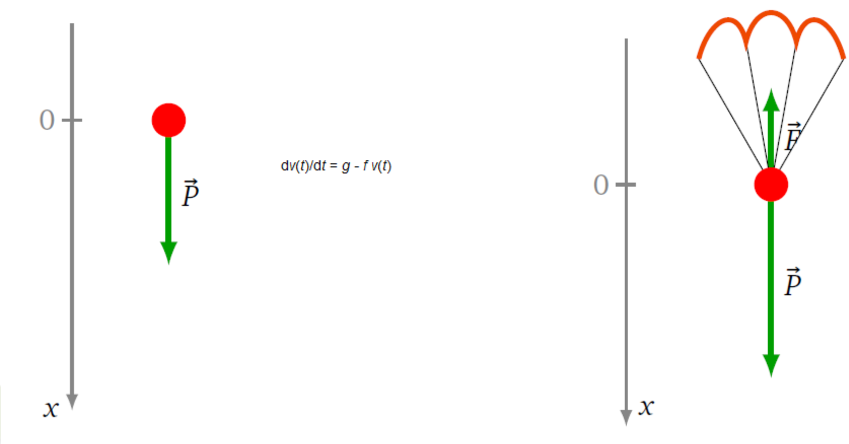
EQUATIONS DIFFERENTIELLES



Version 1

Dr Euloge KOUAME

Novembre 2017

Table des matières

Objectifs

À la fin de cette leçon, vous serez capable de:

- **Caractériser** une équation différentielle ;
- **Résoudre** une équation différentielle du **premier ordre.**

I

Caractérisation d'une équation différentielle

A. Définition

Définition

- Une **équation différentielle *d'ordre n*** est une équation de la forme :

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ (E)

où F est une fonction de (n + 2) variables.

- Une **solution** d'une telle équation sur un intervalle I de R *est une fonction y :* $I \to R$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (E).

Remarque

• L'ordre d'une équation différentielle est le numéro de la dérivée la plus élevée qui apparaît dans l'equation.

• C'est la coutume pour les équations différentielles de noter y au lieu de $y(x)$, y' au lieu $y'(x)$,. . .

On note donc « $y' = \sin x$ » ce qui signifie « $y'(x) = \sin x$ ».

• Il faut s'habituer au changement de nom pour les fonctions et les variables.

Par exemple $(x'')^3 + t(x')^3 + (\sin t)x^4 = e^t$ est une équation différentielle d'ordre 2, dont l'inconnue est une fonction x qui dépend de la variable t.

On cherche donc une fonction $x(t)$, deux fois dérivable, qui vérifie

$(x''(t))^3 + t(x'(t))^3 + (\sin t)(x(t))^4 = e^t$.

• Rechercher une primitive, c'est déjà résoudre l'équation différentielle $y' = f(x)$.

C'est pourquoi on trouve souvent le terme *« intégrer l'équation différentielle »* à la place de *« trouver les solutions de l'équation différentielle »*.

Exemple

Voici des équations différentielles faciles à résoudre.

1. $y' = \sin x$
2. $y' = 1 + e^x$
3. $y' = y$

solutions: 1. $y(x) = -\cos x + k$ où $k \in R$; 2. $y(x) = x + e^x + k$ où $k \in R$; 3. $y(x) = ke^x$ où $k \in R$

B. Équation différentielle linéaire

Définition

- Une équation différentielle d'ordre n est ***linéaire*** si elle est de la forme :

$a_0(x)\, y + a_1(x)\, y' + \dots + a_n(x)\, y^{(n)} = g(x)$; où les a_i et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \to R$.

Le terme linéaire signifie grosso modo qu'il n'y a pas d'exposant pour les termes *y, y', y'',...* ou pas sous des formes du genre *cos(y')...*

- Une équation différentielle linéaire est ***homogène***, ou ***sans second membre***, si la fonction g ci-dessus est la fonction nulle : $a_0(x)\, y + a_1(x)\, y' + \dots + a_n(x)\, y^{(n)} = 0$

- Une équation différentielle linéaire est ***à coefficients constants*** si les fonctions a_i ci-dessus sont constantes : $a_0\, y + a_1\, y' + \dots + a_n\, y^{(n)} = g(x)$; où les a_i sont des constantes réelles et g une fonction continue.

Exemple

1. $y' + 5xy = e^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.
2. $y' + 5xy = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.
3. $2y'' - 3y' + 5y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre.
4. $(y')^2 - y = x$ ou $y''.\, y' - y = 0$ ne sont pas des équations différentielles linéaires.

C. Exercice

Question

[Solution n°1 p 15]

Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires, ou non linéaires, et donner leur ordre (on justifiera la réponse) :

$$i.\ (x-t)dt + 4t dx = 0 \qquad ii.\ x'' - 2x' + x = 0 \qquad iii.\ \frac{d^3x}{dt^3} + t\frac{dx}{dt} - 5x = e^t$$

$$iv.\ (1-x)x' + 2x = e^t \qquad v.\ \frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = 0 \qquad vi.\ \frac{d^4x}{dt^4} + x^2 = 0$$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

II

On ne sait pas résoudre toutes les équations différentielles. On se concentre dans ce chapitre sur les équations différentielles linéaires du premier ordre.

