



Chapitre 5 : Interpolation polynomiale

Ibrahima Dione (Université Laval)

5 mars 2017



Institut universitaire
en santé mentale
de Québec

① Rappel

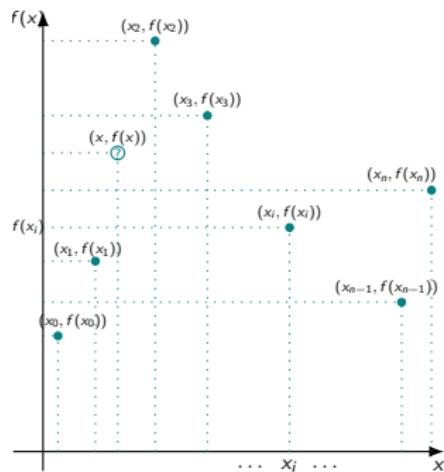
② Matrice de Vandermonde

③ Interpolation de Lagrange

④ Polynôme de Newton

⑤ Erreur d'interpolation

⑥ Splines cubiques



Question: À partir d'une fonction $f(x)$ connue seulement en $(n+1)$ points de la forme $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, comment construire une approximation de celle-ci par un polynôme p_n de degré inférieur ou égal à n telle que

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Remarque(s) : Les points x_i sont appelés *abscisses ou noeuds d'interpolation* tandis que les couples $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$ sont *les points de collocation* ou *points d'interpolation* et peuvent provenir de données expérimentales.

Rappel

Proposition 1.1

Un polynôme de degré n à coefficients réels de forme générale

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0 \quad (1.1)$$

possède, tenant compte des multiplicités, très exactement n racines qui peuvent être réelles ou complexes conjuguées.

Note: On rappelle que r est une racine du polynôme $p_n(x)$, si on a $p_n(r) = 0$.

Corollaire 1.1

Par $(n + 1)$ points de collocation d'abscisses distinctes $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, on ne peut faire correspondre qu'un et un seul polynôme de degré n .

Définition 1.1

L'unique polynôme de degré n passant par les points $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, est appelé l'interpolant de $f(x)$ de degré n aux abscisses (noeuds) x_0, x_1, \dots, x_n .

Matrice de Vandermonde

L'interpolation par la méthode de Vandermonde consiste à déterminer les inconnues a_i du polynôme (1.1) en vérifiant directement les $(n + 1)$ équations de collocation

$$p_n(x_i) = f(x_i), \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

C'est à dire, on va déterminer les coefficients $a_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$, qui sont solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n = f(x_2) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Le système linéaire (2.2) est de $(n + 1)$ équations en $(n + 1)$ inconnues et s'écrit matriciellement

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Remarque(s) : La matrice du système linéaire (2.3) porte le nom de *matrice de Vandermonde*. On peut montrer que le conditionnement de cette matrice augmente fortement avec la taille ($n + 1$) du système.

Note: En résumé, déterminer le polynôme d'interpolation $p_n(x)$ défini par les conditions en (2.1), revient à résoudre le système linéaire (2.3). Ce qui fait que cette méthode est donc rarement utilisée.

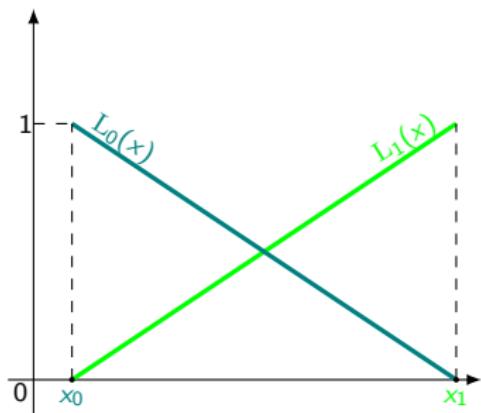
Exemple 1

On doit calculer le polynôme passant par les points $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 9)$ et $(3, 28)$. Étant donné ces 4 points, le polynôme recherché est tout au plus de degré 3. Ses coefficients a_i sont solution de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 28 \end{bmatrix}$$

dont la solution (obtenue par décomposition LU) est $[1 \ 0 \ 0 \ 1]^t$. Le polynôme recherché est donc $p_3(x) = 1 + x^3$.

