



Calcul Intégral (MATH 1173) - Chapitre 3: Méthodes d'intégration

 Ibrahima Dione

 Département de Mathématiques et de Statistique

- Méthode d'intégration par substitution
- L'intégration par parties
- D'autres techniques d'intégration
- L'intégration à partir de tables
- L'intégration approchée
- Les intégrales improches

Méthode d'intégration par substitution

- ▷ Par le théorème du calcul de l'intégrale définie, on détermine l'intégrale

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

- ▷ Si la primitive F de la fonction f n'est pas connue, nous devons:

Introduire quelque chose de nouveau, pour effectuer cette intégrale!

- ▷ Le formulaire de primitives usuelles, ne permet pas de traiter l'intégrale

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx = ? \quad (1)$$

- ▷ Ainsi, «introduire quelque chose de nouveau» signifie ici de passer de la variable « x » à la nouvelle variable « u » suivant la formule $u = 1 + x^2$.

- ▷ Si on interprète dx comme une différentielle, alors on a $du = 2x dx$.
- ▷ De façon formelle, nous pouvons réécrire l'intégrale (1) comme suit

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{1+x^2}dx &= \int \sqrt{u} du \\ &= \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C.\end{aligned}\quad (2)$$

- ▷ Et on peut ensuite vérifier, par la *règle de dérivation des fonctions composées*, que la fonction finale de (2) est correcte:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(x^2 + 1)^{1/2} \cdot 2x = 2x\sqrt{x^2 + 1}.$$

- ▷ Ce procédé marche toujours, quand la fonction à intégrer est de la forme

$$\int f(g(x))g'(x)dx = ?$$

- ▷ En effet, si nous avons la primitive F de f (c'est-à-dire $F' = f$), alors on a

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C, \quad (3)$$

- ▷ parce que la règle de dérivation des fonctions composées donne

$$\frac{d}{dx} [F(g(x))] = F'(g(x))g'(x).$$

- ▷ Avec le «*changement de variable*» ou la «*substitution*» $u = g(x)$, l'équation (3) s'écrit

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)du,$$

- ▷ ou, en remplaçant F' par f ,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

4 La règle de substitution

Si $u = g(x)$ est une fonction dérivable dont l'ensemble image est un intervalle I et si f est continue sur I , alors

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Note:

- La méthode d'intégration par substitution n'a d'autre but que de remplacer une intégrale quelque peu compliquée par une autre plus simple.
- Cela se fait en passant de la **variable originale « x »** à une **nouvelle variable « u »** qui est fonction de « x ».

Exemple 1.1: Calculez $\int x^3 \cos(x^4 + 2)dx$.

Exemple 1.2: Calculez $\int \sqrt{2x + 1} dx$.

Exemple 1.3: Calculez $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.

Exemple 1.4: Calculez $\int e^{5x} dx$.

Exemple 1.5: Calculez $\int \operatorname{tg} x dx$.

5 La règle de substitution pour les intégrales définies

Si g' est une fonction continue sur $[a, b]$ et si f est continue sur l'ensemble image de $u = g(x)$, alors

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Exemple 1.6: La règle de substitution dans une intégrale définie

En faisant appel au théorème 5, calculez $\int_0^4 \sqrt{2x + 1}dx$.

Exemple 1.7: Calculez $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$.

Exemple 1.8: Calculez $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.

6 Les intégrales de fonctions symétriques

On suppose que f est continue sur $[-a, a]$.

- a) Lorsque f est paire, c'est-à-dire $f(x) = f(-x)$, alors

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

- b) Lorsque f est impaire, c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$, alors

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Exemple 1.9: Intégrer une fonction paire

Vu que $f(x) = x^6 + 1$ satisfait à $f(-x) = f(x)$, elle est paire et de là, calculez $\int_{-2}^2 (x^6 + 1) dx$.

