LA MÉTHODE DU SIMPLEXE

Coeff. dans Z		1000	1200	0	0	0	0	
Base		X_1	X_2	E_1	E_2	E_3	E_4	b_i
Coef. Z	Var.base							
0	E_1	10	5	1	0	0	0	200
0	E_2	2	3	0	1	0	0	60
0	E_3	1	0	0	0	1	0	34
0	E_4	0	1	0	0	0	1	14
z_j		0	0	0	0	0	0	0
$C_j - z_j$		1000	1200	0	0	0	0	

1.0

Dr EULOGE KOUAME ©UVCI

UNIVERSITE VIRTUELLE DE CÔTE D'IVOIRE

avril 2018

Table des matières

Objectifs

A la fin de ce cours vous serez capables de :

- **Écrire** un programme linéaire sous sa forme standard ;
- **Résoudre** un programme linéaire par la méthode du simplexe.

Introduction

On a présenté dans le chapitre précédent une procédure graphique pour résoudre un programme linéaire à deux variables. Par contre, dans la plupart des problèmes réels, on a plus que deux variables à déterminer. Une *procédure algébrique* pour résoudre les programmes linéaires avec plus que deux variables fera l'objet de ce chapitre. C'est **la méthode du simplexe**.

I

Forme Standard d'un programme linéaire

A. Définition

Pour résoudre un programme linéaire (PL) par la méthode du simplexe, il faut mette le (PL)sous sa **forme standard** (FS)

Dans un (PL) sous sa **forme canonique**, les contraintes sont toutes des inéquation du type "≤"

La mise sous forme standard consiste à introduire des variables supplémentaires (une pour chaque contrainte) de manière à *réécrire les inégalités (* **≤***) sous la forme d'égalités (***=***)*. Chacune de ces variables représente le nombre de ressources non utilisés. On les appelle **variables d'écart**.

Forme standard

On peut rajouter des **variables d'écart** :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \;\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + e_i = b_i, \, e_i \geq 0$$

PL standard :

$$\begin{array}{lrcl} \max & z(x) & = & c.x \\ \text{s.c} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

On travaille dans un espace de dimension plus grande, mais toutes les contraintes sont des égalités.

Donc les manipulations algébriques plus aisées.

Remarque

a. Contraintes de type (≤) : Pour chaque contrainte *i* de ce type, on rajoute une *variable d'écart* e_i, tel que e_i est une variable positive ou nulle.

Exemple : $3x_1 + 2x_2 \leq 2$ se transforme en $3x_1 + 2x_2 + e_1 = 2$, $e_1 \geq 0$

b. Contraintes de type (≥) : Pour chaque contrainte *i* de ce type, on retranche une *variable d'excédent* e_i, tel que e_i est une variable positive ou nulle.

Exemple : $3x_1 + 2x_2 \leq 2$ se transforme en $3x_1 + 2x_2 - e_2 = 2$, $e_2 \geq 0$

Exemple

Passage à la forme standard

$$\begin{aligned} \max z &= 4x + 5y \\ \text{s.c.} \quad & 2x + y \leq 8 \\ & x + 2y \leq 7 \\ & y \leq 3 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z &= 4x + 5y \\ \text{s.c.} \quad & 2x + y + e_1 = 8 \\ & x + 2y + e_2 = 7 \\ & y + e_3 = 3 \\ & x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Variables de base et variables hors base

Le passage à la forme standard augmente le nombre de variables dans le programme linéaire.

Considérons un système d'équations à n variables et m équations où ($n \geq m$). Une solution de base pour ce système est obtenue de la manière suivante :

a) On pose $n - m$ variables égales à 0. Ces variables sont appelées **variables hors base**.

b) On résout le système pour les m variables restantes. Ces variables sont appelées les **variables de base**.

c) Le vecteur de variables obtenu est appelé **solution de base** (il contient les variables de base et les variables hors base)

Une solution de base est **admissible** si toutes les variables de la solution de base sont ≥ 0.

Exemple : variable de base

Considérons le PL suivant passant de sa forme canonique à sa forme standard.

(PL)

Ex : $Max\ Z = 1000\, x_1 + 1200\, x_2$

$$\begin{aligned} s.c.\ 10\, x_1 + 5x_2 &\leq 200 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 60 \\ x_1 &\leq 34 \\ x_2 &\leq 14 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(PL)

Ex : $Max\ Z = 1000\, x_1 + 1200\, x_2$

$$\begin{aligned} s.c.\ 10\, x_1 + 5x_2 + e_1 &= 200 \\ 2x_1 + 3x_2 + e_2 &= 60 \\ x_1 + e_3 &= 34 \\ x_2 + e_4 &= 14 \\ x_1, x_2, e\_1, e\_2, e\_3, e\_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

On a $n = 6$ et $m = 4$;

n - m = (6 - 4) = 2 variables = 0

Variables hors base : si $x_1 = x_2 = 0$ alors les variables de base sont : $e_1 = 200$; $e_1 =$; $e_3 = 34$; $e_4 = 14$.

