UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

# Arithmétique (MATH 1413) - Chapitre 1: La numération

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

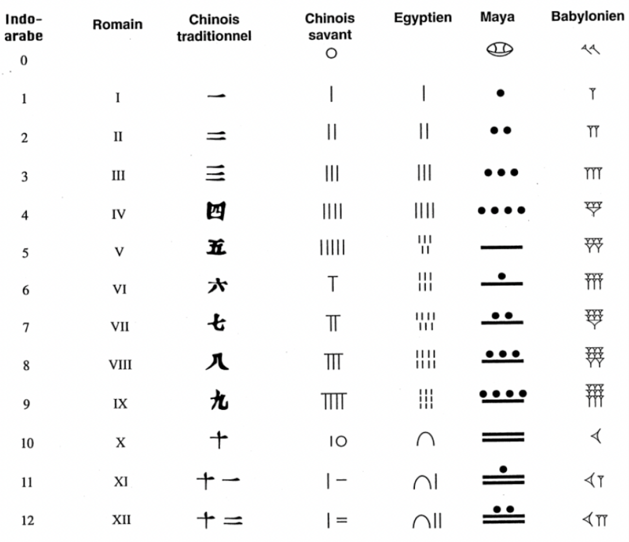
# Sommaire

- Systèmes de numération
- Classification des systèmes de numération
- Notre système de numération

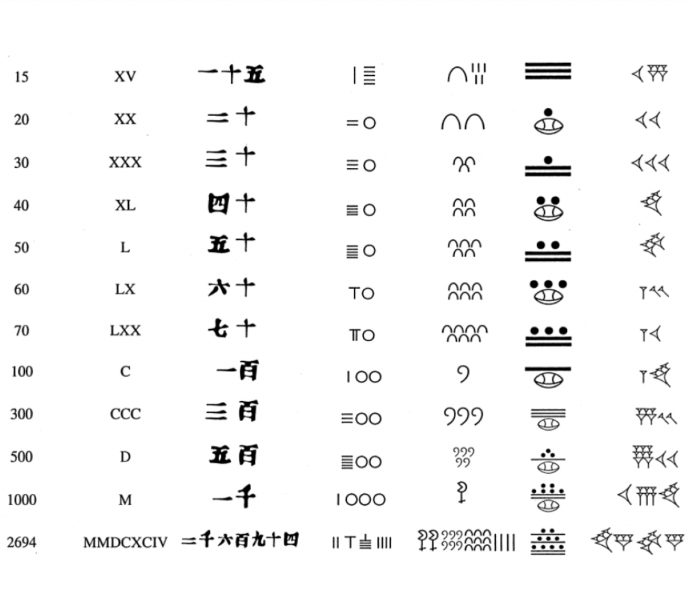
- Les nombres étant des entités abstraites, on cherche à les rendre palpables et «manipulables» en les représentant.
- C'est ce qu'on appelle la «**numération**», c'est-à-dire la mise au point de méthodes et de conventions permettant d'effectuer des calculs.
- De nombreux systèmes de numération ont été élaborés au fil du temps.
- Nous ferons ici un simple survol de quelques systèmes intéressants, particulièrement le notre (indo-arabe) [1].

# Systèmes de numération

- On présente ici l'écriture de quelques nombres dans divers systèmes utilisés dans le passé:



- Le plus simple en représentation, est sans doute le système égyptien: on y introduit un nouveau chiffre à chaque puissance de dix.



- On notera que les groupements par paquets de dix se retrouvent dans certains systèmes.

- D'autres font en outre intervenir des symboles spéciaux marquant des groupements par paquets de cinq; c'est le cas chez les Romains et chez les Mayas.

- Ainsi, la «base de groupement» privilégiée varie suivant le système:

    - elle est de dix dans notre système (indo-arabe),
    - de vingt chez les Mayas,
    - et de soixante chez les Babyloniens.

- L'utilisation d'un système de numération, quel qu'il soit, vise:
  - ✓ à emmagasiner une information numérique,
  - ✓ à pouvoir transformer cette information sans qu'il soit nécessaire de retourner aux objets où est vénu celle-ci.
- Les systèmes de numération ne se prêtent pas tous avec la même aisance à de telles opérations.
- Et il ne faudrait pas croire que seul «notre» système permet de faire des calculs éloquents.

