UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Arithmétique (MATH 1413) - Chapitre 3: La soustraction et l’ordre

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Introduction

- ✓ Nous avons défini au chapitre 2 les opérations d'addition et de multiplication de nombres naturels [1].
- ✓ Nous introduisons ici la soustraction pour enrichir notre collection d'opérations numériques.
- ✓ Ce qui permettra de donner une définition arithmétique de la relation d'ordre sur les nombres naturels.

Le problème de la soustraction

Introduction de la soustraction

- ✓ On peut formuler les opérations d'addition et de multiplication vue au chapitre 2 sous la forme de problèmes appellés:
  - ⋆ «**problème de l'addition**»,
  - ⋆ «**problème de la multiplication**».
- ✓ Ils consistent, sachant a et b, de poser l'addition $a + b$ ou la multiplication $a \times b$ sous la forme:
  - ⋆ du problème $a + b = ?$,
  - ⋆ ou du problème $a \times b = ?$.

- ✓ Nous définissons aussi la soustraction sous la forme du problème:

$$a + ? = b \tag{1}$$

- ✓ En d'autres termes, à partir de deux naturels, on recherche quel nombre peut s'ajouter au premier pour donner le deuxième.

- ✓ On qualifie le «**problème de la soustraction**» en (1) par: **recherche du complément**.

> **Note:** Le nombre satisfaisant l'égalité en (1) est le **complément** de a par rapport à b.

- ✓ La soustraction est introduite comme étant en quelque sorte l'**opération inverse** de l'addition.
- ✓ Il y a donc une opération **directe**, l'addition, à partir de laquelle est définie la soustraction.

Exemple 1.1:

- ✓ Le problème de soustraction $3+? = 5$ a pour solution 2.
- ✓ Le problème de soustraction $46+? = 48$ a aussi pour solution 2.
- ✓ Le problème de soustraction $0+? = 5$ a pour solution 5.

✓ Contrairement à l'addition ou à la multiplication, le problème de la soustraction n'a pas toujours de solution dans $\mathbb{N}$.

Exemple 1.2:

✓ Le problème de soustraction $5 + ? = 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.

Note:

- L'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ **n'est donc pas fermé pour la soustraction**.
- Par contre, lorsqu'un problème de soustraction a une solution, alors celle-ci est forcément **unique**.

Définition

- La **soustraction** des deux nombres naturels a et b, **lorsqu'elle existe**, est le nombre naturel solution de l'équation $a+? = b$.
- Ce nouveau nombre est désigné par la notation $b - a$ (qui se lit «**b moins a**») et on l'appelle la **différence de b et a**.
- Les nombres b et a s'appellent respectivement le **premier** et le **second terme** de la différence $b - a$.

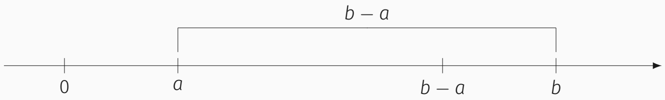
✓ À partir de sa définition, le problème de soustration s'écrit

$$a + (b - a) = b. \tag{2}$$

✓ L'égalité en (2) est appelée **l'égalité caractéristique de la différence**.

- ✓ La soustraction est vue comme une addition déguisée.
- ✓ L'interprétation géométrique de la différence $b - a$ s'obtient à partir de celle de l'addition.
- ✓ C'est-à-dire, la différence $b - a$ correspond à la longueur du segment de droite permettant d'aller du point a au point b.

- ✓ Ce graphique illustre le cas d'une différence $b - a$ inférieure à a (par exemple, $23 - 19 = 4 < 19$). Voici l'allure du graphique lorsque $b - a > a$.



Note:

- Si le problème de soustraction $a+? = b$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, on dira que la **différence $b - a$ n'est pas définie dans $\mathbb{N}$**.

- L'égalité caractéristique de la différence (2) peut s'exprimer sous forme d'une équivalence:

$$c = b - a \quad \Longleftrightarrow \quad a + c = b. \tag{3}$$

C'est cette équivalence qui justifie la technique usuelle de calcul consistant à changer le signe d'un terme lorsqu'il passe d'un côté à l'autre d'une égalité.

