POLYNOMES

septembre 2017

Table des matières

Objectifs

À la fin de cette leçon, vous serez capable de :

- **caractériser** un polynôme ;
- **effectuer** des divisions avec des polynômes ;
- **factoriser** un polynôme ;
- **déterminer** la multiplicité d'une racine.

DÉFINITIONS

I

Objectifs

a la fin de cette section vous serez capable de :

- définir un polynôme ;

- déterminer le degré d'un polynôme ainsi que celui de la somme ou du produit de deux polynômes ;

- déterminer la parité d'un polynôme ;

A. Polynômes à une indéterminé

Définition

On appelle **polynôme ou fonction polynôme (ou fonction polynomiale) à une indéterminée** *x sur R (ou C)* l'expression définie par :

$P(x)= a_nxn+a_{n-1}xn-1...+a_2x2+a_1x+a_0$, $n \in N$

où $a_n,..., a_2, a_1, a_0$ sont des éléments de R (ou C) appelés **coefficients** du polynômes *P(x)*.

On utilise aussi la notation $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_k x^k$, a_kxk est un *monôme* et a_n est le coefficient du monôme

Définition : degré d'un polynôme

Si $P(x) \neq 0$, on appelle ***degré*** de *P(x)*, et on note *deg(P)* ou encore *doP*, le plus grand entier nature ***n*** tel quel $a_n \neq 0$. Le coefficient a_n est le *coefficient du terme de plus haut degré.*

Remarque

Une constante non nulle (ex : P(x)= 15) est un polynôme de degré 0.

Le polynôme nul (ex : P(x) = 0) n'a pas de degré.

Exemple

x^2-5x+6 est un polynôme de degré 2 ;
$-5x^5+2x$ est un polynôme de degré 5.

- On dit que le polynôme $P(x)$ est **pair** si et seulement si $\forall\ p \in N$, $a_{2p+1} = 0$.
- On dit que le polynôme $P(x)$ est **impair** si et seulement si $\forall\ p \in N$, $a_{2p} = 0$.
- La somme et le produit de deux polynômes sont encore des polynômes et : $deg(P+Q) \leq Max(\ deg(P), deg(Q)\ )$ et $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$.

Exemple

a) $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ est un polynôme pair.
b) $P(x) = x^3 - 3x$ est un polynôme impair.
c) si $P(x) = x^2 + x + 1$ et $Q(x) = -x^2 - 2x + 1$ alors
$P(x) + Q(x) = -x + 2$ et $P(x)Q(x) = -x^4 - 3x^3 - 2x^2 - x + 1$, et on a bien
$deg(P+Q) = 1 \leq Max(\ deg(P), deg(Q)\ ) = Max(2,2) = 2$,
$deg(PQ) = 4 = deg(P)+ deg(Q) = 2+2$.

B. Exercice : degré de polynômes

[*Solution n°1 p 17*]

Parmi les affirmations suivantes, quelles sont celles qui sont vraies ?

- ☐ Si le degré de P est d, alors celui de X^2 P est d+2.
- ☐ Si le degré de P est 2, alors celui de X^2 +P est 2.
- ☐ Si le degré de P est 4, alors celui de X^2 +P est 4.
- ☐ Le degré de P+Q est toujours la somme des degrés de P et de Q.
- ☐ Le degré de P+Q est toujours égal soit au degré de P soit au degré de Q.
- ☐ Le degré de PQ est la somme des degrés de P et de Q.

DIVISION AVEC LES POLYNÔMES

II

Objectifs

A la fin de cette section, vous serez capable de :

- effectuer une division euclidienne

- diviser deux polynômes suivant les puissances croissantes.

A. Définitions

Division euclidienne ou division suivant les puissances décroissantes

Étant donnés deux polynômes $N(x)$ et $D(x)$ avec $D(x) \neq 0$, il existe un couple unique de polynômes $(Q(x), R(x))$ vérifiant:

$N(x) = D(x)Q(x) + R(x)$ et $(\deg(R) < \deg(D)$ ou $R(x) = 0)$.

Définition

Le polynôme $Q(x)$ est le **quotient** de la **division euclidienne** de $N(x)$ par $D(x)$.

Le polynôme $R(x)$ est le **reste** de la division euclidienne de $N(x)$ par $D(x)$.

Si $R(x) = 0$, alors ***N(x) est divisible par D(x)*** (ou encore ***D(x) divise N(x)***).

Exemple

Considérons la division euclidienne du polynôme N(x) = x3 + x + 1 par D(x) = x2 + x + 1.

