UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Hiver 2025

SÉRIE 9 - Algèbre linéaire (MATH 2673)

Exercice 1

Soit $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Décrire l'ensemble H des vecteurs $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ orthogonaux à v.
[**Indication** : Distinguer les cas $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.]

Exercice 2

On pose $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$ et on considère l'ensemble W des vecteurs $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$. Quel théorème du chapitre 2 peut-on utiliser pour justifier le fait que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Décrire W géométriquement.

Exercice 3

Soit $\mathbf{y}$ un vecteur orthogonal à deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Montrer que $\mathbf{y}$ est orthogonal à tous les vecteurs $\mathbf{w}$ de $\text{Vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.
[**Indication** : Les vecteurs de $\text{Vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ sont les vecteurs de la forme $\mathbf{w} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}$; montrer que $\mathbf{y}$ est orthogonal à un vecteur w de ce type.]

Exercice 4

Soit $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $D = \text{Vect}\{\mathbf{u}\}$. Montrer que l'application $\mathbf{x} \mapsto \text{proj}_D\, \mathbf{x}$ est linéaire.

Exercice 5

Soit $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p)$ une base orthogonale d'un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la projection orthogonale sur W définie par $T(\mathbf{x}) = \text{proj}_W\, \mathbf{x}$. Montrer que T est une application linéaire.