UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Suites, séries, calcul dans $\mathbb{R}^n$ (MATH 2013) - Chapitre 1.2: Les séries numériques

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

Définition

Définition

- Une **série** est la somme des termes d'une suite $\{a_n\}$, c'est-à-dire [1]

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots$$

On l'appelle aussi **série infinie** et elle est notée

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad \sum a_n$$

Exemple 1.1:

▷ Pour la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $a_n = n$, la somme de ses termes est

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$$

▷ Pour la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $a_n = \frac{1}{2^n}$, la série infinie est donnée par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

- Quel sens peut-on donner à la somme d'un nombre infini de termes?

- À partir de la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, considérons les sommes partielles suivantes:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{aligned}$$

  et, en général,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

- Ces sommes partielles forment une nouvelle suite $\{s_n\}$, qui possède une limite ou non.

Définition

- La $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est définie par

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

- Si la suite des sommes partielles $\{s_n\}$ converge et si

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

alors la **série** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est dite **convergente**, et on écrit

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Le nombre s est **la somme** de la série.

- Si la suite $\{s_n\}$ divergente, la série est dite **divergente**.

Exemple 1.2:

- La série $\sum_{n=1}^{\infty} n$ est divergente. En effet,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} n$ est divergente.

- La série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ est divergente car

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = -1+1-1+1-1+\cdots = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

et donc $\lim_{n\to\infty} s_n$ n'existe pas.

Exemple 1.3: Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ est convergente.

- ▷ Considérons la somme partielle de cette série:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}.$$

Alors, on a $\frac{1}{2} s_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$. Ainsi donc

$$s_n - \frac{1}{2} s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow s_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

- ▷ Par suite, on a la limite suivante

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

d'où la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ est convergente et on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

Séries numériques

Définition

- Une **série géométrique** est une série de la forme:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, a \neq 0.$$

On obtient chaque terme en multipliant son prédécesseur par la **raison** r.

Exemple 2.1:

- Par exemple,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

est une série géométrique dont le **premier terme** est $a = \frac{1}{2}$ et la raison est $r = \frac{1}{2}$. □

- **Si $r = 1$**, alors $s_n = a + a + \cdots + a = na \to \pm\infty$. Puisque $\lim_{n\to\infty} s_n$ n'existe pas, la série géométrique diverge dans ce cas.

- **Si $r \neq 1$**, on a et

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$
$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$
$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

  - **Si $-1 < r < 1$**, alors $r^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1-r}.$$

    Par conséquent, lorsque $|r| < 1$, la série géométrique converge et sa somme est $a/(1-r)$.

  - **Si $r \leq -1$ ou $r > 1$**, la suite $\{r^n\}$ diverge et donc, $\lim_{n\to\infty} s_n$ n'existe pas. La série géométrique diverge donc dans ces deux cas.

- La série géométrique

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

converge si $|r| < 1$ et, dans ce cas, sa somme est

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1. \tag{1}$$

- Si $|r| \geq 1$, la série géométrique diverge.

Exemple 2.2: Trouvons la somme de la série géométrique

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

- Le premier terme est $a = 5$ et la raison $r = -\frac{2}{3}$, car la série s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

- Comme $|r| = \frac{2}{3} < 1$, la série converge et sa somme, selon la formule (1), est

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3.$$

Exemple 2.3: Est-ce que la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$ converge ou diverge?

- On réécrit d'abord le n-ième terme de la série sous la forme ar^{n-1} :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^2\right)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

- Il s'agit d'une série géométrique avec $a = 4$ et $r = \frac{4}{3}$.

- Comme $|r| > 1$, la série diverge.

Exemple 2.4: Trouvons la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, où $|x| < 1$.

- Il faut noter que cette série débute avec $n = 0$ et donc que le premier terme est $x^0 = 1$. On a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

- Cette série est géométrique avec $a = 1$ et $r = x$.

- Comme $|r| = |x| < 1$, elle converge et la formule (1) permet d'obtenir la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Exemple 2.5: Écrivons le nombre $2,3\overline{17} = 2,3171717\ldots$ sous la forme d'une fraction (un rapport de nombres entiers).

