UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Suites, séries, calcul dans $\mathbb{R}^n$ (MATH 2013) - Chapitre 1.1: Les suites

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

Définition

Définition

- Une **suite** est une liste de nombres écrits dans un ordre bien défini:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots \tag{1}$$

  - ⋆ Le nombre a_1 est appelé le « **premier terme** »,
  - ⋆ le nombre a_2 est le « **deuxième terme** » et,
  - ⋆ celui a_n est le « **n-ième terme** ».

- Nous allons seulement étudier des suites infinies, dans lesquelles chaque terme a_n a toujours un successeur a_{n+1}.

Note: La suite $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$ se note aussi ([1])

$$\{a_n\} \text{ ou } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{2}$$

Exemple 1.1:

▷

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad a_n = \frac{n}{n+1}, \quad \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\right\}$$

▷

$$\left\{\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \; a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \; \left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, \cdots, \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \cdots\right\}$$

▷

$$\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}, \quad a_n = \sqrt{n-3}, \; n \geq 3, \quad \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{n-3}, \cdots\right\}$$

▷

$$\left\{\cos\frac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}, \quad a_n = \cos\frac{n\pi}{6}, \; n \geq 0, \quad \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \cdots, \cos\frac{n\pi}{6}, \cdots\right\}$$

Note:

- Une suite $\{a_n\}$ peut être définie comme une fonction ayant pour domaine l'ensemble des entiers positifs.

- Car à chaque entier positif n correspond un terme a_n.

Exemple 1.2: Les suites ci-dessous ne possèdent pas de définition sous la forme d'une formule simple:

- La suite $\{p_n\}$, où p_n est la population mondiale le 1^{er} janvier de l'an n.

- La **suite de Fibonacci** $\{f_n\}$ est définie par récurrence par les conditions

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 3.$$

  Les quelques premiers termes de la suite de Fibonacci sont

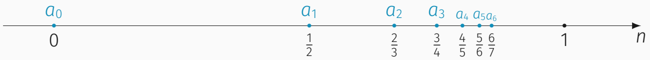
$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots\}.$$

Limite d’une suite

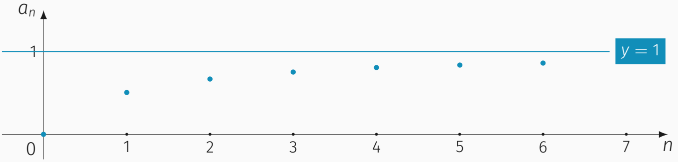
- On peut représenter graphiquement la suite $\{a_n\}$:

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$$

- en traçant ses termes sur une droite numérique.



- ou en représentant son graphe sur le plan



- Les termes de la suite $a_n = \frac{n}{n+1}$ tendent vers 1 lorsque n devient grand!

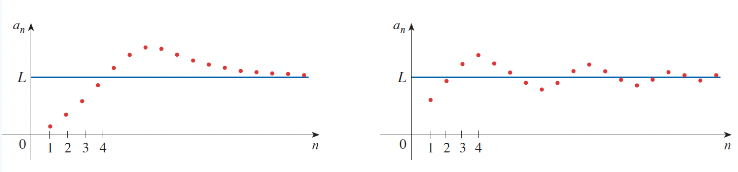
Définition

- Une suite $\{a_n\}$ a pour limite L, et on écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$

si on peut rendre ses termes a_n aussi proches de L qu'on le veut en prenant n suffisamment grand.

- Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, on dit que la suite « converge » (ou qu'elle est **convergente**). Voici le graphe de deux suites où $\lim_{n\to\infty} a_n = L$:



- Sinon, on dit que la suite « diverge » (ou qu'elle est **divergente**).

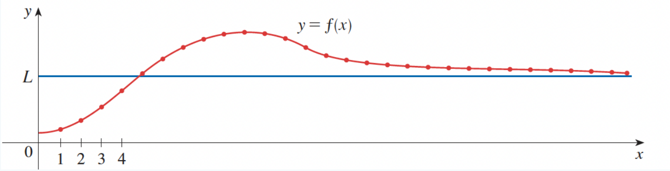
Remarque :

a Si la limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas parce que les termes de la suite deviennent de plus en plus grands (ou petits) avec n, on écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

b Dans certaines situations, on peut calculer la limite d'une suite en calculant celle d'une fonction qui représente cette suite. En effet, si $f(n) = a_n$ pour tout entier n alors

$$\text{si} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L, \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$



Exemple 2.1:

- Soit la suite $\left\{\frac{1}{n^r}\right\}$ où $r > 0$. Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^r},\ x > 0.$$

