DUALITÉ

Primal	Dual
max $\quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	min $\quad \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
contr : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$	contr : $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$
$x_j \geq 0$	$y_i \geq 0$

pour tout $i = 1, \ldots, m$ et tout $j = 1, \ldots, n$.

1.0

Dr EULOGE KOUAME ©UVCI

UNIVERSITE VIRTUELLE DE CÔTE D'IVOIRE

avril 2018

Table des matières

Objectifs

A la fin de ce cours vous serez capables de :

- **Écrire** un programme linéaire sous sa forme duale;
- **Résoudre** un programme linéaire dual.

Forme duale d'un programme linéaire

I

A. Motivation

La dualité associe à tout problème linéaire un autre problème linéaire qui est appelé **problème dual** du problème initial ; par opposition le problème initial est appelé **problème primal**.

La notion de dualité en P.L. est très intéressante puisqu'elle permet de montrer qu'un problème d'**allocation optimale des ressources rares** est aussi un problème de **tarification optimale de ces ressources.**

illustration

Un *pharmacien* doit préparer une poudre vitaminée contenant au moins 25 mg de vitamine A, 60 mg de vitamine B et 15 mg de vitamine C. Il s'approvisionne auprès un laboratoire qui vend deux types de poudre vitaminée en sachet :

- une poudre X de 20 mg de A, 30 mg de B et 5 mg de C, au prix de 60 francs ;

- une poudre Y de 5 mg de A, 20 mg de B et 10 mg de C, au prix de 90 francs ;

Combien doit-il se procurer de poudre X et de poudre Y pour assurer, au coût minimum, sa nouvelle poudre ?

Le problème du *pharmacien* se formule :

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \text{Min } z = 60x_1 + 90x_2 \\ 20x_1 + 5x_2 \geqslant 25 \\ 30x_1 + 20x_2 \geqslant 60 \\ 5x_1 + 10x_2 \geqslant 15 \\ x_1 \ , \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

où x_1 et x_2 les nombres de poudres de types *X* et *Y* qu'il doit mélanger.

Le *laboratoire* décide de vendre séparément les vitamines A, B et C en sachet de 25, 60 et 15 unités. Combien doit-il vendre l'unité de chaque vitamine pour être compétitif avec le pharmacien ?

Soient u_1, u_2 et u_3 les prix unitaires respectifs de A, B et C. Le labo cherche donc à maximiser son chiffre d'affaire :

$w = 25u_1 + 60u_2 + 15u_3$

Le labo doit fixer les prix offerts pour les vitamines de façon à ce que :

- un mélange équivalent à X ne coûte pas plus cher que X ;
- un mélange équivalent à Y ne coûte pas plus cher que Y.

Ce qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} 20u_1 + 30u_2 + 5u_3 &\leqslant 60 \\ 5u_1 + 20u_2 + 10u_3 &\leqslant 90 \end{aligned}$$

Et il est raisonnable de penser que : $u_1, u_2, u_3 \geq 0$.

Finalement, pour déterminer les prix unitaires maximaux qu'il ne doit pas dépasser pour rester compétitif, le labo devrait résoudre le programme linéaire suivant :

$$(\mathrm{D}) \quad \begin{cases} \text{Max } w = 20u_1 + 60u_2 + 15u_3 \\ 20u_1 + 30u_2 + 5u_3 \leqslant 60 \\ 5u_1 + 20u_2 + 10u_3 \leqslant 90 \\ u_1 \ , \ u_2 \ , \ u_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

On constate dans ce exemple que le problème de minimisation de coût (primal) pour le pharmacien est un problème de maximisation de revenu (dual) pour le Labo.

B. Passage du Primal au Dual

Rappel : transposée d'une matrice

On utilisera l'outil d'algèbre linéaire qui est la transposée d'une matrice : c'est l'opération qui consiste à interchanger les lignes et les colonnes d'une matrice.

Ex : soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 8 & 0 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

La transposée de *A* notée *At* est :

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -1 & 8 & 7 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Application pour le passage du primal au dual

Construisons le Dual du problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & w = 8y_1 + 16y_2 \\ & y_1 + 5y_2 \geq 9 \\ S/C & 2y_1 + 2y_2 \geq 10 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{array}$$

1. On écrit la matrice augmentée des systèmes d'inégalité et on inclut les coefficients de la fonction d'objectif comme dernière ligne de la matrice :

$$\begin{array}{rc} & \textit{Contraintes} \\ & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 10 \\ \hline 8 & 16 & 0 \end{array}\right]. \\ \textit{fonction d'objectif} & \end{array}$$

2. On transpose la matrice précédente

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 5 & 2 & 16 \\ \hline 9 & 10 & 0 \end{array}\right].$$

Dans cette dernière matrice, on considère les 2 premières lignes comme les contraintes et la dernière ligne comme la fonction d'objectif.

