UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

MATH 2413 - Chapitre 3: Fonctions et Relations

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les caractéristiques des fonctions:

- **A** À la section 1., en définissant et en reconnaissant les relations d'égalité ou d'inclusion entre deux ensembles.
- **B** À la section 2. en définissant les notions de relation et de fonction à l'aide d'une règle de correspondance:
  1. Domaine et de graphe d'une fonction
  2. Représentation graphique d'une fonction,
  3. Notions de fonction injective, surjective et bijective.

C À la section 3. en trouvant:

1 les points d’intersection du graphique d’une fonction avec les axes

2 les intervalles sur lesquels une fonction est positive, négative ou nulle.

3 les notions de croissance et de décroissance d’une fonction,

4 celles de maximums et minimums absolus ou relatifs.

D À la section 4. en effectuerant

1 les opérations d’addition et de soustraction,

2 la multiplication ou la division sur des fonctions réelles,

3 la composition de fonctions.

E À la section 5. en abordera différents types de fonction.

Notions de base de la théorie des ensembles

Définition

1 Un **ensemble** est une collection d'éléments. On écrit $a \in A$ pour indiquer que a est un élément de l'ensemble A et $a \notin A$ si a n'appartient pas à l'ensemble.

Exemple 1.1:

- Les **nombres naturels** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls.
- Les **nombres entiers** $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ est l'ensemble de tous les entiers, qu'ils soient positifs, négatifs ou nuls.

- Les **nombres rationnels** $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'exprimer sous la forme d'un quotient de deux entiers, soit sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers et $b \neq 0$.

- On a aussi les ensembles suivants

$$\{0, 1\}, \quad \{\text{rouge}, \text{noir}\}.$$

2 Un **ensemble** est une collection d'éléments qui vérifient une propriété.

Exemple 1.2:

$$\{x \in \mathbb{R}, |x - 2| < 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C}, z^5 = 1\}, \quad \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1].$$

Définition

1 Deux ensembles A et B sont **égaux** s'ils ont exactement les mêmes éléments. On écrit alors $A = B$. L'égalité de A et B s'écrit mathématiquement

$$\forall x : (x \in A) \iff (x \in B).$$

Exemple 1.3:

- Si $A = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ et $B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2\}$, alors $A = B$.
- $A = \{5, 10\}$ et $B = \{0, 5, 10\}$ ne sont pas égaux, puisqu'ils n'ont pas exactement les mêmes éléments.
- $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$. L'ordre dans lequel on inscrit les éléments n'a pas d'importance.

- $\{1,2,1,3,2,1\} = \{1,2,3\}$. La répétition d'un élément ne modifie pas un ensemble.
- $[-12, 27] = \{x \in \mathbb{R} \mid -12 \leq x \leq 27\}$
- $]5, 11[\neq [6, 10]$, puisque tous les nombres réels compris strictement entre 5 et 6 de même que ceux qui sont compris strictement entre 10 et 11 appartiennent au premier ensemble, mais pas au second.

2 Un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B si tous les éléments de A sont aussi des éléments de B. L'inclusion de A dans B s'écrit mathématiquement

$$\forall x : \; (x \in A) \implies (x \in B).$$

Note: On dit aussi que A est un **sous-ensemble** de B ou une **partie** de B et on écrit $A \subseteq B$. Si A n'est pas inclus dans B, on écrit $A \nsubseteq B$.

Égalité de deux ensembles et l'inclusion

$$A = B \text{ si et seulement si } A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A.$$

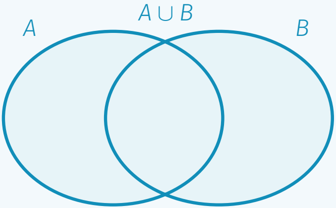
Si $A \subseteq B$ et $A \neq B$, on parle alors d'inclusion stricte et on peut écrire $A \subset B$.

