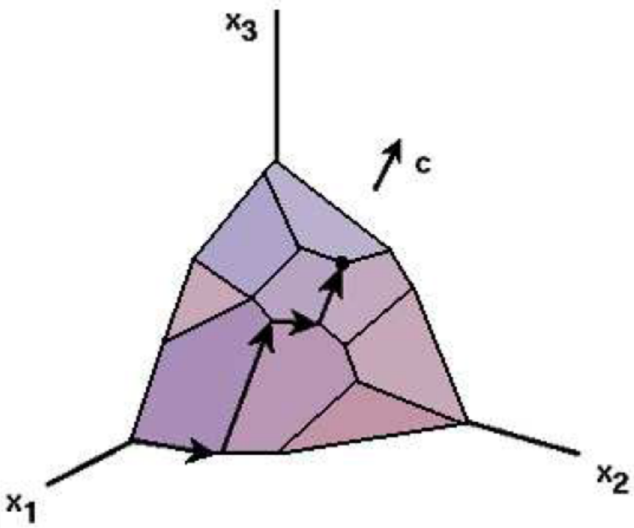
INTRODUCTION A L'OPTIMISATION



1.0

Dr EULOGE KOUAME ©UVCI

UNIVERSITE VIRTUELLE DE CÔTE D'IVOIRE

avril 2018

Table des matières

Objectifs

- **Définir** les notions de recherche opérationnelle et d'optimisation
- **Connaître** le vocabulaire et les outils mathématiques liés aux problèmes d'optimisation.

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les notions de recherche opérationnelle, les problèmes qu'elle permet de résoudre , le principe d'optimisation qui la sous-tend.

Nous introduisons aussi le vocabulaire mathématique relatif aux problèmes d'optimisation.

NOTION DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE (R.O)

I

A. Définition et applications

Définition

Une définition possible de la **R.O** pourrait être la suivante : il s'agit d'un ensemble de méthodes d'analyse scientifique (maths et info.) des phénomènes d'organisation qui traite de la **maximisation** d'un profit, d'une performance, d'un rendement ou bien de la **minimisation** d'un coût, d'une dépense.

La R.O. est avant tout un **outil d'aide à la décision**. Le schéma général suivi par ces méthodes est :

Problème concret (de type R.O)→ modélisation → résolution par une méthode de R.O → interprétation des résultats → prise de décision.

1. Quelques exemples et domaines d'applications de la R.O

Beaucoup de problèmes dans divers domaines peuvent être modélisés comme des problemes d'optimisation. Nous donnons ci-contre quelques exemples.

Un problème de production

Détermination d'un plan optimal de fabrication : une entreprise fabrique plusieurs produits, ce qui exige des ressources particulières (matières premières, machines, personnel ...) en quantités limitées. Chaque produit rapporte un certain bénéfice (connu) à l'entreprise.

Quels produits l'entreprise doit-elle fabriquer et en quelle quantité pour réaliser le *bénéfice total le plus élevé* ?

Un problème de transport.

Une entreprise dispose de plusieurs dépôts (Di) contenant chacun un certain nombre de containers.

Différents magasins (Mj) commandent des containers. On connaît le coût de transport de chaque dépôt aux magasins.

	M_1	M_2	M_3	disponibilité dépôts ↓
D_1	5	3	4	8
D_2	6	7	2	9
demande magasins →	4	5	8	

Quelle est l'organisation des livraisons des containers pour minimiser le coût total de transport ?

Un problème d'affectation

n tâches doivent être affectées a *n* machines (1 tâche par machine). Le coût d'exécution de chaque tâche par chacune des machines est connu.

Trouver l'affectation qui minimise le coût total.

Un problème de voyageur de commerce

Un voyageur de commerce doit visiter *n* villes. La distance entre chaque ville est donnée.

Trouver le plus court trajet passant par les n villes

B. Modélisation

Un **modèle**, telle que considéré dans ce cours, est une **construction mathématique** utilisée pour représenter certains aspects significatifs de problèmes du monde réel. Il y a beaucoup de types différents de modèles mathématiques, mais nous nous focaliserons dans un premier temps sur les modèles d'optimisation.

Il y a trois composantes principales dans un modèle d'optimisation:

Variables: elles représentent les composantes du modèle qui peuvent être modifiées pour créer des configurations différentes.

Contraintes: elles représentent les limitations sur les variables.

Fonction objectif : cette fonction assigne une valeur à chaque configuration différente. Le terme “objectif” vient du fait que l'*objectif est d'optimiser* cette fonction

Tous les problèmes mentionnés ci-dessus et présentés dans ce cours peuvent se formaliser de la façon suivante.

