UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

# Calcul Différentiel (MATH 1073) - Chapitre 4: Applications de la Dérivée

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

# Sommaire

# Les vitesses liées

# Gonflement d'un ballon

**Exemple 1.1:** Un ballon sphérique est en train d'être gonflé et son volume s'accroit à raison de $100\,cm^3/s$. À quelle vitesse s'accroit le rayon au moment où le diamètre mesure $50\,cm$?

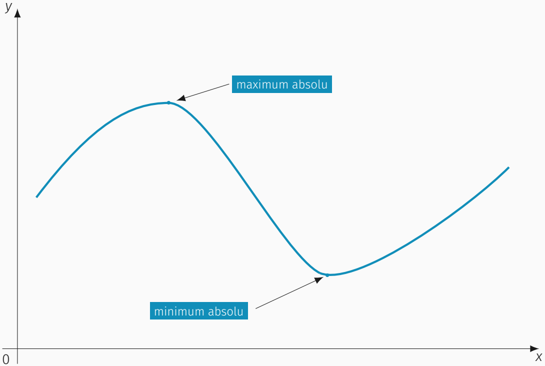
**Exemple 1.2:** Une échelle de $3\,m$ de long est appuyée contre un mur. Si le pied de l'échelle glisse et s'écarte du mur à la vitesse de $30\,cm/s$, à quelle vitesse le haut de l'échelle glisse-t-il le long du mur au moment où le pied de l'échelle se trouve à $1.8\,m$ du mur?

# Valeurs maximales et minimales

## Définition

Soit $c$ une valeur appartenant au domaine de définition $D$ d'une fonction $f$. Alors, $f(c)$ est le

- **maximun absolu** de $f$ sur $D$ si $f(c) \geq f(x)$ pour tout $x$ de $D$.




- **minimum absolu** de $f$ sur $D$ si $f(c) \leq f(x)$ pour tout $x$ de $D$.

**Note:**

- Un maximum ou un minimum absolu est aussi appelé parfois un maximum ou un mimimum **global**.

- Les valeurs maximales ou minimales de $f$ sont appelées les **valeurs extrêmes** de $f$.

**Définition**

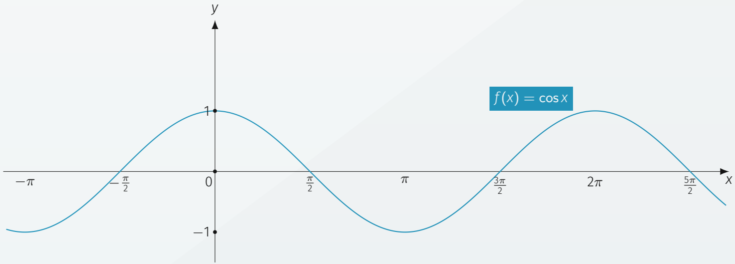
Le nombre $f(c)$ est

- un **maximum local** de $f$ si $f(c) \geq f(x)$ pour $x$ près de $c$.

- un **minimum local** de $f$ si $f(c) \leq f(x)$ pour $x$ près de $c$.

## Exemple 2.1:

- La fonction $f(x) = \cos x$ passe par sa valeur maximale 1 (locale et globale) une infinité de fois, puisque $\cos 2n\pi = 1$ quel que soit $n$ entier et que $-1 \leq \cos x \leq 1$ quel que soit $x$.

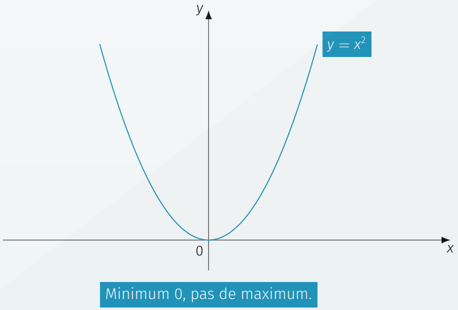



Valeur maximale 1 (locale et globale) et valeur minimale $-1$ (locale et globale).

