ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Dr Euloge KOUAME

Table des matières

Objectifs 5

I - Ensembles 7

A. Définition........7

B. Opérations sur les ensembles........8

C. Produit cartésien........9

D. Exercice : Exercice 1........9

E. Exercice 2........10

II - Applications 11

A. Définitions........11

B. Image directe, image réciproque, composée........12

C. Exercice : Exercice 1........12

D. Injections, surjections et bijections........13

E. Exercice : Exercice 2........14

Ressources annexes 17

Solution des exercices 19

Bibliographie 21

Webographie 23

Objectifs

À la fin de cette leçon, vous serez capable de :

- **Identifier** ce qu'est un ensemble en mathématique
- **Appliquer** les règles de calcul sur les ensembles ;
- **Définir** les propriétés de base des applications

Ensembles

I

Définition	7
Opérations sur les ensembles	8
Produit cartésien	9
Exercice : Exercice 1	9
Exercice 2	10

Objectifs

A la fin de cette section, l'étudiant sera capable de :

- **Identifier** un ensemble
- **Manipuler** les règles de base concernant les ensembles

A. Définition

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments. Cette collection n'a pas d'ordre et chaque élément ne peut y apparaître qu'une fois

Exemple

$\{3, 1, 7, 2\} = \{1, 2, 3, 7\} = \{7, 3, 1, 3, 2, 7\}$.

Il y a plusieurs manières de définir des ensembles :

- Un ensemble peut être défini de manière explicite par la simple donnée de ces éléments (défini **en extension**):

$A=\{ 2,3,4 ,5\}$

- l'ensemble $B=\{n \in N \mid 2\leq n<6\}$ est dit défini en **compréhension** (vérifie une certaine propriété).

Il est évident que A=B

Syntaxe

La notation $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$ se lit "a est un élément de E" ou bien "a appartient à E". la négation s'écrit $a \notin E$.

Fondamental

- l' ensemble vide et noté $\emptyset$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

- N désigne l'ensemble des entiers naturels
- Z désigne l'ensemble des entiers relatifs
- Q désigne l'ensemble des nombres rationnels
- R désigne l'ensemble des nombre réels
- C désigne l'ensemble des nombres complexes

B. Opérations sur les ensembles

Inclusion, égalité, ensemble des parties

-L'**inclusion** : **E ⊂ F** se lit : **E inclus dans F** et qui signifie que tout élément de E est aussi élément de F.

On dit alors que E est un **sous-ensemble** de F ou **une partie** de F. Sa négation s'écrit E ⊄ F.

- L'**égalité**. E et F **sont égaux** (E = F) **s'ils ont les mêmes éléments**, c'est- à-dire si et seulement si E⊂ F et F ⊂ E.

- **Ensemble des parties de E** et noté P(E), l’ensemble dont les éléments sont tous les ensembles inclus dans E.

Exemple

si E={1, 2, 3} :

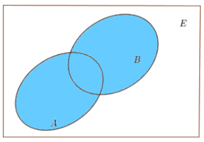
P(E)= {Ø, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}.

Union, intersection, complémentaire

Soient A et B deux parties d'un ensemble E

- On appelle **union** de A et B et on note **A ∪ B** l'ensemble contenant les éléments de A et de B :

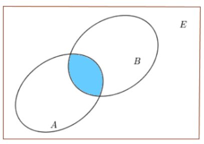
A ∪ B = {x∈E | x ∈ A ou x ∈ B}.



(zone en couleur bleue)

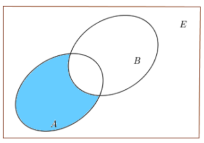
- On appelle **intersection** de A et B et on note **A ∩ B** l'ensemble contenant les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B :

A ∩ B = {x ∈E | x ∈ A et x ∈ B}.



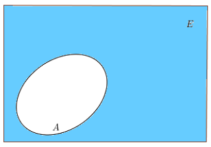
- On appelle **différence** de A et de B, la partie de E définie par :

A\B = {x ∈ A \ x ∉ B}.



- On appelle **complémentaire** de A dans E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A :

$C_E A = E \setminus A$ ou $\overline{A}$



Fondamental : Règles de calculs

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

- **Commutativité** : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.
- **Associativité** : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ et $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- **Distributivité** : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

C. Produit cartésien

Étant donnés deux ensembles A et B, **le produit cartésien** de A par B et se note $A \times B$ est l'ensemble des couples (a, b), avec $a \in A$ et $b \in B$.

On a donc : $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$.

Remarque

Lorsque A = B , le produit cartésien de A x A se note aussi A*2*.

