Leçon 3 : Dipôle en régime sinusoïdale ou variable

GOKPEYA Nessemou Eric @ 2017

Août 2017
1.0

Table des matières

Objectifs

- Savoir modéliser les circuits électriques complexes en continu
- Savoir modéliser les circuits électriques comportant des condensateurs et des bobines
- Faire les calculs en association des dipôles électrique en régime alternatif et variable ;
- Savoir calculer les puissance consommées en régime variable

Modélisation de dipôle actif en continue

I

Objectifs

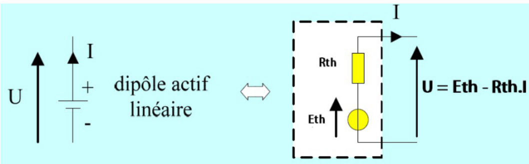
Étudier les méthodes de modélisation de dipôle actif en régime continue

1. Théorème de THEVENIN et de NORTON

Toute portion de circuit comprise entre *2 bornes A et B* et qui ne contient que des éléments linéaires peut être modélisée par *un unique générateur équivalent de Thévenin ou de Norton.*

Générateur de Thevenin

Un dipôle actif linéaire peut être modélisé par une source de *tension continue parfaite* E_{th} *en série avec une résistance interne* R_{th} :



Méthode de détermination des paramètre Eth et Rth

- La valeur de Eth correspond à la tension à vide (sans la charge) entre les deux bornes de calcul.

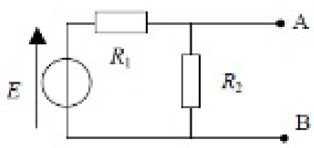
- La résistance interne R_{th} du générateur est la résistance équivalente entre les bornes de calculs. Pour calculer cette résistance, on éteint toutes les sources d'alimentations (les générateurs de tension sont remplacé par des fil et les sources de courant sont remplacé par des circuit ouvert).

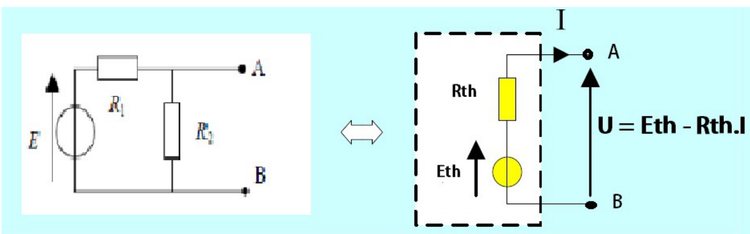
Exemple : calcul de Eth et Rth

Étudions le cas ci-dessous pour la modélisation du générateur entre deux bornes.

on considère le schéma ci-dessous avec le générateur de fem E.

on veut remplacer l'ensemble de ce circuit par un générateur équivalent de Thévenin de fem Eth et de résistance interne R_{th}





Calcul de Eth :

C'est la même que la valeur de la *tension existante "à vide" entre A et B*, c'est à dire celle que relèverait un voltmètre idéal placé entre les bornes A et B.

En appliquant la méthode du pont diviseur de tension, Eth est la tension aux bornes de R2. On obtient : $E_{TH} = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot E$

Calcul de Rth :

on éteint la source de tension E = 0 (remplacé par un fil - voir schéma équivalent) :

$\mathrm{R_{th}} = R_{eq} = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$,

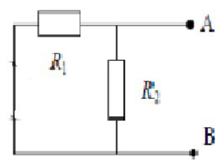
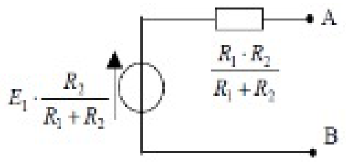


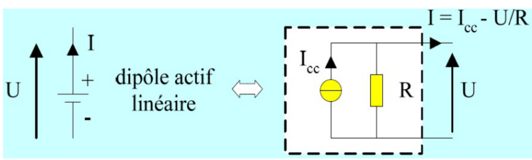
Schéma équivalent de Thévenin



L'intérêt est que l'on peut remplacer ensuite cette portion de circuit par le dipôle équivalent trouvé, ce qui peut faciliter la résolution d'un problème.

Générateur de Norton (In, Rn)

Un dipôle actif linéaire peut être modélisé par une source de courant continu parfaite I_{cc} (I_n) en parallèle avec une résistance interne R (R_n) :

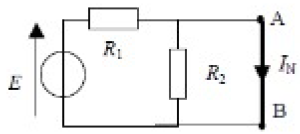


Le passage d'un modèle à l'autre se fait par les relations :

$E = R\ I_{cc}$ *ou* $Icc = E\ /\ R$

Pour calculer le courant In (courant de Norton), on relie les deux bornes par un fil.

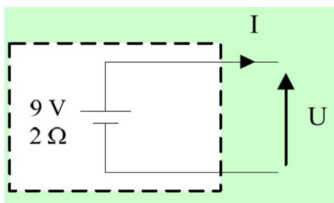
La figure ci-dessous donne une illustration

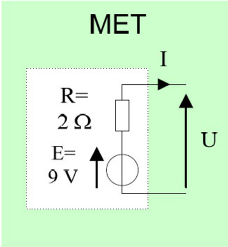


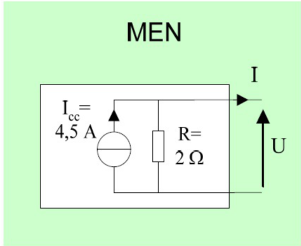
soit : $I_N = \dfrac{E}{R_1}$; R_2 étant court-circuitée.

