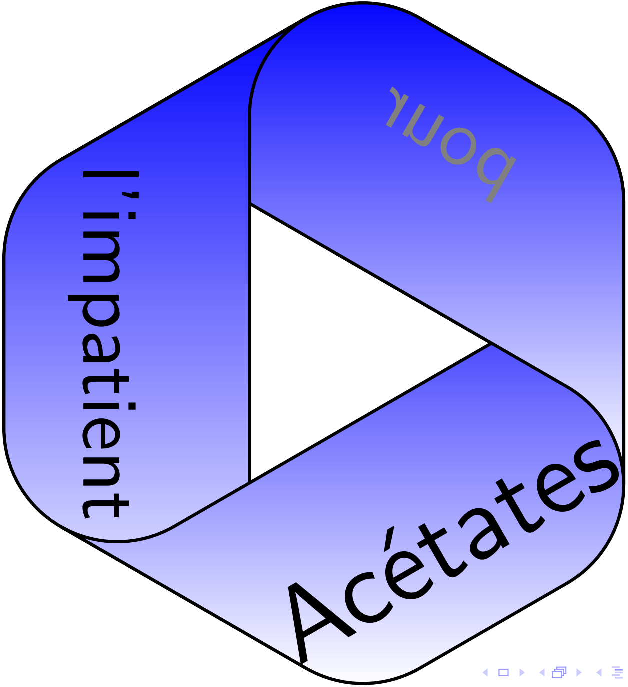
MAT 1910
Mathématiques de l'ingénieur II :
Les intégrales doubles en coordonnées cartésiennes

Dione Ibrahima

Chapitre II: Intégrales doubles

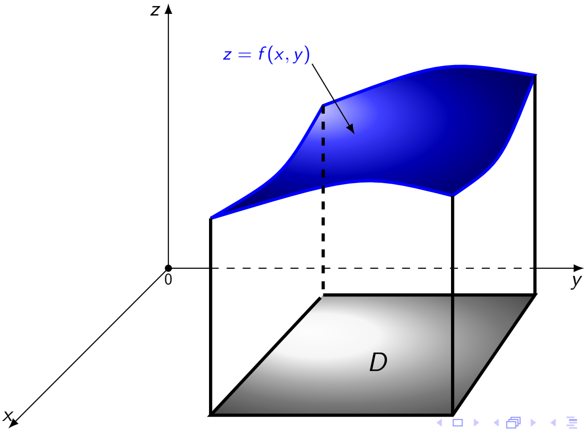

Acétates
pour
l'impatient

Définition et propriétés des intégrales doubles

- Définition des intégrales doubles

Définition 1 (géométrique)

Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables x et y, continue sur un domaine D du plan (xoy). On appelle intégration de f sur le domaine D, notée $\int\int_D f(x,y)dxdy$, le volume algébrique de la partie de l'espace délimitée par le graphe de $z = f(x,y)$ et le domain D.

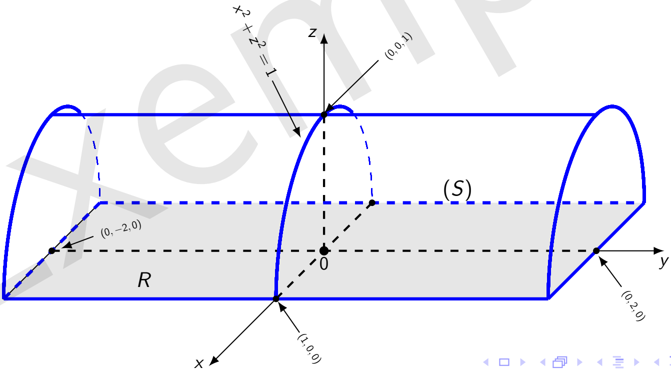


Exemple : Soit $R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$. Calculer l'intégrale

$$\int\int_R \sqrt{1 - x^2} dA. \tag{1}$$

Solution : Le calcul de l'intégrale (1), revient à chercher le volume du solide (S) sous le cylindre circulaire $x^2 + z^2 = 1$ et au dessus du rectangle R. Le volume de (S) étant égal au produit de l'aire du demi-cercle de rayon 1 par la longueur du cylindre, alors on a :

