MATRICES

Dr Euloge KOUAME

Oct 2017

Table of contents

I - Objectives 3

II - Introduction 4

III - Les ensembles de matrices 5

1. Définition ... 5
2. Matrices particulières ... 5
3. Quiz ... 6

IV - Opérations sur les matrices 7

1. Addition de matrices ... 7
2. Multiplication de matrices ... 8
3. Quiz ... 11
4. Inverse d'une matrice ... 11
5. Quiz ... 13

V - Autres opérations 14

1. Matrices triangulaires, matrices diagonales ... 14
2. La transposition ... 14
3. La trace ... 15
4. Matrices symétriques, Matrices antisymétriques ... 15

VI - Conclusion 17

VII - Exercises solution 18

VIII - Bibliography 19

Objectives

À la fin de cette leçon, vous serez capable de :

- *Définir* une matrice ;
- *Manipuler* les opérations de base sur les matrices ;
- *Comprendre* les propriétés spécifiques aux produit matriciel.

Introduction

Beaucoup de structures de données peuvent être représentées par des tableaux a une ou deux dimensions. Ce type de données correspond a un objet mathématique

bien particulier : *les matrices.*

La résolution d'un certain nombre de problèmes d'algèbre linéaire se ramène à des manipulations sur les matrices. Ceci est vrai en particulier pour la résolution des

systèmes linéaires.

Dans ce cours, K désigne un corps. On peut penser à Q, R ou C.

Les ensembles de matrices

I

1. Définition

Definition

- Une *matrice* A est un tableau rectangulaire d'éléments de K.
- Elle est dite de *taille n x p* si le tableau possède *n lignes* et *p colonnes.*
- Les nombres du tableau sont appelés les *coefficients* de A.
- Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \quad \text{ou} \quad \left(a_{i,j}\right).$$

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3 avec, par exemple, $a_{1,1} = 1$ et $a_{2,3} = 7$.

Definition

- Deux matrices sont *égales* lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans K est noté $M_{n,p}(K)$. Les éléments de $M_{n,p}(R)$ sont appelés *matrices réelles.*

2. Matrices particulières

Voici quelques types de matrices intéressantes :

- Si n = p (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite *matrice carrée.* On note $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}(\mathrm{K})$ au lieu de $\mathrm{M}_{\mathrm{n,n}}(\mathrm{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les éléments $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, . . . , $a_{n,n}$ forment la diagonale principale de la matrice.

• Une matrice qui n'a qu'une seule ligne (n = 1) est appelée *matrice ligne* ou *vecteur ligne.* On la note

$A = (a_{1,1}\ a_{1,2}\ \dots\ a_{1,p})$.

• De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne (p = 1) est appelée *matrice colonne* ou *vecteur colonne.* On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}.$$

• La matrice (de taille n x p) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la *matrice nulle* et est notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0.

Dans le calcul matriciel, la matrice nulle joue le rôle du nombre 0 pour les réels.

3. Quiz

Question 1

[Solution n°1 p 18]

Construire la matrice A de taille (4, 3) telle que $a_{i,j} = i + j$

Question 2

[Solution n°2 p 18]

Construire la matrice B de taille 3×4 et de coefficients $b_{i,j} = |i - j|$.

II

Opérations sur les matrices

1. Addition de matrices

Definition: Somme de deux matrices

Soient A et B deux matrices ayant la même taille n x p. Leur somme C = A+ B est la matrice de taille n x p définie par

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

En d'autres termes, on somme coefficients par coefficients. Remarque : on note indifféremment a_{ij} où $a_{i,j}$ pour les coefficients de la matrice A.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Par contre si $B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ alors $A + B'$ n'est pas définie.

Definition: Produit d'une matrice par un scalaire

Le produit d'une matrice A =(a_{ij}) de $M_{n,p}(K)$ par un scalaire α K est la matrice *$(a \quad _{ij})$* formée en multipliant chaque coefficient de A par α.

