FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE : DÉRIVATION

Version 1

Dr Euloge KOUAME

Septembre 2017

Table des matières

Objectifs

À la fin de cette leçon, vous serez capable de :

- **Comprendre** la notion de dérivée et son interprétation ;
- **Calculer** les dérivées de fonctions ;
- **Utiliser** les théorèmes liés à la dérivabilité pour résoudre des problèmes de calcul.

Définitions de la dérivabilité

I

A. Dérivée en un point

Soit $f : I \to R$ une fonction définie sur un intervalle I de R. Soit $x_0 \in I$.

Définition : Définition 1.

f est **dérivable en x_0** si **le taux d'accroissement** $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0.

La limite s'appelle alors le **nombre dérivé** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Définition : Définition 2.

f est **dérivable sur I** si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f , elle se note f' ou df/dx.

Exemple

La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x + x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 2x_0.$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$, autrement dit : $f'(x) = 2x$.

B. Autres formulations de la dérivabilité

Proposition 1.

- *f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie.*
- *f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ (qui sera $f'(x_0)$) et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ avec*

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\ell + (x-x_0)\epsilon(x).$$

Proposition 2.

Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \to R$ une fonction.

- *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .*
- *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Remarque

La réciproque est **fausse** : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

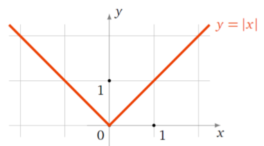
En effet, le taux d'accroissement de $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$ vérifie :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il y a bien une limite à droite (qui vaut +1), une limite à gauche (qui vaut -1) mais elles ne sont pas égales :

il n'y a pas de limite en 0. Ainsi f n'est pas dérivable en $x = 0$.

Cela se lit aussi sur le dessin, il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche, mais elles ont des directions différentes.



C. Exercice

Question 1

Montrer que la fonction $f(x) = x^3$ est dérivable en tout point $x_0 \in R$ et que $f'(x_0) = 3x^2_0$.

Indice :

appliquer la définition et effectuer les calculs

Question 2

Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en tout point $x_0 > 0$ et que $f'(x_0) = 1/2\sqrt{x_0}$

Question 3

Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ (qui est continue en $x_0 = 0$) n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

Calcul des dérivées

II

A. Somme, Produit

Proposition 3.

Soient f, $g : I \to R$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ *où λ est un réel fixé*
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ (si $f(x) \neq 0$)
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (si $g(x) \neq 0$)

B. Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable. Le tableau de droite est celui des compositions (voir paragraphe suivant), u représente une fonction $x \mapsto u(x)$.

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Remarque

Si vous devez dériver une fonction avec un exposant dépendant de x il faut absolument repasser à la forme exponentielle.

Par exemple si $f(x) = 2^x$ alors on réécrit d'abord $f(x) = e^{x \ln 2}$ pour pouvoir

calculer $f'(x) = \ln 2 .\ e^{x\ln 2} = \ln 2 .\ 2^x$.

C. Composition

Proposition 4.

Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g o f$ est dérivable en x de dérivée :

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).\ f'(x)$

Exemple

Calculons la dérivée de $\ln(1 + x^2)$. Nous avons $g(x) = \ln(x)$ avec $g'(x) = 1/x$; et $f(x) = 1 + x^2$ avec $f'(x) = 2x$. Alors la dérivée de $\ln(1 + x^2) = g \circ f(x)$ est :

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).\ f'(x) = g'(1 + x^2).\ 2x = 2x/(1 + x^2)$

Corollaire 1.

Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective dont on note $f\text{-}1 : J \to I$ la bijection réciproque.

Si f' ne s'annule pas sur I alors $f\text{-}1$ est dérivable et on a pour tout $x \in J$:

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}$$

Dérivées successives

Soit $f : I \to R$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to R$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la **dérivée seconde** de f . Plus généralement on note : $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ et $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Si la **dérivée n-ième** $f^{(n)}$ existe on dit que f est **n fois dérivable**.

D. Exercice

Question 1

calcluer les derivees des fonctions suivantes :

$f_1(x) = x\ln x$, $f_2(x) = \sin(1/x)$, $f_3(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$,

$f_4(x) = \left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$, $f_5(x) = x^x$

Question 2

[*Solution n°1 p 19*]

Soit f :]1,+∞[U]-1,+∞[définie par f (x) = x ln(x) - x. f est une bijection (vous pouvez le prouver) . Notons g = f^{-1}. Calculer g(0) et g'(0).

Question 3

Calculer la dérivée seconde de f (x) = ln(1 + x)

Extremum et Théorèmes fondamentaux

III

A. Extremum local

Définition

Soit f : I → R une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que x_0 est un **point critique** de f si $f'(x_0) = 0$.
- On dit que f admet un **maximum local en x_0** (resp. un **minimum local en x_0**) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

pour tout $x \in I \cap J$, $f(x) \leq f(x_0)$

(resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

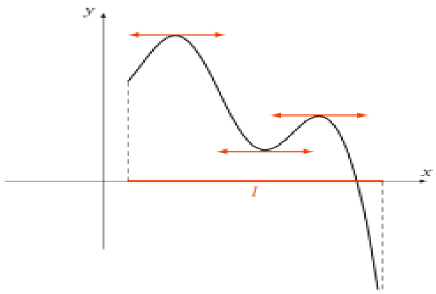
- On dit que f admet un **extremum local en x_0** si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.

Théorème 1.

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to R$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque

En d'autres termes, un maximum local (ou un minimum local) x_0 est toujours un point critique. Géométriquement, au point $(x_0, f(x_0))$ la tangente au graphe est horizontale.