Exemple 1.10: Intégrer une fonction impaire

Vu que $f(x) = (\operatorname{tg} x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisfait à $f(-x) = -f(x)$, elle est impaire et de là, calculez $\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{tg} x}{(1+x^2+x^4)} dx$.

L'intégration par parties

- ▷ Il est normal qu'à chaque règle de dérivation corresponde une règle d'intégration.
- ▷ La règle d'intégration par substitution correspondait à la règle de dérivation des fonctions composées.
- ▷ La règle «*intégration par parties*» est celle qui correspond à la règle de dérivation du produit.
- ▷ La règle de dérivation du produit de deux fonctions dérivables est:

$$\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

- ▷ Dans le sens de l'intégrale, cette formule s'écrit:

$$\int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx = f(x)g(x)$$

Formule d'intégration par parties

On suppose que f et g sont dérivables et de dérivées f' et g' continues.

1

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

- 2 En prenant $u = f(x)$ et $\nu = g(x)$ où les différentielles sont $du = f'(x)dx$ et $d\nu = g'(x)dx$, alors 1 s'écrit

$$\int ud\nu = u\nu - \int \nu du.$$

Exemple 2.1: Calculez $\int x \sin x dx$.

Remarque : L'intégrale par parties n'est efficace que si l'on obtient une intégrale plus simple que l'intégrale initiale.

Exemple 2.2: Calculez $\int \ln x \, dx$.

Exemple 2.3: Intégrer par partie deux fois de suite

Calculez $\int t^2 e^t \, dt$.

Exemple 2.4: Calculez $\int e^x \sin x dx$.

Intégration par parties à des intégrales définies

On suppose que f et g sont dérивables et de dérivées f' et g' continues.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

Exemple 2.5: Calculez $\int_0^1 \operatorname{Arctg} x \, dx$.

D'autres techniques d'intégration

- ▷ Nous avons appris deux technique d'intégration de base:
 - ★ l'intégration par **substitution**,
 - ★ et l'intégration par **parties**.
- ▷ Nous présentons ici d'autres techniques qui s'appliquent à certaines classes de fonctions:
 - ★ les fonctions trigonométriques,
 - ★ et les fonctions rationnelles.

- ▷ Les identités trigonométriques permettent d'intégrer certaines compositions de fonctions trigonométriques.

Exemple 3.1: Calculez $\int \cos^3 x \, dx$.

Note:

- C'est l'identité $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ qui permet de convertir une puissance paire de sinus et de cosinus.

- IL faut essayer d'écrire l'intégrande constituée de puissances de sinus et de cosinus sous une forme telle qu'un seul facteur est un sinus (et le reste est en cosinus).
- ▷ Si l'intégrande ne comporte que des puissances paires de sinus et cosinus, la stratégie qui vient d'être décrite échoue.

- Il convient dans ce cas d'employer les formules:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Exemple 3.2: Calculez $\int_0^\pi \sin^2 x \, dx$.

- La même stratégie est valable pour intégrer des puissances de tangentes et de sécantes via la formule

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x.$$

I Des substitutions trigonométriques

- ▷ Certains problèmes conduisent à intégrer des fonctions algébriques qui contiennent une expression de la forme

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{x^2 + a^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{x^2 - a^2}.$$

- ▷ Il faut faire une substitution trigonométrique qui élimine le radical $\sqrt{}$.

Exemple 3.3: Démontrons que l'air d'un disque de rayon r vaut πr^2 .

- L'exemple précédent suggère qu'une substitution trigonométrique $x = a \sin \theta$ est efficace lorsque l'intégrande contient un facteur de la forme $\sqrt{a^2 - x^2}$.
- Cela ne veut pas dire c'est *toujours* efficace.
- Pour calculer par exemple $\int x \sqrt{a^2 - x^2} dx$, il est plus simple de faire la substitution $u = a^2 - x^2$, parce que $du = -2x dx$.
- Si l'intégrande contient une expression de la forme $\sqrt{a^2 + x^2}$, il convient de penser à la substitution $x = a \operatorname{tg} \theta$ car l'identité $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta$ permet d'éliminer la racine.
- Pour le facteur $\sqrt{x^2 - a^2}$, la substitution $x = a \sec \theta$ s'avère utile.

