NOMBRES COMPLEXES

1.0

N'dri Valérie UVCI 2017

UVCI

AOUT 2017

Table des matières

Objectifs

À la fin de cette leçon, vous serez capable :

- de **décrire et manipuler** des nombres complexes ;
- de **comprendre** les notations algébrique, exponentielle et trigonométrique d'un nombre complexe ;
- de **déterminer** les racines des équations ;
- d'**interpréter** géométriquement les nombres complexes.

Forme algébrique d'un nombre complexe

I

Objectifs

L'objectif de cette activité est de :

- définir la **forme algébrique**;
- représenter **un plan complexe**;
- définir le **conjugué d'un nombre complexe** .

A. Forme algébrique - Conjugué d'un nombre complexe

Définition : Définitions

Tout **nombre complexe z** s'écrit, de manière unique, sous la **forme algébrique z = x+iy** avec x et y réels, i étant un nombre complexe particulier tel que ***i2 = - 1***. Le réel **x** s'appelle la **partie réelle** de z, et se note **Re(z)**. Le réel **y** s'appelle la **partie imaginaire** de z, et se note **Im(z).**

Exemple

z = 2-3i est un nombre complexe écrit sous forme algébrique.

Sa partie réelle est : Re(z) = 2

Sa partie imaginaire est : Im(z) = (-3)

Plan complexe

Soit $(\vec{o},\vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormal du plan.

L'application qui, à tout nombre complexe z = x+iy, fait correspondre le point M de coordonnées (x,y) est une bijection.

M est l'**image** de z, et z l'**affixe** de M.
L'affixe du vecteur $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est le nombre complexe z = α +i β.

Si z_A et z_B sont les affixes de A et B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$

La **somme des nombres complexes** correspond à l'**addition des vecteurs**.

Exemple : somme et différence de nombres complexes

- On donne $z_1 = -1+7i$ et $z_2 = 3-2i$

$z_1 + z_2 = (-1+3) + (7-2)i$
$z_1 + z_2 = 2 + 5i$

- Soit A le point d'affixe $z_1 = -1+7i$ et B le point d'affixe $z_2 = 3-2i$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A = (-1+7i) - (3-2i) = (-1-3)+i(7+2) = -4 +9i$

Définition : Conjugué d'un nombre complexe

Le **conjugué** du nombre complexe z = x+iy (où x ∈ R et y ∈ R) **est** le nombre complexe $\bar{z}$ **=x−iy**.

Les images des nombres complexes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
On a les propriétés :

$$\bar{\bar{z}} = z\ ; \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}\ ; \quad \overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}\ ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}.$$

Exemple

Le conjugué du nombre complexe z = -1+7i est $\bar{z}$ = -1-7i

B. Exercice

[Solution n°1 p 17]

Les points A et B ont pour affixes respectifs 9+3i et -4+14i. parmi les affirmations suivantes cochez celles qui sont vraies.

- ☐ Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe -13+11i
- ☐ $z_A + z_B = 5-17i$
- ☐ Le conjugué du nombre $z_A - z_B$ est le conjugué de l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- ☐ Im $(z_A z_B)$= 114

II

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Objectifs

Définir le module, présenter la forme trigonométrique ainsi que quelques propriétés de l'argument d'un nombre complexe.

A. Forme trigonométrique

Définition : Module d'un nombre complexe

Le **module de z =x +iy** (où x∈R et y∈R) est le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On le **note |z|**, ou **ρ**, ou **r**.

Si M est l'affixe de z, |z| est la longueur OM.

Le **module** d'un nombre complexe a les mêmes **propriétés** que la **valeur absolue** d'un nombre réel.

Forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous **forme trigonométrique** :

z = ρ(cos θ+i sin θ) avec ρ > 0.

ρ =| z| est le **module** de z.

θ est un **argument** de z. On le note **arg z**. Il est défini, modulo 2π, par :

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \ \ et \ \ \sin\theta = \frac{y}{\rho} \ .$$

Complément : Propriétés de l'argument d'un nombre complexe non nul

Les égalités suivantes ont lieu à 2kπ près (avec k ∈ Z) :
arg(zz') = arg z+arg z' ; arg (z*n*) = n arg z avec n∈Z ;

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \ \ et \ \ arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \, .$$

B. Exercice

[*Solution n°2 p 17*]

Le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ est appelé ... du nombre complexe z noté... ou....

La forme trigonométrique de ce nombre est notée ....

La partie réelle sous forme trigonométrique d'un nombre complexe z s'écrit..... et sa partie imaginaire s'écrit....

C. Exercice

[*Solution n°3 p 17*]

On donne le nombre complexe suivant : z = 1-i

- [ ] le module de z est 2
- [ ] son argument est : -π/4
- [ ] Sa forme trigonométrique est : 2cos(-π/4) + i sin(-π/4)
- [ ] son conjugué est 1+i.

III

Exponentielle complexe

On convient de noter cosθ +i sinθ = $e^{i\theta}$.

A. Quelques formules et exponentielle complexe.

Formule de Moivre

∀ θ ∈R, ∀ n ∈ Z, **$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$**,
ce qui s'écrit avec la notation précédente : **$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$**.