$$\int\int_R \sqrt{1 - x^2} dA = \frac{1}{2}\pi(1)^2 \times 4 = 2\pi.$$



Afin de donner une définition analytique de l'intégrale double, on procéde aux étapes suivantes où le domaine étant supposé rectangle ($D = [a, b] \times [c, d]$) :

i. On décompose le domaine D en petits rectangles, dont les intérieurs sont disjoints, suivant le partitionnement des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$:
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$;

ii. La taille de la partition P est donnée par (δ_x, δ_y) où δ_x est la longueur du plus grand intervalle de la partition en x et δ_y celle en y;

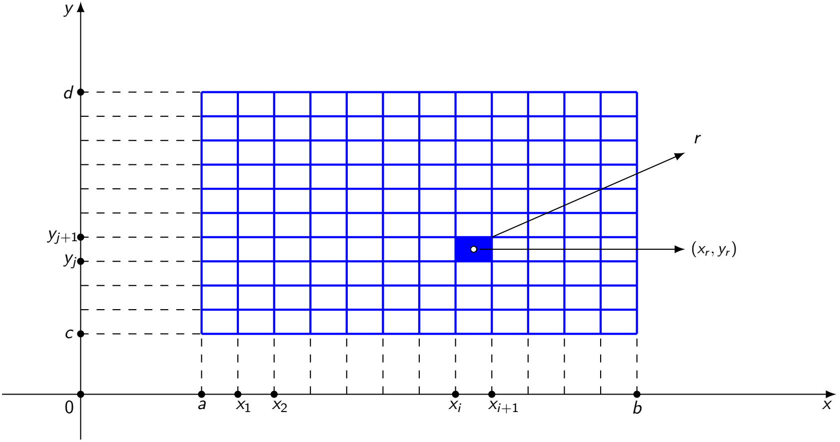
iii. On note (x_r, y_r) le point milieu d'un sous-rectangle r, d'aire notée aussi $A(r)$;

iv. En chaque sous-rectangle r, on approxime le volume du secteur sous la courbe par celui du parallélépipède de hauteur $f(x_r, y_r)$ soit $A(r)f(x_r, y_r)$;

v. Le volume algébrique délimité par le graphe de f et les plans verticaux $x = a, x = b$ et $y = c, y = d$, sera approximé par la somme de Riemann de f suivante :

$$S_P := \sum_{r \in P} A(r) f(x_r, y_r); \tag{2}$$

vi. Le même processus est répété avec une partition raffinée de P.



Définition 2

Soit $f(x,y)$ une fonction continue sur un domaine D. L'intégration double de f sur D, notée $\int\int_D f(x,y)dxdy$, est la limite de la somme de Riemann définie en (2) :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy := \lim_{(\delta_x,\delta_y)\to(0,0)} \sum_{r\in P} A(r)f(x_r,y_r). \tag{3}$$

- Propriétés des intégrales doubles

Ces propriétés sont des conséquences immédiates de la définition établie en (3).

i. Linéarité : Si f et g sont continues sur D, α une constante, on a l'égalité

$$\int\int_D (f(x,y) + \alpha g(x,y))dxdy = \int\int_D f(x,y)dxdy + \alpha \int\int_D g(x,y)dxdy. \tag{4}$$

ii. Positivité : Si $f(x,y) \geq 0$ pour tout (x,y) appartenant à D, alors on a

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \geq 0. \tag{5}$$

iii. Relation de Chasles : Si $D = D_1 \cup D_2$ où D_1 et D_2 ont des intérieurs disjoints,