On cherche à *maximiser* une fonction *f* sur un ensemble *X* donné :

$max \{f(x), x \in X\}$

• $f : X \rightarrow R$ est la fonction objectif. *f* peut être linéaire, quadratique, non linéaire...

• *X* est l'ensemble des solutions possibles dites *réalisables*. L'ensemble *X* est fini mais en général de très grande taille.

On peut envisager de façon équivalente un problème de *minimisation* grâce à la relation

$min\ f = -max(-f)$.

Formuler un modèle mathématique

Un problème d'optimisation, comme tout modèle mathématique est une représentation idéalisée du problème réel :

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimiser } f(x) & & \text{[fonction objective]} \\
\text{sous contraintes} & & \\
& h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m & \text{[contraintes d'égalité]} \\
& g_j(x) \leq 0,\ j = 1, \ldots, k & \text{[contraintes d'inégalité]} \\
& x \in X & \text{[domaine du problème]}
\end{array}
$$

Éléments du modèle :

- **variables de décision**, e.g., $x = [x_1; \ldots x_n]$ - décisions quantifiées

- **une solution** $x \in Rn$ représente une décision possible

- **fonction objective** represente la mesure de performance (les pertes) à optimiser, e.g., $f(x_1 ; \ldots ; x_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$

- **contraintes** du probleme representent les restrictions sur les décisions admissibles, définies par les inégalités ou égalités contenant les variables de decision, par

exemple, $x_1 + 3x_1x2 + 2x_2 \leq 10$

- les coefficients et les seconds membres sont *données ou paramètres* du problème.

Résoudre le problème veut dire trouver une solution optimale x_* , c.a-d., une solution admissible (réalisable) (i.e., qui respecte les contraintes) avec la valeur de

l'objectif $\leq$ sa valeur sur toute autre solution admissible :

$$
\left\{
\begin{array}{c}
h_i(x_*) = 0 \ \ \forall i, \ \ g_j(x_*) \leq 0 \ \forall j, \ \text{et } x_* \in X \\
h_i(x) = 0 \ \ \forall i, \ \ g_j(x) \leq 0 \ \forall j, \ \text{et } x \in X
\end{array}
\right\}
$$
(cf. modele2 p 19)

$$\Rightarrow f(x_*) \leq f(x)$$

NOTION DE CONVEXITÉ

II

A. Définition

Un ensemble de conditions mathématiques devront être réalisées afin de pouvoir obtenir un maximum ou un minimum sur un ensemble donné. Parmi celles-ci , la condition de **convexité** de l'ensemble en question.

Définition

Soit D, une partie de R^n, on dit que **D est convexe** si et seulement si : Pour tout $x, y \in D$, le segment $[x, y]$ est inclus dans D.

On dit aussi que *D est l'enveloppe convexe de ses points*.

Exemple

Dans R^2 : tout segment ; toute demi droite intérieure des polygones réguliers : carré, rectangle, losange, parallélogramme ; le demi-plan ; le disque ; le demi-disque.

Dans R^3 :l'adhérence du cube ; de la boule (sphère) ; le demi-espace.

Propriétés

1. Si D et Δ sont deux parties convexes de R^n alors $D \cap \Delta$ est une partie convexe de R^n.
2. Tout espace vectoriel est un convexe.

Forme linéaire et convexité

Soit f une forme linéaire dans R^2, alors on a :