L’ordre et ses propriétés

✓ L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas fermé pour la soustraction: la différence $b - a$ n'existe pas lorsque le second terme (celui que l'on soustrait) excède le premier (celui dont on soustrait).

✓ Cela permet d'introduire la relation d'ordre entre nombres naturels:

Définition

- Etant donné deux nombres naturels a et b, nous disons que a est **plus petit ou égal** à b, ce qui s'écrit $a \leq b$, si et seulement si le problème de soustraction $a + ? = b$ a une solution dans $\mathbb{N}$.
- Nous disons aussi que b est **plus grand ou égal** à a, ce qui s'écrit $b \geq a$.
- Si de plus la différence $b - a$ est non nulle (c'est-à-dire si $b - a \in \mathbb{N}^{\star}$), nous disons alors que a est (**strictement**) **plus petit** que b ($a < b$), ou que b est (**strictement**) **plus grand** que a ($b > a$).

Note:

- On a donc:

$$\begin{aligned} a < b &\iff \text{il existe } x \in \mathbb{N}^\star \text{ tel que } a + x = b, \\ a \leq b &\iff \text{il existe } x \in \mathbb{N} \text{ tel que } a + x = b. \end{aligned}$$

> Dans les deux cas, le nombre x est égal à la différence $b - a$.

- Les deux relations $<$ et $\leq$ peuvent servir à exprimer l'ordre dans $\mathbb{N}$.

- La relation $<$ pourrait bien sûr être définie directement en termes de rangées de bâtons:

> $a < b$ lorsque la rangée de a s'épuise avant celle de b.

- ✓ Soit donc la droite numérique que l'on suppose, disposée à l'horizontale et orientée avec le sens croissant des naturels vers la droite.

- ✓ Alors, l'interprétation géométrique $a < b$ correspond au fait que le point a se trouve à la gauche du point b.

- ✓ Si on a que $a + x = b$ pour un $x \neq 0$, c'est donc que le point b peut être atteint par un bond de longueur x (non nulle) à partir du point a.

- O_1 - Antiréflexivité de $<$: Pour tout nombre naturel a,

$$a \not< a.$$

- O_2 - Antisymétrie de $<$: Pour tous les nombres naturels a et b,

$$\text{si } a < b, \text{ alors } b \not< a.$$

- O_3 - Transitivité de $<$: Pour tous les nombres naturels a, b et c,

$$\text{si } a < b \text{ et } b < c, \text{ alors } a < c.$$

Exemple 2.1:

✓ Si un entier n vérifie les inégalités $n > 5$ et $n < 9$, alors on peut l'écrire en une seule expression: $5 < n < 9$;

✓ Il ne saurait cependant être question de combiner les conditions $n > 5$ et $n > 11$ dans une écriture telle $5 < n > 11$.
Celle-ci pose un sérieux problème de lecture.

- O_4 - Compatibilité de $<$ avec l'addition: Pour tous les nombres naturels a, b et c,

$$\text{si } b < c, \text{ alors } a + b < a + c.$$

O_5 - Simplification d'une inégalité pour l'addition: Pour tous les nombres naturels a, b et c,

$$\text{si } a+b < a+c, \text{ alors } b < c.$$

O_6 - Compatibilité de $<$ avec la multiplication: Soit les nombres naturels a, b et c, avec $a \neq 0$; alors,

$$\text{si } b < c, \text{ alors } a \times b < a \times c.$$

Exemple 2.2: Nous avons par exemple $3 < 7$ mais $0 \times 3 \not< 0 \times 7$; de fait, $0 \times 3 = 0 \times 7 = 0$ car 0 est absorbant.

Note: C'est pourquoi à la propriété O_6, on s'est donné l'hypothèse $a \neq 0$.

