LE RISQUE DE CREDIT ET LA VALORISATION DES TITRES CORPORATIFS

Ibrahima Dione (Ph.D.) & Van Son Lai (Ph.D., CFA)

Simulations Stochastiques et Applications en Finance

- Approche Structurelle d’Évaluation de la Dette Risquée
- Assurance du Risque de Défaut
- Approche Forme Réduite d’Évaluation de la Dette Risquée

- Le risque de crédit est la perte subie par les bailleurs de fonds suite au défaut des contreparties.
- Il est une composante du risque de la dette et représente un des principaux risques auxquels font face la plupart des firmes comme les institutions financières.
- Cependant, il coexiste avec un ensemble d'autres risques découlant tous des activités courantes d'une firme ou d'une banque.
- Suite à la crise de 2008, la quantification et la gestion du risque de crédit revêtent toute leur importance grâce à l'avènement de Bale III.
- Deux approches fondamentales modernes de mesure et de gestion du risque de crédit existent: l'approche structurelle et l'approche forme réduite.

Approche Structurelle d'Évaluation de la Dette Risquée

La valeur de toute dette contractée par une entreprise est fonction de trois facteurs élémentaires:

- Les taux exigés sur une dette sans risque (obligation gouvernementale).
- Les caractéristiques et les restrictions spécifiées dans les clauses du contrat de la dette : échéance, taux de coupons, fonds d'amortissement, séniorité de la dette en cas de défaut.
- La probabilité de défaut : probabilité que la firme fasse défaut à ses engagements et ne rembourse pas la dette ou bien ne la rembourse que partiellement.

- Sous les hypothèses de marché complet et parfait, l'évolution de la valeur de la firme représentée par la valeur totale de ses actifs (A) est

$$dA(t) = \mu A(t)dt + \sigma A(t)dW(t)$$

où μ est le taux de rendement espéré instantané de la firme, σ est la volatilité instantanée des rendements de la firme et W est un Wiener.

- Soit $Y = P(A, t)$ un actif financier dont la valeur est fonction de la valeur de la firme A et du temps t. Par le lemme d'Itô, on a

$$\begin{aligned} dY(t) &= \mu_Y Y(t)dt + \sigma_Y Y(t)dW(t) \\ &= \left[\frac{1}{2}\sigma^2 A^2(t)\frac{\partial^2 P}{\partial A^2} + \mu A(t)\frac{\partial P}{\partial A} + \frac{\partial P}{\partial t}\right] dt + \sigma A(t)\frac{\partial P}{\partial A}dW(t) \end{aligned}$$

- Des deux équations précédentes, on obtient

$$\begin{cases} \mu_Y Y = \frac{1}{2}\sigma^2 A^2 \frac{\partial^2 P}{\partial A^2} + \mu A \frac{\partial P}{\partial A} + \frac{\partial P}{\partial t} \\ \sigma_Y Y = \sigma A \frac{\partial P}{\partial A} \end{cases}$$

- En appliquant l'absence d'opportunité d'arbitrage, l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le titre $Y = P(A, t)$ est

$$\frac{1}{2}\sigma^2 A^2 \frac{\partial^2 P}{\partial A^2} + \mu A \frac{\partial P}{\partial A} + \frac{\partial P}{\partial t} - rP = 0$$

- Sous un marché complet et parfait, on considère une entreprise financée par une classe unique et homogène de dette et par des actions.

- La dette (un actif financier de valeur $P(A, t)$) consiste en l'émission d'une obligation zéro-coupon de maturité T et de valeur faciale F.

- Soit $S(A, t)$ la valeur de l'avoir des actionnaires (équité de la firme) à l'instant t, on a: $A(t) = P(A, \tau) + S(A, t)$ avec les conditions aux limites

$$P(0, \tau) = S(0, t) = 0, \;\; P(A, \tau) \leq A(t), \; \forall \, t \;\; \text{et} \;\; \tau = T - t$$

- La valeur de l'équité à l'échéance de la dette $S(A, T) = \max(A(T) - F, 0)$.

