UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Suites, séries, calcul dans $\mathbb{R}^n$ (MATH 2013) - Chapitre 2.1: Les séries entières

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

Définition d’une série entière

Définition

- Une **série entière** est une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \tag{1}$$

où x est une variable et où les c_n sont des constantes appelées les **coefficients** de la série.

> **Note:** Pour chaque valeur de x fixée, la série (1) est une série numérique dont on peut déterminer la convergence ou la divergence [1].

- Plus généralement, une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots \tag{2}$$

est appelée **série entière centrée en a** (ou **série entière autour de a**).

Exemple 1.1:

- À la série entière (1) si $c_n = 1$ pour tout n, alors on obtient la série géométrique de raison x et de premier terme 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

- Cette série converge lorsque $-1 < x < 1$,
- et elle diverge lorsque $|x| \geq 1$.

Note: Une série entière peut converger pour certaines valeurs de x et diverger pour d'autres.

Exemple 1.2: Pour quelles valeurs de x la série $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ converge?

- ▷ On va utiliser le critère de d'Alambert (ou test du rapport).
- ▷ Si on note a_n le n-ième terme de la série, alors

$$a_n = n!x^n.$$

- ▷ Si $x \neq 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty.$$

- ▷ Alors, la série diverge lorsque $x \neq 0$.
- ▷ Par conséquent, la série converge seulement quand $x = 0$.

Exemple 1.3: Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout x.

- Soit $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Alors, on a

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{an} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

- D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout x.

Exemple 1.4: Pour quelles valeurs de x la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ converge-t-elle?

- Soit $a_n = (x-3)^n/n$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-3)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x-3| = |x-3|.\end{aligned}$$

- Selon le critère de d'Alambert, la série est
  - absolument convergente (donc convergente) si $|x-3|<1$
  - et divergente lorsque $|x-3|>1$.
- Or

$$|x-3|<1 \;\Leftrightarrow\; -1<x-3<1 \;\Leftrightarrow\; 2<x<4$$

donc la série converge lorsque $2<x<4$ et diverge lorsque $x<2$ ou $x>4$.

- ▷ Comme le test du rapport ne donne aucune information quand $|x-3|=1$, on examine les cas $x=2$ et $x=4$ séparément.
- ▷ Avec $x=4$, on obtient une série harmonique

$$\sum \frac{1}{n}, \quad \text{qui diverge.}$$

- ▷ Avec $x=2$, la série devient

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

  qui converge d'après le test des séries alternées.
- ▷ Par conséquent, la série entière donnée converge pour $2 \leq x < 4$.

Théorème

Soit la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. Alors, il y a trois possibilités:

1. La série converge seulement lorsque $x = a$.
2. La série converge pour tout x.
3. Il existe un nombre positif R tel que la série converge si $|x-a| < R$ et diverge si $|x-a| > R$.

Note:

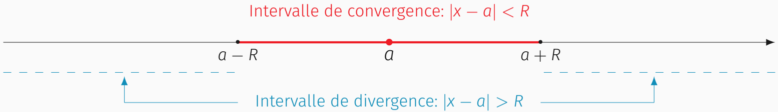
- Le nombre R en 3 est appelé le **rayon de convergence** de la série.
- Par convention, le rayon de convergence est:
  - ⋆ $R = 0$ dans le cas 1, c-à-d la série ne converge qu'en $x = a$,
  - ⋆ et $R = \infty$ dans le cas 2, c-à-d la série converge pour tout x.

- L'intervalle de convergence d'une série entière est l'intervalle constitué de toutes les x pour lesquelles la série converge.

  - ⋆ Dans le cas $\boxed{1}$, cet intervalle est constitué de l'unique point a.
  - ⋆ Dans le cas $\boxed{2}$, l'intervalle de convergence est $]\text{-}\infty, \infty[$.

- Dans le cas $\boxed{3}$, en réécrivant l'inégalité $|x-a|<R$ sous la forme $a-R<x<a+R$ et en étudiant la série aux extrémités $x=a\pm b$, l'intervalle de confiance est l'une des quatres intervalles suivants:

$$]a-R, a+R[\,,\ \ ]a-R, a+R]\,,\ \ [a-R, a+R[\,,\ \ [a-R, a+R]$$



▷ Rayons et intervalles de convergence des exemples précédents.

