ESPACE VECTORIEL Rn

Table des matières

Valerie N'dri UVCI 2017

Objectifs

- Connaître le **vocabulaire** de l'algèbre linéaire
- **Caractériser** une famille de vecteurs

Introduction

La notion d'espace vectoriel est le cadre naturel pour des nombreuses applications en mathématiques ou à d'autres sciences. Par exemple l'espace plan $\mathbb{R}^2$ conduit à la géométrie d'Euclide, l'espace physique est usuellement modélisé par $\mathbb{R}^3$, l'espace temps par $\mathbb{R}^4$, l'espace des états d'un ordinateur comprenant N bytes est $\mathbb{F}_2^N \cdots$

L'algèbre linéaire est l'étude des propriétés des espaces vectoriels et de tous les concepts construits à partir d'eux.

A. Vocabulaire de l'algèbre linéaire

Définition : Espaces vectoriels

Un ensemble de vecteurs, dit « **espace vectoriel** » est un ensemble de choses

que l'on peut :

– additionner entre elles,

– multiplier par des nombres,

avec toutes les propriétés naturelles de cette addition et de cette multiplication (existence d'un vecteur nul, associativité de +, distributivité).

Voici la liste complète exacte de ces **propriétés :**

Propriétés additives

- L'addition est associative :$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- L'addition est commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Il existe un vecteur, dit vecteur nul, noté $\vec{0}$, tel que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

pour tout vecteur $\vec{u}$.

- Tout vecteur $\vec{u}$ a un opposé, noté $-\vec{u}$, tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Propriétés multiplicatives

- $1.\vec{u} = \vec{u}$
- $\alpha.(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$
- $(\alpha + \beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$
- $\alpha.(\beta.\vec{u}) = (\alpha\beta).\vec{u}$

Opérations sur les vecteurs

• L'ensemble des nombres réels R est souvent représenté par une droite. C'est un espace de dimension 1.

• Le plan est formé des couples $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de nombres réels. Il est noté R*2*. C'est un espace à deux dimensions.

• L'espace de dimension 3 est constitué des triplets de nombres réels $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Il est noté R*3* .

On généralise ces notions en considérant des espaces de dimension n pour tout entier positif n = 1, 2, 3, 4, . . . Les éléments de l'espace de dimension n sont les n-uplets $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de nombres réels. L'espace de dimension n est noté R*n*.

Comme en dimensions 2 et 3, le n-uplet $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dénote aussi bien un point qu'un vecteur de l'espace de dimension n.

Définition : Somme de deux vecteurs

Leur somme est par définition le vecteur

$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$

Définition : Produit d'un vecteur par un scalaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelé un scalaire) : $\lambda.\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$

Remarque

Le **vecteur nul** de R*n* est le vecteur $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

• L'**opposé** du vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ est le vecteur $-\vec{u} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$.

B. Représentation des vecteurs de Rn

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ un vecteur de Rn.

On l'appelle **vecteur colonne** et on considère naturellement $\vec{u}$comme une matrice de taille n × 1.

Parfois, on rencontre aussi des **vecteurs lignes** : on peut voir le vecteur comme une matrice 1 × n, de la forme (u_1,..., u_n). En fait, le vecteur ligne correspondant à u est le transposé uT du vecteur colonne u.

Les opérations de somme et de produit par un scalaire définies ci-dessus pour les vecteurs coïncident parfaitement avec les opérations définies sur les matrices :

$$u+v=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \lambda u=\lambda\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$$

C. Produit scalaire

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$deux vecteurs de R$n$.

On définit leur produit scalaire par

$\langle u \mid v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$.

C'est un scalaire (un nombre réel). Remarquons que cette définition généralise la notion de produit scalaire dans le plan R2 et dans l'espace R3.

Une autre écriture :

$$\langle u \mid v \rangle = u^T \times v = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

D. Exercice

[Solution n°1 p 11]

Un espace vectoriel est :

- ○ un ensemble de produit scalaire de vecteurs.