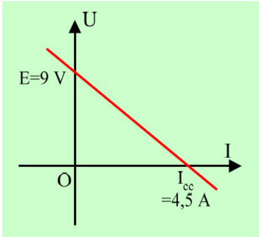
Exemple : Thévenin et Norton

Déterminez le modèle de Thevenin (MET), Norton (MEN) et la caractéristique U(I) du générateur suivant :







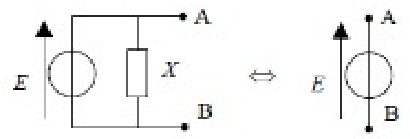


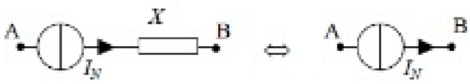
I = +1 A. Calculer U.

U = E – RI = 7 V

Remarque : Bon à savoir

Lorsqu'on cherche le modèle équivalent d'un circuit, on doit aussi appliquer les 2 règles suivantes :





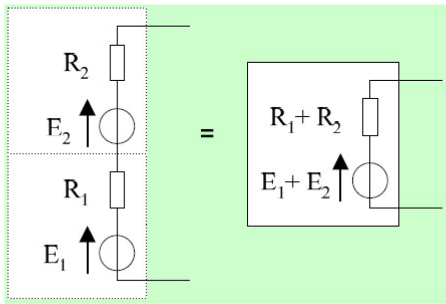
- *Tous les dipôles en parallèle avec une source de tension idéale peuvent être enlevés* :
  En effet le générateur idéal de tension impose la tension à ses bornes quels que soient les dipôles reliés à ces mêmes bornes.
  Si ce n'était pas le cas, ce ne serait pas un générateur idéal de tension.

- *Tous les dipôles en série avec une source de courant idéale* peuvent être enlevés : le générateur idéal de courant impose le courant qui le traverse quels que soient les dipôles en série avec lui..

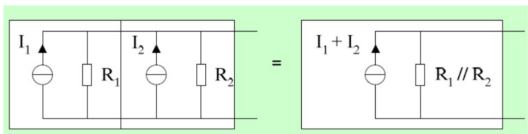
2. Association de dipôle

On peut utiliser l'équivalence des modèles de Thévenin et de Norton.

- En série on simplifie en utilisant le MET (Modèle Équivalent de Thevenin)



- En parallèle en utilisant le MEN (Modèle Équivalent de Norton):



3. Théorème de superposition

La tension [le courant] entre deux points *d'un circuit électrique linéaire* comportant *plusieurs sources* est égale à la somme des tensions [courants] obtenues entre les deux points lorsque chaque source agit seule.

Dans un circuit ne comportant que des éléments linéaires et plusieurs sources, on peut calculer le potentiel d'un nœud du circuit (ou le courant dans une branche) en faisant la somme des potentiels (ou des courants) obtenus lorsqu'on rend passif toutes les sources indépendantes sauf une.

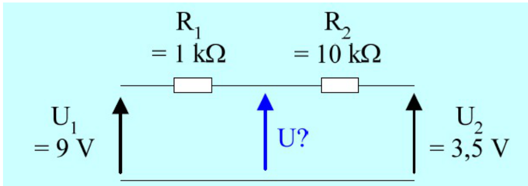
(Il est en revanche nécessaire de laisser les sources liées).

Remarque : N.B.

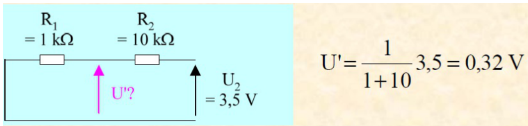
- Éteindre une source de tension revient à la remplacer par un fil (source de tension nulle).
- Éteindre une source de courant revient à l'ôter du circuit (source de courant nul).

Exemple : Application Numérique

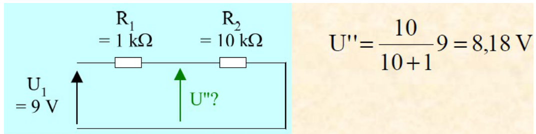
On désire calculer la tension U comme indiqué ci-contre :



Premier cas : Éteignons la source de tension U1.



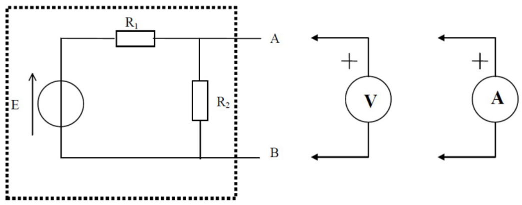
Deuxième cas : Éteignons la source de tension U2.



Finalement : U = U' + U'' = 8,5 V

4. Exercice

Une boîte noire contient trois dipôles E, R1 et R2.
E = 6 V ; R1 et R2 sont inconnues.
Avec le voltmètre on mesure 4,00 V.
Avec l'ampèremètre on mesure 0,50 A.
En déduire R1 et R2.



- ◯ R1 = 25 Ω et R2 = 11 Ω
- ◯ R1 = 13 Ω et R2 = 15 Ω
- ◯ R1 = 12,5 Ω et R2 = 25 Ω
- ◯ R1 = 12 Ω et R2 = 24 Ω

Étude du condensateur et de la bobine

II

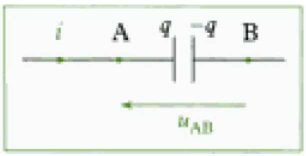
Objectifs

Savoir modéliser les circuits électriques comportant des condensateurs et des bobines

1. Le condensateur

Un condensateur est l'association de deux conducteurs en regard, appelés *armatures*. lorsqu'il est soumis à une différence de potentielle u non nulle, des charges opposées $q_A = q$

et $q_B = - q_A = - q$, s'accumulent sur les deux armatures.



Définition : Condensateur

La charge q_A d'un condensateur est proportionnelle à la tension u_{AB} à ses bornes. Le coefficient de proportionnalité C, exprimé en farad (F) , s'appelle la capacité du condensateur :

$$q_A = Cu_{AB}$$

- q_A charge en coulomb (C)
- C capacité en farad (F)
- u_{AB} tension en volt (V)

On étudie un condensateur en convention récepteur et on ne représente généralement que l'armature portant la charge q.