Interpolation de Lagrange



Polynômes de Lagrange de degré 1 :
 $L_0(x)$ et $L_1(x)$

Question: Étant donné deux points de collocation $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$, comment construire les deux polynômes de Lagrange $L_0(x)$ et $L_1(x)$ de degré 1, vérifiant les conditions suivantes qui sont la base de leur construction ?

$$\begin{cases} L_0(x_0) = 1 \\ L_0(x_1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L_1(x_0) = 0 \\ L_1(x_1) = 1 \end{cases}$$

- **Construction de $L_0(x)$** : Sachant que le polynôme $L_0(x)$ doit s'annuler en $x = x_1$, alors on imagine automatiquement qu'il est de la forme $(x - x_1)$. Sauf que cette forme vaut $(x_0 - x_1)$ en $x = x_0$, et pour s'assurer d'une valeur 1 en $x = x_0$, il suffit de diviser ce terme par $(x_0 - x_1)$ pour obtenir

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$$

- **Construction de $L_1(x)$** : Un raisonnement similaire donne le polynôme $L_1(x)$ sous la forme

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

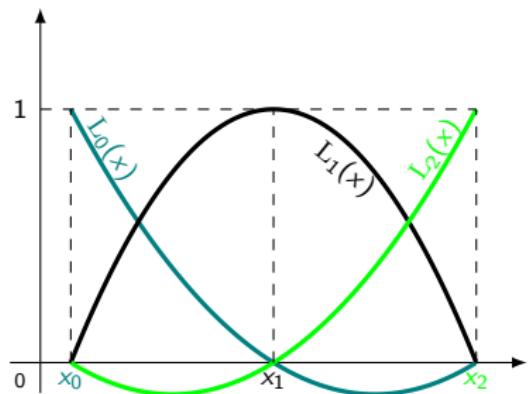
Note: Le polynôme d'interpolation de Lagrange $p_1(x)$ de degré 1, passant par les deux points de collocation $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$, est défini par la formule

$$p_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) \quad (3.1)$$

Exemple 2

Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 1, passant par les points $(2, 3)$ et $(5, -6)$, est l'équation de droite

$$p_1(x) = 3 \underbrace{\frac{(x - 5)}{(2 - 5)}}_{L_0(x)} + (-6) \underbrace{\frac{(x - 2)}{(5 - 2)}}_{L_1(x)} = -(x - 5) - 2(x - 2) = -3x + 9$$



Polynômes de Lagrange de degré 2 :

$L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$

Question: Avec les trois points de collocation $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, 3$, comment construire les trois polynômes de Lagrange $L_i(x)$ de degré 2, t.q.

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 & \forall i = 1, 2, 3 \\ L_i(x_j) = 0 & \forall i \neq j \end{cases}$$

• **Construction de $L_0(x)$:** La fonction $L_0(x)$ s'annule cette fois en $x = x_1$ et en $x = x_2$, alors on pense tout de suite à une fonction de la forme $(x - x_1)(x - x_2)$ qui vaut $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$ en $x = x_0$. Pour satisfaire $L_0(x_0) = 1$, il faut prendre

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

• **Construction de $L_1(x)$ et $L_2(x)$:**

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Note: Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 2 noté $p_2(x)$, passant par les trois points de collocation $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, est donc construit par la somme suivante

$$p_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \quad (3.2)$$

Exemple 3

La parabole passant par les points $(1, 2), (3, 7), (4, -1)$ est donnée par le polynôme

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (2) \underbrace{\frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)}}_{L_0(x)} + (7) \underbrace{\frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)}}_{L_1(x)} + (-1) \underbrace{\frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)}}_{L_2(x)} \\ &= \frac{(x-3)(x-4)}{3} - \frac{7(x-1)(x-4)}{2} - \frac{(x-1)(x-3)}{3} \end{aligned}$$

On analyse le cas général de la même façon. La fonction $L_0(x)$ s'annulant en $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, on introduit la fonction $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)$ qui vaut $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \cdots (x_0 - x_n)$ en $x = x_0$. On a alors, la première fonction de Lagrange définie par

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \cdots (x_0 - x_n)} \quad (3.3)$$

Remarque(s) : On remarque qu'il y a n facteurs de la forme $(x - x_i)$ dans l'expression (3.3) et qu'il s'agit bien d'un polynôme de degré n .