Elle est notée $.A$ (ou simplement A).

Example

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha = 2 \quad \text{alors} \quad \alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice (-1)A est l'*opposée* de A et est notée -*A*. La *différence* A - B est définie par A+(- B).

Proposition 1

Soient A, B et C trois matrices appartenant à $M_{n,p}(K)$. Soient K et K deux scalaires.

1. *A + B = B + A : la somme est commutative,*
2. *A + (B + C) = (A+ B) + C : la somme est associative,*
3. *A + 0 = A : la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,*
4. *(+)A= A + A,*
5. *(A + B) = A + B.*

2. Multiplication de matrices

Warning

Le produit AB de deux matrices A et B est défini *si et seulement si* le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

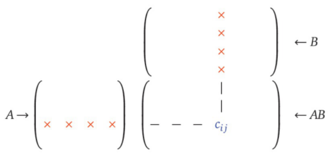
Definition: Produit de deux matrices

Soient A= (a_{ij}) une matrice $n\ x\ p$ et B = (b_{ij}) une matrice $p\ x\ q$. Alors le produit C = AB est une matrice $n\ x\ q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir : $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}\, b_{kj} + ... + a_{ip}\, b_{pj}$.

On dit que *le produit matriciel est une opération ligne - colonne* . Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante.



Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

A possède 3 colonnes et B 3 lignes, le produit A × B est donc possible et sera une matrice à 2 lignes (comme A) et 2 colonnes (comme B) les coefficients sont obtenus comme suit:

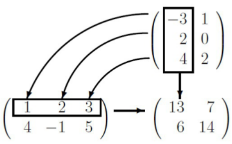
$$A \times B = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \quad \text{avec :}$$

$c_{11} = 1 \times (-3) + 2 \times 2 + 3 \times 4 = 13$

$c_{21} = 4 \times (-3) + 2 \times (-1) + 5 \times 4 = 6$

$c_{12} = 1 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 2 = 7$

$c_{22} = 4 \times 1 - 1 \times 0 + 5 \times 2 = 14$



Un exemple intéressant est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne :

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors u x v est une matrice de taille 1 x 1 dont l'unique coefficient est $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$. Ce nombre s'appelle le *produit scalaire* des vecteurs u et v.

Calculer le coefficient c_{ij} dans le produit AxB revient donc à calculer le produit scalaire des vecteurs formés par la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B.

Pièges à éviter

Premier piège. Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \quad BA$.

exemple : $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$.

Deuxième piège. AB = 0 n'implique pas A= 0 ou B = 0.

Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir A 0 et B 0 mais AB = 0.

exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Troisième piège. AB = AC n'implique pas B = C. On peut avoir AB = AC et B C.

exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$.

Propriétés du produit de matrices

le produit vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 2.

1. *A(BC) = (AB)C : associativité du produit,*
2. *A(B + C) = AB + AC et (B + C)A = BA+ CA : distributivité du produit par rapport à la somme,*
3. *A x 0 = 0 et 0 x A= 0.*

La matrice identité

La matrice carrée suivante s'appelle la *matrice identité* : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0. Elle se note I_n ou simplement I. Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication. En d'autres termes :

Si A est une matrice n x p, alors I_n x A= A et A x I_p = A.

Puissance d'une matrice

Dans l'ensemble $M_n(K)$ des matrices carrées de taille n x n à coefficients dans K, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même :

on note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$.

On peut ainsi définir les puissances successives d'une matrice :

Definition

Pour tout A $M_n(K)$, on définit les puissances successives de A par $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout p N.

Autrement dit, $A^p = A \times A \times ... \times A.$ } p facteurs

Example

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

On cherche à calculer A^p . On calcule A^2, A^3 et A^4 et on obtient :

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \quad A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix} \quad A^4=A^3\times A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 15\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 16\end{pmatrix}$$

L'observation de ces premières puissances permet de penser que la formule est :

$$A^p=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2^p-1\\ 0 & (-1)^p & 0\\ 0 & 0 & 2^p\end{pmatrix}.$$

Démontrer ce résultat par récurrence en utilisant la définition.

