Diagonalisation

Sommaire

1 Rappels sur le déterminant

Dans toute la suite, les matrices considérées sout des matrices carrées.

Définition 1.1

Soit A une matrice carrée. Le déterminant de A, noté $\det A$ ou $|A|$, est le nombre réel :

- $\det\ A = a$, si $A = a \in \mathbb{R}$.
- $\det\ A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} \det\ A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}\right) \\ &\quad - \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33}\right), \end{aligned}$$

appelé la «Règle de Sarrus».

Note : À partir de la régle de Sarrus, on a

$$\begin{aligned}\det A = &a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}\right)\\ &-a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)\\ &+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}\right)\\ = &a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

C'est le développement de Laplace suivant la premièe ligne !

1.1 Propriétés du déterminant

Propriété 1.1

1. $\det A^\top = \det A$.
2. Si A contient une ligne (ou une colonne) nulle, alors det $A = 0$.
3. Si A contient deux lignes (colonnes) identiques, alors $\det A = 0$.
4. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de sa diagonale principale. En particulier, $\det I = 1$.
5. Considénons une matrice B obtenue à partir d'une matrice A par une opération élémentaire sur les lignes (respectivement sur les colonnes) :
   a. Si l'on échange deux lignes (resp. colonnes) de A, alors $\det B = -\det A$.
   b. Si l'on multiplice une ligne (resp. une colonne) de A par un scalaire k, alors $\det B = k \det A$.
   c. Si l'on ajoute un multiple d'une ligne (resp. colonne) de A à une autre ligne (resp. colonne) de A, alors $\det B = \det A$.

Exemple 1.1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 3\end{vmatrix} \overset{\substack{L_2-2L_1\\ L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} \overset{L_2\leftrightarrow L_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix} = -(1)(1)(-3) = 3$$

1.2 Développement de Laplace

Définition 1.2

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On désigne par M_{ij} la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant de A sa i-ème ligne et sa j-ème colonne.

- On appelle mineur de l'élément a_{ij} le déterminant de la matrice M_{ij}.
- Et on appelle cofacteur de a_{ij}, noté α_{ij}, le nombre α_{ij} défini par

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}.$$

- Le déterminant de la matrice A est donné par

$$\det A = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in}.$$

> On dit que le déterminant de la matrice A est obtenu par un développement de Laplace suivant la i-ème ligne.

- Le déterminant de la matrice A est donné par

$$\det A = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj}.$$

> On dit que le déterminant de la matrice A est obtenu par un développennent de Laplace suivant la j-ème colonne.

Exemple 1.2 :

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_1-3L_2 \\ L_3-2L_2 \\ L_4-3L_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Développennent de Laplace suivant la $1^{\text{ière}}$ colonne $= (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

$$\overset{L_1+L_3}{=} (-1)\begin{vmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Développennent de Laplace suivant la $1^{\text{ière}}$ colonne $= (-1)\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(27-9) = -18$

1.3 D'autres résultats sur le déterminant

- A est inversible $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
- Conséquences :
  - $\star$

$$\begin{aligned} 1 = \det(I) &= \det\left(AA^{-1}\right) \\ &= (\det A)\left(\det A^{-1}\right) \quad \text{et donc} \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}. \end{aligned}$$

  - $\star$ Soit A et B deux **matrices semblables**, c'est-à-dire $B = P^{-1}AP$. Alors,

$$\begin{aligned} \det B &= \left(\det P^{-1}\right)(\det A)(\det P) \\ &= \frac{1}{\det \mathrm{P}}(\det A)(\det P) \quad \text{et donc} \quad \det B = \det A. \end{aligned}$$

2 Diagonalisation, valeurs propres et vecteurs propres

Définition 2.1

Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est **diagonalisable** s'il existe une matrice inversible P, telle que

$$P^{-1}AP = D \quad \text{où} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{est une matrice diagonale.}$$