Note: La valeur de l'équité est un call sur la valeur totale des actifs de la firme de prix d'exercice la valeur faciale de la dette.

- En appliquant la formule de Black & Scholes, on obtient

$$S(A, t) = A(t)N(x_1) - Fe^{-r(T-t)}N(x_1 - \sigma\sqrt{T-t})$$

$$x_1 = \frac{\ln\left(A(t)/F\right) + \left(r + \sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

- La valeur de la dette à l'échéance T est: $P(A, 0) = \min(A, F)$.

- Puisque $P(A, \tau) = A(t) - S(A, t)$, on déduit la valeur de la dette

$$P(A, T-t) = Fe^{-r(T-t)}\left[N(x_1 - \sigma\sqrt{T-t}) + \frac{1}{d^\star}N(-x_1)\right],$$

$$d^\star = \frac{Fe^{-r(T-t)}}{A(t)}$$

où $d^\star$ est le quasi ratio d'endettement.

- La perte espérée (EL: expected loss) est obtenu par

$$\begin{aligned} EL &= Fe^{-r(T-t)} - P(A, T-t) \\ &= N(-x_1 + \sigma\sqrt{T-t}) \times Fe^{-r(T-t)} \times \left[1 - \frac{1}{d^\star}\frac{N(-x_1)}{N(-x_1 + \sigma\sqrt{T-t})}\right] \end{aligned} \tag{1}$$

- De la formule (1), on retrouve les expressions suivantes:

  ⋆ La probabilité de défaut (PD): $PD = N(-x_1 + \sigma\sqrt{T-t})$,

  ⋆ L'exposition à défaut (EAD): $EAD = Fe^{-r(T-t)}$

  ⋆ La perte étant donné le défaut (LGD): $LGD = \left[1 - \frac{1}{d^\star}\frac{N(-x_1)}{N(-x_1+\sigma\sqrt{T-t})}\right]$

- La valeur d'une dette peut être formulée en terme de prime de risque

$$P(A, T-t) = Fe^{-R(t,T)(T-t)}$$

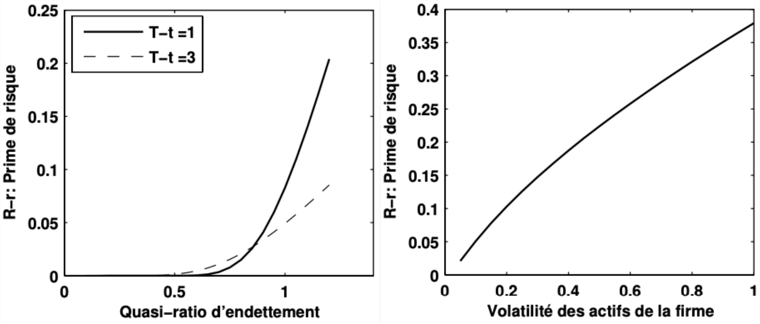
où $R(t,T)$ est appelé le rendement à échéance et l'expression $R(t,T) - r$ est la prime de risque de défaut.

- La structure à terme du credit spread est définie par

$$\begin{aligned} R(t,T) - r &= -\frac{1}{T-t} \ln\left(N\left(x_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right) + \frac{1}{d^\star} N\left(-x_1\right)\right) \\ &= -\frac{1}{T-t} \ln\left(N\left(x_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right) + \frac{A(t)}{Fe^{-r(T-t)}} N(-x_1)\right) \end{aligned}$$

- La prime de risque (credit spread) est fonction de deux variables: la volatilité des actifs de la firme endettée et le rapport de la valeur présente de la dette (actualisée au taux sans risque) et de la valeur de la firme (définissant le quasi-ratio d'endettement).

- Nous avons représenté à la figure qui suit, la prime de risque en fonction du quasi ratio d'endettement (à gauche) et de la volatilité des actifs (à droite).



Évolution de la prime de risque en fonction de $d^{\star}$ (à gauche) et de σ (à droite).

