UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Calcul Différentiel (MATH 1073) - Chapitre 3: Les Règles de Dérivation

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

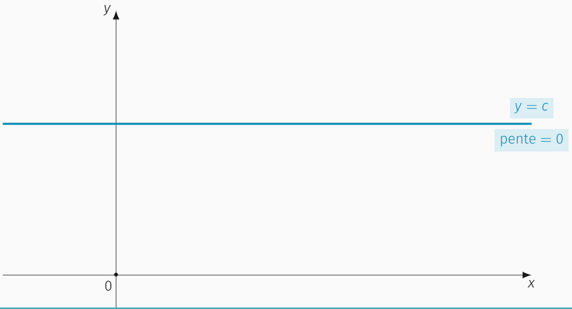
Dérivées de fonctions polynomiales et exponentielles

Définition

Dérivée d'une fonction constante

Si $f(x) = c$ où c est une constante, alors $f'(x) = 0$. Écrit autrement, on a

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$



Le graphique de $f(x) = c$, est la droite $y = c$. Ainsi, sa pente est $f'(x) = 0$.

▷ À partir de la définition de la dérivée, on peut démontrer que $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Exemple 1.1: Soit la fonction $f(x) = 11$ pour tout x. Alors, la dérivée de cette fonction est $f'(x) = 0$.

Définition

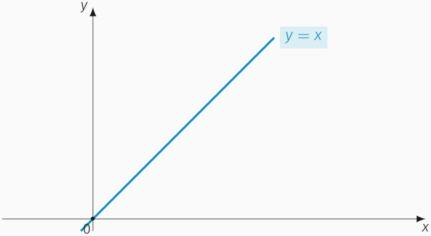
Règle de dérivation d'une puissance

Si n est une **nombre réel quelconque**, alors la dérivée de $f(x) = x^n$ est

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}.$$

- Dans le cas où $n = 1$, alors la dérivée de $f(x) = x$ est

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1.$$



- Dans le cas où $n = 2$, alors la dérivée de $f(x) = x^2$ est

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x.$$

- Dans le cas où $n = 3$, alors la dérivée de $f(x) = x^3$ est

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2.$$

Exemple 1.2: Si $f(x) = x^{1000}$, alors $f'(x) = 1000x^{999}$.

- Dans le cas où $n = -1$, alors la dérivée de $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ est

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

- Dans le cas où $n = \frac{1}{2}$, alors la dérivée de $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ est

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Exemple 1.3: Cherchez la dérivée des fonctions suivantes:

- ▷ $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- ▷ $y = \sqrt[3]{x^2}$

Exemple 1.4: Soit la courbe (C) d'équation $y = x\sqrt{x}$.

- ▷ Trouvez l'équation de la tangente de la courbe (C) au point $(1, 1)$.

- ▷ En déduire l'équation de la normale à la courbe (C) au point $(1, 1)$.

Définition

Règle de dérivation du produit par une constante

Si c est une constante et si $f(x)$ est une fonction dérivable, alors

$$\frac{d}{dx}\left[cf(x)\right] = c\frac{d}{dx}f(x).$$

La dérivée d'une fonction multipliée par une constante est la dérivée de la fonction multipliée par la constante.

Exemple 1.5: Utilisez la règle de dérivation précédente pour calculer:

- ▷ $\frac{d}{dx}\left(3x^4\right)$
- ▷ $\frac{d}{dx}\left(-x\right)$

Définition

Règle de dérivation d'une somme ou d'une différence

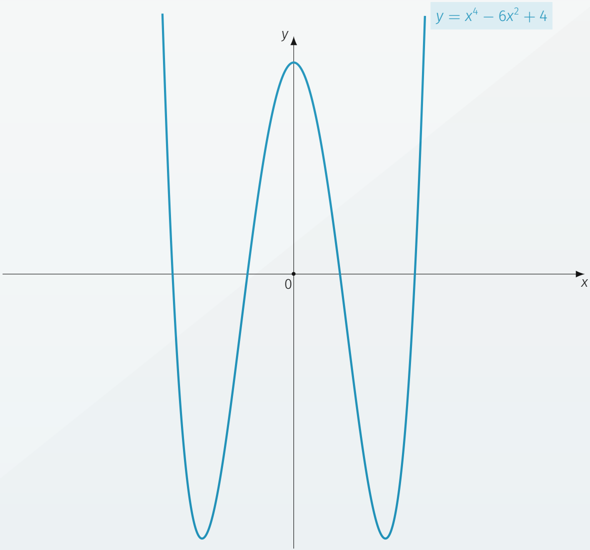
Si f et g sont toutes les deux dérivables, alors