Écrivons P sous sa partition en colonnes :

$$P = [X_1 \; X_2 \; \cdots \; X_n], \; X_i \neq 0, \; i = 1, \cdots, n.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP = D &\Leftrightarrow AP = PD \\
&\Leftrightarrow A\,[X_1\ X_2\ \cdots\ X_n] = [X_1\ X_2\ \cdots\ X_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow [AX_1\ AX_2\ \cdots\ AX_n] = [\lambda_1 X_1\ \lambda_2 X_2\ \cdots\ \lambda_n X_n] \\
&\Leftrightarrow AX_i = \lambda_i X_i,\ i = 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned}$$

Définition 2.2

Soit A une matrice carrée. S'il existe un vecteur non nul $X \neq 0$ et un scalaire λ tels que $AX = \lambda X$, alors on dit que

- le scalaire λ est une **valeur propre** de la matrice A ;
- et que le vecteur colonne X est un **vecteur propre** de A, associé à λ.

Note : Soit X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Alors pour tout nombre $k \neq 0$, le vecteur kX est aussi un vecteur propre de A associé à la même valeur propre λ.

En effet, $A(kX) = kAX = k\lambda X = \lambda(kX)$ pour tout $kX \neq 0$.

Théorème 2.1

Une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable, si et seulement si elle possède n vecteurs propres linéairement indépendants $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$.

Preuve :

- Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = D \ \text{ soit diagonale.}$$

Donc

$$\begin{aligned}
AP = PD &\Longrightarrow A\,[X_1\ X_2\ \cdots\ X_n] = [X_1\ X_2\ \cdots\ X_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \\
&\Longrightarrow AX_i = \lambda_i X_i,\ i = 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned}$$

Comme P est inversible, alors $X_1\ X_2\ \cdots\ X_n$ sont linéairement indépendants.

- Montrons maintenant l'implication dans l'autre sens. Pour cela, considérons

$$P = [X_1\ X_2\ \cdots\ X_n] \quad \text{où} \quad AX_i = \lambda_i X_i,\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

et $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont linéairement indépendants. Alors, P est inversible et

$$AP = [AX_1\ AX_2\ \cdots\ AX_n] = [\lambda_1 X_1\ \lambda_2 X_2\ \cdots\ \lambda_n X_n] \qquad \text{et donc}$$

$$AP = [X_1\ X_2\ \cdots\ X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = PD, \quad \text{d'où} \quad P^{-1}AP = D. \ \square$$

Proposition 2.1

Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes d'une matrice. Soit X_1 un vecteur propre associé à λ_1 et X_2 un vecteur propre associé à λ_2. Alors, $\{X_1, X_2\}$ est linéainement indépendant.

Preuve :

Considérons la combinaison linéaire nulle suivante $a_1X_1 + a_2X_2 = 0$, alors en multipliant cette combinaison par la matrice A on a

$$\begin{aligned} A(a_1X_1 + a_2X_2) = 0 &\Rightarrow a_1AX_1 + a_2AX_2 = 0 \\ &\Rightarrow a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_2X_2 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

D'autre part, en multipliant cette même combinaison par λ_1 on obtient

$$a_1X_1 + a_2X_2 = 0 \Rightarrow a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_1X_2 = 0. \tag{2}$$

Et donc, en combinant les équations (1) et (2) nous avons le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_2X_2 = 0 \\ a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_1X_2 = 0 \end{cases} &\Rightarrow a_2(\lambda_2 - \lambda_1)X_2 = 0 \\ &\Rightarrow a_2 = 0 \ \text{ car } \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \ \text{ et } \ X_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Alors $a_1X_1 + a_2X_2 = 0 \Rightarrow a_1X_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ car $X_1 \neq 0$, d'où $\{X_1, X_2\}$ est libre. $\square$

Théorème 2.2

Soit A une matrice carrée. Si toutes les valeurs propres de A sont distinctes alors A est diagonalisable.

Preuve :

Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\forall\, i, j \in \{1, \cdots, n\}$ et $i \neq j$, où $\lambda_i, i = 1, \cdots, n$, sont les valeurs propres de A. Pour chaque λ_i, soit X_i un vecteur propre de A associé à λ_i, c'est-à-dire

$$AX_i = \lambda_i X_i,\ X_i \neq 0,\ i = 1, \cdots, n.$$

Montrons, par récurrence, que $\{X_1, \cdots, X_n\}$ est libre.