Par extension, étant donnés un entier $n \geq 1$ et des ensembles $A_1, \dots, A_n$, on appelle produit de $A_1, \dots, A_n$ l'ensemble de tous les **n-uplets** $(x_1; \dots; x_n)$ tels que $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$. Cet ensemble est noté $A_1 \times \dots \times A_n$.

Exemple

- R2 = Rx R= $\{(x,y) \mid x, y \in R\}$

- A={ 1 ;2} B={3 ;4 ;5} : A x B={(1 ;2) ;(1 ;4) ;(1 ;5) ;(2 ;3) ;(2 ;4) ;(2 ;5)}

D. Exercice : Exercice 1

[*Solution n°1 p 19*]

Exercice

Soient A = [1,3] et B = [2,4] Lesquelles des assertions suivantes sont vérifiées ?

☐	A ∩ B= [2,3]
☐	A ∪B = [1,4]
☐	A ∪B =A
☐	A ∩ B={ 2, 3}

E. Exercice 2

1. Énumérer P ({1, 2, 3, 4}).
2. Montrer AU(B ∩ C) = (AU B) ∩ (AUC)
3. Énumérer {1, 2, 3} x {1, 2, 3, 4}.
4. représenter graphiquement le produit A x B avec A = [1,3] et B = [2,4].

Applications

II

Définitions	11
Image directe, image réciproque, composée	12
Exercice : Exercice 1	12
Injections, surjections et bijections	13
Exercice : Exercice 2	14

Objectifs

A la fin de cette section vous serez capable de :

- **Identifier** une application
- **Reconnaître** les différents types d'applications : la surjection, l'injection et la bijection

A. Définitions

Soient E et F sont deux ensembles quelconques

Définition

On appelle **application** d'un ensemble E dans un ensemble F, toute correspondance f entre les éléments de E et ceux de F qui à tout élément $x \in E$ fait correspondre un **unique élément** $y \in F$ noté $f(x)$.

- On dit que y est l'image de x par f et x est **un antécédent** de y.
- L'ensemble E est **l'ensemble de départ** de f et F est son **ensemble d'arrivée.**
- On représente l'application f de E dans F par :

  $f : E \to F$

  $x \to f(x)$

Exemple

- L'application IdE : E→ E telle que

$\forall x \in E, IdE(x) = x$

est appelée **application identité** sur E.

- soit a un élément de F, alors la correspondance f de E dans F définie par :
$\forall x \in E, x \rightarrow a$
est une application dite **application constante**.

B. Image directe, image réciproque, composée

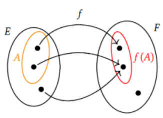
Définition

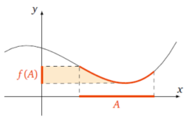
Soient f et g deux applications.
On dit qu'elles sont égales et on note **f = g** si elles ont le même ensemble de départ E, le même ensemble d'arrivée F et si **$\forall x \in E, f(x) = g(x)$**.

Soit f une application de E vers F.

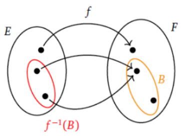
Définition

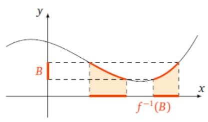
- Soit $A \subset E$, on appelle **image directe de A** par f l'ensemble **$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.**





- Soit $B \subset F$ l'**image réciproque de B** est l'ensemble **$f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B\}$**.





Attention

- f (A) est un sous-ensemble de F, $f^{-1}(B)$ est un sous-ensemble de E.
- La notation « $f^{-1}(B)$ » est un tout, rien ne dit que f est un fonction bijective (voir plus loin). L'image réciproque existe quelque soit la fonction.

Définition

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. On appelle **composée** de f et g l'application notée $g \circ f$ définie de E vers G par $g \circ f(x) = g(f(x))$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

C. Exercice : Exercice 1

[*Solution n°2 p 19*]

Exercice

Soit f l'application de l'ensemble {1,2,3,4} dans lui-même définie par :
f(1) = 4, f(2) = 1 ,f(3) = 2, f(4) = 2.
Déterminez les images réciproques f-1(A) lorsque : A = {2}

Exercice

Même énoncé que précédemment lorsque : A = {1,2}

Exercice

Même énoncé que précédemment lorsque : A = {3}

D. Injections, surjections et bijections

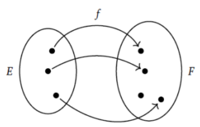
Soient E et F deux ensembles et f : E→ F une application.

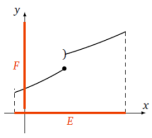
Définition

L'application f est **injective** si deux éléments quelconques distincts de E ont des images distinctes par f :

$\forall$ x, y$\in$ E, f(x) = f(y) =$\Rightarrow$ x = y.