Exemple 1.4:

- Si $A = \{2, 8, 13\}$, $B = \{1, 2, 5, 8, 13\}$ et $C = \{2, 5, 8\}$, alors $A \subseteq B$, $A \nsubseteq C$, $B \nsubseteq A$, $B \nsubseteq C$, $C \nsubseteq A$ et $C \subseteq B$.
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, puisque tous les entiers naturels sont des nombres réels. Par contre, $\mathbb{R} \nsubseteq \mathbb{N}$, puisqu'il existe une infinité de nombres réels qui ne sont pas des entiers naturels.
- $]-99, 0[\subseteq [-99, 0]$
- Un ensemble E est toujours inclus dans lui-même. On peut ainsi écrire $E \subseteq E$.

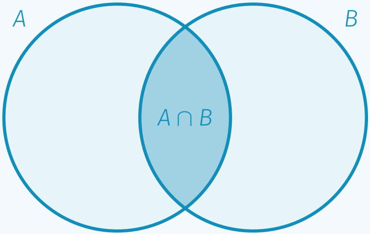
Définition

1 L'**union** (ou **réunion**) de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B.



$$A \cup B = \left\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\right\}$$

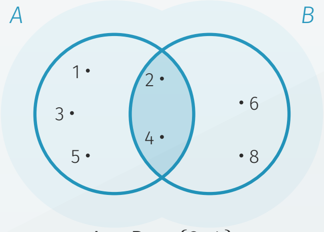
2 L'**intersection** de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.



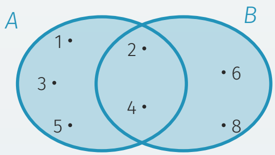
$$A \cap B = \left\{ x \mid x \in A \text{ et } x \in B \right\}$$

Exemple 1.5:

- Soit les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{2, 4, 6, 8\}$.



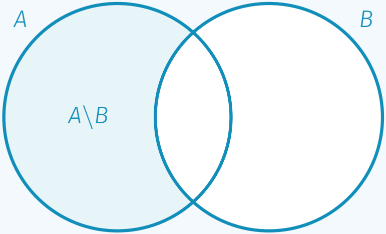
$A \cap B = \{2, 4\}$



$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

Note: Si A et B n'ont aucun élément commun, $A \cap B = \emptyset$ et A et B sont dits **disjoints**.

3 La **différence** de deux ensembles A et B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.



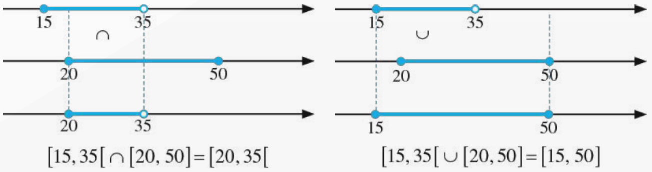
$$A \setminus B = \left\{ x \mid x \in A \text{ et } x \notin B \right\}$$

Exemple 1.6:

- Soit les ensembles $A = \{10, 20, 30\}$, $B = \{10, 15, 20, 25\}$ et $C = \{20, 25, 30\}$.

$$\begin{aligned}(A \cup B) \backslash (B \cap C) &= \{10, 15, 20, 25, 30\} \backslash \{20, 25\} \\ &= \{10, 15, 30\}\end{aligned}$$

- Soit les intervalles $[15, 35[$ et $[20, 50]$



Produit cartésien

Définition

1 Soient A et B deux ensembles. Le **produit cartésien**, noté $A \times B$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in A$ et $y \in B$.

$$A \times B = \{(x, y) \,|\, x \in A, y \in B\}$$

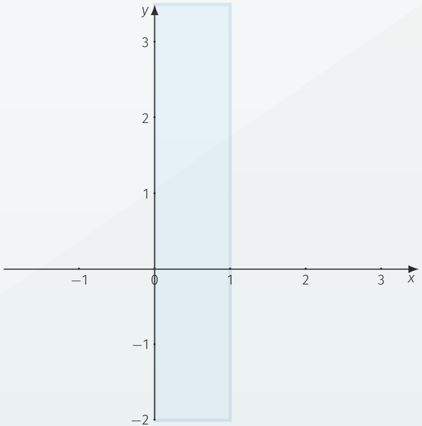
Exemple 1.7:

- Nous connaissons le produit cartésien

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

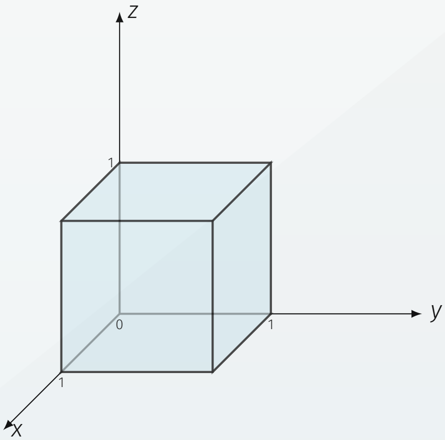
- Un autre exemple de produit cartésien est

$$[0,1] \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$$



- Et en trois dimensions, nous avons aussi le produit cartésien

$$[0,1] \times [0,1] \times [0,1] = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x,y,z \leq 1\}$$



- Si $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{4,5\}$, alors on a le produit cartésien

$$A \times B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$

2 Deux couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont **égaux** si leurs premières composantes sont égales et si leurs secondes composantes sont égales.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2$$

Deux couples qui ne sont pas égaux sont dits **distincts**.

Concepts de relation et de fonction

Définition

1 Soit $A \times B$ le produit cartésien de deux ensembles quelconques A et B. Un élément (x, y) de $A \times B$ vérifie une **relation** $\mathscr{R}$, s'il possède une propriété donnée $\mathcal{P}$ entre x et y; on écrit alors

$$x\mathscr{R}y$$

Exemple 2.1:

- Reprenons l'exemple de $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{4, 5\}$ et définissons la relation $\mathscr{R}$ suivante pour $(x, y) \in A \times B$:

$$x\mathscr{R}y \text{ si } x \text{ divise } y.$$

Par exemple $(1, 4)$, $(2, 4)$ vérifient cette relation. Par contre $(3, 4)$ ne la verifie pas.

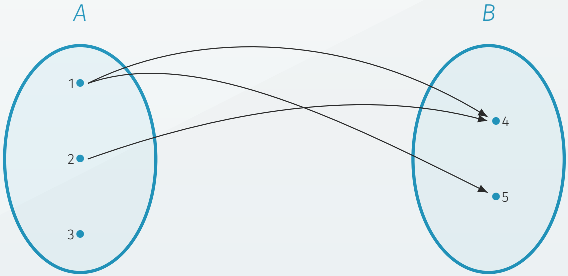
2 L'ensemble des couples $(x, y) \in A \times B$ vérifiant la relation $\mathscr{R}$ est appelé le **graphe** de $\mathscr{R}$. On le note $\mathcal{G}_{\mathscr{R}}$ et on écrit

$$\mathcal{G}_{\mathscr{R}} = \{(x, y) \in A \times B \,|\, x\mathscr{R}y\}$$

Note: $\mathcal{G}_{\mathscr{R}}$ est un sous-ensemble (ou une partie) de $A \times B$: $\mathcal{G}_{\mathscr{R}} \subseteq A \times B$.

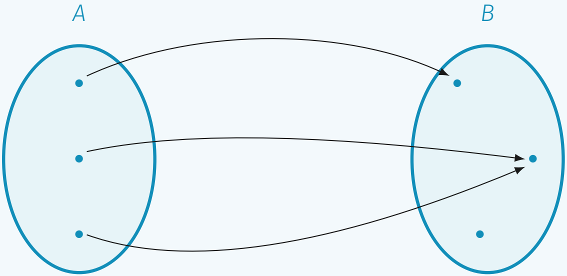
Exemple 2.2:

- Pour la relation précédente, son graphe est donné par $\mathcal{G}_{\mathscr{R}} = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4)\}$.



Définition

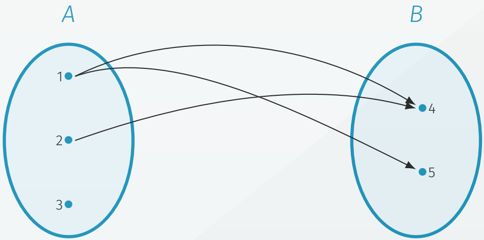
1 Une relation $\mathscr{R}$ définie sur $A \times B$ est dite une **application** (ou une **fonction**) de A dans B si pour tout $x \in A$, il existe un **seul** $y \in B$ tel que $x\mathscr{R}y$.



