NOMBRES REELS

Table des matières

Objectifs

- Identifier les **propriétés fondamentales** des réels ;
- Comprendre les propriétés des **valeurs absolues** ;
- Manipuler les **inégalités dans R**.

Introduction

On introduit les **règles de bases** et les relations d'**ordre** dans le corps des **nombres réels** R.

Nombres réels

A. Premières propriétés

Corps ordonné

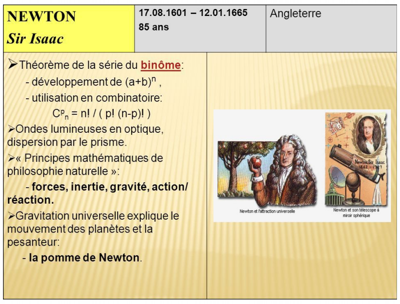
On dit que l'ensemble R des nombres réels est :

- un **corps** pour dire qu'il est muni de deux opérations l'addition ($+$) et la multiplication ($\times$) , avec toutes les propriétés de calcul dont vous avez l'habitude ;
- Un **corps ordonné** pour dire que la relation d'ordre $\leqslant$ est compatible avec + et ×, c'est à dire :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R} \qquad a \leqslant b \implies a + c \leqslant b + c\,;$$
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \geqslant 0 \qquad a \leqslant b \implies ac \leqslant bc\,.$$

Complément : Binôme de newton et règles de calcul

$(x \in \mathbb{R}\,, y \in \mathbb{R}\,, n \in \mathbb{N})$,



$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k} \qquad \text{où} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k\,.$$

Exemple

- $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$
- $(x+y)^3 = x^3+3xy^2+3x^2y+y^3$

Définition : Valeur absolue

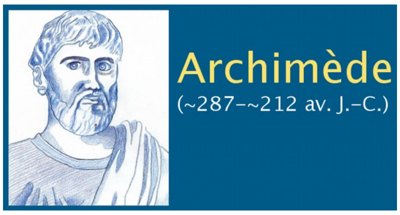
La **valeur absolue** d'un réel a, notée **| a |**, est définie par :
| a |= a si **a ≥ 0** ; **| a | = −a** si **a ≤ 0** .

Complément : Propriétés

$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$

$$|a| \geqslant 0 \quad ; \quad |a| = 0 \iff a = 0 \quad ; \quad |ab| = |a|\,|b| \;;$$
$$|a+b| \leqslant |a| + |b| \quad ; \quad \big|\,|a| - |b|\,\big| \leqslant |a-b| \,.$$

Propriété d'Archimède



R est **archimédien**, c'est-à-dire :
Soit $a \in R$ et $b > 0$. Alors il existe $k \in N$ tel que ***bk > a***.
ou
$\forall x \in R, \exists n \in N$, tel que $n > x$
« Pour tout réel *x*, il existe un entier naturel *n* strictement plus grand que *x*. »
Cette propriété est essentielle puisque elle permet de définir la partie entière d'un nombre réel :

Définition : Partie entière

Étant donné un nombre réel x, il existe un plus grand entier relatif, noté **E(x)** ou **[x]**, tel que *E(x)* ≤ *x*. On l'appelle la **partie entière de x**.
On a donc, par définition : **E(x) ≤ x < E(x)+1**.

Exemple

- E(2, 853) = 2, E(π) = 3, E(-4,3) = -5.
- E(x) = 3 ↔ 3 ≤ x < 4.

B. Exercice

Montrer : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

a) $\frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$

b) En déduire : $\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Correction :CorrectExo1.PNG (cf. CorrectExo1 p 15)

C. Exercice : Valeur absolue

[Solution n°1 p 17]

Soient a, b et c trois nombres réels quelconques. quelle est la propriété vérifiée par la valeur absolue ?

- ○ $|a + b| \leq |a - c| + |c + b|$.
- ○ $|\ |a| - |b|\ | \geq |a - b|$
- ○ $|a + b| + |a + c| + |b + c| = |a + b + c| + |a| + |b| + |c|$

D. Intervalles

Définition

Pour $a \leq b$, le segment, $[a ; b]$ est défini par : **$[a ; b] = \{ x \in R ; a \leq x \leq b \}$**.

On utilise souvent la propriété : $c \in [a ;b] \Longleftrightarrow \exists t \in [0 ;1],\ c = ta+(1-t)b$.

On définit de même les autres types d'intervalles : $]a ; b[$, $[a ; b[$, $]a ; b]$, $]a ; +\infty[$, $[a ;+\infty[$, $]-\infty ; b[$, $]-\infty ; b]$, $]-\infty ;+\infty[= R$.

Fondamental : Propriété caractéristique

Une partie I de R est un intervalle si, et seulement si :

$\forall a \in I, \forall b \in I$, $a<c< b \Rightarrow c \in I$.

Définition : Voisinage d'un point

Soit $a \in R$. Une partie V de R est un **voisinage** de a si elle **contient un intervalle ouvert centré sur a**, soit du type $]a-\varepsilon ; a+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.

E. Exercice

[Solution n°2 p 17]

Soit A une partie non vide de R. Quelles sont les propriétés qui impliquent que A est un intervalle ?