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{D_2} f(x,y)dxdy. \tag{6}$$

iv. Si f est continue sur D, il existe un point (ζ, η) appartenant à D tel que

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = f(\zeta,\eta)\int\int_D dxdy. \tag{7}$$

v. Si $f(x,y) = 1$, le volume algébrique sera numériquement égal à l'aire de D. C'est à dire :

$$\int\int_D dxdy = A(D) \tag{8}$$

Calcul des intégrales doubles

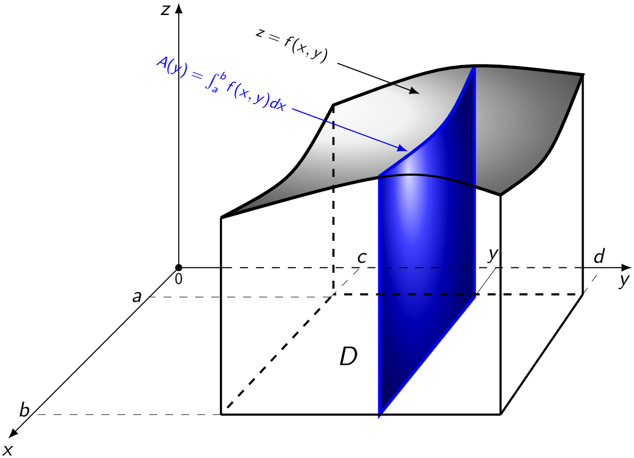
- Un domaine rectangulaire : La première méthode de calcul d'une intégrale double porte sur le cas où le domaine D est un rectangle et où la fonction $f(x, y)$ à intégrer, est positive. Elle consiste (cette méthode) à découper le solide dont on veut déterminer le volume en tranches verticales, parallèles soit à l'axe (ox) soit à celui (oy) :

i. Une tranche parallèle à l'axe (ox), correspondant à une valeur de y fixée et d'épaisseur dy, a un volume égal à $dV = A(y)dy$ où $A(y)$ est son aire. Cette aire s'exprime à l'aide d'une intégrale simple par rapport à x où y est fixé :

$$dV = dy \int_a^b f(x, y)dx. \tag{9}$$

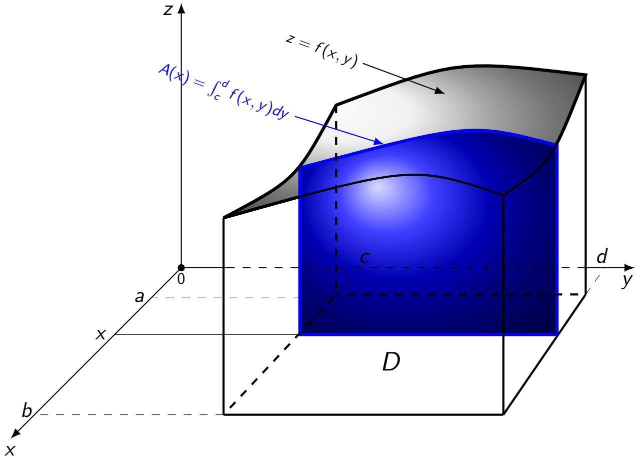
La sommation de l'ensemble de ces volumes est aussi une intégration simple, et en fait définit le volume algébrique recherché et noté par $\int\int_D f(x, y)dxdy$:

$$\int\int_D f(x, y)dxdy := \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y)dx \right\} dy. \tag{10}$$



ii. Une tranche parallèle à l'axe (oy), correspondant à une valeur de x fixée et d'épaisseur dx, a un volume $dV = A(x)dx$ où $A(x)$, son aire s'exprime par $A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$.
La sommation de ces volumes définit le volume recherché et noté par $\int\int_D f(x,y)dydx$:

$$\int\int_D f(x,y)dydx := \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)dy \right\} dx. \tag{11}$$



Théorème de Fubini

Soit f une fonction continue sur un rectangle $D = [a, b] \times [c, d]$. On a l'égalité

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx \qquad (12)$$

Exemples : Calculer

a. $\int_0^1 \int_0^1 x^2 y dx dy$

b. $\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (x+y) dx dy$

c. $\int_1^4 \int_0^2 (x+\sqrt{y}) dx dy$

d. $\int \int_D \cos(x+2y) dA$, avec $D := \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

e. Calculer le volume du solide dressé sur le rectangle $R := [-1,+1] \times [0,2]$ et coiffé par le paraboloide circulaire $z = 4 + x^2 - y^2$.

