FORMULATION DU PROGRAMME LINÉAIRE

$$\max_{(x_1,\cdots,x_n)} \left[F(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + \cdots c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \right].$$

$$\begin{cases} \text{contraintes inégalités :} & \forall i \in I_1,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\ \text{contraintes égalités :} & \forall i \in I_2,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \\ \text{contraintes de signes :} & \forall j \in J_1,\ x_j \geq 0 \\ & \forall j \in J_2,\ x_j \text{ de signe quelconque.} \end{cases}$$

1.0

Dr EULOGE KOUAME ©UVCI

UNIVERSITE VIRTUELLE DE CÔTE D'IVOIRE

avril 2018

Table des matières

Objectifs

A la fin de ce cours vous serez capables de :

- **Formuler** un programme linéaire ;
- **Résoudre** un programme linéaire par la méthode graphique

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un type particulier de programmation mathématique appelé **programme linéaire**.

Nous verrons comment formuler un programme linaire a partir un problème réel et comment le résoudre par la méthode graphique.

Structure d'un programme lineaire

I

A. Définition

Définition

Un **programme linéaire** est un programme mathématique dans lequel la ***fonction objectif* est linéaire** et les ***contraintes* sont des équations et/ou inéquations linéaires.**

Un programme linéaire avec n variables et $x_1, \ldots, x_n$ et m contraintes peut s'écrire de la forme :

$$\begin{array}{rl} \max & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, (j = 1, \ldots, m) \\ & x_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \ldots, n) \end{array}$$

Ce qui donne sous forme matricielle : $\begin{cases} Max\ F;\ \ F = C.X \\ \quad AX\ \leq B \end{cases}$

F : fonction d'objectif ou fonction économique

C =(c_j) : vecteur des couts (unitaires)

X = (x_i) : vecteur des variables structurelles

A = (a_{ij}) : matrice des coefficients techniques

B = (b_j) : vecteur des contraintes

- **Linéarité :** Objectif et contraintes sont des fonctions linéaires des variables de décision (les coefficients c_i et a_{ij} des variables sont constants)
- **Continuité :** Les variables peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle

respectant les contraintes linaires

B. Les conditions et les étapes de formulation d'un PL

Les conditions de formulation d'un PL

La programmation linéaire comme étant un modèle admet des hypothèses (des conditions) que le décideur doit valider avant de pouvoir les utiliser pour modéliser son problème. Ces hypothèses sont :

1. Les variables de décision du problème sont positives

2. Le critère de sélection de la meilleure décision est décrit par une fonction linéaire de ces variables, c'est à dire, que la fonction ne peut pas contenir par exemple un produit croisé de deux de ces variables. La fonction qui représente le critère de sélection est dite fonction objectif (ou fonction économique).

3. Les restrictions relatives aux variables de décision (exemple: limitations des ressources) peuvent être exprimées par un ensemble d'équations linéaires. Ces équations forment l'ensemble des contraintes.

4. Les paramètres du problème en dehors des variables de décisions ont une valeur connue avec certitude

Les étapes de formulation d'un PL

Généralement il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire :

1. Identifier les variables du problème à valeur non connues (variable de décision) et les représenter sous forme symbolique (exp. x_1, y_1).

2. Identifier les restrictions (les contraintes) du problème et les exprimer par un système d'équations linéaires.

3. Identifier l'objectif ou le critère de sélection et le représenter sous une forme linéaire en fonction des variables de décision. Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

C. Exemples de formulations

Problème d'agriculture

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments. Il dispose de 480 heures de main d'œuvre et de 440 m3 d'eau. Un hectare de tomates demande 1 heure de main d'œuvre, 4 m3 d'eau et donne un bénéfice net de 100 dollars. Un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre, 2 m3 d'eau et donne un bénéfice net de 200 dollars.

Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates. Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

Formulation du problème en un PL :

Étape 1 : Identification des variables de décision. Les deux activités que l'agriculteur doit déterminer sont les surfaces à allouer pour la culture de tomates et de piments :

- x_1 : la surface allouée à la culture des tomates
- x_2 : la surface allouée à la culture des piments

On vérifie bien que les variables de décision x_1 et x_2 sont positives : $x_1 \geq 0$ *et* $x_2 \geq 0$.