On obtient ainsi le *problème dual de maximisation* suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 9x_1 + 10x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ \text{s/c} & 5x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Principe général

Tout modèle de programmation linéaire possède un dual.

Soit le problème primal

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \max \ cx \\ \quad \mathbf{A}x \leqslant b \\ \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Le problème dual correspondant est

$$(\mathrm{D}) \quad \begin{cases} \min \ ub \\ \quad \mathbf{A}^t u \geqslant c \\ \quad u \geqslant 0 \end{cases}$$

Pour passer du primal au dual, on remarque que :

a) Les termes du second membre deviennent les coefficients de la fonction objectif et réciproquement.

b) Le problème de maximisation devient un problème de minimisation et réciproquement.

c) Les inégalités "≤" deviennent des inégalités "≥".

d) La matrice *A* se transforme en sa transposée

Tableau de correspondance primal-dual

Le tableau suivant donne un ensemble de règles formelles permettant de passer d'un problème de P.L. général à sa forme duale.

Max	Min
- Matrice des contraintes *(m, n)* - Second membre des contraintes - Coefficient de la fonction objectif	- Transposée de la matrice des contraintes *(n, m)* - Coefficient de la fonction objectif - Second membre des contraintes
Nombre de contraintes i ème contrainte de type « $\leq$ » i ème contrainte de type « $\geq$ » i ème contrainte de type « $=$ »	Nombre de variables principales i ème variable de type « ≥ 0 » i ème variable de type « ≤ 0 » i ème variable qcq « $\in IR$ »
Nombre de variables j ème variable « $\geq$ » j ème variable « $\leq$ » j ème variable qcq « $\in IR$ »	Nombre de contraintes j ème contrainte de type « $\geq$ » j ème contrainte de type « $\leq$ » i ème contrainte de type « $=$ »

Exemple

Primal	**Dual**
$Max\ \frac{1}{2} x_1 + x_2$ $S.c\quad x_1 + x_2 \leq 3$ $-x_1 + x_2 \leq 1$ $x_1 \leq 2$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	$Min\ \ 3y_1 + y_2 + 2y_3$ $S.c\quad y_1 - y_2 + y_3 \geq \frac{1}{2}$ $y_1 + y_2 \geq 1$ $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$

$Min\ -x_1 + x_2$ $S.c\quad 2x_1 - x_2 \geq 2$ $-x_1 + 2x_2 \geq -2$ $x_1 + x_2 \leq 5$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	$Max\ \ 2y_1 - 2y_2 + 5y_3$ $S.c\quad 2y_1 - y_2 + y_3 \leq -1$ $-y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 1$ $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \leq 0$

$\begin{array}{l} Max\ \ 2x_1 - x_2 \\ S.c\ \ x_1 - x_2 = 3 \\ \quad x_1 \le 4 \\ \quad x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} Min\ \ 3\ y_1 + 4\ y_2 \\ S.c\ \ y_1 + 2\ y_2 \ge 2 \\ \quad - y_1 \ge -1 \\ \quad y_1 \in IR,\ \ y_2 \ge 0 \end{array}$
$\begin{array}{l} Max\ \ 2x_1 - x_2 \\ S.c\ \ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ \quad x_1 + x_2 = 6 \\ \quad x_2 \le 5 \\ \quad x_1 \in IR,\ x_2 \in IR \end{array}$	$\begin{array}{l} Min\ \ - 2y_1 + 6y_2 - 5y_3 \\ S.c\ \ y_1 + y_2 = 2 \\ \quad - 2y_1 + y_2 + y_3 = -1 \\ \quad y_1 \ge 0,\ \ y_2 \in IR,\ \ y_3 \ge 0 \end{array}$

C. Écrire le dual des problèmes suivants :

Question 1

[Solution n°1 p 21]

P1

$$\begin{array}{ll} Max & z = 100x_1 + 200x_2 \\ S.C & x_1 + x_2 \le 150 \\ & 4x_1 + 2x_2 \le 440 \\ & x_1 + 4x_2 \le 480 \\ & x_1 \le 90 \\ & x_1 \ge 0\ \ ,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

