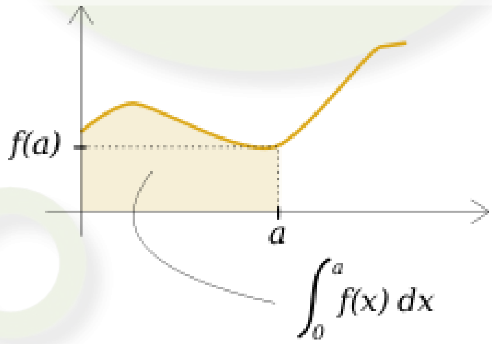
Calcul de Primitives et d'Intégrales



Version 1

Dr Euloge KOUAME © UVCI

Novembre 2017

Table des matières

Objectifs

À la fin de cette leçon, vous serez capable de :

- Calculer **les primitive** d'une fonction ;
- **Utiliser** les primitives pour calculer les intégrales.

Primitive d'une fonction

I

A. Définition

Définition

Soit $f : I \rightarrow R$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque. On dit que $F : I \rightarrow R$ est **une primitive** de f sur I si F est une *fonction dérivable* sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

Exemple

Soit I = R et f : R → R définie par $f(x) = x^2$. Alors F : R → R définie par $F(x) = x^3/3$ est une primitive de f . La fonction définie par $F(x) = x^3/3 + 1$ est aussi une primitive de f .

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes. En effet

Proposition

Soit $f : I \rightarrow R$ une fonction et soit $F : I \rightarrow R$ une primitive de f . Toute primitive de f s'écrit ***G = F + c*** *où*

$c \in R$ est une constante.

Remarque

la notation $\int f(x)d(x)$ désigne une primitive de f(x). (sans préciser de bornes)

Ainsi si F est une primitive de f alors il existe c tel que $F = \int f(x)d(x) + c$

Proposition

Soient F une primitive de f et G une primitive de g. Alors F + G est une primitive de f + g. Et si λ ∈ R alors λF est une primitive de λf .

Nous verrons que pour calculer , le plus simple est de trouver une primitive de f .
Il faudra donc connaître par cœur un certain nombre de primitives simples.

$fonction\ (n \in \mathbb{R})$	$primitive$
x	$\frac{x^2}{2} + C$
x^2	$\frac{x^3}{3} + C$
$1/x$	$\ln(x) + C$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C(\text{si } n \neq -1)$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x + C$
e^x	$e^x + C$
$a^x = e^{x\ln(a)}$	$a^x / \ln(a) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + C$
$1/(1+x^2)$	$\arctan(x) + C$

B. Relation primitive-intégrale

Théorème

Soit f : [a, b] → R une fonction continue. La fonction F : I → R définie par

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

est une primitive de f , c'est-à-dire F est dérivable et F'(x) = f (x).

Par conséquent pour une primitive F quelconque de f :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$$

Notation : On note $\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple

1. Pour f (x) = e^x , une primitive est F(x) = e^x donc

$$\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

2. Pour g(x) = x^2 , une primitive est G(x) = $x^3/3$ donc

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}.$$

Remarque

1. F(x) = $\int_a^x f(t)\,dt$ est ***l'unique primitive de f qui s'annule en a***.

2. On évitera la notation $\int_a^x f(x)\,dx$ où la variable x est présente à la fois aux bornes et à l'intérieur de l'intégrale. Mieux vaut utiliser la notation $\int_a^x f(t)\,dt$ pour éviter toute confusion.

3. Une fonction intégrable n'admet pas forcément une primitive. Considérez par exemple les fonctions en escalier que nous avons vu dans le cours précédent.

C. Exercice

Question

[Solution n°1 p 17]

Calculer les intégrales suivantes : $\int_0^1 x^3 dx$, $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$,

$$\int_0^1 4x^3 + \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Calcul de Primitive et d'intégrales

II

Nous allons voir différentes techniques pour calculer des primitives et des intégrales à partir des primitives simples que nous connaissons déjà.

A. Intégration par parties

Théorème

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$.

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx}$$

La formule ***d'intégration par parties (IPP)*** *pour les primitives est la même mais sans les bornes :* $\displaystyle\int u(x)v'(x)\,dx = [uv] - \int u'(x)v(x)\,dx.$

Remarque

La difficulté lorsqu'on utilise la formule d'IPP est de choisir les deux fonctions *f(x)* et *g'(x)* de telle sorte que la nouvelle intégrale *f'(x)g(x)dx* soit plus facile

à calculer ! Logiquement le facteur *g'(x)* doit être une fonction dont on connaît une primitive, l'autre facteur *f(x)* sera ensuite dérivé et devra faire apparaître une simplification.

Exemple

1. Calcul de $\int_0^1 xe^x\,dx$

On pose u(x) = x et v'(x) = e^x . Nous aurons besoin de savoir que u'(x) = 1 et qu'une primitive de v' est simplement v(x) = e^x . La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x\,dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx\\ &= \big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx\\ &= \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx\\ &= \left(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0\right) - \big[e^x\big]_0^1\\ &= e-(e^1-e^0)\\ &= 1\end{aligned}$$

2. Calcul de $\int x^2e^x\,dx$

On pose u = x*2* et v' = e*x* pour obtenir :

$$\int x^2e^x\,dx = \left[x^2e^x\right] - 2\int xe^x\,dx$$

On refait une deuxième intégration par parties pour calculer

$$\int xe^x\,dx = \left[xe^x\right] - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + c$$

D'où $$\int x^2e^x\,dx = (x^2-2x+2)e^x + c.$$

B. Changement de variable

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et φ : J → I une bijection de classe C1. Pour tout a, b ∈ J

$$\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt}$$

Remarque

Voici un moyen simple de s'en souvenir. En effet si l'on note x = φ(t) alors par dérivation on obtient

dx/dt = φ'(t) donc d x = φ'(t) dt. D'où la substitution

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Exemple

Calcul de $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$.