D'après la relation charge-tension, celle-ci est algébrique :

$q > 0$ si $u > 0$ et $q < 0$ si $u < 0$.

En convention récepteur, la relation charge-intensité s'écrit pour un condensateur :

$i = \dfrac{dq}{dt}$, où q est la charge du condensateur (C).

Des relations charge -tension et charge -intensité on obtient :

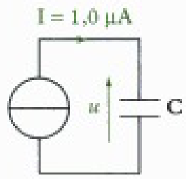
$$q = Cu \text{ et } i = \frac{dq}{dt}, \text{ d'où : } i = C\frac{du}{dt}.$$

La tension u(t) aux bornes du condensateur est toujours une fonction continue du temps.

Tension aux bornes d'un condensateur

Application 1 :

Un générateur de courant idéal débite un courant constant d'intensité $I = 1{,}0\ \mu A$ dans un condensateur de capacité $C = 100$ nF. Initialement, la tension u aux bornes du condensateur est nulle. Comment u varie-t-elle au cours du temps ?



Solution

En convention récepteur, on a :

$$i = I = C\frac{du}{dt}, \quad \text{soit : } du = \frac{I}{C}dt.$$

On intègre cette équation par rapport au temps :

$$u(t) = \frac{I}{C}t + \text{cte}, \quad \text{avec } u(t = 0) = 0.$$

On déduit des conditions initiales à $t = 0$:

$$\text{cte} = 0, \quad \text{d'où : } u(t) = \frac{I}{C}t, \quad \text{soit : } u(t) = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-9}}t = \mathbf{10}\boldsymbol{t}.$$

La tension u varie linéairement avec le temps.

Énergie d'un condensateur

L'énergie électrostatique $E_{élec}$ emmagasinée dans un condensateur soumis à la tension u est égale à l'énergie électrique reçue par le condensateur initialement déchargé lorsque la tension à ses bornes passe de 0 à u. Elle a pour expression[1] :

$$E_{élec} = \frac{1}{2}Cu^2$$

$E_{élec}$ énergie en joule (J)
C capacité en farad (F)
u tension en volt (V)

L'énergie E_{elec} emmagasinée par un condensateur est d'autant plus grande que *sa capacité est grande.*

Énergie emmagasinée dans un condensateur

Application 2 :

Calculer l'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité $C = 100$ nF chargé sous la tension constante $U = 10$ V.

Solution

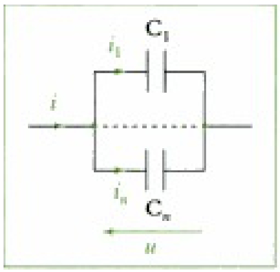
L'énergie du condensateur vaut :

$$E_{élec} = \frac{1}{2}CU^2, \quad \text{d'où : } E_{élec} = \frac{1}{2} \times 1{,}00 \cdot 10^{-7} \times 10^2 = 5{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{J} = \mathbf{5{,}0\ \mu J}.$$

2. Association de condensateur

Association en parallèle

On considère n condensateur associés en parallèle et soumis à la même tension u.
En convention récepteur, le condensateur k de capacité C_k est parcouru par le courant d'intensité ik telle que : $i_k = C_k \frac{du}{dt}$.



D'après la loi des nœuds, l'intensité i total s'écrit :

$$i = \sum_k i_k \text{, d'où : } i = \sum_k C_k \frac{du}{dt} = \left(\sum_k C_k\right)\frac{du}{dt}.$$

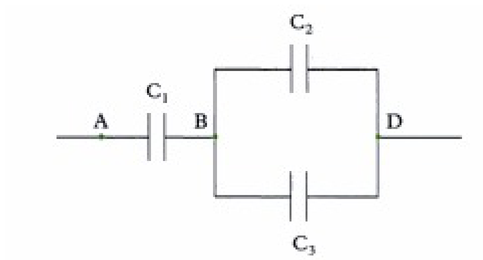
L'association en parallèle de condensateur parfait de capacité Ck est équivalente à un condensateur unique de capacité : $\mathbf{C = \sum_k C_k}$.

Association en série

L'association en série de condensateurs parfait de capacités Ck, est équivalent à un condensateur unique de capacité C telle que : $\mathbf{\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}}$.

Exemple : Association de condensateurs

Quelle est la capacité équivalente à l'association des trois condensateurs schématisés ci-dessous :



Solution

Entre les points B et D, la capacité du condensateur équivalent aux deux condensateurs en parallèle vaut :

$$C_{BD} = C_2 + C_3.$$

Entre les points A et D, le condensateur de capacité C_{BD} est lui-même en série avec le condensateur de capacité C_1. La capacité C du condensateur équivalent est donnée par la relation :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{BD}} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_1(C_2 + C_3)}, \quad \text{soit : } \mathbf{C = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}}.$$

3. La bobine

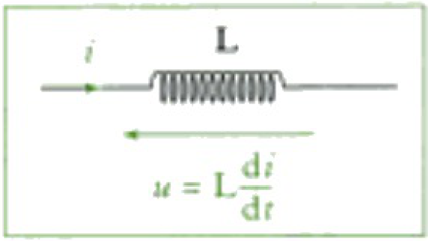
Une bobine est constituée par l'enroulement régulier d'un fil métallique conducteur. Elle peut être plate (enroulement constitué de quelques spires) ou longue (fil enroulé en hélice sur un cylindre).