Puisque $f(n) = \frac{1}{n^r}$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$$

- Soit la suite $\left\{\frac{\ln(n)}{n}\right\}$. Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x},\ x > 0.$$

On a alors $f(n) = \frac{\ln(n)}{n}$. D'autre part, on note

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Et donc $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

Règles des limites pour les suites

Les propriétés des limites pour les suites

Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont des suites convergentes et si c est une constante, alors

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \times b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{si} \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

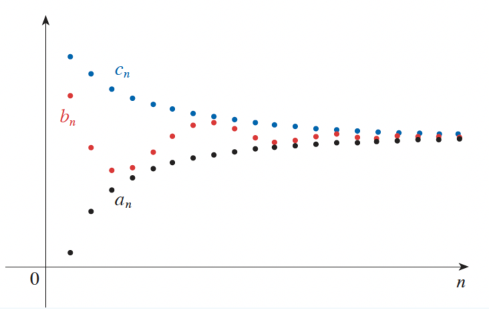
$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p, \quad \text{si} \quad p > 0 \quad \text{et} \quad a_n > 0$$

▷ Le théorème du sandwich, aussi appelé « théorème des gendarmes », peut être adapté aux suites.

Le Théorème du Sandwich pour les suites

Si, pour un certain n_0, $a_n \leq b_n \leq c_n$ lorsque $n \geq n_0$ et si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, alors

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L.$$



▷ Le théorème suivant cite un autre résultat relatif aux limites de suites.

▷ Il découle du Théorème du sandwich, compte tenu de $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$.

THÉORÈME

$$\text{Si} \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \text{ alors } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Exemple 3.1: Calculer la limite de la suite suivante si elle existe:

▷ $\left\{\frac{3n^4+n-1}{2n^4+3n^2+1}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+n-1}{2n^4+3n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\left(3+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \frac{3}{2}$$

La suite $\left\{\frac{3n^4+n-1}{2n^4+3n^2+1}\right\}$ est convengente et $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+n-1}{2n^4+3n^2+1} = \frac{3}{2}$.

Exemple 3.2: Calculer la limite des suites suivantes si elle existe:

- $\{(-1)^n\}$
  Les valeurs de cette suite sont
  $$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$
  Cette suite oscille indéfiniment entre -1 et 1, donc sa limite n'existe pas.

- $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$
  $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$
  Par conséquent, en raison du théorème précédent on a
  $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Exemple 3.3: Calculer la limite de la suite suivante si elle existe:

- $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$. Posons alors $a_n = \frac{n!}{n^n}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots n}{n\cdot n\cdot n\cdots n} &= \frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 3\cdot \ldots n}{n\cdot n\cdot n\cdots n}\right) \\ &\leq \frac{1}{n}\left(\frac{n\cdot n\ldots n}{n\cdot n\cdots n}\right) = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

On remarque donc $0 < a_n \leq \frac{1}{n}$, pour tout $n \geq 2$.

Puisque $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Exemple 3.4: Calculer la limite de la suite suivante si elle existe:

- $\left\{\frac{n^5+n^2+2}{6n^4+n+3}\right\}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+n^2+2}{6n^4+n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5\left(1+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^5}\right)}{n^4\left(6+\frac{1}{n^3}+\frac{3}{n^4}\right)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^5}\right)}{6+\frac{1}{n^3}+\frac{3}{n^4}} = \infty$$

Donc
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+n^2+2}{6n^4+n+3} = \infty$$
et la suite $\left\{\frac{n^5+n^2+2}{6n^4+n+3}\right\}$ est divergente.

Exemple 3.5: Calculer la limite de la suite suivante si elle existe:

▷ $\left\{\frac{n^2}{1-e^n}\right\}$.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2}{1-e^x}$. On a alors $f(n) = \frac{n^2}{1-e^n}$ et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1-e^x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{-e^x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{-e^x} = 0\end{aligned}$$

$$\text{et donc } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1-e^n} = 0$$

Exemple 3.6: Pour quelle valeurs de r la suite $\{r^n\}$ est-elle convergente?

- Considénons d'abord le cas $r > 0$ et posons $f(x) = r^x$. On a $f(n) = r^n$ et nous savons déjà la limite suivante

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ \infty & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

  Donc pour la suite, on a alors

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si} & 0 < r < 1 \\ 1 & \text{si} & r = 1 \\ \infty & \text{si} & r > 1 \end{cases}$$

- Pour $r < 0$, on a deux cas:
  - 1^{er} cas: $-1 < r < 0$. Dans ce cas, on a

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0 \text{ car } 0 < |r| < 1$$

  d'où $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

⋆ 2^e cas: $r \leq -1$.

