# Applications Linéaires

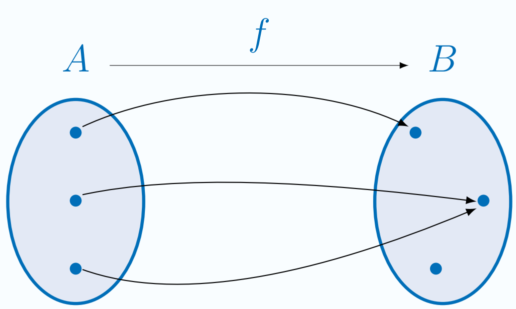
## Sommaire



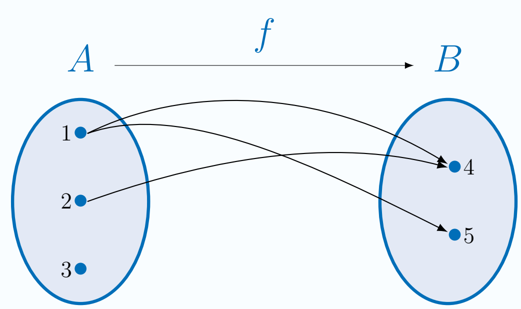
## 1 Définitions, exemples et propriétés

**Définition 1.1**

Soit $A$ et $B$ deux ensembles non vides. Une application $f$ de $A$ dans $B$ est un procédé qui à chaque élément de $A$ associe **un et un seul** élément de $B$.




Est une application de $A$ dans $B$.




N'est pas une application de $A$ dans $B$.

**Note :** L'application $f$ est ainsi notée comme suit :

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

## Définition 1.2

Soit $V$ et $W$ deux espaces vectoriels sur un même corps $K$. Une application $F : V \longrightarrow W$ est appelée **application linéaire** si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

- $\forall\, u, v \in V,\ F(u+v) = F(u) + F(v)$,
- $\forall\, k \in K,\ \forall\, u \in V,\ F(ku) = kF(u)$.

**Note :** Une application linéaire est aussi appelée **transformation linéaire** ou encore **homomorphisme**.

**Exemple 1.1 :**

- Soit l'application $F$ définie comme suit :

$$\begin{aligned} F\ :\ \ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto f(x,y,z) = (x,y) \end{aligned}$$

  $F$ est une application linéaire. En effet,
  - $\forall\, u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\forall\, v = (a',b',c') \in \mathbb{R}^3$, nous avons

$$\begin{aligned} F(u+v) &= F\left(a+a', b+b', c+c'\right) \\ &= (a+a', b+b') \\ &= (a,b) + (a',b') = F(u) + F(v). \end{aligned}$$

  - $\forall\, k \in \mathbb{R}$ et $\forall\, u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, nous avons aussi

$$F(ku) = F(ka,kb,kc) = (ka,kb) = k(a,b) = kF(u).$$

- Soit $V$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables. Soit l'application

$$\begin{aligned} D :\ V &\longrightarrow V \\ f &\longmapsto Df = f' \end{aligned}$$

  $D$ est une application linéaire.

- **Application nulle** : Soit $V$ et $W$ deux espaces vectoriels sur un même corps $K$. Soit la fonction $F$ définie par

$$\begin{aligned} F :\ V &\longrightarrow W \\ u &\longmapsto F(u) = 0 \end{aligned}$$

  $F$ est une application linéaire.

- **Application identité** : Soit $V$ un espace vectoriel et $I$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} I : \ V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto I(v) = v \end{aligned}$$

  $I$ est une application linéaire.

- Soit $A$ une matrice de format $m \times n$. Soit $T_A$ la fonction définie comme suit

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}_c^n &\longrightarrow \mathbb{R}_c^m \\ X &\longrightarrow T_A(X) = AX \end{aligned}$$

  $T_A$ est une application linéaire.

**Propriété 1.1**

Soit $F : V \to W$ une application linéaire. Alors,

1. $\forall\, u_1, \ldots, u_m \in V, \forall\, a_1, \ldots, a_m \in K$,

$$F\left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i F\left(u_i\right)$$

2. $F(0) = 0$.

***Preuve :***

1. À faire en guise d'exercice !
2. En effet, $\forall\, k \in K, \forall\, u \in V$, $F(ku) = kF(u)$. En particulier, en prenant $k = 0$, on obtient $F(0u) = 0F(u)$ et donc $F(0) = 0$. $\square$

**Exemple 1.2 :** Soit la fonction $G$ définie par

$$\begin{aligned} G : \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto G(x, y) = (x + 1, y) \end{aligned}$$

$G$ n'est pas une application linéaire car $G(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$.