Définition

La tension u aux bornes d'une bobine est promotionnelle à la dérivée par rapport au temps de l'intensité i du courant qui la traverse. En convention récepteur, le coefficient de proportionnalité L, exprimé en *henry* (H) s`appelle l'inductance propre de la bobine.

$$\mathbf{u = L\frac{di}{dt}}$$

u : Tension en volt (V) L : Inductance propre en henry (H)
i : Intensité en ampère (A)



La tension aux bornes de la bobine ne peut pas être infinie : l'intensité i du courant qui la traverse ne subit donc pas de discontinuité.

L'intensité *i(t)* du courant dans une bobine est toujours une fonction continue du temps.

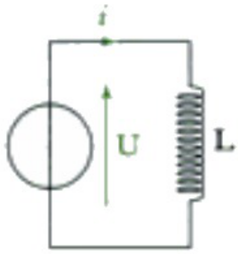
Exemple : Intensité dans une bobine

Une bobine d'inductance L = 100 mH est soumise à la tension constante U = 1,0 V. Initialement, l'intensité i du courant dans la bobine est nulle. Comment i varie-t'elle au cours du temps ?

Solution :

En convention récepteur, on a : $U = L\frac{di}{dt} \Rightarrow di = \frac{U}{L}dt$

On intègre cette équation par rapport à t : $i(t) = \frac{U}{L}t + cte$, avec $i(t=0) = 0$



On déduit des conditions initiales à t = 0 : $cte = 0$ d'où $i(t) = \frac{U}{L}t \Rightarrow i(t) = \frac{1,0}{100.10^{-3}}t = \mathbf{10\,t}$

L'intensité i du courant varie linéairement avec le temps.

Définition : Énergie d'une bobine

L'énergie magnétique E_{mag} emmagasinée dans une bobine traversée par un courant d'intensité i est égale à l'énergie électrique reçue par la bobine lorsque l'intensité passe de 0 à i. Elle a pour expression : $\mathbf{E_{mag} = \frac{1}{2}Li^2}$

E_{mag} : Énergie en joule (J) L : Inductance propre en henry (H) i : Intensité en ampère (A)

L'énergie E_{mag} emmagasinée dans une bobine est d'autant plus grande que son inductance L est grande.

Exemple : Énergie emmagasiné dans une bobine

Calculer l'énergie emmagasinée dans une bobine d'inductance L = 100 mH parcourue par un courant d'intensité I = 1.0 A.

Solution :

L'énergie de la bobine vaut : $E_{mag} = \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow E_{mag} = \frac{1}{2} \times 0,100 \times 1,0^2 = 5,0.10^2 J = \mathbf{50\ mJ}$

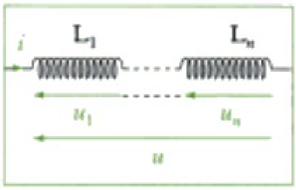
4. Association de bobine

On suppose que les influences des bobines présentes dans le circuit les unes sur les autres sont nulles.

Association en série

On considère n bobines parfaites associées en *série* traversées par le même courant d'intensité i. En convention récepteur, la tension aux bornes de la bobine k d'inductance L_k s'écrit :

$$\mathbf{u_k = L_k \frac{di}{dt}}$$



D'après la loi d'addition des tensions, la tension totale u s'écrit :

$$\mathbf{u = \sum_k u_k \Rightarrow u = \sum_k L_k \frac{di}{dt} = \left(\sum_k L_k\right) \frac{di}{dt}}$$

L'association en série de bobines d'inductance *Lk* est équivalente à une bobine unique d'inductance L telle que :

$$\mathbf{L = \sum_k L_k}$$

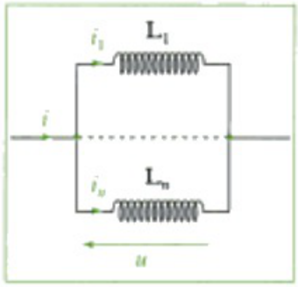
Association en parallèle de n bobines

On considère n bobines parfaites associées en parallèle et soumises à la même tension u. En convention récepteur, l'intensité i_k du courant traversant la bobine k d'inductance L_k vérifie :

$$\mathbf{u = L_k \frac{di_k}{dt} \Rightarrow \frac{di_k}{dt} = \frac{du}{dL_k}}$$

D'après la loi des nœuds, l'intensité totale i s'écrit :

$$\mathbf{i = \sum_k i_k \Rightarrow \frac{di}{dt} = \sum_k \frac{di_k}{dt} = \sum_k \frac{u}{L_k} = u \sum_k \frac{1}{L_k}}$$



L'association en parallèle de bobines d'inductance L_k est équivalente à une bobine unique d'inductance L telle que :

$$\mathbf{\frac{1}{L} = \sum_k \frac{1}{L_k}}$$

Le régime sinusoïdale ou variable

III

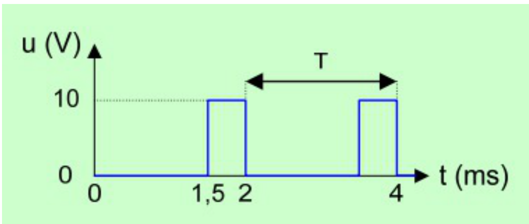
Objectifs

- Faire les calculs en association des dipôles électrique en régime alternatif et variable ;
- Savoir calculer les puissance consommées en régime variable

1. Grandeurs périodique

Période

Un signal périodique est caractérisé par sa période :
Exemple : $T = 2\ ms$.