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x).$$

La dérivée d'une somme (ou d'une différence) de fonctions est la somme (ou la différence) des dérivées.

Exemple 1.6: Calculez la dérivée de la fonction $f(x) = x^8 - 4x^5 + 3x^3$.

Exemple 1.7: Trouvez les points de la courbe $y = x^4 - 6x^2 + 4$ en lesquels la tengente est horizontale.



Exemple 1.8: L'équation du mouvement d'un mobile est $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, où $s(t)$ est mesuré en centimètres (cm) et t en secondes.

- Calculez la fonction qui donne l'accélération en fonction du temps.

- Quelle est l'accélération après 2 secondes?

Définition

Dérivée de la fonction exponentielle de base e

La dérivée de la fonction exponentielle de base e est donnée par

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x.$$

- La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ possède donc la propriété d'être sa propre dérivée.
- C'est à dire qu'en chaque point de la courbe $y = e^x$, la pente de la tangente est égale à l'ordonnée du point.

Exemple 1.9: Soit la fonction $f(x) = e^x - x$.

- ▷ Déterminez les expressions de f' et de f''.

- ▷ Comparez les graphiques de f et de f'.

Exemple 1.10: Quel est le point de la courbe $y = e^x$ en lequel la tangente est parallèle à la droite $y = 2x$?

Les règles de dérivation du produit et du quotient

Définition

Règle de dérivation du produit

Si f et g sont des fonctions dérivables, alors[a]

$$\frac{d}{dx}\Big[f(x)g(x)\Big] = \frac{d}{dx}[f(x)]\,g(x) + f(x)\frac{d}{dx}[g(x)].$$

Pour dériver un produit de deux fonction, il faut multiplier la première fonction par la dérivée de la deuxième et ajouter la deuxième fonction multipliée par la dérivée de la première.

[a] Avec la notation prime ($\prime$), règle de dérivation du produit s'écrit: $(fg)' = f'g + fg'$.

Exemple 2.1: Soit la fonction $f(x) = xe^x$.

- ▷ Cherchez l'expression de $f'(x)$.

- ▷ Calculez l'expression de la $n^{ième}$ dérivée de f.

Définition

Règle de dérivation du quotient

Si f et g sont des fonctions dérivables, alors[a]

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\frac{d}{dx}[f(x)]g(x)-f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}.$$

Pour dériver un quotient de deux fonction, il faut multiplier la dérivée de la fonction du numérateur par la fonction du dénominateur, soustraire le produit de la fonction du numérateur par la dérivée de la fonction du dénominateur, et diviser le tout par le carré de la fonction du dénominateur.

[a] Avec la notation prime ($\prime$), règle de dérivation du quotient s'écrit: $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Exemple 2.2: Écrivez une équation de la tangente à la courbe $y = \frac{e^x}{(1+x^2)}$ au point $(1, \frac{1}{2}e)$.

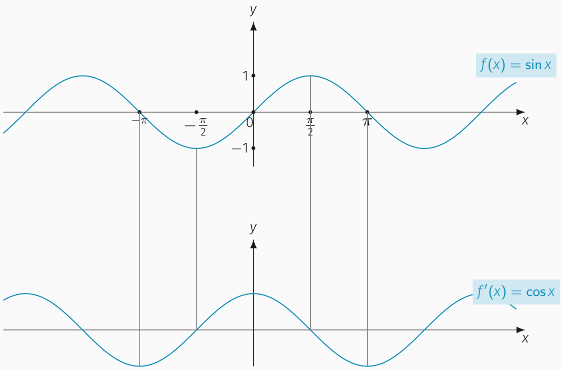
Les dérivées des fonctions trigonométriques

Définition

Dérivées des fonctions trigonométriques

- La dérivée des fonctions sinus et cosinus est donnée par

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x).$$



Exemple 3.1: Dérivez la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$.