■ O_7 - Simplification d'une inégalité pour la multiplication: Soit les nombres naturels a, b et c; alors,

$$\text{si } a \times b < a \times c, \text{ alors } b < c.$$

■ O_8 - Élément minimal: Pour tout nombre naturel a,

$$\text{si } a \neq 0, \text{ alors } a > 0.$$

- O_9 - $<$ est un ordre discret: Pour tous les nombres naturels a et b,

$$\text{si } a < b, \text{ alors } a + 1 \leq b.$$

- O_{10} - Trichotomie: Pour tous les nombres naturels a et b,

$$\text{ou bien } a < b, \text{ ou bien } a = b, \text{ ou bien } a > b.$$

Note:

- Les inégalités peuvent être additionnées et multipliées membre à membre.

$$\text{si } a < b \text{ et } c < d, \text{ alors } a + c < b + d \text{ et } a \times c < b \times d.$$

- Les inégalités ne peuvent généralement pas être soustraites membre à membre.

Exemple 2.3: Par exemple, $5 < 6$ et $2 < 4$. En soustrayant membre à membre, on obtient respectivement $5 - 2 = 3$ et $6 - 4 = 2$; or $3 \not< 2$.

Théorème

Pour tous les naturels n et b, si $b \neq 0$, alors $n \times b \geq n$.

Corollaire

Quel que soit le naturel n, on a $n^2 \geq n$. De façon plus précise, on vérifie

- ✓ $n^2 > n$ lorsque $n > 1$.
- ✓ $n^2 = n$ pour $n = 0$ ou 1.

Propriétés de la soustraction

Propriétés de la soustraction

- ✓ Nous dégageons les principales propriétés de la soustraction.
- ✓ Ces règles sont utiles dans la manipulation des expressions avec la soustraction.

S_1 - **Distributivité de la multiplication sur la soustraction**: Si a, b et c sont trois nombres naturels tels que $b \geq c$, alors,

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c.$$

Exemple 3.1: $3 \times (7 - 2) = 3 \times 7 - 3 \times 2$

- S_2 - Associativité $+, -$: Si a, b et c sont trois nombres naturels tels que $b \geq c$, alors,

$$(a+b)-c = a+(b-c).$$

- S_3 - La «Règle des signes»: Si a, b et c sont trois nombres naturels tels que $a \geq b+c$ et $b \geq c$, alors

  a. $(a-b)+c = a-(b-c)$

  b. $(a-b)-c = a-(b+c)$

Note:

- La condition $a \geq b + c$ est requise pour que la différence $a - (b + c)$ en $S_3(b)$ soit définie.

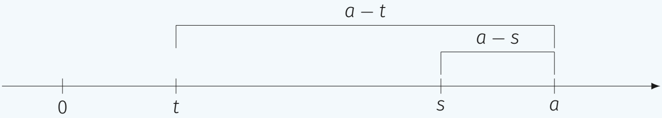
- L'expression «*Règle des signes*» est habituellement utilisée pour désigner les lois régissant les multiplications dans lesquelles interviennent des nombres négatifs:

  - ✓ négatif $\times$ négatif = positif,
  - ✓ négatif $\times$ positif = négatif.

  Il y a une analogie très forte avec les équations de S_3, lorsqu'on lit celles-ci de droite à gauche.

Théorème

Pour tous les naturels a, s et t, si $t < s < a$, alors $a - s < a - t$.



Égalité de différences

Égalité de différences

- ✓ Nous introduisons ici quelques faits de base concernant les différences de naturels.
- ✓ Nous noterons qu'une différence donnée de naturels peut se réécrire de plusieurs façons.

Théorème

Soit $u, v \in \mathbb{N}$ tels que la différence $u - v$ existe. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u - v = (u + k) - (v + k).$$

Exemple 4.1:

- ✓ $$25 - 8 = (25 + 36) - (8 + 36) = 61 - 44.$$

  Chacun des points 25 et 8 a été translaté d'une distance de 36 unités, de sorte que la différence de 17 qui les sépare se trouve préservée.