Les applications représentées sont injectives :



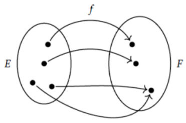


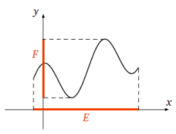
Définition

L'application **f est surjective** si l'image de E par f est l'ensemble F : i.e

$\forall$ y $\in$ F, $\exists$ x $\in$ E, f(x) = y.

Les applications représentées sont surjectives :

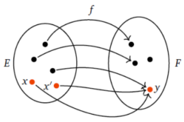
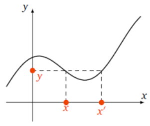




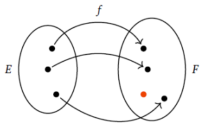
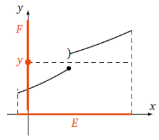
Remarque

- f est injective si et seulement si tout élément y de F a au plus un antécédent (et éventuellement aucun).
- f est surjective si et seulement si tout élément y de F a au moins un antécédent

  - Voici deux fonctions non injectives

  - Ainsi que deux fonctions non surjectives :

Définition

L'application f est **bijective** si elle est **injective et surjective** autrement dit tout élément de F a un **unique antécédent** par f i.e :

$\forall$**y** $\in$ **F,** $\exists$**! x** $\in$ **E, f(x) = y.**

Définition

Soit f une bijection de E vers F.

On appelle **bijection réciproque** de f l'unique application notée f^{-1} telle que

$f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$

C'est l'application qui à chaque élément de F associe son unique antécédent par f.

Conseil

Pour démontrer qu'une application f est bijective et trouver sa réciproque, on peut : résoudre l'équation y = f(x) et montrer qu'elle admet, quel que soit y $\in$ F, une unique solution x = g(y).

exemple :bijexemple.PNG (cf. bijexemple p 17)

Proposition

La composée de deux bijections est une bijection.

E. Exercice : Exercice 2

[Solution n°3 p 19]

Exercice

Soient E, F et G trois ensemble et soient f: E → F et g: F → G deux applications Parmi les assertions , lesquelles sont vraies ?

☐	f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective
☐	f est injective alors $g \circ f$ est injective
☐	f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
☐	$g \circ f$ est injective alors g est injective
☐	$g \circ f$ est injective alors f est injective
☐	f est injective si et seulement si pour toute partie A de E et pour toute partie B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
☐	f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective

Ressources annexes

- bijexemple

Exemple La relation $y = x + \sqrt{x^2+1}$ définit une application u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ puisque pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \geqslant |x|$ et évidemment $x + |x| \geqslant 0$. Montrons qu'elle est bijective et trouvons sa réciproque. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2+1} = y &\iff \sqrt{x^2+1} = y - x \\ &\iff x^2 + 1 = (y-x)^2 \quad \text{et} \quad x \leqslant y \\ &\iff 2x\,y = y^2 - 1 \quad \text{et} \quad x \leqslant y \\ &\iff x = \frac{y^2-1}{2y} \quad \text{et} \quad x \leqslant y \\ &\iff x = \frac{y^2-1}{2y} \end{aligned}$$

la dernière équivalence venant du fait que si $y > 0$, on a :

$$\frac{y^2-1}{2y} = y - \frac{y^2+1}{2y} \leqslant y.$$

Donc f est bijective et sa réciproque est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{y^2-1}{2y}. \end{array}$$

Solution des exercices

> Solution n°1 *(exercice p. 9)*

Exercice

☑	A ∩ B= [2,3]
☑	A ∪B = [1,4]
☐	A ∪B =A
☐	A ∩ B={ 2, 3}

> Solution n°2 *(exercice p. 12)*

Exercice

{3,4}

Exercice

{2,3,4}

Exercice

∅

> Solution n°3 *(exercice p. 14)*

Exercice

☑	f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective
☐	f est injective alors $g \circ f$ est injective
☑	f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
☐	$g \circ f$ est injective alors g est injective
☑	$g \circ f$ est injective alors f est injective
☑	f est injective si et seulement si pour toute partie A de E et pour toute partie B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
☑	f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective

Bibliographie

[1] F. Liret, D. Martinais, Algèbre Licence 1ère année MIAS-MASS-SM, éditions Dunod, 2002

[2] François Liret, Maths en pratique à l'usage des étudiants Cours et exercices, éditions Dunod, 2006

[4] Claude Deschamps, André Warufsel, Mathématiques tout en un 1ière année, MPSI, PCSI, , éditions Dunod, 2003

Webographie

[5] www.bibliotheque.auf.org/doc_num.php?explnum_id=370

[6] www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mathsup/cours/ensembleapplicationrelation.html