- De même, $\cos(2n+1)\pi = -1$ est la valeur minimale, quel que soit $n$ entier.

**Exemple 2.2:**

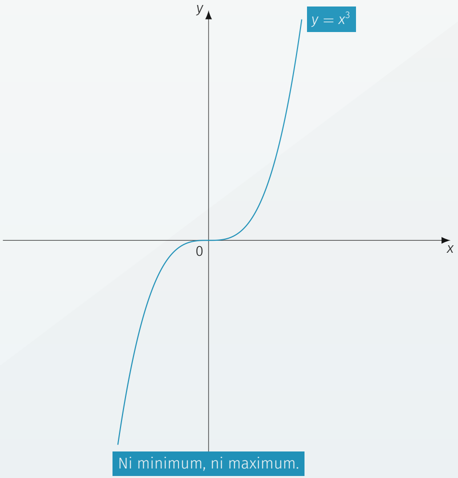
- Si $f(x) = x^2$, alors $f(x) \geq f(0)$ parce que $x^2 \geq 0$ quelque soit $x$. Par conséquent, $f(0) = 0$ est le minimum absolu (et local) de $f$.
- L'origine est en effet le point le plus bas de la parabole $y = x^2$.




- Par contre, il **n'y a pas de plus haut point** sur cette parabole et donc la fonction n'a pas de maximum.

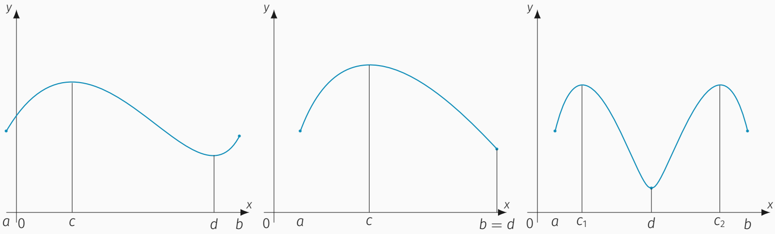
# Une fonction qui n'a ni maximum, ni minimum

**Exemple 2.3:** On constate sur le graphique ci-dessous, que la fonction $f(x) = x^3$ n'a ni naximum absolu, ni minimum absolu. Elle n'a même pas de valeur extrêmes locales.

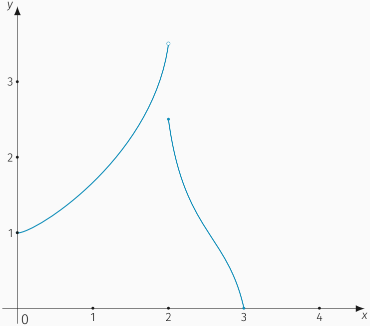


## Le théorème des valeurs extrêmes

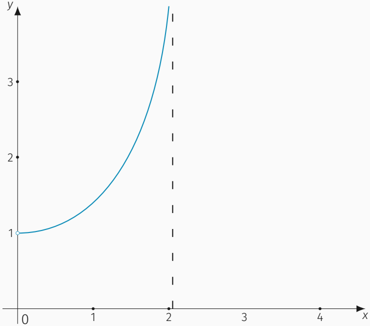
Si $f$ est **continue sur un intervalle fermé** $[a, b]$, alors $f$ atteint un maximum absolu $f(c)$ et un minimum absolu $f(d)$ en certains points $c$ et $d$ de $[a, b]$.



# Fonctions ne possédant pas de valeurs extrêmes

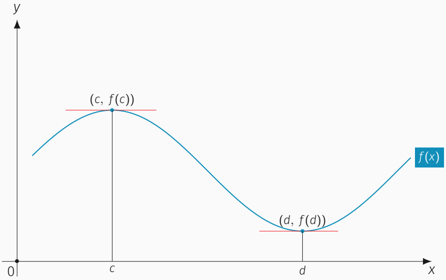



La fonction a un minimum $f(3) = 0$, mais n'a pas de maximum.