**Théorème 1.1**

Soit $V$ et $W$ deux espaces vectoriels sur un même corps $K$. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de $V$ et soit $v_1, \ldots,\ v_n$ des vecteurs quelconques de $W$. Alors il existe une application linéaire et une seule $F : V \longrightarrow W$ telle que $F\left(u_i\right) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$.

***Preuve :***

- Sachant que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de $V$, alors tout élément $u \in V$ s'écrit
$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i.$$
Définissons la fonction $F$ comme suit :
$$\begin{aligned} F:\ V &\longrightarrow W \\ u &\longmapsto F(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \end{aligned} \tag{1}$$
Ainsi, par le choix de $F$ suivant la formule (1), on a bien $F(u_i) = v_i, i = 1, \ldots, n$.

- D'une part, $F(u+u') = F(u) + F(u')$. En effet,
$$\forall\ u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in V, \quad \forall\ u' = \sum_{i=1}^{n} a_i' u_i \in V, \ \text{ alors on a } \ u + u' = \sum_{i=1}^{n} (a_i + a_i') u_i$$
Et donc,
$$\begin{aligned} F(u+u') &= F\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_i') u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i + a_i') F(u_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i + a_i') v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = F(u) + F(u'). \end{aligned}$$

- D'autre part, $F(ku) = kF(u)$. En effet
$$\forall\ k \in K, \forall\ u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in V, \ \text{ alors } \ ku = \sum_{i=1}^{n} k a_i u_i.$$
Et donc,
$$\begin{aligned} F(ku) &= \sum_{i=1}^{n} k a_i v_i \\ &= k \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = kF(u). \end{aligned}$$
Nous venons d'établir, à partir des deux points précédents, que $F$ est linéaire !

- Il reste à montrer l'unicité de $F$. Pour cela, soit $G : V \rightarrow W$ une autre application linéaire telle que $G(u_i) = v_i, i = 1, \ldots, n$. Alors,

$$\begin{aligned} \forall\, u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in V, \quad \text{on a} \quad G(u) &= G\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i G(u_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} a_i v_i = F(u). \end{aligned}$$

Par suite, nous avons bien $G = F$. D'où l'unicité de l'application $F$. □

**Exemple 1.3 :**

- Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonione de $\mathbb{R}^3$. Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que

$$T(e_1) = (1, 0), \; T(e_2) = (-1, 1) \;\text{ et }\; T(e_3) = (1, 0).$$

Alors, $\forall\, u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$T(u) = T(x_1, x_2, x_3) = T\left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{3} x_i T(e_i).$$

Et donc

$$\begin{aligned} &T(x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0) + x_2(-1, 1) + x_3(1, 0), \;\text{ d'où} \\ &T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_2). \end{aligned}$$

- Soit $B = \{u_1 = (1, 1), u_2 = (1, -1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$. Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que

$$T(u_1) = (2, 1, -1) \;\text{ et }\; T(u_2) = (0, 1, 1)$$

Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Notons que les coordonnées $(x, y)$ du vecteur $u$ sont celles par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Cependant, pour calculer $T(u)$ il faudra d'abord déterminer les coordonnées de $u$ dans la base $B$ à travers laquelle l'application $T$ est définie. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} u = a_1 u_1 + a_2 u_2 \quad &\Leftrightarrow (x, y) = (a_1 + a_2, a_1 - a_2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = x \\ a_1 - a_2 = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a_1 = \frac{x + y}{2} \text{ et } a_2 = \frac{x - y}{2}. \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} T(u) &= T\left(a_1 u_1 + a_2 u_2\right) \\ &= a_1 T\left(u_1\right) + a_2 T\left(u_2\right) \\ &= a_1(2,1,-1) + a_2(0,1,1) \\ &= \left(2a_1, a_1+a_2, -a_1+a_2\right) = (x+y, x, -y). \end{aligned}$$

## 2 Noyau et image d'une application linéaire

**Définition 2.1**

Soit $F : V \longrightarrow W$ une application linéaire.

1. On appelle **noyau** de l'application $F$, noté $Ker\ F$, l'ensemble suivant :

$$Ker\ F = \{v \in V \mid F(v) = 0\}.$$

2. On appelle **image** de l'application $F$, noté $Im\ F$, l'ensemble suvant :

$$Im\ F = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ tel que } F(v) = w\}.$$

**Théorème 2.1**

Soit $F : V \longrightarrow W$ une application linéaire. Alors,

1. $Ker\ F$ est un sous-espace vectoriel de $V$.
2. $Im\ F$ est un sous-espace vectoriel de $W$.

