MAT 1910
Mathématiques de l'ingénieur II

Dione Ibrahima

Les Fonctions Vectorielles (suite)

Le théorème fondamental pour les intégrales curvilignes

- Théorème : Au chapitre I (théorème fondamentale de calcul II), on avait :

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)\,, \tag{1}$$

où F' est continue sur $[a, b]$. En prenant au vecteur gradient ∇f d'une fonction f de deux ou de trois variables comme à une sorte de dérivée de f, le théorème suivant peut être considéré comme une version du théorème fondamental pour les intégrales curvilignes.

Théorème (Le théorème fondamental pour les intégrales curvilignes)

Soit C une courbe lisse, paramétrée par la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Soit f une fonction différentiable de deux ou de trois variables dont le vecteur gradient ∇f est continu sur C. Alors

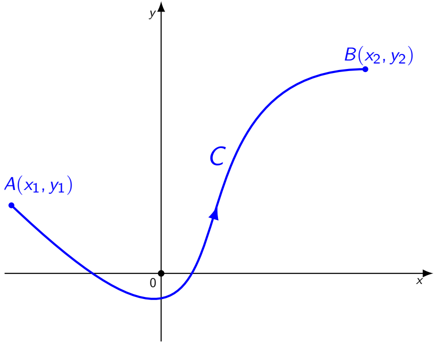
$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))\,. \tag{2}$$

- Remarque :

Ce théorème fondamental indique que pour calculer l'intégrale curviligne d'un champ vectoriel conservatif (le champ de gradient de la fonction potentiel f), il suffit de connaître la valeur de f aux extrémités de C.

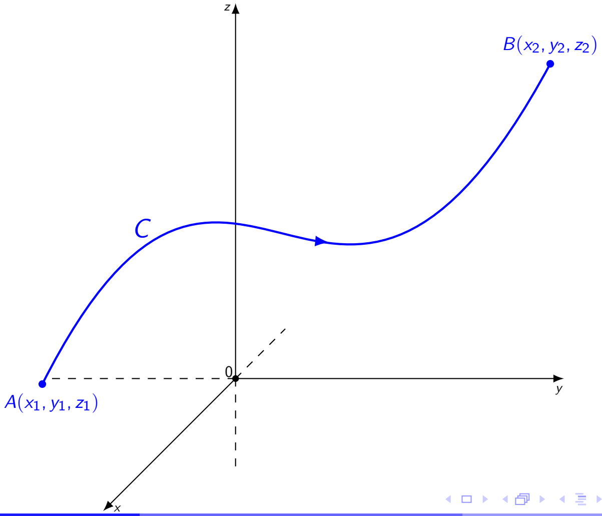
1. Si f est une fonction de deux variables et C une courbe plane de point initial $A(x_1, y_1)$ et de point terminal $B(x_2, y_2)$ (voir figure), alors (2) s'écrit :

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A) = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)\,. \qquad (3)$$



2. Si f est une fonction de trois variables et C une courbe de l'espace de point initial $A(x_1, y_1, z_1)$ et de point terminal $B(x_2, y_2, z_2)$, alors (2) s'écrit :

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A) = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1). \tag{4}$$



Indépendance du chemin

- Définitions :

Définitions

- Si $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ est un champ vectoriel continu sur un domaine D, on dit que l'intégrale $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r}$ est indépendant du chemin si $\int_{C_1} \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r}$, quels que soient les chemins C_1 et C_2 dans D ayant les mêmes extrémités.
- Soit $\overrightarrow{\mathbb{F}}(x, y, z) = \big(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)\big)$ un champ défini sur D.
  - On appelle divergence de $\overrightarrow{\mathbb{F}}$, le champ scalaire défini comme suit :
  $$div(\overrightarrow{\mathbb{F}}) = \nabla \cdot \overrightarrow{\mathbb{F}} := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$
  - On appelle rotationnel du champ $\overrightarrow{\mathbb{F}}$, le champ vectoriel défini par la relation
  $$rot(\overrightarrow{\mathbb{F}}) := \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$
- Un champ vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ est un champ de gradient (ou un champ potentiel) si, il existe un champ scalaire f défini sur le domaine de $\overrightarrow{\mathbb{F}}$, pour lequel $\overrightarrow{\mathbb{F}} := \nabla f$. Dans ce cas, f est appelé potentiel associé à $\overrightarrow{\mathbb{F}}$.

