UNIVERSITÉ DE MONCTON
CAMPUS DE MONCTON

Optimisation - MATH 3163

Examen Final

24 avril 2024, Durée 3 heures

Professeur : Ibrahima Dione

Nom personne étudiante : ______________________________

Numéro personne étudiante : __________________________

Prenez le temps de lire l'examen au complet avant de commencer. Vérifiez qu'il y a 9 pages à votre examen. L'examen est composé de **4 questions**, pour un total de 45 points.

- Ceci est un examen à livres fermés et aucune note du cours n'est permise.
- L'utilisation de la calculatrice n'est pas permise.
- Répondez aux questions dans l'espace fourni.
- Utilisez le verso des feuilles si nécessaire.

Exercice I (12 points)

Soit $f(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2$ où (a,b) est donné tel que $b > a$ et soit $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \leq x\}$.

1. Montrer que le problème

$$\min_{(x,y)\in S} f(x,y) \tag{1}$$

possède une solution unique et déterminer cette solution.

2. Résoudre le problème (1) géométriquement.

3. En déduire l'expression de l'opérateur projection $P_S(a, b)$.

Exercice II (8 points)

Soit A une matrice carrée d'ordre n, symétrique et définie positive. Soit c un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et b un nombre réel. Considérons le problème suivant :

$$\begin{aligned} &\min \tfrac{1}{2} x^T A x \\ &\text{sous la contrainte :} \\ &c^T x = b \end{aligned} \tag{2}$$

Montrer que le problème (2) possède une seule solution x^* et qui est donnée par

$$x^* = \frac{b}{c^T A^{-1} c} A^{-1} c.$$

Exercice III (12 points)

Résoudre analytiquement le problème suivant :

$$
\begin{aligned}
&\min\, (x-1)^2 + y^2 \\
&\text{sous les contraintes :} \\
&x + y \leq 0 \\
&2x + y \leq 0
\end{aligned}
$$

Exercice IV (13 points)

Soit à résoudre le problème

$$\begin{array}{l} \min x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 - x \\ \text{sous la contrainte :} \\ 3x + 2y = 6 \end{array} \tag{3}$$

1. Résoudre analytiquement le problème (3).

2. Appliquer la méthode de pénalisation au problème (3) et déterminer la solution (x_r, y_r) du problème pénalisé (r étant le paramètre de pénalisation).

3. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{r \to +\infty} (x_r, y_r) \text{ et } \lim_{r \to +\infty} r g(x_r, y_r) \text{ où } g(x, y) = 3x + 2y - 6.$$

Votre conclusion.