***Preuve :***

- Montrons que $Ker\ F$ est un sous-espace vectoriel de $V$.
  - ✓ $0 \in Ker\ F$ car $F(0) = 0$.
  - ✓ $\forall\ u, v \in Ker\ F$, alors on $F(u) = 0$ et $F(v) = 0$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} F(u+v) &= F(u) + F(v) \\ &= 0 + 0 = 0 \quad \text{et donc} \quad u + v \in Ker\ F. \end{aligned}$$

  - ✓ $\forall\ k \in K, \forall\ u \in Ker\ F$, alors on $F(u) = 0$. Et donc, nous avons

$$F(ku) = kF(u) = k0 = 0, \quad \text{et donc} \quad ku \in Ker\ F.$$

Et donc, $Ker\ F$ est un sous-espace vectoriel de $V$.

- Montrons que $Im\ F$ est un sous-espace vectoriel de $W$.
  - ✓ $0 \in Im\ F$ car $F(0) = 0$.
  - ✓ $\forall\ w_1, w_2 \in Im\ F$, ils existent $u_1, u_2 \in V$ tels que
$$F(u_1) = w_1 \text{ et } F(u_2) = w_2.$$
Alors, $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2) = w_1 + w_2$ et donc $w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} F$.
  - ✓ $\forall\ k \in K, \forall\ w \in Im\ F$, il existe $u \in V$ tel que $F(u) = w$. Alors,
$$F(ku) = kF(u) = kw$$
et donc $kw \in Im\ F$.
Par suite, $Im\ F$ est un sous-espace vectoriel de $W$. □

**Proposition 2.1**

Soit $F:\ V \to W$ une application linéaire. Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ un système générateur de $V$. Alors $\{F(v_1), F(v_2), \ldots, F(v_m)\}$ est un système générateur de $Im\ F$.

***Preuve :***

Soit $w \in Im\ F$, alors $\exists\ v \in V$ tel que $w = F(v)$. Or, $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ est un système générateur de $V$. Alors,
$$v = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i, \text{ et donc } w = F\left(\sum_{i=1}^{m} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i F(v_i),$$
c'est-à-dire $\{F(v_1), F(v_2), \ldots, F(v_m)\}$ est un systeme génénateur de $Im\ F$.□

**Exemple 2.1 :** Soit $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par
$$F(x, y, z, t) = (x - y + z + t,\ 2x - 2y + 3z + 4t,\ 3x - 3y + 4z + 5t).$$

- Déterminons une base de $Im\ F$ et $dim\, Im\ F$.
Soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Comme $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est un système générateur de $\mathbb{R}^4$, alors $\{F(e_1), F(e_2), F(e_3), F(e_4)\}$ est un système générateur

de $Im\ F$. On a,

$$\begin{aligned} F(e_1) &= F(1,0,0,0) = (1,2,3) \\ F(e_2) &= F(0,1,0,0) = (-1,-2,-3) \\ F(e_3) &= F(0,0,1,0) = (1,3,4) \\ F(e_4) &= F(0,0,0,1) = (1,4,5) \end{aligned}$$

Soit la matrice suivante dont les lignes sont formées des vecteurs $F(e_1)$, $F(e_2)$, $F(e_3)$ et $F(e_4)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $\{(1,2,3),(0,1,1)\}$ est une base de $Im\ F$ et donc $dim\,Im\,F = 2$.

- Déterminons une base de $Ker\ F$ et $dim\,Ker\,F$. On a

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in Ker\ F \ &\Leftrightarrow\ F(x,y,z,t) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + 4t = 0 \\ 3x - 3y + 4z + 5t = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

La matrice associée à ce système homogène est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ qui est ligne équivalente à } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors le système homogène (2) est équivalent à

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - t = 0 \\ z + 2t = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + t \\ z = -2t \end{cases} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} Ker\ F &= \{(y+t, y, -2t, t) \mid y,t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1,1,0,0) + t(1,0,-2,1) \mid y,t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

et donc $Ker\ F = \mathrm{Vect}((1,1,0,0),(1,0,-2,1))$.
D'autre part, il est évident que $\{(1,1,0,0),(1,0,-2,1)\}$ est libre, et par conséquent c'est une base de $Ker\ F$ et $dim\ \ker F = 2$.

