FRACTIONS RATIONNELLES

4.0

N'DRI VALERIE

sept 2017

Table des matières

Objectifs

A la fin de cette leçon, vous serez capable de :

- **caractériser** des fractions rationnelles ;
- **résoudre** une équation comportant des fractions rationnelles ;
- **décomposer** en éléments simples une fraction rationnelle dans R et dans C ;

GENERALITES SUR LES FRACTIONS RATIONNELLES

I

Objectifs

A la fin de cette section vous serez capable de :

- Identifier une fraction rationnelle

- Caractériser et déterminer un zéro et un pôle d'une fraction rationnelle.

A. Fractions rationnelles, zéros et pôles.

Définition

Considérons deux polynômes P(x) et Q(x) (Q(x) ≠ 0)

On appelle fonction rationnelle ou **fraction rationnelle** F(x) le quotient de P(x) par Q(x) et on note $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Zéro d'une fraction rationnelle F(x)

Soit **a** un nombre réel ou complexe.

On dit qu'un nombre **a** est un **zéro** d'ordre *α* de *F(x)* si et seulement si **a** est un **zéro** ou racine d'ordre α de ***P(x)*** et **a** n'est **pas zéro** de ***Q(x)***.

Pôle d'une fraction rationnelle.

On dit qu'un nombre **a** est un **pôle** d'ordre *α* de *F(x)* si et seulement si **a est racine** d'ordre *α* **de Q(x)**.

Exemple

1) $F(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$, 1 est un zéro d'ordre 2 de F(x); $F(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$, 1 est un pôle d'ordre 2 de F(x).

2) La fraction $F(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3}$ admet 2 et -2 comme zéro (simples) et 0 comme pôle d'ordre 3.

B. Partie entière d'une fraction rationnelle

Soit *F(x) = P(x)/Q(x)*. Il existe un couple unique de polynômes à coefficients complexes (*E(x), R(x)*) tel que :

- *P(x) = Q(x) E(x) + R(x)*
- *deg(R) < deg(Q)*

Donc *F(x) = E(x)+ R(x)/Q(x)*

E(x) est appelée la **partie entière** de *F(x)*.

Il en résulte que *E(x)* et *R(x)* coïncident avec le quotient et le reste de la division de *P(x)* par *Q(x)* suivant les **puissances décroissantes**.

Remarque

Si *deg(P) < deg(Q)* alors *E(x) = 0*.

Exemple

1) La fraction rationnelle $\dfrac{x^5-3}{x^3}$ admet *x2* comme partie entière ; elle peut s'écrire sous la forme *F(x) = x2 - 3/x3.*

2) $F(x) = \dfrac{x^3+2x^2-2x+1}{x^2+1}$

$$\begin{array}{cccc|l}
x^3 & +2x^2 & -2x & +1 & x^2+1 \\ \hline
-x^3 & & -x & & x+2 \\ \cline{1-3}
0 & 2x^2 & -3x & & \\
 & -2x^2 & & -2 & \\ \cline{2-4}
 & 0 & -3x & -2 &
\end{array}$$

D'où $F(x) = \dfrac{x^3+2x^2-2x+1}{x^2+1} = (x+2)(x^2+1) - 3x - 2$

C. Partie principale d'une fraction rationnelle relative à un pôle

Définition

On appelle **partie principale** de la fraction rationnelle *F(x)* relative au pôle *a* d'ordre *α* l'expression $\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots\dots + \frac{A_{\alpha}}{x-a}$ où $A_1, A_2, \dots, A_{\alpha}$ sont des constantes complexes.

Fondamental : Théorème

Toute **fraction rationnelle** se décompose en la **somme** de sa **partie entière** et des **parties principales** relatives aux différents pôles ; cette décomposition est unique.

Méthode : Détermination pratique de la partie principale relative à un pôle

Supposons que la fraction rationnelle *F(x)* admette un pôle *a* d'ordre *α*. *Q(x)* est donc de la forme $\boldsymbol{Q(x) = (x-a)^{\alpha} Q_1(x)}$, $Q_1(a) \neq 0$.

