UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Calcul Intégral (MATH 1173) - Chapitre 1.1: Les coordonnées polaires

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

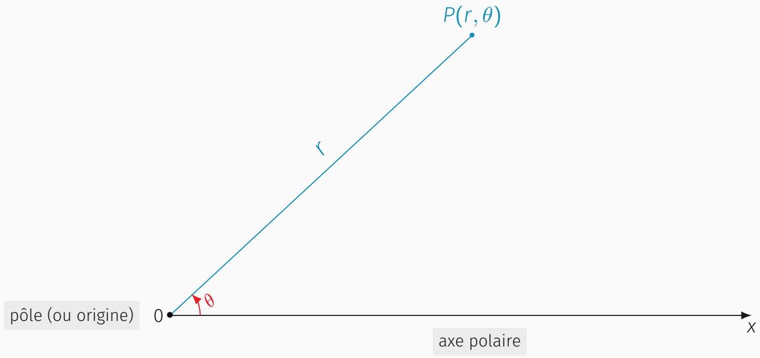
- Coordonnées polaires
- Relation entre coordonnées cartésiennes et polaires
- Graphique de l'équation polaire $r = f(\theta)$
- Exercices suggérés

Introduction

- Un point du plan est désigné par un couple de nombres, appelé ses coordonnées.
- Nous utilisons habituellement les coordonnées cartésiennes, obtenues par rapport aux axes perpendiculaires Ox et Oy.
- Ici, nous introduirons un autre système de coordonnées: le **système de coordonnées polaires**.
- Ce système offre une autre façon de localiser dans le plan.
- Et permet une description simple d'équations a priori compliquées.

Coordonnées polaires

- Le plan cartésien est, entre autre, caractérisé par:
  - un point appelé **pôle** (ou origine) et marqué par 0;
  - et d'une demi droite qui part de 0 appelé l'**axe polaire**.



- Ainsi, un point P du plan est repéré par le couple (r, θ) où:
  - ▷ r est la distance de l'origine 0 au point P,
  - ▷ et θ est l'angle (en radians) entre l'axe polaire et la droite $0P$.

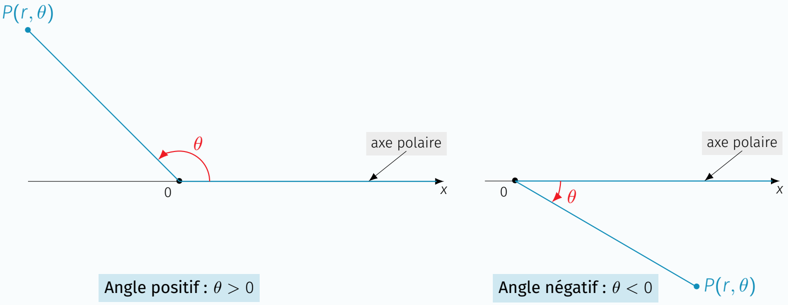
Définition

Le couple (r, θ) est appelé **coordonnées polaires** du point P.

Note: Au cas où $r = 0$, alors il est convenu que le point $P(0, \theta)$ représente le pôle quelle que soit la valeur de θ.

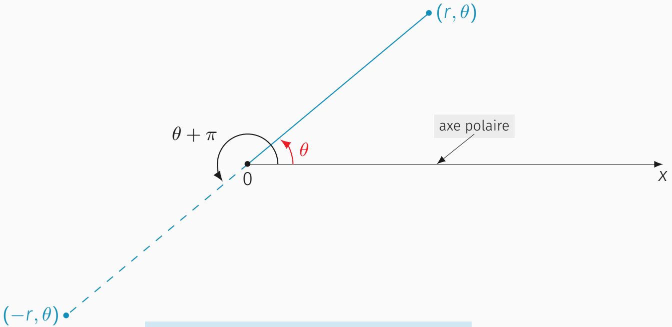
Remarque :

- Un angle est positif s'il est mesuré dans le sens contraire des aiguilles d'une montre à partir de l'axe polaire.



- Un angle est négatif s'il est mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de l'axe polaire.

- On étend la définition des coordonnées polaires au cas où r est négatif:
  - en acceptant que les points $(-r, \theta)$ et (r, θ) sont sur la même droite passant par 0,
  - et qu'ils sont de part et d'autre de 0, à la même distance $|r|$.



Position des coordonnées $(-r, \theta)$ et (r, θ).

Note: Remarquez que $(-r, \theta)$ et $(r, \theta + \pi)$ représentent le même point.

