Produit Scalaire et Orthogonalité

Sommaire

1 Produit scalaire

1.1 Introduction

Définition 1.1

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire sur V est une fonction, notée

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v\rangle \end{aligned}$$

qui est symétrique, bilinéaine et définie positive, c'est-à-dire $\forall\, u, v, w \in V, \forall\, k \in \mathbb{R}$:

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.
2. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$,
   $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$.
3. $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$,
   $\langle u, kv\rangle = k\langle u, v\rangle$.

   Note : Les points 2 et 3 signifient que $\langle\ ,\ \rangle$ est **bilinéaire**.

4. $\langle u, u\rangle \geq 0$, $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$.

Note : Le point $\boxed{4}$ traduit que $\langle\ ,\ \rangle$ est **définie positive**.

Note :

- À partir de la symétrie en $\boxed{1}$ et de la linéarité par rapport au premier argument en $\boxed{2-3}$, on a la linéarité par rapport au deuxième argument.
  En effet, $\forall\, u, v, w \in V, \forall\, k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle u, v+w\rangle &= \langle v+w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle \\ &= \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \\ \langle u, kv\rangle &= \langle kv, u\rangle = k\langle v, u\rangle = k\langle u, v\rangle. \end{aligned}$$

- À partir du point $\boxed{3}$, on a $\forall\, u \in V$,

$$\langle 0, u\rangle = \langle 00, u\rangle = 0\langle 0, u\rangle = 0.$$

- Soit $u_i \in V, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$, et $v_j \in V, b_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, m$. Alors,

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i u_i,\ \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} a_i \left\langle u_i,\ \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \left\langle u_i,\ v_j\right\rangle. \end{aligned}$$

Définition 1.2

- On appelle espace (vectoriel) euclidien, un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire.
- La norme (ou la longueur) d'un vecteur u, notée $\|u\|$, est $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.
- Un vecteur u est dit unitaire si $\|u\| = 1$.

Note :

- $\forall\, u \in V$, nous avons $\|u\| \geqslant 0$; et $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
- $\forall\, u \in V, \forall\, k \in \mathbb{R}$, nous avons $\|ku\| = |k|\|u\|$.
- $\forall\, u \in V, u \neq 0$, le vecteur $\hat{u} = \frac{u}{\|u\|}$ est tel que $\|\hat{u}\| = 1$. Ce procédé est appelé normalisation du vecteur u.

Exemple 1.1 :

- **L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$** Soient les vecteurs

$$u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Le produit scalaire euclidien (naturel) dans $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$\langle u, v \rangle = u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On vérifie aisément que c'est bien un prodiuit scalaire.

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

C'est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

> **Note :** Dans le cas de l'espace $\mathbb{R}^n_c$, nous avons
>
> $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$
>
> $$X^\top Y = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \left\langle X^\top, Y^\top \right\rangle,$$
>
> qui n'est autre que le produit scalaire des vecteurs $X^\top$ et $Y^\top$ de $\mathbb{R}^n$.

- **L'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, noté $C[a, b]$.**
$C[a, b]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ car c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions réelles. Sur l'espace $C[a, b]$, on définit le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \forall\, f, g \in C[a, b].$$

Vérifions que c'est bien un produit scalaire : $\forall\, f, g, h \in C[a, b], \forall\, k \in \mathbb{R}$,

  - ⋆

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g, f \rangle$$

★

$$\begin{aligned}\langle f+g,h\rangle &= \int_a^b (f+g)(x)h(x)dx\\ &= \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx\\ &= \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle\end{aligned}$$

★

$$\begin{aligned}\langle kf,g\rangle = \int_a^b (kf)(x)g(x)dx = k\int_a^b f(x)g(x)dx\\ =k\langle f,g\rangle\end{aligned}$$

★

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b (f(x))^2dx \geqslant 0,$$
$$\langle f,f\rangle = 0 \iff \int_a^b (f(x))^2dx = 0 \iff f=0.$$

D'où le résultat.