Une ***solution admissible ou réalisable de base*** est donc : *y =(0, 0, 200, 34, 14)*.

Solutions admissibles

Toute solution de base pour laquelle **toutes les variables sont non négatives**, est appelée solution de base admissible. Cette solution de base admissible correspond à un point extrême.

Solution de base *dégénérée* : certaines variables de base sont nulles

Algorithme du simplexe

II

A. Principe

L'algorithme du simplexe (G. B. Dantzig 1947) est un algorithme itératif permettant de résoudre un problème de programmation linéaire.

C'est une procédure algébrique qui sera en mesure de choisir parmi les solutions réalisables ceux qui maximisent la fonction objectif.

Pour la méthode de simplexe une solution réalisable de base initiale est demandée. Une telle solution peut être retrouvée en annulant toutes les variables de décision.

A partir de ce point la méthode de simplexe va générer successivement des solutions réalisables de base pour notre système d'équations en s'assurant que la valeur de la fonction objectif est en train d'augmenter jusqu'à localiser la solution optimale du problème qui est un point extrême de l'espace des solutions réalisables donc une solution réalisable de base.

Ainsi, on peut décrire la méthode de simplexe comme étant une procédure itérative qui passe d'une solution réalisable de base à une autre jusqu'à atteindre la solution optimale.

La description mathématique de ce processus fera l'objet de la section suivante.

B. La méthode des tableaux

C'est une mise en œuvre manuelle de l'algorithme du simplexe.

Nous les différentes étapes à travers un exemple tire du cours de (Bernard Auge - Alexandre Vernhet)

étape 1: écrire le programme sous forme standard

Les variables d’écart introduites au cours de cette transformation représentent les contraintes techniques et commerciales disponibles qu'il convient de saturer.

Forme canonique

$$\begin{cases} 3x+2y \leq 1800 \\ x \leq 400 \\ y \leq 600 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ MaxB = 30x+50y \end{cases}$$

Forme standard

e_1, e_2, e_3 représentant les variables d'écart

$$\begin{array}{lllll} 3x+2y+e_1 & & & = 1800 \\ x & +e_2 & & = 400 \\ y & & +e_3 & = 600 \\ 30x+50y & & & \end{array}$$

étape 2 : Construire le premier tableau du simplexe correspond à la (FS)

Disposer les éléments conformément au tableau ci-dessous.

Coefficient E_{ij} (Zone verte)

Variables d'écart

Valeur en base (encadré bleu)

Valeur solutions (encadré orange)

	x	y	e_1	e_2	e_3	
e_1	3	2	1	0	0	1800
e_2	1	0	0	1	0	400
e_3	0	1	0	0	1	600
MAX	30	50	0	0	0	0

Fonction économique (zone jaune)

étape 3 : Choisir les variables à introduire dans la base

Pour cela on choisit le coefficient le plus élevé de la fonction économique.

Le coefficient le plus élevé de la fonction économique *MAX* est *50*. Ainsi, il s'agit de la variable *y* qui rentre dans la base.

	x	y	e_1	e_2	e_3	
e_1	3	2	1	0	0	1800
e_2	1	0	0	1	0	400
e_3	0	1	0	0	1	600
MAX	30	50	0	0	0	0

Fonction économique ⇨

étape 4 : Choisir les variables à enlever de la base

On fait le *rapport : second membres/coefficient de la variable choisie*. Et on *retient le plus faible*.

Le second membre (encadre en vert), on retient la valeur la plus faible (en orange) du rapport du second membre en vert/coefficient de la variable choisie.

Ainsi la variable e_3 est la variable à enlever de la base.

La variable y prendra la place de la variable e_3 dans la base.

	x	y	e_1	e_2	e_3	$2^{ème}$ membre	
e_1	3	2	1	0	0	1800	1800/2 = 900
e_2	1	0	0	1	0	400	400/0 = ∞
e_3	0	1	0	0	1	600	600/1 = 600
MAX	30	50	0	0	0	0	

étape 5 :Choix du pivot

Le pivot est égal à 1 (encadré). c'est l'intersection entre la colonne de la variable entrante (y) et la ligne de la variable sortante (e_3)

E_{ij} A_{ij}

	x	y	e_1	e_2	e_3	$2^{ème}$ membre
e_1	3	2	1	0	0	1800
e_2	1	0	0	1	0	400
y	0	1	0	0	1	600
MAX	30	50	0	0	0	0

ligne du pivot

ligne du pivot

pivot

étape 6 : Multiplier la ligne du pivot parle rapport : 1/valeur du pivot (ou diviser la ligne du pivot par la valeur du pivot).