Question 2

[Solution n°2 p 21]

P2

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \leqslant 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \\ & 2x_1 - x_2 \leqslant 12 \\ & x_1 \ , \ x_2 \geqq 0 \end{cases}$$

Question 3

[Solution n°3 p 22]

P3

$$\begin{cases} \max\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + x_2 \geqslant 6 \\ x_1 \geqslant 4 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1 \ , \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Solution un programme linéaire dual

II

A. Propriétés

théorème de la dualite

Si un modèle de programmation linéaire (primal) possède une solution optimale, il en est de même pour son dual, et les **valeurs optimales des deux modèles sont égales.**

illustration du théorème

Considérons le programme de minimisation

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & w = 8y_1 + 16y_2 \\ & y_1 + 5y_2 \geq 9 \\ S/C & 2y_1 + 2y_2 \geq 10 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{array}$$

On a vu que le Dual associé est le problème de maximisation suivant :

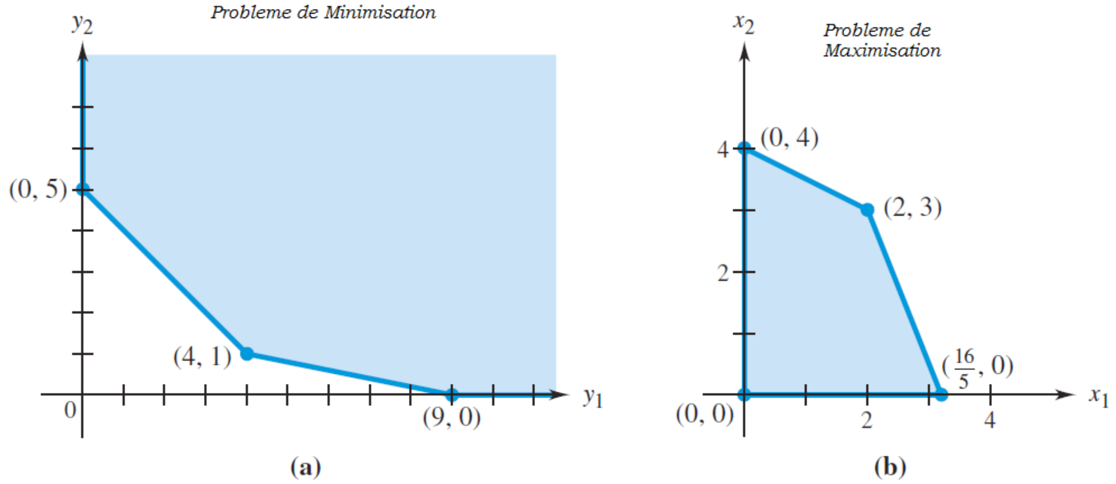
$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 9x_1 + 10x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ S/C & 5x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Si on résout graphiquement à la fois le primal et le dual, on constate que :

Le problème de minimisation $w = 8y_1 + 16y_2$ atteint le minimum au sommet de coordonnées $(4\ ;\ 1)$ avec $w = 28$

De même Le problème de maximisation $z = 9x_1 + 10x_2$ atteint le maximum au sommet de coordonnées $(2\ ;\ 3)$ avec $z = 28$

A l'optimum on a bien $w = z = 28$. Ce qui confirme le théorème.



Remarque : comment résoudre ?

Pour résoudre le dual on utilisera *l'algorithme du simplexe (méthode des tableaux)* vu à la leçon précédente. on prendra les précautions (critères d'optimalité) selon qu'il s'agit d'un problème de minimisation ou de maximisation.

On rappelle que pour la méthode des tableaux, les critères d'optimalité sont :

1. Dans le cas d'un problème de ***Maximisation (Max)*** : lorsque les coefficients de la fonction économique sont ***tous nuls ou négatifs*** on est à l'optimum.
2. Dans le cas d'un problème de ***Minimisation (Min)*** : lorsque les coefficients de la fonction économique sont ***tous nuls ou positifs*** on est à l'optimum.

Reconnaître les solution du primal et dual dans le dernier tableau du simplexe

A partir du dernier tableau du simplexe c'est à dire à l'optimum on peur retrouver les solutions d'un primal ou réciproquement d'un dual.