Formules d'Euler

Pour tout réel x et tout entier n, on a :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \; ; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} ; \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

Définition : Exponentielle complexe

On définit l'exponentielle du nombre complexe z = x +iy par :
$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

Exemple

L'exponentielle complexe de z = 2+5i est $e^z = e^2 e^{5i} = e^2 (\cos 5 + i \sin 5)$

Remarque : Propriétés

∀z∈C ∀z'∈C **$e^z e^{z'} = e^{z+z'}$** ; ∀z∈C ∀n∈Z **$(e^z)^n = e^{nz}$**.

Si z est une constante complexe et t une variable réelle, on a :

$$\frac{d}{dt}(e^{zt}) = ze^{zt}.$$

B. Exercice

[*Solution n°4 p 18*]

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

- [ ] $\forall\theta\in R$, $\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta + 5\cos\theta$
- [ ] $\forall\theta\in R$, $\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta + 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$
- [ ] $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$
- [ ] $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ car $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

IV

Objectifs

A la fin de cette section, l'apprenant sera capable :

de déterminer les racines n-ièmes de l'unité ;

de déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe quelconque.

A. Racines n-ièmes d'un nombre complexe

cas général

Problème : Il s'agit de trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = Z$, c'est-à-dire résoudre l'équation complexe $z^n = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On trouve alors :

$$z^n = Z \Leftrightarrow r^n\, e^{in\alpha} = R\, e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\alpha \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = R^{\frac{1}{n}} \\ \alpha \equiv \dfrac{\theta}{n}\ \left[\dfrac{2\pi}{n}\right] \end{cases},$$

d'où les solutions suivantes :

$$\forall\, k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad z_k := R^{\frac{1}{n}}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}.$$

Fondamental : Théorème

Théorème 1 : L'équation complexe $z^n = Z$ admet n racines distinctes. Son ensemble solution est donné par

$$S_n = \left\{R^{\frac{1}{n}}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, k \in \{0, \ldots, n-1\}\right\}.$$

Complément : définition

Les nombres z_k définis ci-dessus sont appelés **racines n-iemes** de Z. on note leur ensemble S_n.

Racines n-ièmes de l'unité

Soit Un l'ensemble des racines n-ièmes de 1, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes z tels que z*n* =1.

On désigne l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité par

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}.$$

On a :

$$U_n = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\} \; avec \; u_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = (u_1)^k$$

et la propriété $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = 0$

Exemple

Les racines quatrième de l'unité sont :

u_0 = cos 0+i sin 0 = **1**

u_1 = cos(π/2) + i sin(π/2) = **i**

u_2 = cos(π) +i sin(π) = **-1**

u_3 = cos(3π/2) + i sin(3π/2) = **-i**

On remarque $u_0 + u_1 + u_2 + u_3$ = 1+i-1-i = 0

B. Exercice

[*Solution n°5 p 18*]

La somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à :

- ○ 1
- ○ -1
- ○ 0

C. Exercice

[Solution n°6 p 18]

On veut résoudre l'équation z5 = 2eiπ/3 . Les solutions de l'équation sont de la forme :

- ○ $2^{\frac{1}{5}} e^{i(\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5})}, k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$
- ○ $2^{\frac{1}{5}} e^{i(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5})}, k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$
- ○ $2^{5} e^{i(\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5})}, k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$
- ○ $2^{\frac{1}{5}} e^{i(\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{15})}, k \in \{0; 1; 2; 3; 4; \}$

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 8)

☑	Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe -13+11i
☐	$z_A + z_B$ = 5-17i
☐	Le conjugué du nombre $z_A - z_B$ est le conjugué de l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
☑	Im ($z_A z_B$)= 114

> Solution n°2 (exercice p. 10)

Le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ est appelé ... du nombre complexe z noté... ou....

La forme trigonométrique de ce nombre est notée ....

La partie réelle sous forme trigonométrique d'un nombre complexe z s'écrit..... et sa partie imaginaire s'écrit....

> Solution n°3 (exercice p. 10)

☐	le module de z est 2
☑	son argument est : -π/4
☐	Sa forme trigonométrique est : 2cos(-π/4) + i sin(-π/4)
☑	son conjugué est 1+i.

> Solution n°4 (exercice p. 12)

- [ ] ∀θ∈R , cos (5θ) = 16 cos*5* θ + 5cosθ
- [x] ∀θ∈R, cos (5θ) = 16 cos*5* θ + 20cos*3* θ + 5cosθ
- [x] $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$
- [ ] $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ car $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

> Solution n°5 (exercice p. 14)

- [ ] 1
- [ ] -1
- [x] 0

> Solution n°6 (exercice p. 15)

- [x] $2^{\frac{1}{5}} e^{i(\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5})}, k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$
- [ ] $2^{\frac{1}{5}} e^{i(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5})}, k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$
- [ ] $2^{5} e^{i(\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5})}, k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$
- [ ] $2^{\frac{1}{5}} e^{i(\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{15})}, k \in \{0; 1; 2; 3; 4; \}$