Probabilités et Statistique

ÉVÉNEMENTS ET LEURS PROBABILITES

1.0

ProbL102

Novembre 2017

Table des matières

Objectifs

À la fin de cette leçon, vous serez capable de:

- **comprendre ce qu'est un événement et estimer sa probabilité**
- **comprendre la notion d'équiprobabilité**
- **comprendre la notion d'événements indépendants**
- **calculer les probabilités conditionnelles**

Introduction

Cette leçon est fondamentale dans la compréhension de la théorie des probabilités. Nous y présentons les notions essentielles . Il faut savoir que les probabilités s'occupent **d'ensembles** et de la **mesure de ces ensembles.**

I

Épreuve, Événements et probabilités

Objectifs

A la fin e cette section ,vous serez capables de :

Comprendre ce qu'est un événement et estimer sa probabilité

Comprendre la notion d'équiprobabilité

A. Vocabulaire et modalisation

Exemple introductif qui va nous conduire tout le long du cours

On considère un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. Le dé est supposé équilibré c'est à dire que toutes les faces du de vont la même chance d’apparaître . On fait l’expérience suivante :" on lance le dé et on relève le numéro de la face supérieure du dé"

" on lance le dé et on relève le numéro de la face supérieure du dé" est appelé **expérience aléatoire**.Ce que nous allons manipuler par la suite et l'ensemble des **issues possibles** (résultats possibles) de l' expérience aléatoire.

Fondamental

Lorsque l'on considère une expérience aléatoire il faut donc faire le lien entre cette expérience et un ensemble contenant tous les résultats possibles sur lequel on effectuera des mesures. Le fait de créer ces objets mathématiques et de les relier à la réalité c'est faire une modélisation.

Définition : modélisation d'une expérience aleatoire

A toute expérience aléatoire on associe un espace probabilisable (Ω,T) constitué de :

• un ensemble Ω contenant autant d’éléments que de résultat de l’expérience et appelé **l'univers de l’expérience aléatoire**

• un autre ensemble F dont les éléments sont appelés des **événements**

Si Ω est un ensemble fini ou dénombrable on peut toujours prendre F = P(Ω) l'ensemble des parties de Ω.

Exemple

Si nous reprenons l'exemple introductif, nous avons :

L'univers ou l'ensemble de tous les résultats possibles est Ω ={1,2,3,4,5,6}

Une issue possible est {3} c'est-à-dire "la face 3 sort".

Un événement est par exemple "On obtient un nombre pair" qui se représente par l'ensemble { 2, 4, 6}

L'événement "On obtient un nombre supérieur à 3" est représenté par l'ensemble {4,5,6}

Rappel : A retenir

Si A et B sont deux sous-ensembles de Ω, on note

A ∪ B = {ω; ω ∈ A ou ω ∈ B} : "A ou B se réalise"

A ∩ B = {ω; ω ∈ A et ω ∈ B} : "A et B se réalisent"

A\B = {ω; ω ∈ A et ω ∉ B} : "A se réalise mais pas B"

Deux événements A et B de F sont disjoints s'ils n'ont aucune issue en commun, c'est `a dire que A ∩ B = ∅

Exemple

soit A = {2, 4, 6}, B = {5, 6}, C = {3}, on a :

1. A ∪ B = {2, 4, 5, 6}
2. A ∩ B = {6}
3. A ∩ C = ∅
4. C(A) = {1, 3, 5}, C(A)correspond à l'événement "on obtient un nombre impair".
5. A \ B = {2, 4} on remarque que A \ B = A ∩ C(B)

C(.) désigne le complémentaire de l'ensemble

Définition

Une probabilité P sur Ω est une fonction de F sur l'intervalle [0 ;1] telle que :

1. $P(\Omega) = 1$,
2. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints (*i.e.* $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$), alors

$$P(\cup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i) \qquad (1.1)$$

Fondamental : A retenir

Propriétés fondamentales

1. P(∅)=0
2. *Pour tout événement A,* $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.
3. *Pour tous événements quelconques A et B,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

4. *Si A et B sont deux événements tels que* $A \subseteq B$ *alors* $P(A) \leq P(B)$.