Pour $r = -1$, on a vu que $\{(-1)^n\}$ diverge.

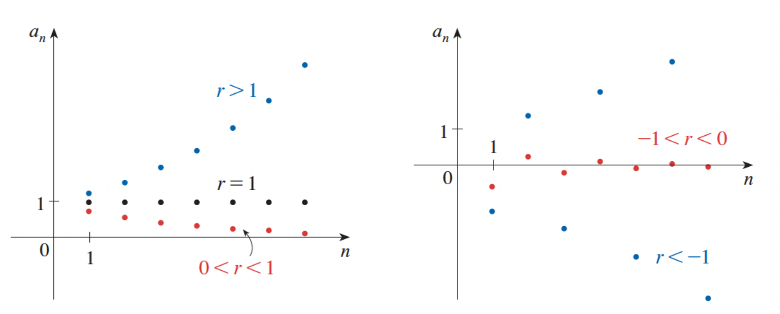
Pour $r < -1$, on a la suite

$$\left\{r^{2n}\right\} = \left\{\left(r^2\right)^n\right\},$$

qui tend alors vers l'infini lorsque n tend vers l'infini car $r^2 > 1$. Et donc la suite $\{r^n\}$ diverge.

Conclusion: La suite $\{r^n\}$ est convergente si $-1 < r \leq 1$ et divergente pour toutes les autres valeurs de r:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1. \end{cases}$$



La suite $a_n = r^n$.

Suites monotones et suites bornées

Définition

- Une suite $\{a_n\}$ est **croissante** si $a_n \leq a_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$, autrement dit si

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$$

- Elle est **décroissante** si $a_n \geq a_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

- Une suite est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Exemple 4.1: La suite $\left\{\frac{3}{n+5}\right\}$ est décroissante, car

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

et donc $a_n > a_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

Exemple 4.2: Montrons que la suite $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ est décroissante.

- On doit montrer que $a_{n+1} \leq a_n$, autrement dit que

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}.$$

- **Solution 1**:
  - Cette inégalité est équivalente à celle qu'on obtient en effectuant le produit croisé :

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} &\Leftrightarrow (n+1)\left(n^2+1\right) \leq n\left[(n+1)^2+1\right] \\ &\Leftrightarrow n^3+n^2+n+1 \leq n^3+2n^2+2n \\ &\Leftrightarrow 1 \leq n^2+n. \end{aligned}$$

  - Or $n \geq 1$, donc l'inégalité $n^2+n \geq 1$ est vérifiée. On a donc $a_{n+1} \leq a_n$, et la suite $\{a_n\}$ est décroissante.

▷ **Solution 2**: Soit la fonction $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

- ⋆ On peut déterminer la monotonicité de la suite en utilisant la fonction $f(x)$ où $a_n = f(n)$ comme suit:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \text{ lorsque } x^2 > 1.$$

- ⋆ La fonction f est donc décroissante sur $[1, \infty[$.

- ⋆ Ce qui implique que $f(n) \geq f(n+1)$ pour tout entier positif n. Par conséquent, $\{a_n\}$ est décroissante.

Définition

- Une suite $\{a_n\}$ est **bornée supérieurement** (ou **majorée**) s'il existe un nombre M tel que

$$a_n \leq M, \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

- Elle est **bornée inférieurement** (ou **minorée**) s'il existe un nombre m tel que

$$m \leq a_n, \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

- Si elle est bornée supérieurement et inférieurement, alors $\{a_n\}$ est une suite **bornée**.

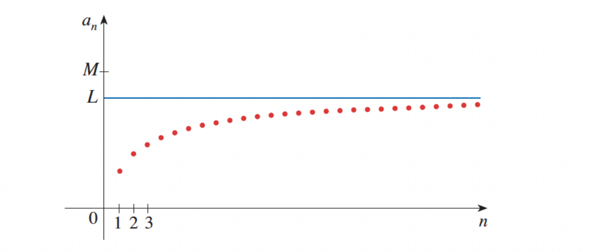
Exemple 4.3:

- ▷ Par exemple, la suite $a_n = n$ est bornée inférieurement ($a_n > 0$) mais non supérieurement.
- ▷ La suite $a_n = n/(n+1)$ est bornée, car $0 < a_n < 1$ pour tout n.

▷ Une suite peut être bornée sans être convergente. Par exemple, la suite $a_n = (-1)^n$ satisfait à $-1 \leq a_n \leq 1$, mais elle est divergente.