La fonction de Lagrange $L_1(x)$ est construite de la même façon et est définie par

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)} \quad (3.4)$$

Remarque(s) : L'absence remarquée du terme $(x - x_1)$ dans l'expression (3.4), nous laisse aisément voir qu'il y a n facteurs de la forme $(x - x_i)$ et qu'il s'agit bien d'un polynôme de degré n .

L'expression générale du polynôme de Lagrange $L_i(x)$ est donnée par

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \quad (3.5)$$

Remarque(s) : Dans l'expression (3.5), seul le facteur $(x - x_i)$ est absent. $L_i(x)$ est donc un polynôme de degré n qui vaut 1 en $x = x_i$ et qui s'annule à tous les autres points de collocation.

Théorème 3.1

Étant donné les $(n + 1)$ points d'interpolation $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \dots, n$, l'unique polynôme d'interpolation de degré n passant par tous ces points peut s'écrire

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x), \quad (3.6)$$

où les $(n + 1)$ polynômes de Lagrange $L_i(x)$ sont définies par la relation (3.5).

Remarque(s) : La méthode d'interpolation de Lagrange présente un inconvénient majeur : elle n'est pas récursive. En effet, si l'on souhaite passer d'un polynôme de degré n à un polynôme de degré $(n+1)$ (en ajoutant un point de collocation), on doit reprendre pratiquement tout le processus à zéro. C'est en revanche ce que permet la méthode d'interpolation de Newton.

Exemple 4

Exemple à traiter en classe !

Polynôme de Newton

Lorsqu'on écrit l'expression générale d'un polynôme de degré 1, on pense immédiatement à la forme $p_1(x) = a + bx$ où a et b sont des coefficients connus. Il existe cependant d'autres formes plus appropriées, si l'on veut construire un tel polynôme passant par les deux points de collocation $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ et vérifiant les conditions

$$p_1(x_0) = f(x_0), \quad p_1(x_1) = f(x_1) \quad (4.1)$$

La forme suivante s'avère convenable

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \quad (4.2)$$

car les coefficients a_0 et a_1 se déterminent de façon automatique. En effet, Le deuxième terme de la forme (4.2) s'annulant en $x = x_0$, alors la première condition en (4.1) permet de vérifier facilement que

$$p_1(x_0) = a_0 = f(x_0) \quad (4.3)$$

Grâce à la deuxième condition en (4.1) où on doit s'assurer que $p_1(x_1) = f(x_1)$ et celle en (4.3), on a

$$p_1(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

Ce qui permet d'isoler le coefficient a_1 pour obtenir la relation suivante

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (4.4)$$

Note: L'unique polynôme de degré 1, passant par les deux points de collocation $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$, s'écrire selon le procédé d'*interpolation de Newton* précédent sous la forme

$$p_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0). \quad (4.5)$$

Définition 4.1

On définit **la première différence divisée** de la fonction $f(x)$ aux points de collocation $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ par

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (4.6)$$

Note: Plus généralement, **les premières différences divisées** de la fonction $f(x)$ sont données par

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}. \quad (4.7)$$

Définition 4.2

On définit **la deuxième différence divisée** de la fonction $f(x)$, aux points de collocation $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, par la relation

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \quad (4.8)$$

Note: Plus généralement, **les deuxièmes différences divisées** de la fonction $f(x)$ sont définies à partir des premières différences divisées par la relation

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \quad (4.9)$$

Pour un polynôme de degré 2, l'expression générale à laquelle on pense immédiatement est celle de la forme suivante

$$p_2(x) = a + bx + cx^2$$

où a , b et c sont des coefficients connus. Alors qu'une adaptation de la construction précédente, permet d'obtenir :