1.2 Propriétés du produit scalaire

Théorème 1.1

L'inégalité de Cauchy-Schwarz Soit V un espace euclidien. Alors, $\forall\, u,v \in V$, on a

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

Preuve :

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\langle u+tv, u+tv\rangle = \|u+tv\|^2 \geqslant 0.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\langle u+tv,u+tv\rangle &= \langle u,u\rangle + 2t\langle u,v\rangle + t^2\langle v,v\rangle\\ &= \|v\|^2t^2 + 2\langle u,v\rangle t + \|u\|^2 \geqslant 0,\ \forall\, t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Alors, $\Delta = 4\langle u,v\rangle^2 - 4\|v\|^2\|u\|^2 \leq 0$, ce qui est équivalent à $\langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$ d'où $|\langle u,v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$. □

Exemple 1.2 :

- **Dans $\mathbb{R}^n$** Soit $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, on a

$$|\langle X,Y\rangle|\leq\|X\|\|Y\|$$
$$|x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n|\leqslant\left(x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2\right)^{1/2}\left(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\right)^{1/2}$$
$$\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}$$

- **Dans $C[a,b]$** Nous avons

$$|\langle f,g\rangle|\leqslant\|f\|\|g\|$$

c'est-à-dire $$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leqslant\left(\int_a^b(f(x))^2dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b(g(x))^2dx\right)^{1/2}.$$

Théorème 1.2

L'inégalité du triangle Soit V un espace euclidien. Alors $\forall\,u,v\in V$, on a

$$\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$$

Preuve :

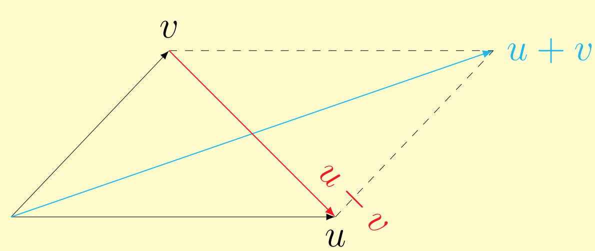
Pour tous $u,v\in V$, nous avons

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2&=\langle u+v,u+v\rangle\\&=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle\\&\leq\|u\|^2+2\|u\|\|v\|+\|v\|^2\end{aligned}$$

et donc $\|u+v\|^2\leqslant(\|u\|+\|v\|)^2$, d'où $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$. □

Régle du parallélogramme Pour tous $u,v\in V$, où V est un espace euclidien, on a

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$$



Preuve :
En effet,

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 &= \langle u+v,u+v\rangle+\langle u-v,u-v\rangle\\ &= \langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle\\ &+\langle u,u\rangle-2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle\\ &= 2\|u\|^2+2\|v\|^2.\end{aligned}$$

2 Orthogonalité

2.1 Introduction

Soit V un espace euclidien et u, v deux vecteurs de V. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

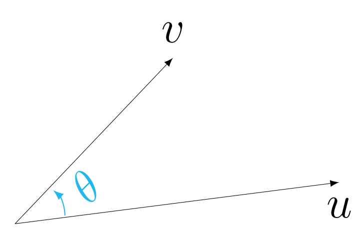
$$\begin{aligned}|\langle u,v\rangle|\leqslant\|u\|\|v\| &\iff -\|u\|\|v\|\leqslant\langle u,v\rangle\leqslant\|u\|\|v\|\\ &\iff -1\leqslant\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}\leqslant 1,\end{aligned}$$

à condition que $u\neq 0$ et $v\neq 0$. On définit ainsi l'angle θ, $0\leq\theta\leq\pi$, entre u et v par

$$\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|},\qquad (u\neq 0 \ \text{ et } \ v\neq 0)$$

Donc, on obtient

$$\langle u,v\rangle=\|u\|\|v\|\cos\theta$$



Définition 2.1

Soit V un espace euclidien et u, v deux vecteurs de V. On dit que u et v sont orthogonaux si $\langle u,v\rangle=0$.

