DÉVELOPPEMENT LIMITÉS

Dr EULOGE KOUAME © UVCI

Octobre 2017

Table of contents

Objectives

- *Connaître* la formule de Taylor-Young ;
- Calculer *les développements limités* des fonctions
- *Utiliser* les développements limités.

DÉFINITIONS

I

1. Formule de Taylor-Young

Pour n'importe quelle fonction, nous allons trouver le polynôme de *degré n* qui approche le mieux la fonction. Les résultats ne sont valables que pour x autour d'une valeur fixée (ce sera souvent autour de 0). Ce polynôme sera calculé à partir des *dérivées successives* au point considéré.

Definition

Soit I un intervalle ouvert. Pour entier non nul N, on dit que *f : I R* est une fonction de *classe* C^n , si f est n fois dérivable sur I et f (n) est continue.

f est de *classe* C^0 si f est continue sur I.

Théorème (Formule de Taylor-Young)

Soit *f : I R* une fonction de classe C^n et soit *a I* . Alors pour tout *x I* on a :

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x), \end{aligned}}$$

où est une fonction définie sur I telle que $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0.$

Notation :

Le terme *(x - a)*^{n}*(x)*)se note souvent *« petit o »* de (x - a)^n : *o((x - a)*^{n}*)*.

Cas particulier : Formule de Taylor-Young au voisinage de 0.

On se ramène souvent au cas particulier où a = 0, la formule de Taylor-Young s'écrit alors :

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)}$$

la notation « petit o » donne : $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

Example

Soit f :] - 1,+[→ R, f(x) = ln(1 + x) ; f est infiniment dérivable. Nous allons calculer les formules de Taylor en 0 pour les premiers ordres.

Tous d'abord f (0) = 0. Ensuite f '(x) = 1/(1+x) donc f '(0) = 1. Ensuite f ''(x) = - 1/((1+x)^2 donc f ''(0) = - 1. Puis f $^{(3)}$(x) = +2 /(1+x)^3 donc f $^{(3)}$(0) = +2.

Voici donc les premiers polynômes de Taylor :

$$T_0(x) = 0 \qquad T_1(x) = x \qquad T_2(x) = x - \frac{x^2}{2} \qquad T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

2. Développements limités au voisinage d'un point

Definition

On dit que *f* admet un *développement limité (DL)* au point *a* et à *l'ordre n*, s'il existe des réels c_0, c_1, . . . , c_n et tels pour tout $x \quad I$:

$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + \ldots + c_n(x - a)^n + (x - a)^n(x).$

- L'égalité précédente s'appelle un DL de f au voisinage de a à l'ordre n .
- Le terme $c_0 + c_1(x - a) + \ldots + c_n(x - a)^n$ est appelé la *partie polynomiale* du DL.
- Le terme $(x - a)^n\varepsilon(x)$ est appelé *le reste* du DL

Note

- Si *f* est de classe C^n au voisinage d'un point *a* alors f admet un DL au point *a* à l'ordre *n*, qui provient de la formule de Taylor-Young.

- Ainsi, un DL de f en 0 à l'ordre n est l'expression :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Propriétés

1. Si f admet un DL alors ce DL est unique.

2. Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Par exemple *cos x* est paire et nous verrons que son DL en 0 commence par : $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \ldots$

DL des fonctions usuelles à l'origine

DL en 0 de fonctions classiques a apprendre.

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha\frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

avec les cas particuliers :

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\alpha = -1 \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Résumé en videos

vidéo 1 :https://www.youtube.com/watch?v=NS8rgBoYP_g

vidéo 2 :https://www.youtube.com/watch?v=AUxYKDT2h5E

vidéo 3 :https://www.youtube.com/watch?v=AyNPJFwrVwQ

vidéo 4 :https://www.youtube.com/watch?v=KE2beb3gaSI

vidéo 5 :https://www.youtube.com/watch?v=oPu37zxrCPs

3. Opérations sur les développements limités

Somme et produit

On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des DL en 0 à l'ordre n :

$f(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n + x^n\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = d_0 + d_1 x + ... + d_n x^n + x^n\varepsilon_\varepsilon(x)$

- *f + g* admet un DL en 0 l'ordre n qui est :

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + ... + (c_n + d_n)x^n + x^n\varepsilon(x)$.