- C'est vrai pour $\{X_1\}$ car $X_1 \neq 0$.
- Supposons que $\{X_1, \cdots, X_k\}$ est libre.
- Montrons que $\{X_1, \cdots, X_{k+1}\}$ est libre. Pour cela, considérons la combinaisons linéaire nulle suivante :

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i X_i = 0 \implies \sum_{i=1}^{k+1} a_i A X_i = 0 \tag{3}$$

$$\implies \sum_{i=1}^{k+1} a_i \lambda_i X_i = 0. \tag{4}$$

D'autre part, comme

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i X_i = 0 \ \text{ alors } \ \sum_{i=1}^{k_i+1} a_i \lambda_{k+1} X_i = 0. \tag{5}$$

Donc à partir de (4) et (5), nous avons la combinaison linéaire nulle suivante

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \left(\lambda_i - \lambda_{k+1}\right) X_i = 0 \implies a_i \left(\lambda_i - \lambda_{k+1}\right) = 0,$$

car $\{X_1, \cdots, X_k\}$ est libre. Or le fait que $a_i \left(\lambda_i - \lambda_{k+1}\right) = 0, i = 1, \cdots, k$, implique que $a_i = 0, i = 1, \cdots, k$ car $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$. Finallement de la combinaisons linéaire nulle (3), il ne reste que $a_{k+1} X_{k+1} = 0$ ce qui implique que $a_{k+1} = 0$ car $X_{k+1} \neq 0$. □

3 Propriétés des valeurs propres et des vecteurs propres

Définition 3.1

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

- Si X un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors on a

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\iff AX = \lambda I X \\ &\iff (A - \lambda I)X = 0. \end{aligned}$$

- L'espace $E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}_c^n \mid (A - \lambda I)X = 0\}$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}_c^n$ appelé l'**espace propre** associé à λ.

Note :

- Pour l'espace propre E_λ, nous avons :

$$\begin{aligned} E_\lambda \neq \{0\} &\Leftrightarrow (A - \lambda I) \text{ est une } \textbf{matrice singulière} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \end{aligned}$$

- Le $\det(A - \lambda I)$ est un polynôme, en λ, de degré n. Il est appelé le **polynôme caractéristique** de A.
- L'équation $\det(A - \lambda I) = 0$ est appelée l'**équation caractéristique** de A.
- Les racines du polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I)$, c'est-à-dire les solutions de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$, sont les valeurs propres de A.
- Pour chaque valeur propre λ, on détermine l'espace propre E_λ associé en résolvant le système d'équations linéaires homogène $(A - \lambda I)X = 0$.

Exemple 3.1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

La matrice A est-elle diagonalisable ?

- Valeurs propres :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} &= (\lambda - 4)(\lambda + 1) - 6 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 10 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = 5 \end{aligned}$$

A possede deux valeurs propres $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 5$, et donc A est diagonalisable.

- Vecteurs propres :

$\lambda_1 = -2$

$$(A+2I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff 6x_1 + 2x_2 = 0$$
$$\iff x_2 = -3x_1$$

Donc $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -3x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}$. D'où

$$E_{\lambda_1} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}.$$

$\lambda_2 = 5$

$$(A-5I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff -x_1 + 2x_2 = 0$$
$$\iff x_1 = 2x_2$$

Donc $X = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}$. D'où

$$E_{\lambda_2} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Fimalement, on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.2 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

- Valeurs propres :

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\left((2-\lambda)^2-2\right) - (2-2(2-\lambda)) \\
&= (1-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+2\right) - 2(\lambda-1) \\
&= (1-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+4\right) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda-2)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ou $\lambda=2$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=2$ **qui est double**.

- Vecteurs propres :

$\lambda_1 = 1$

$$(A-\lambda_1 I)\,X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A-I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(A-I)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{matrix}
\end{aligned}$$

Alors, $X = x_3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$\lambda_2 = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2x_2$$

$$x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$$

$$\text{donc } X = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{\lambda_2} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La matrice A n'est pas diagonalisable car elle ne possède que 2 vecteurs propres linéairement indépendants.

