Applications Linéaires et Matrices

Sommaire

1 Représentation matricielle d'une application linéaire

Dans ce chapitre tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

Définition 1.1

Soient V et W deux espaces vectoriels sur un même corps K, avec $\dim V = n$ et $\dim W = m$. Soient $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une base de V et $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ une base de W. Soit $F : V \longrightarrow W$ une application linéaire.

- Alors, on a

$$\begin{aligned} F(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ F(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ F(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

- La matrice suivante

$${}_C[F]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

est appelée **représentation matricielle de F par rapport aux bases B et C**.

En fait, on a

$${}_C[F]_B = \Big({}_C[F(v_1)] \cdots {}_C[F(v_j)] \cdots {}_C[F(v_n)]\Big).$$

${}_C[F]_B$ est une matrice de format $m \times n$ où $m = \dim W$ et $n = \dim V$.

Exemple 1.1 : Soit l'application linéaire $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definie par

$$F(x,y) = (x+3y, 2x-y, y).$$

1. Déterminons ${}_C[F]_B$ où B est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et C est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $B = \{e_1, e_2\}$. Alors,

$$F(e_1) = F(1,0) = (1,2,0) \quad \Longrightarrow \quad {}_C[F(e_1)] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F(e_2) = F(0,1) = (3,-1,1) \quad \Longrightarrow \quad {}_C[F(e_2)] = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$${}_C[F]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $\forall\, v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ 2x-y \\ y \end{pmatrix} = {}_C[F(v)],$$

et donc ${}_C[F]_B\,{}_B[v] = {}_C[F(v)]$.

2. Soit $B' = \{(1,1), (-1,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminons ${}_C[F]_{B'}$ où C est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a,

$$F(1,1) = (4,1,1) \quad \Longrightarrow \quad {}_C[F(1,1)] = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(-1,1) = (2,-3,1) \quad \Longrightarrow \quad {}_C[F(-1,1)] = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$${}_C[F]_{B'} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, si $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ alors ${}_C[F(v)] = {}_C\,[F]_{B'B'}[v]$. En effet, $v=a_1(1,1)+a_2(-1,1)$, et donc

$$\begin{aligned}(a_1-a_2, a_1+a_2) &= (x,y), \quad \text{d'où}\\ a_1 = \frac{x+y}{2} \quad &\text{et} \quad a_2=\frac{y-x}{2}.\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}{}_C[F]_{B'B'}[v] &= \begin{pmatrix} 4 & 2\\ 1 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_1+2a_2\\ a_1-3a_2\\ a_1+a_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} x+3y\\ 2x-y\\ y\end{pmatrix} = {}_C[F(v)].\end{aligned}$$

Proposition 1.1

Soit $F: V \longrightarrow W$ une application linéaire. Soient B une base de V et C une base de W. Alors, $\forall\, v\in V,\ {}_C[F(v)] = {}_C[F]_{BB}[v]$.

Preuve :

Posons $B=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $C=\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ et

$${}_C[F]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

où

$${}_C\left[F\left(v_j\right)\right] = \begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix},\ j=1,\ldots,n,$$

c'est-à-dire $F\left(v_j\right) = \Sigma_{i=1}^m a_{ij}w_i$. Soit $v\in V$, alors

$$v=\sum_{j=1}^n x_jv_j \quad \text{et} \quad {}_B[v] = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Alors,

$$F(v)=\sum_{j=1}^{n} x_j F\left(v_j\right)=\sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) w_i$$

et donc

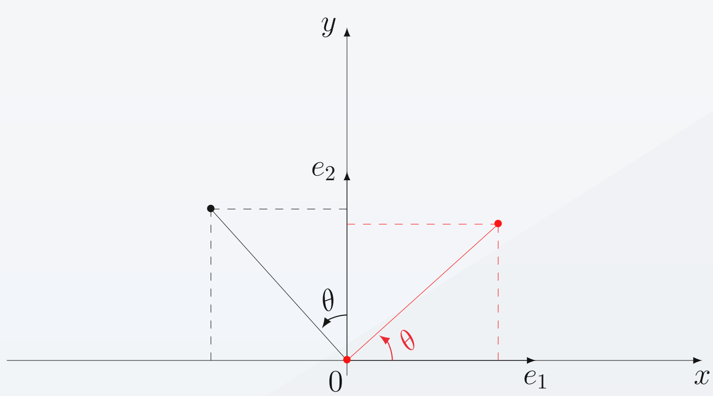
$${}_C[F(v)]=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad \square$$

c'est-à-dire

$${}_C[F(v)]={}_C[F]_{B\,B}[v].$$

Exemple 1.2 : Rotation d'angle θ

Soit $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tel que $F(e_1)=(\cos\theta, \sin\theta)$ et $F(e_2)=(-\sin\theta, \cos\theta)$.