Pour obtenir la partie principale relative au pôle *a* , on pose *X = x-a* et on effectue la division suivant les puissances croissantes de *P(x-a)* par *Q(x-a)* jusqu'à l'ordre *α-1*.

Exemple

La partie principale de la fraction rationnelle $F(x) = \frac{x^6+7}{(x-1)^4}$ est égale à

$$\frac{8}{(x-1)^4} + \frac{6}{(x-1)^3} + \frac{15}{(x-1)^2} + \frac{20}{(x-1)}.$$

En effet, $F(x) = \frac{x^6+7}{(x-1)^4} = x^2 + 4x + 10 + \frac{8}{(x-1)^4} + \frac{6}{(x-1)^3} + \frac{15}{(x-1)^2} + \frac{20}{(x-1)}.$

D. Exercice

[Solution n°1 p 19]

On donne la fraction rationnelle suivante : $F(x) = (x^2+1) + \frac{(x-3)^3}{x^2(x+1)(x-2)}$.

cochez les affirmations vraies.

- [ ] La partie entière de F(x) est : x*2*+1
- [ ] 3 est un pôle d'ordre 3
- [ ] 0 est pôle d'ordre 2
- [ ] 0,1 et 2 sont des zéros de F(x).
- [ ] 0, 1, et 2 sont des pôles de F(x).
- [ ] La partie principale de F(x) relative au pôle 0 est de la forme : $\frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x}$

II

DECOMPOSITION EN ELEMENTS SIMPLES DANS R.

Objectifs

A la fin de cette section, vous serez capable de :

- déterminer la forme de la décomposition d'une fraction rationnelle en fonction du pôle.

- décomposer une fraction rationnelle ayant un pôle de première espèce.

- décomposer une fraction rationnelle ayant un pôle de seconde espèce.

Soit la décomposition du polynôme $Q(x)$ en produit de **polynômes irréductibles** sur R.

$Q(x) = a_n(x-a_1)n1 \ldots(x-a_k)nk \ (x2+p_1x+q_1)m1 \ (x2+p_rx+q_r)mr$ avec $\Delta_i = p_i2 - 4q_i < 0$.

A. Décomposition en éléments simples

Fondamental : Théorème

Toute fraction rationnelle à coefficients réels se décompose sous la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{\text{pôles réels}} \left(\frac{A_1}{(x-a_i)^{n_i}} + \frac{A_2}{(x-a_i)^{n_i-1}} + \ldots + \frac{A_{n_i}}{x-a_i} \right)$$

$$+ \sum_{\substack{\text{pôles complexes} \\ \text{conjuguées}}} \left(\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_ix+q_i)^{m_i}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_ix+q_i)^{m_i-1}} + \ldots + \frac{M_{m_i}x+N_{m_i}}{x^2+p_ix+q_i} \right)$$

où $A_1, A_2, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots$ sont des constantes réelles

Cette décomposition est unique.
Sachant que la décomposition est unique, si *F(x)* est paire, ou impaire, on obtient des relations entre les coefficients.

Définition

Les termes en $\frac{A_k}{(x - a_k)^{n_i - i + 1}}$, $k = 1, \ldots\ldots, n_i$ (correspondant aux pôles réels) sont dits **éléments simples de première espèce**.

Les termes en $\frac{M_{m_i}x + N_{m_i}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{m_i - j + 1}}$, $j = 1, \ldots\ldots, m_i$ (correspondant aux pôles complexes conjugués) sont dits **éléments simples de seconde espèce**.

B. Méthode pratique de décomposition.

Cas général

Si *deg(P) ≥ deg(Q)*, on cherche la partie entière de *F(x)*; celle-ci s'obtient en calculant le quotient de la division euclidienne de *P(x)* par *Q(x)*. Une fois que *E(x)* est calculée, on est ramené automatiquement à décomposer une autre fraction *F(x)* avec *deg(P) < deg(Q)*.