Exemple : Montrer que $\overrightarrow{\mathbb{F}}(x, y, z) := (x, y, z)$ est un champ potentiel.

Remarque

1. Le potentiel associé à un champ n'est pas unique. En effet, si on ajoute au potentiel f n'importe quelle constante c, c'est à dire $f+c$, alors on a $\nabla(f+c) = \nabla f = \overrightarrow{\mathbb{F}}$. Ce qui signifie que $f+c$ est aussi un autre potentiel de $\overrightarrow{\mathbb{F}}$. Inversement deux potentiels associés à un champ vectoriel différent d'une constante.
2. Pour qu'un champ $\overrightarrow{\mathbb{F}} = (F_1, F_2, F_3)$ soit potentiel, il faut que $rot(\overrightarrow{\mathbb{F}}) = \vec{0}$:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \ \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \ \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Exemple :

i. Montrer que $\overrightarrow{\mathbb{G}}(x, y, z) := (xz, y, -zx)$ n'est pas un champ potentiel.
ii. Trouver, si possible, un potentiel associé au champ $\overrightarrow{\mathbb{H}}(x, y, z) := (y, z, x)$.

- Théorèmes :

Théorème 1

$\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r}$ est indépendante du chemin dans D si et seulement si $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = 0$ pour tout chemin fermé C dans D.

Théorème 2

Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ continu sur un domaine ouvert et connexe D. Si $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r}$ est indépendante du chemin dans D, alors $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ est un champ conservatif sur D ; c'est à dire qu'il existe une fonction f telle que $\nabla f = \overrightarrow{\mathbb{F}}$.

Théorème 3

Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{F}} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ défini sur un domaine simplement connexe D, où P et Q ont des dérivées premières continues sur D. Le champ $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ est conservatif si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ sur D.

Si $\overrightarrow{\mathbb{F}} = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k}$, alors il est conservatif si et seulement si $rot(\overrightarrow{\mathbb{F}}) := (0,0,0)$, c'est à dire

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Exemples :

i. Dire si le champ vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{F}}(x,y) = (x-y)\vec{i} + (x-2)\vec{j}$ est conservatif.

ii. Dire si le champ vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{F}}(x,y,z) = (y+1, y+x, -2z)$ est conservatif.

iii. Calcul de potentiel : Trouver, si possible, un potentiel associé aux champs : $\vec{v} = (y+1, y+x, -2z)$.

iv. Soit le champ vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{F}} = (3+2xy)\vec{i} + (x^2 - 3y^2)\vec{j}$.

   a. Trouver une fonction f telle que $\overrightarrow{\mathbb{F}} = \nabla f$.

   b. Calculer l'intégrale curviligne $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r}$, où C est la courbe définie par

$$\vec{r}(t) = e^t \sin(t)\vec{i} + e^t \cos(t)\vec{j}, \; 0 \leq t \leq \pi.$$

Solution :

iii. Pour que f soit un potentiel associé, il faut que les trois dérivées partielles de f coincident avec les composantes de $\vec{v}$, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 1 \quad (5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y + x \quad (6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2z. \quad (7)$$

On intégre l'équation (5) par rapport à x. La constante d'intégration peut dépendre de y et z. Ainsi donc on a :

$$f(x,y,z) = xy + x + c_1(y,z). \quad (8)$$

On reporte l'équation (8) dans la seconde équation donnée en (6), on a :

$$x + \frac{\partial c_1}{\partial y} = y + x \Rightarrow \frac{\partial c_1}{\partial y} = y. \tag{9}$$