Note:

- Lorsque $r > 0$, le point (r, θ) appartient au même quadrant que θ.
- Mais si $r < 0$, le point (r, θ) est dans le quadrant opposé par rapport au pôle.

Exemple 1.1: Repérez les points de coordonnées polaires données.

- $(1, 5\pi/4)$
- $(2, 3\pi)$
- $(2, -2\pi/3)$
- $(-3, 3\pi/4)$

Remarque :

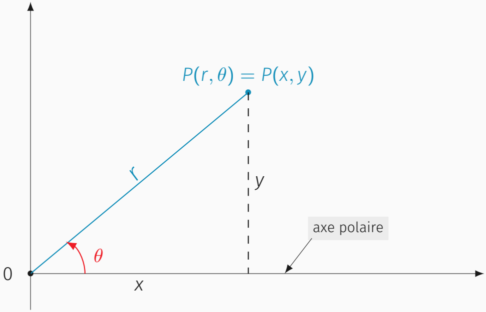
- En coordonnées cartésiennes, chaque point n'a qu'une seule représentation $P(x, y)$.

- Alors qu'en coordonnées polaires, chaque point en a plusieurs.

  Le point $(1, 5\pi/4)$ de l'exemple précédent peut aussi être repérer par les couples $(1, -3\pi/4)$ ou $(1, 13\pi/4)$ ou $(-1, \pi/4)$.

Relation entre coordonnées cartésiennes et polaires

- La relation entre les coordonnées cartésiennes et polaires se lit sur cette figure:



Relation entre coordonnées cartésiennes et polaires.

- Si le point P admet le couple (x, y) en cordonnées cartésiennes et le couple (r, θ) en coordonnées polaire, alors quelque soient r et θ on a

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

- On retrouve les cordonnées cartésiennes suivantes:

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta$$

- À l'inverse, si on a les cordonnées cartésiennes, on retrouve r et θ par

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad tg\ \theta = \frac{y}{x} \tag{1}$$

Exemple 2.1: Convertissez les coordonnées polaires du point $(2, \pi/3)$ en cordonnées cartésiennes.

Exemple 2.2: Quelles sont les coordonnées polaires du point de cordonnées cartésiennes $(1, -1)$?

Note: Les équations en (1) ne déterminent pas univoquement θ à partir de x et y parce que, lorsque θ parcourt $[0, 2\pi]$, chaque valeur de $tg\ \theta$ est atteinte deux fois.

Graphique de l’équation polaire $r = f(\theta)$

Graphique de l'équation polaire $r = f(\theta)$

Définition

Le graphique de l'équation polaire $r = f(\theta)$, ou plus généralement $F(r, \theta) = 0$, est fait de tous les points P dont une représentation en coordonnées polaires vérifie l'équation.

Exemple 3.1: Quelle courbe est représentée par l'équation polaire $r = 2$.

Exemple 3.2: Dessinez la courbe polaire $\theta = 1$.

Exemple 3.3:

- Dessinez la courbe d'équation polaire $r = 2\cos\theta$.

- Déterminez une équation cartésienne de cette courbe.

Exercices suggérés

Exercices suggérés

1. Trouvez une équation cartésienne de la courbe d'écrite par l'équation polaire $r = 16 \sin\theta$ et d'écrire la courbe représentée par l'équation cartésienne obtenue.

2. Soit une courbe C dont l'équation polaire est $r = 4\cos\theta - \sin\theta$. Montrez que C est un cercle et déterminez son centre et son rayon.

3. Trouvez une équation polaire de la courbe représentée par l'équation cartésienne $y = x^4$.

4. Trouvez une équation cartésienne de la courbe d'écrite par l'équation polaire

$$r = \frac{2}{\sqrt{\cos^2(\theta) + 4\sin^2(\theta)}}$$

Dessinez la courbe.

5. Trouvez une équation cartésienne de la courbe d’écrite par l’équation polaire

- $\star$ $r = \frac{1}{1-\cos\theta}$
- $\star$ $r^2 = \sin 2\theta$

6. Déterminez l’équation cartésienne de la courbe décrite par l’équation polaire $r(\sin\theta + r\cos^2\theta) = 1$ et tracez son allure (en utilisant l’équation cartésienne obtenue).

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)

- Disponibilités:
  - Mercredi 9H00 - 12H00, MRR B-214
  - Jeudi 13:00 - 16:00, MRR B-214

- Manual du cours:

  J. Stewart. *Analyse concepts et contextes*. Volume 1, Fonctions d'une variable, DeBoeck Université 3^{e} édition.