Pôles de première espèce - pôle simple

Si *a* est un pôle simple de *F(x)* alors Q(x) se met sous la forme
Q(x) = (x-a)a Q₁(x) avec *Q₁(a) ≠ 0*

et la partie relative à *a* se met sous la forme $\frac{\lambda}{x - a}$ avec $\lambda = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$

Ainsi, *F(x)* est de la forme F(x) = $\frac{\lambda}{x - a} + \frac{B(x)}{Q_1(x)}$.

De manière pratique, pour déterminer le coefficient *λ*, on multiplie les deux membres de *F(x)* par *(x-a)*, c'est à dire
(x-a)F(x) et on fait *x = a*.

Exemple

Considérons la fraction rationnelle $F(x) = \frac{x^3}{(x + 1)(x + 2)}$ et calculons la partie principale relative au pôle simple -1.

Ici, $Q(x) = (x+1)Q_1(x)$ et $Q_1(x) = x+2$. D'où $\lambda = \frac{P(-1)}{Q_1(-1)} = \frac{-1}{1} = -1$

De la même manière , la partie principale relative au pôle -2 est de la forme $\frac{8}{x + 2}$.

On a ainsi F (x) = $(x-3)-\frac{1}{(x+1)}+\frac{8}{(x+2)}$.

Exemple

Décomposer en éléments simples dans R la fraction rationnelle $F(x)=\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

La partie entière est nulle, puisque le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur.

Il n'y a que des pôles réels et donc des éléments de première espèce.

La décomposition de F(x) en éléments simples est de la forme :

F (x) = $\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x+3)}$

où A, B et C sont des nombres réels à déterminer.

En considérant la fraction rationnelle associée et en remplaçant x par -1 dans (x+1)F(x), on obtient A = 1/2

En remplaçant x par -2 dans (x+2)F(x), on obtient B =-3.

En remplaçant x par -3 dans (x+3)F(x), on obtient C = 7/2.

La décomposition est donc :

F(x) = $\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{(x+2)}+\frac{7}{2(x+3)}$

Exemple

Décomposer en éléments simples dans R la fraction rationnelle $F(x)=\frac{x^3-2x^2-x-3}{x^2-3x+2}$.

On détermine la partie entière E(x), puisque le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur.

On effectue la division euclidienne du numérateur x3-2x2-x-3 par le dénominateur x2-3x+2,

ce qui donne x3 - 2x2 - x - 3 = (x2-3x+2)(x+1) - 5

D'où F(x) = x+1 - $\frac{5}{x^2-3x+2}$

Puisque x2-3x+2 = (x-1)(x-2), on cherche A et B tels que $R(x)=-\frac{5}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)}$

En passant aux fonctions rationnelles associées et en remplaçant x par 1 dans (x-1)R(x), on obtient A = 5. En remplaçant x par 2 dans (x-2)R(x), on obtient B = -5. D'où

F(x) = x + 1+$\frac{5}{(x-1)}-\frac{5}{(x-2)}$.

Pôle simple

Si 0 est **pôle multiple** d'ordre *n* alors $F(x) = \frac{P(x)}{x^n Q_1(x)}$ et $Q_1(0) \neq 0$. Les coefficients de la décomposition relative au pôle 0 sont ceux de la **division suivant les puissances croissantes** de *P(x)* par *Q(x)* à l'ordre *n-1* (on obtient les coefficients à l'envers).

Exemple

Décomposer en éléments simples dans R la fraction rationnelle $F(x) = \frac{1}{x^3(x-1)}$.

La partie entière est nulle , puisque le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur.

Le dénominateur de F(x) admet deux pôles réels : 0 est pôle triple et 1 pôle simple.

La décomposition de F(x) en éléments simples est de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{x^3(x-1)} = \frac{A_1}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x} + \frac{B}{x-1}$$

où A_1, A_2 ,A_3 et B sont des nombres réels à déterminer.

En considérant la fraction rationnelle associée et en remplaçant x par 1 dans (x-1)F(x), on obtient B = 1.

Le pôle triple étant le réel 0, il y a pas lieu d'effectuer de translation. On forme la division suivant les puissances croissantes de 1 par -1+x jusqu'à l'ordre 2 ;

1 = (-1+x)(-1-x-x*2*) + x*3*

d'où par division par x*3*(1- x), on obtient

$$F(x) = \frac{1}{x^3(x-1)} = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

et donc $A_1 = -1$, $A_2 = -1$ et $A_3 = -1$ (On retrouve la valeur B = 1).

