VARIABLES ALÉATOIRES DISCRETES

Probabilité et Statistique
PROBL103

Novembre 2017
1.0

Table des matières

Objectifs

À la fin de cette leçon, vous serez capable :

- *de comprendre la notion de variable aléatoire ;*
- *d'estimer la moyenne d'une variable aléatoire discrète ;*
- *d'estimer la variance d'une variable aléatoire discrète ;*
- *d'estimer la moyenne et la variance des lois classiques usuelles discrètes.*

Introduction

Dans la leçon précédente ,nous avons introduit la notion d'évènement et de la probabilité de cet événement. Toutefois, dès que le résultat d'une expérience aléatoire peut être quantifié il est pratique d'utiliser une variable aléatoire. Une façon intuitive de voir la notion de variable aléatoire est par exemple la fonction qui associe un gain au résultat d'un jeu de hasard. Dans cette leçon introductive,nous allons voir les principaux paramètres dont la connaissance permet de caractériser une variable aléatoire

Définition ,notations et fonctions de repartition

I

Objectifs

A la fin de cette section, vous serez capables de :

- *de comprendre la notion de variable aléatoire*

1. Définition et Notations

Définition

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Une fonction sur Ω à valeurs réelles est appelée variable élatoire

Syntaxe

- Les variables aléatoires sont notées par des lettres majuscules X,Y, ...Les valeurs qu'elles prennent lorsqu'une issue ω se réalise sont notées par des lettres minuscules. Par exemple on pourra écrire x à la place de $X(\omega)$
- Dans la pratique on oublie l'univers Ω pour s'intéresser à $X(\Omega)$
- $k \ \ X(\Omega)$, $[X = k] = X^{-1}(\{k\}) = \{\omega \ \ \Omega | X(\omega) = k\}$

Définition

Soit P une probabilité sur un espace des issues Ω. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Lorsqu'à chaque valeur k de $X(\Omega)$ on associe la probabilité p=P(X =k) de l'événement "X = k", on dit que l'on définit la loi de probabilité P_X de la variable aléatoire X.

Exemple

Une variable de Bernoulli X de paramètre p a pour loi :

Valeur de *X =K*	0	1
p_i=*P(X =k)*	1 - p	p

où p est compris entre 0 et 1. Ce tableau se lit de la fa¸con suivante : $p_0 \ \ P(X = 0) = 1 - p$ et

$p_1 \ \ P(X = 1) = p$. Par convention on notera $X \ \ B(p)$ lorsque X suit une loi de Bernoulli.

On remarque que si $p = 1$ alors X est constante et égale à 0

Exemple

On considère 2 jetés successifs d'une pièce de monnaie équilibrée. On définit une variable aléatoire X qui compte le nombre de face que l'on a obtenu. Sur deux lancés de pièces X peut prendre soit la valeur 0 qui correspond à l'événement"la pièce n'est jamais tombée sur face", soit la valeur 1 qui correspond au cas où la pièce est tombée une fois sur face" soit la valeur 2 si on obtient deux fois face. Étant donné que la pièce est équilibrée on obtient pour X la loi suivante :

Valeur de X $=K$	0	1	2
p_i=$P(X$ $=k)$	1/4	1/2	1/4

On remarque bien entendu que P (X = 0) + P (X = 1) + P (X = 2) $p_0 + p_1 + p_2 = 1$.

Définition : Fonction de répartition

La loi d'une variable aléatoire X est caractérisée par sa fonction de répartition F_X définie par :

$$
\begin{aligned}
F_X : \quad & \mathbb{R} \to [0,1] \\
& x \mapsto P(X \leq x)
\end{aligned}
$$

Remarque

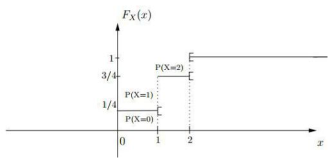
F_X est par définition une fonction en escalier, qui est constante entre deux valeurs successives prises par la variable aléatoire X et qui fait un saut en chacune de ses valeurs. On retrouve donc sur le graphe de F_X d'une part les valeurs prises par X ainsi que les probabilités d'obtenir les valeurs

Remarque

Il est équivalent de connaître la loi de X ou sa fonction de répartition

Exemple

En repérant l'exemple précédent , la fonction de répartition est représentée de la façon le suivante :



Définition

Deux variables aléatoires X : $\Omega \to \{x_1, \cdots, x_M, \cdots\}$ et Y : $\Omega \to \{y_1, \cdots, y_N, \cdots\}$ sont indépendantes si pour tous i et j, $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)\ P(Y = y_j)$.

Exemple : Lois de Bernoulli indépendantes

On s'intéresse à deux variables aléatoires de Bernoulli : X_1 de paramètre p et X_2 de paramètre q. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes. Le couple (X_1, X_2) peut prendre les valeurs (0, 0) ; (0, 1), (1, 0) et (1, 1). Par indépendance on a on a :

$P((0, 0))\ \ P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = (1 - p)\ (1 - q)$.