f: $R^2 \rightarrow R$

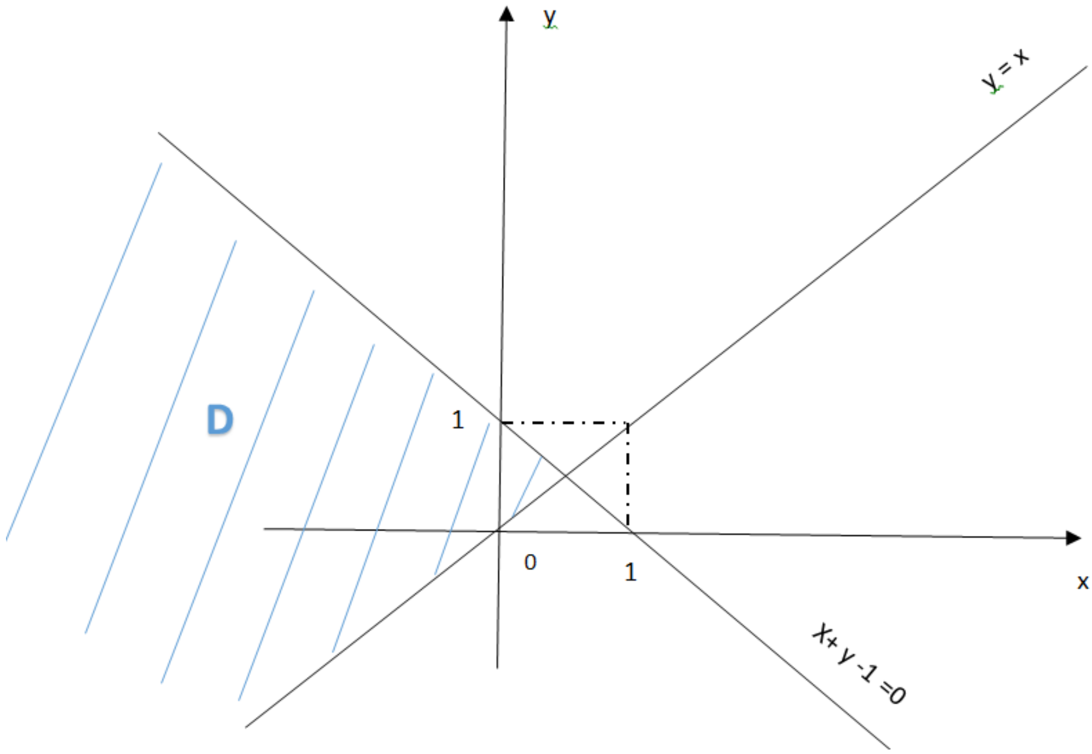
$(x,y) \rightarrow f(x,y) = ax + by.$

$f(x,y) \geq 0 \leftrightarrow ax + by > 0$ (demi plan de frontière d'équation : $ax+by = 0$)

resp. $f(x, y) < 0 \leftrightarrow ax+by < 0$ (demi plan de frontière d'équation : $ax+by = 0$)

Exemple : Représentation graphique du convexe D.

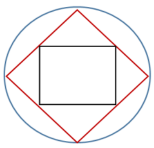
D = {(x, y) ∈R², x - y <0 ; x + y -1 <0}



Définition : Partie convexe et bornée

Une partie convexe *D* de R^n est **bornée** si et seulement s'il existe une boule de *Rn* telle que *D* est inclus dans *B*.

illustration :



B. Polyèdre

Définitions

On appelle **polyèdre (P)** de R^n tout volume de R^n dont les faces sont incluses dans des plans.

On appelle **arête de (P)** l'intersection de 2 faces de (P).

On appelle **sommet de (P)** l'intersection d'au moins 2 arêtes.

Lorsque le *polyèdre est non dégénéré*, il possède un nombre fini de sommets.

N.B : tout sommet d'un polyèdre s'appelle aussi *point « extrémal »*.

Exemple

dans R^3 , le cube, le parallélépipède, le tétraèdre (la pyramide) sont des polyèdres.

(P) étant un polyèdre de R^n, s'il est convexe, on dit que (P) est un *polyèdre convexe*.

C. Optimisation d'un fonctionnelle sur un polyèdre borné ou un convexe borné

Fonctionnelle

Soit E un espace vectoriel réel. On dit qu'une application $F : E \rightarrow R$ est une **fonctionnelle** si et seulement si **F est linéaire**.

Maximum d'une fonctionnnelle

Soit F une fonctionnelle définie sur un convexe borné D de R^n.

Lorsque F admet un **maximum** en un point x_0 de D, ce point x_0 est toujours un sommet de D.

Autrement dit *F atteint son maximum en un point extrémal de D.*

Pour déterminer ce point x_0 , il suffit de construire un algorithme exploratoire.

Tout algorithme exploratoire contient les étapes suivantes :

1. Initialisation de l'algorithme
2. Transition d'un sommet à l'autre
3. En tout sommet, tester s'il rend F maximum
4. Détecter les situations de dégénérescence

Nous reviendrons dans le chapitre suivant sur ce algorithme pour la résolution graphique qu'un programme linéaire !

Exercice III

Une entreprise fabrique deux types de four F1 et F2 a partir de trois facteurs de production :

M : heures machine ; O : heures ouvrier ; T : heures technicien.

Les combinaisons de facteurs de production pour chaque type de four, le prix de vente V chaque four, le coût unitaire C en francs de chaque facteur de production et les capacités hebdomadaires K de chaque atelier sont données dans le tableau suivant :

	M	O	T	V
F1	5	7	4	2010
F2	3	8	6	2400
C	20	30	50	
K	270	800	360	

En désignant par x_1 (resp. x_2) le nombre de fours de type 1 (resp. type 2), déterminer combiem de fours de chaque type l'entreprise doit fabriquer chaque semaine pour maximiser sa marge Z sur le coût de production.

(A ce stade on vous demande de modéliser le problème)

Ressources annexes