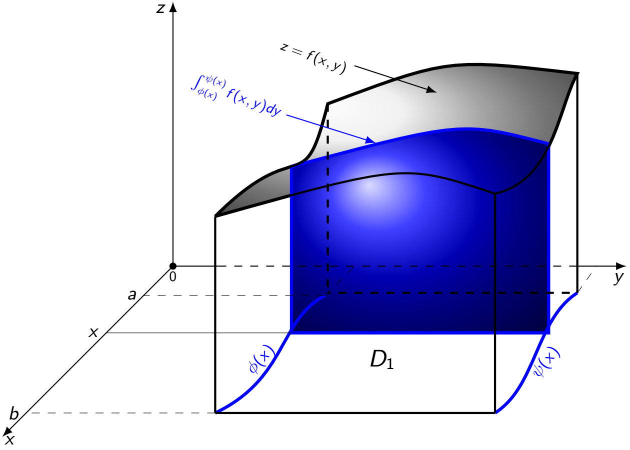
f. $\int \int_R \cos(y) \sin(x) dA$, avec $R := \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

Remarque

Les membres de droite des équations (10) et (11) sont appelées intégrales itérées et le principe décrit précédemment, dit de Cavalieri, nous permet de remplacer une intégrale multiple par une intégrale itérée.

- Un domaine quelconque : On distinguera deux types de domaines.
  i. Domaine de type I : Ce domaine est défini comme suit

$$D_1 = \left\{(x, y) : x \in [a, b], \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\right\}. \tag{13}$$



L'aire d'une tranche sera définie par l'intégrale simple suivante :

$$\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy. \tag{14}$$

ii. Domaine de type II : Un tel domaine est défini par l'ensemble suivant

$$D_2 = \Big\{(x, y) : y \in [c, d], h(y) \le x \le g(y)\Big\}. \tag{15}$$

L'aire d'une tranche sera définie par l'intégrale simple suivante :

$$\int_{h(y)}^{g(y)} f(x, y) dx. \tag{16}$$

Selon que le domaine soit de type I ou II, l'intégrale s'écrira respectivement

$$\int\int_{D_1} f(x, y) dydx = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \tag{17}$$

ou

$$\int\int_{D_2} f(x, y) dxdy = \int_c^d \left(\int_{h(y)}^{g(y)} f(x, y) dx \right) dy. \tag{18}$$

Exemples :

a. Calculer le volume de la sphère de rayon a, centrée à l'origine, via l'intégrale double suivante : $\int\int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$ où $D := \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\right\}$

b. Calculer $\int\int_R \sqrt{4 - x^2}\, dA$ où R est délimité par $y = 4 - x^2$, $x = 0$ et $y = 0$.

c. Calculer $\int\int_R x\, y\, dA$ où le domaine R est borné par la droite $y = x - 1$ et la parabole $y^2 = 2x + 6$.

d. Changer l'ordre d'intégration $I := \int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)dydx$, puis calculer I.

e. Calculer le volume du tétraèdre borné par les plans $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ et $z = 0$.

Applications

- Calcul de la masse et du centre de gravité : Soit D un domaine borné du plan. On peut considérer D comme une plaque dont l'épaisseur est négligeable devant l'aire, et si le matériau dont la plaque est constitué n'est pas homogène il faut faire l'hypothèse que la masse surfacique $\rho(x, y)$ dépend de la position sur la plaque. La masse de la plaque $M(D)$, sera ainsi définie :

$$M(D) := \int\int_D \rho(x, y)dxdy. \tag{19}$$

Les coordonnées du centre de gravité de la plaque, notées $(\bar{x}, \bar{y})$, sont :

$$\bar{x} := \frac{1}{M(D)} \int\int_D x\rho(x, y)dxdy \text{ et } \bar{y} := \frac{1}{M(D)} \int\int_D y\rho(x, y)dxdy \tag{20}$$