Note: L'unique polynôme de degré 2, passant par les trois points de collocation $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, s'écrire selon le procédé d'*interpolation de Newton* précédent sous la forme

$$p_2(x) = \underbrace{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)}_{p_1(x)} + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \quad (4.10)$$

Remarque(s) : On remarque que ce polynôme de degré 2 s'obtient simplement par l'ajout d'un terme de degré 2 à $p_1(x)$ déjà calculé. Ainsi, cette méthode est dite *récursive*.

Théorème 4.1

L'unique polynôme de degré n passant par les $(n + 1)$ points de collocation $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$, peut s'écrire selon le procédé d'interpolation de Newton décrit préalablement comme suit

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}), \quad (4.11)$$

où les coefficients a_i de ce polynôme sont les différences divisées données par la relation

$$a_i = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_i] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_i] - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.12)$$

Question: Comment calculer efficacement les coefficients a_i d'un polynôme de Newton ?

Pour obtenir un polynôme de Newton passant par les points de collocation $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, 3$, on construit une table dite de **différences divisées** (la formule de Newton utilise la **diagonale principale** de cette table) dont :

- Les premières différences divisées $f[x_i, x_{i+1}]$ découlent de la définition.
- Pour obtenir par exemple $f[x_0, x_1, x_2]$, il suffit de soustraire les 2 termes adjacents $f[x_0, x_1]$ et $f[x_1, x_2]$ pour ensuite diviser le résultat par $(x_2 - x_0)$.
- Pour obtenir $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$, on soustrait $f[x_0, x_1, x_2]$ de $f[x_1, x_2, x_3]$ et l'on divise le résultat par $(x_3 - x_0)$

Table de différences divisées				
x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$

Erreur d'interpolation

Si un polynôme d'interpolation $p_n(x)$ est une approximation de la fonction $f(x)$ à travers ses points de collocation $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$, alors on peut exprimer l'erreur d'interpolation $E_n(x)$ de la façon suivante

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x), \text{ ou encore } E_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

Il reste à évaluer cette erreur, qu'on constate immédiatement nulle aux points de collocation :

$$E_n(x_i) = 0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Théorème 5.1

Soit $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, les abscisses des points de collocation. On suppose que la fonction $f(x)$ est définie dans l'intervalle $[x_0, x_n]$ et qu'elle est $(n+1)$ fois dérivable dans $]x_0, x_n[$. Alors, pour tout x dans l'intervalle $[x_0, x_n]$, il existe $\zeta(x)$ appartenant à l'intervalle $]x_0, x_n[$ tel que

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1}(\zeta(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n). \quad (5.1)$$

Remarque(s) : La relation (5.1) est l'**expression analytique de l'erreur d'interpolation** et quelques remarques s'imposent pour mieux comprendre sa portée.

- ❶ La fonction **a priori** inconnue $f(x)$ apparaît par l'entremise de sa dérivée d'ordre $(n + 1)$ évaluée au point $\zeta(x)$, également inconnu et qui varie avec x .
- ❷ Il existe une similarité entre l'erreur d'interpolation et l'erreur reliée au développement de Taylor. Dans les deux cas, on montre l'existence d'un point $\zeta(x)$ permettant d'évaluer l'erreur, mais que l'on ne peut généralement pas déterminer.
- ❸ Puisque le terme d'erreur en un point x fait intervenir des coefficients de la forme $(x - x_i)$, il y a tout intérêt à choisir les points x_i qui sont situés le plus près possible de x . Ce choix est utile lorsqu'un grand nombre de points de collocation sont disponibles et qu'il n'est pas nécessaire de construire un polynôme passant par tous les points. **On retient alors seulement les points de collocation les plus près de x de manière à minimiser l'erreur.**
- ❹ La fonction $(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ est un polynôme de degré $(n + 1)$ et possède donc les $(n + 1)$ racines réelles x_i , pour $i = 0, 1, \dots, n$. Dans certaines conditions, cette fonction peut osciller avec de fortes amplitudes, d'où le risque de grandes erreurs d'interpolation. **Cette propriété fait en sorte qu'il est délicat d'effectuer des interpolations en utilisant des polynômes de degré élevé.**