Étape 2 : Identification des contraintes. Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité des facteurs de production :

• Terrain : l'agriculteur dispose de 150 hectares de terrain, ainsi la contrainte liée à la limitation de la surface de terrain est: $x_1 + x_2 \leq 150$.

• Eau : la culture d'un hectare de tomates demande 4 m3 d'eau et celle d'un hectare de piments demande 2m3 mais l'agriculteur ne dispose que de 440m3. La contrainte qui exprime les limitations des ressources en eau est . $4x_1 + 2x_2 \leq 440$.

• Main d'œuvre : Les 480 heures de main d'œuvre seront départager (pas nécessairement en totalité) ente la culture des tomates et celles des piments. Sachant qu'un hectare de tomates demande une heure de main d'œuvre et un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre alors la contrainte représentant les limitations des ressources humaines est $x_1 + 4x_2 \leq 480$.

• Les limitations du bureau du périmètre irrigué : Ces limitations exigent que l'agriculteur ne cultive pas plus de 90 hectares de tomates. La contrainte qui représente cette restriction est $x_1 \leq 90$.

Etape 3 : Identification de la fonction objectif. La fonction objectif consiste à maximiser le profit apporté par la culture de tomates et de piments. Les contributions respectives 100 et 200, des deux variables de décision x1 et x2 sont proportionnelles à leur valeur. La fonction objectif est donc $F = 100x_1 + 200x_2$

Le programme linéaire qui modélise le problème d'agriculture est :

$$
\begin{array}{ll}
Max & 100\,x_1 + 200\,x_2 \\
s.c. & x_1 + x_2 \leq 150 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 440 \\
 & x_1 + 4x_2 \leq 480 \\
 & x_1 \leq 90 \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{array}
$$

problème de production

Pour fabriquer deux produits P1 et P2 on doit effectuer des opérations sur trois machines M1, M2 et M3, successivement mais dans un ordre quelconque. Les temps unitaires d'exécution sont donnés par le tableau suivant :

	M1	M2	M3
P1	11 mn	7 mn	6 mn
P2	9 mn	12 mn	16 mn

On supposera que les machines n'ont pas de temps d'inactivité. La disponibilité pour chaque machine sont :

• 165 heures (9900 minutes) pour la machine M1 ;

• 140 heures (8400 minutes) pour la machine M2 ;

• 160 heures (9600 minutes) pour la machine M3 .

Le produit P1 donne un profit unitaire de 900 dollars et le produit P2 un profit unitaire de 1000 dollars.

Dans ces conditions, combien doit-on fabriquer mensuellement de produits P1 et P2 pour avoir un profit total maximum ?

Formulation en un PL :

Les variables de décisions sont :

- x_1 : le nombre d'unités du produit P1 à fabriquer
- x_2 : le nombre d'unités du produit P2 à fabriquer

Les contraintes outre les contraintes de non-négativité sont :

- $11x_1 + 9x_2 \leq 9900$ pour la machine M1
- $7x_1 + 12x_2 \leq 8400$ pour la machine M2
- $6x_1 + 16x_2 \leq 9600$ pour la machine M3

Le profit à maximiser est : $z = 900x_1 + 1000x_2$.

Le programme linéaire résultant est :

$$\begin{array}{ll} Max & 900x_1 + 1000x_2 \\ s.c. & 11x_1 + 9x_2 \leq 9900 \\ & 7x_1 + 12x_2 \leq 8400 \\ & 6x_1 + 16x_2 \leq 9600 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Problème d'alimentation

On se propose de réaliser une alimentation économique pour des bestiaux, qui contient obligatoirement 4 sortes de composants nutritifs, A, B, C et D.

L'industrie alimentaire produit précisément deux aliments M et N qui contiennent ces composants : 1 Kg d'aliment M contient 100 g de A, 100 g de C, 200 g de D ; 1 Kg d'aliment N contient 100 g de B, 200 g de C, 100 g de D.

Un animal doit consommer par jour au moins : 0.4 Kg de A ; 0.6 Kg de B ; 2 Kg de C ; 1.7 Kg de D.

L'aliment M coûte 10 francs le Kg et N coûte 4 francs le Kg.

Quelles quantités d'aliments M et N doit-on utiliser par jour et par animal pour réaliser l'alimentation la moins coûteuse ?