Remarque

Si *a ≠ 0* est un pôle multiple d'ordre *n > 1*, on effectue d'abord **la translation h = x-a** et on se ramène au cas précédent en effectuant la division suivant les puissances croissantes de *P(h) = P(x+a)* par $Q_1(x+a)$ à l'ordre *n-1*.

Si l'ordre de **multiplicité est 2 ou 3**, on procède **par identification** en remplaçant *x* par une valeur particulière (en évitant les pôles) ou en multipliant par *x* et en faisant tendre x vers l'infini (ce n'est possible que si la partie entière est nulle).

Exemple

Décomposer en éléments simples dans R la fraction rationnelle $F(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

La partie entière est nulle. le dénominateur de F(x) admet deux pôles réels : 1 est un pôle double et -1 pôle triple.

La décomposition de f(x) en éléments simples est de la forme :

$$F(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B_1}{(x+1)^3}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{x+1}$$

où A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 sont des nombres réels à déterminer.
Pour le pôle réel double 1, on effectue la translation x=1+h et on effectue la division suivant les puissances croissantes de x*2*+1 = (1+h)*2* + 1 = 2+2h+h*2* par (x+1)*3* = (2+h)*3* = 8+12h+6h*2*+h*3*

Le quotient de la division suivant les puissances croissantes de

2+2h h*2* par 8+12h+6h*2*+h*3* à l'ordre 1 est $\frac{1}{4}-\frac{h}{8}$

d'où par division par h*2*(2+h)*3* ,

$$\frac{2+2h+h^2}{h^2(2+h)^3}=\frac{1}{4h^2}-\frac{1}{8h}+\ldots\ldots$$

et donc $A_1=\frac{1}{4}$ et $A_2=-\frac{1}{8}$

Pour le pôle réel triple -1, on effectue la translation x = -1+k et on effectue la division suivant les puissances croissantes de
x*2*+1 = (-1+k)*2*+1 = 2-2k+k*2* par (x-1)*2* = (-2+k)*2* = 4-4k+k*2*
Le quotient de la division suivant les puissances croissantes de 2-2k+k*2* par 4-4k+k*2*

à l'ordre 2 est $\frac{1}{2}+\frac{k^2}{8}$

d'où la division par k*3*(2-k)*2*

$$\frac{2-2k+k^2}{k^3(2-k)^2}=\frac{1}{2k^3}+\frac{1}{8k}+\ldots\ldots$$

et donc $B_1=\frac{1}{2}$, $B_2=0$ et $B_3=\frac{1}{8}$

Par conséquent,

$$F(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{1}{8(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)^3}+\frac{1}{8(x+1)}$$

Pôles de seconde espèce.

Pour déterminer les éléments simples de la forme $\frac{M_m x+N_m}{(x^2+px+q)^m}, m>1$, en multipliant par (*x2* + *px* + *q*)*m* et en remplaçant *x* par la racine complexe, en **identifiant** partie réelle et partie imaginaire des deux membres, on obtient un système de deux inconnues sur M_m et N_m qui permet de calculer ces deux coefficients.

On considère alors la fraction rationnelle *F(x)* - $\frac{M_m x+N_m}{(x^2+px+q)^m}, m>1$ que l'on simplifie, puisqu'il y a unicité de la décomposition en éléments simples. On calcule alors les coefficients du terme $\frac{M_{m-1}x+N_{m-1}}{(x^2+px+q)^{m-1}}$ en utilisant la méthode précédente de diminution du degré.

Conseil : Cas particulier :

S'il n'y a que des **pôles complexes**, c'est à dire si la fraction rationnelle se présente sous la forme $F(x) = \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m}$, on effectue les divisions euclidiennes successives de *P(x)* (puis des différents quotients) par *x2 + px + q*.

Exemple

Décomposer en éléments simples dans R la fraction rationnelle $F(x) = \frac{x^6+2}{(x-1)(x^2+1)^2}$.