○	un ensemble de nombres quelconques que l'on peut additionner et multiplier entre eux
○	un ensemble de vecteurs respectant les règles additives et multiplicatives.

E. Exercice : Produit scalaire

[Solution n°2 p 11]

L e produit scalaire est :

☐	Le produit d'un vecteur ligne et d'un vecteur colonne de R*n*.
☐	Le produit d'un vecteur par un scalaire.
☐	le produit de deux vecteurs de R*n*.
☐	le résultat de la multiplication de deux scalaires.

L'opération fondamentale effectuée sur des vecteurs est la combinaison linéaire.

A.Caractérisation d'une famille de vecteurs

Définition : Combinaison linéaire

Si $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_n})$ sont des vecteurs, et si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des scalaires, alors on dit que le vecteur

$$\boxed{\vec{v} = \alpha_1\vec{u_1} + \alpha_2\vec{u_2} + \ldots + \alpha_n\vec{u_n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{u_i}}$$

est une combinaison linéaire des vecteurs $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_n})$.

Vecteurs engendrés, familles génératrices

Si un certain vecteur $\vec{w}$est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_n}$, on dit que $\vec{w}$est **engendré**, ou **linéairement engendré**, par les vecteurs $\vec{u_i}$.

On peut chercher si, dans un espace vectoriel donné, il est possible d'écrire tout vecteur comme combinaison linéaire d'une famille particulière de vecteurs. Cette famille permet alors de générer (d'exprimer par combinaison linéaire) tous les vecteurs de l'espace considéré : on l'appelle donc **famille génératrice**.

Par exemple, dans R*2*, tout vecteur (a,b) s'écrit comme a(1,0)+b(0,1).

Ainsi, la famille {(1,0) , (0,1)} est génératrice dans R*2* .

Définition

Dans un espace vectoriel E, l'ensemble de tous les vecteurs engendrés par les vecteurs $\vec{u_i}$ donnés est un sous-espace vectoriel de E.

Si ce sous-espace est E tout entier, on dit que la famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_n})$ **engendre** E, ou est **génératrice** de E.

Définition : Familles libres ou liées

On dit que la famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_n})$ est **liée** si l'un des vecteurs $\vec{u_i}$ est combinaison linéaire des autres $\vec{u_j} = \alpha_1\vec{u_1} + \alpha_2\vec{u_2} + \ldots + \alpha_{j-1}\overrightarrow{u_{j-1}} + \alpha_{j+1}\overrightarrow{u_{j+1}} + \ldots + \alpha_n\vec{u_n} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i\vec{u_i}$ pour certains α_i bien choisis.

Dit en termes imagés, la famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_n})$ est dite liée dès qu'on peut fabriquer un des vecteurs $\vec{u}_i$ à partir des autres (par les opérations qui existent sur les vecteurs : multiplication par des nombres et addition entre eux).

Exemple

Dans le R-espace vectoriel R^3, (3,3,1) est combinaison linéaire des vecteurs (1,1,0) et (1,1,1) car on a l'égalité (3,3,1) = 2(1,1,0) + (1,1,1). La famille ((3,3,1) , (1,1,0) , (1,1,1)) est donc liée.

Complément

Inversement, on dit que la famille est **libre**, ou **linéairement indépendante**, si aucun de ses vecteurs $\vec{u}_i$ n'est combinaison linéaire des autres.

Exemple : vecteurs libres

Dans , soient les vecteurs u =(1,1,0), v =(0,1,1) et w(0,0,1). La famille {u,v,w} est une famille libre dans R*3*. En effet, supposons qu'il existe des réels a, b,c tels que au+bv+cw = 0

c'est à dire: a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(0,0,1) = (0,0,0)

On a donc

(a, a+b, b+c) = (0,0,0)

Ce qui donne immédiatement a = b = c =0

Fondamental : Propriétés

Toute **sous famille** d'une famille **libre** est libre.