I Intégration des fonctions rationnelles

- ▷ Nous savons intégrer des sommes de fractions simples de la forme

$$\frac{A}{Cx + D}.$$

- ▷ Pour intégrer des fonctions rationnelles (rapport de polynômes), on les exprime en sommes de fractions simples.
- ▷ En guise d'illustration, calculons l'intégrale: $\int \frac{5x-4}{2x^2+x-1}$.
- ✓ Le dénominateur est décomposable en un produit de facteurs du premier degré

$$\frac{5x - 4}{2x^2 + x - 1} = \frac{5x - 4}{(x + 1)(2x - 1)}.$$

Le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, la fonction rationnelle peut s'écrire en somme d'éléments *simples*:

$$\frac{5x - 4}{(x + 1)(2x - 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{2x - 1},$$

où A et B sont des constantes.

- ✓ Pour déterminer A et B , on multiplie les deux membres de cette équation par $(x + 1)(2x - 1)$, et on égale les coefficients des mêmes puissances de x :

$$5x - 4 = A(2x - 1) + B(x + 1), \text{ ou } 5x - 4 = (2A + B)x + (-A + B)$$

- ✓ Et on égale les coefficients des mêmes puissances de x :

$$2A + B = 5 \quad \text{et} \quad -A + B = -4.$$

- ✓ Les solutions de ces équations donnent $A = 3$ et $B = -1$. Et donc

$$\frac{5x - 4}{(x + 1)(2x - 1)} = \frac{3}{x + 1} - \frac{1}{2x - 1},$$

- ✓ Il ne reste plus qu'à intégrer chacune des fractions (par substitution $u = x + 1$ et $u = 2x - 1$):

$$\begin{aligned} \int \frac{5x - 4}{2x^2 + x - 1} dx &= \int \left(\frac{3}{x + 1} - \frac{1}{2x - 1} \right) dx, \\ &= 3 \ln|x + 1| - \frac{1}{2} \ln|2x - 1| + C. \end{aligned}$$

□

- Si le degré du numérateur avait été le même que celui du dénominateur, ou plus élevé, il aurait fallu passer par une étape préliminaire, celle qui consiste à effectuer la division.

Par exemple pour effectuer l'intégrale de fraction suivante, il faut la diviser

$$\frac{2x^3 - 11x^2 - 2x + 2}{(2x^2 + x - 1)} = x - 6 + \frac{5x - 4}{(x + 1)(2x - 1)}.$$

- Si le dénominateur comporte plus de deux facteurs du premier degré, il faut un terme pour chaque facteur.

Par exemple

$$\frac{x + 6}{x(x - 3)(4x + 5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{4x + 5},$$

où A , B et C sont des constantes à déterminer en résolvant un système de trois équations à trois inconnues A , B et C .

- Quand un facteur du premier degré est multiple, il faut prévoir des termes supplémentaires dans la décomposition en éléments simples.

Par exemple

$$\frac{x}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1}.$$

- Lorsque la factorisation du dénominateur conduit à un facteur irréductible du deuxième degré $ax^2 + bx + c$ avec $b^2 - 4ac$ négatif, il faut associer à ce facteur un élément simple de la forme

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c},$$

où A et B sont des constantes à déterminer. Un terme de cette forme peut être intégré en complétant le carré et en appliquant la formule

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C.$$

Exemple 3.4: Calculez $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} dx$.

L'intégration à partir de tables

- ▷ Les tables de primitive sont d'un grand intérêt lorsqu'on a à calculer des intégrales difficiles.
- ▷ Vous trouverez une brève table de primitives usuelles à la fin du manuel.
- ▷ Cependant, les intégrales ne se présentent pas souvent sous la forme reprise dans la table.
- ▷ Et il est couramment nécessaire de faire une substitution ou des simplifications algébriques avant d'utiliser les formules des tables.

