SUITES DE NOMBRE REELS

Version 1

Aout 2017

Table des matières

Objectifs

À la fin de cette leçon, vous serez capable de:

- **définir** une suite de nombres ;
- **connaître** les conditions de convergence et la limite d'une suite ;
- **manipuler** les suites arithmétiques et géométriques.

I. Généralités

I

A. I-1. Définition d'une suite

Définition

Une suite est une application u : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note *u(n)* par u_n et on l'appelle n-ème *terme* ou *terme général* de la suite.

La suite est notée *u*, ou plus souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n). Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0, on note alors $(un)_{n>n0}$.

Exemple

- $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ *, est la suite de termes* $: 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$
- (-1)*n*, est la suite qui alterne +1, -1, +1, -1,. . .

Définition : Suite Extraite

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** de u_n toute suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où σ est une application strictement croissante de N dans N.

Exemple

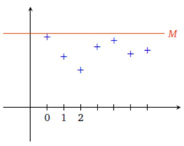
- u_{2n} et u_{2n+1} sont des suites extraites de u_n
- u_{n^2} est une suite extraite de u_n

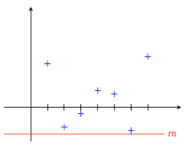
B. II-2. Suite majorée, minorée, bornée

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite:

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** si $\exists M\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, u_n\leqslant M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** si $\exists m\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, u_n\geq m$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si elles est majorée et minorée c'est a dire $\exists M\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, |u_n|\leqslant M$.





C. II-3. Monotonie

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite:

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}\geq u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** si $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}>u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}\leqslant u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **strictement décroissante** si $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}<u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n\geq 0$.
- Si est une suite à termes strictement positifs, elle est croissante si et seulement si $\forall n\in\mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$.

Exemple

- La suite (u_n) définie par $u_n=(-1)n/n$ pour $n>1$, n'est ni croissante ni décroissante. Elle est majorée par 1/2 et minorée par -1.
- La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante. Elle est majorée par 1 (borne atteinte pour n = 1), elle est minorée par 0 mais cette valeur n'est jamais atteinte.

D. Exercice

1. La suite $\left(\frac{n}{(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ? Est-elle bornée ?

2. La suite $\left(\frac{(n\sin(n!))}{(1+n^2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle bornée?

3. Réécrire les phrases suivantes en une phrase mathématique.

(a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 7.

(b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

(c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.

(d) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas strictement croissante.

4. Est-il vrai qu'une suite croissante est minorée ? Majorée ?

5. Soit x > 0 un réel, montrer que la suite $\left(\frac{x^n}{(n!)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang

II. Limites

II

A. II-1. Limite finie, Limite infinie

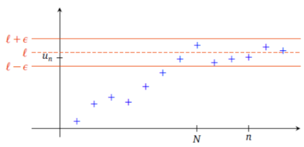
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

Définition

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour ***limite*** un réel *l* si : pour tout *ε > 0*, il existe un entier naturel *N* tel que *n> N* alors $|u_n - l| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon)$.

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l . Autrement dit u_n est proche d'aussi près que l'on veut de *l* a partir d'un certain rang.



Définition

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tend vers + ∞*** si :

$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \geq A)$.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tend vers - ∞*** si : $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \leq -A)$.

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** si elle admet une limite ***finie***. Elle est **divergente** sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers + ∞ ou - ∞ , soit elle n'admet pas de limite).

On parlera de **la** limite, si elle existe, car il y a **unicité** de la limite :

Proposition 1.

Si une suite est convergente, sa limite est unique.

B. II-3. Propriétés des limites

Proposition 2.

Toute suite convergente est bornée.

Remarque

La réciproque est fausse. Exemple de la suite (-1)*n* qui est bornée mais non convergente car égale a 1 si n pair et -1 si n impair

Proposition 3.

Si u_n est convergente, toute suite extraite de un converge et tend vers la même limite.

Méthode

La contraposée de cette proposition permet de montrer qu'une suite diverge : il suffit pour cela d'en extraire deux suites qui convergent vers deux limites différentes.

(illustration par la remarque précédente).

Proposition 4. (Opérations sur les limites)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes.*

1. *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, *où* $\ell \in \mathbb{R}$, *alors pour* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a* $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda\ell$.
2. *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, *où* $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, *alors*
$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$$
$$\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$$
3. *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *où* $\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *alors* $u_n \neq 0$ *pour* n *assez grand et* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$.