3. Quiz

Question 1

[Solution n°3 p 18]

Soient $A=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}21 & -6\\ 0 & 3\\ -3 & 12\end{pmatrix}$, $D=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1&2\\-3&0\\-8&6\end{pmatrix}$

Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices. Calculer 3A + 2C et 5B - 4D. Trouver α tel que A - αC soit la matrice nulle.

Question 2

[Solution n°4 p 18]

Montrer que si A+ B = A, alors B est la matrice nulle.

Question 3

[Solution n°5 p 18]

Soient $A=\begin{pmatrix}0&2&-2\\6&-4&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\2&-2&-3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8&2\\-3&2\\-5&5\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}$ calculer les produits possibles.

Question 4

[Solution n°6 p 18]

Soient $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$. Calculer A^2, B^2, AB et BA.

Question 5

[Solution n°7 p 18]

Soient $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\3&1&0\end{pmatrix}$. Calculer A^p et B^p pour tout $p\geqslant 0$.

Hint:

calculer A^2 et A^3 ; B^2 et B^3 pour voir

4. Inverse d'une matrice

Definition: Matrice inverse

Soit A une matrice carrée de taille *n x n*. S'il existe une matrice carrée B de taille *n x n* telle que $AB = I$ et $BA = I$,

on dit que A est *inversible*. On appelle B *l'inverse de A* et on la note A^{-1}.

- Plus généralement, quand A est inversible, pour tout p N, on note : $A^{-p} = (A^{-1})^p = A^{-1} A^{-1} \ldots A^{-1}$
- L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(K)$ est noté GLn(K).

Example

Soit $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$. Étudier si A est inversible c'est étudier l'existence d'une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que AB = I et BA= I. Or AB = I équivaut à :

$AB = I \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 3c=0 \\ 3d=1 \end{cases}$$

Sa résolution est immédiate : a = 1, b = - 2/3, c = 0, d = 1/3. Il n'y a donc qu'une seule matrice possible, à savoir $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Example

- Soit I_n la matrice carrée identité de taille n x n. C'est une matrice inversible, et son inverse est elle-même par l'égalité $I_n I_n = I_n$.
- La matrice nulle 0_n de taille n x n n'est pas inversible. En effet on sait que, pour toute matrice B de $M_n(K)$, on a $B0_n = 0_n$, qui ne peut jamais être la matrice identité.

Example

La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. en effet le produit

$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+5b & 0 \\ 3c+5d & 0 \end{pmatrix}$ ne peut jamais être égal à la matrice identité.

Propriétés

Unicité

Si A est inversible, alors son inverse est unique.

Inverse de l'inverse

Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a : $(A^{-1})^{-1} = A$

Inverse d'un produit

Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Il faut bien faire attention à l'inversion de l'ordre !

Simplification par une matrice inversible

Si C est une matrice quelconque , nous avons vu que la relation AC = BC n'entraîne pas forcément l'égalité A = B. En revanche, si C est une matrice inversible, on a la proposition suivante :

Soient A et B deux matrices de $M_n(K)$ et C une matrice inversible de $M_n(K)$. Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.

calcul de l' inverse d'une matrice

Nous donnons ici une formule directe dans le cas simple des matrices 2 x 2. Pour le calcul général, nous verrons dans les prochaines leçons la *méthode du pivot de Gauss.*

Considérons la matrice 2 x 2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Proposition

Si ad - bc 0 , alors A est inversible et $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

5. Quiz

Question 1

[Solution n°8 p 18]

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}, B^{-1} , $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$, A^{-2}.

Question 2

[Solution n°9 p 18]

Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Question 3

[Solution n°10 p 18]

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $2A - A^2$. Sans calculs, en déduire A^{-1}.

