



UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

MATH 2013 - Chapitre 5: Optimization



Ibrahima Dione



Département de Mathématiques et de Statistique

- Les valeurs extrêmes des fonctions de deux variables
- Les multiplicateurs de Lagrange

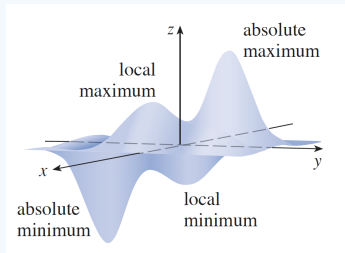
Les valeurs extrêmes des fonctions de deux variables

Définition

- Une fonction de deux variables possède un **maximum local en (a, b)** si $f(x, y) \leq f(a, b)$ pour tout (x, y) dans un voisinage de (a, b) .

Un voisinage de (a, b) peut être un disque ouvert de centre (a, b) .

Le nombre $f(a, b)$ est appelé **valeur maximale locale**.



- Si $f(x, y) \geq f(a, b)$ pour tout (x, y) dans un voisinage de (a, b) , alors f possède un **minimum local en (a, b)** et $f(a, b)$ est une **valeur minimale locale**.

On désigne un minimum ou un maximum par le terme **extremum**.

Théorème

Si f possède un maximum local ou un minimum local en (a, b) et si les dérivées partielles $f_x(a, b)$ et $f_y(a, b)$ de f existent, alors $f_x(a, b) = 0$ et $f_y(a, b) = 0$.

Démonstration:

- ▶ Soit la fonction g définition à travers f comme suit: $g(x) = f(x, b)$.
- ▶ Si f admet une extremum local en (a, b) , alors g possède un extrémum local en a et donc on a: $g'(a) = 0$.
- ▶ Or, $g'(a) = f_x(a, b)$, par conséquent $f_x(a, b) = 0$.
- ▶ Par le même raisonnement et en considérant la fonction $h(y) = f(a, y)$, on obtient $f_y(a, b) = 0$. □

- ▷ Si on pose $f_x(a, b) = 0$ et $f_y(a, b) = 0$ dans l'équation du plan tangent au graphe de f au point (a, b) :

$$z - z_0 = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b). \quad (1)$$

- ▷ On obtient $z = z_0$, d'où l'interprétation géométrique du théorème:

Si le graphe de f admet un plan tangent en un maximum ou en un minimum local, alors ce **plan tangent est horizontal**.

Définition

Un point (a, b) est appelé **point critique** (ou **point stationnaire**) de f si $f_x(a, b) = 0$ et $f_y(a, b) = 0$, ou si l'une de ces dérivées partielles n'existe pas.

- Le théorème affirme que si f possède un maximum ou un minimum local en (a, b) , alors (a, b) est un point critique de f .
- Cependant, comme pour les fonctions d'une seule variable, tous les points critiques ne donnent pas lieu à un maximum ou à un minimum.
- En un point critique, une fonction peut avoir un maximum local ou un minimum local, ou ni l'un ni l'autre.

Exemple 1.1: Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Alors,

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \text{ et } f_y(x, y) = 2y - 6.$$

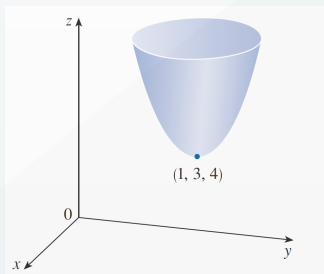
- Ces dérivées partielles sont nulles simultanément lorsque $x = 1$ et $y = 3$, et le seul point critique est $(1, 3)$.

▷ En complétant le carré, on trouve que

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2.$$

▷ Or, $(x - 1)^2 \geq 0$ et $(y - 3)^2 \geq 0$, donc $f(x, y) \geq 4$ pour tout x et y .

▷ Par conséquent, f possède un minimum local en $(1, 3)$ et, puisque $f(1, 3) = 4$, c'est le minimum global de f .