Exemple

On reprend notre exemple introductif. Alors étant donné que le dé est équilibré on pense pour

ce cas à une probabilité comme à une fonction p sur Ω, telle que p(1) + ... + p(6) = 1 et on associe à chaque issue la probabilité 1/6.

La probabilité de l'´événement A =”on obtient un nombre pair”.

En effet A = {2} ∪ {4} ∪ {6}, les 3 issues qui composent A étant 2 à 2 disjointes

P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2.

Vidéo complémentaire sur la notion de probabilité. *lien 1*[1] *lien2*[2]

Définition : Équiprobabilité

Les événements élémentaires ou singletons, ({ i } , 1 ≤ i ≤ n) sont dits équiprobables s'ils ont tous la même probabilité. Ainsi si A est un événement équiprobable alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\{i\} \in A} \frac{1}{n} = \frac{Card(A)}{n} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}.$$

Exemple

On effectue un lancer d'un dé à six faces et on s'intéresse à la probabilité de A = « obtenir un chiffre pair ». On considère que le dé est équilibré . Dans cet exemple, on choisit l'univers le plus naturel : Ω = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 } On est bien dans le cas d'équiprobabilité, la formule donne :

P(A)=3/6 =1/2 puisque l'ensemble A ={2,4,6}

B. Exercice

On considère le même dé, sauf que sur la sixième face, le nombre 6 a été remplacé par le chiffre 5 ;

Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?

C. Exercice

En considérant l'hypothèse de l’exercice précédent. Donner une représentation sous forme d'ensemble de l’événement "On obtient un nombre pair"

D. Exercice

On se place dans l'hypothèse que notre é n'est plus équilibré mais possède deux faces avec le chiffre 5.

On considère l’événement B ="On obtient le chiffre 5". Calculez P(B)

1 - https://youtu.be/xT481__hUQY
2 - https://youtu.be/CF5rFCrsLK8

E. Exercice

On se place dans l'hypothèse que notre é n'est plus équilibré mais possède deux faces avec le chiffre 5.

On considère l’événement C ="On obtient un chiffre impair". Calculez P(C)

Probabilités indépendantes et probabilités conditionnelles

II

Objectifs

A la fin de cette section, vous serez capables de :
comprendre la notion d'événements indépendants
calculer les probabilités

Celte section présente deux notions fondamentales dînas l'étude des probabilités l'indépendance et les probabilité conditionnelles. Nous avons joint au cours une vidéo illustrative sur les probabilités conditionnelles

A. Indépendance

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

P(A ∩ B) = P(A) x P(B).

Exemple

On s'intéresse à deux lancés d'un dé. On suppose que ces deux lancés sont indépendants, c'est à dire que le résultat du lancé du premier dé n'a aucune influence sur le lancé du second dé. Ainsi les événements A = {On obtient 2 au premier lancé} et par exemple B = {On obtient 5 au second lancé} sont indépendants. En terme de probabilité cela se traduit par :

P(A ∩ B) = P(A) x P(B) = (1/ 6) ∗ (1/ 6).

Fondamental

Il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité qui sont deux choses

• A et B indépendants $\Longleftrightarrow$ P(A ∩ B) = P(A) × P(B)
• A et B incompatibles $\Longleftrightarrow$ A ∩ B = ∅ $\Longrightarrow$ P(A ∩ B) = 0
d'ailleurs si A et B sont incompatibles et de probabilité non nulle il ne sont pas indépendants puisque P(A) × P(B) ≠ 0 = P(A ∩ B)

B. Probabilités conditionnelles

Définition

Soient A et B deux événements avec P (B) > 0. La probabilité conditionnelle de A sachant B est donnée par

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemple

On considère deux jetés successifs d'une pièce de monnaie équilibrée mais avec la règle suivante : on ne relance la pièce que si l'on a obtenu face au premier lancé.