Exemple 2.1 : Considérons l'espace $C[-\pi, \pi]$. Soit les fonctions continues $f(t) = \sin t$ et $g(t) = \cos t$. Alors, on a

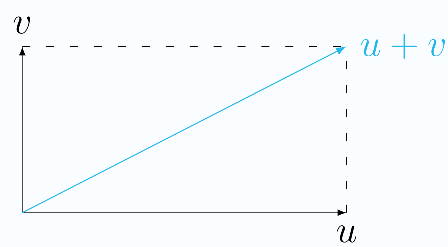
$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t \, dt = \frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Donc f et g sont deux fonctions orthogonales de $C[-\pi, \pi]$.

Théorème 2.1

Pythagore Si u et v sont orthogonaux, alors

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$



Preuve :

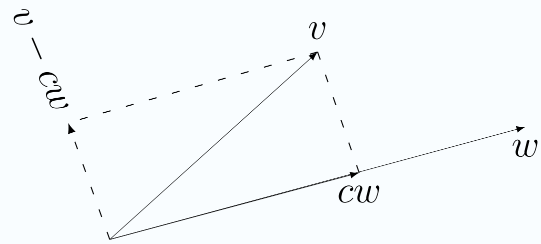
$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 \;\text{ car }\; \langle u, v\rangle = 0\end{aligned}$$ $\square$

Définition 2.2

Soit V un espace euclidien et soit $w \in V$ un vecteur **non nul**. Soit v un vecteur quelconque de V.

- On appelle la **projection de v sur w**, le vecteur cw tel que $v - cw$ soit orthogonal à w où la constante c est donnée par

$$\begin{aligned}\langle v - cw, w\rangle = 0 \;&\Leftrightarrow\; \langle v, w\rangle - c\langle w, w\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow\; c = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}.\end{aligned}$$



- La projection de v sur w est donc le vecteur $\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w$.
- La constante $c = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$ est appelée la composante de v sur w.

Définition 2.3

Soit S un sous-ensemble d'un espace euclidien V. Le **complément orthogonal** de S, noté $S^\perp$, est l'ensemble suivant

$$S^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u\rangle = 0, \forall\, u \in S\}$$

Proposition 2.1

Soit S un sous-ensemble d'un espace euclidien V. Alors $S^\perp$ est un **sous-espace vectoriel** de V.

Preuve :

- $0 \in S^\perp$ car $\langle 0, u\rangle = 0, \forall\, u \in S$.
- $\forall\, v_1, v_2 \in S^\perp$, et $\forall\, u \in S$, on a $\langle v_1 + v_2, u\rangle = \langle v_1, u\rangle + \langle v_2, u\rangle = 0+0 = 0$ et donc $v_1 + v_2 \in S^\perp$
- $\forall\, k \in \mathbb{R}, \forall\, v \in S^\perp$, et $\forall\, u \in S$, on a $\langle kv, u\rangle = k\langle v, u\rangle = k \times 0 = 0$ et donc $kv \in S^\perp$.

  Par suite, $S^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel de V. $\square$

Exemple 2.2 : Soit $S = \{u_1, u_2\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ où $u_1 = (1, 2, 1)$ et $u_2 = (2, 5, 4)$. Déterminer $S^\perp$. Soit $v = (x, y, z) \in S^\perp$. Alors,

$$\left\{\begin{array}{l} \langle v, u_1\rangle = 0 \\ \text{ et} \\ \langle v, u_2\rangle = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ \text{ et} \\ 2x + 5y + 4z = 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

La matrice du système (1) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc le système (1) est équivalent au suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = -2z \end{cases}$$

Alors,

$$S^{\perp} = \{(3z, -2z, z) = z(3, -2, 1) \mid z \in \mathbb{R}\}, \text{ c'est-à-dire } S^{\perp} = \operatorname{Vect}\{(3, -2, 1)\}.$$

2.2 Ensembles orthogonaux et bases orthogonales

Définition 2.4

Soit V un espace euclidien, et soit $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ un ensemble de vecteurs **non nuls** de V.