Formulation en un PL :

On peut résumer toutes les données du problème dans le tableau suivant

Ce genre de tableau peut aider à mieux analyser le problème et ainsi formuler le programme linéaire correspondant.

Les variables de décision sont

	M	N	Quantités Prescrites
A	0.1	0	0.4
B	0	0.1	0.6
C	0.1	0.2	2
D	0.2	0.1	1.7
Coût	10	4	

- x_M : la quantité d'aliments M à utiliser pour l'alimentation des deux bestiaux
- x_N : la quantité d'aliments N à utiliser pour l'alimentation des deux bestiaux

Les contraintes de non-négativité sont $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.
Le choix de cette quantité est contraint à la présence dans l'alimentation du composant

- A : $0.1x_1 \geq 0.4 \quad \Rightarrow \quad x_1 \geq 4$
- B : $0.1x_2 \geq 0.6 \quad \Rightarrow \quad x_2 \geq 6$
- C : $0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2x_2 \geq 20$
- D : $0.2x_1 + 0.1x_2 \geq 1.7 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + x_2 \geq 17$

La fonction objectif est une fonction coût : $z = 10x_1 + 4x_2$
Le programme linéaire est un programme de minimisation :

$$
\begin{array}{ll}
Min & 10x_1 + 4x_2 \\
s.c. & x_1 \geq 4 \\
 & x_2 \geq 6 \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 20 \\
 & 2x_1 + x_2 \geq 17 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Résolution graphique

II

A. Méthode

Pour des problèmes avec deux variables, on peut résoudre graphiquement. Nous allons l'illustrer à travers un exemple

Exemple d'un problème de production.

Une usine fabrique 2 produits P1 et P2 nécessitant des ressources d'équipement, de main d'œuvre et de matières premières disponibles en quantité limitée.

	P1	P2	disponibilité
équipement	3	9	81
main d'œuvre	4	5	55
matière première	2	1	20

P1 et P2 rapportent à la vente 6 euros et 4 euros par unité.

Quelles quantités (non entières) de produits P1 et P2 doit produire l'usine pour maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits ?

Variables : x_1 et x_2 sont les quantités des produits P1 et P2 fabriqués.

Le problème de production se modélise sous la forme d'un programme linéaire :

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2\right]$$

sous les contraintes:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Détermination du maximum de F

Les contraintes ou apparaissent des inégalités correspondent géométriquement à des **demi-plans**.

Intersection de ces demi-plans = ensemble des variables satisfaisant à toutes les contraintes.

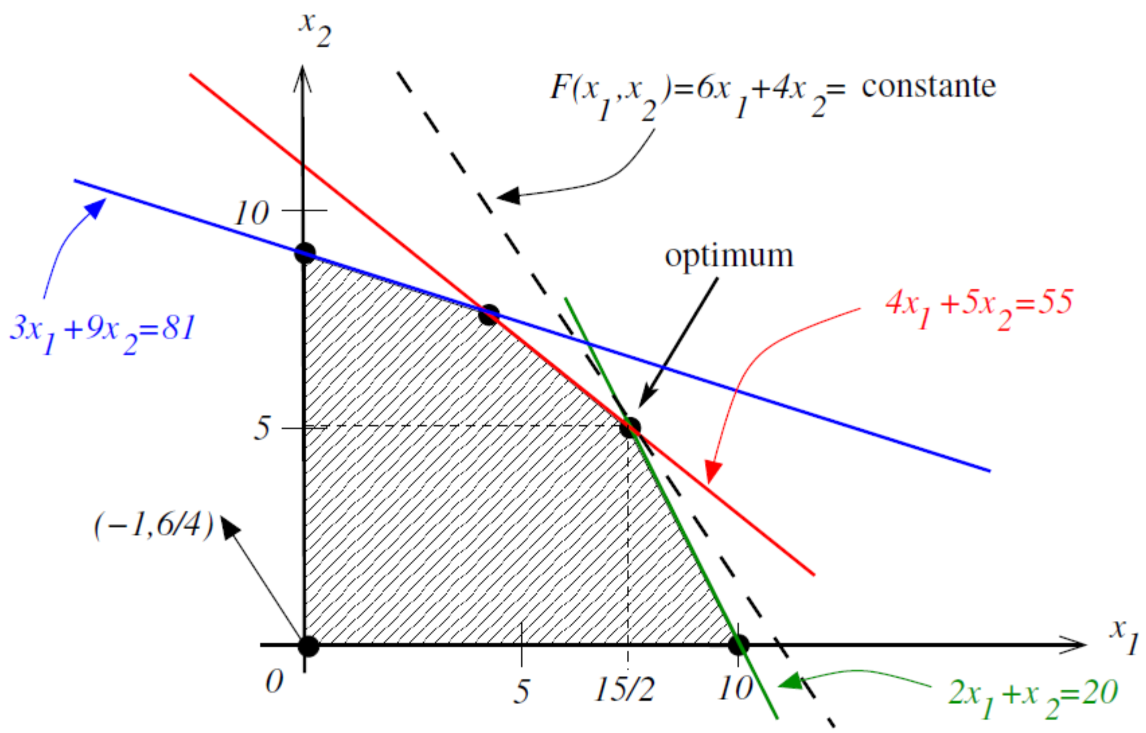
L'ensemble des contraintes est un **polygone convexe**.