☐	$\forall (a;b) \in A^2,\ \forall x \in \mathbb{R},$ $(a < x < b) \Rightarrow (x \in A).$
☐	$\exists (a;b) \in A^2,\ \forall x \in \mathbb{R},$ $(a < x < b) \Rightarrow (x \in A).$
☐	$\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},$ $(a < x < b) \Rightarrow (x \in A).$
☐	$\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},$ $(a < x < b) \Leftarrow (x \in A).$
☐	$\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},$ $(a < x < b) \Leftrightarrow (x \in A).$

F. Ordre dans R

Définition : Majoration, minoration

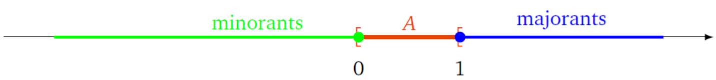
Soit A une partie de R. On dit que **a** est un **majorant** de A si x ≤ a *pour tout x de A*.

Si, en plus, **a ∈ A**, alors a **est le plus grand élément** de A, noté **max A**. Si A admet un majorant, on dit que A est majorée.

On définit de même : **minorant, plus petit élément, partie minorée.**

Exemple

Soit A = [0,1[.



1. les majorants de A sont les éléments de :]-∞, 0]
2. les minorants de A sont les éléments de :[1,+∞[

Remarque : Unicité

Si une partie non vide de R admet un **plus grand élément**, ou un **plus petit élément**, il est **unique**. Mais **il peut ne pas exister.**

Attention

Surveillez votre vocabulaire : **un** majorant, **le** plus grand élément

Remarque : Cas particulier des entiers naturels

Toute partie non vide de N admet un plus petit élément.

Toute partie non vide majorée de N admet un plus grand élément.

Définition : Borne supérieure, borne inférieure

La **borne supérieure** de A est le **plus petit** (s'il existe) **des majorants** de A. On le note **SupA**

La **borne inférieure** de A est le **plus grand** (s'il existe) **des minorants** de A. on le note InfA

Exemple

1. Soit A = [0,1[.

a. SupA = 1 : les majorants de A sont les éléments de [1,+∞[. Donc le plus petit des majorants est 1.

b. InfA = 0 : les minorants sont les éléments de]-∞, 0] donc le plus grand des minorants est 0.

2.]0,+∞[n'admet pas de borne supérieure.

Fondamental : Caractérisation

M est la **borne supérieure** de A si, et seulement si, on a, à la fois :

$\forall x \in A \quad x \leqslant M$, c'est-à-dire que M est un majorant ;

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x$, c'est-à-dire que $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant.

m est la **borne inférieure** de A si, et seulement si, on a, à la fois :

$\forall x \in A \quad m \leqslant x$, c'est-à-dire que m est un minorant ;

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad x < m + \varepsilon$, c'est-à-dire que $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant.

Théorème d'existence

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de R admet une borne supérieure (resp. inférieure).

G. Exercice : Borne supérieure

[*Solution n°3 p 18*]

Soit A une partie non vide et majorée de R. Quelles sont les assertions vraies ?

- [ ] A admet un plus grand élément qu'on appelle sa borne supérieure.
- [ ] A admet une borne supérieure, *a* ,caractérisée par les deux propriétés :
  (a) $\forall x \in A,\ x \leq a$;
  (b) $\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in A,\ x \geq a - \epsilon.$
- [ ] A admet une borne supérieure, *a* , caractérisée par les deux propriétés:
  (a) $\forall x \in A,\ x \leq a$;
  (b) $\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x \geq a - \epsilon.$
- [ ] A admet une borne supérieure, a ,caractérisée par la propriété:
  $\forall x \in \mathbb{R},\ \left[(\forall y \in A,\ y \leq x) \Rightarrow (x \geq a) \right]$
- [ ] A admet une borne supérieure, qui est le plus grand des minorants de A

Ressources annexes

- **CorrectExo1**

On a pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\frac{a^2}{a+b} - \frac{3a-b}{4} = \frac{4a^2-(a+b)(3a-b)}{4(a+b)}$$

$$= \frac{4a^2-2ab+b^2}{4(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \geq 0,$$

D'où l'inégalité voulue

b) On applique le résultat de a) à (a,b) ,(b,c) et (c,a) puis on additionne :

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{3a-b}{4} + \frac{3b-c}{4} + \frac{3c-a}{4} = \frac{a+b+c}{2}$$

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 11)

- (x) $|a + b| \leq |a - c| + |c + b|$.
- ( ) $|\,|a| - |b|\,| \geq |a - b|$
- ( ) $|a + b| + |a + c| + |b + c| = |a + b + c| + |a| + |b| + |c|$

> Solution n°2 (exercice p. 11)

- [x] $\forall (a;b) \in A^2, \forall x \in \mathbb{R},$ $(a < x < b) \Rightarrow (x \in A)$.
- [ ] $\exists (a;b) \in A^2, \forall x \in \mathbb{R},$ $(a < x < b) \Rightarrow (x \in A)$.
- [ ] $\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R},$ $(a < x < b) \Rightarrow (x \in A)$.
- [ ] $\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R},$ $(a < x < b) \Leftarrow (x \in A)$.
- [x] $\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R},$ $(a < x < b) \Leftrightarrow (x \in A)$.

> Solution n°3 (exercice p. 13)

- [ ] A admet un plus grand élément qu'on appelle sa borne supérieure.
- [ ] A admet une borne supérieure, *a* ,caractérisée par les deux propriétés :
  (a) $\forall x \in A,\ x \leq a$;
  (b) $\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in A,\ x \geq a - \epsilon.$
- [x] A admet une borne supérieure, *a* , caractérisée par les deux propriétés:
  (a) $\forall x \in A,\ x \leq a$;
  (b) $\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x \geq a - \epsilon.$
- [x] A admet une borne supérieure, a ,caractérisée par la propriété:
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \left[(\forall y \in A,\ y \leq x) \Rightarrow (x \geq a)\right]$$
- [ ] A admet une borne supérieure, qui est le plus grand des minorants de A