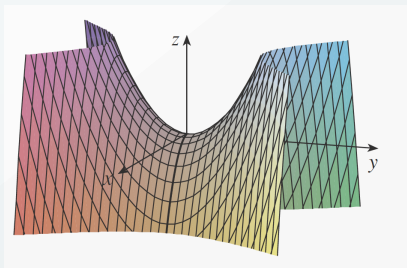


▷ Le graphe de f est un paraboloïde elliptique de sommet $(1, 3, 4)$ et ce point correspond au minimum de f . □

Exemple 1.2: Trouvons les extremums de $f(x,y) = y^2 - x^2$.

Réponse:

- ▶ Puisque $f_x = -2x$ et $f_y = 2y$, le seul point critique est $(0, 0)$.
- ▶ Sur l'axe des x , on a $y = 0$, de sorte que $f(x,y) = -x^2 < 0$ (si $x \neq 0$).
- ▶ Sur l'axe des y , on a $x = 0$, de sorte que $f(x,y) = y^2 > 0$ (si $y \neq 0$).



- ▶ Tout disque de centre $(0, 0)$ contient donc des points où f prend des valeurs positives et des valeurs négatives.

- ▷ Par conséquent, $(0, 0)$ ne pouvant être un extremum de f , la fonction ne possède pas d'extremum. □

Remarque :

- ▷ Cet exemple illustre le fait qu'une fonction ne possède pas nécessairement un maximum ou un minimum en un point critique.
- ▷ La figure montre comment cela est possible:
- ★ Le graphe de f est le paraboloid hyperbolique $z = y^2 - x^2$, qui admet un plan tangent horizontal ($z = 0$) à l'origine.
 - ★ On voit que $(0, 0)$ est à la fois un maximum dans la direction de l'axe des x et un minimum dans la direction de l'axe des y .
- ▷ Près de l'origine, le graphe a la forme d'une selle et le point critique $(0, 0)$ est appelé un **point de selle** de f .

- Afin de déterminer si une fonction possède ou non un extremum en un point critique, on utilise la règle suivante.

■ Test de dérivées secondes

On suppose que les **dérivées partielles secondes de f existent et sont continues** sur un disque de centre (a, b) et que $f_x(a, b) = 0$ et $f_y(a, b) = 0$ (c'est-à-dire que (a, b) est un point critique de f). Soit $D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$.

1. Si $D(a, b) > 0$ et $f_{xx}(a, b) > 0$, alors f possède un **minimum local** en (a, b) .
2. Si $D(a, b) > 0$ et $f_{xx}(a, b) < 0$, alors f possède un **maximum local** en (a, b) .
3. Si $D(a, b) < 0$, alors $f(a, b)$ **n'est ni un maximum local ni un minimum local**.

Note:

- Dans le cas 3., le point (a, b) est appelé un «point de selle de f », et le graphe de f coupe son plan tangent en (a, b) .

- Si $D(a, b) = 0$, le test des dérivées secondes n'est pas concluant:

- ★ f pourrait avoir un maximum ou un minimum local en (a, b) ;

- ★ ou (a, b) pourrait être un point de selle de f .

- En fait:

$$D(a, b) = \underbrace{\begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}}_{\text{Déterminant d'une matrice d'ordre 2}} = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2.$$

Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Exemple 1.3: Trouvons les maximums locaux, les minimums locaux et les points de selle de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Réponse:

- ▷ On détermine d'abord les points critiques en posant les dérivées partielles:

$$f_x = 4x^3 - 4y \text{ et } f_y = 4y^3 - 4x$$

égales à 0.