**Théorème 2.2**

Soit $V$ un espace vectoriel de dimension finie et soit $F : V \to W$ une application linéaire. Alors

$$\dim V = \dim\, Ker\, F + \dim\, Im\, F.$$

***Preuve :***

Soit $dim\, V = n$ et soit $\{u_1, \ldots, u_k\}$ une base de $Ker\, F$ où $k \leq n$. On peut compléter la base $\{u_1, \ldots, u_k\}$ en une base $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ de $V$. Montrons que $\{F(u_{k+1}), \ldots, F(u_n)\}$ est une base de $Im\, F$.

- $\forall\, w \in Im\ F, \exists\, u \in V$ tel que $w = F(u)$. Or $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$, et donc

$$\begin{aligned} w = F\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} a_i F(u_i) \\ &= \sum_{i=k+1}^{n} a_i F(u_i) \quad \text{car} \quad F(u_i) = 0, \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}. \end{aligned}$$

  Alors $\{F(u_{k+1}), \ldots, F(u_n)\}$ est un système générateur de $Im\, F$.

- Il reste à montrer que $\{F(u_{k+1}), \ldots, F(u_n)\}$ est linéairement indépendant. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^{n} a_i F(u_i) = 0 \Rightarrow F\left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i\right) = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i \in Ker\ F \\ &\Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i = \sum_{i=1}^{k} b_i u_i \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} (-b_i)\, u_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i = 0 \\ &\Rightarrow b_i = 0, i = 1, \ldots, k \text{ et } a_i = 0, i = k+1, \ldots, n, \end{aligned}$$

  car $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ est libre. Donc $\{F(u_{k+1}), \ldots, F(u_n)\}$ est libre.

  Par conséquent, $\{F(u_{k+1}), \ldots, F(u_n)\}$ est une base de $Im\ F$. On a donc

$$dim\, Im\, F = n - k = dim\, V - dim\, Ker\, F$$

  c'est-à-dire $dim\, V = dim\, Ker\, F + dim\, Im\, F$. □

**Définition 2.2**

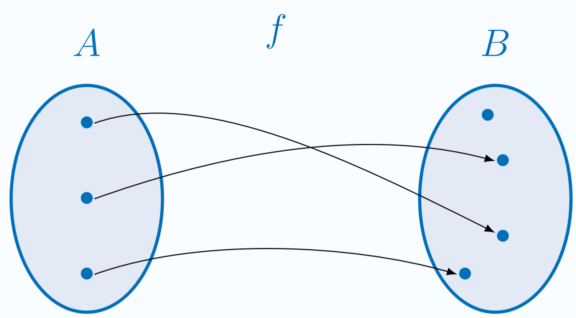
Soit $f : A \longrightarrow B$ une application.

1. $f$ est dite **injective** si

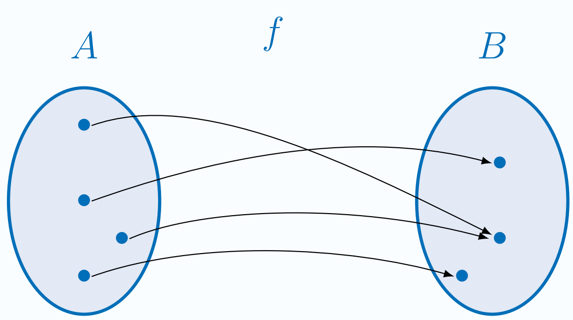
$$\forall\ a, b \in A; a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b).$$

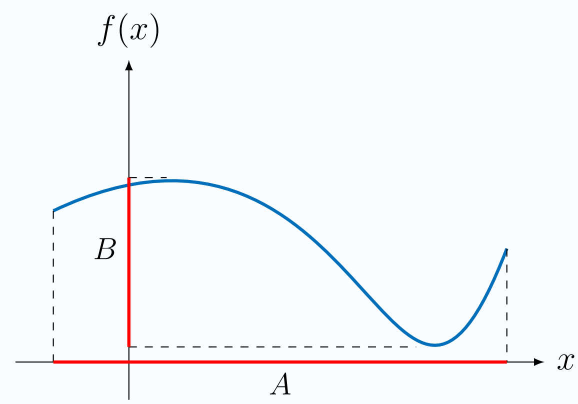
Ce qui est équivalent à

$$\forall\ a, b \in A; \quad f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