- La prime de risque (credit spread) est une fonction croissante du quasi-ratio d'endettement et de la volatilité de l'entreprise.

- Par ailleurs, la volatilité des actifs comprend une part provenant de facteurs systématiques et une autre due à ceux non systématiques.

Note: $N\left(x_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right)$ est la probabilité qu'à l'échéance le prêt sera remboursé en sa totalité et $1 - N\left(x_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right)$ est la probabiliteé de défaut.

- Pour analyser le risque de la dette par rapport au risque global de l'entreprise, on introduit la mesure ν

$$\begin{aligned} \nu(d^\star, T-t) &= \frac{\sigma_Y}{\sigma} \\ &= A\frac{\partial P/\partial A}{P} = \frac{N(-x_1)}{N(-x_1) + d^\star N(x_1 - \sigma\sqrt{T-t})} \end{aligned} \tag{2}$$

où σ_Y est la volatilité de la dette et σ celle des actifs de la firme.

- On peut noter à partir de (2) que $0 \leq \nu \leq 1$:

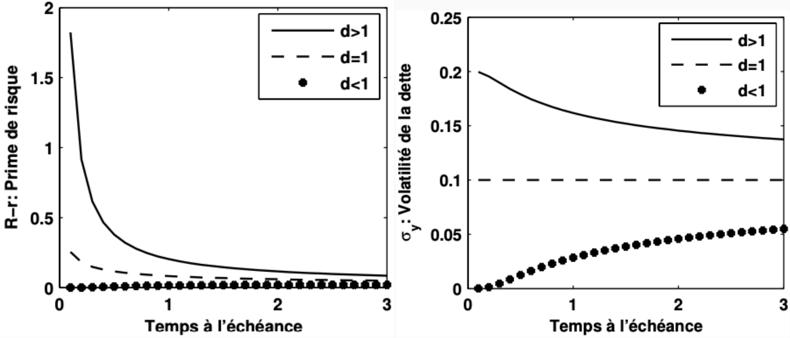
> **Note:** La dette d'une entreprise ne peut jamais être plus risquée (volatile) que l'entreprise elle-même.

- Lorsque le quasi-ratio d'endettement devient excessivement grand, le prix de la dette risquée P tend vers la valeur de la firme. Dans ce cas, la probabilité que la firme fasse défaut à l'échéance est certaine

$$\lim_{d^\star \to +\infty} P(A, T-t) = A \quad \text{and} \quad \lim_{d^\star \to +\infty} \nu(d^\star, T-t) = 1$$

- Lorsque le quasi-ratio d'endettement tend vers sa limite inférieure 0, la valeur actuelle du paiement futur est très petite comparée à la valeur marchande de la firme. Alors, la firme est presque certaine qu'elle honorera ses engagements

$$\lim_{d^\star \to 0} P(A, T-t) = Fe^{-r(T-t)} \quad \text{and} \quad \lim_{d^\star \to 0} \nu(d^\star, T-t) = 0$$



Prime de risque et volatilité de la dette en fonction de l'échéance.

- Il est possible à partir des données marchandes, de déterminer la volatilité de l'équité de la firme si les actions de la firme sont négociées à la bourse.

- Si on note respectivement A et σ_A la valeur marchande et la volatilité du total des actifs de la firme, S et σ_S la valeur marchande et la volatilité de l'équité de la firme, F la valeur faciale de la dette.

- Si on connait S et σ_S, nous pouvons obtenir A et σ_A en résolvant le système d'équations suivant

$$
\begin{aligned}
S &= A(t)N(x) - Fe^{-r\tau}N(x - \sigma_A\sqrt{\tau}) \\
\sigma_A &= \frac{\sigma_S S}{A(t)N(x)}
\end{aligned}
$$

avec

$$
x = \frac{\ln\left(A(t)/F\right) + (r + \sigma_A^2/2)\tau}{\sigma_A\sqrt{\tau}}
$$

Assurance du Risque de Défaut

- Considérons à présent une firme qui emprunte un montant F à une banque en émettant des obligations.