2. Exercice : Exercice sur les variables aléatoires

Exercice : Exercice sur la détermination de l'univers

On considère l'expérience aléatoire « tirer 4 boules parmi 4 blanches et 6 bleus »

On va étudier la v.a. définie par X =« nombre de boules rouges obtenues »

☐ Ω={1, 2, 3, 4}

☐ card(Ω)=210

☐ 151200

☐ $\mathrm{Card}(\Omega) = C_{10}^{4} = 210.$

☐ l'univers Ω est infini

☐ l'univers Ω est dénombrable

3. Exercice : Exercice sur les propriétés des variables aléatoires

Exercice : Univers de la variable aléatoire

En reprenant les hypothèses de l'exercice précédent, Quel est l'univers de la variable léatoire X

○ X={0,1,2,3,4}

○ X= R. (R est l'ensemble des nombres réels)

○ X={1,2,3,4}

4. Exercice : Exercice sur l'estimation des probabilités

Exercice : Probabilités

En reprenant les hypothèses de l'exercice 1, lesquelles des assertions suivantes sont vérifiées ?

☐

Valeur de $X = k$	0	1	2	3	4
p_k=$P(X = k)$	0.071	0.381	0.429	0.114	0.005

☐

Valeur de $X = k$	0	1	2	3	4
p_k=$P(X = k)$	0.005	0.381	0.431	0.124	0.059

☐

Valeur de $X = k$	1	2	3	4
p_k=$P(X = k)$	0.10	0.351	0.299	0.25

☐ $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

Exercice : Exercice sur la fonction de répartition

Calculer la valeur de la fonction de reptation de la variable aléatoire au point $x = 1.5$

◯ 0.452

◯ 1.15

◯ 0.071

◯ 0.023

5. Exercice : Exercice sur la fonction de répartition

Calculer la valeur de la fonction de reptation de la variable aléatoire pour tout $x > 4$

◯ $P(X = 4)$

◯ 1

◯ 0.657

6. Exercice : Exercice sur la fonction de répartition

Calculer la valeur de la fonction de reptation de la variable aléatoire pour tout $x = 3$

Espérance, variance d'une variable aléatoire

II

Objectifs

A la fin de cette section, vous serez capables de :

- *d'estimer la moyenne d'une variable aléatoire discrète ;*
- *d'estimer la variance d'une variable aléatoire discrète*

on va définir deux indicateurs permettant de se représenter rapidement la loi d'une v.a..

1. Espérance d'une variable aléatoire

La moyenne ou espérance est une valeur qui sert à avoir une idée de la valeur typique d'une variable aléatoire. Elle n'est en générale pas suffisante pour comprendre comment se comporte cette variable aléatoire mais donne une première indication. Son avantage est qu'elle est très facile à estimer dans la majorité des cas

Définition : Espérance

Soit X une v.a. alors la moyenne de X, notée E(X) est la valeur :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$$

Plus généralement pour toute fonction f :R →R, on pourra écrire

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(\{k\})P(X = k)$$

Fondamental : Linéarité

Soit X,Y des v.a. et a,b R alors

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

2. Variance d'une variable aléatoire

Définition

Soit X une v.a. de moyenne μ = E(X) alors la variance de X, notée Var(X), est la quantité ´e :

$$Var(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_{k \in X(\Omega)} (k-\mu)^2 P(X=k)$$

On appelle écart-type σ_X de la variable aléatoire X la valeur

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Attention

L'écart-type permet de comprendre comment les valeurs prises par X sont réparties autour de l'espérance E(X). En général on ne calcule pas la variance d'une v.a. en utilisant la définition précédente mais en utilisant le résultat suivant appelé la formule de Koening.

Fondamental

Soit X une variable aléatoire, alors on a :

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Soit a et b deux réels non nuls alors :

$$Var(aX+b) = Var(aX) = a^2 Var(X)$$

3. Exercice : Exercice sur la somme de deux lois de bernouilli

Exercice

On s'intéresse à deux variables aléatoires de Bernoulli : X_1 de paramètre p et X_2 de paramètre q. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes. On s'intéresse à la variable aléatoire $Y=X_1+X_2$

L'univers de la variable aléatoire Y est :

- ○ {0,1,2}
- ○ {0,1}
- ○ {(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)}

Exercice

On reprend les hypothèses de l'exercice précédent. Laquelle des assertions suivantes est verifiée

○

Valeur de Y=k	0	1	2
p_k=P(Y = K)	(1-p)(1-q)	(1 - p)q+p(1-q)	pq

○

Valeur de Y=k	0	1	2
p_k=P(Y = K)	(1-p)(1-q)	(1 - p)q	p^2

○

Valeur de Y=k	0	1	2
p_k=P(Y = K)	0.25	0.5	0.25

○

Valeur de Y=k	0	1	2
p_k=P(Y = K)	pq	(1 - p)q+p(1-q)	(1-p)(1 -q)

Exercice

En se plaçant dans les hypothèses de l'exercice précédent. Estimer l'espérance de la variable aléatoire Y