Proposition 5. (Opérations sur les limites infinies)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites telles que* $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = 0$
2. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée alors* $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.
3. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée par un nombre* $\lambda > 0$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$.
4. *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et* $u_n > 0$ *pour* n *assez grand alors* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.

Exemple

la suite $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$ donc la suite $(1/\sqrt{n})$ tend vers 0.

Proposition 6.

Si la suite u_n est bornée et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = 0$.

Exemple

Si $u_n = \cos(n)$ et $v_n = (1/\sqrt{n})$ alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = 0$.

C. II-4. Formes indéterminées

Dans certaines situations, on ne peut rien dire à priori sur la limite d'une suite, il faut faire une étude au cas par cas.

Exemple

1. « $+\infty - \infty$ » Cela signifie que si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$ il faut faire faire l'étude en fonction de chaque suite pour déterminer $\lim(u_n + v_n)$ comme le prouve les exemples suivants.

$$\lim_{n\to+\infty} (e^n - \ln(n)) = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} (n - n^2) = -\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\left(n + \frac{1}{n}\right) - n\right) = 0$$

2. « $0 \times \infty$ »

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} \times e^n = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \ln n = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times (n+1) = 1$$

3. « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ », « 1^∞ », ...

D. II-5. Limite et inégalités

Proposition 7.

1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Alors*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$
2. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$. Alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
3. *Théorème des « gendarmes » : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites telles que*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$
et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = \lim_{n\to+\infty} w_n$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Exemple

Montrer en utilisant le théorème de Gendarme la limite de la suite u_n= (cos x)/n pour tout *n* non nul.

Correction :gendarme exple.png (cf. gendarme exple p 19)

E. II-6. Existence de Limites

Proposition 8.

- Toute suite croissante et majorée est convergente
- Toute suite décroissante et minorée est convergente

Définition : Suites adjacentes

On dit que deux suites réelles u_n et v_n sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Proposition 9.

Deux suites réelles adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Complément : Limites utiles

Soit a un reel > 1 et n un entier ≥ 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k}=+\infty\ .\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{a^n}=+\infty\ .\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=+\infty\ .$$

F. Exercice

[Solution n°1 p 21]

Soient u_n et v_n deux suites réelles et a un réel. Quelles sont les assertions vraies ?

- [ ] si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.
- [ ] si $(|u_n|)$ converge vers *a* , alors (u_n) converge vers *a* ou -*a* .
- [ ] si (u_n) converge vers *a* , alors $(|u_n|)$ converge vers | *a* |.
- [ ] si (u_n) est a termes strictement positif, alors *a* est strictement positif.
- [ ] si (v_n) converge vers 0, alors (u_nv_n) converge vers 0.

G. Exercice

[Solution n°2 p 21]

Soit (un) une suite réelle. Les énoncés suivants sont-ils exacts ?

- [ ] Si (u_n) converge, alors elle est monotone
- [ ] Si (u_n) diverge, alors elle est monotone
- [ ] Si (u_n) diverge, alors elle est non bornée
- [ ] Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge.

III. Suites Remarquables

III

A. III-1. Suite Arithmétique

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** s'il existe un réel ***r*** appelé **raison** de la suite tel :

pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{u_{n+1} = u_n + r}$.

Remarque

- u_n est constante si $r = 0$.
- Elle est strictement croissante si r > 0 et strictement décroissante si r < 0.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$, et plus généralement : pour tout entier (p,q), $u_n = u_p + (n-p)r$.
- Réciproquement, si le terme général d'une suite s'écrit $u_n = a + nb$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

Proposition 10.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique $\Leftrightarrow$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n + u_{n+2} = 2u_{n+1}$.

(prouvez en appliquant la définition)

Définition

On dit que trois réels a, b, c sont en **progression arithmétique** s'ils sont des termes successifs d'une suite arithmétique : cela équivaut a dire que $a + c = 2b$.

Proposition 11.