Définition 3.2

Soit λ une valeur propre d'une matrice A.

- On appelle **multiplicité algébrique** de λ, la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique.
- Alors que la **multiplicité géométrique** de λ est la dimension de l'espace propre associé E_λ.

Proposition 3.1

La multiplicité géométrique d'une valeur propre d'une matrice A est plus petite ou égale à sa multiplicité algébrique.

Preuve :

Soit A une matrice carrée d'ordre n, et soit λ_1, une valeur propre de A de multiplicité géométrique k ($\dim E_{\lambda_1} = k$).

Soit $\{X_1, \cdots, X_k\}$ un ensemble linéairement indépendant, formé de vecteurs propres associés a λ_1. On complète $\{X_1, \cdots, X_k\}$ en une base

$$\{X_1, \cdots, X_k, X_{k+1}, \cdots, X_n\} \quad \text{de} \quad \mathbb{R}^n_c.$$

Posons $P = [X_1 \cdots X_k \, X_{k+1} \cdots X_n]$. Alors,

$$AP = [AX_1 \cdots AX_k \; AX_{k+1} \cdots AX_n] = [\lambda_1 X_1 \cdots \lambda_1 X_k \; AX_{k+1} \cdots AX_n]$$

et donc

$$AP = \underbrace{\left[X_1 \cdots X_k\ X_{k+1} \cdots X_n\right]}_{P} \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & B \\ 0 & & \lambda_1 & \\ \hline & 0 & & C \end{array}\right] \tag{6}$$

où $P\left[\frac{B}{C}\right] = A\left[X_{k+1} \cdots X_n\right] \Rightarrow \left[\frac{B}{C}\right] = P^{-1}A\left[X_{k+1} \cdots X_n\right]$.
À partir de l'égalité en (6), nous obtenons ainsi la décomposition

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 I_k & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$$

Et sachant que A et $P^{-1}AP$ sont semblables, alors nous avons

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det\left(P^{-1}AP - \lambda I\right) \\ &= \det\left(\left[\begin{array}{c|c} (\lambda_1 - \lambda)I_k & B \\ \hline 0 & C - \lambda I_{(n-k)} \end{array}\right]\right) \\ &= \det\left((\lambda_1 - \lambda)\, I_k\right) \times \det\left(C - \lambda I_{(n-k)}\right) \\ &= (\lambda_1 - \lambda)^k \times \det\left(C - \lambda I_{(n-k)}\right). \end{aligned}$$

Alors $(\lambda_1 - \lambda)^k$ divise le polynôme caractéristique de A, et par conséquent k est plus petit ou égal à la multiplicité algébrique de λ_1. □

Proposition 3.2

Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes d'une matrice A. Alors, $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.

Preuve :

Soit $X \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$ alors $AX = \lambda_1 X$ et $AX = \lambda_2 X$. Donc $(\lambda_1 - \lambda_2)\, X = 0 \Rightarrow X = 0$, car $\lambda_1 \neq \lambda_2$. D'où $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$. □

Proposition 3.3

Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes d'une matrice A. Soit $\{X_1, \cdots, X_p\} \subset E_{\lambda_1}$ et $\{Y_1, \cdots, Y_q\} \subset E_{\lambda_2}$. Si $\{X_1, \cdots, X_p\}$ et $\{Y_1, \cdots, Y_q\}$ sont linéairement indépendants alors $\{X_1, \cdots, X_p, Y_1, \cdots, Y_q\}$ est un ensemble linéairement indépendant.

Preuve :

Soit la combinaison linéaire suivante

$$\sum_{i=1}^{p} a_i X_i + \sum_{i=1}^{q} b_i Y_i = 0 \text{ alors } \sum_{i=1}^{p} a_i X_i = -\sum_{i=1}^{q} b_i Y_i.$$

Et donc

$$\sum_{i=1}^{p} a_i X_i \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}.$$

Or, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et donc $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$. Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{p} a_i X_i = 0 \text{ et donc } a_i = 0, i \in \{1, \cdots, p\} \text{ car } \{X_1, \cdots, X_p\} \text{ est libre.}$$

Pour les mêmes raisons, nous avons également

$$\sum_{i=1}^{q} b_i Y_i = 0 \Rightarrow b_i = 0, \ i \in \{1, \cdots, q\}, \text{ car } \{Y_1, \cdots, Y_q\} \text{ est libre.}$$

Ce qui démontre le résultat. $\square$

Théorème 3.1

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Soit λ_i, $i = 1, \cdots, k$, des valeurs propres distinctes de A et de multiplicité algébrique m_i, $i = 1, \cdots, k$, avec $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$. Si $\dim E_{\lambda_i} = m_i$, $i = 1, \cdots, k$, alors A est diagonalisable.