E'ij

	x	y	e_1	e_2	e_3	$2^{ème}$ membre
e_1						
e_2						
y	0	1	0	0	1	600
MAX						

1/pivot

étape 7 : Calculer les valeurs des autres lignes

$E'_{ij} = E_{ij} - [(A_{ij}$ / Pivot) x Ligne du Pivot]. *C'est la règle du rectangle.*
Cette opération consiste à transformer les E_{ij} des autres lignes en E'_{ij} .

$1^{ère}$ ligne

3 = 3 – [(2/1) x 0]
0 = 2 – [(2/1) x 1]
1 = 1 – [(2/1) x 0]
0 = 0 – [(2/1) x 0]
- 2 = 0 – [(2/1) x 1]
600 = 1 800 – [(2/1) x 600]

1 = 1 – [(0/1) x 0]
0 = 0 – [(0/1 x 1]
0 = 0 – [(0/1 x 0]
1 = 1 – [(0/1 x 0]
0 = 0 – [(0/1 x 1]
400 = 400 – [(0/1 x 600]

$2^{ème}$ ligne $4^{ème}$ ligne

30 = 30 – [(50/1) x 0]
0 = 50 – [(50/1) x 1]
0 = 0 – [(50/1) x 0]
0 = 0 – [(50/1) x 0]
- 50 = 0 – [(50/1) x 1]
- 30 000 = 0 – [(50/1) x 600]

		x	y	e_1	e_2	e_3	$2^{ème}$ membre
$1^{ère}$ ligne	e_1	3	0	1	0	-2	600
$2^{ème}$ ligne	e_2	1	0	0	1	0	400
ligne du pivot	y	0	1	0	0	1	600
$4^{ème}$ ligne	MAX	30	0	0	0	-50	-30 000

étape 8 : Test d'optimalité

Les coefficients de la fonction économique sont tous nuls ou négatifs ? (si oui on est à l'optimum, si non on effectue un nouveau passage).

Les coefficients de la fonction économique ne sont pas tous nuls ou négatif (30). Donc on effectue un nouveau passage.

Nouveau passage :

- choisir la variable à introduire dans la base.

Le coefficient de la fonction économique (MAX) est *30*. Ainsi la variable *x* (encadré en rouge) entre dans la base.

	x	y	e_1	e_2	e_3	$2^{ème}$ membre
e_1	3	0	1	0	-2	600
e_2	1	0	0	1	0	400
y	0	1	0	0	1	600
MAX	30	0	0	0	-50	-30 000

- choisir la variable à enlever de la base.

En utilisant le principe (étape 4), la variable e_1 est à enlever de la base.

	x	y	e_1	e_2	e_3	$2^{ème}$ membre	
e_1	3	0	1	0	-2	600	600/3 = 200
e_2	1	0	0	1	0	400	400/1 = 400
y	0	1	0	0	1	600	600/0 = ∞
MAX	30	0	0	0	-50	-30 000	

- Le pivot est égal à 3
- Multiplier la ligne du pivot par 1/3
- Calculer les autres valeurs des lignes

On obtient

		x	y	e_1	e_2	e_3	$2^{ème}$ membre
ligne du pivot	x	1	0	1/3	0	-2/3	200
$2^{ème}$ ligne	e_2	0	0	-1/3	1	2/3	200
$3^{ème}$ ligne	y	0	1	0	0	1	600
$4^{ème}$ ligne	MAX	0	0	-10	0	-30	-36 000

Les coefficients de la fonction économique ne sont pas tous nuls ou négatifs, fin de l'algorithme du Simplexe.

La solution qui rend le optimal le programme est le suivant :

- le maximum de la fonction économique est : *36000 euros* (remarquez bien qu'a n'a pas mis le signe négatif !)