Cette fonction continue n'a pas de valeurs extrêmes.

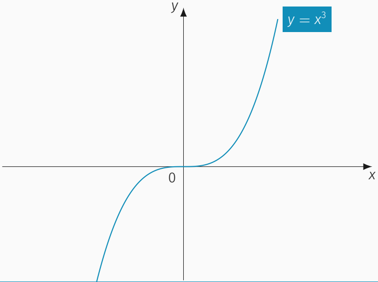
- ▷ Ce graphique passe par un maximum et un minimum locaux en $c$ et en $d$.
- ▷ La tangente est horizontale en ces points de maximum et minimum.



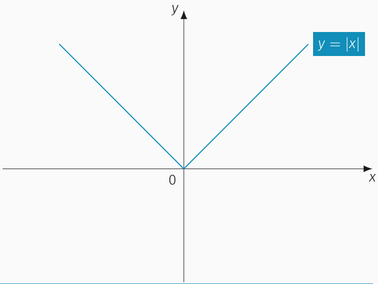

- ▷ La pente étant donnée par la dérivée, alors $f'(c) = 0$ et $f'(d) = 0$.

**Le théorème de Fermat**

Si $f$ admet un maximum ou un minimum local en $c$, et si $f'(c)$ existe, alors $f'(c) = 0$.




Dérivée nulle en 0, mais $f$ n’a ni minimum ni maximum.




Dérivée n’existe pas en 0, alors qu’il y a un minimum.

- Le Théorème de Fermat suggère, dans la recherche des valeurs extrêmes, de commencer par les nombres $c$
  - ⋆ tels que $f'(c) = 0$,
  - ⋆ ou tels que $f'(c)$ n’existe pas.
- Ces nombres ont reçu un nom spécial:

## Définition

Un **point critique** d'une fonction $f$ est un point $c$ du domaine de définition de $f$ tel que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ n'existe pas.

**Exemple 2.4:** Déterminez les points critiques de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

- Si $f$ admet un maximum ou un minimum local en $c$, alors $c$ est un point critique de $f$.

## Méthode de l'intervalle fermé

Pour déterminer les valeurs maximales et minimales absolues d'une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$:

1. Calculez les valeurs de $f$ aux points critiques de $f$ sur $]a, b[$.
2. Calculez les valeurs de $f$ aux extrémités de l'intervalle.
3. La plus grande des valeurs issues des étapes 1 et 2 est la valeur maximale absolue; la plus petite de ces valeurs est la valeur minimale absolue.

## Exemple 2.5:

- À l'aide d'un outil graphique, estimez le minimum et le maximum absolu de la fonction $f(x) = x - 2\sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

- Déterminez les valeurs exactes du maximum et du minimum par les techniques du calcul différentiel.

# Les dérivées et les formes des courbes

- Nous avons étudié au chapitre 2, comment les signes des dérivées $1^{ière}$ et $2^{nd}$ $f'(x)$ et $f''(x)$ sont liés à l'allure du graphique de $f$.
- Nous revenons ici sur ces liens pour tenter de les justifier et aussi pour découvrir les formes que prennent certains graphiques.
- Nous commençerons par un résultat connu sous le nom de Théorème des accroissements finis:

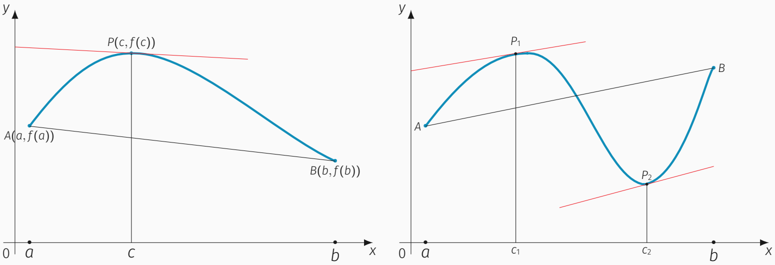
## Théorème des accroissements finis

Si $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$, alors il existe un nombre $c$ entre $a$ et $b$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{1}$$

ou, de façon équivalente,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{2}$$



- La pente de la sécante $AB$ est égale à

$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- $m_{AB}$ est la même que l'expression du membre de droite de l'équation (1).