On peut montrer qu'à une constante près, la $n - i$ ème différence divisée de $f(x)$ est une approximation d'ordre 1 de la dérivée $n - i$ ème de $f(x)$ en $x = x_0$:

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \mathcal{O}(h) \quad (5.2)$$

En supposant que la dérivée $(n+1) - i$ ème de $f(x)$ varie peu dans l'intervalle $[x_0, x_n]$, on a alors l'approximation

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}] \simeq \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \simeq \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}.$$

Ce qui permet de donner une estimation du terme (5.1) par

$$E_n(x) \simeq f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n), \quad (5.3)$$

Remarque(s) : La méthode d'interpolation de Newton étudiée antérieurement permet ainsi une bonne estimation du terme d'erreur (5.1). En effet, on a l'erreur $E_n(x)$ qui est estimée par

$$E_n(x) \simeq p_{n+1}(x) - p_n(x). \quad (5.4)$$

Remarque(s) :

- ① l'approximation (5.3) (ou (5.4)) n'est rien d'autre que le terme nécessaire au calcul du polynôme de degré ($n + 1$) dans la formule de Newton (4.11).

Note: Il est possible d'évaluer l'erreur d'interpolation liée à un polynôme de degré n en calculant le terme suivant dans la formule de Newton.

- ② L'approximation (5.3) n'est pas toujours d'une grande précision, mais c'est généralement la seule disponible.
- ③ Dans le cas d'une interpolation à l'aide de la formule de Newton, on a le critère d'arrêt

$$\frac{|p_{n+1}(x) - p_n(x)|}{|p_{n+1}(x)|} < \varepsilon_a,$$

où ε_a est une valeur de tolérance fixée à l'avance.

Théorème 5.2

Dans le cas où les abscisses x_i des points de collocation sont équidistantes, l'expression analytique de l'erreur d'interpolation s'écrit (pour un certain ζ dans l'intervalle $]x_0, x_n[$)

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} s(s-1)(s-2) \cdots (s-n) h^{n+1}. \quad (5.5)$$

Remarque(s) :

- On peut dès lors conclure que le polynôme d'interpolation $p_n(x)$ est une approximation d'ordre $(n + 1)$ de la fonction $f(x)$.

Note: si l'on prend des points de collocation situés à une distance $\frac{h}{2}$ les uns des autres, l'erreur d'interpolation est diminuée d'un facteur de 2^{n+1} .

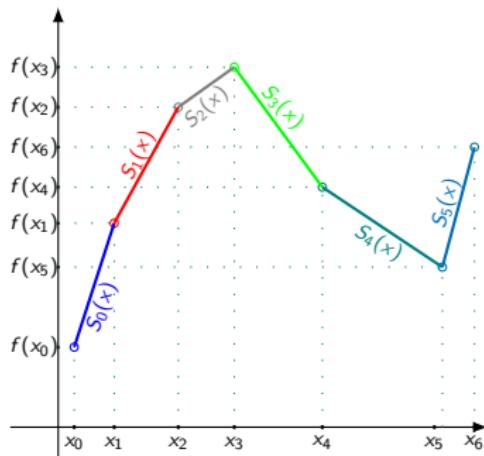
- L'expression analytique de l'erreur d'interpolation demeure la même, quelle que soit la façon dont on calcule le polynôme d'interpolation

Note: Ainsi, l'expression (5.1) est valable si l'on utilise l'interpolation de Lagrange, la matrice de Vandermonde ou toute autre méthode. Cela s'explique par l'unicité de ce polynôme.

- L'approximation de l'erreur exprimée par l'équation (5.3) est également valable quelle que soit la façon dont on calcule le polynôme d'interpolation.

