiale**

Par exemple pour la loi binomiale, on a :

```
n <- 20
p <- 0.3
bin <- rbinom(1000, n, p)
```

La variable `bin` contient un vecteur de 1000 entiers entre 0 et 20 inclus.
Chaque entier correspond à une expérience binomiale $\mathscr{B}(20, 0.3)$: répéter 20 fois une expérience de Bernoulli qui a une chance de succès de 30% et de compter le nombre de succès.

La commande `plot(bin)` affiche graphiquement chacune des 1000 valeurs, dans l'ordre dans lequel elles ont été tirées.

1. Comment connaître le nombre de fois où l'entier 5 apparaît dans le vecteur ?
2. Comment afficher le tableau donnant l'effectif de chaque modalité ?
3. Comment calculer la moyenne et l'écart type du vecteur `bin` ? Est-ce loin de l'espérance et de l'écart-type d'une varaible aléatoire suivant la même loi binomiale ?
4. Affichez l'histogramme de `bin`
5. A l'aide de la fonction `dbinom` donnez les probabilités élémentaires correspondant aux modalites 5, 6, 7 et comparez-les avec les résultats obtenus par simulation
6. Vérifiez que les résultats sont justes avec la formule de la loi binomiale (`choose` donne les coefficients binomiaux)
7. Affichez dans un diagramme en baton, la loi $\mathscr{B}(20, 0.3)$
8. Affichez sur l'intervalle $[0, 20]$ la fonction de répartition et identifiez graphiquement les valeurs approchées de la Médiane, de Q_1 et de Q_3
9. Utilisez `dbinom` pour retrouver les valeurs ci-dessus et pour calculer le premier et le dernier décile ainsi que la distance interdécile $D_9 - D_1$

Exercice 2 **Loi hypergéométrique**

Pour la loi hypergéométrique, la fonction qui donne les probabilités élémentaires de $\mathscr{H}(N,K,n)$ est `dhyper(N, K, n, k)` pour des valeurs de k entre 0 et n.
Dans la situation où $N = 100, K = 30, n = 10$ (c'est à dire que dans une population de 100 individus, parmi lesquels 30 présentent ca caractéristique étudiée on tire au hasard sans ordre et sans remise 10 individus et l'on compte parmi eux ceux qui présentent cette caractéristique)

1. Affichez dans un diagramme en baton la loi $\mathscr{H}(100, 30, 10)$
2. Quel est la médiane, Q_1, Q_3 ?
3. Simulation : simulez l'expérience aléatoire 1000 fois et stockez les résultats dans un vecteur. Quelle est la moyenne, l'écart-type ?
4. Donnez un histogramme de la simulation
5. Vérifier si l'on peut approcher les densités de la loi géométrique par une loi binomiale. Laquelle ?

Exercice 3 **Poker**

Lorsqu'on distribue 5 cartes à partir d'un paquet de 52 cartes, est-il plus probabble d'avoir un poker (n'importe lequel) ou une couleur (5 cartes de la même "couleur") ?

Exercice 4 **Simuler l'extraction d'un échantillon**

La fonction `sample(ensemble, n)` permet d'échantillonner aléatoirement (par défaut sans remise) n éléments dans l'ensemble.

1. Avec `expand.grid` puis `paste` générer un paquet de 52 cartes
2. Tirer au sort 5 cartes parmi les 52

Exercice 5 **Loi de Poisson**

1. Dessinez la densité de probabilités d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$
2. Dessinez sa fonction de répartition
3. Simulez 1000 tirages de la même loi et comparez la moyenne et l'écart-type mesurés par rapport aux valeurs théoriques
4. Quelle est la médiane de la loi de Poisson ?
5. Pour X suivant une loi $\mathscr{B}(60, 0.05)$ calculez la probabilité $P(X = 5)$ et comparez avec la valeur donnée par une loin de Poisson.