- $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$
- $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$

Exemple 3.2: Calculez la dérivée d’ordre 27 de $\cos x$.

La dérivation des fonctions composées

Règle de dérivation d'une fonction composée

- Si g est une fonction dérivable en x et si f est dérivable en $g(x)$ alors la fonction composée

  $$F(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$$

  est dérivable en x et sa dérifée $F'(x)$ est donnée par le produit

  $$F'(x) = f'(g(x)) \times g'(x).$$

- Avec la notation de Leibniz, si $y = f(u)$ et $u = g(x)$ sont des fonctions dérivables

  $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.$$

Utiliser la règle de dérivation des fonctions composées

Exemple 4.1: Calculex la dérivée de $F(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Remarque : La formule de la dérivée composée impose de dériver la fonction extérieure f (par rapport à la fonction intérieure $g(x)$) et d'ensuite multiplier par la dérivée de la fonction intérieure:

$$\frac{d}{dx} f\left(g(x)\right) = f'(g(x)) \times g'(x).$$

Exemple 4.2: Dérivez

- $y = \sin(x^2)$.

- $y = \sin^2(x)$.

Règle de dérivation d'une puissance combinée avec celle d'une fonction composée

- Soit n un nombre réel quelconque et $u = g(x)$ une fonction dérivable. Alors

$$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = nu^{n-1} \times \frac{du}{dx}.$$

- Ou aussi

$$\frac{d}{dx}\Big[g(x)\Big]^n = n\Big[g(x)\Big]^{n-1} \times g'(x).$$

Exemple 4.3:

- Calculez $f'(x)$ si $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$.

- Dérivez $y = e^{\sin(x)}$.

- En se rappelant que $a = e^{\ln(a)}$ où $a > 0$, on a $a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{(\ln(a))x}$.

- Il est possible d'obtenir la dérivée de la fonction exponentielle de base $a > 0$, par la règle de dérivation composée:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{(\ln(a))x}\right) &= e^{(\ln(a))x}\frac{d}{dx}\Big(\ln(a)x\Big) \\ &= e^{(\ln(a))x}\ln(a) = a^x \ln(a)\end{aligned}$$

Règle de dérivation de la fonction exponentielle de base $a > 0$

- La dérivée de la fonction exponentielle de base quelconque $a > 0$, est donnée par

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \ln(a).$$

La dérivation implicite

- ▷ Les fonctions étudiées jusqu'ici admettent une description où l'une des variables est exprimée **explicitement** par rapport à l'autre:

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \text{ ou plus généralement, } y = f(x).$$

- ▷ Dans un tel cas, la détermination de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ est à portée.

- ▷ Certaines fonctions par contre, sont définies **implicitement**:

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ ou plus généralement, } f(x, y) = 0.$$

- ▷ Bien que qu'il est possible, dans certain cas, de résoudre une fonction implicite par rapport à l'une de ses variables et obtenir une fonction explicite:

$$x^2 + y^2 = 25, \quad \text{on a alors: } y = \sqrt{25 - x^2} \text{ et } y = -\sqrt{25 - x^2}$$

- Il n’est pas nécessaire d’expliciter y par rapport à x pour déterminer $\frac{dy}{dx}$.

La méthode de dérivation implicite

- La **méthode de dérivation implicite** consiste à dériver d’abord les deux membres de l’équation par rapport à x et à résoudre ensuite l’équation qui en résulte par rapport à y'.
- La méthode de dérivation implicite sert ainsi à determiner $\frac{dy}{dx} = y'$.

Exemple 5.1: Soit l'équation du cercle (C) définie comme suit:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

- ▷ Déterminez $\frac{dy}{dx} = y'$ à partir de l'équation du cercle (C).

- ▷ Déterminez l'équation de la tangente du cercle (C) au point $(3, 4)$.