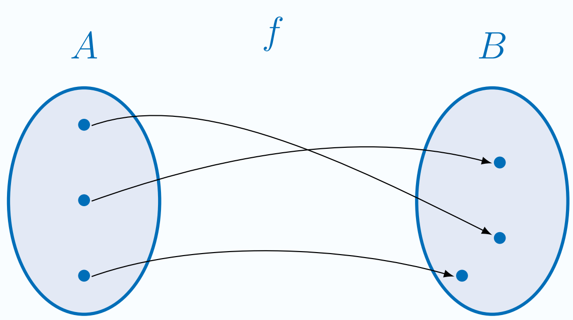


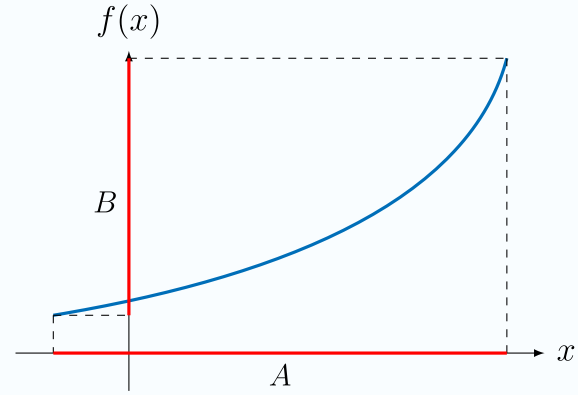

2. $f$ est dite **surjective** si son ensemble image est $B$, c'est-à-dire $Im\ f = B$.




3. $f$ est dite **bijective** si $f$ est à la fois **injective** et **sujective**.



**Proposition 2.2**

Une application linéaire $F : V \to W$ est injective si et seulement si $Ker\ F = \{0\}$.

***Preuve :***

- Supposons que $F$ est injective et montrons que $Ker\ F = \{0\}$.
  Soit $u \in Ker\ F$, alors $F(u) = 0$. Or $F(0) = 0$, donc $F(u) = F(0) \Rightarrow u = 0$ et donc $Ker\ F = \{0\}$.
- Supposons que $Ker\ F = \{0\}$ et montrons que $F$ est injective.

$$\begin{aligned}\forall\, u, v \in V \ \ \text{tel que } \ & F(u) = F(v)\\ & \Rightarrow F(u) - F(v) = 0\\ & \Rightarrow F(u - v) = 0\\ & \Rightarrow u - v \in Ker\ F = \{0\}\\ & \Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v.\end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

**Exemple 2.2 :** **(Rotation d'angle $\theta$)** Soit la fonction $F$ suivante

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (x, y) &\longmapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)\end{aligned}$$

où $\theta$ est un angle fixe. $F$ est une **application linéaire** (Vérifiez le !). De plus, $F$ est bijective. En effet :

- Commençons par montrer qu'elle est injective, c'est-à-dire $Ker\ F = \{0\}$. Soit $(x, y) \in Ker\ F$, alors

$$F(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{array}{r} x\cos\theta - y\sin\theta = 0\\ x\sin\theta + y\cos\theta = 0\end{array} \Rightarrow A\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}$$

  où $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ est inversible car $\det A = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$. Donc la seule solution du système linéaire est $(0, 0)$, d'où $Ker\ F = \{0\}$ et donc $F$ est injective.
- Pour montrer que $F$ est surjective, utilisons le résultat qui dit que

$$dim\,\mathbb{R}^2 = dim\,Ker\,F + dim\,Im\,F.$$

  Alors, $2 = 0 + dim\,Im\,F \Rightarrow dim\,Im\,F = 2$. Or, $Im\,F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, alors $Im\,F = \mathbb{R}^2$ car $dim\,Im\,F = dim\,\mathbb{R}^2$.

**Définition 2.3**

Une application linéaire $F : V \longrightarrow W$ est dite un **isomorphisme** si elle est bijective.

**Théorème 2.3**

Soient $V$ et $W$ deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $dim\,V = dim\,W$, et soit $F : V \to W$ une application linéaire. Alors, $F$ est un isomorphisme si et seulement si $Ker\,F = \{0\}$.

***Preuve :***

- Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \text{F isomorphisme} \quad &\Rightarrow F \;\text{ est injective} \\ &\Rightarrow \operatorname{Ker} F = \{0\}. \end{aligned}$$

- Montrons maintenant l'implication dans l'autre sens :

$$\operatorname{Ker} F = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \text{F isomorphisme}$$

  - ⋆ Du fait que $\operatorname{Ker} F = \{0\}$, alors $F$ est injective (voir proposition précédente) !
  - ⋆ D'autre part, comme $dim\,V = dim\,Ker\,F + dim\,Im\,F$ et $Ker\,F = \{0\}$, alors $dim\,Im\,F = dim\,V$ $(= dim\,W$ par hypothèse). Or $Im\,F$ est un sous-espace vectoriel de $W$, alors $Im\,F = W$ et donc $F$ est surjective.