Reprenons l'exemple de la leçon précédente : on donne le primal suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 1800 \\ x \leq 400 \\ y \leq 600 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ MaxB = 30x + 50y \end{cases}$$

On a obtenu le dernier tableau suivant :

		x	y	e_1	e_2	e_3	$2^{ème}$ membre
ligne du pivot	**x**	1	0	1/3	0	-2/3	200
$2^{ème}$ ligne	**e_2**	0	0	-1/3	1	2/3	200
$3^{ème}$ ligne	**y**	0	1	0	0	1	600
$4^{ème}$ ligne	**MAX**	0	0	-10	0	-30	-36 000

Ainsi les solutions optimales sont *x = 200* ; *y = 600* avec *max = 36 000*

Maintenant à partir de ce dernier tableau comment obtenir directement les solutions de la forme Dual de ce problème ?

Ici les 3 variables du Dual (y_1, y_2 et y_3) correspondant seront les valeurs des variables d'écart (e_1, e_2 et e_3).

On regarde dans la 4*ieme* ligne et on fait la correspondance : $y_1 = 10$; $y_2 = 0$ et $y_3 = 30$ avec *min = 36 000*.

Afin de confirmer ce qui précède, écrivez le dual et résolvez le par la méthode des tableaux !

Exercice III

I- On considère le programme suivant :

$$\begin{cases} \min \; -x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \geqslant -2 \\ x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \; , x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Question 1

Écrire le problème dual associé.

II. On donne le le programme linéaire suivant et le dernier tableau du simplexe associé :

$$\begin{cases} \max \; z = 10x_1 + 15x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 80 \\ x_1 + x_2 \leqslant 20 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 30 \\ x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

B	b	x_1	x_2	$e1$	$e2$	$e3$
$e3$	10	0	0	1	-8	3
x_1	10	1	0	0	2	-1
x_2	10	0	1	0	-1	1
z	-250	0	0	0	-5	-5

Question 2

[*Solution n°4 p 22*]

Donner la solution optimale et la valeur de *max z*. Puis donner la solution optimale associé au problème dual.

III. On considère le programme linéaire (P) suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Max } z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} \\ \qquad 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ \qquad x_1 - x_2 \leqslant 1 \\ \qquad x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ \qquad x_1 , x_2 \geqslant 0 \end{array}$$

Question 3

[*Solution n°5 p 22*]

1. Écrire le dual (D) de (P).

2. Vérifier que (2 ; 1) est solution réalisable de (P) et que (0 ; 1/2 ; 5/2) est solution réalisable de (D). Conclusion ?

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 12)

P1

$$\begin{array}{ll} Min & w = 150y_1 + 440y_2 + 480y_3 + 90y_4 \\ S.C & y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 \geq 100 \\ & y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 200 \\ & y_1 \geq 0 \quad , \quad y_2 \geq 0 \end{array}$$

> Solution n°2 (exercice p. 12)

P2

$$\begin{cases} \min \; 14u_1 + 12u_2 + 12u_3 \\ \quad u_1 - 2u_2 + 2u_3 \geqslant 1 \\ \quad u_1 + 3u_2 - u_3 \geqslant 3 \\ \quad u_1 \; , \; u_2 \; , \; u_3 \geqq 0 \end{cases}$$

> Solution n°3 (exercice p. 13)

On réécrit le primal comme suit :

$$\begin{cases} \max \; 5x_1 + 7x_2 \\ -x_1 - x_2 \leqslant -6 \\ -x_1 \leqslant -4 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1 \;,\; x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi on obtient le dual :

$$\begin{cases} \min \; -6u_1 - 4u_2 + 3u_3 \\ -u_1 - u_2 \geqslant 5 \\ -u_1 + u_3 \geqslant 7 \\ u_1 \;,\; u_2 \;,\; u_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

> Solution n°4 (exercice p. 20)

Solution II

Pour le primal, $x_1 = 10$, $x_2 = 10$ et la valeur maximale de z est 250.
pour le dual : $y_1 = 0$, $y_2 = -5$, $y_3 = -5$, et la valeur minimale est 250.

> Solution n°5 (exercice p. 20)

Solution III

2. Il suffit de vérifier que (2 ; 1) respecte les contraintes et aussi que (0 ; 1/2 ; 5/2) respecte les contrainte de la forme Dual que vos avez obtenu en 1.

ensuite on a bien avec (2 ; 1) que Max z = 8 , en faisant de même avec (0 ; 1/2 ; 5/2) pour le Dual on a min = 8. Par conséquent les solutions réalisables obtenues sont optimales (théorème de la dualité)