Il est intuitif que si l'on obtient face au premier lancé alors on obtient face au second avec une probabilité 1/2. Notons A = {On obtient Face au second lancé} et B = {On obtient face au premier lancé}. On remarque que

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A \cap B) = 1/4$ de plus P (B) = 1/2 d'où

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1/2.$$

Vidéo complémentaire sur la notion de *probabilité conditionnelle*[3]

Fondamental

Soient A et B deux événements indépendants et tel que P(B) > 0, alors P(A|B) = P(A)

Fondamental : Formule des probabilités totales (A retenir)

Soit (A_i, i ∈ I) une partition finie ou dénombrable de Ω, telle que pour tout i, P(A_i) > 0. Pour tout événement B ⊂ Ω, on a :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i).$$

Exemple

Supposons qu'on dispose de deux urnes contenant des boules blanches et noires. La première urne contient 100 boules, dont 99 blanches. La deuxième urne contient 100 boules, dont 10 blanches. Un jeu consiste à choisir **une urne au hasard** et **à tirer une boule dans cette urne.**

Notons B l'événement "On a tiré une boule blanche", on va donner une partition de

3 - https://youtu.be/BbD9Dpk3E5Y

cet événement. Soient A_1 = {On a tiré la boule dans la première urne} et A_2 = {On a tiré la boule dans la deuxième urne},

on a **$\Omega = A_1 \cup A_2$ de plus $A_1 \cap A_2 = \emptyset$**, on peut donc écrire que

$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2,)$ et ainsi

$P(B)=P(B \cap A_1)+ P(B \cap A_2,)= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)$. (1)

or $P(A_1)=P(A_2)=1/2$

$P(B|A_1)=99/100$

$P(B|A_2)= 1/10$

donc d'après la formule (1) $P(B)=109/200$

il est parfois utile de décomposer un événement en sous ensemble d´événements élémentaires afin d'en calculer la probabilité avec plus de facilité

Fondamental : Formule de Bayes

Soit (Ai, i ∈ I) une partition finie ou dénombrable de Ω , et soit B tel que P(B) > 0. Pour tout i, on a

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j\in I} P(B|A_j)P(A_j)}.$$

Exemple

Reprenons les hypothèses de l'exercice précédent. Supposons que nous voulons calculer la probabilité que l'on ait tiré la boule de l'urne 1 sachant que la boule est blanche. On pose comme dans l'exemple précédent

B l'événement "On a tiré une boule blanche", , A_1 = {On a tiré la boule dans la première urne} et A_2 = {On a tiré la boule dans la deuxième urne}, donc en appliquant la formule de Bayes, nous allons calculer $P(A_1|B)$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) * P(B|A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)}$$

Après calcul $P(A_1|B)=99/109$

C. Exercice

Exercice

On considère les hypothèses de notre exemple introductif. Lesquelles des assertions suivantes sont vraies ?

- ☐ A =« les résultats pairs » et B =« les résultats supérieur ou égal à trois » sont indépendants
- ☐ A =« les résultats pairs » et B =« les résultats impairs » sont indépendants
- ☐ A =« les résultats pair » et B =« les résultats strictement supérieurs à trois » sont indépendants

Exercice

On considère une urne composée de 4 boules rouges et 6 boules bleues. On effectue l'expérience aléatoire suivante : "On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne"

☐	Soit l'événement R_1 ="On tire une boule rouge au premier tirage" alors sa probabilité est $P(R_1)=0.4$
☐	Soit l'événement 'B_1 ="On tire une boule blanche au premier tirage" alors sa probabilité est $P(B_1)=0.6$
☐	Soit l'événement 'R_1 ="On tire une boule rouge au premier tirage" alors sa probabilité est $P(R_1)=1/2$
☐	Soit l'événement R_2="On tire une boule rouge au second tirage". La probabilité $P(R_2\|B_1)=0.9$
☐	Soit l'événement R_2="On tire une boule rouge au second tirage". La probabilité $P(R_2\|R_1)=1/3$

Exercice

En considérant les hypothèses de l'exercice précédent,et les événements R_i="On tire une boule rouge au $i^{ème}$ tirage". Calculer $P(R_1 \cap R_2)$

Exercice

On se place ans les conditions de l'exercice précédent. Calculer le probabilité de l'événement R_2

Conclusion

Ce chapitre a introduit les premières approches nécessaires à l'usage de probabilités. Il est important de savoir modéliser les résultats d'une expérience aléatoire afin de tirer le meilleur parti .

Bibliographie

[1] Pierre Andreoletti, Support du cours de Probabilités et Statistiques, IUT d'Orléans, Département Informatique, 2008

[2] Ph. Roux, Probabilités discrètes et statistique descriptive, DUT Informatique, semestre 2, 2010