Par conséquent, $F$ est un isomorphisme. □

**Exemple 2.3 :**

- On a vu que l'application **rotation d'angle** $\theta$ est bijective, donc c'est un isomorphisme.
- Soit $A$ une **matrice carrée d'ordre** $n$ **inversible**. Alors, l'application linéaire

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n_c &\longrightarrow \mathbb{R}^n_c \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

est un isomorphisme. En effet,

$$\begin{aligned} X \in Ker\, T_A &\Rightarrow AX = 0 \\ &\Rightarrow X = 0 \text{ car } A \text{ est inversible,} \end{aligned}$$

et donc $Ker\, T_A = \{0\}$. Par conséquent, $T_A$ est un isomorphisme.

## 3 Opérations sur les applications linéaires

- Soient $F : V \to W$ et $G : V \to W$ deux applications linéaires. On définit la somme $F + G : V \longrightarrow W$ par

$$(F+G)(v) = F(v) + G(v), \forall\, v \in V.$$

- Soit $k \in K$, où $K$ est le corps sur lequel sont définis $V$ et $W$. On définit le produit $kF : V \longrightarrow W$ par

$$(kF)(v) = kF(v), \forall\, v \in V.$$

Il est évident que les applications $F+G$ et $kF$ sont linéaires.

**Exemple 3.1 :** Soit $A$ et $B$ deux matrices de format $m \times n$. Considérons les applications linéaires

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n_c &\longrightarrow \mathbb{R}^m_c \\ X &\longmapsto T_A(X) = AX \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} T_B : \mathbb{R}^n_c &\longrightarrow \mathbb{R}^m_c \\ X &\longmapsto T_B(X) = BX \end{aligned}$$

Alors, on a $T_A + T_B : \mathbb{R}^n_c \longrightarrow \mathbb{R}^m_c$ et $\forall\, X \in \mathbb{R}^n_c$, cette somme est définie comme suit

$$(T_A + T_B)(X) = T_A(X) + T_B(X) = AX + BX = (A+B)X$$

Donc, $(T_A + T_B)(X) = T_{A+B}(X), \forall\; X \in \mathbb{R}^n_c$, c'est-à-dire $T_A + T_B = T_{A+B}$. De même, on a $kT_A = T_{(kA)}$ où $k \in \mathbb{R}$.

## 4 Composés et inverses d'applications linéaires

## 4.1 Composés d'applications linéaires

**Définition 4.1**

Soient $U$, $V$ et $W$ trois espaces vectoriels sur un même corps $K$. Soient

$$F : U \longrightarrow V \text{ et } G : V \longrightarrow W$$

deux applications linéaires. L'**application composée** $G \circ F$ est définie par

$$\begin{aligned} G \circ F : U &\longrightarrow W \\ u &\longmapsto (G \circ F)(u) = G(F(u)). \end{aligned}$$

**Proposition 4.1**

L'**application composée** $G \circ F$ est une application linéaire.

***Preuve :***

En effet,

- $\forall\, u, u' \in U$,

$$\begin{aligned} (G \circ F)(u + u') &= G(F(u + u')) \\ &= G(F(u) + F(u')) \\ &= G(F(u)) + G(F(u')) = (G \circ F)(u) + (G \circ F)(u'). \end{aligned}$$

- $\forall\, k \in K, \forall\, u \in U$,

$$\begin{aligned} (G \circ F)(ku) &= G(F(ku)) \\ &= G(kF(u)) \\ &= kG(F(u)) = k(G \circ F)(u). \end{aligned}$$

□

**Exemple 4.1 :** Soit $A$ une matrice de format $m \times n$ et $B$ une matrice de format $n \times p$. Soit les applications $T_A$ et $T_B$ définies comme suit

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}_c^n &\longrightarrow \mathbb{R}_c^m \\ X &\longmapsto AX \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} T_B : \mathbb{R}_c^p &\longrightarrow \mathbb{R}_c^n \\ X &\longmapsto BX. \end{aligned}$$

Alors, la composition $T_A \circ T_B : \mathbb{R}_c^p \longrightarrow \mathbb{R}_c^m$ est définie pour toute variable $X \in \mathbb{R}_c^p$ par

$$(T_A \circ T_B)(X) = T_A(T_B(X)) = T_A(BX) = A(BX) = (AB)X,$$

c'est-à-dire $(T_A \circ T_B)(X) = T_{AB}(X)$. Donc $T_A \circ T_B = T_{AB}$.