Preuve :

Soit B_i une base de $E_{\lambda_i}, i = 1, \cdots, k$. Comme B_i est libre $\forall\, i \in \{1, \cdots, k\}$, alors $B_i \cup B_j$ est libre, $\forall\, i \neq j$. En fait, on a $\cup_{i=1}^{k} B_i$ est libre.

En effet, montrons par exemple que $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ est libre. Pour cela, posons

$$B_1 = \{X_1, \cdots, X_p\}, \ B_2 = \{Y_1, \cdots, Y_q\} \text{ et } B_3 = \{Z_1, \cdots, Z_r\}$$

Soit alors la combinaison linéaire nulle suivante :

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{i=1}^{p} a_i X_i}_{X} + \underbrace{\sum_{i=1}^{q} b_i Y_i}_{Y} + \underbrace{\sum_{i=1}^{r} c_i Z_i}_{Z} &= 0 \\ X + Y + Z &= 0 \qquad (7) \\ AX + AY + AZ &= 0 \\ \lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 Z &= 0 \qquad (8) \end{aligned}$$

Si on multiplie l'équation (7) par λ_3, on a :

$$\lambda_3 X + \lambda_3 Y + \lambda_3 Z = 0 \tag{9}$$

Et donc, la différence des équations (8) et (9) donne

$$\begin{gathered}
(\lambda_1 - \lambda_3)\, X + (\lambda_2 - \lambda_3)\, Y = 0 \\
\sum_{i=1}^{p} a_i\,(\lambda_1 - \lambda_3)\, X_i + \sum_{i=1}^{q} b_i\,(\lambda_2 - \lambda_3)\, Y_i = 0 \\
a_i\,(\lambda_1 - \lambda_3) = 0 \ \text{ et } \ b_i\,(\lambda_2 - \lambda_3) = 0, \forall\, i,
\end{gathered}$$

car $B_1 \cup B_2 = \{X_1, \cdots, X_p\} \cup \{Y_1, \cdots, Y_q\}$ est libre. Par conséquent, $a_i = 0$ et $b_i = 0$, $\forall\, i$, car $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $\lambda_2 \neq \lambda_3$. Alors,

$$\sum_{i=1}^{r} c_i Z_i = 0 \ \text{ et donc } \ c_i = 0, \forall\, i, \ \text{ car } \ \{Z_1, \cdots, Z_r\} \ \text{ est libre.}$$

En répétant le même argument, on aboutit à $\cup_{i=1}^{k} B_i$ est libre.
Maintenant, le nombre d'éléments de $\cup_{i=1}^{k} B_i$ est égal à $\Sigma_{i=1}^{k} m_i = n$. Et donc A possède n vecteurs propres linéairement indépendants, et par conséquent A est diagonalisable. $\square$

Exemple 3.3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

- Valeurs propres de A :

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 6 & -2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 9\right) \\
&= -(2+\lambda)(1-\lambda-3)(1-\lambda+3) \\
&= -(2+\lambda)(-\lambda-2)(4-\lambda) = (2+\lambda)^2(4-\lambda)
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (2+\lambda)^2(4-\lambda) = 0$ et on a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 4$ simple et $\lambda_2 = -2$ double.

- Vecteurs propres :

$\lambda_1 = 4$

$$A - \lambda_1 I = A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-4I)X = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{matrix} x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \end{matrix}$$

et donc $E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ et $\dim E_{\lambda_1} = 1$.