Remarque

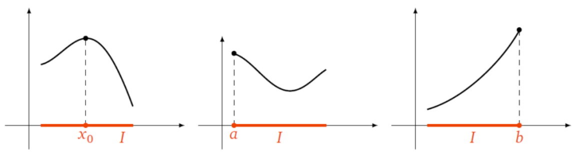
1. La réciproque du théorème 1 est fausse. Par exemple la fonction $f : R \to R$, définie par $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais $x_0 = 0$ n'est ni maximum local ni un minimum local.

2. L'intervalle du théorème 1 est ouvert. Pour le cas d'un intervalle fermé, il faut faire attention aux extrémités.

Par exemple si $f : [a, b] \to R$ est une fonction dérivable qui admet un extremum en x_0, alors on est dans l'une des situations suivantes :

- $x_0 = a$,
- $x_0 = b$,
- $x_0 \in]a, b[$ et dans ce cas on a bien $f'(x_0) = 0$ par le théorème 1.

  Aux extrémités on ne peut rien dire pour f'(a) et f'(b), comme le montre les différents maximums sur les dessins suivants.



3. Pour déterminer $max_{[a,b]}\, f$ et $min_{[a,b]}\, f$ (où $f : [a, b] \to R$ est une fonction dérivable) il faut comparer les valeurs de *f* aux différents points critiques et en *a* et en *b*.

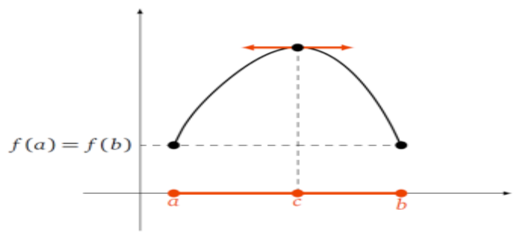
B. Théorème de Rolle

Théorème 2.

Soit $f : [a, b] \to R$ telle que

- *f est continue sur [a, b],*
- *f est dérivable sur]a, b[,*
- *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



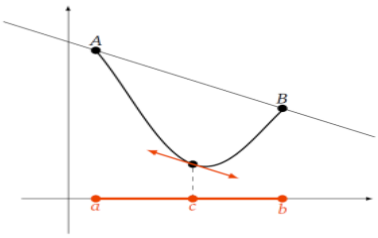
C. Théorème des accroissements finis

Théorème 3.

Soit f : [a, b] → R une fonction continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[. Il existe c ∈]a, b[tel que

f (b) - f (a) = f'(c) (b - a)

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de *f* où la tangente est parallèle à la droite *(AB)* où *A= (a, f (a)) et B = (b, f (b)).*



D. Fonction monotonie et dérivée

Corollaire 2.

Soit f : [a, b] → R une fonction continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[.

1. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ est croissante ;
2. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ est décroissante ;
3. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ est constante ;
4. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ est strictement croissante ;
5. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ est strictement décroissante.

Remarque

La réciproque au point *(4)* (et aussi au *(5)*) est fausse. Par exemple la fonction *x3* est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en *0*.

E. Règle de l'Hospital

Corollaire 4 (Règle de l'Hospital).

Soient f , g : I → R deux fonctions dérivables et soit x_0 ∈ I. On suppose que

- *$f(x_0) = g(x_0) = 0$,*
- *$\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$*

$$\boxed{\textit{Si} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \quad \textit{alors} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.}$$

Méthode

1. La limite *l* peut être finie ou infinie.
2. La règle de l'Hospital n'est à utiliser qu'en cas d'indétermination de la forme " 0/0" .

Exemple

Calculer la limite en 1 de $\frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$. On vérifie que :

- $f(x) = \ln(x^2+x-1)$, $f(1) = 0$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$,
- $g(x) = \ln(x)$, $g(1) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{x}$,
- Prenons $I =]0,1]$, $x_0 = 1$, alors g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \xrightarrow[x \to 1]{} 3.$$

Donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to 1]{} 3.$$

F. Exercice

Question 1

[*Solution n°2 p 19*]

Calculer en quel point la fonction f (x) = $ax^2 + bx + c$ admet un extremum local.

Question 2

Soit f : [0,2] → R une fonction deux fois dérivable telle que f (0) = f (1) = f (2) = 0. Montrer qu'il

existe c_1, c_2 tels que $f'(c_1) = 0$ et $f'(c_2) = 0$. Montrer qu'il existe c_3 tel que $f''(c_3) = 0$.

Question 3

[*Solution n°3 p 19*]

Soit f (x) = √x. Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle [100, 101].

En déduire l'encadrement 10 + 1/22 ≤ √101 ≤ 10+ 1/20.

Question 4

[*Solution n°4 p 19*]

Appliquer la règle de l'Hospital pour calculer les limites suivantes (quand x → 0) : x /($(1 + x)^n$ - 1) ; ln(x + 1)/ √x ;

(1- cos x)/tan x ; (x - sin x)/x^3 .

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 13)

utiliser la définition : $f(g(x)) = x$. calculer $f(g(x)$ et remplacer x par 0 puis déduire le résultat. $g(0) = e$.

$g'(0) = 2$.

> Solution n°2 (exercice p. 18)

$-b/2a$

> Solution n°3 (exercice p. 18)

utiliser un encadrement de la dérivée de f pour déduire. ($1/22 \leq f' \leq 1/20$

> Solution n°4 (exercice p. 18)

$1/n$; 1 ; 0 ; $+\infty$. pour le dernier cas appliquez la règle aux dérivées successives (ordre 2).

Bibliographie

[04] François Liret, Maths en pratique à l'usage des étudiants Cours et exercices, Dunod, 2006

[04] Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak, PROBLÈMES D'ANALYSE I, Exercices et corrigés, EDP Sciences, 2008.

Webographie

[04] http://www.discmath.ulg.ac.be/