Remarque

Pour une plaque homogène (c'est à dire de densité $\rho(x, y)$ constante) et d'aire $A(D)$, on a :

$$\bar{x} := \frac{1}{A(D)} \int\int_D xdxdy \text{ et } \bar{y} := \frac{1}{A(D)} \int\int_D ydxdy. \tag{21}$$

- Calcul du moment d'inertie : On cherche le moment d'inretie J_Δ de la plaque pesante par rapport à un axe Δ de sorte que l'énergie cinétique E_c acquise, pour une rotation à la vitesse angulaire α autour de l'axe Δ, soit :

$$E_c := \frac{1}{2} J_\Delta \alpha. \tag{22}$$

Désignant $d((x,y),\Delta)$, la distance du point (x, y) de la plaque à l'axe Δ, on définit J_Δ par

$$J_\Delta := \int\int_D \left[d((x,y),\Delta)\right]^2 \rho(x,y)dxdy \tag{23}$$

Remarque

- Par rapport à l'axe $\Delta = (Ox)$, on a le moment d'inertie J_Δ défini par la relation

$$J_\Delta := \int\int_D y^2 \rho(x,y)dxdy. \tag{24}$$

- Par rapport à l'axe $\Delta = (Oy)$, on a le moment d'inertie J_Δ donné par la relation

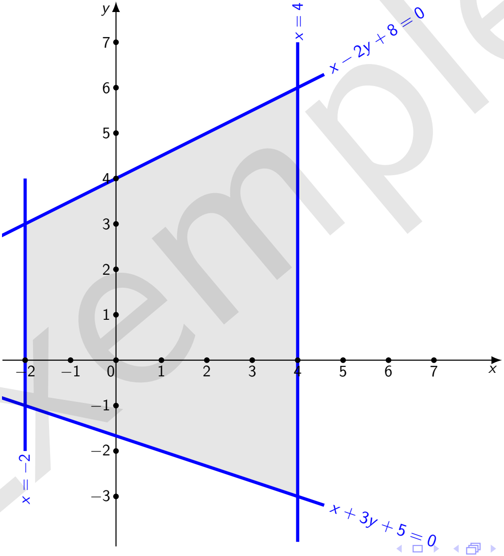
$$J_\Delta := \int\int_D x^2 \rho(x,y)dxdy. \tag{25}$$

- Par rapport à l'axe $\Delta = (Oz)$, dit axe perpenduculaire à l'origine, on a le moment

$$J_\Delta := \int\int_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)dxdy. \tag{26}$$

Exemples :

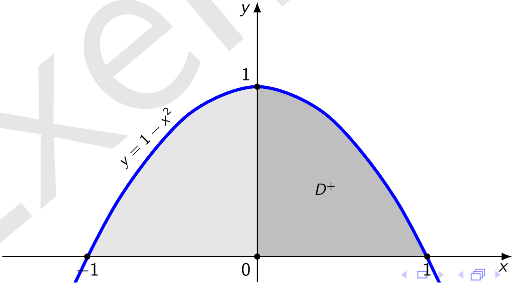
a. Calculer le centre de gravité d'une plaque de densité constante recouvrant la région délimitée par les droites $x - 2y + 8 = 0$, $x + 3y + 5 = 0$, $x = -2$, $x = 4$.



Solution : La plaque étant homogène, alors la formule (21) sera utilisée pour le calcul des coordonnées du centre de gravité. Et donc il s'agira de calculer d'abord l'aire de la plaque $A = (\frac{9+4}{2}) * 6 = 39$. Ainsi on a

$$\begin{aligned}
\bar{x} \quad &:= \quad \frac{1}{A(D)} \int\int_D x dx dy = -\frac{1}{39} \int_{-2}^{4} \Big(\int_{(\frac{x+8}{2})}^{-(\frac{x+5}{3})} x dy \Big) dx = \frac{18}{13}, \\
\bar{y} \quad &:= \quad \frac{1}{A(D)} \int\int_D y dx dy = -\frac{1}{39} \int_{-2}^{4} \Big(\int_{(\frac{x+8}{2})}^{-(\frac{x+5}{3})} y dy \Big) dx = \frac{50}{39}.
\end{aligned}$$

