Probabilités et Statistique

ANALYSE COMBINATOIRE

1.0

Probl101

ATIAMPO KODJO ARMAND © UVCI 2017

Novembre 2017

Table des matières

Objectifs

À la fin de cette leçon, vous serez capable de :

- **calculer le nombre d'arrangements possible d'une collection d'objets**
- **calculer le nombre de combinaisons possibles dans une collections d'objets**
- **compter le nombre d'éléments (dénombrer) d'un ensemble de grande cardinalité**

Introduction

Ce chapitre introductif va nous permettre de rappeler et d'acquérir les notions de base élémentaires nécessaires à la bonne pratique des probabilités et de la statistique. Pour un approfondissement des notions ,vous trouverez un lien vers un polycopié (cf.) du cours. A la fin du cours , vous trouverez également une *vidéo illustrative*[1] de l'ensemble des notions vues .

1 - https://youtu.be/m7s_tNcu3zw

Factoriel, Arrangement, combinaisons

I

Objectifs

À la fin de cette section vous serez capable de :

• calculer le nombre d'arrangements possible d'une collection d'objets

• calculer le nombre de combinaisons possibles dans une collections d'objets ;

Ces opérateurs de base vont nous permettre de pouvoir dénombrer différents ensembles et sont la base du calcul des probabilités

A. Factoriel

Elle va nous permettre de calculer toue les "mélanges" possibles dans une collection d'objets

Définition

Pour $n \in N$ on appelle « factorielle n »la quantité définie par

$0! = 1$ et $n! = n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$ si $n \geq 1$

Exemple

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

$10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3\,628\,800$

Exemple

Avec 5 personnes, combien de façons de s’asseoir sur un banc?

La première personne a cinq possibilités de s’asseoir , la deuxième en a quatre puisque une des places est occupé par la première personne, la troisième personne a trois possibilités , la quatrieme personne a deux possibilité de s'asseoir et la

dernière personne a une seule possibilité. Donc nous avons au total
5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 5 ! = 120

B. Exercice

Exercice 1

Donner le nombre de mots différents que l'on peut former avec le lettre du mot FORMIDABLE

C. Exercice : Exercice 2

Exercice

Donner le nombre de façon d'asseoir 7 personnes autour d'une table ronde

D. Exercice

Exercice

De combien de façons différents peut-on écrire le mot PEPPER

- ○ 6 !
- ○ 720
- ○ 60

E. Arrangements

Elle va nous permettre de classer p objets (dans l'ordre) dans un ensemble de n objets

Définition

Pour n, p ∈ N avec p ≤ n on appelle « Arrangement de p parmi n »la quantité définie
par :

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} = \mathrm{n} \times (\mathrm{n} - 1) \times \cdots \times (\mathrm{n} - \mathrm{p} + 1)$$

Exemple

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Exemple

On se propose de calculer le nombre de fois d'avoir troiss chevaux dans l'ordre parmi 10 chevaux

Réponse :

Il s'agit d'arranger donc de classer dans l'ordre 3 chevaux parmi 10 donc la réponse est

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

F. Exercice

Exercice

On veut calculer A_{23}^3

- ○ 4568
- ○ 10626
- ○ 83456

G. Exercice

Exercice

Combien de mots fictifs de 3 lettres distinctes peut-on écrire avec les 26 lettres de l'alphabet ?

☐	26 x 25 x 24
☐	15600
☐	26 !
☐	A_6^{26}

H. Combinaisons

Elle va nous permettre de classer p objets (sans ordre) dans un ensemble de n objets

Définition

Pour n,p ∈ N avec p ≤ n on appelle « Combinaisons de p parmi n »la quantité définie par :

$$C_p^n = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

Exemple

$$C_5^{20} = \frac{20!}{5!\,(20-5)!} = \frac{20!}{5! \times 15!}$$

$$= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15!}{5!\,15!}$$

$$= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{4 \times 19 \times 6 \times 17 \times 4}{2} = 15504$$

Exemple

Nous nous posons la question suivante/ il y a combien de possibilités de créer des ensembles de 5 numéros parmi 49 numéros ?

Réponse : il s'agit pour nous de trouver le nombre de parties de 5numéros. dans un ensemble qui contient 49 numéros. ici l'ordre des numéros importe peu donc la réponse est

$$C_5^{49} = \frac{49!}{5!(49-5)!} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1906884$$

I. Exercice

Exercice

Combien de glaces distinctes avec 4 parfums différents peut-on faire avec 9 parfums ?

- ○ 126
- ○ 56
- ○ 9 !/4 !