Vue que la fonction c_1 dépend aussi de z, en intégrant par rapport à y, on a :

$$c_1(y, z) = \frac{y^2}{2} + c_2(z). \tag{10}$$

En reportant (10) dans (8), ceci conduit à la nouvelle équation suivante :

$$f(x, y, z) = xy + x + \frac{y^2}{2} + c_2(z). \tag{11}$$

On reprend le même processus en reportant (11) dans l'équation (7), il vient :

$$\frac{\partial c_2}{\partial z} = -2z \Rightarrow c_2(z) = -z^2 + c_3, \tag{12}$$

où c_3 est une constante. Et en remplacant cette dernière expression (12) dans (11), on obtient une fonction dont les trois dérivées partielles satisfont les équations (5)-(7), c'est à dire un potentiel, défini à une constante additive près :

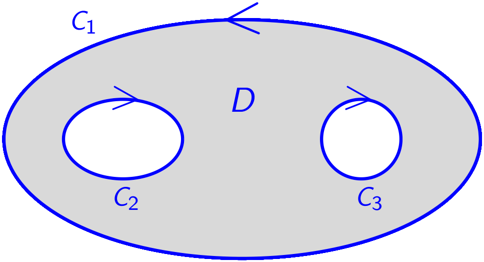
$$f(x, y, z) = xy + x + \frac{y^2}{2} - z^2 + c_3. \tag{13}$$

Le théorème de Green

- Orientation d'une courbe :

Définition

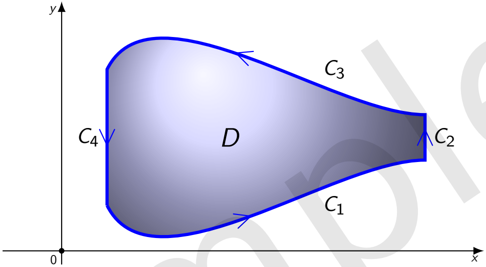
On dira que l'on oriente positivement la courbe C si un observateur qui se déplace sur la courbe suivant l'orientation établie, voit toujours le domaine D à sa gauche.



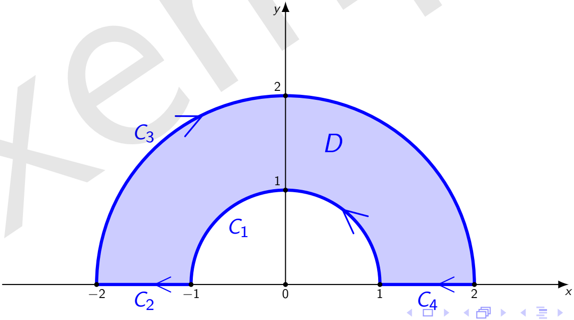
$C := C_1 + C_2 + C_3$ est la frontière de la region D

Exemples :

i. Orientation dans le sens positif de la courbe $C := C_1 + C_2 + C_3 + C_4$:



ii. Orientation dans le sens négatif de la courbe $C := C_1 + C_2 + C_3 + C_4$:

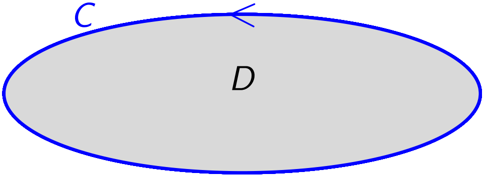


- Forme scalaire du théorème de Green : Le théorème de Green établit une relation entre une intégrale curviligne le long d'un contour simple fermé C et une intégrale double sur le domaine D du plan délimité par C. Ce théorème est basé sur le sens de parcours conventionnel définit précédemment.

