FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE : LIMITE - CONTINUITÉ

Version 1

Dr Euloge KOUAME © UVCI

Aout 2017

Table des matières

Objectifs

À la fin de cette leçon, vous serez capable de :

- **Définir** les propriétés d'une fonction dans un voisinage suffisamment petit d'un point donné ;
- **Calculer** les limites d'une fonction ;
- **Utiliser** la notion de continuité pour résoudre des problèmes de calcul

LIMITE

I

A. Limite en un point

Soit $f : I \to R$ une fonction définie sur un intervalle I de R. Soit $x_0 \in R$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition : Définition 1.

Soit $l \in R$. On dit que ***f* a pour limite *l* en x_0** si :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in I, |\, x - x_0| < \delta \to |\, f(x) - l) \,| < \varepsilon.$

On dit aussi que ***f (x)* tend vers *l* lorsque x tend vers x_0**. On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ou bien $\lim_{x_0} f = l$.

Remarque

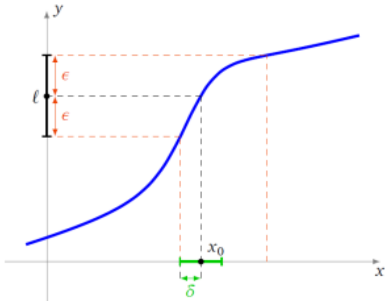
1. Intuitivement, cette définition signifie que *f(x)* est aussi près de l que l'on veut à condition de choisir *x* suffisamment près de x_0

2. La définition de la limite précédente permet dire qu'il y a équivalence entre écrire que *f(x)* tend vers *l* et *f(x)* - *l* tend vers *0* quand x tend vers x_0

3. On peut remplacer certaines inégalités strictes « < » par des inégalités larges « ≤ » dans la définition :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in I, |\, x - x_0| \leq \delta \to |\, f(x) - l \,| \leq \varepsilon$

4. N'oubliez pas que l'ordre des quantificateurs est important, on ne peut pas échanger le $\forall\, \varepsilon$ avec le $\exists\, \delta$: le δ dépend en général du ε



Soit *f* une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition : Définition 2.

- On dit que ***f* a pour limite + ∞ en x_0** si

$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \rightarrow f(x) > A$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

- On dit que ***f* a pour limite - ∞ en x_0** si

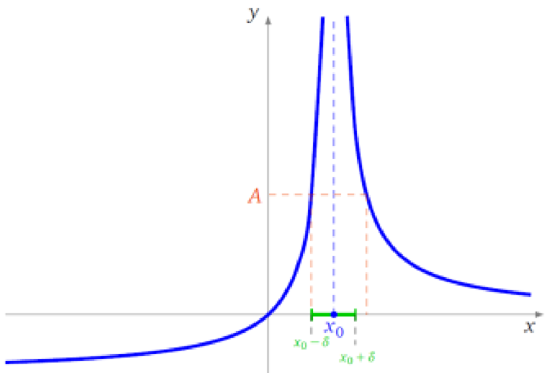
$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \rightarrow f(x) < -A$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Remarque

1. Intuitivement, cela signifie que lorsque *x* s'approche de x_0, *f(x)* devient très grand (+∞) ou très petit (-∞).

2. Lorsqu'on est en présence d'une limite infinie *(*+∞ ou -∞) en un point fini x_0, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de *f*.



B. Limite en l'infini

Soit $f : I \rightarrow R$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a,+\infty[$.

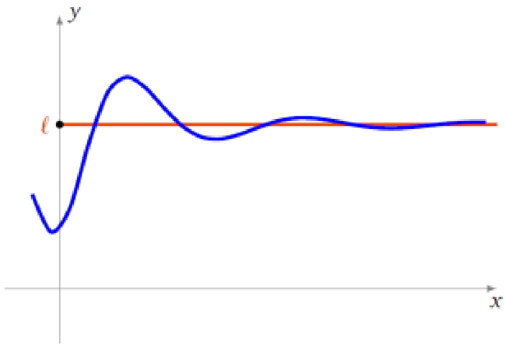
Définition : Définition 3.

- Soit $l \in R$. On dit que ***f* a pour limite *l* en +∞** si

$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x > B \rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

- On dit que ***f* a pour limite +∞ en +∞** si
  ∀ A > 0, ∃ B > 0, ∀ x ∈ I, x > B → f(x) > A
  On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



lorsque *x* devient très grand (tend vers +∞) , *f(x)* devient très proche de *l*.
On définirait de la même manière la limite en -∞ pour des fonctions définies sur les intervalles du type] -∞, a[.

Exemple

On a les limites classiques suivantes :
1. pour tout n ≥ 1

- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x^n$ = + ∞ si n pair et - ∞ si n impair
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

2. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ avec $a_n > 0$ et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ avec $b_m > 0$.