- L'ensemble S est dit orthogonal si pour tous $i, j \in \{1, \cdots, r\}$, on a

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \text{ si } i \neq j.$$

- S est dit orthonormal si pour tous $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, on a

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Note : Si $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ est orthogonal, alors $\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \cdots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$ est orthonormal.

En effet ; $\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\|v_i\|\|v_j\|} \langle v_i, v_j \rangle = 0, & \text{si } i \neq j \\ \frac{1}{\|v_i\|\|v_i\|} \langle v_i, v_i \rangle = \frac{\|v_i\|^2}{\|v_i\|^2} = 1 & \end{cases}$$

Théorème 2.2

Soit S un ensemble orthogonal. Alors S est linéainement indépendant.

Preuve :

Soit $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ un ensemble orthogonal. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} a_i v_i = 0 \ &\Rightarrow \ \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i v_i, v_j \right\rangle = 0, \forall\, j \in \{1, \ldots, r\} \\ &\Rightarrow \ \sum_{i=1}^{r} a_i \langle v_i, v_j \rangle = 0, \forall\, j \in \{1, \ldots, r\} \\ &\Rightarrow \ a_j \langle v_j, v_j \rangle = 0, \forall\, j \in \{1, \ldots, r\} \\ &\Rightarrow \ a_j = 0, \forall\, j \in \{1, \ldots, r\} \ \text{ car } \ v_j \neq 0. \end{aligned}$$

$\square$

Définition 2.5

Soit V un espace euclidien de dimension finie. Soit B une base de V.

- B est dite une **base orthogonale** si B est un ensemble orthogonal.
- Elle est dite une **base orthonormale** si B est un ensenble orthonormal.

Proposition 2.2

Soit V un espace euclidien de dimension n. Soit $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un ensemble orthogonal de V. Alors B est une base orthogonale de V.

Preuve :

Comme B est un ensemble orthogonal, alors B est linéairement indépendant. D'autre part, comme $\dim V = n$ et B contient n éléments de V alors B est une base de V. Et donc B est une base orthogonale de V. $\square$

Exemple 2.3 : Dans $\mathbb{R}^n$, la base canonique $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. En effet ;

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= 0 \quad \text{si } i \neq j, \ \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}, \\ \langle e_i, e_i \rangle &= 1 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Proposition 2.3

Soit V un espace euclidien de dimension n. Soit $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une **base orthogonale** de V. Alors $\forall\, v \in V$, on a

$$_B[v] = \begin{pmatrix} \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \\ \vdots \\ \frac{\langle v, v_j\rangle}{\langle v_j, v_j\rangle} \\ \vdots \\ \frac{\langle v, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle} \end{pmatrix}$$

Preuve :

$\forall\, v \in V$, on a $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Et pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, on a

$$\langle v, v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i, v_j\rangle = a_j \langle v_j, v_j\rangle$$

et donc

$$a_j = \frac{\langle v, v_j\rangle}{\langle v_j, v_j\rangle},\ \forall\, j \in \{1, \dots, n\}.$$

$\square$

Exemple 2.4 : Soit $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (2, 1, -4)$ et $u_3 = (3, -2, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On vérifie facilement que

$$\langle u_i, u_j\rangle = 0 \quad \forall\, i \neq j.$$

Alors, $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
Maintenant, soit $u = (7, 1, 9)$. Alors,

$$_B[v] = \begin{pmatrix} \frac{\langle u, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} \\ \\ \frac{\langle u, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} \\ \\ \frac{\langle u, u_3\rangle}{\langle u_3, u_3\rangle} \end{pmatrix}$$

Or $\frac{\langle u, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} = \frac{18}{6} = 3$, $\frac{\langle u, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} = \frac{-21}{21} = -1$ et $\frac{\langle u, u_3\rangle}{\langle u_3, u_3\rangle} = \frac{28}{14} = 2$, alors $_B[v] = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

C'est-à-dire $u = 3u_1 - u_2 + 2u_3$.