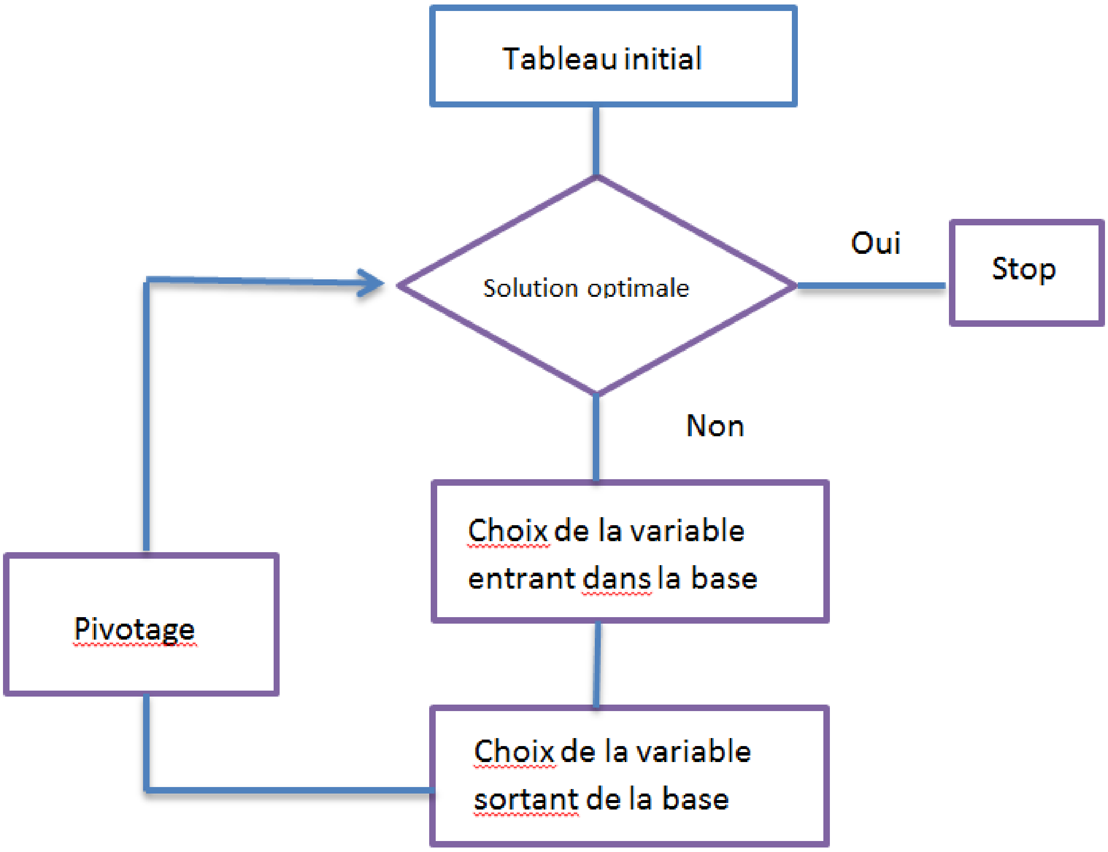
- les quantités produites correspondantes sont $x = 200$ et $y = 600$.

- la variable d'écart e_2 correspondant à la contrainte de marche *X* n'est pas saturée (est toujours dans la base). On aurait donc pu vendre *200* produit *X* de plus.

- Par contre, les variables e_1 et e_3 sont saturées.

C. Récapitulatif

Schéma de l'algorithme



critères d'optimalité

1. Dans le cas d'un problème de ***Maximisation (Max)*** : lorsque les coefficients de la fonction économique sont ***tous nuls ou négatifs*** on est a l'optimum.
2. Dans le cas d'un problème de ***Minimisation (Min)*** : lorsque les coefficients de la fonction économique sont ***tous nuls ou positifs*** on est a l'optimum.

A l'optimum, les valeurs des variables d'écart représentent les marges entre les valeurs disponibles et les valeur techniquement utiles.

Exercice III

I- On considère le programme suivant : $\begin{cases} \max\ z = 10x_1 + 14x_2 \\ x_1 + x_2 \geqslant 12 \\ x_1 \geqslant 8 \\ x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

Question 1

1. Montrer que $x* = (12, 0)$ est un sommet de la région réalisable.

Question 2

2. Mettre le programme sous forme standard, puis donner la solution de base réalisable $y*$ associée à $x*$.

Soit le programme (P) suivant :

$$\begin{cases} \max\ z = 120x_1 + 108x_2 + 75x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 12 \\ x_1 \leqslant 5 \\ 8x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leqslant 145 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Question 3

[*Solution n°1 p 21*]

Résoudre (P) en utilisant la méthode du simplexe.

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 19)

$x_1 = 5$, $x_2 = 7$, $x_3 = e_1 = e_2 = 0$, $e_3 = 56$, et la valeur maximale de z est 1356.