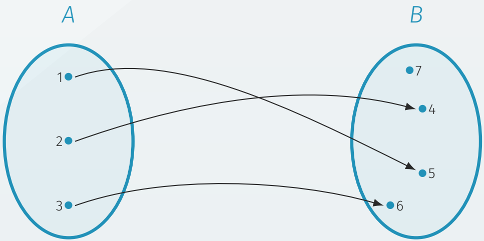
Note: En d'autres termes, une **application** (ou une **fonction**) de A dans B est une **règle** qui à tout élément de A correspond un élément **unique** de B.

Exemple 2.3:

- Cette relation n'est pas une application car 3 n'est pas en relation avec un élément de *B* ou 1 est en relation avec deux éléments.



- La relation suivante est bien une application de *A* dans *B*.



Note: On note généralement une application de A dans B par f et on écrit

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

- x est la **variable indépendante**.
- y est la **variable dépendante**: c'est l'**image** de x par la fonction f.
- A est l'**ensemble de départ** de la fonction f.
- B est l'**ensemble d'arrivée** de la fonction f.

2 Si $f : A \longrightarrow B$ est une application où A et B sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, alors f est appelé une **fonction réelle** d'une **variable réelle**. Dans ce cas, on écrit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Note:

- On décrit la relation entre y et x par une équation de la forme $y = f(x)$ (lire «y égale f de x»).

- C'est la **règle de correspondance** de la fonction qui indique comment **évaluer** la fonction pour une valeur de x donnée, c'est-à-dire comment calculer la valeur de y correspondant à cette valeur de x.

Exemple 2.4:

- Soit la relation qui, à chaque nombre réel, associe son carré.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = x^2 \text{ ou bien } f(x) = x^2$$

Évaluons la fonction pour quelques valeurs de x.

Valeur de x	$y = f(x) = x^2$	Valeur de y (image de x par la fonction f)
$x = 5$	$y = f(5) = 5^2$	$y = 25$
$x = -8$	$y = f(-8) = (-8)^2$	$y = 64$
$x = a + 1$	$y = f(a+1) = (a+1)^2$	$y = a^2 + 2a + 1$

- x est la variable indépendante, car on peut choisir sa valeur selon ce que l'on cherche.
- y est la variable dépendante, car sa valeur dépend de celle qu'on a choisie pour x.

- La relation qui, à chaque nombre réel associe deux fois sa valeur plus un, est aussi une fonction. On peut l'exprimer par la règle de correspondance de la forme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = 2x + 1 \text{ ou bien } f(x) = 2x + 1 \end{aligned}$$

- La relation qui, à chaque nombre réel associe sa valeur absolue, est également une fonction. On peut l'exprimer par la règle de correspondance de la forme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = |x| \text{ ou bien } f(x) = |x| \end{aligned}$$

- Soit $f(x) = \frac{3x^2-5x+1}{4-x}$ la règle de correspondance d'une fonction réelle. On a:
  - $f(7) = \frac{3(7)^2-5(7)+1}{4-7} = \frac{113}{-3} = \frac{-113}{3}$.
  - $f(4) = \frac{3(4)^2-5(4)+1}{4-4} = \frac{27}{0}$ n'est pas définie, puisqu'on ne peut pas diviser par 0.
  - $f(c) = \frac{3(c)^2-5(c)+1}{4-c} = \frac{3c^2-5c+1}{4-c}$ à la condition que $c \neq 4$.

Définition

1. Le **domaine** d'une fonction réelle f décrite par la règle de correspondance $y = f(x)$ est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'expression est définie.

2. Le domaine d'une fonction f est désigné par $dom(f)$

$$dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \text{ existe}\}$$

Note: La recherche du domaine d'une fonction algébrique

Pour déterminer le domaine d'une fonction algébrique, on cherche les valeurs de sa variable indépendante telles:

- qu'aucun dénominateur n'est nul;
- que les expressions sous une racine paire (racine carrée, quatrième, sixième, etc.) sont positives ou nulles.

