Éléments de logique

Dr Euloge Kouame

juillet 2017

Table des matières

Objectifs

À la fin de cette leçon, vous serez capable de :
- Identifier les éléments de la logique mathématique
- Identifier les différents types de raisonnements mathématiques
- Effectuer une démonstration mathématique

Propositions logiques

I

Objectifs

A la fin de la section vous serez capable de :

● Définir la notion de proposition mathématique

● Connaître les opérations de base de la logique mathématique

A. Définition et exemple

Définition

Une **proposition** ou une **assertion** est un énoncé qui est soit **vrai** soit **faux.** pas les deux a la fois.

Exemple

- « Il pleut. »
- « Je suis plus grand que toi. »
- « 2 + 2 = 4 »
- « 2 x 3 = 7 »

B. Connecteurs logiques

Si P est une proposition et Q est une autre , nous allons définir de nouvelles propositions construites à partir de P et de Q.

Les **connecteurs logiques** sont des opérations permettant de créer de ces nouvelles propositions.

La négation

La négation de P, ou « **non** P »**, est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.** On la résume à l'aide d'une ***table de vérité***

P	Non P
V	F
F	V

La conjonction (et)

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition « P **et** Q » notée également **P** ∧ **Q** qui est vraie si P et Q le sont et qui est fausse sinon. Sa table de vérité est

P	Q	P ∧ Q
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

Exemple

Par exemple si P est la proposition « Cette carte est un as » et Q la proposition « Cette carte est coeur » alors l'assertion

« P et Q » est vraie si la carte est l'as de coeur et est fausse pour toute autre carte.

La disjonction (ou)

9La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition « P **ou** Q » notée également P ∨ Q est vraie si l'une (au moins) des deux propositions l'est et fausse sinon. Sa table de vérité est :

P	Q	P ∧ Q
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Exemple

Si P est l'assertion « Cette carte est un as » et Q l'assertion « Cette carte est coeur » alors l'assertion « P ou Q »

est vraie si la carte est un as ou bien un coeur (en particulier elle est vraie pour l'as de coeur).

L'implication

Soient P et Q deux propositions. L'**implication** est la proposition « (non P) ou Q ». On la note P ⇒ Q et on la lit « **P implique Q** ». Sa table de vérité est

P	Q	P ⇒ Q

V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Elle se lit souvent aussi « si P est vraie alors Q est vraie » ou « si P alors Q ».

Exemple

« x=-5 ⇒ -x = 5» est vraie.

« sin(θ) = 0 ⇒ θ = 0 » est fausse (regarder pour θ = 2π par exemple).

• « 2 + 2 = 5 ⇒ 2^2 = 4 » est vraie ! Eh oui, si P est fausse alors l'assertion « P ⇒ Q » est toujours vraie.

L'équivalence

L'équivalence de deux propositions P et Q est la proposition (P ⇒ Q et Q ⇒ P). On la note **P ⇔ Q** et on la lit **« P équivaut à Q »**.

On dira aussi « P si et seulement si Q ». Elle est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses. Sa table de vérité est :

P	Q	P⇔Q
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Exemple

Pour tous réels x, x', l'équivalence « x . x' = 0 ⇔(x = 0 ou x' = 0) » est vraie.

Méthode : Proposition

Soient P , Q et R trois propositions . On a les les équivalences (vraies) suivantes :

1. $P \iff \text{non}(\text{non}(P))$
2. $(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$
3. $(P \text{ ou } Q) \iff (Q \text{ ou } P)$
4. $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
5. $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$
6. $\big(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)\big) \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
7. $\big(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)\big) \iff (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
8. « $P \implies Q$ » $\iff$ « $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$ »

Démonstration : Essayer de les faire en construisant les tableaux de vérité pour chaque cas.

Exemples de démonstration :Exple demonstration.png (cf. Exple demonstration p 17)

C. Exercice

[*Solution n°1 p 19*]

Exercice

On considère deux propositions A et B. On considère la proposition :
C = non (A et B).
Parmi les propositions suivantes, indiquez celle(s) qui sont équivalente(s) à C.