Fréquence

La fréquence f (en hertz) correspond au nombre de périodes par unité de temps :
AN : T = 2 ms $\rightarrow f = 500\ Hz$ (500 périodes par seconde)

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Pulsation

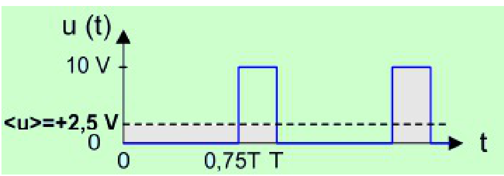
La pulsation est définie par : $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ (en radians par seconde)

Valeur moyenne

On note <u> la valeur moyenne dans le temps de la tension u(t) :

$$\boxed{< u > = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt}$$

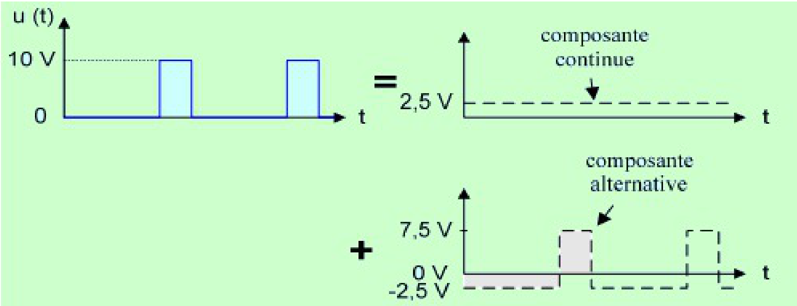
A.N : $< u > = \frac{1}{4} \times 10 = 2,5V$



Composante continue (DC =) et composante alternative (AC ~)

Une grandeur périodique a deux composantes :

- la composante continue (c'est la valeur moyenne ou « offset ») et
- la composante alternative
  $\mathbf{u(t)} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u_{AC}(t)}$



Remarques :

- la composante alternative a une valeur moyenne nulle : $\langle u_{AC} \rangle = 0$
- une grandeur périodique *alternative* n'a pas de composante continue : $\langle u \rangle = 0$

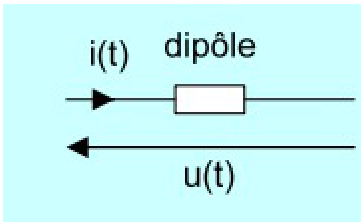
Puissance électrique

$p(t) = u(t)i(t)$ est la puissance électrique consommée à l'instant t (ou puissance instantanée).

En régime périodique, ce n'est pas p(t) qu'il est intéressant de connaître mais la puissance moyenne dans le temps :

$$P = \langle p \rangle = \langle ui \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$$

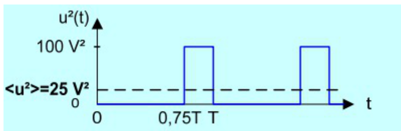
Attention : en général, $\langle ui \rangle \neq \langle u \rangle \langle i \rangle$



Valeur efficace (RMS)

Par définition, la valeur efficace U_{eff} de la tension *u(t)* est :

$$U_{eff} = \sqrt{\langle u^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$$



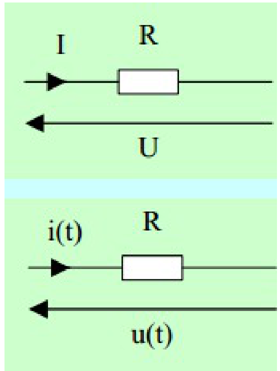
AN : $U_{eff} = \sqrt{100 \times \frac{1}{4}} = 5V$

Remarques :

La valeur efficace est une grandeur positive. : $\mathbf{U^2_{eff}} = \langle \mathbf{u} \rangle^2 + \mathbf{U^2_{ACeff}}$

La valeur efficace d'un courant électrique est : $\mathbf{I_{eff}} = \sqrt{\langle i^2 \rangle}$

Signification physique de la valeur efficace



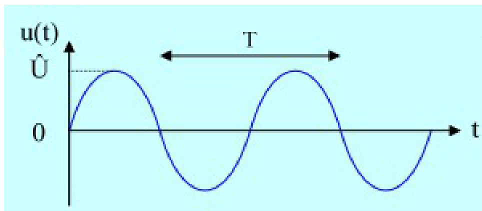
- Soit une résistance parcourue par un courant continu. La résistance consomme une puissance électrique :
  $P = RI^2 = U^2/R$ (loi de Joule)
- Soit la même résistance parcourue par un courant périodique *i(t)* de valeur efficace I_{eff}. La puissance moyenne consommée est :
  $P = \langle Ri^2 \rangle = R\langle i^2 \rangle = RI_{eff}^2 = U_{eff}^2/R$

Pour avoir les mêmes effets thermiques, il faut que I_{eff} soit égal à la valeur du courant en régime continu *I* (idem pour les tensions).
La notion de valeur efficace est liée à l'énergie.

Cas particulier des grandeurs sinusoïdales alternatives

Û désigne la tension maximale (ou tension crête)

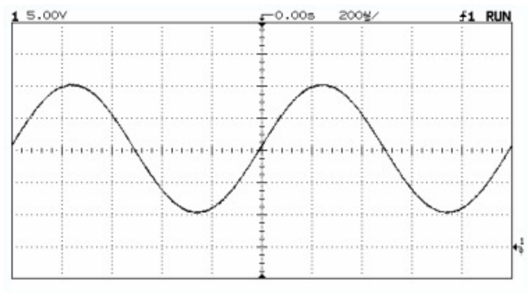
On montre que : $\boxed{U_{eff} = \dfrac{\hat{U}}{\sqrt{2}}}$



Exemple : La CIE fournit une tension sinusoïdale alternative de valeur efficace 230 V et de fréquence 50 Hz.