La forme (1) du Théorème des accroissements finis affirme qu'il existe au moins un point $P(c, f(c))$ sur la courbe $y = f(x)$ en lequel la tangente présente la même pente que celle de la sécante $AB$.

### Test de croissance/décroissance

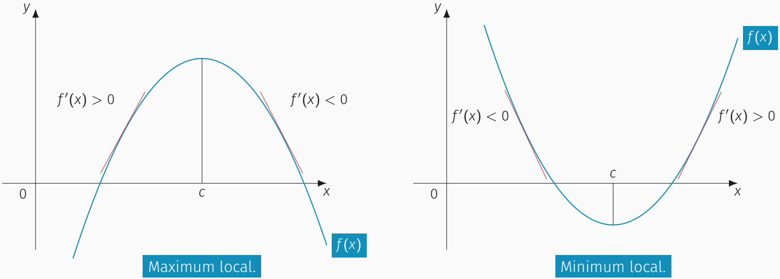
- Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, alors $f$ est strictement croissante sur cet intervalle.
- Si $f'(x) < 0$ sur un intervalle, alors $f$ est strictement décroissante sur cet intervalle.

**Exemple 3.1:** Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

## Test de la dérivée première

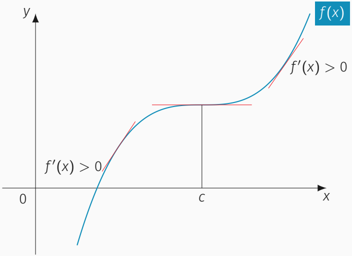
On suppose que $c$ est un **point critique** de la fonction continue $f$.

- Si $f'$ passe du positif au négatif en $c$, alors $f$ présente un **maximum local** en $c$.

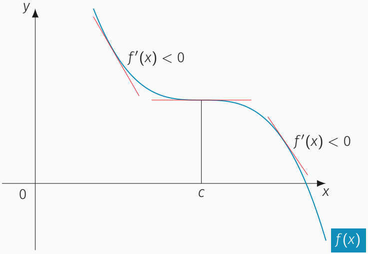



- Si $f'$ passe du négatif au positif en $c$, alors $f$ présente un **minimum local** en $c$.

- Si $f'$ ne change pas de signe en $c$ (c'est-à-dire, si $f'$ est positive de part et d'autre de $c$ ou négative de part et d'autre de $c$), alors $f$ n'a ni maximum ni minimum local en $c$.



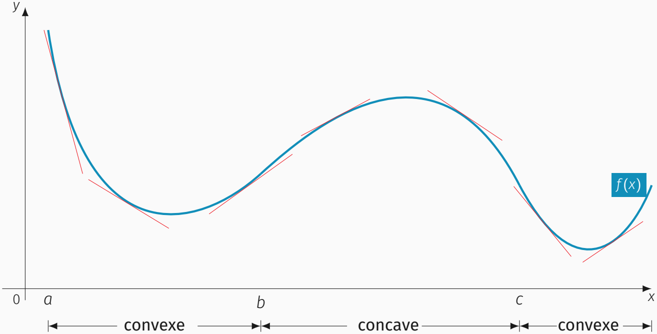

Ni maximum, ni minimum.




Ni maximum, ni minimum.

**Exemple 3.2:** Localisez les extrema de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

- Rappelons la définition de la concavité telle qu'elle a été vue au chap. 2.



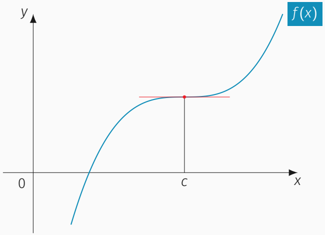

- Compte tenu de ce que $f'' = (f')'$, on sait que:
  - Si $f''$ est strictement positive, alors $f'$ est une fonction strictement croissante et donc $f$ est convexe.
  - Si $f''$ est strictement négative, alors $f'$ est une fonction strictement décroissante et donc $f$ est concave.