- ☐ (non A) ou (non B)
- ☐ (non A) et (non B)
- ☐ A ou B
- ☐ (B) implique (non A)
- ☐ (non B) implique A

D. Exercice

[*Solution n°2 p 19*]

la négation de (P et (Q ou R)) est : completez
(non P) ou (non Q) ....(non R)

Quantificateurs

II

Objectifs

A la fin de cette section, vous serez sera capable de :

- **Savoir traduire une proposition en langage mathématique**

A. Quantificateurs

On peut avoir besoin d'utiliser des propositions contenant une ou plusieurs variables. une telle proposition est appelée **prédicat** P(x).

Exemple

« Pour tout réel x, le nombre x^2 est positif »

Le quantificateur ∀ : « pour tout »

$\forall x \in E$, P(x) est une assertion vraie lorsque les assertions P(x) sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.

On lit « Pour tout x appartenant à E, P(x) », sous-entendu « Pour tout x appartenant à E, P(x) est vraie ».

Exemple

- « $\forall x \in R$, $x^2 > 1$ » est une assertion fausse.
- « $\forall x \in N$, $n(n + 1)$ est divisible par 2 » est vraie

Le quantificateur ∃ : « il existe »

$\exists x \in E$, P(x) est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel P(x) est vraie.

On lit « il existe x appartenant à E tel que P(x) (soit vraie) ».

Le symbole $\exists!$ signifie « il existe un unique ».

Exemple

« $\exists x \in R$, $x(x- 1) < 0$ » est vraie (par exemple $x = 1/2$ vérifie bien la propriété).

« $\exists\, x \in R,\ x^2 = -1)$ » est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).

La négation des quantificateurs

La négation de « $\forall\, x \in E, P(x)$ » est « $\exists\, x \in E$, *non* $P(x)$ » .
La négation de « $\exists\, x \in E, P(x)$ » est « $\forall\, x \in E$, *non* $P(x)$ » .

Exemple

La négation de « $\forall\, x \in R\ (x + 1 \in Z)$ » est « $\exists \in R\ (x + 1 \notin Z)$ ».
La négation de « $\forall\, x \in R, \exists\, y > 0, (x + y > 10)$ » est « $\exists\, x \in R, \forall\, y > 0, (x + y \leq 10)$ »

B. Exercice

Écrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes, puis écrire la négation:

1. « Pour tout nombre réel, son carré est positif ».
2. « Pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1 »
3. « Pour tout entier n, il existe un unique réel x tel que exp(x) égale n ».

Raisonnements

III

Objectifs

A la fin de cette section, vous serez capable de :

● Identifier les types de raisonnements mathématiques et savoir les utiliser

Nous présentons ici les différents types de raisonnements permettant de faire des démonstrations.

A. Raisonnements

Nous donnons 4 types de méthodes classiques de raisonnements :

1. Le direct
2. La contraposée
3. L'absurde
4. La récurrence

Raisonnement direct

C'est le mode de raisonnement le plus classique. Il consiste à partir des hypothèses, puis à l'aide d'implications successives, à aboutir au résultat recherché.

L'exemple le plus célèbre est le suivant :

Tous les hommes sont mortels. (Hypothèse) Or Socrate est un homme. (Hypothèse) Donc Socrate est mortel. (Conclusion)

Raisonnement par contraposée

Lorsque l'on doit démontrer une implication de la forme P $\Rightarrow$ Q, on peut très bien démontrer sa contraposée non(Q) $\Rightarrow$ non(P) qui lui est équivalente.

Exemple

Soit n ∈ N. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Démonstration. Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair.

Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe k ∈ N tel que n = 2k+1. Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2l+1$

avec $l = 2k^2 + 2k \in$ N. Et donc n^2 est impair.

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

Raisonnement par l'absurde

La démonstration par l'absurde qu'une proposition (P) est vraie consiste à *supposer que (P) est fausse* et à montrer que (non P ⇒ Q) est vraie, avec (Q) une proposition dont on sait qu'elle est fausse d'où une contradiction. Il en résulte que (P) est vraie.

Exemple

Soient $a, b \geqslant 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

Démonstration. Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ donc $a + a^2 = b + b^2$ d'où $a^2 - b^2 = b - a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$. Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$ et donc en divisant par $a - b$ on obtient $a + b = -1$. La somme des deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$. □

Raisonnement par récurrence

On souhaite démontrer une proposition de la forme ∀n ∈ N,P(n). Le raisonnement s'effectue en trois étapes :

- Initialisation : on montre P(0),
- Hérédité : on suppose n ≥ 0 donné avec P(n) vraie, et on démontre alors que P(n + 1) .
- On peut alors conclure par récurrence que P(n) est vrai pour tout n.