Note: Si l'on utilise une autre méthode que l'interpolation de Newton, il faut calculer la table de différences divisées pour obtenir l'approximation (5.3). Il est donc avantageux d'utiliser la formule de Newton dès le départ.

Splines cubiques

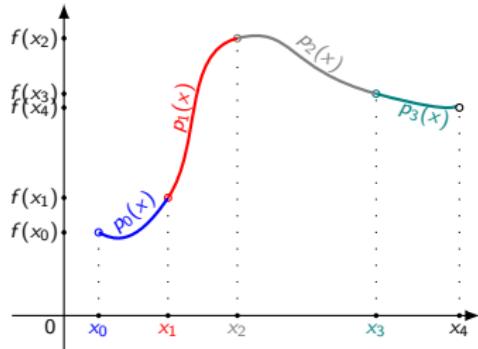


Interpolation linéaire par morceaux

La régularité d'une fonction se mesurant par ses dérivées, on aurait pensé que les polynômes de degré élevé seraient alors adéquats pour interpoler un grand nombre de points. Mais leur utilisation mène parfois à de grandes oscillations. Pour des polynômes de faible degré, il en faut plusieurs pour relier tous les points tel que le montre la figure (il faut être plus prudent à la jonction des différents segments).

Note: C'est l'interpolation linéaire par morceaux (ou *splines linéaires*) ; relier chaque paire de points par un segment de droite S_i .

La spline linéaire étant continue mais pas dérivable, on utilisera les *splines cubiques* qui constituent un compromis entre la régularité de la courbe obtenue et le degré.



Splines cubiques :
 $(n = 4)$ polynômes de degré 3

Méthode : On considère \$(n + 1)\$ points d'interpolation \$(x_i, f(x_i))\$, \$i = 0, 1, 2, \dots, n\$, par lesquels on souhaite faire passer une courbe qui sera qualifiée de **splines cubiques** si :

- Dans chaque intervalle \$[x_i, x_{i+1}]\$ (de longueur \$h_i = x_{i+1} - x_i\$), elle est un polynôme de degré 3 de la forme

$$p_i(x) = f_i + f'_i(x - x_i) + \frac{f''_i}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{f'''_i}{3!}(x - x_i)^3 \quad (6.1)$$

pour \$i = 0, 1, 2, \dots, n - 1\$.

- Elle est deux fois différentiable aux points d'intersection \$(x_i, f(x_i))\$, \$i = 1, 2, \dots, n - 1\$ de ces polynômes.

Remarque(s) : L'interpolation par splines cubiques de points \$(x_i, f(x_i))\$, revient à déterminer les \$4n\$ coefficients \$f_i\$, \$f'_i\$, \$f''_i\$ et \$f'''_i\$, qui sont respectivement les valeurs de la spline et de ses trois premières dérivées en \$x_i\$: \$p_i(x_i) = f_i\$, \$p'_i(x_i) = f'_i\$, \$p''_i(x_i) = f''_i\$ et \$p'''_i(x_i) = f'''_i\$.

1. En imposant la continuité des dérivées secondes aux $(n - 1)$ noeuds intérieurs x_{i+1} , $i = 0, 1, \dots, n - 2$, et en définissant f_n'' comme étant la dérivée seconde de la spline en x_n , c'est à dire $f_n'' = p_{n-1}''(x_n)$, on a

$$f_i''' = \frac{f_{i+1}'' - f_i''}{h_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (6.2)$$

2. À la première extrémité x_i de chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, le polynôme $p_i(x)$ passe au point $(x_i, f(x_i))$. on a

$$f(x_i) = p_i(x_i) = f_i, \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, n - 1. \quad (6.3)$$

3. À la deuxième extrémité x_{i+1} du même intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on obtient $f(x_{i+1}) = p_i(x_{i+1})$

$$f_i' = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{h_i f_i''}{3} - \frac{h_{i+1} f_{i+1}''}{6}, \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, n - 1. \quad (6.4)$$

4. En imposant la continuité de la dérivée première aux $(n - 1)$ noeuds intérieurs x_{i+1} , on a $p_{i+1}'(x_{i+1}) = p_i'(x_{i+1})$