A. Définition

Définition

Une équation différentielle ***linéaire du premier ordre*** est une équation du type :

$y' = a(x)\ y + b(x)$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I de R.

On va commencer par résoudre le cas où a est une constante et b = 0. Puis a sera une fonction (et toujours b = 0). On terminera par le cas général où a et b sont deux fonctions.

B. Résolution d'equation du type : y' = a y

Théorème

Soit a un réel. Soit l'équation différentielle : ***y' = a y***

Les solutions de l'équation , sur R, sont les fonctions y définies par : ***y(x) = ke^{ax}***

où k ∈ R est une constante quelconque.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle : 3y' - 5y = 0

On écrit cette équation sous la forme y' = (5/3)y. Ses solutions, sur R, sont donc de la forme : y(x) = ke$^{(5/3)x}$, k ∈ R.

Remarque

• L'équation différentielle admet donc une infinité de solutions (puisque l'on a une infinité de choix de la constante k).

• La constante k peut être nulle. Dans ce cas, on obtient la « solution nulle » : y = 0 sur R, qui est une solution évidente de l'équation différentielle.

C. Résolution d'équation du type : y' = a(x) y

Théorème

Soit a : I → R une fonction continue. Soit A : I → R une primitive de a. Soit l'équation différentielle : y' = a(x) y

Les solutions sur I de l'équation sont les fonctions y définies par : ***y(x) = ke$^{A(x)}$***

où k ∈ R est une constante quelconque.

Exemple

Comment résoudre l'équation différentielle x^2y' = y ? On se place sur l'intervalle I_+ =]0,+∞[ou I_- =] -∞,0[.

L'équation devient y' = (1/x^2)y. Donc a(x) = 1/x^2 , dont une primitive est

A(x) = -1/x. Ainsi les solutions cherchées sont y(x) = ke-$^{(1/x)}$, où k ∈ R.

D. Résolution d'équation du type : y' = a(x) y + b(x)

Il nous reste le cas général de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre : *y' = a(x) y + b(x)* (E)

où a : I → R et b : I → R sont des fonctions continues.

L'équation homogène associée est : *y' = a(x)y* (E_0)

Il n'y a pas de nouvelle formule à apprendre pour ce cas. Il suffit d'appliquer le principe de superposition :

les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière de (E) les solutions de (E_0). Ce qui donne :

Proposition

Si y_0 est une solution de (E), alors les solutions de (E) sont les fonctions

$y : I \to R$ définies par : $y(x) = y_0(x) + ke^{A(x)}$ avec $k \in R$ où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$.

La recherche de la solution générale de (E) se réduit donc à la recherche d'une solution particulière. Parfois ceci se fait en remarquant une solution évidente

Exemple

l'équation différentielle $y' = 2x\, y + 4x$ a pour solution particulière $y_0(x) = -2$;

en effet on a bien , $y_0' = 0 = 2x(-2) + 4x = -4x + 4x$ et donc l'ensemble des solutions de cette équation sont les $y(x) = -2+k.\exp(x^2)$,

où $k \in R$ puis que $a(x) = 2x$ et $A(x) = x^2$

Recherche d'une solution particulière : méthode de variation de la constante.

La seule difficulté est donc maintenant d'être capable de trouver au moins une solution de (E). nous verrons la méthode dite de la variation de la constante.

C'est une méthode générale pour trouver une solution particulière en se ramenant à un calcul de primitive.

La solution générale de (E_0) : $y' = a(x)y$ est donnée par $y(x) = ke^{A(x)}$, avec $k \in R$ une constante.

La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y_0(x) = k(x)e^{A(x)}$,

où k est maintenant une fonction à déterminer pour que y_0 soit une solution de (E) $y' = a(x)\, y + b(x)$.

Ce qui donne une solution particulière $y_0(x) = \left(\int b(x)e^{-A(x)}\mathrm{d}x\right) e^{A(x)}$.

La solution générale de (E) est donnée par $y(x) = y_0(x) + ke^{A(x)}$

Exemple

Soit l'équation $y' + y = e^x + 1$. L'équation homogène est $y' = -y$ dont les solutions sont les $y(x) = ke^{-x}$, $k \in R$.

Cherchons une solution particulière avec la méthode de variation de la constante : on note $y_0(x) = k(x)e^{-x}$.