Le quotient Q(x) est donné par Q(x) = x - 1 et le reste R(x) par R(x) = x+2. On a donc

N(x) = (x3 + x + 1) = (x2 + x + 1)(x - 1) + x + 2.

Division suivant les puissances croissantes

Etant donné un entier naturel *h* et deux polynômes *N(x)* et *D(x)* avec *D(x) ≠ 0,* il existe un couple unique de polynômes *(Q(x),R(x))* vérifiant :

N(x) = D(x)Q(x) + x*h+1* R(x) et (*deg(Q) < h ou R(x) = 0*).

Le polynôme **Q(x) est le quotient** de la division de *N(x)* par *D(x)* suivant les puissances croissantes jusqu'à ***l'ordre h*** et

le polynôme **R(x) le reste** de la division de *N(x)* par *D(x)* suivant les puissances croissantes jusqu'à l'*ordre h*.

Méthode : Disposition pratique de l'opération

On ordonne les deux polynômes *N(x)* et *D(x)* suivant les puissances croissantes :

N(x) = $a_0 + a_1x + a_2x2 + \ldots$ et *D(x)* = $b_0 + b_1x + b_2x2 + \ldots$

et on pose la division (voir l'exemple ci-dessous).

Exemple

Déterminons le quotient de la division du polynôme suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 2 du polynôme N(x) = x5+x4+x3+2x2+4 par D(x) = x3 + 2.

4	$+2x^2$	$+x^3$	$+x^4$	$+x^5$	$2+x^3$
-4		$-2x^3$			$2+x^2$
0	$+2x^2$	$-x^3$	$+x^4$	$+x^5$	
	$-2x^2$			$-x^5$	
	0	$-x^3$	$+x^4$	0	

Le quotient Q(x) est alors donné par Q(x) = x2+2 et le reste R(x) par R(x) = x - 1. On a donc

N(x) = x5 + x4 + x3 + 2x2 + 4 = (x3+2)(x2 +2) + x3 (x-1).

B. Exercice

[Solution n°2 p 17]

Soit Q un polynôme non nul. On donne P(x) = (x6+10x+1)Q(x) + 4x3 - 1

- [ ] Le polynôme 4x3 -1 est le reste de la division de P par Q.
- [ ] La division de P par Q est une division suivant les puissances croissantes de x.
- [ ] Le quotient de P par Q est (x6+10x+1).
- [ ] P(X)=(1−X2 −X4)Q(X) +X5(1+2X +X2) est une division de P par Q suivant les puissances croissantes de X.

C. Exercice

[Solution n°3 p 18]

On donne A(X) = X5 - 7X4 - X2 - 9X + 9 et B(X) = X2 - 5X + 4. Le quotient de A par B est :

- X3 −2X2 −14X −6
- X3 −14X −63
- X3 −2X2 −14X −63

D. Exercice

[Solution n°4 p 18]

On donne A = X6 − 2X4 + X3 + 1 et B = X3 + X2 +1.
Le reste de la division de A par B à l'ordre 4 suivant les puissances croissantes est :

- X5(1+2X +X2).
- 1+2X +X2
- X5

RACINES D'UN POLYNÔME

III

Objectifs

A la fin de cette section vous serez capable de :
- Déterminer la(les) racine(s) d'un polynôme
- Déterminer son ordre de multipicité
- Factoriser un polynôme à coefficient réel.

A. Définitions

Définition : racine d'un polynôme

Soit *a* un nombre réel ou complexe.
Un polynôme *P(x)* est divisible par *(x-a)* si et seulement si *P(a)=0*.
Le nombre *a* est alors **racine du polynôme** P(x). (On dit aussi que *a* est **zéro** de P(x)).

Ordre d'une racine

Un nombre *a* est **racine d'ordre *α***, *(α ∈ N*)* d'un polynôme *P(x)*, si et seulement si *P(x) est divisible par (x-a)α* , mais pas par *(x-a)α+1* (on dit que α est l'**ordre de multiplicité** du zéro *a* de *P(x)*.

- Une racine simple est une racine d'ordre 1.
- Une racine double est une racine d'ordre 2.

Exemple

Le polynôme P(x) = x2 + x - 6 admet 2 et -3 comme racines simples (ordre 1).
Il peut s'écrire sous la forme P(x) = x2 + x - 6 = (x-2)(x+3) ;
il est donc divisible par (x-2) et par (x+3).