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

C. Limite à gauche et à droite

Soit *f* une fonction définie sur un ensemble de la forme *]a, x_0[U]x_0, b[*.

Définition : Définition 4.

- On appelle limite à droite en x_0 de *f*la limite de la fonction *f* définie sur *]x_0 ,b[* en x_0 et on la note $\lim_{x_0^+} f$.
- On définit de même la limite à gauche en x_0 de *f* : la limite de la fonction *f*

définie *]a, x_0[* en x_0 et on la note $\lim\limits_{x_0^-} f$.

Si la fonction *f* a une limite en x_0, alors ses limites à gauche et à droite en x_0 *coïncident* et valent $\lim\limits_{x_0} f = l$.

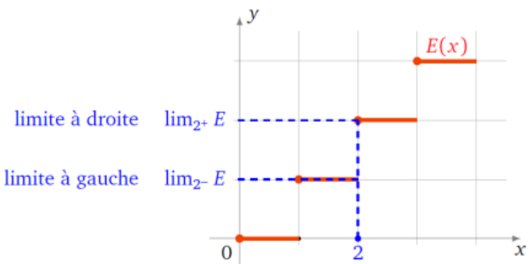
Exemple : Graphe d'une fonction bornée (minorée par m et majorée par M).

Considérons la fonction partie entière au point x = 2 :

• comme pour tout $x \in]2, 3[$ on a E(x) = 2, on a limite a droite de 2 de E = 2 ,

• comme pour tout $x \in [1, 2[$ on a E(x) = 1, on a limite a gauche de 2 de E =1.

Ces deux limites étant différentes, on en déduit que E n'a pas de limite en 2.



D. Propriétés

Proposition 1.

Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Soient deux fonctions *f* et *g*. On suppose que x_0 est un réel, ou que x_0 = +∞ ou -∞.

Proposition 2.

Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors :*

- $\lim\limits_{x_0}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x_0}(f + g) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{x_0}(f \times g) = \ell \times \ell'$
- *si* $\ell \neq 0$, *alors* $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

De plus, si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ *(ou* $-\infty$*) alors* $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = 0$.

Proposition 3.

$$Si \lim_{x_0} f = \ell \text{ et } \lim_{\ell} g = \ell', \text{ alors } \lim_{x_0} g \circ f = \ell'.$$

Exemple

On utilise les propriétés ci-dessus sans s'en apercevoir !

Soit $x \mapsto u(x)$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \to 2$ lorsque $x \to x_0$. Posons $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{u(x)^2} + \ln u(x)}$.
Si elle existe, quelle est la limite de f en x_0 ?

- Tout d'abord comme $u(x) \to 2$ alors $u(x)^2 \to 4$ donc $\frac{1}{u(x)^2} \to \frac{1}{4}$ (lorsque $x \to x_0$).
- De même comme $u(x) \to 2$ alors, dans un voisinage de x_0, $u(x) > 0$ donc $\ln u(x)$ est bien définie dans ce voisinage et de plus $\ln u(x) \to \ln 2$ (lorsque $x \to x_0$).
- Cela entraîne que $1 + \frac{1}{u(x)^2} + \ln u(x) \to 1 + \frac{1}{4} + \ln 2$ lorsque $x \to x_0$. En particulier $1 + \frac{1}{u(x)^2} + \ln u(x) \geqslant 0$ dans un voisinage de x_0, donc $f(x)$ est bien définie dans un voisinage de x_0.
- Et par composition avec la racine carrée alors $f(x)$ a bien une limite en x_0 et $\lim_{x \to x_0} f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \ln 2}$.

Il y a des situations où l'on ne peut rien dire a priori sur les limites. Ce sont des cas de forme indéterminées. Il faut lever l'indertemination. C'est comme ce que nous avons vu sur les suites ! Les formes indéterminées sont :

$$+\infty - \infty \; ; \; 0 \times \infty \; ; \; \frac{\infty}{\infty} \; ; \; \frac{0}{0} \; ; \; 1^{\infty} \; ; \; \infty^{0}.$$

Voici une proposition très importante qui signifie qu'on peut passer à la limite dans une inégalité *large.*

Proposition 4.

- *Si $f \leqslant g$ et si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leqslant \ell'$.*
- *Si $f \leqslant g$ et si $\lim_{x_0} f = +\infty$, alors $\lim_{x_0} g = +\infty$.*
- *Théorème des gendarmes*

  Si $f \leqslant g \leqslant h$ et si $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$, alors g a une limite en x_0 et $\lim_{x_0} g = \ell$.

E. Quelques limites importantes

Remarque

Pour déterminer la limite d'une fonction il n'existe pas de méthode générale !