- ▷ On obtient les équations

$$x^3 - y = 0 \text{ et } y^3 - x = 0.$$

- ▷ Pour résoudre ce système, on substitue $y = x^3$, provenant de la première équation, dans la deuxième pour obtenir

$$\begin{aligned} 0 &= x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) \\ &= x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1). \end{aligned}$$

▷ Les seules racines réelles sont $x = 0, 1$ et -1 , donc les points critiques sont $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

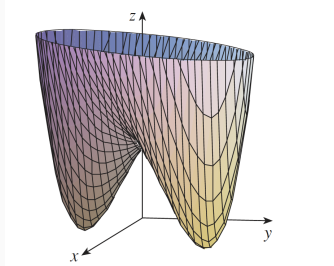
▷ On calcule maintenant les dérivées partielles secondes, et $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2; \quad f_{xy} = -4; \quad f_{yy} = 12y^2;$$
$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16.$$

▷ En $(0, 0)$, $D(0, 0) = -16 < 0$, et selon le cas 3. du test des dérivées secondes, l'origine est un point de selle. Cela signifie que f n'a pas de maximum local ni de minimum local en $(0, 0)$.

▷ En $(1, 1)$, $D(1, 1) = 128 > 0$ et $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$. Selon le cas 1. du test, f possède un minimum local en $(1, 1)$.

▷ En $(-1, -1)$, $D(-1, -1) = 128 > 0$, $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$, donc f possède aussi un minimum local en $(-1, -1)$. La valeur minimale de f est $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$. □



Exemple 1.4: Calculons la plus petite distance du point $(1, 0, -2)$ au plan $x + 2y + z = 4$.

Réponse:

► La distance de tout point (x, y, z) au point $(1, 0, -2)$ est

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}.$$

► Si (x, y, z) appartient au plan $x + 2y + z = 4$, alors $z = 4 - x - 2y$ et

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2}.$$

- ▷ Minimiser d est équivalent à minimiser la fonction plus simple d^2 , car ces deux fonctions sont positives. On pose

$$f(x, y) = d^2 = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

- ▷ et on trouve les points critiques de f en résolvant

$$f_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0.$$

- ▷ L'unique point critique est $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$. Or, $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = 4$ et $f_{yy} = 10$. Par conséquent,

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24 > 0 \text{ et } f_{xx} > 0.$$

- ▷ Test de dérivées secondes: f possède un minimum local en $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$.

- ▷ On peut voir intuitivement que ce minimum local est en réalité un minimum absolu parce qu'il existe sur le plan donné un seul point le plus près de $(1, 0, -2)$. Si $x = \frac{11}{6}$ et $y = \frac{5}{3}$, alors

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{6}\sqrt{6}.$$

- ▷ La plus petite distance de $(1, 0, -2)$ au plan $x + 2y + z = 4$ est $\frac{5}{6}\sqrt{6}$.

Définition

Soit D un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 . Un **point frontière** de D est un point (a, b) tel que tout disque ouvert de centre (a, b) contient à la fois des points de D et des points en dehors de D .

▷ Par exemple, le disque

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

★ constitué de tous les points sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$,

★ et de tous les points à l'intérieur de celui-ci $x^2 + y^2 < 1$,

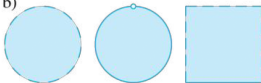
est un **ensemble fermé** parce qu'il contient tous ses points frontières (qui sont les points sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$).

a)



Ensembles fermés

b)



Ensembles non fermés

Définition

Un **ensemble borné** dans \mathbb{R}^2 est un ensemble qui est contenu dans un disque de rayon fini (autrement dit, son étendue est finie).

Théorème

Si f est **continue** sur un ensemble **fermé et borné** D dans \mathbb{R}^2 , alors f possède un **maximum absolu** et un **minimum absolu** en des points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de D .

Pour trouver le maximum et le minimum absolus d'une fonction f continue sur un ensemble fermé et borné D :

1. On calcule les valeurs de f aux points critiques de f contenus dans D .
2. On calcule les extremums de f sur la frontière de D .
3. La plus grande des valeurs des étapes 1. et 2. est le maximum absolu, et la plus petite de ces valeurs est le minimum absolu.

Exemple 1.5: Trouvons le maximum absolu et le minimum absolu de la fonction $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ sur le rectangle $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

Réponse:

- Étant un polynôme, la fonction f est continue sur le rectangle fermé et borné D .