Exemple 5.2:

- ▷ Cherchez l'expression y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

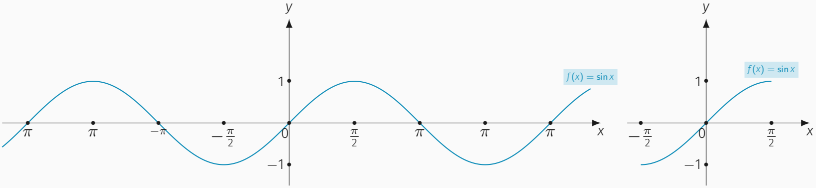
- ▷ Déterminez l'expression de y' si $\sin(x + y) = y^2 \cos(x)$.

- ▷ Calculez y'' si $x^4 + y^4 = 16$.

Fonctions trigonométriques réciproques et leurs dérivées

- Les fonctions trigonométriques ne sont pas injectives.

- Donc elles ne sont pas réciproques (voir chap. 1).



- Cependant, en restreignant leur domaine de définition, on peut les rendre injectives et donc réciproques.

- À la figure de gauche, $y = \sin\ x$ n'est pas injective (d'après le **test de la droite horizontale**).

▷ Par contre, la même fonction $f(x) = \sin x$ où $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ est injective (figure de droite).

- La fonction réciproque de la restruction de la fonction sinus $\sin x$ existe et est noté $\arcsin x$.
- Elle est appelée **fonction arcsinus**:

$$\arcsin x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \sin y = x \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

- Le domaine de $\arcsin x$ est $[-1, 1]$ et son image est $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exemple 6.1:

▷ Calculez $\arcsin(\frac{1}{2})$:

- Les équations d'annulation de la fonction sinus et sa réciproque:

$$\mathbf{arcsin}(\mathbf{sin}\ x) = x \quad \text{pour } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\mathbf{sin}(\mathbf{arcsin}\ x) = x \quad \text{pour } -1 \leq x \leq 1.$$

- La dérivation de la fonction réciproque $\mathbf{arcsin}(x)$ est:

$$\frac{d}{dx}(\mathbf{arcsin}\ x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour } -1 \leq x \leq 1.$$

Exemple 6.2: Soit $f(x) = \arcsin(x^2 - 1)$. Déterminez

- le domaine de définition de f.

- $f'(x)$

- le domaine de définition de f'.

▷ Également, la fonction $f(x) = \cos x$ où $0 \leq x \leq \pi$ est injective.

- La fonction réciproque de la restruction de la fonction cosinus $\cos x$ existe et est noté $\arccos x$.
- La fonction $\arccos x$ est telle que:

$$\arccos x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \cos y = x \;\text{ et } 0 \leq y \leq \pi.$$

- Le domaine de $\arccos x$ est $[-1, 1]$ et son image est $[0, \pi]$.
- La dérivation de la fonction réciproque $\arccos(x)$ est:

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour } -1 \leq x \leq 1.$$

- La fonction tangente peut être rendue injective en la restreignant à l'intervalle $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

- La fonction réciproque de tangente **tg** x existe et est noté **arctg** x.

- La fonction **arctg** x est telle que:

$$\textbf{arctg}\, x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \textbf{tg}\, y = x \ \text{ et } \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

- Le domaine de **arctg** x est $]-\infty, +\infty[$ et son image est $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

- La dérivation de la fonction réciproque **arctg** x est:

$$\frac{d}{dx}(\textbf{arctg}\, x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pour } \ -1 \leq x \leq 1.$$

Les dérivées des fonctions logarithmes

- Les fonctions logarithmes sont dérivables:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

- Dans le cas $a = e$, on obtient à partir de la formule précédente:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Exemple 7.1: Dérivez $y = \ln\left(x^3 + 1\right)$.

- La combinaison de formule précédente et de la règle des fonctions composées, consuit à:

$$\frac{d}{dx}(\ln\ u) = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}.$$

- Ou plus généralement, on a:

$$\frac{d}{dx}(\ln\ g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Exemple 7.2: Calculez $\frac{d}{dx} \ln(\sin\ x)$.