Exemple

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Démonstration. Pour $n \geqslant 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante :

$$2^n > n.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.
Initialisation. Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Fixons $n \geqslant 0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} = 2^n + 2^n &> n + 2^n \qquad \text{car par } P(n) \text{ nous savons } 2^n > n, \\ &> n + 1 \qquad \text{car } 2^n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geqslant 0$. □

B. Exercice

[*Solution n°3 p 19*]

Soit n un entier. Soit la proposition suivante
Si n^2 est impair, alors n est impair.
Quelle est la contraposée de l'assertion suivante ?

- ○ Si n est pair alors n^2 est impair
- ○ Si n est impair et n^2 est pair
- ○ Si n est pair alors n^2 est paire
- ○ On ne peut pas déduire la parité de n

C. Exercice

[*Solution n°4 p 19*]

Démontrer que si vous rangez (n+1) paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

Un étudiant procède de la manière suivante :

Supposons que chacun des n tiroirs contienne au plus une paire de chaussettes. Si on compte le nombre de paire de chaussettes alors, nous avons 1+1+...+1= n paires de chaussettes. ce qui contredit l'hypothèse que nous disposons de(n+1) paires de chaussettes

Il a utilise un raisonnement par....

D. Exercice

(Récurrence) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $1 + 2 + \ldots n = n(n+1)/2$.

Ressources annexes

- Exple demonstration

4. Il suffit de comparer les deux assertions « $non(P \text{ } et \text{ } Q)$ » et « $(non \text{ } P) \text{ } ou \text{ } (non \text{ } Q)$ » pour toutes les valeurs possibles de P et Q. Par exemple si P est vrai et Q est vrai alors « $P \text{ } et \text{ } Q$ » est vrai donc « $non(P \text{ } et \text{ } Q)$ » est faux ; d'autre part (non P) est faux, (non Q) est faux donc « $(non \text{ } P) \text{ } ou \text{ } (non \text{ } Q)$ » est faux. Ainsi dans ce premier cas les assertions sont toutes les deux fausses. On dresse ainsi les deux tables de vérités et comme elles sont égales les deux assertions sont équivalentes.

$P \setminus Q$	V	F
V	F	V
F	V	V

FIGURE 1.6 – Tables de vérité de « $non(P \text{ } et \text{ } Q)$ » et de « $(non \text{ } P) \text{ } ou \text{ } (non \text{ } Q)$ »

6. On fait la même chose mais il y a trois variables : P, Q, R. On compare donc les tables de vérité d'abord dans le cas où P est vrai (à gauche), puis dans le cas où P est faux (à droite). Dans les deux cas les deux assertions « $\big(P \text{ } et \text{ } (Q \text{ } ou \text{ } R)\big)$ » et « $(P \text{ } et \text{ } Q) \text{ } ou \text{ } (P \text{ } et \text{ } R)$ » ont la même table de vérité donc les assertions sont équivalentes.

$Q \setminus R$	V	F
V	V	V
F	V	F

$Q \setminus R$	V	F
V	F	F
F	F	F

8. Par définition, l'implication « $P \implies Q$ » est l'assertion « $(non \text{ } P) \text{ } ou \text{ } Q$ ». Donc l'implication « $non(Q) \implies non(P)$ » est équivalente à « $non(non(Q)) \text{ } ou \text{ } non(P)$ » qui équivaut encore à « $Q \text{ } ou \text{ } non(P)$ » et donc est équivalente à « $P \implies Q$ ». On aurait aussi pu encore une fois dresser les deux tables de vérité et voir qu'elles sont égales.

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 9)

Exercice

- ☑ (non A) ou (non B)
- ☐ (non A) et (non B)
- ☐ A ou B
- ☑ (B) implique (non A)
- ☑ (non B) implique A

> Solution n°2 (exercice p. 10)

et

> Solution n°3 (exercice p. 15)

- ○ Si n est pair alors n^2 est impair
- ○ Si n est impair et n^2 est pair
- ◉ Si n est pair alors n^2 est paire
- ○ On ne peut pas déduire la parité de n

> Solution n°4 (exercice p. 15)

l'absurde