Proposition 2.4

Soit V un espace euclidien de dimension finie, et soit B une base orthornormale de V. Alors $\forall\, u, v \in V$, on a

$$\langle u, v\rangle = {}_B[u]^\top {}_B[v].$$

Preuve :

Posons $\dim V = n$ et $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une base orthonormale de V. Pour tous $u, v \in V$, posons $u = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ et $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$. Alors,

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \langle v_i, v_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n a_i b_i \langle v_i, v_i\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i \\
&= (a_1\, a_2\, \cdots\, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = {}_B[u]^\top {}_B[v].
\end{aligned}$$

□

2.3 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

- Soit V un espace euclidien. Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ un sous-ensemble de V **linéairement indépendant**. Alors, on peut construire à partir de $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ un ensemble $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ orthogonal.

Preuve :

En effet, posons $w_1 = v_1$.

Soit $w_2 = v_2 + c_{21} w_1$ tel que $\langle w_2, w_1\rangle = 0$. Alors,

$$\langle w_2, w_1\rangle = \langle v_2, w_1\rangle + c_{21}\langle w_1, w_1\rangle = 0$$

Et donc $c_{21} = -\frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}$, d'où $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$.

Soit $w_3 = v_3 + c_{31}w_1 + c_{32}w_2$ tel que $\langle w_3, w_1\rangle = 0$ et $\langle w_3, w_2\rangle = 0$. Alors,

$$\begin{aligned}\langle w_3, w_1\rangle &= \langle v_3, w_1\rangle + c_{31}\langle w_1, w_1\rangle + c_{32}\langle w_2, w_1\rangle \\ &= \langle v_3, w_1\rangle + c_{31}\langle w_1, w_1\rangle = 0\end{aligned}$$

et donc $c_{31} = -\frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}$.

$$\begin{aligned}\langle w_3, w_2\rangle &= \langle v_3, w_2\rangle + c_{31}\langle w_1, w_2\rangle + c_{32}\langle w_2, w_2\rangle \\ &= \langle v_3, w_2\rangle + c_{32}\langle w_2, w_2\rangle = 0\end{aligned}$$

et donc $c_{32} = -\frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}$. Alors, $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}w_2$. En continuant ce procédé, on aboutit à

$$w_1 = v_1$$

$$w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1}\frac{\langle v_j, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle}w_i,\ j = 2, \cdots, r$$

On obtient ainsi un ensemble $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ orthogonal. À partir de cet ensemble, on obtient aussi l'ensemble orthonormal suivant

$$\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \cdots, \frac{w_r}{\|w_r\|}\right\}.$$

□

Théorème 2.3

Sout V un espace euclidien de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoviel de V posséde une base orthonormale.

Preuve :

Soit W un sous-espace vectoriel de V et posons $\dim W = m$. Soit $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ une base de W. Alors, en utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on obtient $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ un ensemble orthogonal de W. Donc S est une base orthogonale de W, et $\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \cdots, \frac{w_m}{\|w_m\|}\right\}$ est une base orthonormale de W. □

Exemple 2.5 :

- Soient $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -2, 0, 0)$ et $v_3 = (1, 0, -1, 2)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Déterminons une base orthonormale de $W = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$.

- Tout d'abord, on vérifie facilement que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est linéairement independant et par conséquent c'est une base de W.
- Ainsi, en utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on a

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = (1,1,0,1), \\ w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = v_2 - \left(\frac{-1}{3}\right) w_1 \end{aligned}$$

et donc $w_2 = (1,-2,0,0) + \frac{1}{3}(1,1,0,1) = \frac{1}{3}(4,-5,0,1)$.

