

# **SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES**

N'DRI VALERIE

NOVEMBRE 2017

# Table des matières

<b>Objectifs</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>I - CARACTÉRISATION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES</b>	<b>5</b>
A. Généralités.....	5
<b>II - Exercice</b>	<b>7</b>
<b>III - Exercice</b>	<b>8</b>
<b>IV - RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS PAR LA MÉTHODE DE GAUSS</b>	<b>9</b>
A. Résolution des systèmes triangulaires.....	9
B. Mise en œuvre de la méthode de Gauss.....	9
C. Écriture matricielle.....	10
D. Exercice.....	10
E. Exercice.....	10
<b>Solution des exercices</b>	<b>12</b>

# Objectifs

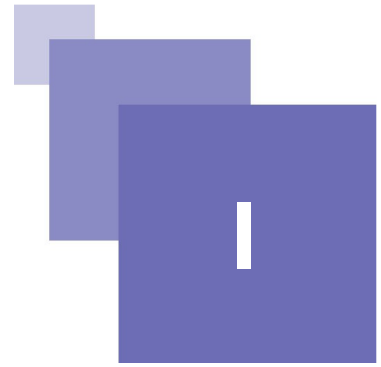
- Caractériser un système d'équation linéaire
- Appliquer la méthode de Gauss dans divers contexte.

# Introduction



Les systèmes linéaires interviennent dans de nombreux contextes d'applications car ils forment la base calculatoire de l'algèbre linéaire. Ils permettent également de traiter une bonne partie de la théorie de l'algèbre linéaire en dimension finie.

# CARACTÉRISATION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES



## A. Généralités

### Définition

Un système d'équations est un **ensemble d'équations** ayant une ou plusieurs inconnues, que l'on cherche à résoudre simultanément. Une solution du système est la donnée de valeurs de toutes les inconnues, vérifiant les équations.

### Exemple

est un système (S) d'équations d'inconnues  $(x, y, z)$ .

Une solution du système est la donnée de valeurs  $(x_0, y_0, z_0)$  de  $(x, y, z)$  vérifiant (S).

### Exemple

Le système admet comme solution  $(-18, -6, 1)$ , c'est à dire

Par contre  $(7, 2, 0)$  ne satisfait que la première équation. Ce n'est donc pas une solution du système.

### Définition

On dit que deux systèmes sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

### Transformations équivalentes

Les transformations suivantes changent tout **système** en un système **équivalent** :

1. échanger deux lignes,
2. multiplier une ligne par un réel non nul,
3. ajouter une ligne à une autre ligne.

## ***Fondamental***

---

Un système d'équations linéaires n'a soit **aucune solution**, soit **une seule solution**, soit une **infinité de solutions**.

### *Définition : Systèmes homogènes*

---

Un système d'équations linéaires est dit **homogène** si toutes les **constantes** sont **nuls** ( c'est à dire le **second membre** est **nul** ).

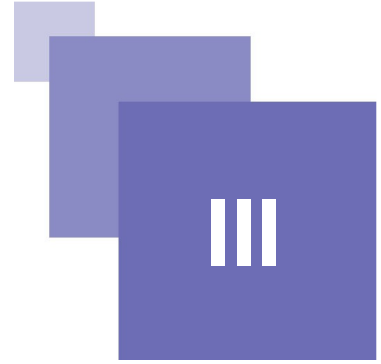
### *Remarque*

---

Les systèmes d'équations linéaires homogènes ont **toujours au moins une solution**.

<input type="checkbox"/>	Un système linéaire a toujours une solution.
<input type="checkbox"/>	Un système linéaire est équivalent au système homogène correspondant.
<input type="checkbox"/>	Un système homogène a toujours le second membre nul.
<input type="checkbox"/>	Pour obtenir un système équivalent à un autre, on peut trouver des combinaisons linéaires entre les lignes.

# Exercice



[Solution n°2 p 12]

*Un système linéaire triangulaire se résout plus rapidement qu'un système linéaire quelconque de même taille.*

☐

Vrai

☐

Faux



# RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS PAR LA MÉTHODE DE GAUSS

IV

## Objectifs

Appliquer la méthode de Gauss dans divers contextes.

## A. Résolution des systèmes triangulaires

### Méthode

Soit le système où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les inconnues.

Résoudre un tel système est aisé : on résout la dernière équation, puis la seconde en reportant la valeur de  $z$  puis la première en reportant les valeurs de  $y$  et  $z$ .