Exercice

En se plaçant dans les hypothèses de l'exercice précédent. Estimer lavariance de la variable aléatoire Y

- ○ p +q+6pq-p^2 -q^2
- ○ p^2 + q^2
- ○ $(p+q)^2$
- ○ p(1-p)+q(1-q)

* *

*

Cette section a été consacrée à l'étude de deux paramètres simples qui permettent de décrire la plupart des variables aléatoires. Leur utilisation et leur maîtrise est indispensable à tout technicien en sciences informatiques dans sa pratique quotidienne

Espérance et moyenne des lois classiques

III

Objectifs

A la fin de cette section, vous serez capables de :

- *d'estimer la moyenne et la variance des lois classiques usuelles*

Il existe un certain nombre de situation que l'on retrouve très fréquemment en théorie des probabilités. On va donc définir des variables aléatoires spécifiques pour ces types d'expériences, et quand l'une des expériences à modéliser se ramènera à l'une des situations listées on pourra utiliser directement les résultats de cette section pour calcules les probabilités, moyennes, variances dont on aura besoin.

1. Lois classiques

La première loi que nous allons voir permet de modéliser la notion d'équiprobabilité

Définition

On dit qu'une v.a. X suit une loi uniforme de paramétrés a et b si c'est une v.a. d'univers {a; a + 1; . . .; b} de cardinal n = 1 + b − a vérifiant :

k = a,a + 1, . . . ,b,

$$P(X = k) = \frac{1}{n}$$

La moyenne et la variance sont données par les formules suivantes :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{n^2 - 12}{12}$$

Remarque

Les autres lois classiques sont disponible en annexe dans le document (cf. LoisClasss.pdf)

Les exemples suivants donnent des exemples de phénomènes pouvant être modélisés par des lois classiques

Exemple : loi uniforme

On considère l'expérience :

« lancer un de équilibré et on note X le résultat de la face supérieure »

alors X suit une loi uniforme de paramètres $a = 1$ et $b = 6$.

Exemple : loi binomiale

Soit l'expérience :

« On effectue n répétitions indépendantes d'une loi de Bernoulli (de parametre p) et on compte le nombre de succès. »alors $X \to B(n,p)$.

Exemple : loi hypergéométrique

Soit l'expérience :

« On tire simultanément n boules dans une urne contenant pN boules gagnantes et $(1 - p)N$ boules perdantes. On compte alors le nombre de boules gagnantes extraites et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de boules gagnantes. »

alors $X \to H(n,p,N)$.

Exemple : Loi de Poisson

Soit l'expérience :

« Un serveur reçoit en moyenne n connexions par minutes. Soit X la variable aleatoire qui compte le nombre de connexions au serveur durant un temps T minutes. »

alors $X \to P(\lambda)$ avec $\lambda = nT$.

2. Exercice : Exercice sur la détermination d'une loi de probazbilité

Exercice

Soit l'expérience « un standard reçoit en moyenne 3 appels par demi heure » Quelle est la v.a. définie par X =« nombre d'appels reçus en une heure »

- ○ $X \to P(\lambda = 8)$
- ○ $X \to P(\lambda = 6)$
- ○ $X \to P(\lambda = 4)$
- ○ $X \to B(\lambda = 8)$

3. Exercice : Exercice sur la détermination d'une loi de probabilité

Exercice

On considère une pièce de monnaie dans laquelle la probabilité d'obtenir face est 0.6. On effectue n lances de cette pièce de monnaie. On définit X la variable aléatoire qui va définir le nombre de lances pour obtenir le premier pile

- ○ $X \to G\ (p = 0.5)$.
- ○ $X \to G\ (p = 0.4)$.
- ○ $X \to B(n,0.4)$

4. Exercice

En se plaçant dans les conditions de la question précédente , calculez espérance de la variable aléatoire X

5. Exercice

En se plaçant dans les conditions de la question précédente , calculez la variance de la variable aléatoire X

* *

*

Dans cette section, nous avons passé en revue quelques lois de probabilités discrètes classiques qui servent à modéliser la plupart des phénomènes rencontrés dans la pratique. Cette liste est non exhaustive. les applications sont nombreuses dans le domaine des rèeaux de télécommunication et en théorie de la fiabilité

Conclusion

Cette leçon a introduit la notion de variable aléatoire qui est fondamentale en théorie des probabilités. Leur connaissance et leur maîtrise permet une étude aisée des différents phénomènes rencontrés dans la pratique. Jusque là nous sommes partis de la loi connue et nous avons extrait les paramètres caractéristiques notamment la moyenne et la variance. Dans le chapitre suivant qui introduit la statistique descriptive , nous allons à partir d'un échantillon de données estimer la loi qui décrit le mieux le phénomène observé.

Bibliographie

Pierre Andreoletti, Support du cours de Probabilités et Statistiques, IUT d'Orléans, Département Informatique, 2008

Ph. Roux, Probabilités discrètes et statistique descriptive, DUT Informatique, semestre 2, 2010