Fonction objectif $F(x_1; x_2) = 6x_1 + 4x_2$) droite de coefficient directeur *(-1; 6/4)*.

Pour déterminer *max F*, on fait "glisser" la droite (translation parallèle à la direction de la droite) du haut vers le bas jusqu'à rencontrer l'ensemble

des variables satisfaisant les contraintes) → solution optimale $(x_1; x_2) = (15/2; 5)$ avec $max(F) = 65$.

Le maximum de *F* est atteint en un **sommet** du **polygone convexe** des contraintes.



B. Exemples de solution graphique

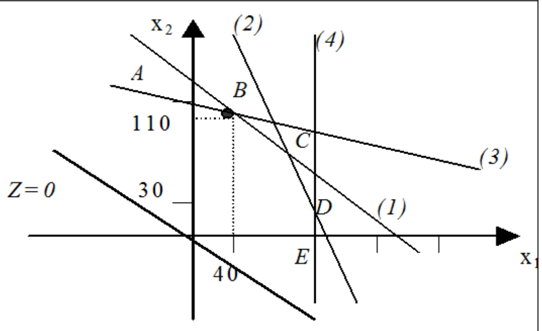
Dans cette section on donne quelques exemples de résolution graphique de problèmes linéaires relatifs au différents cas possibles :

Problème de maximisation

<table>
<tr><td colspan="2">Problème de maximisation</td></tr>
<tr><td>

$$\begin{array}{lll} Max & 100x_1 + 200x_2 & \\ s.c. & x_1 + x_2 \leq 150 & (1) \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 440 & (2) \\ & x_1 + 4x_2 \leq 480 & (3) \\ & x_1 \leq 90 & (4) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

</td><td>



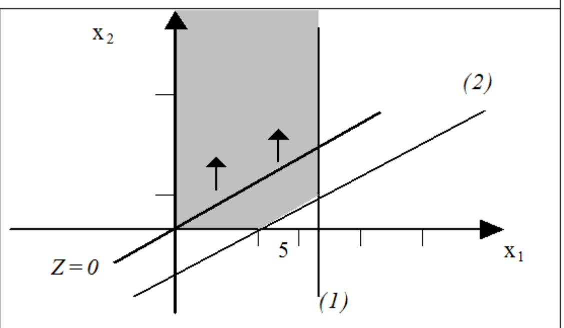
</td></tr>
<tr><td colspan="2">la solution optimale est B(40,110)</td></tr>
</table>

Problème avec solution non bornée

<table>
<tr><td colspan="2">Problème avec solution non bornée</td></tr>
<tr><td>

$$\begin{array}{lll} Max & -2x_1 + 3x_2 & \\ s.c. & x_1 \leq 5 & (1) \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 6 & (2) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

</td><td>



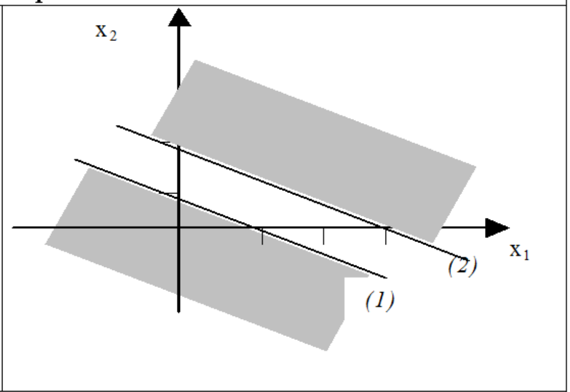
</td></tr>
<tr><td colspan="2">On peut augmenter la valeur de la fonction objectif dans la direction des flèches indéfiniment donc la solution est non bornée</td></tr>
</table>