- *f . g* admet un DL en 0 l'ordre n qui est : $(f \,.\, g)(x) = f(x).\, g(x) = T_n(x) + x^n\varepsilon(x)$
  où $T_n(x)$ est le polynôme $(c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n) \,.\, (d_0 + d_1 x + ... + d_n x^n)$ tronqué à l'ordre n.

Tronquer un polynôme à l'ordre n signifie que l'on conserve seulement les monômes de *degré n* .

Composition

Soit $f(x) = C(x) + x^n\varepsilon_1(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n + x^n\varepsilon_1(x)$

et g(x) = D(x) + $x^n\varepsilon_2(x)$ = $d_0 + d_1\,x + ... + d_n\,x^n + x^n\varepsilon_2(x)$

Si g(0) = 0 (c'est-à-dire $d_0 = 0$) alors la fonction f o g admet un DL en 0 à l'ordre n dont la partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre n de la composition C(D(x)).

Division

Soient f (x) = $c_0 + c_1\,x + ... + c_n\,x^n + x^n\varepsilon_1(x)$ et g(x) = $d_0 + d_1\,x + ... + d_n\,x^n + x^n\varepsilon_2(x)$

Pour obtenir le DL d'un quotient f/g.

On va utiliser le DL de 1/(1+u) = 1 - u + u^2 - u^3 + ...

1. Si $d_0 = 1$ on pose $u = d_1\,x + \dots + d_n\,x^n + x^n \;\, _2(x)$ et le quotient s'écrit *f/g = f x 1/(1+u)*.

2. Si d_0 est quelconque avec $d_0 \quad 0$ alors on se ramène au cas précédent en écrivant

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0}\,\frac{1}{1+\frac{d_1}{d_0}x+\cdots+\frac{d_n}{d_0}x^n+\frac{x^n\epsilon_2(x)}{d_0}}.$$

3. Si $d_0 = 0$ alors on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener aux cas précédents.

Autre méthode :

Soit $f\ (x) = C(x) + x^n \;\, _1(x)$ *et* $g(x) = D(x) + x^n \;\, _2(x)$. Alors on écrit la division suivant les puissances croissantes de *C* par *D* à l'ordre n :

$C = DQ + x^{n+1}R$ avec $degQ \quad n$. Alors Q est la partie polynomiale du DL en *0* à l'ordre *n* de *f/g*.

DL de $\frac{2+x+2x^3}{1+x^2}$ à l'ordre 2. On pose $C(x) = 2 + x + 2x^3$ et $g(x) = D(x) = 1 + x^2$ alors $C(x) = D(x) \times (2 + x - 2x^2) + x^3(1 + 2x)$. On a donc $Q(x) = 2 + x - 2x^2$, $R(x) = 1 + 2x$. Et donc lorsque l'on divise cette égalité par $D(x)$ on obtient $\frac{f(x)}{g(x)} = 2 + x - 2x^2 + x^2\epsilon(x)$.

Example:Exemples en vidéo

https://www.youtube.com/watch?v=_AS7bwOsxd4&index=3&list=PL024XGD7WCIHHlscC-_sfMg

4. Quiz

Question 1

Écrire le DL en 0 à l'ordre 3 de $\sqrt[3]{1+x}$. Idem avec $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Question 2

Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $\exp(x) - \frac{1}{1+x}$

Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $\sqrt{1+2\cos x}$,

Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $\ln(1+\sin x)$.

II

Applications des développements limités

1. Calculs de limites

Pour l'étude locale d'une fonction ou pour le calcul de limite on recherche un DL comportant au moins un terme non nul.

Pour le calcul des limites ayant des formes indéterminées ! Il suffit juste de remarquer que

si $f(x) = c_0 + c_1(x - a) + \dots$ *alors* $\lim_{xa} f(x) = c_0$.

Example

Limite en 0 de $\dfrac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2 \sin^2 x}$. Notons $f(x)/g(x)$ cette fraction.

En 0 on a $f(x) = \ln(1+x) - \tan x + (1/2)\sin^2 x = (x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + o(x^4)) - (x + x^3/3 + o(x^4)) + 1/2(x - x^3/6 + o(x^3))^2$

$f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{3}x^4) + o(x^4) = -\frac{5}{12}x^4 + o(x^4)$ *et* $g(x) = 3x^2 \sin^2 x = 3x^2 (x + o(x))^2 = 3x^4 + o(x4)$.

Ainsi, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-\frac{5}{12}x^4 + o(x^4)}{3x^4 + o(x^4)} = \frac{-\frac{5}{12} + o(1)}{3 + o(1)}$ en notant $o(1)$ une fonction (inconnue) tendant vers 0 quand $x\ 0$.