Toute **famille contenant une famille liée est liée**.

Toute famille dont l'**un des vecteurs est nul est liée**.

Fondamental : Propriétés

- Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille de **plus de n** éléments est **libre.**
- Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille de **moins de n** éléments **ne peut être génératrice.**

B. Bases de Rn

Définition : Base

On appelle base de E une famille de vecteurs qui est (les trois conditions sont équivalentes) :

- à la fois **libre et génératrice** de E,
- **libre de taille maximale** (si on ajoute encore un vecteur, elle devient liée),
- **génératrice de taille minimale** (si on lui retire un vecteur, elle cesse d'être génératrice).

Remarque

Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.

On appelle ce nombre la **dimension** de E.

Attention : Caractérisation d'une base

Si $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_n})$est une base de E et un vecteur $\vec{u}$quelconque de E, alors $\vec{u}$s'écrit d'une seule manière comme combinaison linéaire des $\vec{u}_i$

$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots + x_n\vec{x}_n = \sum_0^n x_i\vec{u}_i$.

Les nombres x_i sont les coordonnées de $\vec{u}$dans la base $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_n})$.

Fondamental : Théorème

Soit **E** un espace vectoriel de dimension n, alors :

- Toute famille **génératrice** de **n éléments est une base**.
- Toute famille **libre** de **n éléments** est **une base**.

C. Exercice

[Solution n°3 p 11]

Soit E un espace vectoriel sur K de dimension finie , soit B =(v_1,v_2,...,v_n) une famille de n vecteurs de E et soit v_{n+1} un vecteur de E qui n'est pas dans B. Dans ce qui suit, j désigne un entier entre 1 et n.

Cochez les affirmations correctes.

- [ ] Si B est libre,alors B $\cup$ {v_{n+1}} est libre.
- [ ] Si B est libre, alors B \{v_j} est libre.
- [ ] Si B est liée, alors B \{v_j} est liée.
- [ ] Si B est liée,alors B $\cup$ {v_{n+1}} est liée.

D. Exercice

[Solution n°4 p 12]

On se place dans l'espace vectoriel E = R3[X] des polynômes de degré inférieur ou égal à

Cocher les cases correspondantes à des affirmations vraies

La famille B1 =(1+3X, X + X2, 3X + X3) est :

- [ ] libre
- [ ] génératrice de E
- [ ] une base de E
- [ ] ni libre,ni génératrice

Solution des exercices

> Solution n°1 *(exercice p. 5)*

○	un ensemble de produit scalaire de vecteurs.
○	un ensemble de nombres quelconques que l'on peut additionner et multiplier entre eux
◉	un ensemble de vecteurs respectant les règles additives et multiplicatives.

> Solution n°2 *(exercice p. 6)*

☑	Le produit d'un vecteur ligne et d'un vecteur colonne de R*n*.
☐	Le produit d'un vecteur par un scalaire.
☑	le produit de deux vecteurs de R*n*.
☐	le résultat de la multiplication de deux scalaires.

> Solution n°3 *(exercice p. 10)*

☐	Si B est libre,alors B $\cup$ $\{v_{n+1}\}$ est libre.
☑	Si B est libre, alors B $\backslash\{v_j\}$ est libre. *Voir propriété sur les familles libres.*
☐	Si B est liée, alors B $\backslash\{v_j\}$ est liée.
☑	Si B est liée,alors B $\cup$ $\{v_{n+1}\}$ est liée. *Voir propriété sur les familles liées*

> Solution n°4 *(exercice p. 10)*

☑	libre *aucun élément de la famille ne s'écrit comme combinaison linéaire des autres éléments de la famille. Vous pouvez le vérifier par le calcul comme l'exemple du cours.*
☐	génératrice de E
☑	une base de E *E est de dimension 3 et la famille donné de trois polynôme est libre . donc ils forment une base. Or si E est de dimension n, toute famille libre de n éléments est une base.*
☐	ni libre,ni génératrice