UNIVERSITÉ DE MONCTON
CAMPUS DE MONCTON

Devoir 4 - Optimisation (MATH 3163)

À remettre 19 avril 2024

À 15h00 au plus tard

Professeur : Ibrahima Dione

Nom personne étudiante : ____________________________________

Numéro personne étudiante : ____________________________________

Le devoir est composé de **3 questions**, pour un total de 25 points.

- Ceci est un devoir à livres ouverts et les notes du cours sont permises.
- Répondez aux questions dans l'espace fourni.
- Imprimez le devoir en recto et utilisez le verso des feuilles si nécessaire.
- Ne sera pas accepté, tout travail rendu sur un format outre que celui-ci.

Question I

Soit le problème

$$\min_{g(x)=0} f(x)$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, $g(x) = Ax - b$ avec A une matrice de format $m \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$ $(m \leq n)$.

1. Quelle est la condition sur la matrice A pour que $x^* \in \mathbb{R}^n$ soit un point régulier ?

2. Montrer que les conditions nécessaires d'optimalité (dans le cas d'un point régulier x^*) sont

$$\nabla f(x^*) + A^T\lambda = 0, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}^m$$

et la matrice hessienne $\nabla^2 f(x^*)$ est semi-définie positive sur le plan tangent $M(x^*) = \{y \in \mathbb{R}^n;\ Ay = 0\}$.

Question II

Soit

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x),\ \ x \in \mathbb{R}^n$$

où A est une matrice d'ordre n, symétrique et définie positive et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Soit $g(x) = Cx - d$ où C est une matrice de format $m \times n$ et d un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

1. Appliquer la méthode de pénalisation au problème

$$\min_{g(x)=0} f(x)$$

et expliciter le système obtenu en écrivant la condition d'optimalité sur la fonction pénalisée.

2.

a) Résoudre le problème obtenu en 1) pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},\ C = (1, 1) \text{ et } d = 0.$$

b) Étudier la limite de la solution $x^*(r)$ lorsque le coefficient de pénalisation r tend vers $+\infty$.

3.

a) En utilisant les données de 2) a), déterminer le point-selle (x^*, λ^*) de la fonction de Lagrange $\mathcal{L}(x, \lambda)$.

b) Vérifier que $\lim_{r\to\infty} x^*(r) = x^*$ et $\lim_{r\to\infty} rg(x^*(r)) = \lambda^*$, où $x^*(r)$ est la solution obtenue en 2) a).

Question III

Soit à résoudre le problème

$$\min_{xy=1}\{x^2 + 4y^2 + 16z^2\}.$$

Déterminer tous les points critiques de ce problème et justifier s'ils sont des optimums ou non.