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 \text{ où} \\ \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} &= \frac{3}{3} = 1, \quad \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} = \frac{6/3}{42/9} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Par suite, $w_3 = (1,0,-1,2) - (1,1,0,1) - \frac{3}{7} \times \frac{1}{3}(4,-5,0,1)$ et donc

$$w_3 = (0,-1,-1,1) - \frac{1}{7}(4,-5,0,1) = \frac{1}{7}(-4,-2,-7,6).$$

- Alors, une base orthonormale de W est $\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|}\right\}$ où nous avons

$$\begin{aligned} \frac{w_1}{\|w_1\|} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1), \\ \|w_2\|^2 &= \frac{1}{9}(16+25+1) = \frac{42}{9} \\ \frac{w_2}{\|w_2\|} &= \frac{3}{\sqrt{42}} \frac{1}{3}(4,-5,0,1) = \frac{1}{\sqrt{42}}(4,-5,0,1) \\ \|w_3\|^2 &= \frac{1}{49}(16+4+49+36) = \frac{105}{49} \\ \frac{w_3}{\|w_3\|} &= \frac{7}{\sqrt{105}} \frac{1}{7}(-4,-2,-7,6) = \frac{1}{\sqrt{105}}(-4,-2,-7,6) \end{aligned}$$

- Soit l'espace vectoriel $V = C[-1,1]$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Déterminer une base orthogonale $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}$ de l'espace P_3 des polynônes de degré $\leqslant 3$ en utilisant la base canonique $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ de P_3 où

$$f_0(t) = 1, \; f_1(t) = t, \; f_2(t) = t^2 \text{ et } f_3(t) = t^3.$$

- $g_0 = f_0$, c'est-à-dire $g_0(t) = 1$.

$\star$

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1 - \frac{\langle f_1, g_0\rangle}{\langle g_0, g_0\rangle} g_0 \\ \langle f_1, g_0\rangle &= \int_{-1}^{1} f_1(t) g_0(t)dt = \int_{-1}^{1} tdt = 0 \end{aligned}$$

donc $g_1 = f_1$, c'est-à-dire $g_1(t) = t$.

$\star$

$$\begin{aligned} g_2 &= f_2 - \frac{\langle f_2, g_0\rangle}{\langle g_0, g_0\rangle} g_0 - \frac{\langle f_2, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1 \\ \langle f_2, g_0\rangle &= \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}, \quad \langle g_0, g_0\rangle = \int_{-1}^{1} dt = 2, \\ \langle f_2, g_1\rangle &= \int_{-1}^{1} t^3 dt = 0, \end{aligned}$$

donc $g_2 = f_2 - \frac{2/3}{2} g_0 = f_2 - \frac{1}{3} g_0$, c'est-à-dire $g_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$.

$\star$

$$\begin{aligned} g_3 &= f_3 - \frac{\langle f_3, g_0\rangle}{\langle g_0, g_0\rangle} g_0 - \frac{\langle f_3, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1 - \frac{\langle f_3, g_2\rangle}{\langle g_2, g_2\rangle} g_2 \\ \langle f_3, g_0\rangle &= \int_{-1}^{1} t^3 dt = 0, \\ \langle f_3, g_1\rangle &= \int_{-1}^{1} t^4 dt = \frac{2}{5}, \quad \langle g_1, g_1\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}, \\ \langle f_3, g_2\rangle &= \int_{-1}^{1} t^3 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) dt = 0, \end{aligned}$$

donc $g_3 = f_3 - \frac{2/5}{2/3} g_1 = f_3 - \frac{3}{5} g_1$, c'est-à-dire $g_3(t) = t^3 - \frac{3}{5} t$.
Alors, une base orthogonale de P_3 est $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}$ où

$$g_0(t) = 1,\ g_1(t) = t,\ g_2(t) = t^2 - \frac{1}{3} \text{ et } g_3(t) = t^3 - \frac{3}{5} t.$$

Note : Les polynômes g_0, g_1, g_2 et g_3 sont les 4 premiers polynômes de Legendre. Ils sont utiles en «Analyse numérique».

Théorème 2.4

Soit V un espace euclidien de dimension n. Soit $S = \{w_1, w_2, \cdots, w_r\}$ une base orthogonale d'un sous-espace vectoriel W de V. Alors on peut compléter S pour obtenir une base orthogonale de V.