Série	Rayon de convergence	Intervalle de convergence
$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R=1$	$]-1,1[$
$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$	$R=0$	$\{0\}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R=1$	$[2,4[$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R=\infty$	$]-\infty,\infty[$

Exemple 1.5: Déterminer l'intervalle de convergence de la série entière:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$$

- ▷ Soit $a_n = \frac{2^n x^n}{n}$. Par le critére de d'Alembert, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}|x|^{n+1}}{n+1} \frac{n}{2^n|x|^n}, \quad (x \neq 0) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} 2|x| = 2|x|\end{aligned}$$

- ▷ Alors, la série est convergente pour

$$2|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{2}$$

- ▷ Et elle est divergente lorsque

$$2|x| > 1 \iff |x| > \frac{1}{2}$$

- ▷ Le rayon de convergence de cette série est $R = \frac{1}{2}$.

- ▷ Il reste à étudier la série pour $|x| = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$.

- Pour $x = -\frac{1}{2}$, on a la série harmonique alternée suivante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \text{qui converge.}$$

- Alors que pour $x = \frac{1}{2}$, la série harmonique résultante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \text{diverge.}$$

- Donc la série est convergente pour $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$, d'où l'intervalle de convergence $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Exemple 1.6: Déterminons le rayon de convergence et l'intervalle de convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

- $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = \left|-3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|$$
$$= 3\sqrt{\frac{1+(1/n)}{1+(2/n)}}|x| \to 3|x| \text{ lorsque } n \to \infty.$$

- D'après le critère de d'Alembert, la série converge si $3|x| < 1$ et diverge si $3|x| > 1$.

- Par conséquent, elle converge si $|x| < \frac{1}{3}$ et diverge si $|x| > \frac{1}{3}$.

- Le rayon de convergence est donc $R = \frac{1}{3}$.

- On sait que la série converge dans l'intervalle $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$, mais on doit vérifier la convergence aux extrémités de cet intervalle.

- Si $x = -\frac{1}{3}$, la série devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

qui diverge. (On peut utiliser le test de l'intégrale ou simplement observer qu'il s'agit d'une série de Riemann avec $p = \frac{1}{2} < 1$.)

- Si $x = \frac{1}{3}$, la série est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

qui converge, selon le test des séries alternées.

- La série entière donnée converge donc lorsque $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$, et l'intervalle de convergence est $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

Fonctions définies par des séries entières

Définition

Soit la série entière suivante, dont le rayon de convergence est noté par R

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

On définit la fonction f à partir cette série comme suit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \; x \in \left]-R, R\right[.$$

Note: La fonction f est appelée, fonction définie par une série entière.

Exemple 2.1:

- On commence avec une équation que nous avons déjà rencontrée à la section précédente:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{pour} \quad |x| < 1. \tag{3}$$

- On a calculé cette somme en observant que c'est celle d'une série géométrique avec $a = 1$ et $r = x$.

- Ici, notre point de vue est différent car on considère cette série comme l'expression d'une certaine fonction $f(x)$

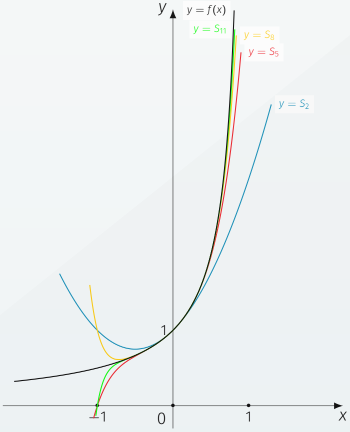
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{pour} \quad x \in \left]-1, 1\right[.$$

- Alors, on obtient tout simplement que $f(x) = 1/(1-x)$.

- La somme d'une série est la limite de la suite de ses sommes partielles

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} s_n(x), \quad \text{où} \quad s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

- Lorsque n croit, $s_n(x)$ approxime de mieux en mieux $f(x)$ sur $-1 < x < 1$.



- Cette figure illustre géométriquement l'équation (3).

Exemple 2.2: Exprimons $f(x) = 1/\left(1+x^2\right)$ comme la somme d'une série entière et trouvons son intervalle de convergence.