**Note :** En général $G \circ F \neq F \circ G$.

### Propriété 4.1

Soit $U, V$ et W des espaces vectoriels sur un même corps $K$, et soient les applications linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} F: \ U &\longrightarrow V, \quad & F': \ U &\longrightarrow V, \\ G: \ V &\longrightarrow W, \quad & G': \ V &\longrightarrow W. \end{aligned}$$

Alors,

1. $G \circ (F + F') = G \circ F + G \circ F'$.
2. $(G + G') \circ F = G \circ F + G' \circ F$.
3. $\forall\, k \in K, \ k(G \circ F) = (kG) \circ F = G \circ (kF)$.

**Note :**

- Une application linéaire $F : V \longrightarrow V$ est appelée un opérateur linéaire.
- Pour un opérateur linéaire, on a $F^2 = F \circ F : \ V \longrightarrow V$ et donc $F^3 = F \circ F \circ F = F^2 \circ F$.
- De façon générale,

$$F^n = \underbrace{F \circ F \circ \ldots \circ F}_{n \text{ fois}} : \ V \longrightarrow V$$

  est un opérateur linéaire. Par convention,

$$\begin{aligned} F^\circ = I : \ V &\rightarrow V \\ v &\longmapsto v. \end{aligned}$$

**Exemple 4.2 :** Soit $A$ une matrice carré d'ordre $n$. Alors,

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n_c &\longrightarrow \mathbb{R}^n_c \\ X &\longrightarrow AX \end{aligned}$$

est un opérateur linéaire. Soit $m$ un entier positif. Alors,

$$T_A^m = \underbrace{T_A \circ T_A \cdots \circ T_A}_{m \text{ fois}} : \ \mathbb{R}^n_c \longrightarrow \mathbb{R}^n_c \text{ et on a } T_A^m = T_{A^m}.$$

## 4.2 Inverses d'applications linéaires

**Définition 4.2**

Soit F : $V \longrightarrow W$ une application linéaire. On dit que $F$ possède un **inverse** (ou $F$ est **inversible**) s'il existe une application

$$G: \ W \longrightarrow V$$

telle que $G \circ F = I_V$ et $F \circ G = I_W$.

- Si $G$ existe alors elle est unique.

En effet ; supposons qu'il existe $G' : \ W \longrightarrow V$ telle que $G' \circ F = I_V$ et $F \circ G' = I_W$. Alors,

$$\begin{aligned}(G' \circ F) \circ G = I_V \circ G &\Rightarrow G' \circ (F \circ G) = G \\ &\Rightarrow G' \circ I_W = G \\ &\Rightarrow G' = G, \quad \text{d'où l'unicité de } G.\end{aligned}$$

- On note $F^{-1}$ l'inverse de l'application linéaire $F$ (si $F^{-1}$ existe).

**Proposition 4.2**

L'inverse $F^{-1}$ d'une application linéaire $F$ est une application linéaire.

***Preuve :***

Soit $F : \ V \to W$ et $F^{-1} : \ W \to V$, alors $F^{-1} \circ F = I_V$ et $F \circ F^{-1} = I_W$.

- D'une part, $\forall \ w, w' \in W$ et $\forall \ k \in K$, on a

  $$F^{-1}(w) = v \in V \text{ et } F^{-1}(w') = v' \in V, \ \text{ donc } \ v + v' = F^{-1}(w) + F^{-1}(w').$$

  Alors,

  $$\begin{aligned}F(v + v') &= F(v) + F(v') \\ &= F\left(F^{-1}(w)\right) + F\left(F^{-1}(w')\right) = w + w'\end{aligned}$$

  et donc

  $$F^{-1}(F(v + v')) = F^{-1}(w + w')$$

c'est-à-dire

$$F^{-1}(w+w') = v+v' = F^{-1}(w)+F^{-1}(w').$$

- D'autre part, $F(kv) = kF(v) = kF\left(F^{-1}(w)\right) = kw$ et donc

$$F^{-1}(F(kv)) = F^{-1}(kw) \text{ d'où } F^{-1}(kw) = kv = kF^{-1}(w).$$

Par conséquent, $F^{-1}$ est une application linéaire. □

**Théorème 4.1**

Soit $F : V \longrightarrow W$ une application linéaire. Alors, $F$ est inversible si et seulement si $F$ est un isomorphisme.