Soit le changement de variable $u = \varphi(x) = 1 - x^2$. Alors $du = \varphi'(x)\, dx = -2x\, dx$. Pour $x = 0$ on a $u = \varphi(0) = 1$ et pour $x = \frac{1}{2}$ on a $u = \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Comme $\varphi'(x) = -2x$, φ est une bijection de $[0, \frac{1}{2}]$ sur $[1, \frac{3}{4}]$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{x\, dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_1^{3/4} \frac{\frac{-du}{2}}{u^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int_1^{3/4} u^{-3/2}\, du \\ &= -\frac{1}{2}\Big[-2u^{-1/2}\Big]_1^{3/4} = \Big[\frac{1}{\sqrt{u}}\Big]_1^{3/4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.\end{aligned}$$

C. Intégration des fractions rationnelles

On souhaite d'abord intégrer les fractions rationnelles $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$

avec *α, β, a, b, c ∈ R, a≠ 0 et (α, β) ≠ (0, 0).*

Premier cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
Alors $f(x)$ s'écrit aussi $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_1)(x-x_2)}$ et il existe des nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$.
On a donc

$$\int f(x)\, dx = A \ln|x - x_1| + B \ln|x - x_2| + c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$, $]x_2, +\infty[$ (si $x_1 < x_2$).

Deuxième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$.

Alors $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_0)^2}$ et il existe des nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{A}{(x-x_0)^2} + \frac{B}{x-x_0}$. On a alors

$$\int f(x)\, dx = -\frac{A}{x - x_0} + B \ln|x - x_0| + c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty, x_0[$, $]x_0, +\infty[$.

Troisième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ ne possède pas de racine réelle.
Voyons comment faire sur un exemple.

Exemple : Calcul de I= $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1}dx$.

La fraction rationnelle $\frac{2x}{x^2+x+1}$ est un élément simple de seconde espèce.

I= $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$ - $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx$

Nous avons : $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \left[\ln(x^2+x+1)\right]_0^1$ =ln(3).

Pour le calcul de J= $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx$.

$$J=\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right)}dx = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}dx$$

$$= \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(u^2+1\right)}\frac{\sqrt{3}}{2}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(u^2+1\right)}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan(u)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}.$$

Conclusion : I= $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1}dx$ =ln(3)- $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2\arctan\left(\sqrt{3}\right)-\frac{\pi}{2}\right)$ = ln(3)- $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$.

I = ln(3)- $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Remarque

En résumé une primitive d'une fraction rationnelle est une combinaison de polynômes, fractions rationnelles, logarithmes et fonctions arc-tangentes.

D. Exercice

Question 1

[*Solution n°2 p 17*]

Calcul de primitive de : x^3 ; $3x^4$; x√x ; 1/√x ; $2/x^4$

Question 2

[*Solution n°3 p 17*]

calculer la primitive de $(2x+1)^3$

Question 3

[*Solution n°4 p 18*]

Calculer $\int_1^2 x\ln(x)dx$.

Question 4

[*Solution n°5 p 18*]

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{3x+1}\right)dx$$

Question 5

[*Solution n°6 p 18*]

Calculer une primitive de $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1}$.

Question 6

[*Solution n°7 p 18*]

calculer $\int_2^3 \frac{2}{x^2-1} dx$

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 9)

$$\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

ou encore :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

On peut combiner ces résultats par linéarité :

$$\begin{aligned} \int_0^1 4x^3 + \frac{1}{1+x^2} dx &= \left[x^4 + \arctan(x)\right]_0^1 \\ &= 1 + \arctan(1) - (0 + \arctan(0)) = 1 + \frac{\pi}{4} \\ \int_0^1 4x^3 + \frac{1}{1+x^2} dx &= 4\int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= 4 \times \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

> Solution n°2 (exercice p. 14)

Utiliser la formule de la primitive du monôme x^n en choisissant convenablement n dans chaque cas.

> Solution n°3 (exercice p. 14)

Utiliser la formule generale suivante (ce qui revient a faire un changement de variable) que vous devez retenir :

$$\int f'(ax+b)dx = \frac{f(ax+b)}{a} + C$$

Ainsi, f(x) = *(1/4). x^4*

> Solution n°4 (exercice p. 14)

faire une intégration par parties en posant : *u'(x) = x* et *v(x) = lnx*

> Solution n°5 (exercice p. 14)

Faire un changement de variable en posant *t = 3x+1*

> Solution n°6 (exercice p. 15)

$$f(x) = \frac{(4x+1)\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2x^2+x+1}$$

On peut intégrer la fraction $\frac{4x+1}{2x^2+x+1}$:

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln\left|2x^2+x+1\right| + c$$

Occupons nous de l'autre partie $\frac{1}{2x^2+x+1}$, nous allons l'écrire sous la forme $\frac{1}{u^2+1}$ (dont une primitive est $\arctan u$).

$$\begin{aligned}\frac{1}{2x^2+x+1} &= \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} + 1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8}} \\ &= \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{\frac{8}{7}2(x+\frac{1}{4})^2 + 1} = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2 + 1}\end{aligned}$$

On pose le changement de variable $u = \frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})$ (et donc $du = \frac{4}{\sqrt{7}}dx$) pour trouver

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2x^2+x+1} &= \int \frac{8}{7} \frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2 + 1} = \frac{8}{7} \int \frac{du}{u^2+1} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan u + c = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right) + c\,.\end{aligned}$$

Finalement :

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+x+1\right) + \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right) + c$$

> Solution n°7 (exercice p. 15)

utiliser la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$