



## Calcul Différentiel (MATH 1073) - Annexe A: Intervalles, inégalités et valeurs absolues

---

 Ibrahima Dione

 Département de Mathématiques et de Statistique

➤ Intervalle

➤ Les inégalités

➤ La valeur absolue

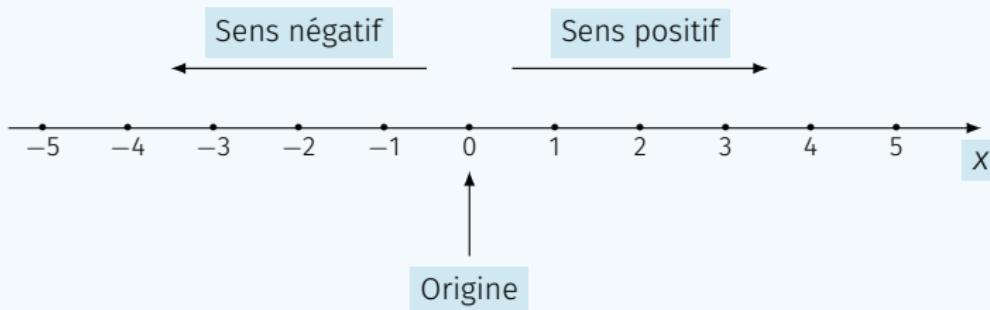
➤ Exercices suggérés

## Intervalles

---

### Droite réelle

Nous pouvons géométriquement représenter les nombres réels par des points sur une droite.



**Définition**

Un **intervalle** est l'ensemble des nombres compris entre deux valeurs réelles  $a$  et  $b$ . Par exemple, si  $a < b$ :

- L'**intervalle ouvert** de  $a$  jusqu'à  $b$  noté  $]a, b[$ , est décrit par

$$]a, b[ = \{x \mid a < x < b\}$$



**Note:** Les extrémités de l'intervalle,  $a$  et  $b$ , sont exclues.

- L'**intervalle fermé** de  $a$  jusqu'à  $b$  noté  $[a, b]$ , est décrit par

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$



**Note:** Les extrémités de l'intervalle,  $a$  et  $b$ , sont comprises.

## Définition

Un **intervalle** est également l'ensemble des nombres supérieurs (ou inférieurs, ou supérieurs ou égaux, ou inférieurs ou égaux) à une valeur réelle  $a$ . Par exemple:

- L'intervalle infini, défini par l'ensemble des nombres réels supérieurs à  $a$ , est représenté par

$$]a, +\infty[ = \{x \mid x > a\}$$


- L'intervalle infini, défini par l'ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à  $a$ , est représenté par

$$[a, +\infty[ = \{x \mid x \geq a\}$$


Note: Le symbole  $+\infty$  ne sert qu'à indiquer que l'intervalle s'étend indéfiniment du côté positif.

Notation	Description ensembliste	Représentation graphique
$]a, b[$	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b[$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$]a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
$]a, \infty[$	$\{x \mid x > a\}$	
$[a, \infty[$	$\{x \mid x \geq a\}$	
$] - \infty, b[$	$\{x \mid x < b\}$	
$] - \infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$] - \infty, \infty[$	$\mathbb{R}$ (ensemble des nombres réels)	

## Les inégalités

---

Soit  $a, b, c$  et  $d$  des nombres réels.

1. Si  $a < b$ , alors  $a + c < b + c$ .

**Exemple 2.1:**  $4 < 10$ , donc  $4 - 2 < 10 - 2 \implies 2 < 8$

2. Si  $a < b$  et  $c < d$ , alors  $a + c < b + d$ .

**Exemple 2.2:**  $4 < 5$  et  $1 < 10$ , donc  $4 + 1 < 5 + 10 \implies 5 < 15$

3. Si  $a < b$  et  $c > 0$ , alors  $ac < bc$ .

**Exemple 2.3:**  $-6 < -3$  et  $2 > 0$ , donc  $(-6)(2) < (-3)(2) \implies -12 < -6$

4. Si  $a < b$  et  $c < 0$ , alors  $ac > bc$ .

**Exemple 2.4:**  $-6 < -3$  et  $-2 < 0$ , donc  $(-6)(-2) > (-3)(-2) \Rightarrow 12 > 6$

5. Si  $0 < a < b$ , alors  $1/a > 1/b$ .

**Exemple 2.5:**  $0 < 2 < 3$ , donc  $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

**Attention !**

Quand on multiplie (ou on divise) les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif, il faut changer le sens de l'inégalité.