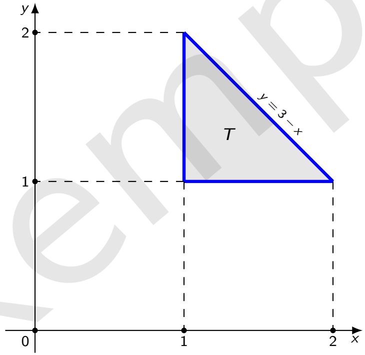
b. Déterminer la masse d'une plaque D à frontière courbe, délimité par $y = 1 - x^2$ et l'axe des x, et où la masse surfacique est donnée par $\rho(x, y) = |xy|$.



Solution : Désignons par D^+ la portion de D où $x \geq 0$; $\rho(x,y)$ prend exactement les mêmes valeurs à gauche et à droite de l'axe (oy) et que les deux portions sont symétriques, alors on éffectue le calcul dans D^+ puis on multiplie le résultat obtenu par deux :

$$M(D) = 2\int\int_{D^+} \rho(x,y)dxdy = 2\int_0^1 \left[\int_0^{1-x^2} \rho(x,y)dy\right]dx = \frac{1}{6}.$$

c. Donner le moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) d'une plaque triangulaire T, définie par les sommets $(1,1), (2,1)$ et $(1,2)$, et de densité $\rho(x,y) = 4$.



Solution : $J_O = \int\int_T 4(x^2+y^2)dA = 4\int_1^2 \left(\int_1^{3-x} (x^2+y^2)dy\right)dx = \frac{22}{3}.$

Utilisation de Maple

- Calcul d'intégrales avec les commandes int(...) et int(int(...)) :
  i. Intégrale simple : Le calcul des intégrales simples dans maple est éffectué par la commande $int(f(x), x = a..b)$, où f est la fonction à intégrer sur $[a, b]$.
  ii. Intégrale double : Quant aux intégrales doubles, la commande utilisée est $int(int(f(x, y), x = a..b), y = c..d)$, où f est la fonction à intégrer sur $[a, b] \times [c, d]$.
  iii. Pour compléments, visiter le lien : http ://alamanya.free.fr/cours/chapn71.htm
- Représentation graphique avec plot(...) et plot3d(...) :
  i. Graphique en dimension 2 : La syntaxe la plus simple pour représenter une fonction sur maple est $plot(f)$ ou $plot(f(x), x = a..b)$.
  ii. Graphique en dimension 3 : La commande $plot3d(f(x, y), x = a..b, y = c..d)$ permet de tracer une surface.
  iii. Pour compléments, visiter le lien :http ://alamanya.free.fr/cours/chapn61.htm
- Exemples
  a. Représenter sur le même graphe les fonctions suivantes : $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$, $g(x) = -\frac{1}{3}(x + 5)$ avex $x \in [-2, 4]$. Colorer la partie délimité par f, g, $x = -2$ et $x = 4$.
  Solution : $plot([(1/2) * x + 4, -(x + 5) * (1/3)], x = -2..4, filled = true, color = [yellow, yellow])$. La figure en (a) de l'exemple précédent est une illustration de la sortie escomptée.

b. Représenter la fonction $y = 1 - x^2$, où $x \in [-1, 1]$. Colorer la partie délimiter par cette fonction en rouge.
Solution :$plot([1 - x^2], x = -1..1, filled = true, color = [red])$

c. Représenter le triangle en (c) de l'exemple précédent. Solution :
$plot([[1, 1], [2, 1], [1, 2], [1, 1]], x = 0..2, y = 0..2, filled = true, color = [yellow])$

Les références :

- Livre J. Stewart (Édition MODULO), page 247-267 : sections 6.1, 6.2, 6.3.
- Livre J. Stewart (Édition 2), page 830-850 et page 858-866 : sections 12.1, 12.2, 12.3, 12.5.
- Pour un cours de maple complet : http ://alamanya.free.fr/

Fin