1 est un pôle simple et i et -i sont pôles doubles.
La décomposition est de la forme

$$F(x) = \frac{x^6+2}{(x-1)(x^2+1)^2} = x+1+\frac{A}{x-1}+\frac{ax+b}{(x^2+1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

Le coefficient A est obtenu en multipliant par x-1 et en faisant x =1 ; A = 3/4

La fraction $\frac{ax+b}{(x^2+1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}$ peut être calculée par la différence

$$\frac{x^6+2}{(x-1)(x^2+1)^2}-(x+1)-\frac{3}{4(x-1)}.$$

On trouve ainsi

$$\frac{ax+b}{(x^2+1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}=\frac{-7x^3-7x^2-9x-9}{4(x^2+1)^2}$$

La division de *-7x3 - 7x2 - 9x - 9* par *x2 + 1* suivant les puissances décroissantes donne
-7x3 -7x2 - 9x - 9 = (x2+1)[-7(x+1)] - 2(x+1).
On déduit , en divisant par 4(x2+1)2 :

$$\frac{ax+b}{(x^2+1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}=-\frac{x+1}{2(x^2+1)^2}-\frac{7x+7}{4(x^2+1)}$$

d'où

$$F(x)=\frac{x^6+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=x+1+\frac{3}{4(x-1)}-\frac{x+1}{2(x^2+1)^2}-\frac{7x+7}{4(x^2+1)}.$$

C. Exercice

[Solution n°2 p 19]

La fraction F(x) = P(x)/Q(x) admet x = 2 comme pôle réel d'ordre1 et x = 1 comme pôle réel d'ordre 2. Son dénominateur Q(x) peut s'écrire

- ○ Q(x) = (x+2)(x+1)*2*
- ○ Q(x) = (x*2*-1)(x-2)
- ○ Q(x) = (x*2*-3x+2)(x-1)
- ○ Q(x) = (x*2*+3x+2)(x-1)

D. Exercice

[*Solution n°3 p 20*]

Parmi les affirmation suivantes, quelles sont celles qui sont correctes ?

- ☐ $F_2(x) = \frac{4x+3}{(x+8)^4}$ est une fraction rationnelle d'élément simple de première espèce.
- ☐ $F_2(x) = \frac{-15}{(x-7)^2}$ est une fraction rationnelle d'élément simple de première espèce.
- ☐ $F_3(x) = \frac{-1}{x^2+x+1}$ est une fraction rationnelle d'élément simple de première espèce.
- ☐ $G_1(x) = \frac{5x-14}{(x^2+x+1)^2}$ est une fraction rationnelle d'élément simple de seconde espèce.
- ☐ $G_2(x) = \frac{3}{2x^2+7}$ est une fraction rationnelle d'élément simple de seconde espèce.

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 9)

☑	La partie entière de F(x) est : x2+1
☐	3 est un pôle d'ordre 3
☑	0 est pôle d'ordre 2
☐	0,1 et 2 sont des zéros de F(x).
☑	0, 1, et 2 sont des pôles de F(x).
☑	La partie principale de F(x) relative au pôle 0 est de la forme : $\frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x}$

> Solution n°2 (exercice p. 16)

○	Q(x) = (x+2)(x+1)2
○	Q(x) = (x2-1)(x-2)
◉	Q(x) = (x2-3x+2)(x-1)
○	Q(x) = (x2+3x+2)(x-1)

> Solution n°3 (exercice p. 17)

☐	$F_2(x) = \frac{4x+3}{(x+8)^4}$ est une fraction rationnelle d'élément simple de première espèce.
☑	$F_2(x) = \frac{-15}{(x-7)^2}$ est une fraction rationnelle d'élément simple de première espèce.
☐	$F_3(x) = \frac{-1}{x^2+x+1}$ est une fraction rationnelle d'élément simple de première espèce.
☑	$G_1(x) = \frac{5x-14}{(x^2+x+1)^2}$ est une fraction rationnelle d'élément simple de seconde espèce.
☑	$G_2(x) = \frac{3}{2x^2+7}$ est une fraction rationnelle d'élément simple de seconde espèce.