Donc $\lim_{x0} f(x)/g(x) = -5/36$.

Note : en calculant le DL à un ordre inférieur (2 par exemple), on n'aurait pas pu conclure, car on aurait obtenu $f(x)/g(x) = o(x^2)/o(x^2)$, ce qui ne lève pas l'indétermination. De façon générale, on calcule les DL à l'ordre le plus bas possible, et si cela ne suffit pas, on augmente progressivement l'ordre

2. Équation d'une courbe par rapport a sa tangente

Proposition

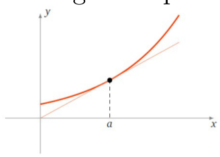
Soit $f : I\ \ R$ une fonction admettant un DL en a : $f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_k(x - a)^k + (x - a)^k (x)$, où k est le plus petit entier $\ 2$ tel que le coefficient c_k soit non nul. Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en a est : $y = c_0 + c_1(x - a)$

et la position de la courbe par rapport à la tangente pour x proche de a est donnée par le signe $f(x) - y$, c'est-à-dire le signe de $c_k(x - a)^k$.

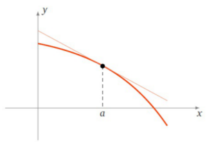
position de la courbe par rapport à la tangente

Il y a 3 cas possibles.

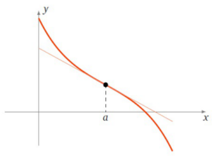
1. Si ce signe est positif alors la courbe est au-dessus de la tangente.



2. Si ce signe est négatif alors la courbe est en dessous de la tangente.



3. Si ce signe change (lorsque l'on passe de $x < a$ à $x > a$) alors la courbe traverse la tangente au point d'abscisse a. *C'est un point d'inflexion.*



Note : Si a est un point d'inflexion alors $f\,''(a) = 0$. (La réciproque est fausse.)

Example

Soit f (x) = $x^4 - 2x^3 + 1$.

1. Déterminons la tangente en 1/2 du graphe de f et précisons la position du graphe par rapport à la tangente.

On a f'(x) = $4x^3 - 6x^2$, f''(x) = $12x^2 - 12x$, donc f''(1/2) = -3 0 et k = 2.

On en déduit le DL de f en 1/2 par la formule de Taylor-Young : $f(x) = 13/16 - (x - 1/2) - 32\ (x - 1/2\ )^2 + (x - 1/2\ )^2(x)$

Donc la tangente en 1/2 est $y = 13/16 - (x - 1/2)$ et

le graphe de f est en dessous de la tangente car $f\,(x)- y$ est du signe de $- 32\ (x - 1/2)^2$ qui est négatif autour de x = 1/2.

2. Déterminons les points d'inflexion.

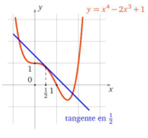
Les points d'inflexion sont à chercher parmi les solutions de f''(x) = 0. Donc parmi x = 0 et x = 1.

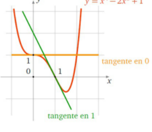
- Le DL en 0 est $f\,(x) = 1 - 2x^3 + x^4$ (il s'agit juste d'écrire les monômes par degrés croissants !).

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donc $y = 1$ (une tangente horizontale). Comme $-2x^3$ change de signe en 0 alors 0 est un point d'inflexion de f .

- Le DL en 1 : on calcule f (1), f'(1), . . . pour trouver le DL en 1, $f\,(x) = -2(x - 1) + 2(x - 1)^3 + (x - 1)^4$.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donc $y = - 2(x - 1)$. Comme $2(x - 1)^3$ change de signe en 1, 1 est aussi un point d'inflexion de f .





3. Quiz

Question 1

Trouver la limite : $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - e^x)^2}$.

Question 2

Calculer la limite de $\frac{\sqrt{x} - 1}{\ln x}$ lorsque x tend vers 1.

Question 3

Soit $f(x) = \exp x + \sin x$. Calculer l'équation de la tangente en $x = 0$ et la position du graphe.

Bibliography

Mathématiques Analyse en 30 fiches, Daniel FREDON Myriam MAUMY-BERTRAND Frédéric BERTRAND , Dunod, Paris, 2009

François Guénard Patricia Hug, QCM de mathématiques, Dunod, Paris ,2013

PROBLÈMES D'ANALYSE I Nombres réels, suites et séries ,Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak , France , 2008