Méthode

- $\lim_{x \to 0}$. de :

  (sin x)/x = 1 ; (tan x)/x = 1 ; ln (1 + x)/x = 1; (ex - 1)/x = 1; *(1 + x)1/x = e*
- $\lim_{x \to +\infty}$. de :

  (1 + a/x)x = ea ; (1 + 1/x)x = e ; xk/ax = 0 , a > 0 ; ax/xk = +∞ ; ln (xk)/xm = 0, m > 0.

F. Exercice

Question 1

[*Solution n°1 p 21*]

Déterminer, si elle existe, la limite de $(2x^2 - x - 2)/(3x^2+2x+2)$ en 0. Et en $+\infty$?

Question 2

[*Solution n°2 p 21*]

Déterminer, si elle existe, la limite de $\sin(1/x)$ en $+\infty$. Et pour $(\cos x)/\sqrt{x}$?

Question 3

[*Solution n°3 p 21*]

Déterminer, si elle existe en 0 de $(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2})/x$. Et limite en 2 de $(x^2 - 4)/(x^2 - 3x+2)$?

Question 4

En utilisant la définition de la limite (avec des ε), montrer que $\lim_{x \to 2} (3x + 1) = 7$.

CONTINUITE

II

A. Continuité en un point

Soit I un intervalle de R et $f : I \to R$ une fonction.

Définition : Définition 5.

- On dit que ***f* est continue en x_0** si :

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, \forall\ x \in I, |\ x - x_0| < \delta \to |\ f(x) - f(x_0)\ | < \varepsilon.$

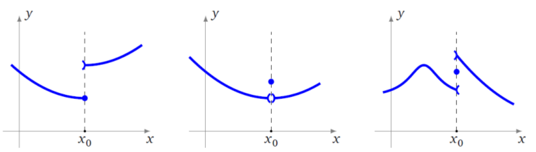
C'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).

- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Remarque

En d'autres termes, dire qu'une fonction est continue signifie que sa courbe représentative ne présente pas de sauts.

Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :



Exemple

Les fonctions suivantes sont continues :

- une fonction *constante* sur un intervalle,
- la fonction *racine carrée* sur $[0,+\infty[$,
- les fonctions *sin* et *cos* sur R,
- la fonction *valeur absolue* sur R,
- la fonction *exp* sur R,

• la fonction *ln* sur $]0,+\infty[$.

B. Propriétés

La continuité se comporte bien avec les opérations élémentaires. Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates des propositions analogues sur les limites.

Proposition 5.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors

- *$\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),*
- *$f + g$ est continue en x_0,*
- *$f \times g$ est continue en x_0,*
- *si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.*

Exemple

La proposition précédente permet de vérifier que d'autres fonctions usuelles sont continues :

• les fonctions puissance x^n sur R (comme produit $x \times x$ ....),

• les polynômes sur R (somme et produit de fonctions puissance et de fonctions constantes),

• les fractions rationnelles P(x)/Q(x) sur tout intervalle où le polynôme Q(x) ne s'annule pas.

La composition conserve la continuité (mais il faut faire attention en quels points les hypothèses s'appliquent).

Proposition 6.

Soient $f : I \to R$ et $g : J \to R$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors g ? f est continue en x_0.

C. Prolongement par continuité

Définition : Définition 6.

Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to R$ une fonction.

• On dit que ***f* est prolongeable par continuité en x_0** si f admet une limite finie en x_0. Notons alors l cette limite.

On définit alors la fonction g : I → R en posant pour tout $x \in I$

$g(x) = f(x)$ si $x = x_0$

$g(x) = l$ si $x \neq x_0$

Alors g est continue en x_0 et on l'appelle **le prolongement par continuité** de f en x_0.

Dans la pratique, on continuera souvent à noter f à la place de g

Exemple

La fonction *f* définie sur *R** par $f(x) = x \sin(1/x)$ admet un prolongement par continuité en 0.

Car la limite de f en 0 est 0. vérifiez !

D. Suites et continuité

Proposition 7.

Soit $f : I \to R$ une fonction et x_0 un point de I. Alors :

$$\boxed{f \text{ est continue en } x_0 \iff \begin{array}{c} \text{pour toute suite } (u_n) \text{ qui converge vers } x_0 \\ \text{la suite } (f(u_n)) \text{ converge vers } f(x_0) \end{array}}$$

Remarque

On retiendra surtout l'implication : si f est continue sur I et si (u_n) est une suite convergente de limite l , alors $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$.

On l'utilisera intensivement pour l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: si f est continue et $u_n \to l$, alors $f(l) = l$

E. Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1 (Théorème des valeurs intermédiaires)

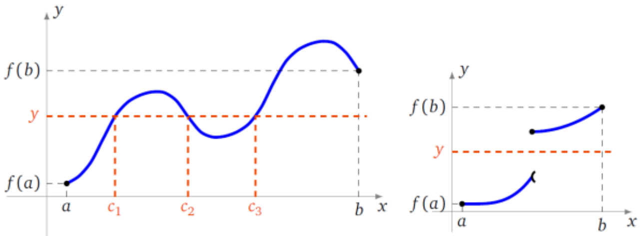
Soit $f : [a, b] \to R$ une fonction continue sur un segment.

Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Remarque

Une illustration du théorème des valeurs intermédiaires (figure de gauche), le réel c n'est pas nécessairement unique.

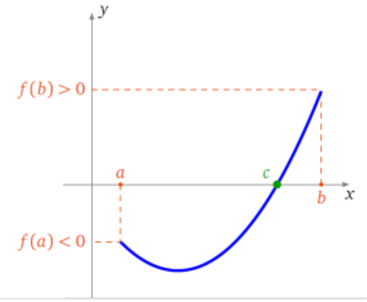
De plus si la fonction n'est pas continue, le théorème n'est plus vrai (figure de droite).



Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Corrollaire 1.

Soit $f : [a, b] \to R$ une fonction continue sur un segment.
Si $f(a) . f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.



Exemple

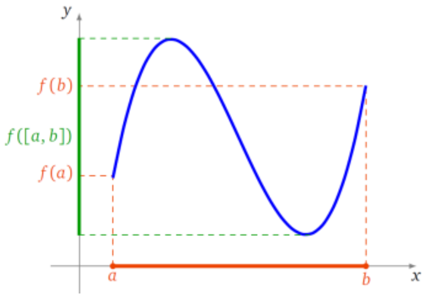
Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.
En effet, un tel polynôme s'écrit $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ avec n un entier impair.
On peut supposer que le coefficient an est strictement positif. Alors on a $\lim_{-\infty} P = -\infty$ et $\lim_{+\infty} P = +\infty$. En particulier, il existe
deux réels a et b tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ et on conclut grâce au corollaire précédent.

Corollaire 2.

Soit $f : I \to R$ une fonction continue sur un intervalle I.
Alors $f(I)$ est un intervalle.

Attention

Il serait faux de croire que l'image par une fonction *f* de l'intervalle *[a, b]* soit l'intervalle *[f(a), f(b)]* (voir la figure ci-dessous).



Théorème 2.

Soit $f : [a, b] \to R$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe deux réels m

et M tels que f ([a, b]) = [m,M].
Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Comme on sait déjà par le théorème des valeurs intermédiaires que *f ([a, b])* est un intervalle, le théorème précédent signifie exactement que

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } f \text{ est continue sur } [a,b] \\ \text{alors } f \text{ est bornée sur } [a,b]\text{, et elle atteint ses bornes.}\end{array}}$$

Donc *m* est le minimum de la fonction sur l'intervalle [a, b] alors que *M* est le maximum.

F. Exercice

Question 1

Déterminer le domaine de définition et de continuité des fonctions suivantes : f (x) = 1/ sin x;

g(x) = 1/√(x + 1/2) ; h(x) = ln(x*2* + x - 1).

Question 2

La fonction définie par f (x) = (x*3*+8)/|x+2| admet-elle un prolongement par continuité en -2 ?

Question 3

Étudier la continuité de f : R → R définie par : f (x) = sin(x) cos(1/x) si x ≠ 0 et f (0) = 0.

Question 4

Soient P(x) = x*5* - 3x- 2 et f (x) = x2*x* - 1 deux fonctions définies sur R. Montrer que l'équation

P(x) = 0 a au moins une racine dans [1,2] ; l'équation f (x) = 0 a au moins une racine dans [0,1] ; l'équation P(x) = f (x) a au moins une racine dans]0, 2[.

Question 5

Montrer qu'il existe x > 0 tel que 2*x* + 3*x* = 7*x* .

Question 6

Soient f , g : [0,1] → R deux fonctions continues. Quelles sont, parmi les fonctions suivantes, celles dont on peut affirmer qu'elles sont bornées :

f + g ; f . g ; f/g ?

Conclusion

Après avoir introduit les propriétés de base des fonctions, et les notions de limite et continuité nous allons voir dans la suite la notion de **dérivabilité** et son usage dans l'étude des fonctions.

Solution des exercices

> **Solution n°1** *(exercice p. 12)*

- 1 et 2/3

> **Solution n°2** *(exercice p. 12)*

0 et 0.

> **Solution n°3** *(exercice p. 12)*

Prendre l'expression conjuguée pour la première limite on trouve . pour la deuxième remarquez que 2 est un zéro a la fois du numérateur et du dénominateur factorisez et simplifiez on trouve .

Bibliographie

[04] François Liret, Maths en pratique à l'usage des étudiants Cours et exercices, Dunod, 2006

[04] Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak, PROBLÈMES D'ANALYSE I, Exercices et corrigés, EDP Sciences, 2008.

Webographie

[04] http://www.discmath.ulg.ac.be/