- Le nombre s'écrit

$$2,3171717\ldots = 2,3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

- Après le premier terme, on a une série géométrique avec $a = 17/10^3$ et $r = 1/10^2 < 1$.

- Par conséquent,

$$2,3\overline{17} = 2,3 + \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 2,3 + \frac{\frac{17}{1000}}{\frac{99}{100}}$$
$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}$$

Exemple 2.6: Montrons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et trouvons sa somme.

- Cette série n'est pas géométrique. On doit donc revenir à la définition d'une série convergente et calculer la somme:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

- On simplifie la somme en la décomposant en fractions simples:

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}.$$

- On obtient

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

- et donc, on calcule la limite de la somme partielle:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1-0 = 1.$$

- Par conséquent, la série donnée converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1. \tag{2}$$

Exemple 2.7: Montrons que la **série harmonique**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \quad \text{est divergente.}$$

- Pour cette série particulière, il est commode de considérer les sommes partielles $s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \ldots$ et de montrer qu'elles deviennent arbitrairement grandes.

- On effectue les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2} \\
S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_{16} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}
\end{aligned}
$$

- De même, $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}, s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$, et en général

$$
S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}
$$

- Ce qui montre que $s_{2^n} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ et donc que $\{s_n\}$ diverge. Par conséquent, la série harmonique est divergente.

Règles des séries numériques

La somme d'une série est la limite de la suite de ses sommes partielles.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Théorème

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Démonstration:

- Soit $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Alors, $a_n = s_n - s_{n-1}$.
- Comme la série $\sum a_n$ converge, la suite des sommes partielles $\{s_n\}$ converge. Soit
$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$
- Puisque $n - 1 \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, on a aussi
$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s.$$
- Par conséquent,
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) &= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \\ &= s - s = 0.\end{aligned}$$

Note:

- En général, la réciproque de ce théorème n'est pas vraie. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, on ne peut pas conclure que $\sum a_n$ converge.

- Par exemple, pour la série harmonique $\sum 1/n$, on a $a_n = 1/n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, mais on a montré que $\sum 1/n$ diverge.

Le Test de divergence

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ou si $\lim_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exemple 3.1: Montrons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ diverge.

▷ On a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

donc, selon le test de divergence, la série diverge.

Théorème

Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, alors les séries $\sum ca_n$ (où c est une constante), $\sum (a_n + b_n)$, $\sum (a_n - b_n)$ convergent aussi et on a:

- $$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Démonstration

- Soit
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \,,\; s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{et} \quad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \,,\; t = \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
- La n-ième somme partielle de la série $\sum (a_n + b_n)$ est donnée par
$$u_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$
- On a donc
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t. \end{aligned}$$
- Par conséquent, $\sum (a_n + b_n)$ converge et sa somme est
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

$\square$

Exemple 3.2: Trouvons la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$.

- La série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ est une série géométrique avec $a=\frac{1}{2}$ et $r=\frac{1}{2}$, donc
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$
- Selon le résultat (2),
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$
- Par conséquent, en vertu du théorème précédent, la série donnée converge et
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=3\times 1+1=4.$$

Note:

- Un nombre fini de termes n'influe pas sur la convergence ou la divergence d'une série.

- En d'autres mots, si $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ converge, alors la série complète

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

converge. Toutefois, les sommes des deux séries ne sont pas égales.

Exemple 3.3: Par exemple, si l'on peut montrer que la série

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

converge vers s, alors, puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

il s'ensuit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} n/\left(n^3+1\right)$ converge vers $s+1/2+2/9+3/28$.

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)

- Disponibilités:
  - Lundi 10H00 - 12H00, MRR B-214
  - Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214
  - Jeudi 08H00 - 10H00, MRR B-214

- Manuels du cours:

[1] J. Stewart.
Analyse concepts et contextes. Volume 1. Fonctions d'une variable.
DE BOECK SUP; 3e édition, Rue des Minimes 39, B- 1000 Bruxelles, 2011.