Théorème

Soit C une courbe plane simple, fermée, lisse par morceaux, orientée dans le sens positif et soit D le domaine délimité par C. Si P et Q sont pourvues de dérivées partielles continues dans une région ouverte qui contient D, alors

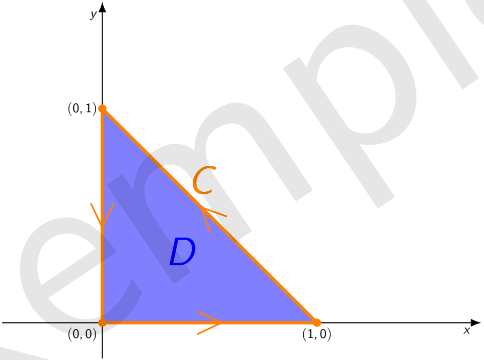
$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{14}$$



Exemples :

i. Calculer $\int_C x^4\,dx + xy\,dy$, où C est la courbe triangulaire composée des trois segments de $(0,0)$ à $(1,0)$, de $(1,0)$ à $(0,1)$ et de $(0,1)$ à $(0,0)$.

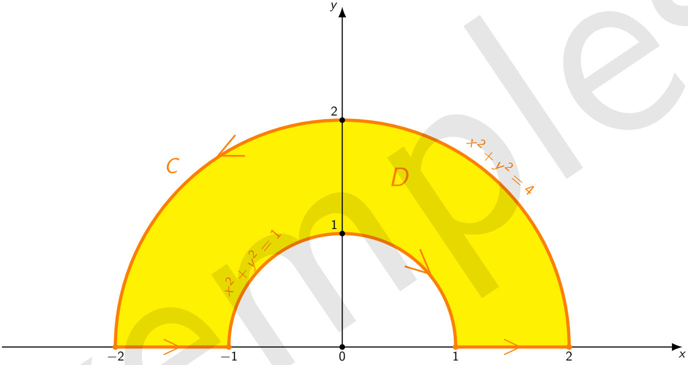
Réponse : $\int_C x^4\,dx + xy\,dy = \frac{1}{6}$.



ii. Calculer $\int_C (3y - e^{\sin x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\,dy$, où C est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 9$, orienté dans le sens positif.

Réponse : $\int_C (3y - e^{\sin x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\,dy = 36\pi$.

iii. Calculer $\int_C y^2\,dx + 3xy\,dy$, où C est la frontière du demi-anneau circulaire supérieur formé par les cercles $x^2+y^2=1$ et $x^2+y^2=4$.



$$
\begin{aligned}
\int_C y^2\,dx + 3xy\,dy &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right] dA \\
&= \iint_D y\,dA = \int_0^{\pi}\int_1^2 (r\sin\theta)\,r\,dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_1^2 r^2\,dr = \frac{14}{3}.
\end{aligned}
$$

Remarque

On peut aussi appliquer le théorème de Green dans le sens inverse. Par exemple, cela peut servir à calculer des aires, puisque l'aire d'un domaine D est définie par $\int\int_D 1\, dA$. Il faudrait tout simplement chercher P et Q tels que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$.
Et des choix simples possibles sont :

$$\begin{array}{rclrclrcl} P(x,y) & = & 0 & P(x,y) & = & -y & P(x,y) & = & -\frac{1}{2}y \\ Q(x,y) & = & x & Q(x,y) & = & 0 & Q(x,y) & = & \frac{1}{2}x. \end{array}$$

Le théorème de Green donne alors la formule suivante pour calculer l'aire de D

$$A(D) \quad := \int_C x\, dy = -\int_C y\, dx = \tfrac{1}{2}\int_C x\, dy - y\, dx, \tag{15}$$

où C est la frontière du domaine D, orientée dans le sens positif.

iv. Calculer l'aire du domaine limité par l'éllipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Réponse :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_C x\, dy - y\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)dt - (b\sin t)(-a\sin t)dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab. \end{aligned}$$

Exercices du Livre Stewart (édition MODULO) à Faire :

- Section 9.3 : Exercices 3, 7, 11, 13, 17, 23, 25, 33.
- Section 9.4 : Exercices 3, 5, 9, 11, 13, 21, 25.

Références :

- Livre Stewart (édition MODULO), page 393-408 : section 9.3 - section 9.4
- Livre Stewart, page 925 - 939 : section 13.3 - section 13.4
- Pour un cours de Maple complet : http ://alamanya.free.fr/