SÉRIE 6 - Algèbre linéaire (MATH 2673)

Exercice 1. Soit P_2 l'espace vectoriel des polynômes, en la variable t, de degré inférieur ou égal à deux. Soit $B = \{t^2 - 2t + 1,\, 3t^2 + 2t,\, 4t^2 - 5t + 3\}$.

a) Montrer que B est une base de P_2.

b) Soit $C = \{t^2,\, t,\, 1\}$ la base canonique de P_2. Déterminer la matrice de passage de la base C à la base B.

c) Soit $p(t) = 1 - 3t - t^2$. En utilisant la matrice de passage trouvée en b), déterminer le vecteur $_B[p]$ des composantes de p relativement à la base B.

Exercice 2. Soit l'application linéaire $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y, z) = (2x + 3y - z, 4x - y + 2z).$$

Soient B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = \{(1, 2), (2, 3)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$. Calculez $_{B'}[F]_B$.

Exercice 3. Soit F_θ la rotation d'angle θ dans le plan, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} F_\theta \,:\, & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta). \end{aligned}$$

a) Soient θ et ϕ deux nombres réels. Montrez que

$$_B[F_\theta \circ F_\phi]_B = {}_B[F_{\theta+\phi}]_B$$

où B est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminez l'expression de $(F_\theta \circ F_\phi)(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soient B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (1,2,3)\}$ une autre base de $\mathbb{R}^3$.

a Déterminez la matrice de passage de la base B à la base B'.

b Soit l'opérateur linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$T(x,y,z) = (x+3y+z,\ 2x+7y+4z,\ x+4y+3z).$$

Calculez ${}_B[T]_B$ et ${}_{B'}[T]_{B'}$.