# Classification des systèmes de numération

## Classification des systèmes de numération

- Quoiqu'il existe de nombreuses variantes des systèmes de numération, il est utile d'en distinguer trois grands types:
  - ✓ **Systèmes additifs:** C'est le cas des systèmes égyptien et romain:
    - l'ordre d'écriture des signes représentant un nombre n'a aucune importance,
    - on n'a qu'à faire la somme de leurs valeurs pour connaître celui-ci (sauf pour l'écriture romaine où on introduit la règle soustractive).
  - ✓ **Systèmes hybrides:** C'est le cas du système chinois traditionnel:
    - l'ordre d'écriture des chiffres est important,
    - il nécessite deux listes de chiffres: l'une finie pour les coefficients et l'autre, potentiellement infinie, pour les puissances de la base.

- ✓ **Systèmes à valeur positionnelle:** C'est notre système (indo-arabe) tout comme le système chinois aussi.

# Notre système de numération

- Un système de numération s'est finalement imposé comme étant le plus commode et le plus efficace.
- C'est le système développé par les mathématiciens de l'Inde et transmis au monde occidental au cours du Moyen âge par les marchands arabes.
- Ce système, que l'on désigne à juste titre par les expressions **système indien** ou **système indo-arabe**, est utilisé universellement de nos jours.

Notre système est un système dit à valeur positionnelle, c'est-à-dire:

- on y utilise un **nombre fini** de chiffres (en **base** *b*, il y a *b* chiffres);
- un de ces chiffres représente le **nombre zéro**;
- c'est la position d'un chiffre dans un symbole numérique qui détermine son poids, sa valeur;
- chaque position correspond à une puissance de la base, de sorte qu'un chiffre, étant donné sa position, représente un multiple de la puissance de la base en question.

**Exemple 3.1:**

1. **En base dix.**

$$253 = 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0,$$

où $10^0 = 1$, le symbole 253 (base dix) représente donc le nombre appelé «deux cent cinquante trois».

**Note:** Dans notre système, on peut écrire tout nombre comme une somme de termes dont chacun est un produit constitué de deux facteurs:

- un nombre à un chiffre (le coefficient de ce terme),
- et une puissance de la base.

## 2 En base huit.

$$253_{huit} = \left(2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0\right)_{huit}.$$

- ✓ En lisant le membre de droite de cette égalité, il ne faut pas lire en base dix: «deux fois dix au carré, plus...».
- ✓ Il faut dire («un-zéro» pour 10): «deux fois un-zéro au carré, plus cinq fois un-zéro, plus 3».
- ✓ Le symbole $253_{huit}$, quant à lui, devrait se lire «deux-cinq-trois base huit». (On peut vérifier que $253_{huit} = 171_{dix}$.)

## 3 En base trois.

$$2101_{trois} = (2 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 1 \times 10^0)_{trois}.$$

On notera qu'on a utilisé ici l'exposant 3, même si le chiffre 3 n'existe pas en base trois;

- De façon générale, fixant un nombre naturel $b > 1$ (appelé la **base** de numération), une suite finie de $n+1$ chiffres $a_n \cdots a_2 a_1 a_0$ constitue un **symbole numérique** déterminant un unique nombre naturel $N$ en vertu de l'égalité

$$N = (a_n \times 10^n + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0)_b, \qquad (1)$$

où **10 correspond à un groupement de $b$ objets**.

- On appelle cette suite $a_n \cdots a_2 a_1 a_0$ le **développement** de $N$ en base $b$ et on écrit

$$N = a_n \cdots a_2 a_1 a_0.$$

- Le développement de $N$ peut ainsi être vu comme une abréviation pour le membre de droite de l'égalité (1). On écrira aussi

$$N = (a_n \cdots a_2 a_1 a_0)_b,$$

pour insister sur la base utilisée.

- Dans le symbole numérique $a_n \cdots a_2 a_1 a_0$, on dit que

  ✓ $a_0$ est le chiffre en **position** 0 (ou chiffre des **unités**),

  ✓ $a_1$ est le chiffre en **position** 1,

  ✓ et ainsi de suite.

- Lorsque la base est dix, on parle de **développement décimal**; les chiffres $a_1, a_2, a_3, \cdots$ s'appellent alors respectivement

  ✓ chiffre des **dizaines**,

  ✓ chiffre des **centaines**,

  ✓ chiffre des **unités de mille**, etc.

# Informations sur le cours

## Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)

- Disponibilités:
  - ⋆ Lundi 10H00 - 13H00, MRR B-214
  - ⋆ Mercredi 10H00 - 13H00, MRR B-214

- Manuels du cours:

[1] B. Hodgson and L. Lessard.
*Arithmétique élémentaire (1$^{re}$ et 2$^{e}$ parties).*
coop Université Laval, Québec, Canada, 2002.