$B=\{e_1, e_2\}$ est la base canoniaque de $\mathbb{R}^2$. Alors

$${}_B\left[F\left(e_1\right)\right]=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad {}_B\left[F\left(e_2\right)\right]=\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

et donc

$${}_B[F]_B=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Maintenant, soit $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a ${}_B[v] = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} {}_B[F(v)] = {}_B[F]_{B\,B}[v] &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où $F(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$.

Exemple 1.3 : Soit V un espace vectoriel de dimension n et soit B une base de V. Alors,

$$\boxed{{}_B\left[I_V\right]_B = I_n}$$

En effet, soit $B = \{v_1, \dots v_n\}$. Alors,

$$I_V\left(v_j\right) = v_j, \forall\, j \in \{1, \dots, n\}, \quad \text{et donc}$$

$${}_B\left[I_V\left(v_j\right)\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j^{\text{ième}} = \text{composante}$$

Par conséquent,

$${}_B\left[I_V\right]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

2 Propriétés des représentations matricielles

Propriété 2.1

Soient V et W deux espaces vectoriels avec $\dim V = n$ et $\dim W = m$. Soient B une base de V et C une base de W. Soient $F : V \longrightarrow W$ et $G : V \longrightarrow W$ deux applications linéaires. Alors,

- ${}_C[F+G]_B = {}_C[F]_B + {}_C[G]_B$.
- $\forall\, k \in K,\ {}_C[kF]_B = k\,{}_C[F]_B$.

Preuve :

- En effet, $\forall\, v \in V$, on a

$$\begin{aligned} {}_C[F+G]_B\,{}_B[v] = {}_C[(F+G)(v)] &= {}_C[F(v)+G(v)] \\ &= {}_C[F(v)] + {}_C[G(v)] \\ &= {}_C[F]_B\,{}_B[v] +_C [G]_B\,{}_B[v] \\ &= \big({}_C[F]_B + {}_C[G]_B\big)\,{}_B[v] \end{aligned}$$

donc, $\forall\, v \in V$, nous avons

$${}_C[F+G]_B\,{}_B[v] = \left({}_C[F]_B +_C [G]_B\right)\,{}_B[v].$$

D'où

$${}_C[F+G]_B = {}_C[F]_B + {}_C[G]_B.$$

- De même pour montrer le second point, $\forall\, v \in V$, on a

$${}_C[(kF)(v)] = {}_C[kF(v)] = k\,{}_C[F(v)] = k\,{}_C[F]_B\,{}_B[v]$$

donc, $\forall\, v \in V$, on arrive à

$${}_C[kF]_B\,{}_B[v] = k\,{}_C[F]_B\,{}_B[v] \ \text{ d'où } \ {}_C[kF]_B = k\,{}_C[F]_B.$$

Théorème 2.1

Soient $F : U \to V$ et $G : V \to W$ deux applications linéaires. Soient A une base de U, B une base de V et C une base de W. Alors,

$${}_C[G \circ F]_A = {}_C[G]_B\,{}_B[F]_A.$$

Preuve :

$\forall u \in U$, on a

$$\begin{aligned} {}_C[G \circ F]_{AA}[u] = {}_C[(G \circ F)(u)] &= {}_C[G(F(u))] \\ &= {}_C[G]_{BB}[F(u)] \\ &= {}_C[G]_{BB}[F]_{AA}[u] \end{aligned}$$

Donc, $\forall u \in U$, on a

$$ {}_C[G \circ F]_{AA}[u] = {}_C[G]_{BB}[F]_{AA}[u], \text{ d'où } {}_C[G \circ F]_A = {}_C[G]_{BB}[F]_A $$

Corollaire 2.1

Soient V et W deux espaces vectoriels de **même dimension**. Soient $F : V \longrightarrow W$ une application linéaire et $A = {}_C[F]_B$, où B est une base de V et C une base de W. Alors, F est un isomorphisme si et seulement si A est inversible. Et dans ce cas, on a

$$ {}_B[F^{-1}]_C = A^{-1} = \left({}_C[F]_B\right)^{-1}. $$

Preuve :