Exemple 4.1: Utilisez la table de primitives jointe au livre pour calculer

$$\int_0^2 \frac{x^2+12}{x^2+4} dx.$$

Exemple 4.2: Utilisez la table de primitives pour calculer $\int x^3 \sin x dx$.

L'intégration approchée

- ▷ Il est impossible d'obtenir la valeur exacte de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)dx,$$

- ★ lorsqu'il est impossible d'obtenir une primitive de f ,
- ★ ou bien lorsque la fonction $f(x)$ n'est connue que par la lecture ou la récolte de données expérimentales.

- ▷ Par exemple, le calcul exacte des intégrales suivantes n'est pas possible

$$\int_0^1 e^{x^2} dx, \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3} dx.$$

- ▷ Dans les deux cas, on ne pourra obtenir que des **valeurs approchées** de ces intégrales définies.

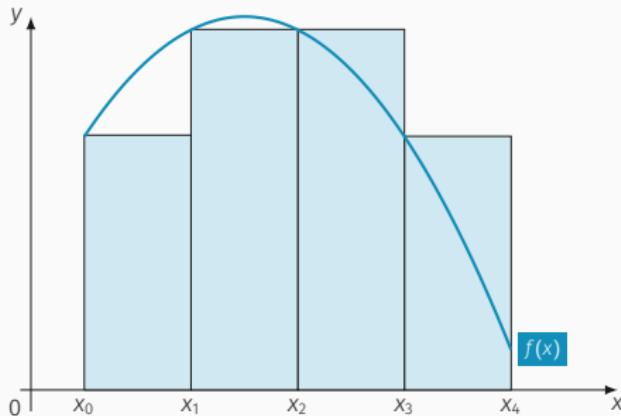
▷ Nous avons déjà connu une première méthode d'approximation.

▷ Divisons l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ de même taille

$$\Delta x = (b - a)/n.$$

1 En choisissant l'extrémité gauche de chaque sous-intervalle, on a

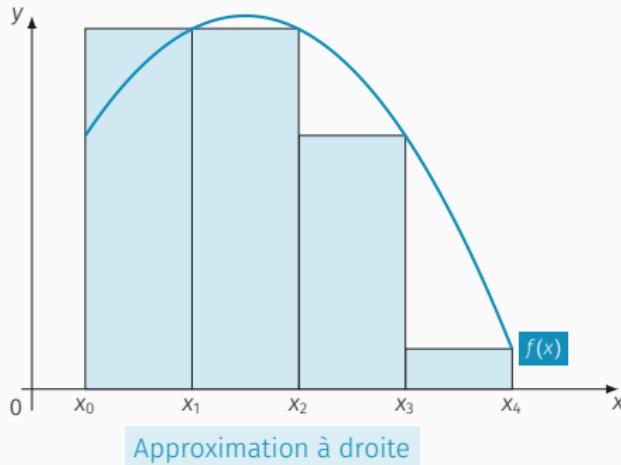
$$\int_a^b f(x)dx \approx G_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x$$



Approximation à gauche

2 Lorsqu'on choisit l'extrémité droite du sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \approx D_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$



- Les approximations G_n et D_n sont appelées **approximation à gauche** et **approximation à droite**.

- ▷ Nous avions aussi envisagé le cas où x_i est le point médian \bar{x}_i du sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$:

Méthode des points médians

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx M_n = \Delta x [f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)] \\ &= \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x\end{aligned}$$

où

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},$$

$\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ est le point médian de $[x_{i-1}, x_i]$.