Preuve :

- D'abord, on complète S pour obtenir la base $B = \{w_1, \cdots, w_r, u_{r+1}, \cdots, u_n\}$ de V.
- Maintenant, en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à B, on obtient un ensemble $\{w_1, \cdots, w_n\}$ orthogonal de V.
- Donc $\{w_1, \cdots, w_n\}$ est une base orthogonale de V. $\square$

Théorème 2.5

Soit V un espace euclidien de dimension finie. Soit W un sous-espace vectoriel de V. Alors, V est la somme directe de W et $W^\perp$, c'est-à-dire, $V = W \oplus W^\perp$.

Note : $W^\perp$ est appelée supplémentaire orthogonal de W.

Preuve :

- Posons $\dim V = n$ et $\dim W = r$. Comme W est un sous-espace de V, alors il existe $S = \{w_1, \cdots, w_r\}$ une base orthogonale de W.
- D'autre part, on peut compléter S en une base $B = \{w_1, \cdots, w_r, w_{r+1}, \cdots, w_n\}$ orthogonale de V. Alors,

$$\langle w_{r+1}, w_i\rangle = 0,\ \langle w_{r+2}, w_i\rangle = 0, \cdots,\ \langle w_n, w_i\rangle = 0,\ \forall\, i \in \{1, \ldots, r\},$$

  et donc $\{w_{r+1}, \cdots, w_n\} \subset W^\perp$.
- Montrons que $V = W \oplus W^\perp$.
  - Montrons tout d'abors que $V = W + W^\perp$, il vient :

$$\forall\, v \in V,\ v = \sum_{i=1}^{r} a_i w_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i w_i,$$

    car $\{w_1, \ldots, w_n\}$ est une base de V. Alors, $v = w + w'$ où $w \in W$ et $w' \in W^\perp$.
  - Il reste à montrer que $W \cap W^\perp = \{0\}$. Pour cela, soit $v \in W \cap W^\perp$ alors $v \in W$ et $v \in W^\perp$ et donc $\langle v, v\rangle = 0$, d'où $v = 0$. Par consequent, $V = W \oplus W^\perp$. $\square$

Note : D'après la démonstration de ce théorème, on a $S' = \{w_{r+1}, \ldots, w_n\}$ est une base de $W^\perp$.

En effet S' est libre car c'est un ensemble orthogonale. D'autre part, $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$, et donc $\dim W^\perp = n - r$. Par conséquent S' est une base de W.

Exemple 2.6 : Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par $u = (1, 2, 3, -1, 2)$ et $v = (2, 4, 7, 2, -1)$. Trouvons une base du supplémentaire orthogonal $W^\perp$ de W.

- Tout d'abord, définissons le sous-espace $W^\perp$. Il vient,

$$w \in W^\perp \;\Leftrightarrow\; \langle w, au + bv\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; a\langle w, u\rangle + b\langle w, v\rangle = 0,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R},$$

et donc $\langle w, u\rangle = 0$ et $\langle w, v\rangle = 0$. Ainsi, le sous-espace $W^\perp$ est caractérisé par

$$W^\perp = \left\{ w \in \mathbb{R}^5 \mid \langle w, u\rangle = 0 \ \text{ et } \langle w, v\rangle = 0 \right\}.$$

- Déterminons donc une base de $W^\perp$. Soit $w = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in W^\perp$, on a

$$\begin{aligned} \langle w, u\rangle = 0 \;&\Leftrightarrow\; x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ \langle w, v\rangle = 0 \;&\Leftrightarrow\; 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{aligned}$$

La matrice de ce dernier système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Alors, le système initial est équivalent à

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 13x_4 + 17x_5 &= 0 \\ x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{aligned} x_1 &= -2x_2 + 13x_4 - 17x_5 \\ x_3 &= -4x_4 + 5x_5 \end{aligned}$$