- Supposons que F est un isomorphisme et montrons que A est inversible :
  On a $F^{-1} : W \to V$ telle que $F^{-1} \circ F = I_V$ et $F \circ F^{-1} = I_W$. Rappelons que $\dim V = \dim W = n$. Alors,

  $$\begin{aligned} {}_B\left[F^{-1} \circ F\right]_B = {}_B\left[I_V\right]_B &\implies {}_B[F^{-1}]_{CC}[F]_B = I_n \quad \text{(théorème précédent)} \\ &\implies {}_B[F^{-1}]_C A = I_n. \end{aligned}$$

  De même, on a

  $$\begin{aligned} {}_C[F \circ F^{-1}]_C = {}_C\left[I_W\right]_C &\implies {}_C[F]_{BB}[F^{-1}]_C = I_n \quad \text{(théorème précédent)} \\ &\implies A_B\left[F^{-1}\right]_C = I_n \end{aligned}$$

  donc $A^{-1} = {}_B\left[F^{-1}\right]_C$.
- Supposons maintenant que A est inversible, et montrons F est un isomorphisme.
  Soit $G : W \to V$ telle que ${}_B[G]_C = A^{-1}$. Alors, d'après le théorème précédent

  $$ {}_B[G \circ F]_B = {}_B[G]_{CC}[F]_B = A^{-1}A = I_n = {}_B\left[I_V\right]_B $$

  et donc $G \circ F = I_V$.
  De même, on a

  $$ {}_C[F \circ G]_C = {}_C[F]_{BB}[G]_C = AA^{-1} = I_n = {}_C\left[I_W\right]_C $$

  et donc $F \circ G = I_W$. D'où F est inversible et son inverse est $F^{-1} = G$. □

Exemple 2.1 : Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ. On a vu que F est un isomorphisme et

$$_B[F]_B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où B est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{aligned} _B\left[F^{-1}\right]_B &= \left(_B[F]_B\right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce n'est autre que la rotation d'angle $-\theta$.

3 Changements de Bases

Définition 3.1

Soient V un espace vectoriel de dimension n, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ deux bases de V. On a,

$$_{B'}[v] = {}_{B'}[I_V(v)] = {}_{B'}[I_V]_{B\,B}[v].$$

La matrice $P = {}_{B'}[I_V]_B$ est appeleé matrice de passage de la base B à la base B', et on a $_{B'}[v] = P_B[v]$ où

$$P = \left(_{B'}[v_1] \cdots {}_{B'}[v_j] \cdots {}_{B'}[v_n]\right).$$

Exemple 3.1 : Soient $B = \{(1,0),(1,1)\}$ et $B' = \{(3,1),(2,1)\}$ des bases de $\mathbb{R}^2$. Déterminons $P = {}_{B'}[I]_B$. On a,

$$(1,0) = a_1(3,1) + a_2(2,1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a_1 + 2a_2 & = 1 \\ a_1 + a_2 & = 0 \end{cases}$$

donc $a_2 = -a_1, a_1 = 1$ d'où

$$_{B'}[(1,0)] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(1,1) = a_1(3,1) + a_2(2,1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a_1 + 2a_2 & = 1 \\ a_1 + a_2 & = 1 \end{cases}$$

donc $a_1 = -1$ et $a_2 = 2$, d'où

$$ {}_{B'}[(1,1)] = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad P = {}_{B'}[I]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} $$

D'autre part, $\forall\, v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$ (x,y) = (x-y)(1,0) + y(1,1) \quad \text{et donc} \quad {}_B[v] = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}. $$

Alors,

$$ \begin{aligned} {}_{B'}[v] &= {}_{B'}[I]_{B\,B}[v] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad {}_{B'}[v] = \begin{pmatrix} x-2y \\ -x+3y \end{pmatrix}. \end{aligned} $$

Proposition 3.1

Soient B et B' deux bases d'un espace vectoriel V de dimension finie. Soit $P = {}_{B'}\,[I_V]_B$ la matrice de passage de la base B à la base B'. Alors P est inversible et

$$ P^{-1} = {}_B\,[I_V]_{B'} $$

est la matrice de passage de la base B' à la base B.