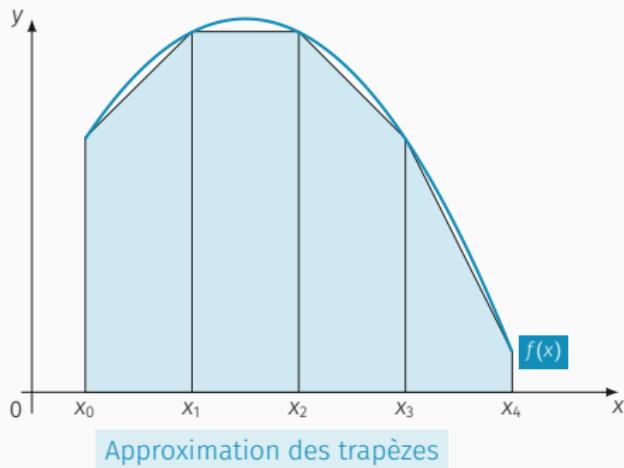
- ▷ La moyenne arithmétique des approximations 1 et 2 constitue une nouvelle approximation: Méthode des trapèzes.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x + \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x \right] = \frac{\Delta x}{2} \left[\sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \right] \\ &= \frac{\Delta x}{2} [(f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \cdots + (f(x_{n-1}) + f(x_n))] \\ &= \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]\end{aligned}$$

Méthode des trapèzes

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

où $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + i\Delta x$.



▷ L'aire du trapèze qui repose sur le $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle est égale à

$$\Delta x \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right) = \frac{\Delta x}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

Exemple 5.1: Utilisez

- ▷ La méthode des trapèzes, avec $n = 5$, pour calculer une valeur approchée de l'intégrale

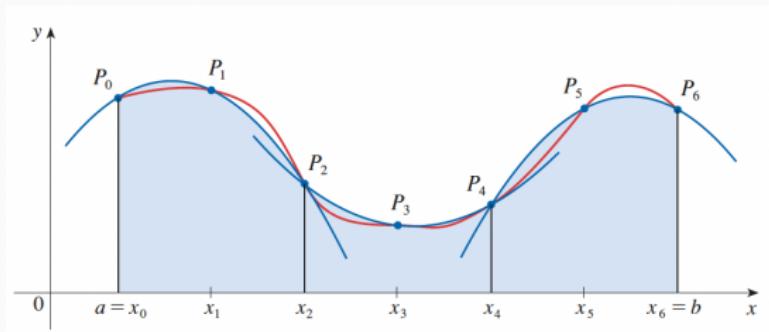
$$\int_1^2 (1/x) dx.$$

- ▷ La méthode des points médians, avec $n = 5$, pour calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$\int_1^2 (1/x) dx.$$

▷ Pour calculer une valeur approchée de intégrale:

- ★ au lieu de remplacer la fonction $f(x)$ sur chaque sous-intervalle par un segment de droite,
- ★ on peut la remplacer par un arc de parabole sur chaque paire de sous-intervalles adjacents.
- ★ n doit donc être pair dans ce cas.



Méthode de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

où n est pair et $\Delta x = (b - a)/n$.

Exemple 5.2: Calculez par la méthode de Simpson avec $n = 10$ une valeur approchée de l'intégrale

$$\int_1^2 (1/x) dx.$$

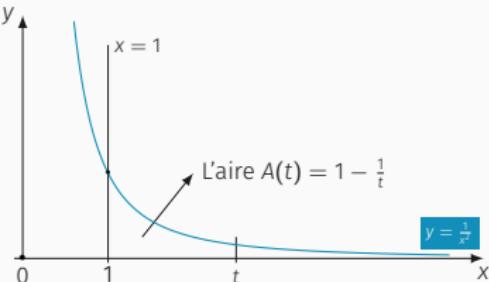
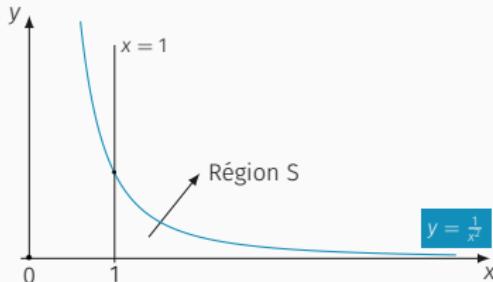
Les intégrales improches

- ▷ Lors de la définition de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$, il était supposé:
 - ★ que la fonction f était définie sur un intervalle fini $[a, b]$,
 - ★ et ne présentait pas de discontinuité infinie.
- ▷ Nous allons étendre ce concept d'intégrale définie au cas où l'**intervalle est infini** ainsi qu'au cas où f présente une **discontinuité infinie** sur $[a, b]$.