Problème impossible

<table>
<tr><td colspan="2">Problème impossible</td></tr>
<tr><td>

$$\begin{array}{lll} Min & 3x_1 + 2x_2 & \\ s.c. & x_1 + 2x_2 \leq 2 & (1) \\ & 2x_1 + 4x_2 \geq 8 & (2) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

</td><td>



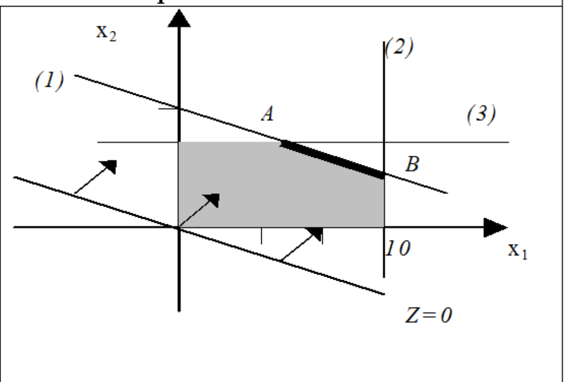
</td></tr>
<tr><td colspan="2">L'espace des solutions réalisables est vide, il est l'intersection des deux zones grises de la figure ci-dessus</td></tr>
</table>

Problème a solutions multiples

<table>
<tr><td colspan="2">Problème à solutions multiples</td></tr>
<tr><td>

$$\begin{array}{lll} Max & x_1 + 3x_2 & \\ s.c. & 2x_1 + 6x_2 \leq 30 & (1) \\ & x_1 \leq 10 & (2) \\ & x_2 \leq 4 & (3) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

</td><td>



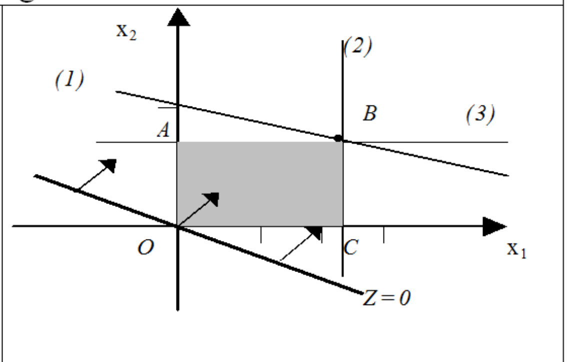
</td></tr>
<tr><td colspan="2">L'ensemble des points décrit par le segment [AB] représente les solutions optimales du problème linéaire</td></tr>
</table>

Problème de dégénérescence

<table>
<tr><th colspan="2">Problème de dégénerescence</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{array}{lll} Max & x_1 + x_2 & \\ s.c. & 3x_1 + 2x_2 \leq 40 & (1) \\ & x_1 \leq 10 & (2) \\ & x_2 \leq 5 & (3) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

</td><td>



</td></tr>
<tr><td colspan="2">La solution optimale B(10,5) est dite dégénérée si trois contraintes concourent en ce point.</td></tr>
</table>

* *
*

Lorsque le nombre de variables structurelles est égale ou supérieure à *3*, la représentation graphique du domaine des contraintes devient difficile dans *R3*.

Cela montre la limite de la méthode graphique. Nous utiliserons donc une autre méthode appropriée : **le Simplexe**

Exercice III

Problème de production

Un fabricant produit 2 types de yaourts à la fraise A et B à partir de Fraise, de Lait et de Sucre.

Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières.

	A	B
Fraise	2	1
Lait	1	2
Sucre	0	1

On dispose de 800 Kg de Fraises, 700 Kg de Lait et 300 Kg de sucre.

La vente de 1 Kg de yaourts A et B rapporte respectivement 4 euros et 5euros.

Le fabricant cherche à maximiser son profit.

Question

Résoudre le problème linéaire par la méthode graphique