Optimisation - MATH 3163

Examen Intra

11 mars 2024, Durée 1h45

Professeur : Ibrahima Dione

Nom personne étudiante : ______________________________

Numéro personne étudiante : __________________________

Prenez le temps de lire l'examen au complet avant de commencer. Vérifiez qu'il y a 8 pages à votre examen. L'examen est composé de **3 questions**, pour un total de 30 points.

- Ceci est un examen à livres fermés et aucune note du cours n'est permise.
- L'utilisation de la calculatrice n'est pas permise.
- Répondez aux questions dans l'espace fourni.
- Utilisez le verso des feuilles si nécessaire.

Exercice 1 (10 points)

1. Un hyperplan H dans $\mathbb{R}^n$, est un sous-ensemble défini par

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n,\ a^\top x = c \right\},$$

où $a^\top = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et c est un scalaire. Montrez que H est convexe.

2. Est-ce que le sous-ensemble

$$S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4\right\}$$

est convexe ? Justifiez votre réponse !

3. Soient g, h deux fonctions convexes définies de $S \to \mathbb{R}$, où le sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est convexe. Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in S : f(x) = \mathrm{Max}\,\{g(x); h(x)\}$$

est convexe sur S.

Exercice 2 (8 points)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$,

$$f(y) > f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x).$$

Démontrer que f est strictement convexe.

Exercice 3 (12 points)

Soit A une matrice carrée d'ordre n, symétrique et définie positive, b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et c un scalaire. Considérons le problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \tag{1}$$

où $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$.

1. Expliquez pourquoi le problème (1) admet une solution unique x^*. Déterminez la condition de stationnarité vérifiée par la solution x^*.

2. On cherche à résoudre numériquement le problème d'optimisation (1). Pour cela, on propose l'algorithme décrit par : x^0 donné, on calcule

$$\begin{aligned} d^k &= -\nabla f(x^k) \\ x^{k+1} &= x^k + \alpha\, d^k \end{aligned} \tag{2}$$

où le pas constant est donné par $\alpha = \dfrac{1}{\|A\|}$.

Soit $e^k = x^k - x^*$ l'erreur d'approximation de la solution x^*. Montrez que

$$e^{k+1} = (I - \alpha\, A)\, e^k$$

où I désigne la matrice identité d'ordre n.

3. Si nous supposons que cette erreur est majorée comme suit

$$\|e^k\| \leq \left(\frac{\kappa(A) - 1}{\kappa(A)}\right)^k \|e^0\|, \tag{3}$$

analysez la convergence de l'algorithme (2) selon les valeurs du conditionnement $\kappa(A)$ de la matrice A.