Dans les deux cas, l'intégrale de $f(x)$ est appelée «**intégrale impropre**».

I Type 1: Intervalles infinis

- ▷ Considérons la région S située sous la courbe $y = 1/x^2$, au dessus de l'axe Ox et à droite de la variable $x = 1$.



- ▷ Il serait naturel de penser que l'aire de cette région est infinie, puisque la région elle-même s'étend sans limite.
- ▷ Mais regardons-y de plus près!

- ▷ L'aire de la partie de S située à gauche de $x = t$ mesure

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

- ▷ On observe ainsi que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right) = 1 \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_1^t \frac{1}{x^2} dx \right) \\ &= \left(\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \right).\end{aligned}$$

On définit ainsi l'intégrale d'une fonction f sur une **intervalle infini** comme la **limite des intégrales sur des intervalles finis**.

1 Définition d'une intégrale impropre de type 1

a Si $\int_a^t f(x)dx$ existe pour tout nombre $t \geq a$, alors

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx,$$

à condition que cette limite existe (soit un nombre fini).

b Si $\int_t^b f(x)dx$ existe pour tout nombre $t \leq b$, alors

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx,$$

à condition que cette limite existe (soit un nombre fini).

Les intégrales improprees $\int_a^{\infty} f(x)dx$ et $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ sont dites:

- * **convergentes** si la limite qui les définit existe,
- * et **divergentes** dans le cas contraire.

c Si à la fois $\int_a^{\infty} f(x)dx$ et $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ sont **convergentes**, on définit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx.$$

Dans cette définition, n'importe quel nombre réel a convient.

Exemple 6.1: L'intégrale $\int_1^\infty (1/x) dx$ est-elle convergente ou divergente?

Exemple 6.2: Calculez $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$ est-elle convergente ou divergente?

Exemple 6.3: Pour quelles valeurs de p l'intégrale

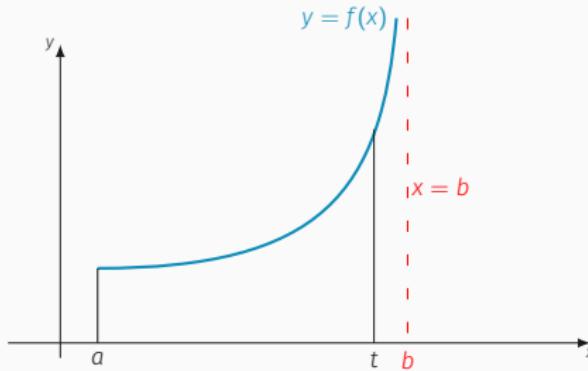
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

est-elle convergente?

2 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est convergente si $p > 1$ et divergente si $p \leq 1$.

I Type 2: Intégrale d'une fonction discontinue

- ▷ On suppose que f est une fonction positive continue sur l'intervalle fini $[a, b[$ et présente une **asymtote verticale** en b .
- ▷ On désigne par S la région non bornée qui s'étend entre le graphique de f et l'axe Ox depuis a jusqu'à b .



- ▷ (Pour les intégrales de type 1, la région s'étendait indéfiniment dans la direction horizontale).
- ▷ Ici, c'est dans la direction verticale que les régions s'étendent indéfiniment!

- ▷ L'aire de la partie S qui va de a jusqu'à t mesure

$$A(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

- ▷ Au cas où $A(t)$ s'approche d'un nombre fini lorsque $t \rightarrow b^-$, on dit que la région S a une aire A et on écrit

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

On définit ainsi une intégrale impropre de type 2.