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} f_i'' + 2f_{i+1}'' + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} f_{i+2}'' = 6f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}], \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, n - 2. \quad (6.5)$$

Remarque(s) : On remarque que la formule (6.5) fait intervenir les deuxièmes différences divisées. Dans le cas où les abscisses sont équidistantes, c'est-à-dire $h_i = h$ quel que soit i , cette formule devient

$$\frac{1}{2} f_i'' + 2f_{i+1}'' + \frac{1}{2} f_{i+2}'' = 6f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}], \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, n - 2. \quad (6.6)$$

On obtient alors une matrice tridiagonale dont la diagonale principale ne contient que des 2, tandis que les deux autres diagonales sont constituées de coefficients valant $\frac{1}{2}$. *Cette matrice ne dépend donc pas de la valeur de h , qui n'affecte que le terme de droite.*

Remarque(s) : Nous avons également exprimé toutes les inconnues du système en fonction des dérivées secondes f_i'' de la spline et de fait il ne reste que $n + 1$ inconnues pour les $n - 1$ équations du système (6.5). On doit donc ajouter, de façon plus ou moins arbitraire, deux équations supplémentaires pour compléter le système (6.5) (ou (6.6)) et avoir autant d'équations que d'inconnues :

- 1 Une façon simple de compléter ce système d'équations consiste à imposer aux dérivées secondes des valeurs aux deux extrémités x_0 et x_n soit $p_0''(x_0) = a$ et $p_{n-1}''(x_n) = b$:

$$f_0'' = a, \text{ et } f_n'' = b \quad (6.7)$$

Note: Cela suppose bien entendu que l'on connaît les valeurs a et b de la dérivée seconde aux extrémités de la courbe. Si $a = b = 0$, on qualifie de *spline naturelle* la courbe qui en résulte.

- 2 Un autre choix possible consiste à imposer que

$$f_0'' - f_1'' = 0, \text{ et } -f_{n-1}'' + f_n'' = 0 \quad (6.8)$$

- 3 On peut aussi imposer les dérivées premières $p_0'(x_0) = a$ et $p_{n-1}'(x_n) = b$ aux deux extrémités (en supposant toujours que nous les connaissons). On doit dans ce cas ajouter au système (6.5) (ou (6.6)) les équations

$$\begin{cases} 2f_0'' + f_1'' = \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - a) \\ f_{n-1}'' + 2f_n'' = \frac{6}{h_{n-1}}(b - f[x_{n-1}, x_n]) \end{cases} \quad (6.9)$$

- 4 Une autre choix intéressante est la condition dite *not-a-knot* qui consiste à imposer aux noeuds d'interpolation x_1 et x_{n-1} , la continuité de la troisième dérivée $p_0'''(x_1) = p_1'''(x_1)$ ainsi que $p_{n-2}'''(x_{n-1}) = p_{n-1}'''(x_{n-1})$. Ce qui génère les équations suivantes, s'ajoutant au système (6.5) (ou (6.6))

$$\begin{aligned} h_1 f_0'' - (h_0 + h_1) f_1'' + h_0 f_2'' &= 0 \\ h_{n-1} f_{n-2}'' - (h_{n-2} + h_{n-1}) f_{n-1}'' + h_{n-2} f_n'' &= 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Exemple 5

Exemple à traiter en classe !

À Retenir !

Je dois pouvoir répondre aux questions^a suivantes :

- ① Je peux construire un polynôme d'interpolation par les méthodes de Vandermonde, de Lagrange et de Newton.
- ② Je connais le terme d'erreur, comprends son caractère oscillatoire.
- ③ Je sais comment choisir des points pour construire une interpolation.
- ④ Je comprends le concept de spline, j'en connais les particularités et sais vérifier toutes ses propriétés (distinguer une spline d'interpolation cubique par morceaux).
- ⑤ Je sais construire une spline cubique naturelle.

a. André Fortin : *Analyse numérique pour ingénieurs*, Presses Internationales Polytechnique 2016.