J. Exercice

Exercice

Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vérifiées ?

- ☐ Pour deux entiers naturels p et n tels que p est inférieur ou égal à n,

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

- ☐ $\forall\, p, n \in N, p \leq n, on\ a\ C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$
- ☐ $\forall\, p, n \in N, p \leq n, on\ a\ A_n^p = p!\, C_n^p$

Dénombrement

II

> **Objectifs**
>
> **A la fin ce cette section , vous serez capable de :**
>
> - **compter le nombre d'éléments (dénombrer) d'un ensemble de grande cardinalité**

A. Dénombrement

Le calcul des probabilités discrètes repose sur la capacité à dénombrer **le nombre de cas favorables** et le nombre total d´éventualités possibles dans une expérience donnée.

Définition

Le dénombrement correspond au calcul du cardinal d'ensembles finis.

Fondamental

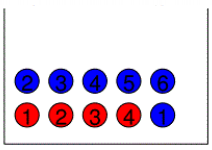
Soit $A, B \subset E$ alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$, en particulier

$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) \iff A \cap B = \emptyset$

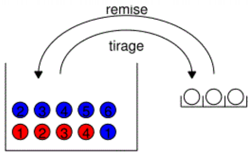
Soit $A, B \subset E$ alors $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$

Exemple

Application à des tirages répétitifs dans une urne



Expérience : « tirer 3 boules successivement avec remise »



Comme il y a un ordre, un résultat de cette expérience se représente par **un 3-uplet**

• nombre total de tirages est donc $10^3 = 1000$

Quelques exemples de dénombrements pour cette expérience :

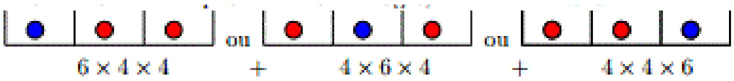
• nombre de tirages avec la première boule bleu $6 \times 10^2 = 600$ (attention on autorise que d'autres boules soient bleus après le premier tirage)

• R_0 :« nombre de tirages avec 0 boule rouge »==⇒ $Card(R_0) = 6^3 = 216$ (On tire à chaque fois une boule bleue)

• R_3 :« nombre de tirages avec 3 boules rouges »==⇒ $Card(R_3) = 4^3 = 64$

• R_2 :« nombre de tirages avec 2 boule rouges »==⇒ $Card(R_2) = 3 \times (6 \times 4^2) = 288$

car pour chacune des 3 configurations possibles il y a 6 choix pour la boule bleu et 4 × 4 pour les boules rouges, comme ci-dessous :



• R_1 =« nombre de tirages avec une boule rouge »==⇒ $Card(R_1) = 3 \times (4 \times 6^2) = 432$

• A:« nombre de tirages avec au moins une boule rouge »

⇒ $Card(A) = 10^3 - Card(R_0) = 784 = Card(R_1) + Card(R_2) + Card(R_3)$

On peut en plus vérifier que 64 + 216 + 288 + 432 = 1000 ce qui correspond au fait que $\{R_0, R_1; R_2; R_3\}$ est une partition de l'ensemble des résultats.

B. Exercice : Exercice complémentaire

On se place dans les hypothèses de l'exemple du cours sauf que nous considérons cette fois-ci un tirage sans remise. Calculer le nombre de réalisations favorables

Exercice

nombre de tirages avec la première boule bleue

- ☐ 432
- ☐ 500
- ☐ 600

Exercice

Nombre total de tirages possibles

- ○ 720
- ○ 1000
- ○ 892

Exercice

nombre de tirage avec tirages avec 3 boules rouge

- ☐ 24
- ☐ 10
- ☐ 64
- ☐ 400

Exercice

nombre de tirages avec la première boule bleue

- ☐ 125
- ☐ 432
- ☐ 572
- ☐ 12

Exercice

choisir deux boules rouges et choisir une boule bleu et ranger ces 3 boules »

Conclusion

Ce premier chapitre est consacré aux notions de bases de calcul indispensable pour la maîtrise du calcul des probabilités et de la statistique. la relative simplicité des formules ne doit pas vous faire oublier sue la maîtrise ds probabilités et de la statistique passe par une lecture attentive des énoncés et un effort de représentation de l'information sous forme d'ensembles.

Bibliographie

[1] Pierre Andreoletti, Support du cours de Probabilités et Statistiques, IUT d'Orléans, Département Informatique, 2008

[2] Ph. Roux, Probabilités discrètes et statistique descriptive, DUT Informatique, semestre 2, 2010

Webographie

[3] https://lecluseo.scenari-community.org/2DE/Probabilites/co/activiteeval.html