**Exemple 2.6:**  $-9 < -3x < 3 \implies 3 > x > -1$

### Exemple 2.7:

▷ Résolvez l'inégalité  $1 + x < 7x + 5$ .

▷ Résolvez l'inégalité  $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ .

▷ Résolvez  $x^3 + 3x^2 > 4x$ .

## La valeur absolue

---

## Définition

- La **valeur absolue** d'un nombre réel  $a$ , noté  $|a|$ , est définie par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad (1)$$

- D'un point de vue géométrique, la valeur absolue  $|a|$  est la distance entre le point  $a$  et l'origine sur la droite numérique.



- Comme les distances sont toujours positives ou nulles, on a  $|a| \geq 0$  quel que soit  $a$ .

### Exemple 3.1:

- $| - 3 | = 3$
- $\left| \sqrt{2} - 1 \right| = \sqrt{2} - 1$
- $| 3 - \pi | = \pi - 3$

**Exemple 3.2:** Comment écrire  $|3x - 2|$  sans employer le symbole de valeur absolue.

- ▷ Le symbole  $\sqrt{\phantom{x}}$  signifie «la racine carrée positive de».
- ▷ Donc,  $\sqrt{r} = s$  signifie  $s^2 = r$  et  $s \geq 0$ .
- ▷ De ce fait, l'équation  $\sqrt{a^2} = a$  n'est pas toujours vraie (elle n'est vraie que si  $a \geq 0$ ).
- ▷ Si  $a < 0$ , alors  $-a > 0$  et donc  $\sqrt{a^2} = -a$ .
- ▷ Compte tenu de la définition en (1), l'équation suivante est vraie pour toute valeur de  $a$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

### Exemple 3.3:

- $\sqrt{(-5)^2} = |-5|$
- $\sqrt{(2x-5)^2} = |2x-5|$

## Propriétés des valeurs absolues

Soit  $a$  et  $b$  des nombres réels et  $n$  un entier. Alors, on a

$$1. \quad |ab| = |a||b|$$

$$2. \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

$$3. \quad |a^n| = |a|^n$$

### Exemple 3.4:

- $|(-4)8| = |-4||8| = 4 \times 8 = 32.$

- $\left| \frac{-6}{7} \right| = \frac{| -6 |}{| 7 |} = \frac{6}{7}.$

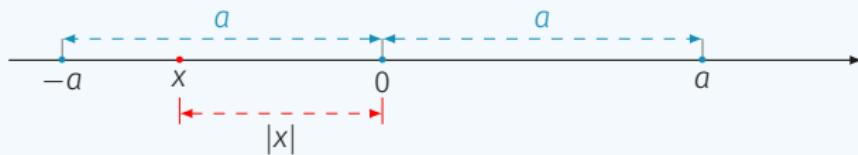
- $|(-2)^5| = |-2|^5 = 2^5 = 32.$

Pour résoudre des équations ou des inéquations qui contiennent des valeurs absolues, il est souvent utile de faire appel aux énoncés suivants.

On suppose  $a > 0$ . Alors

4.  $|x| = a$  si et seulement si  $x = \pm a$ .

5.  $|x| < a$  si et seulement si  $-a < x < a$



6.  $|x| > a$  si et seulement si  $x > a$  ou  $x < -a$ .

On suppose  $a$  et  $b$  des nombres réels quelconques. Alors

7. la distance entre  $a$  et  $b$  est la valeur absolue de la différence, à savoir  $|a - b|$ , qui est aussi égale à  $|b - a|$ .



Longueur d'un segment =  $|a - b|$

### Exemple 3.5:

- Résolvez  $|2x - 5| = 3$ .

### Exemple 3.6:

- Résolvez  $|x - 5| < 2$ .

- Résolvez  $|3x + 2| \geq 4$ .

## Exercices suggérés

---

**1.** Résoudre

$$\star |x^2 - 3x| \geq 4$$

$$\star x^3 \leq x^2 + 6x$$

$$\star |x - 1| = -x$$

**2.** Écrivez les expressions suivantes sans le symbole de valeur absolue (en simplifiant votre réponse le plus possible).

$$\star 3x + |x - 4|$$

$$\star |x^2 - 4|$$

$$\star |x^2 - 6x - 7|$$

 **Ibrahima Dione** ([ibrahima.dione@umanitoba.ca](mailto:ibrahima.dione@umanitoba.ca))

 **Disponibilité:**

Lundi 13:00 - 15:00, MRR B-214

Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214

Jeudi 12:00 - 13:15, MRR B-214