***Preuve :***

- Supposons que $F$ est inversible, et montrons que $F$ est un isomorphisme.
  - Soit $v \in Ker\, F \Rightarrow F(v) = 0 \Rightarrow F^{-1}(F(v)) = F^{-1}(0) \Rightarrow v = 0$, donc $\operatorname{Ker} F = \{0\}$, d'où $F$ est injective.
  - $\forall\, w \in W$, on a $F^{-1}(w) = v \in V$, donc $F\left(F^{-1}(w)\right) = F(v)$, c'est-à-dire $w = F(v)$, d'où $F$ est surjective. Par suite, $F$ est un isomorphisme.
- Supposons maintenant que $F$ est un isomorphisme, et montrons que $F$ est inversible. $\forall\ w \in W$, alors il existe un unique $v \in V$ tel que $w = F(v)$. Alors, soit

$$\begin{aligned} G:\ W &\longrightarrow V \\ w &\longrightarrow G(w) = v \end{aligned}$$

  - $\forall\ v \in V, (G \circ F)(v) = G(F(v)) = G(w) = v$, donc $G \circ F = I_V$.
  - $\forall\ w \in W, (F \circ G)(w) = F(G(w)) = F(v) = w$, donc $F \circ G = I_W$

Alors, $F$ est inversible et $F^{-1} = G$. □

**Corollaire 4.1**

Soient $V$ et $W$ deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $dim\,V = dim\,W$. Soit $F : V \longrightarrow W$ une application linéaire. Alors, $F$ est inversible si et seulement si $Ker\,F = \{0\}$.

***Preuve :***

$$\begin{aligned} F \text{ est inversible } &\Longleftrightarrow F \text{ est un isomophisme} \\ &\Longleftrightarrow Ker\ F = \{0\} \end{aligned}$$

□

**Exemple 4.3 :**

1 Soit F : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'opérateur linéaire défini par $F(x, y) = (3x - 2y, 2x - y)$. $F$ est un isomorphisme. En effet,

$$(x, y) \in \text{Ker} \Longleftrightarrow \begin{matrix} 3x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{matrix} \Longrightarrow y = 2x$$

et donc $3x - 2y = 0 \Rightarrow 3x - 4x = 0 \Rightarrow -x = 0$, d'où $x = y = 0$. Alors, $Ker\ F = \{0\}$. Donc $F$ est inversible.
Déterminons $F^{-1}$.

$$\begin{aligned} F^{-1}(x, y) = (s, t) &\Longleftrightarrow (x, y) = F(s, t) \\ &\Longleftrightarrow \begin{matrix} 3s - 2t = x \\ 2s - t = y \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{matrix} 3s - 2t = x \\ 4s - 2t = 2y \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad s = 2y - x$$

et $t = 2s - y = 2(2y - x) - y = -2x + 3y$. Donc,

$$F^{-1}(x, y) = (-x + 2y, -2x + 3y).$$

2 Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $\theta$, définie par

$$F(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

On a déja montré que $F$ est un isomorphisme. Détermimons $F^{-1}$ :

$$\begin{aligned} F^{-1}(x, y) = (s, t) &\Longleftrightarrow (x, y) = F(s, t) \\ &\Longleftrightarrow s\cos\theta - t\sin\theta = x \qquad (3) \\ &\qquad\;\; s\sin\theta + t\cos\theta = y \qquad (4) \end{aligned}$$

En multipliant l'équation (3) par $\cos\theta$ ajoutée à l'équation (4) multipliée par $\sin\theta$ et en sommant membre à membre, nous obtenons $s = x\cos\theta + y\sin\theta$.
En multipliant l'équation (3) par $(-\sin\theta)$ ajoutée à l'équation (4) multipliée par $\cos\theta$ et en sommant membre à membre, nous obtenons $t = -x\sin\theta + y\cos\theta$.
Par suite, l'application réciproque $F^{-1}$ s'écrit

$$\begin{aligned} F^{-1}(x,y) &= (x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta) \\ &= (x\cos(-\theta) - y\sin(-\theta), x\sin(-\theta) + y\cos(-\theta)), \end{aligned}$$

qui n'est autre que la rotation d'angle $(-\theta)$.

3 Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ inversible. Alors, l'opération linéaire

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}_c^n &\longrightarrow \mathbb{R}_c^n \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Déterminons ${T_A}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} T_A^{-1}(X) = Y &\Leftrightarrow X = T_A(Y) \\ &\Leftrightarrow AY = X \\ &\Leftrightarrow Y = A^{-1}X \end{aligned}$$

et donc ${T_A}^{-1}(X) = A^{-1}X$, c'est-à-dire $\boxed{{T_A}^{-1} = T_{A^{-1}}}$.