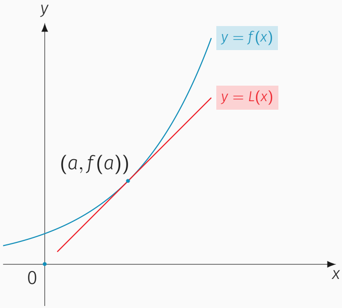
Les taux de variation en sciences naturelles et sociales

À Lire!

Approximations affines

- Il peut être difficile (voire impossible) de calculer la valeur $f(x)$ pour une variable x voisin de a, bien qu'on connait les valeurs $f(a)$ et $f'(a)$.

- On peut cependant faire recours à une approximation de $f(x)$ grâce à la tangente de f en a.



- Car La courbe de $f(x)$ passe très près de sa tangente, à proximité du point tangent $(a, f(a))$.

- En d'autres mots, nous nous servons de la tangente de f en $(a, f(a))$ comme approximation de la courbe $y = f(x)$, lorsque x est proche de a

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

- L'approximation

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

est appelée l'**approximation affine** ou **approximation par la tangente** de f en a.

- La fonction $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, dont le graphique est la droite tangente, est appelée la **linéarisation** de f en a.

Exemple 9.1:

- Cherchez l'approximation affine de la fonction $f(x) = \sqrt{x+3}$ en $a = 1$.

- Servez-vous de cette approximation pour estimer les valeurs $\sqrt{3.98}$ et $\sqrt{4.05}$.

Exercices Suggérés

1. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x-1}{2}\right)$$

- ⋆ Calculez les valeurs suivantes (quand elles existent): $f(0), f(1), f(2)$.
- ⋆ Déterminez le domaine de la fonction f.

2. Considérons l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

- ⋆ Par dérivation implicite, trouvez la pente au graphe de l'ellipse au point $(x, y) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$.
- ⋆ À l'aide de la réponse trouvée en a), trouvez l'équation de la droite tangente au graphe de l'ellipse au point $(x, y) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$.

3. Soit la fonction $f(x) = (x-1)(x-2)$. Trouvez l'approximation linéaire de $f(x)$ près du point $x = \frac{3}{2}$.

4. Trouvez l'expression de $\frac{dy}{dx}$ si.

- ⋆ $x^3 + y^3 = 2xy$.
- ⋆ $1 + \cos(xy) = \pi - x^2y$.

5. Utilisez une approximation affine pour estimer $\sqrt{9.3}$.

6. Soit f la fonction définie par $y = f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$. Trouvez l'équation de la tangente à la courbe de f au point $(2, \frac{1}{5})$.

7. Déterminez a et b pour que la droite d'équation $y = 4x + 1$ soit tangente à la courbe $f(x) = ax^2 + b$ au point de coordonnées $(3, 13)$.

8. Évaluez.

- ⋆ $\operatorname{arctg}(\sqrt{3})$.
- ⋆ $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- ⋆ $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\right)$.

9. En utilisant les régles de dérivation, calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes (ne pas simplifier):

- ⋆ $f(x) = xe^x + 3^x$.
- ⋆ $\frac{\sin(x)}{\ln(x)}$.
- ⋆ $f(x) = (1 + cos^2(x))^5$

- ⋆ $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2 \mathbf{tg}(\ 2x)}$.
- ⋆ $f(x) = ln(2 + cos(x^2))$.
- ⋆ $f(x) = \mathbf{arctg}(\sqrt{x}e^x)$.
- ⋆ $f(x) = x\mathbf{tg}^2(x)$.
- ⋆ $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-9}{x^2+1}}$.
- ⋆ $f(x) = e^{-\sqrt{x}} \log_3(x^2 - 1) + 2^{3-x}$.
- ⋆ $f(x) = \sqrt{x}\mathbf{arctg}(x) + e^{\cos x}$.
- ⋆ $f(x) = 3^{1-x} + \log_{10} x + \sin(x^3) + (\cos x)^2$.
- ⋆ $f(x) = \frac{\arccos x}{x^4}$.
- ⋆ $f(x) = x^2\sqrt{x^2 - 4}$

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)
- Disponibilité:
  - ⋆ Lundi 13:00 - 15:00, MRR B-214
  - ⋆ Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214
  - ⋆ Jeudi 12:00 - 13:15, MRR B-214