Donc, on obtient $w = (-2x_2 + 13x_4 - 17x_5,\ x_2,\ -4x_4 + 5x_5,\ x_4,\ x_5)$ et une base de $W^\perp$ est le système $\{w_1, w_2, w_3\}$ où

$$w_1 = (-2, 1, 0, 0, 0),\ w_2 = (13, 0, -4, 1, 0),\ w_3 = (-17, 0, 5, 0, 1).$$

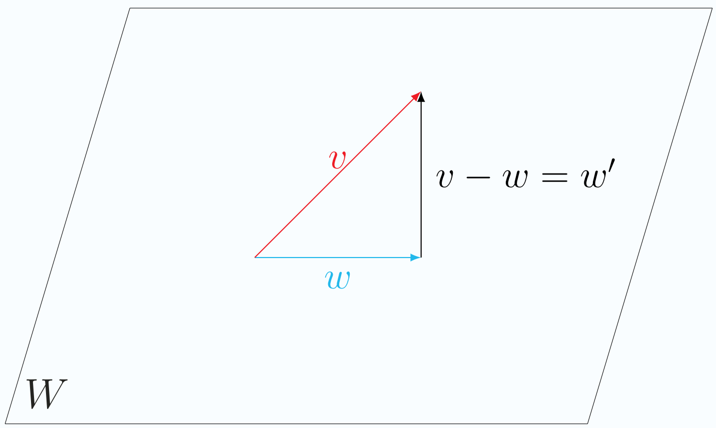
On a $\mathbb{R}^5 = W \oplus W^\perp$ et $\dim W^\perp = 3$.

2.4 Projection sur un sous-espace vectoriel

Définition 2.6

Soir V un espace euclidien de dimension finie. Soit W un sous-espace vectoriel de V. Alors, $V = W \oplus W^{\perp}$ et donc $\forall\, v \in V$, on a $v = w + w'$ avec $w \in W,\ w' \in W^{\perp}$.

- Donc $\forall\ u \in W$, on a
$$\langle v - w, u \rangle = \langle w', u \rangle = 0.$$
- Le vecteur w est appelé **projection de v sur W**, et on le note
$$w = \operatorname{proj}(v, W).$$



Maintenant, soit $\{w_1, w_2, \cdots, w_r\}$ une base orthogonale de W. On peut compléter cette base en une base $\{w_1, \cdots, w_n\}$ orthogonale de V. De plus, on sait que $\{w_{r+1}, \cdots, w_n\}$ est une base orthogonale de $W^{\perp}$. Alors $\forall\ v \in V$, on a

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \ \text{ et } \ \langle v, w_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle w_i, w_j \rangle = a_j \langle w_j, w_j \rangle\,,\ \forall\ j \in \{1, \ldots, n\}.$$

C'est-à-dire
$$a_j = \frac{\langle v, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle}, \forall\ j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Donc $\forall\, v \in V$, on a

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{r} a_i w_i}_{\text{proj}(v,W)} + \sum_{i=r+1}^{n} a_i w_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i}_{\text{proj}(v,W)} + \sum_{i=r+1}^{n} a_i w_i. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que la projection de v sur W est donnée par la formule

$$\text{proj}(v, W) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i.$$

Exemple 2.7 : Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par $v_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$ et $v_2 = (1, -1, 2, -1, 1)$. Soit un autre vecteur $v = (1, 2, 3, 4, 6)$. Déterminons la projection de v sur W.

- Remarquons d'abord que $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. Donc $\{v_1, v_2\}$ est une base orthogonale de W.
- Alors, on a

$$\text{proj}(v, W) = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2, \quad \text{où}$$
$$\frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} = \frac{1+4+3+8+6}{1+4+1+4+1} = \frac{22}{11} = 2,$$
$$\frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} = \frac{1-2+6-4+6}{1+1+4+1+1} = \frac{7}{8}.$$

- D'où,

$$\text{proj}(v, W) = 2v_1 + \frac{7}{8} v_2 = \frac{1}{8}(23,\ 25,\ 30,\ 25,\ 23).$$