Pour un courant sinusoïdal alternatif : $\boxed{I_{eff} = \dfrac{\hat{I}}{\sqrt{2}}}$

A.N. Calculer la valeur efficace de la tension suivante :



$$U_{ACeff} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,07V$$

$\langle u \rangle = +\ 15$ V

$$U_{eff} = \sqrt{15^2 + 7,07^2} = 16,58V$$

2. Représentation des grandeurs sinusoïdales

Fonction mathématique

$$\mathbf{i(t)} = \hat{\mathbf{I}} \sin(\omega \mathbf{t} + \varphi_{\mathbf{i}}) = \mathbf{I_{eff}} \sqrt{2} \sin(\omega \mathbf{t} + \varphi_{\mathbf{i}})$$

avec

- I_{eff} : valeur efficace (A)
- ω : pulsation (rad/s)
- t : temps (s)
- $(\omega t + \varphi_i)$: phase (rad)
- φ_i : phase à l'origine (rad)

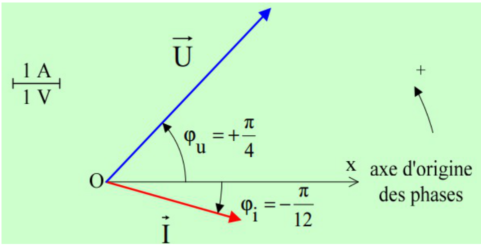
Représentation de Fresnel

C'est une représentation vectorielle des grandeurs sinusoïdales.

Le vecteur de Fresnel associé au courant *i(t)* est défini de la façon suivante :

- $\|\hat{\mathbf{I}}\| = \mathbf{I_{eff}}$ et
- $(\mathbf{Ox}, \hat{\mathbf{I}}) = \varphi_\mathbf{i}$

Exemple : $i(t) = 3\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{12})$ $u(t) = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$



Nombre complexe associé

Le nombre complexe $\underline{\mathbf{I}}$ associé au courant *i(t)* est défini de la façon suivante : $\underline{\mathbf{I}} = (\mathbf{I_{eff}}, \varphi_\mathbf{i})$

Le module correspond à la valeur efficace et l'argument à la phase à l'origine.

Exemple

Déterminer le nombre complexe associé à la tension : $u(t) = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$

$$\underline{U} = (5, +\frac{\pi}{4}) = 5\cos(+\frac{\pi}{4}) + 5\sin(+\frac{\pi}{4})j = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}j$$

3. Déphasage (ou différence de phase) entre deux grandeurs sinusoïdales

Soit deux grandeurs sinusoïdales (de même fréquence) :

- $\mathbf{i(t)} = \hat{\mathbf{I}}\,\mathbf{sin}(\omega\mathbf{t} + \varphi_\mathbf{i})$
- $\mathbf{u(t)} = \hat{\mathbf{U}}\,\mathbf{sin}(\omega\mathbf{t} + \varphi_\mathbf{u})$

Le déphasage de u par rapport à i est par convention : $\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i$

τ : décalage (en s) entre les deux signaux.

$$\frac{\tau}{\mathbf{T}} = \frac{\varphi(\mathbf{rad})}{\mathbf{2\pi}} = \frac{\varphi(°)}{\mathbf{360}}$$

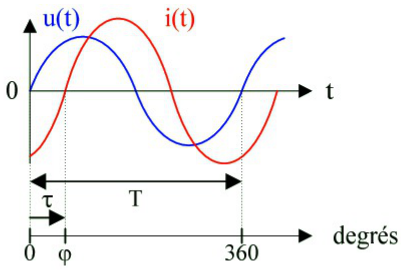


Fig 3.1

Déphasages particuliers

- Déphasage nul (τ = 0) :

les grandeurs sont en phase (Fig 3.2 a)

- Déphasage de 180° (τ = T/2) :

grandeurs en opposition de phase (Fig 3.2 b)

- Déphasage de 90° (τ = T/4) :

grandeurs en quadrature de phase (Fig 3.2 c)

$\varphi_{u/i} = +90°$: u est en quadrature avance sur i.

N.B. Le déphasage est une grandeur algébrique : $\varphi_{i/u} = -\varphi_{u/i}$

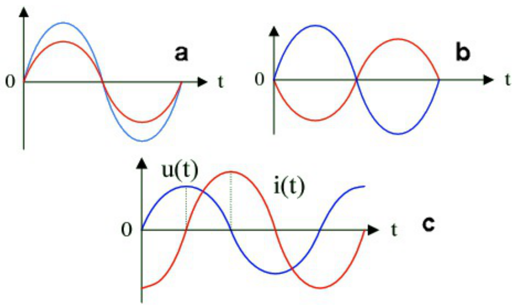
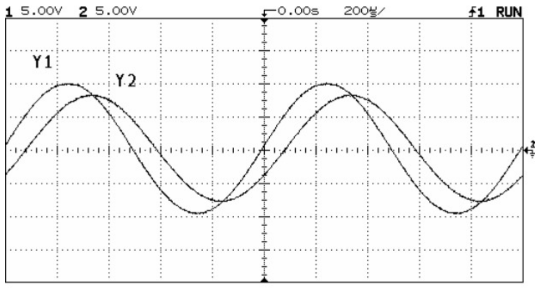


Fig 3.2

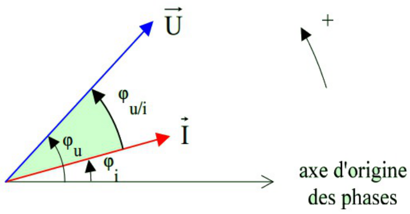
Ex : Calculer le déphasage $\varphi_{u1/u2}$

$\varphi_{u1/u2} = 360\,\frac{\tau}{T} = 360\,\frac{100\mu s}{1ms} = +36°$



Déphasage et vecteurs de Fresnel

$\varphi_{\mathbf{u/i}} = (\tilde{\mathbf{I}},\ \tilde{\mathbf{U}})$

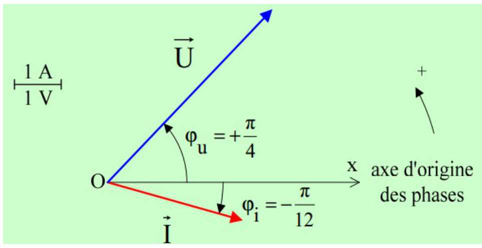


Déphasage et nombres complexes

$\varphi_{\mathbf{u/i}} = \varphi_{\mathbf{u}} - \varphi_{\mathbf{i}} = \mathbf{arg}(\underline{\mathbf{U}}) - \mathbf{arg}(\underline{\mathbf{I}})$