Question 4

[Solution n°11 p 18]

Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $A(\theta)^{-1}$.

Autres opérations

III

1. Matrices triangulaires, matrices diagonales

Soit A une matrice de taille n x n.

On dit que A est *triangulaire inférieure* si ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls, autrement dit : $i < j \rightarrow a_{ij} = 0$.

Une matrice triangulaire inférieure a la forme suivante : $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

On dit que A est *triangulaire supérieure* si ses éléments en-dessous de la diagonale sont nuls, autrement dit : $i > j \rightarrow a_{ij} = 0$.

Une matrice triangulaire supérieure a la forme suivante : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

Une matrice qui est triangulaire inférieure et triangulaire supérieure est *dite diagonale*. Autrement dit : i j → aij = 0.

exemple : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Théorème

Une matrice A de taille n x n, triangulaire, est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.

2. La transposition

Definition

L'opération qui consiste `a prendre les colonnes d'une matrice pour en faire les lignes d'une nouvelle matrice s'appelle la *transposition des matrices*, elle se note

Soit $A = (a_{ij})$la matrice de taille *n x p*. La *matrice transposée* de A est la matrice ${}^tA = (a_{ji})$ de taille *p x n*.

Ou encore la i-ème ligne de A devient la i-ème colonne de ${}^tA$ (et réciproquement la j-ème colonne de ${}^tA$ est la j-ème ligne de A).

Example

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \Longrightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

Théorème

1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
2. ${}^t(\ A) = \quad {}^tA$
3. ${}^t({}^tA\ ) = A$
4. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$
5. *Si A est inversible, alors* ${}^tA$ *l'est aussi et on a* $({}^tA\ )^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

3. La trace

Dans le cas d'une matrice carrée de taille n x n, les éléments a_{11}, a_{22}, . . . , a_{nn} sont appelés les *éléments diagonaux.*

Sa *diagonale principale* est la diagonale (a_{11}, a_{22}, . . . , a_{nn}).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definition

La *trace* de la matrice A est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit,

$trA = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$

Théorème

Soient A et B deux matrices n x n. Alors :

1. $tr(A+B) = trA + tr\,B$,
2. $tr(\ A) = \ trA$ *pour tout* $\ K$,
3. $tr({}^tA\ ) = trA$,
4. $tr(AB) = tr(BA)$.

4. Matrices symétriques, Matrices antisymétriques

Definition

- Une matrice A de taille n x n est *symétrique* si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si $A = {}^tA$.
- Une matrice A de taille n x n est a*ntisymétrique* si ${}^tA = -A$.

Example

Les matrices suivantes sont symétriques : $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Les matrices suivantes sont antisymétriques : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Remarquons que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls

Conclusion

Nous avons vu dans cette leçon la définition d'une matrice, ses propriétés de base et les opérations dans l’ensemble des matrices.

Dans les leçons suivantes, nous utiliserons les matrices dans la représentation et la résolution des problèmes en particulier les systèmes d’équations.

Exercises solution

> Solution n°1

Exercice p. 6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice p. 6
Exercice p. 11

> Solution n°3

α = -3

> Solution n°4

Exercice p. 11

pour chaque coeficient , aij +bij =aij en deduire que bij =0 (proprietes de l'addition)

Exercice p. 11 *Exercice p. 11*
Exercice p. 11

> Solution n°7

$A^p = (2^p)\ I_3$, pour tout p 0.

B^p =0 pour tout p 3.

Exercice p. 13 *Exercice p. 13* *Exercice p. 13* *Exercice p. 13*

Bibliography

F. Liret, D. Martinais, Algèbre Licence 1ère année MIAS-MASS-SM, éditions Dunod, 2002

François Liret, Maths en pratique à l'usage des étudiants Cours et exercices, éditions Dunod, 2006

Claude Deschamps, André Warufsel, Mathématiques tout en un 1ière année, MPSI, PCSI, , éditions Dunod, 2003