- À l'échéance T, la valeur de la dette est $P(A, 0) \equiv D(T) = \min(A(T), F)$ et la valeur de l'équité (capital action) est $S(T) = \max(A(T) - F, 0)$.

> **Note:** Si la probabilité que l'évènement $\{A(T) - F < 0\}$ est supérieure à zéro, alors il y a risque de faillite.

- Supposons une troisième partie (endosseur) qui garantit la perte sans défaut de paiement. Le montant versé par l'endosseur est:

$$G(T) = \max(F - A(T), 0)$$

- En garantissant la dette, l'endosseur a émis une option de vente qui est détenue par les actionnaires de la firme. La valeur de la garantie à l'instant t est

$$G(t) = Fe^{-r(T-t)}N(-x_1 + \sigma\sqrt{T-t}) - A(t)N(-x_1)$$

où $N(\cdot)$ est la distribution cumulative de la loi normale standard $N(0, 1)$

$$x_1 = \frac{\ln(A(t)/F) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

- La valeur de la dette risquée peut être réécrite sous la forme suivante

$$P(A,\tau) = Fe^{-r\tau} - Put(A,\tau)$$

> **Note:** La valeur de la dette montre qu'elle est équivalente à une dette sans risque à la laquelle on déduit la valeur d'une option de vente.

- Du côté de la banque, détenir la dette risquée de l'entreprise correspond à avoir une position longue dans un titre sans risque et une position courte dans l'option de vente.

- Pour assurer son portefeuille de dette risquée, c'est-à-dire éliminer sa composante risquée qui est la position courte du put, la banque doit fermer sa position dans le put. Elle doit donc entrer en position longue dans un put identique pour immuniser son portefeuille.

> **Note:** Selon Babbel (1989), la stratégie d'assurance de la banque est de se procurer d'une option de vente sur les actifs de l'entreprise endettée avec un prix d'exercice F correspondant à la valeur nominale de la dette, et une échéance T coïncidant avec celle de la dette.

- Cependant, le rendement espéré du titre de dette net du coût de la stratégie d'assurance ne dépassera pas le taux sans risque.

- Si la banque cherche à réaliser un rendement supérieur au taux sans risque, elle doit ajuster le prix d'exercice de l'option de vente en fonction de la valeur plancher de sa stratégie d'assurance. La valeur plancher choisie est de la forme αF.

- Selon Babbel (1989) la fraction α choisie pour la réduction de la valeur plancher de l'option dépendra de paramètres comme le levier financier et l'activité de l'emprunteur. Le paramètre α optimal peut être obtenu par des traitements actuariels en se basant sur les critères économiques influents.

- Dans le contexte d'assurance de portefeuille, Leland (1980) ainsi que Brennan et Solanski (1981) montrent que la stratégie d'assurance optimale serait de détenir un portefeuille d'options, rédigées sur le même actif mais dont les prix d'exercice sont fixés à des seuils différents $\alpha_i F$ (où $0 < \alpha_i \leq 1$ pour $i = 1, \cdots, n$, et n est le nombre d'options).

Approche Forme Réduite d'Évaluation de la Dette Risquée

▷ Notre objectif est de montrer en contexte risque neutre que le prix à l'instant t de l'obligation zéro coupon qui effectue un paiement final de X à la date de maturité T, est donné par

$$P(t,T) = E_t^Q\left[e^{-\int_t^T R(u,T)du}X\right]$$

où $R(t,T) = r(t) + h(t)L(t)$, avec

- ⋆ $r(t)$ le taux d'intérêt de court terme sans risque,
- ⋆ $h(t)$ le taux de hasard pour la faillite à la date t,
- ⋆ $L(t)$ la portion espérée de perte sur la valeur marchande en cas de défaut à t,
- ⋆ La quantité hL est qualifiée de taux moyen de perte risque neutre (risk-neutral-mean loss rate) due à la possibilité de défaut,
- ⋆ E_t^Q est l'espérance sous la probabilité risque neutre Q, conditionnelle à l'inforation disponible jusqu'à l'instant t.