On doit trouver $k(x)$ afin que y_0 vérifie l'équation différentielle $y' + y = e^x + 1$.

$$\begin{aligned}
& y_0' + y_0 = e^x + 1 \\
\iff \quad & \left(k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}\right) + k(x)e^{-x} = e^x + 1 \\
\iff \quad & k'(x)e^{-x} = e^x + 1 \\
\iff \quad & k'(x) = e^{2x} + e^x \\
\iff \quad & k(x) = \tfrac{1}{2}e^{2x} + e^x + c
\end{aligned}$$

On fixe c = 0 (n'importe quelle valeur convient) :

$$y_0(x) = k(x)e^{-x} = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + e^x\right)e^{-x} = \frac{1}{2}e^x + 1$$

Nous tenons notre solution particulière !
Les solutions générales de l'équation $y' + y = e^x + 1$ s'obtiennent en additionnant cette solution particulière aux solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + 1 + ke^{-x}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

E. Exercice

Question 1

[Solution n°2 p 15]

Résoudre l'équation $y' + y = 0$

Question 2

[Solution n°3 p 15]

Intégrer l'équation $y' = 1/(1 + x^2)$

Question 3

[Solution n°4 p 15]

a) Résoudre l'équation $y' + y = 3$.
b) Donner la solution qui vérifie, $y(0) = 1$.

Question 4

[Solution n°5 p 16]

Résoudre l'équation $x y' + 2y = x^2 - 3$

Solution des exercices

> Solution n°1 *(exercice p. 8)*

Dans les équations , l'inconnue est la fonction x qui dépend de la variable t.

i. en divisant l'équation par dt on obtient $(x - t) + 4tdx/dt = 0$ soit $x + 4tdx/dt = t$ donc c'est linéaire de 1*er* ordre.

ii. linéaire de second ordre.

iii. linéaire d'ordre 3.

iv. en développant on a dans l'équation le produit $x.x'$ donc l'équation n'est pas linéaire.

v. on a $sin(x)$ donc l'équation n'est pas linéaire

vi . on a x^2 donc l'équation n'est pas linéaire

> Solution n°2 *(exercice p. 14)*

$y' = - y$ donc $y(x) = k.e^{-x}$

> Solution n°3 *(exercice p. 14)*

on constate bien qu'il s'agit de trouver une primitive de $1/ (1 + x^2)$ ce qui donne en utilisant le formulaire : $y(x) = Arctan(x) +k$

> Solution n°4 *(exercice p. 14)*

a)

1. on a déjà calculer la solution de l'équation homogène $y'+ y = 0$ qui est : $k.e^{-x}$.

2. on va chercher donc une solution particulière y_0

Cherchons une solution particulière avec la méthode de variation de la constante : on note $y_0(x) = k(x)e^{-x}$.

On doit trouver $k(x)$ afin que y_0 vérifie l'équation différentielle $y' + y = 3$.

soit $(k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}) + k(x)e^{-x} = 3$

$k'(x)e^{-x} = 3$ soit $k'(x) = 3e^{x}$ donc $k(x) = 3e^{x} +c$

On fixe c = 0 on obtient $y_0(x) = k(x)e^{-x} = (3e^{x})e^{-x} = 3$.

N.B : on aurais pu simplement constater une solution particulière évidente est $y_0 = 3$ en effet, si $y_0= 3, y'_0 =0$ donc $y'_0 +y_0 = 0 + 3 = 3$ donc l'équation est bien vérifiée

3. en définitive les solutions générales de l'équation $y' + y = 3$ s'obtiennent en additionnant cette solution particulière aux solutions de l'équation homogène soit :

$y(x) = 3 + k.e^{-x}$

b)

$y(0) = 3 + ke^{0} = 3 + k = 1 \rightarrow k = 1\text{-}3 = -2$; donc la solution qui vérifie $y(0) = 1$ est $y(x) = 3 - 2e^{-x}$

> Solution n°5 *(exercice p. 14)*

1. L'équation sans second membre est x y ' + 2 y = 0.

$y'/y = -2/x$ soit $a(x) = -2/x$ et donc $A(x) = -2.ln(x)$, la solution de l'équation homogène est alors $y(x) = k.e^{-2.ln(x)} = k/x^2$ pour $x \neq 0$.

2. cherchons une solution particulière

L'équation avec second membre est $x\, y' + 2\, y = x^2 - 3.$

Le second membre est un polynôme du deuxième degré. Donc on cherche solution particulière polynôme du deuxième degré : $y_0 = a\, x^2 + b\, x + c.$

$y_0{}' = 2\, a\, x + b,$

$x\, y_0{}' + 2\, y_0 = x\, (2\, a\, x + b) + 2\, (a\, x^2 + b\, x + c) = 4\, a\, x^2 + 3\, b\, x + 2\, c.$

Par identification :

$4\, a\, x^2 + 3\, b\, x + 2\, c = x^2 - 3.$

$4\, a = 1\ ;\ 3\, b = 0\ ;\ 2\, c = -3,$

$a = 1/4,\ b = 0,\ c = -3/2.$ Ainsi $y_0 = x^2/4 - 3/2$

3. La solution générale de l'équation s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

$y(x) = k/x^2 + x^2/4 - 3/2$. pour $k \in R$ et $x \neq 0$.