## Test sur la concavité

- Si $f''(x) > 0$ pour tout $x$ dans $I$, alors le graphique de $f$ est convexe sur $I$.
- Si $f''(x) < 0$ pour tout $x$ dans $I$, alors le graphique de $f$ est concave sur $I$.

### Définition

On appelle point d'inflexion d'une fonction dérivable $f$, un point où le graphique de la fonction change de concavité.



**Test de la dérivée seconde**

On suppose que $f''$ est continue à proximité de $c$.

- Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$, alors $f$ présente en $c$ un minimum local.
- Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) < 0$, alors $f$ présente en $c$ un maximum local.

## Exemple 3.3:

- Étudiez la courbe $y = x^4 - 4x^3$ du point de vue de la concavité, des points d'inflexion et des maxima et minima locaux.

- Servez-vous de ces informations pour tracer le graphique.

# Étude de fonctions à l’aide du calcul différentiel et des calculatrices

À lire !

# Les formes indéterminées et la règle de l’Hospital

- Face à une limite de la forme

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

où à la fois $f(x) \to 0$ et $g(x) \to 0$ quand $x \to a$, il se peut que cette limite n'existe pas:

> Elle est donc appelée **forme indéterminée de type** $\frac{0}{0}$.

- Face à une limite de la forme

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

où à la fois $f(x) \to \infty$ et $g(x) \to \infty$ quand $x \to a$, il se peut que cette limite n'existe pas:

> Elle est donc appelée **forme indéterminée de type** $\frac{\infty}{\infty}$.

## La règle de l'Hospital

Supposons que $f$ et $g$ soient dérivables et que $g'(x) \neq 0$ près de $a$ (sauf peut être en $a$). Supposons aussi que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

ou que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty.$$

(En d'autres mots, nous avons affaire à une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$)

Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

si la limite du membre de droite existe (ou est égale à $\infty$ ou $-\infty$).

**Remarque :**

- La règle de l'Hospital est aussi valable pour des limites unilatéres ou pour des limites vers plus l'infini ou moins l'infini:

  $$x \to a \text{ peut être remplacé par } x \to a^+, x \to a^-, x \to \infty, x \to -\infty.$$

- Dans le cas particulier où $f(a) = g(a) = 0$, où $f'$ et $g'$ sont continues et où $g'(a) \neq 0$. il est facile de voir que la règle de l'Hospital est correcte.

En effet:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} &= \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}
\end{aligned}$$

## Exemple 5.1:

- ▷ Calculez $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

- ▷ Calculez $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$.

- ▷ Calculez $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

## Les produits indéterminées

- Au cas où $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$), la limite du produit $f(x)g(x)$, si elle existe, n'est pas évidente.
- Un duel s'établit ainsi entre les deux facteurs:
    - Si $f$ l'emporte, la limite du produit sera 0.
    - Si c'est $g$ l'emporte, la réponse sera $\infty$ (ou $-\infty$).
- Mais il peut aussi y avoir un certain compromis, auquel cas la réponse est un nombre non nul fini.

Une telle limite est appelée une **forme indéterminée du type** $0 \cdot \infty$.

- On peut traiter le **forme indéterminée du type** $0 \cdot \infty$ en écrivant le produit $fg$ sous la forme d'un quotient

$$fg = \frac{f}{1/g} \quad \text{ou} \quad fg = \frac{g}{1/f}$$

- La limite à calculer se présente ainsi sous la forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, à la quelle on peut appliquer la **règle de l'Hospital**.

### Exemple 5.2:

▷ Calculez $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$.

▷ Grâce à cette limite et aux indications fournies par la dérivée, tracez le graphique de la courbe $y = x \ln x$.