- S'il n'y a pas de paiements intermédiaires avant l'échéance de l'obligation, alors le prix de l'obligation s'écrit

$$P(t,T) = h(t)e^{-r(t)}E_t^Q\left[\varphi(t+1)\right] + (1-h(t))\, e^{-r(t)}E_t^Q\left[P(t+1,T)\right]$$

  où $h(t)$ est la probabilité de faire défaut, $\varphi(t+1)$ est la valeur de l'obligation après défaut, et $P(t+1,T)$ est la valeur de l'obligation s'il n'y a pas défaut.

- Tenant compte de la portion espérée de perte en cas de défaut $L(t)$, on a

$$E_t^Q\left[\varphi(t+1)\right] = (1-L(t))\, E_t^Q\left[P(t+1,T)\right]$$

- Et sachant que le prix de l'obligation peut s'écrire comme suit

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)}E_t^Q\left[P(t+1,T)\right]$$

- Alors $R(t,T)$ est défini comme suit

$$e^{-R(t,T)} = h(t)\,(1-L(t))\, e^{-r(t)} + (1-h(t))\, e^{-r(t)}$$

- La prime de risque qui est le credit spread est donc

$$R(t,T) - r(t) = -\ln\left(h(t)\,(1-L(t)) + (1-h(t))\right)$$

$$R(t,T) \simeq r(t) + h(t)L(t)$$

- L'évènement défaut de l'obligation est modélisé par un processus de sauts $H(t) = 1_{\{t \geq \tau\}}$. Le premier saut survient au temps τ. $H(t)$ prend une valeur 1 s'il y a défaut et 0 dans le cas contraire. On peut décomposer H par $H = I + M$, avec

$$I(t) = \int_0^{\tau \wedge t} h(u)du = \int_0^t h(u)\mathbf{1}_{\{u<\tau\}}du, \; t \geq 0$$

et M est une martingale. La variable h est le taux de hasard sous la probabilité risque neutre.

- Sous la probabilité risque neutre, le prix de l'obligation est

$$\begin{aligned} P(t,T) &= E_t^Q\left[\int_t^\tau e^{\left(-\int_t^{\tau\wedge s} r(u)du\right)} dC(\tau \wedge s)\right] \\ &= E_t^Q\left[\int_t^T e^{\left(-\int_t^{s} R(u,T)du\right)} dC(s)\right] \end{aligned}$$

- Pour avoir l'égalité entre les deux expressions précédentes pour tout $t \leq \tau$, il faudrait que

$$R(t,T) = r(t) + h(t)L(t)$$

- Pour lectures complémentaires: [2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]

[1] F. Black and J. Cox.
Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions.
Journal of Finance, 31:351–367, 1976.

[2] F. Black and M. Scholes.
The pricing of options and corporate liabilities.
Journal of Political Economy, 81:637–654, 1973.

[3] D. Das.
Credit derivatives: CDOs and structured credit products.
John Wiley & Sons Inc., 3rd edition, 2005.

[4] D. Duffie and K. Singleton.
Modelling term structures of defaultable bonds.
Review of Financial Studies, 12:687–720, 1999.

[5] D. Duffie and K. Singleton.
Credit risk : Pricing, measurement, and management.
Princeton University Press, 2003.

[6] D. L. Jarrow, R. A. and S. M. Turnbull.
A markov model for the term structure of credit spreads.
Review of Financial Studies, 10:481–523, 1997.

[7] D. Lando.
Credit risk modeling : Theory and applications.
Princeton University Press, 2004.

[8] R. C. Merton.
Theory of rational option pricing.
Bell Journal of Economics and Management Science, Spring, pages 141–183, 1973.

[9] R. C. Merton.
On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates.
Journal of Finance, 2:449–470, 1974.

[10] R. C. Merton.
An analytic derivation of the cost of deposit insurance and loan guarantees: An application of modern option pricing theory.
Journal of Banking and Finance, pages 3–11, 1977.

[11] P. J. Schonbucher.
Credit derivatives pricing models.
Wiley, 2003.