▶ Selon le théorème, il existe un maximum absolu et un minimum absolu de f sur D .

▶ Conformément à 1., on trouve d'abord les points critiques de $f(x, y)$, qui sont les solutions du système

$$f_x = 2x - 2y = 0$$

$$f_y = -2x + 2 = 0.$$

▶ Le seul point critique est $(1, 1)$, qui appartient à D , et la valeur correspondante de f est $f(1, 1) = 1$.

▶ Conformément à 2., on cherche les valeurs de f sur la frontière de D , composée des quatre segments de droite L_1, L_2, L_3, L_4 .

★ Sur L_1 , on a $y = 0$ et $f(x, 0) = x^2$ pour $0 \leq x \leq 3$.

★ La valeur minimale de cette fonction croissante de x est $f(0, 0) = 0$, et sa valeur maximale est $f(3, 0) = 9$.

- ★ Sur L_2 , on a $x = 3$ et $f(3, y) = 9 - 4y$, pour $0 \leq y \leq 2$.
- ★ La valeur maximale de cette fonction décroissante de y est $f(3, 0) = 9$, et sa valeur minimale est $f(3, 2) = 1$.
- ★ Sur L_3 , on a $y = 2$ et $f(x, 2) = x^2 - 4x + 4$ pour $0 \leq x \leq 3$.
- ★ En utilisant la dérivée première ou en observant simplement que $f(x, 2) = (x - 2)^2$, on a la valeur minimale de la fonction $f(2, 2) = 0$ et la valeur maximale est $f(0, 2) = 4$.
- ★ Finalement sur L_4 , $x = 0$, donc $f(0, y) = 2y$ pour $0 \leq y \leq 2$.
- ★ Et la valeur maximale est $f(0, 2) = 4$, tandis que la valeur minimale est $f(0, 0) = 0$.

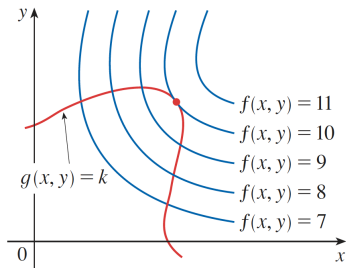
► Par conséquent, sur la frontière, le minimum de f est 0 , et le maximum est égal à 9 .

► Conformément à 3., on compare ces valeurs à la valeur $f(1, 1) = 1$ au point critique et on conclut que le maximum absolu de f sur D est $f(3, 0) = 9$ et que le minimum absolu est $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$.

Les multiplicateurs de Lagrange

I Les multiplicateurs de Lagrange

- ▶ Nous présentons ici la méthode des multiplicateurs de Lagrange permettant de maximiser ou de minimiser une fonction sous contrainte.
- ▶ On cherche à trouver les extremums de la fonction $f(x, y)$ soumise à une contrainte de la forme $g(x, y) = k$.
- ▶ Autrement dit, on cherche les extremums de $f(x, y)$ lorsque le point (x, y) est restreint à la courbe $g(x, y) = k$.



- ▶ Considérons les courbes de niveau $f(x, y) = c$, pour $c = 7, 8, 9, 10, 11$.

- ▶ Minimiser $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = k$ consiste à trouver le plus petit c tel que la courbe de niveau $f(x, y) = c$ coupe $g(x, y) = k$.
- ▶ Selon la figure, cela se produit lorsque ces deux courbes se touchent sans se croiser.
- ▶ Autrement dit lorsqu'elles ont une droite tangente commune.
- ▶ Cette condition signifie que les droites normales au point (x_0, y_0) où les courbes se touchent sont identiques.
- ▶ Par conséquent, les vecteurs gradients en ce point sont parallèles, c'est-à-dire que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0), \text{ pour un certain scalaire } \lambda. \quad (2)$$

Note: Le nombre λ en (2) est appelé **multiplicateur de Lagrange**.