- Au cas où $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, alors la limite suivante, si elle existe, n'est pas évidente:

$$\lim_{x\to a} \left[f(x) - g(x)\right]$$

- À nouveau, un duel s'établit entre ces deux fonctions.

- Mais il peut aussi y avoir un certain compromis.

- Une telle limite est appelée une **forme indéterminée du type** $\infty - \infty$.
- On peut traiter cette indétermination en transofrmant la différence en un quotient, de manière à la ramener à une forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

**Exemple 5.3:** Calculez la limite suivante

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \left( sec\, x - tg\, x \right)$$

- Une limite de la forme

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$$

peut conduire à plusieurs formes indéterminées:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ type $0^0$.
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ type $\infty^0$.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ type $1^\infty$.

- De telles formes indéterminées peuvent être traitées:
  - Soit en prenant le logarithme:

$$\text{si} \quad y = \left[f(x)\right]^{g(x)} \quad \text{alors} \quad \ln y = g(x)\ln f(x).$$

  - Soit en écrivant la fonction sous forme d'une exponentielle:

$$\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

**Exemple 5.4:** Calculez la limite $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

# Les problèmes d’optimisation

# Étapes de la résolution des problèmes d'optimisation

- Comprendre le problème.
- Faire un croquis.
- Introduire des notations.
- Modéliser: Écrire sous forme d'équations le problème.
- Exprimer l'équation en fonction d'une seule variable.
- Appliquer les méthodes vues pour trouver le maximum ou le minimum absolu.

**Exemple 6.1:** Un fermier dispose de 240 $m$ de treillis et souhaite clôturer une partie rectangulaire d'un champ qui avoisine un ruisseau dont le cours est rectiligne sur le tronçon concerné. Il n'y a donc pas besoin de treillis de ce côté-là. Quelles sont les dimensions de la partie d'aire maximale qu'il puisse ainsi fermer ?

**Exemple 6.2:** Dans un projet de fabrication d'un bidon destiné à contenir un litre d'huile, on se demande quelles sont les dimensions qui **réduiront au maximum** la dépense en métal?

**Exemple 6.3:** Déterminez le point de la parabole $y^2 = 2x$ le plus proche du point $(1, 4)$.

# Méthode de Newton

- Pour déterminer les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, on a:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{pourvu que } \Delta \geq 0$$

- Pour les équations de degré 5 et plus, il n'existe pas de formule.

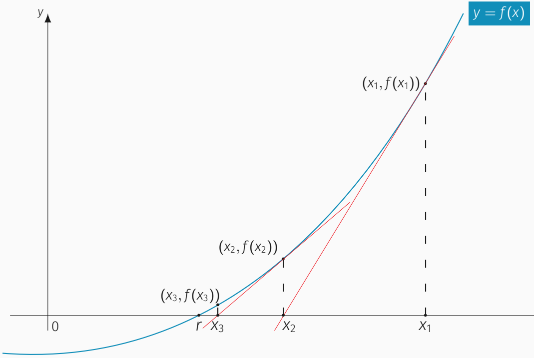
- Il faut faire recours aux approches numériques pour approximer les solutions.

- Une des méthodes la plus utilisée est celle de Newton, encore appelée méthode de Newton-Raphson.

- Cette méthode détermine une approximation de la racine de $y = f(x)$.

- À partir de $x_1$, la courbe $y = f(x)$ est remplacée par la tangente au point $(x_1, f(x_1))$.

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$



▷ Cette tangente coupe ainsi l'axe $Ox$ au point $x_2$, correspondant à $y = 0$:

$$0 = f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) \quad \text{ce qui entraine} \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

▷ On répète ainsi le même procédé en remplaçant $x_1$ par $x_2$.