- ✓ Un tel déplacement des nombres sur lesquels on opère peut parfois s'avérer utile pour simplifier des calculs. Ainsi, reprenons la soustraction précédente, mais en translatant cette fois de 2 unités; on a alors

  $$25 - 8 = (25 + 2) - (8 + 2) = 27 - 10 = 17$$

- ✓ On pourrait même systématiser la chose de façon à en faire le fondement d'un algorithme de soustraction. Par exemple,

  $$631 - 386 = (631 + 14) - (386 + 14) = 645 - 400 = 245$$

- ✓ Nous examinons ici la question générale suivante: *quand deux différences de naturels sont-elles égales ?*

- ✓ Le prochain résultat nous fournit un critère utile à cet égard : *le tout peut se ramener à la vérification de l'égalité de deux sommes.*

Théorème

Soit $s, t, u, v \in \mathbb{N}$ tels que les différences $s - t$ et $u - v$ existent. Alors

$$s - t = u - v \quad \Longleftrightarrow \quad s + v = t + u$$

Exemple 4.2: L'égalité de différences $25 - 8 = 61 - 44$ peut se vérifier en constatant que $25 + 44 = 69 = 8 + 61$.

- ✓ *Qu'arrive-t-il si on soustrait plutôt un même k (dans la mesure où toutes les différences en jeu existent)?*

Corollaire

Soit $u, v, k \in \mathbb{N}$ tels que les différences $u - v$, $u - k$ et $v - k$ existent dans $\mathbb{N}$. Alors

$$u - v = (u - k) - (v - k)$$

Exemple 4.3:

- ✓ $61 - 44 = (61 - 36) - (44 - 36) = 25 - 8.$
- ✓ $5 - 2 = 4 - 1 = 3 - 0 = 3.$
- ✓ $41 - 24 = 40 - 23 = 39 - 22 = \cdots = 19 - 2 = 18 - 1 = 17 - 0 = 17.$

Note: Toute différence de naturels peut se ramener à une différence dont le second terme est nul.

Algorithmes de soustraction

Dans chacun des cas suivants, nous exécutons la soustraction 2504 − 938.

(a) Conventionnel[10]:

$$\begin{array}{rcccc} & \cancel{2} & {}^{1}\cancel{5} & {}^{1}\cancel{0} & {}^{1}4 \\ - & & 9 & 3 & 8 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 6 \end{array}$$

(b) De gauche à droite:

$$\begin{array}{rcccc} & 2 & {}^{1}5 & {}^{1}0 & {}^{1}4 \\ - & & 9 & 3 & 8 \\ \hline & \cancel{2} & \cancel{6} & \cancel{7} & 6 \\ & 1 & 5 & 6 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 6 \end{array}$$

(c) Classique:

$$\begin{array}{rcccc} & 2 & 15 & 10 & 14 \\ - & {}^{1} & 9^{1} & 3^{1} & 8 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 6 \end{array}$$ (se fait de droite à gauche)

Cet algorithme est une application du théorème 4.5.

[10] Au Québec !

(d) Par recherche du complément:

$$\begin{array}{r} 9\;3\;8 \\ +\quad ? \;\; \\ \hline 2\;5\;0\;4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1\;1\;1\;\;} \\ 9\;3\;8 \\ +\,1\;5\;6\;6 \\ \hline 2\;5\;0\;4 \end{array} \text{ (de droite à gauche)}$$

Réponse: 1566

(e) Par compensation:

$$\begin{array}{r} 2\;5\;0\;4 \\ -\quad 9\;3\;8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{+495} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{r} 2\;9\;9\;9 \\ -\,1\;4\;3\;3 \\ \hline 1\;5\;6\;6 \end{array}$$

(de droite à gauche ou de gauche à droite, “il n’y a plus d’emprunt”)

Cet algorithme est une application du théorème 4.5.

f)

$$\begin{array}{r} 2\;5\;0\;4 \\ +\quad 9\;0\;6\;1 \\ \hline 1\;1\;5\;6\;5 \\ -\,1 \qquad +1 \\ \hline 1\;5\;6\;6 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \longrightarrow \; 9999-938 \\ \\ \longrightarrow \; -10000+1 \\ \\ \end{array}$$

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)

- Disponibilités:
  - ⋆ Lundi 10H00 - 13H00, MRR B-214
  - ⋆ Mercredi 10H00 - 13H00, MRR B-214

- Manuels du cours:

[1] B. Hodgson and L. Lessard.
Arithmétique élémentaire (1re et 2^{e} parties).
coop Université Laval, Québec, Canada, 2002.