▷ De plus, une suite peut être monotone sans être convergente. Par exemple, $a_n = n$ est croissante et elle tend vers ∞.

▷ Toute suite à la fois bornée et monotone est convergente.



Si $\{a_n\}$ est croissante et si $a_n \leq M$ pour tout n, alors les termes doivent forcément tendre vers un certain nombre $L \leq M$.

Théorème

Toute suite monotone et bornée est convergente.

Exemple 4.4: Montrer que la suite $\left\{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right\}$ est monotone et bornée.

- Soit $a_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}, \forall\, n \in \mathbb{N}^+$. On a $a_n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$.

- D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2(n+1)-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2(n+1))}\cdot\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\\ &= \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)(2n+2)}\cdot\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\\ &= \frac{2n+1}{2n+2} < 1\end{aligned}$$

- Donc $a_{n+1} < a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$, c'est-à-dire $\{a_n\}$ est strictement décroissante.

- Puisque $a_n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$, alors $\{a_n\}$ est borné inférieurement.

- **Conclusion**: Par conséquent $\{a_n\}$ est convergente.

Exemple 4.5: Étudions la suite $\{a_n\}$ définie par la relation de récurrence

$$a_1 = 2 \text{ et } a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6), \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

- On commence par calculer les premiers termes.

$$\begin{array}{lll} a_1 = 2 & a_2 = \frac{1}{2}(2+6) = 4 & a_3 = \frac{1}{2}(4+6) = 5 \\ a_4 = \frac{1}{2}(5+6) = 5,5 & a_5 = 5,75 & a_6 = 5,875 \\ a_7 = 5,9375 & a_8 = 5,96875 & a_9 = 5,984375 \end{array}$$

Ces premiers termes suggèrent que la suite est croissante et que les termes tendent vers la valeur 6.

- Pour confirmer que la suite est croissante, on montre par récurrence que $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout $n \geq 1$.
  - C'est vrai pour $n = 1$, car $a_2 = 4 > a_1$.
  - On suppose que l'inégalité est aussi vraie pour $n = k$:
    $$a_{k+1} \geq a_k$$
  - Déduisons-en que $a_{n+1} \geq a_n$ est vrai pour $n = k + 1$. En effet, à partir de l'inégalité précédente, on a
    $$\begin{aligned} a_{k+1} + 6 &\geq a_k + 6 \\ \frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) &\geq \frac{1}{2}(a_k + 6) \\ a_{k+2} &\geq a_{k+1}. \end{aligned}$$
  - L'inégalité est donc vraie pour tout n, par récurrence.

- On vérifie maintenant que $\{a_n\}$ est bornée pour tout $n \geq 1$.
- La suite étant croissante, alors elle possède une borne inférieure
$$a_n \geq a_1 = 2, \quad \text{pour tout } \; n \geq 1.$$
- Montrons par récurrence qu'elle possède une borne supérieur:
$$a_n < 6, \quad \text{pour tout } \; n \geq 1.$$

  - Puisque $a_1 < 6$, cette affirmation est vraie pour $n = 1$.
  - On suppose qu'elle est vraie aussi pour $n = k$. Alors, on a
$$a_k < 6$$
  - Montrons qu'elle l'est pour $n = k + 1$: On a de cette inégalité
$$a_k + 6 < 6 + 6 = 12$$
$$\frac{1}{2}(a_k + 6) < \frac{1}{2}(12) = 6$$
$$a_{k+1} < 6$$
  - Ce qui prouve par récurrence que $a_n < 6$ pour tout n.

- La suite $\{a_n\}$ étant croissante et bornée, le théorème précédent implique qu'elle possède une limite, mais sans préciser sa valeur.

- Sachant que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe, la relation de récurrence permet d'écrire

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + 6) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty}(a_n + 6) = \frac{1}{2}(L + 6).$$

- Or $a_n \to L$, donc $a_{n+1} \to L$ également (lorsque $n \to \infty$, on a aussi $n + 1 \to \infty$). Par conséquent,

$$L = \frac{1}{2}(L + 6).$$

- La résolution de cette équation en L donne $L = 6$, comme prévu.

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)

- Disponibilités:
  - ⋆ Lundi 10H00 - 12H00, MRR B-214
  - ⋆ Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214
  - ⋆ Jeudi 08H00 - 10H00, MRR B-214

- Manuels du cours:

[1] J. Stewart.
Analyse concepts et contextes. Volume 1. Fonctions d’une variable.
DE BOECK SUP; 3e édition, Rue des Minimes 39, B- 1000 Bruxelles, 2011.