- En remplaçant x par $-x^2$ dans l'équation (3), on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots\end{aligned}$$

- Cette série est convergente lorsque $\left|-x^2\right| < 1$, c'est-à-dire quand

$$x^2 < 1 \text{ ou encore } |x| < 1.$$

- Par conséquent, l'intervalle de convergence est]-1, 1[.

- (On aurait pu, bien sûr, déterminer le rayon de convergence en appliquant le test du rapport, mais ce n'est pas nécessaire ici.)

Exemple 2.3: Écrire un développement en série entière de $1/(x+2)$.

- On met d'abord 2 en évidence au dénominateur et on écrit la série:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n.$$

- Cette série converge lorsque $|\frac{-x}{2}| < 1$, autrement dit quand $|x| < 2$.

- L'intervalle de convergence est donc $]-2,2[$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n, \quad \text{pour tout } \ x \in]-2,\, 2[.$$

Dérivation et intégration d’une série entière

- Le résultat suivant montre qu'on peut dériver terme à terme ou intégrer terme à terme une série entière.

Théorème

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ une série entière dont le rayon de convergence est R.

- Alors, la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ est dérivable (et par conséquent continue) sur l'intervalle $]-R, R[$ et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}. \tag{4}$$

- On a aussi

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + C, \text{ où C est une constante.} \tag{5}$$

- Le rayon de convergence des séries en (4) et (5) est également R.

Note:

- On peut récrire l'équation en (4) de ce théorème sous la forme:

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n x^n\right].$$

- Alors que l'équation en (5) peut s'écrire sous la forme:

$$\int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n x^n dx.$$

Remarque : On sait que pour les sommes finies, la dérivée d'une somme est la somme des dérivées et que l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales. Selon les équations (4) et (5), c'est aussi vrai pour les sommes infinies, pourvu qu'on traite des séries entières convergentes.

Exemple 3.1: Exprimons $1/(1-x)^2$ sous la forme d'une série entière. Quel est le rayon de convergence de la série dérivée?

- Rappelons que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \; x \in \,]-1, 1[\,.$$

- Alors,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n)$$

- et donc, on obtient:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{ou encore}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n, \; x \in \,]-1, 1[\,.$$

- Selon le théorème, le rayon de convergence de la série dérivée est le même que le rayon de convergence de la série originale, soit $R = 1$.

Exemple 3.2: Trouvons une représentation en série entière de $\ln(1-x)$ et déterminons son rayon de convergence.

- Puisque $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in]-1, 1[$, alors

$$\int \frac{dx}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1-x} x^n dx$$

- Et donc

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ ou encore } -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C.$$

- D'autre part, en fixant $x = 0 \in]-1, 1[$ on obtient

$$-\ln 1 = C \Rightarrow C = 0.$$

- Alors, la série devient finalement

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \ x \in]-1, 1[.$$

- Le rayon de convergence est le même que celui de la série originale, soit $R = 1$.

Remarque : On montre que, puisque la série numérique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

est convergente, la fonction $\ln(1-x)$ est continue en $x=-1.$ Et donc,

$$\ln(1-(-1)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Exemple 3.3: Trouvons une représentation en série entière de $f(x) = \arctan x$.

- On remarque que $f'(x) = 1/\left(1+x^2\right)$. On trouve la série demandée en intégrant la série de $1/\left(1+x^2\right)$

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\right) dx \\ &= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots . \end{aligned}$$

- Pour trouver C, on pose $x = 0$. On obtient $C = \arctan 0 = 0$, donc

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

- Comme le rayon de convergence de la série de $1/\left(1+x^2\right)$ est 1 , le rayon de convergence de la série de $\arctan x$ est aussi égal à 1.

Remarque : Si la série entière $\sum c_n(x-a)^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, alors la fonction f définie par

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

est dérivable (et donc continue) sur l'intervalle $]a-R, a+R[$, et

-
$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \qquad (6)$$

-
$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.\end{aligned} \qquad (7)$$

- Le rayon de convergence des séries entières en (6) et (7) est R.

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)

- Disponibilités:
  - ⋆ Lundi 10H00 - 12H00, MRR B-214
  - ⋆ Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214
  - ⋆ Jeudi 08H00 - 10H00, MRR B-214

- Manuels du cours:

[1] J. Stewart.
Analyse concepts et contextes. Volume 1, Fonctions d'une variable.
DE BOECK SUP; 3e édition, Rue des Minimes 39, B- 1000 Bruxelles, 2011.