- ▷ La méthode suivante, basée sur l'équation (2), permet de trouver les extremums d'une fonction sous une contrainte d'égalité.

4 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Pour trouver le minimum et le maximum d'une fonction $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = k$ (si on suppose que ces extremums existent et que $\nabla g \neq \vec{0}$ sur la surface $g(x, y) = k$), on procède comme suit:

- a** On trouve toutes les valeurs de x, y et λ telles que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

$$g(x, y) = k.$$

- b** On évalue f en tous les points (x, y) qui résultent de l'étape **a**. La plus grande de ces valeurs est le maximum de f ; la plus petite est le minimum de f .

Note:

- Les équations de l'étape a s'écrivent aussi sous la forme suivante:

$$f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad g(x, y, z) = k.$$

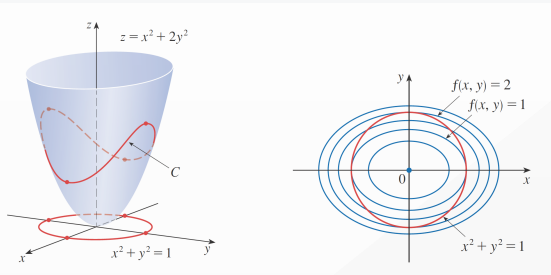
- C'est un système de trois équations à trois inconnues (x, y, λ) .

Exemple 2.1: Calculons les extremums de la fonction $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

Réponse:

- On cherche les extremums de la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ (voir la figure).
- On utilise les multiplicateurs de Lagrange et on doit résoudre les équations $\nabla f = \lambda \nabla g$ et $g(x, y) = 1$, qu'on peut écrire sous la forme

$$f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad g(x, y) = 1$$



► Sous une forme équivalente, on a le système suivante à résoudre:

$$2x = 2x\lambda \quad (3)$$

$$4y = 2y\lambda \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (5)$$

► D'après l'équation (3), on a $x = 0$ ou $\lambda = 1$.

★ Si $x = 0$, alors l'équation (5) donne $y = \pm 1$.

★ Si $\lambda = 1$, alors $y = 0$ d'après l'équation (4) et donc l'équation (5) donne $x = \pm 1$.

- ▶ Par conséquent, il est possible que f ait des extremums aux points

$$(0, 1), (0, -1), (1, 0) \text{ et } (-1, 0)$$

- ▶ On évalue f en ces quatre points et on obtient

$$f(0, 1) = 2 \quad f(0, -1) = 2 \quad f(1, 0) = 1 \quad f(-1, 0) = 1.$$

- ▶ Le maximum de f sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$ est $f(0, \pm 1) = 2$, et le minimum est $f(\pm 1, 0) = 1$.

- ▶ La figure à gauche illustre la restriction de $f(x, y)$ à la courbe de la contrainte et montre que la réponse trouvée est plausible.

Exemple 2.2: Calculons les extremums de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sur le disque $x^2 + y^2 \leq 1$.

Réponse:

- ▶ On compare les valeurs de f aux points critiques avec les valeurs aux points sur la frontière.
- ▶ Puisque $f_x = 2x$ et $f_y = 4y$, le seul point critique est $(0, 0)$, qui est à l'intérieur du disque.
- ▶ On compare la valeur de f en ce point avec les extremums sur la frontière trouvés à l'exemple précédent:

$$f(0, 0) = 0 \quad f(\pm 1, 0) = 1 \quad f(0, \pm 1) = 2.$$

- ▶ Par conséquent, le maximum de f sur le disque $x^2 + y^2 \leq 1$ est $f(0, \pm 1) = 2$, et la valeur minimale est $f(0, 0) = 0$.

Informations sur le cours

- **Ibrahima Dione** (ibrahima.dione@umoncton.ca)

- **Disponibilités:**

- ★ Lundi 10H00 - 12H00, MRR B-214
- ★ Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214
- ★ Jeudi 08H00 - 10H00, MRR B-214

- **Manuels du cours:**