Preuve :

Comme I_V est un isomorplisme, alors P est inversible et on a

$$ I = {}_{B'}\,[I_V]_{B'} = {}_{B'}\,[I_V \circ I_V]_{B'} = {}_{B'}\,[I_V]_{B\,B}\,[I_V]_{B'} $$

d'où $P_B\,[I_V]_{B'} = I$. De même,

$$ I = {}_B\,[I_V]_B = {}_B\,[I_V \circ I_V]_B = {}_B\,[I_V]_{B'\,B'}\,[I_V]_B $$

c'est-à-dire ${}_B\,[I_V]_{B'}\,P = I$.
Alors, $P^{-1} = {}_B[I_V]_{B'}$. $\square$

Exemple 3.2 :

1. Reprenons l'exemple précédent, où $B = \{(1,0),(1,1)\}$ et $B' = \{(3,1),(2,1)\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$. On a déjà calculé la matrice de passage de B a B' et on a

$$ P = {}_{B'}[I]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. $$

Alors, la matrice de passage de B' à B est

$$ {}_B[I]_{B'} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. $$

2 Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = \{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ une autre base de $\mathbb{R}^3$.
Déterminons la matrice de passage de B à B' et ${}_{B'}[v]$ où $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calculons tout d'abord la matrice de passage de B' à B (car étant plus simple à obtenir)

$$ P = {}_B\left[I\right]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. $$

Alors, la matrice de passage de B à B' est ${}_{B'}[I]_B = P^{-1}$, déterminée comme suit :

$$ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$
$$ \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} $$
$$ \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1/4 & 5/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} $$

Donc ${}_{B'}[I]_B = P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Soit $v = (x,y,z)$, alors

$$ {}_{B'}[v] = {}_{B'}[I]_B {}_B[v] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} $$

et donc

$$ {}_{B'}[v] = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(3x - y - z) \\ \frac{1}{4}(-x + 3y - z) \\ \frac{1}{4}(-x - y + 3z) \end{pmatrix}. $$

Théorème 3.1

Soient V et W des e.v. de dimension finie, $F : V \to W$ une application linéaire, B et B' des bases de V, et C et C' des bases de W. Alors, si

$$A = {}_C[F]_B \text{ et } A' = {}_{C'}[F]_{B'},$$

on a $A' = P^{-1}AQ$, où $Q = {}_B[I_V]_{B'}$ et $P = {}_C\,[I_W]_{C'}$.

Preuve :

$$F = I_W \circ F \circ I_V$$

et donc

$$\begin{aligned} {}_{C'}[F]_{B'} &= {}_{C'}\,[I_W \circ F \circ I_V]_{B'} \\ &= {}_{C'}\,[I_W]_{CC}[F]_{BB}\,[I_V]_{B'} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $A' = P^{-1}AQ$. □

Le theoreme suivant est un cas particulier du théorème précédent.

Théorème 3.2

Soient V un e.v. de dimension finie, $F : V \longrightarrow V$ un opérateur linéaire, et B et B' des bases de V. Alors, si

$$A = {}_B[F]_B \text{ et } A' = {}_{B'}[F]_{B'}$$

et si $P =_B [I_V]_{B'}$ est la matrice de passage de la base B' à la base B, on a

$$A' = P^{-1}AP$$

Preuve :

$$\begin{aligned} A' = {}_{B'}[F]_{B'} &= {}_{B'}\,[I_V \circ F \circ I_V]_{B'} \\ &= {}_{B'}[I_V]_{BB}[F]_{BB}\,[I_V]_{B'} \end{aligned}$$

donc $A' = P^{-1}AP$. □

Définition 3.2

Deux matrices carrées A et A' sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que

$$A' = P^{-1}AP.$$

Note : Alors, deux matrices sont semblabes si et seulement si elles représentent le même opérateur linéaire.

Définition 3.3

Un opérateur linéaire $F : V \to V$ est dit **diagonalisable** s'il existe une base B de V telle que ${}_B[F]_B$ soit une matrice diagonale.

Soit A une représentation matricielle d'un opérateur linéaire F. Alors F est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Exemple 3.3 : Soit l'opérateur linéaire $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$T(x, y, z) = (-x + 2z, 12x - 2y - 6z, -4x + 5z)$$

Soit $B' = \{(1, 2, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 2)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminons $A =_B [T]_B$ et $A' =_{B'} [T]_{B'}$ où B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$A =_B [T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 12 & -2 & -6 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Soit $P^{-1} = {}_{B'}[I]_B$. Alors,

$$P = {}_B[I]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned} A' &= {}_{B'}[T]_{B'} = {}_{B'}[I]_{BB}[T]_{BB}[I]_{B'} \\ &= P^{-1}AP \\ A' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'opérateur T est diagonalisable.