$\varphi_{\mathbf{u/i}} = \mathbf{arg}\left(\frac{\underline{\mathbf{U}}}{\underline{\mathbf{I}}}\right)$

AN : $\varphi_{u/i} = \frac{+\pi}{4} - \frac{-\pi}{12} = \frac{+\pi}{3} = +60°$



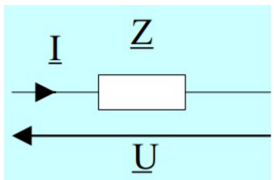
4. Les dipôles en régime sinusoïdales (Impédance et admittance complexe)

Impédance complexe

En régime continu, un dipôle passif linéaire est caractérisé par sa résistance : R = U/I (loi d'Ohm)

En régime sinusoïdal, un dipôle passif linéaire est caractérisé par son impédance complexe Z,

- L'impédance Z (en Ω) est le module de Z.
- Le déphasage de u par rapport à i correspond à l'argument de Z :
  $\mathbf{arg}(\underline{\mathbf{Z}}) = \varphi_{\mathbf{u/i}}$
- En définitive : $\underline{\mathbf{Z}} = (\mathbf{Z}, \varphi_{\mathbf{u/i}}) = (\frac{\mathbf{U_{eff}}}{\mathbf{I_{eff}}}, \varphi_{\mathbf{u/i}})$



$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}$ $\boxed{Z(\Omega) = \frac{U_{eff}(V)}{I_{eff}(A)}}$

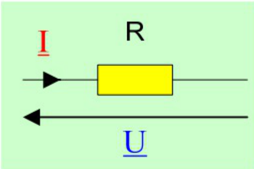
Admittance complexe

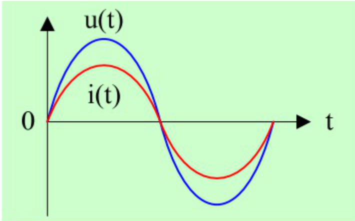
L'*admittance complexe* est l'inverse de l'impédance complexe : $\underline{\mathbf{Y}} = \frac{\mathbf{1}}{\underline{\mathbf{Z}}}$

Y est l'admittance (en *siemens* S) : $\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I_{eff}}}{\mathbf{U_{eff}}}$ et $\mathbf{arg}(\underline{\mathbf{Y}}) = -\mathbf{arg}(\underline{\mathbf{Z}}) = \varphi_{\mathbf{i/ui}}$

Dipôles passifs élémentaires en régime sinusoïdal

- Résistance parfaite

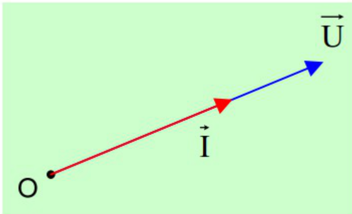




$$\underline{Z}_R = R \qquad \begin{cases} Z_R = R \\ \varphi_{u/i} = 0° \end{cases}$$

$$U_{eff} = RI_{eff} \text{ (loi d'Ohm)}$$

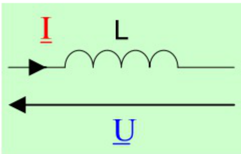
$$\underline{Y}_R = G = \frac{1}{R}$$

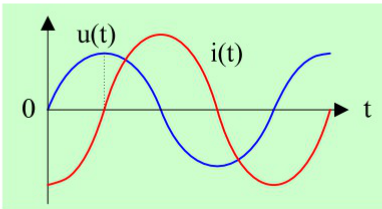


- Bobine parfaite

L : inductance d'une bobine (en henry H)

L'impédance d'une bobine augmente avec la fréquence.

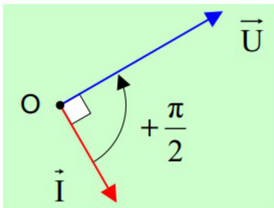




$$\underline{Z}_L = jL\omega \qquad \begin{cases} Z_L = L\omega \\ \varphi_{u/i} = +90° \end{cases}$$

$$U_{eff} = L\omega I_{eff}$$

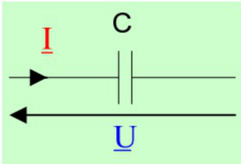
$$\underline{Y}_L = -\frac{j}{L\omega}$$

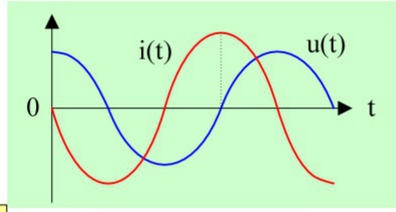


- Condensateur parfait

C : capacité en farad F (corps humain 200 pF)

L'impédance d'un condensateur diminue avec la fréquence.

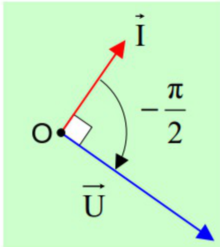




$$\underline{Z}_C = -\frac{j}{C\omega} \qquad \begin{cases} Z_C = \dfrac{1}{C\omega} \\ \varphi_{u/i} = -90° \end{cases}$$

$$U_{eff} = \frac{I_{eff}}{C\omega}$$

$$\underline{Y}_C = jC\omega$$



5. Études des circuits linéaires en régime sinusoïdale

Un circuit électrique linéaire est composé uniquement de dipôles linéaires :

- passifs : R, L, C
- actifs : source de courant ou de tension sinusoïdal (de fréquence f)

Dans un tel circuit, tensions et courants sont sinusoïdaux (de fréquence f). On peut donc utiliser :

- la représentation vectorielle ou
- les nombres complexes associés.