- En poursuivant ce procédé, nous générons les approximations $x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n$, par la schéma de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{pourvu que} \quad f'(x_n) \neq 0$$

- Lorsque les nombres $x_n$ deviennent arbitrairement proche de $r$ lorsque $n$ grandit, on dit que la suite **converge** vers $r$ et on écrit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r$$

### Exemple 7.1:

- ▷ Au départ de $x_1 = 2$, calculez la troisième approximation $x_3$ de la racine de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$

- ▷ Calculez par la méthode de Newtone la valeur exacte à 8 décimale de $\sqrt[6]{2}$.

# Exercices Suggérés

## Exercices Suggérés

1. Soit $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}, x > 0$.

   - ⋆ À l'aide d'un calcul de limite, déterminez si $f(x)$ a une asymptote horizontale.
   - ⋆ Est-ce que cette fonction *a* des asymptotes verticales?
   - ⋆ Calculez $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.
   - ⋆ Trouvez le(s) maximum(s) et minimum(s) locaux de cette fonction.
   - ⋆ Pour quel intervalle de $x$ la fonction $f(x)$ est-elle croissante?
   - ⋆ Pour quel intervalle de $x$ la fonction $f(x)$ est-elle décroissante?
   - ⋆ Tracez le graphe de $f(x)$.

2. Trouvez les asymptotes verticales et horizontale de la fonction définie par $f(x) = \frac{3x^2+1}{2x^2-8}$.

**3.** Utilisez la régle de l'Hospital pour calculer les limites suivantes:

- ⋆ $\lim_{x\to 0} \frac{tg\, 2x}{\sin 3x}$
- ⋆ $\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^2+1}$

**4.** Soit $f(x) = x^4 - 4x^3$.

- ⋆ Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance.
- ⋆ Déterminez les mimimums et les maximums de $f$ en utilisant le test de la dérivée première.
- ⋆ Déterminez les intervalles de concavité et de convexité ainsi que les points d'inflexion.

**5.** Soit la fonction f définie par

$$f(x) = (x+1)^{2/3}(x-2)^{1/3}$$

Déterminez le maximum absolu et le minimum absolu de $f$ sur l'intervalle $[0, 3]$.

**6.** Soit la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

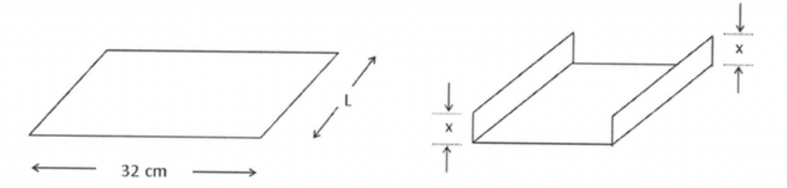
- ⋆ Déterminez le domaine de $f$.
- ⋆ Déterminez les asymptotes du graphe de $f$.
- ⋆ Étudiez la croissance de $f$. La fonction $f$ admet-elle des extremums locaux?
- ⋆ Étudiez la concavité de la courbe de $f$. Le graphe de $f$ admet-il des points d'inflexion?
- ⋆ Tracez le graphe de $f$.

**7.** Calculez les limites suivantes ou expliquez pourquoi elles n'existent pas.

- ⋆ $\lim_{x\to 2} \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{x-2}$
- ⋆ $\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x}$
- ⋆ $\lim_{x\to \infty} x\, tg\, \frac{1}{x}$
- ⋆ $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 - x} + x$
- ⋆ $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$
- ⋆ $\lim_{x\to \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

**8.** Partagez 20 en deux nombres positifs (non nécessairement entiers) tels que le produit de l'un d'eux par le carré de l'autre soit maximal.

**9.** Une bande de zinc de largeur 32 cm et de longueur $L$ (voir figure de gauche) est pliée de la façon montrée à la figure de droite pour former une gouttière. Quelle devrait être la hauteur des bords $x$ pour que la capacité (le volume) de la gouttière soit maximale? (Le volume d'une boîte de côtés $a, b$ et $c$ est $V = abc$).



# Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)
- Disponibilité:
    - ⋆ Lundi 13:00 - 15:00, MRR B-214
    - ⋆ Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214
    - ⋆ Jeudi 12:00 - 13:15, MRR B-214