3 Définition d'une intégrale impropre de type 2

a Si f est continue sur $[a, b[$ et discontinue en b , alors

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

à condition que cette limite existe (soit un nombre fini).

b Si f est continue sur $]a, b]$ et discontinue en a , alors

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx,$$

à condition que cette limite existe (soit un nombre fini).

L'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ est dite:

- * **convergente** si la limite qui la définit existe,
- * et **divergente** dans le cas contraire.

c Si f a une **discontinuité en c** , où $a < c < b$, et si à la fois $\int_a^c f(x)dx$ et $\int_c^b f(x)dx$ sont **convergentes**, alors on définit

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Exemple 6.4: Calculez $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$.

Exemple 6.5: Dites si $\int_0^{\pi/2} \sec x dx$ est convergente ou divergente?

Exemple 6.6: Calculez si possible $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$.

Exemple 6.7: Calculez $\int_0^1 \ln x \, dx$.

- ▷ Il est parfois impossible de trouver la valeur exacte d'une intégrale impropre.
- ▷ Cependant, il est important de savoir si elle est convergente ou non.

Théorème de comparaison

On suppose que f et g sont des fonctions continues telles que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ pour $x \geq a$.

- a Si $\int_a^\infty f(x)dx$ est convergente, alors $\int_a^\infty g(x)dx$ est convergente.
- b Si $\int_a^\infty g(x)dx$ est divergente, alors $\int_a^\infty f(x)dx$ est divergente.

Exemple 6.8: Démontrez que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ est convergente.

Exemple 6.9: Montrez que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x} dx$ est divergente par le théorème de comparaison.

Exercices suggérés

1. Calculez les intégrales suivantes:

a)

$$\int \frac{dt}{(1-2t)^3}$$

b)

$$\int (x+1)e^{(x^2+2x)} dx$$

c)

$$\int x\sqrt{x+2} dx$$

d)

$$\int \operatorname{tg}^3(1-2x) dx$$

e)

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{1+x^2} dx$$

f)

$$\int_1^3 \frac{(x-1)e^x}{x^2} dx$$

g)

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2 \operatorname{arctg} x dx$$

h)

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{x + \sin x} dx$$

i)

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

j)

$$\int x(\sin x + \cos x) dx$$

k)

$$\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx$$

l)

$$\int \frac{4x}{2x+1} dx$$

m)

$$\int x^3 \sin(x^2) dx$$

n)

$$\int \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx$$

o)

$$\int \frac{4x^2 + 3x}{(x+2)(x^2+1)} dx$$

p)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} dx$$

q)

$$\int \frac{\cos(1 + \ln(x))}{x} dx$$

r)

$$\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x} dx$$

s)

$$\int x e^{-2x} dx$$

t)

$$\int_0^4 \frac{x^4}{x-4} dx$$

u)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2x^2 + 4x + 6}$$

v)

$$\int \frac{2x}{x^2 + 3x + 2} dx, x > -1$$

w)

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx$$

2. À l'aide de la méthode des trapèzes, calculez une approximation de l'intégrale de Riemann $\int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx$ en prenant $n = 4$.
3. Déterminez si l'intégrale est convergente, si oui, calculez la

a)

$$\int_0^{\infty} xe^{-2x} dx$$

b)

$$\int_0^1 \frac{1}{x - 4\sqrt{x}} dx$$

c)

$$\int_1^{\infty} \frac{x^5}{\sqrt{1+x^6}} dx$$

Informations sur le cours

 **Ibrahima Dione** (ibrahima.dione@umoncton.ca)

 **Disponibilités:**

- ★ Mercredi 9H00 - 12H00, MRR B-214

- ★ Jeudi 13H00 - 16H00, MRR B-214

 **Manuel du cours:**

J. Stewart. *Analyse concepts et contextes*. Volume 1, Fonctions d'une variable, DeBoeck Université 3^e édition.