Un tel système est dit "**triangulaire**". Il admet une seule solution : le triplet

## B. Mise en œuvre de la méthode de Gauss

### Méthode

Résoudre le système :

Il faut, pour cela, **se ramener à un système triangulaire** en effectuant des opérations sur les lignes (un système linéaire a même ensemble de solutions que le système obtenu en remplaçant une ligne par une combinaison linéaire de cette ligne et d'une autre ligne).

La méthode utilisée s'appelle "**méthode du pivot de Gauss**". On choisit la première ligne  $L_1$  comme pivot, on remplace la deuxième ligne par  $L_2 - 2L_1$  (on multiplie les deux membres de  $L_1$  par 2 pour avoir le même coefficient de  $x$  que dans  $L_2$ , puis on soustrait à  $L_1$ , ce qui annule le coefficient de  $x$ ), et on remplace la dernière ligne par  $L_3 + L_1$  pour la même raison.

On obtient :

Il reste à "éliminer"  $y$  en remplaçant la dernière ligne par  $L_3 + L_2$

On obtient finalement .

Le système obtenu est triangulaire, l'ensemble des solutions est :

## C. Écriture matricielle

Soit à résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues suivant, dans lequel les équations sont numérotées  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ :

### Méthode

Ceci s'écrit aussi matriciellement sous la forme :

#### Première étape :

L'une des équations sert de pivot et permet d'éliminer une inconnue dans les équations suivantes. Prenons par exemple la 1ère équation pour pivot, et éliminons la variable  $x$  dans les deux autres :

.

#### Deuxième étape :

Reprenons la 1ère étape sur le système formé des équations n'ayant plus que 2 inconnues,  $E_2$  et  $E_3$ , et éliminons la variable  $y$  dans la dernière équation en prenant, par exemple,  $L_2$  comme pivot :

On obtient ainsi un système triangulaire, qu'il est alors facile de résoudre, en commençant par déterminer la variable  $z$ , puis, en remontant,  $y$  et enfin  $x$ . Enfin, on obtient :

## D. Exercice

[Solution n°3 p 12]

Soit le système linéaire suivant :

Les solutions de ce systèmes sont :

☐

$x=0$  ;  $y=1$

☐

$x=1$  ;  $y=0$

☐

$x=1$  ;  $y=1$

☐

Il n'y a pas de solutions

## E. Exercice

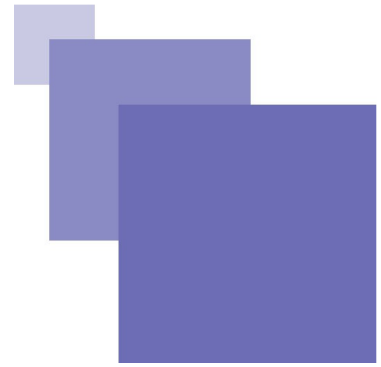
[Solution n°4 p 12]

Soit le système triangulaire suivant :

*Ce système a pour solution :*

<input type="radio"/>	
<input type="radio"/>	
<input type="radio"/>	
<input type="radio"/>	

# Solution des exercices



## > Solution n°1 (exercice p. 7)

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/>            | Un système linéaire a toujours une solution.  |
| <input type="checkbox"/>            | Un système linéaire est équivalent au système homogène correspondant.                                       |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Un système homogène a toujours le second membre nul.  |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Pour obtenir un système équivalent à un autre, on peut trouver des combinaisons linéaires entre les lignes. |

## > Solution n°2 (exercice p. 8)

- |                                  |      |
|----------------------------------|------|
| <input checked="" type="radio"/> | Vrai |
| <input type="radio"/>            | Faux |

## > Solution n°3 (exercice p. 10)

- |                                     |                           |
|-------------------------------------|---------------------------|
| <input type="checkbox"/>            | $x=0 ; y=1$               |
| <input checked="" type="checkbox"/> | $x=1 ; y=0$               |
| <input type="checkbox"/>            | $x=1 ; y=1$               |
| <input type="checkbox"/>            | Il n'y a pas de solutions |

## > Solution n°4 (exercice p. 10)

- |                                  |  |
|----------------------------------|--|
| <input type="radio"/>            |  |
| <input type="radio"/>            |  |
| <input checked="" type="radio"/> |  |
| <input type="radio"/>            |  |