SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

N'DRI VALERIE

NOVEMBRE 2017

Table des matières

Objectifs

- Caractériser un système d'équation linéaire
- Appliquer la méthode de Gauss dans divers contexte.

Introduction

Les systèmes linéaires interviennent dans de nombreux contextes d'applications car ils forment la base calculatoire de l'algèbre linéaire. Ils permettent également de traiter une bonne partie de
la théorie de l'algèbre linéaire en dimension finie.

I

CARACTÉRISATION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

A. Généralités

Définition

Un système d'équations est un **ensemble d'équations** ayant une ou plusieurs inconnues, que l'on cherche à résoudre simultanément. Une solution du système est la donnée de valeurs de toutes les inconnues, vérifiant les équations.

Exemple

est un système (S) d'équations d'inconnues (x,y,z).

Une solution du système est la donnée de valeurs (x_0,y_0,z_0) de(x,y,z) vérifiant (S).

Exemple

Le système admet comme solution (-18, -6, 1), c'est à dire

Par contre (7, 2, 0) ne satisfait que la première équation. Ce n'est donc pas une solution du système.

Définition

On dit que deux systèmes sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Transformations équivalentes

Les transformations suivantes changent tout **système** en un système **équivalent** :

1. échanger deux lignes,
2. multiplier une ligne par un réel non nul,
3. ajouter une ligne à une autre ligne.

Fondamental

Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une

infinité de solutions.

Définition : Systèmes homogènes

Un système d'équations linéaires est dit **homogène** si toutes les **constantes** sont **nuls** (c'est à dire le **second membre** est **nul**).

Remarque

Les systèmes d'équations linéaires homogènes ont **toujours au moins une solution**.

Exercice

II

[Solution n°1 p 12]

Cochez les affirmations correctes

- ☐ Un système linéaire a toujours une solution.
- ☐ Un système linéaire est équivalent au système homogène correspondant.
- ☐ Un système homogène a toujours le second membre nul.
- ☐ Pour obtenir un système équivalent à un autre, on peut trouver des combinaisons linéaires entres les lignes.

Exercice

III

[Solution n°2 p 12]

Un système linéaire triangulaire se résous plus rapidement qu'un système linéaire quelconque de même taille.

○	Vrai
○	Faux

IV

RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS PAR LA MÉTHODE DE GAUSS

Objectifs

Appliquer la méthode de Gauss dans divers contexte.

A. Résolution des systèmes triangulaires

Méthode

Soit le système où x, y et z sont les inconnues.

Résoudre un tel système est aisé : on résout la dernière équation, puis la seconde en reportant la valeur de z puis la première en reportant les valeurs de y et z.

Un tel système est dit "**triangulaire**". Il admet une seule solution : le triplet

B. Mise en œuvre de la méthode de Gauss

Méthode

Résoudre le système :

Il faut, pour cela, **se ramener à un système triangulaire** en effectuant des opérations sur les lignes (un système linéaire a même ensemble de solutions que le système obtenu en remplaçant une ligne par une combinaison linéaire de cette ligne et d'une autre ligne).

La méthode utilisée s'appelle "**méthode du pivot de Gauss**". On choisit la première ligne L_1 comme pivot, on remplace la deuxième ligne par $L_2 - 2L_1$(on multiplie les deux membres de L_1 par **2** pour avoir le même coefficient de **x** que dans L_2, puis on soustrait à L_1, ce qui annule le coefficient de **x**), et on remplace la dernière ligne par L_3+L_1 pour la même raison.

On obtient :

Il reste à "éliminer" **y** en remplaçant la dernière ligne par L_3+L_2

On obtient finalement .

Le système obtenu est triangulaire, l'ensemble des solutions est :

C. Écriture matricielle

Soit à résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues suivant, dans lequel les équations sont numérotées L_1, L_2 et L_3:

Méthode

Ceci s'écrit aussi matriciellement sous la forme :

Première étape :

L'une des équations sert de pivot et permet d'éliminer une inconnue dans les équations suivantes. Prenons par exemple la 1ère équation pour pivot, et éliminons la variable **x** dans les deux autres :

.

Deuxième étape :

Reprenons la 1ère étape sur le système formé des équations n'ayant plus que 2 inconnues, $\mathbf{E_2}$et $\mathbf{E_3}$, et éliminons la variable **y** dans la dernière équation en prenant, par exemple, $\mathbf{L_2}$ comme pivot :

On obtient ainsi un système triangulaire, qu'il est alors facile de résoudre, en commençant par déterminer la variable **z**, puis, en remontant,**y** et enfin **x**. Enfin, on obtient :

D. Exercice

[*Solution n°3 p 12*]

Soit le système linéaire suivant :

Les solutions de ce systèmes sont :

- ☐ x=0 ; y=1
- ☐ x=1 ; y=0
- ☐ x=1 ; y=1
- ☐ Il n'y a pas de solutions

E. Exercice

[*Solution n°4 p 12*]

Soit le système triangulaire suivant :

Ce système a pour solution :

○	
○	
○	
○	

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 7)

- [ ] Un système linéaire a toujours une solution.
- [ ] Un système linéaire est équivalent au système homogène correspondant.
- [x] Un système homogène a toujours le second membre nul.
- [x] Pour obtenir un système équivalent à un autre, on peut trouver des combinaisons linéaires entres les lignes.

> Solution n°2 (exercice p. 8)

- (•) Vrai
- ( ) Faux

> Solution n°3 (exercice p. 10)

- [ ] x=0 ; y=1
- [x] x=1 ; y=0
- [ ] x=1 ; y=1
- [ ] Il n'y a pas de solutions

> Solution n°4 (exercice p. 10)

- ( )
- ( )
- (•)
- ( )