Le polynôme $P(x) = x^4 - 10x^3 + 21x^2 - 16x + 4$ admet 1 et 2 comme racines doubles (d'ordre 2). Il peut s'écrire sous la forme :

$P(x) = x^4 - 10x^3 + 21x^2 - 16x + 4 = (x-1)^2(x-2)^2$.

Il est donc divisible par $(x-1)^2$ et par $(x-2)^2$.

B. Factorisation des polynômes à coefficients réels.

Fondamental : Théorème

Tout polynôme P(x) à coefficient complexes, de degré n strictement positif, admet exactement n racines, chacune étant comptée avec son ordre de multiplicité et s'écrit :

$P(x) = a_n(x-x_1)^{\alpha_1} (x-x_2)^{\alpha_2} \dots (x-x_p)^{\alpha_p}$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$.

Les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont toutes distinctes.

On dit que l'on a décomposé P(x) en produit de **facteurs premiers.**

Exemple

$P(x) = x^4-1=(x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$

Fondamental : Théorème :

Si un polynôme P(x) à **coefficients réels** admet le nombre complexe z pour racine, alors le conjugué de z est aussi racine, avec le même ordre de multiplicité. Donc **le nombre de racines non réelles de P(x) est pair.**

Exemple

Le polynôme $P(x) = x^2 - 2x + 5$ admet $1 + 2i$ et donc $1 - 2i$ comme racines simples (d'ordre 1). Il peut s'écrire sous la forme $P(x) = x^2 - 2x + 5 = (x - 1- 2i)(x - 1 + 2i)$.

Remarque : Conséquence

Tout polynôme à coefficients réels se factorise sous la forme :

$Q(x)= a_n(x - x_1)^{n_1} \dots (x - x_k)^{n_k} \ (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \ (x^2 + p_rx + q_r)^{m_r}$

avec $\Delta_i = p_i^2 - 4q_i < 0$.

Polynômes de degré impair

Tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine dans R.

C. Exercice

[Solution n°5 p 18]

On donne un polynôme P ainsi qu'une racine r = 2 d'ordre de multiplicité égal à 3.

On peut affirmer alors que

- P(x) est divisible par (x-2)
- P(x) est divisible par (x-2)*2*
- P(x) est divisible par (x-2)*3*
- P(x) est divisible par (x-2)*4*

D. Exercice

[*Solution n°6 p 18*]

Soit un polynôme de degré 3 tel que 1 et -2 sont ses racines.
P(x) peut s'écrire sous la forme :

- (x+1)(x-2)(ax+b)
- (x+1)(x-2)(ax*2*+bx+c)
- (x-1)(x+2)(ax+b)
- (x-1)(x+2)(ax*2*+bx+c)

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 8)

- [x] Si le degré de P est d, alors celui de X2 P est d+2.
- [ ] Si le degré de P est 2, alors celui de X2 +P est 2.
- [x] Si le degré de P est 4, alors celui de X2 +P est 4.
- [ ] Le degré de P+Q est toujours la somme des degrés de P et de Q.
- [ ] Le degré de P+Q est toujours égal soit au degré de P soit au degré de Q.
- [x] Le degré de PQ est la somme des degrés de P et de Q.

> Solution n°2 (exercice p. 10)

- [x] Le polynôme 4x3 -1 est le reste de la division de P par Q.
- [ ] La division de P par Q est une division suivant les puissances croissantes de x.
- [x] Le quotient de P par Q est (x6+10x+1).
- [x] P(X)=(1−X2 −X4)Q(X) +X5(1+2X +X2) est une division de P par Q suivant les puissances croissantes de X.

> Solution n°3 (exercice p. 11)

- ○ $X^3 - 2X^2 - 14X - 6$
- ○ $X^3 - 14X - 63$
- ◉ $X^3 - 2X^2 - 14X - 63$

> Solution n°4 *(exercice p. 11)*

- ◉ $X^5(1+2X+X^2)$.
- ○ $1+2X+X^2$
- ○ X^5

> Solution n°5 *(exercice p. 14)*

- ○ P(x) est divisible par $(x-2)$
- ○ P(x) est divisible par $(x-2)^2$
- ◉ P(x) est divisible par $(x-2)^3$
- ○ P(x) est divisible par $(x-2)^4$

> Solution n°6 *(exercice p. 15)*

- ○ $(x+1)(x-2)(ax+b)$
- ○ $(x+1)(x-2)(ax^2+bx+c)$
- ◉ $(x-1)(x+2)(ax+b)$
- ○ $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+c)$