La somme des *n* premiers termes d'une suite arithmétique u_n de raison *r* est :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1} u_k=nu_0+\frac{n(n-1)}{2}r=\frac{n}{2}(u_0+u_{n-1})$$

Plus généralement, la somme de *n* termes successifs est :

$$S_n=\sum_{k=m}^{m+n-1} u_k=\frac{n}{2}(u_m+u_{m+n-1})$$

Exemple

S_9= 2 +5 + 8 +11 + 14 + 17 +20 + 23 + 26 = 9/2 (2+26) = 126.

B. III- 2. Suite Géométrique

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** s'il existe un réel ***q*** appelé **raison** de la suite tel :

pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{u_{n+1} = q\, u_n}$

Remarque

u_n est constante si $q = 1$

si $q > 0$, la suite garde un signe constant et est monotone.

Plus précisément :

- si $u_0 > 0$ et $q > 1$, $u_n > 0$ et strictement croissante.
- si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, $u_n > 0$ et strictement décroissante.
- si $u_0 < 0$ et $q > 1$, $u_n < 0$ et strictement croissante.
- si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, $u_n < 0$ et strictement décroissante.

Proposition 12.

La somme des *n* premiers termes d'une suite géométrique u_n de raison *q* est :

Si q ≠ 1, $S_n=\sum_{k=0}^{n-1} u_k=u_0\sum_{k=0}^{n-1} q^k=u_o\frac{1-q^n}{1-q}$

Plus généralement, si $q \neq 1$, la somme de *n* termes successifs est :

$$S_n=\sum_{k=m}^{m+n-1} u_k=u_m\frac{1-q^n}{1-q}$$

Exemple

Montrer que la limite de (1 +2+ 22+..+2*n*)/2*n* est 1.

Proposition 13.

Soit u_n une suite géométrique de raison *q* et de premier terme $u_0 \neq 0$.

1) Si $|q| < 1$, $\lim_{n\to +\infty} u_n = 0$.

2) Si $|q| > 1$, $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
3) Si $q = 1$, $\lim_{n \to +\infty} u_n = u_0$.
4) Si $q = -1$, u_n n'a pas de limite.

C. Exercice : Déterminer la limite des suites suivante

[Solution n°3 p 21]

Exercice

$u_n = 1 + 1/2n$

D. Exercice

[Solution n°4 p 22]

$u_n = (n - (-1)n) /(n+ (-1)n)$

E. Exercice

[Solution n°5 p 22]

$u_n = (3n - 2n)/(3n + 2n)$

F. Exercice

[Solution n°6 p 22]

$$u_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n}$$

G. Exercice

On considère une suite (u_n) définie sur ℕ par : $u_0=6\,;\, u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2\,;$

On pose $v_n = u_n - 3$.

1) a) Montrer que la suite v_n est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

b) Exprimer v_n puis un en fonction de n.

c) En déduire les limites de v_n et u_n .

2) Pour tout entier n , on pose $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$. Déterminer limite de S_n.

Ressources annexes

- gendarme exple

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{\cos x}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. On a $-1 \leq \cos x \leq 1$ d'où $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 14)

☑	si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.
☐	si $(|u_n|)$ converge vers a , alors (u_n) converge vers a ou $-a$. *(-1)n contredit*
☑	si (u_n) converge vers a , alors $(|u_n|)$ converge vers $| a |$. *continuite de la valeur absolue*
☐	si (u_n) est a termes strictement positif, alors a est strictement positif. *1/n converge vers 0 bien que tous ses terme soient strictement positifs*
☐	si (v_n) converge vers 0, alors (u_nv_n) converge vers 0.

> Solution n°2 (exercice p. 14)

☐	Si (u_n) converge, alors elle est monotone *contre exemple (-1)n/n*
☐	Si (u_n) diverge, alors elle est monotone *exemple (-1)n*
☐	Si (u_n) diverge, alors elle est non bornée *exemple (-1)n*
☑	Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge.

> Solution n°3 (exercice p. 17)

Exercice

1

> Solution n°4 (exercice p. 17)

1

> Solution n°5 *(exercice p. 17)*

1

> Solution n°6 *(exercice p. 17)*

$+\infty$

Bibliographie

[04] François Liret, Maths en pratique à l'usage des étudiants Cours et exercices, Dunod, 2006

[04] Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak, PROBLÈMES D'ANALYSE I, Exercices et corrigés, EDP Sciences, 2008.

Webographie

[04] http://www.discmath.ulg.ac.be/