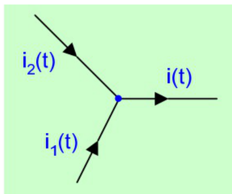
5.1. Lois de Kirchhoff

- *Loi des nœuds*

$\mathbf{i(t) = i_1(t) + i_2(t)}$

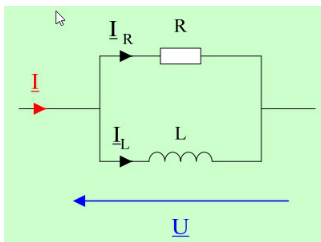
Pour les vecteurs de Fresnel : $\tilde{\mathbf{I}} = \tilde{\mathbf{I}}_1 + \tilde{\mathbf{I}}_2$

Pour les nombres complexes associés : $\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{I}}_2$



Exemple

Une mesure au multimètre (en mode AC ~) donne : $I_{R\ eff} = 5{,}00$ mA, $I_{L\ eff} = 3{,}98$ mA . Calculer la valeur efficace du courant i(t) et le déphasage par rapport à la tension u(t) : $\varphi_{u/i}$



Utilisons une construction vectorielle :

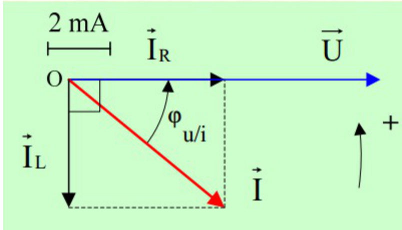
$\varphi_{u/i_R} = (\vec{I}_R, \vec{U}) = 0°$

$\varphi_{u/i_L} = (\vec{I}_L, \vec{U}) = +90°$

$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L$

$I_{eff} = \sqrt{I_{Reff}^2 + I_{Leff}^2} = 39,6\,mA$ (théorème de Pythagore)

$\tan\varphi_{u/i} = \dfrac{I_{Leff}}{I_{Reff}}$ d'où : $\boldsymbol{\varphi_{u/i}} = +38{,}5\ °$



En raison des déphasages, la loi des nœuds ne s'applique pas aux valeurs efficaces.

Loi des branches / Loi des mailles

$\mathbf{u(t) = u_1(t) + u_2(t)}$

Pour les vecteurs de Fresnel : $\mathbf{\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2}$

Pour les nombres complexes associés : $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}_\mathbf{1} + \underline{\mathbf{U}}_\mathbf{2}$

La loi des branches ne s'applique pas aux valeurs efficaces.

5.2. Association de dipôles passifs linéaires

Une association de dipôles passifs linéaires se comporte comme un dipôle passif linéaire. On note $\underline{Z}_{eq}$ l'impédance complexe équivalente de ce dipôle.

- En série, les impédances complexes s'additionnent :

  $\boxed{\underline{Z}_{éq} = \sum_i \underline{Z}_i}$

- En parallèle, les admittances complexes s'additionnent :

  $\boxed{\underline{Y}_{éq} = \sum_i \underline{Y}_i}$ ou $\boxed{\dfrac{1}{\underline{Z}_{éq}} = \sum_i \dfrac{1}{\underline{Z}_i}}$

Exemple

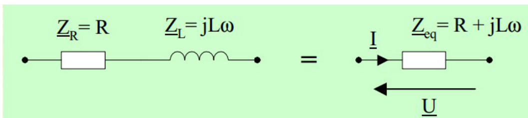
On en déduit la relation entre les valeurs efficaces :

$U_{eff} = Z_{eq} \,.\, I_{eff}$ avec

$Z_{eq} = \left|\underline{Z}_{eq}\right| = |R + jL\omega| = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$

et le déphasage : $\varphi_{u/i} = arg\,\underline{Z}_{eq} = \arctan\left(\dfrac{L\omega}{R}\right)$

Remarque : sauf exception $Z_{eq} \neq \sum_i Z_i$



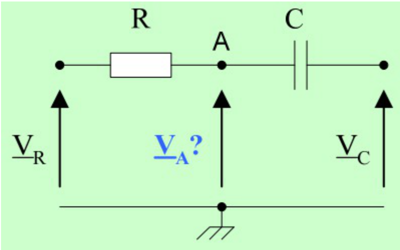
5.3. Théorèmes généraux

Les formules et théorèmes vus en régime continu (diviseur de tension, Thévenin – Norton, superposition ...) se généralisent au régime sinusoïdal.

Analogies :

	Régime continu	Régime sinusoïdal
Tension	U	$\underline{U}$
Courant	I	$\underline{I}$
Résistance / Impédance complexe	R	$\underline{Z}$
Conductance / Admittance complexe	G	$\underline{Y}$
Source de tension parfaite	E	$\underline{E}$
Source de courant parfaite	Icc	$\underline{Icc}$

Exemple : Théorème de Millman



Expression de $\underline{V}_A$

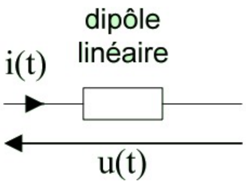
$$\underline{V}_A = \frac{\frac{\underline{V}_R}{R} + jC\omega\underline{V}_C}{\frac{1}{R} + jC\omega}$$

6. Puissance en régime sinusoïdale

On montre que la puissance moyenne consommée (ou puissance active) est :

$P = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi_{u/i}$

Le terme $\cos\varphi$ est appelé *facteur de puissance.*



Exemple

Calculer la puissance active d'un condensateur parfait.

On sait que : $\varphi_{u/i}$ = -90° P = 0 watt (pas d'échauffement)