$\lambda_2 = -2$

$$A - \lambda_2 I = A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 - x_3$$

et donc

$$X = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \; et \; \dim E_{\lambda_2} = 2.$$

Alors, A est diagonalisable et on a

$$P^{-1}AP = D \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Note : Soit A une matrice diagonalisable. Alors, $P^{-1}AP = D$ et donc

$$\left(P^{-1}AP\right)^n = D^n \Longrightarrow P^{-1}A^nP = D^n \text{ d'où } A^n = PD^nP^{-1}.$$

Théorème 3.2

Toute matrice symétrique est diagonalisable.

4 Opérateurs Linéaires

Soit V un espace vectoriel de dimension n et $T : V \longrightarrow V$ un opérateur linéaire. T est diagonalisable s'il existe une base $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de V, telle que

$$_S[T]_S = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Or

$$_S[T]_S = \left(_S\left[T\left(v_1\right)\right] \cdots {}_S\left[T\left(v_j\right)\right] \cdots {}_S\left[T\left(v_n\right)\right] \right)$$

Et donc

$$_S[T]_S = D \Longleftrightarrow {}_S\left[T\left(v_j\right)\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j^{\text{ième}} \text{ ligne }, \ j = 1, \cdots, n$$

$$\Longleftrightarrow T\left(v_j\right) = \lambda_j v_j, \ j = 1, \cdots, n.$$

Définition 4.1

Soit $T : V \longrightarrow V$ un opérateur linéaire.

- Le scalaire λ est appelé **valeur propre** de T, s'il existe un vecteur v non nul tel que $T(v) = \lambda v$.
- Tout vecteur non nul vérifiant cette relation est appelé **vecteur propre** de T

associé à la valeur propre λ.

Soit $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ une base de V, formée de vecteurs propres de T. Soit B une autre base de V. Posons ainsi, $A = {}_B[T]_B$ et $D = {}_S[T]_S$. Alors,

$$A = {}_B[T]_B = {}_B[I_V]_{SS}[T]_{SS}[I_V]_B$$

C'est-à-dire

$$A = PDP^{-1} \text{ où } P = {}_B\left[I_V\right]_S$$

et donc $P^{-1}AP = D$.
Alors, T est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Corollaire 4.1

Soit V un espace vectoriel de dimension n et $T : V \longrightarrow V$ un opérateur linéaire. Alors, T est diagonalisable si et seulement si T possède n vecteurs propres linéairenement indépendants.

Exemple 4.1 : Soit l'opérateur linéaire $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$T(x, y, z) = (-x + 2z, 12x - 2y - 6z, -4x + 5z).$$

L'opérateur T est-il diagonalisable ?
Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors, on a

$$A = {}_B[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 12 & -2 & -6 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Valeurs propres de A :

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 12 & -2-\lambda & -6 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(2+\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(2+\lambda)((\lambda+1)(\lambda-5)+8) \\
&= -(2+\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right) \\
&= -(2+\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)
\end{aligned}$$

Alors, $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow -(2+\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)=0$, et donc les valeus propres de A sont $\lambda_1=-2, \lambda_2=1$ et $\lambda_3=3$.
Comme les valeurs propres de A sont distinctes, alors A est diagonalisable et par conséquent T est diagonalisable.

- Vecteurs propres :

$\lambda_1=-2$

$$A-\lambda_1 I = A+2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+2I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1=0, x_3=0 \text{ donc } X=\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où $E_{\lambda_1}=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

$\lambda_2=1$

$$A-\lambda_2 I = A-I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 12 & -3 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} x_1-x_3=0 \\ x_2-2x_3=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1=x_3 \\ x_2=2x_3 \end{matrix}$$

donc $X=\begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $E_{\lambda_2}=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$\lambda_3=3$

$$A-\lambda_3 I = A-3I = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 12 & -5 & -6 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-3I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 & = 0 \\ x_2 & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

donc $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où $E_{\lambda_3} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$. Donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres de T sont

$$v_1 = (0,1,0) \text{ associé à } \lambda_1 = -2,$$
$$v_2 = (1,2,1) \text{ associé à } \lambda_2 = 1,$$
$$v_3 = (1,0,2) \text{ associé à } \lambda_3 = 3.$$