Exemple 2.5:

- Soit $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 6$. $dom(f) = \mathbb{R}$, puisque la fonction est définie par un polynôme:

  > Il n'y a aucun dénominateur ni radical, donc aucune restriction.

- Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x-2} + 3$. La fonction est définie à la condition que $x - 2 \geq 0$, soit si $x \geq 2$:

$$dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = [2, +\infty[.$$

Exemple 2.6:

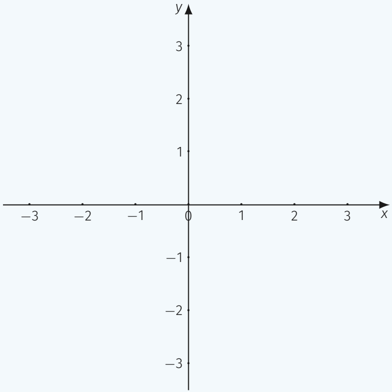
- Soit la fonction $A(r) = \pi r^2$. Le domaine naturel de cette fonction est $dom(A) = \mathbb{R}$.

- La même fonction peut représenter l'aire d'un cercle de rayon r. Dans ce cas, le domaine contextuel est $dom(f) = [0, +\infty]$, car la mesure du rayon d'un cercle ne peut pas être négative et rien n'indique une limite supérieure.

- Il se peut aussi que l'énoncé du problème nous amène à restreindre encore plus le domaine. Si on cherche l'aire d'un cercle dessiné sur une feuille carrée de 20 cm de côté, le rayon du cercle ne peut être supérieur à 10 cm et on aura alors $dom(f) = [0, 10]$.

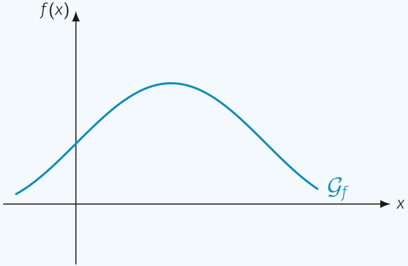
Définition

1 Le **plan cartésien** est une surface plane définie par l'intersection de deux droites numériques perpendiculaires. Il permet entre autres de repérer des points dans le plan et de représenter une relation entre deux variables.



- L'**axe des abscisses** (les x) est horizontal et l'**axe des ordonnées** (les y) est vertical. Chacun des deux axes perpendiculaires est une droite réelle.
- Les deux axes se coupent au point $(0, 0)$, appelé l'**origine** du plan cartésien.
- Sur chacun des axes, on indique l'échelle et le nom de la variable (variable indépendante sur l'axe horizontal et variable dépendante sur l'axe vertical).

2 Le **graphe** d'une fonction f est l'ensemble des couples (x, y) tels que $y = f(x)$, et est donné par $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.



- L'ensemble des valeurs x, des couples du graphe $\mathcal{G}_f$, correspond au **domaine** de f ($dom(f)$).

- **L'ensemble image** de f, noté $ima(f)$, est l'ensemble des valeurs $y = f(x)$ des couples du graphe $\mathcal{G}_f$.

Exemple 2.7: Soit la fonction $f(x) = x^2 - 4$, où $dom(f) =]-3, 3]$.

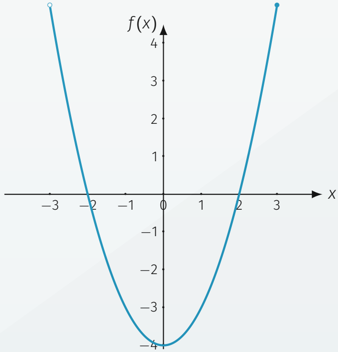
- Chaque couple de son graphe est de la forme $(x, y) = (x, f(x)) = (x, x^2 - 4)$.

- Le tableau de valeurs ci-dessous donne quelques exemples de points.

x	-3	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = x^2 - 4$	$\nexists$	0	-3	$\frac{-15}{4}$	-4	$\frac{-15}{4}$	-3	0	5
(x, y)		(-2, 0)	(-1, -3)	$\left(\frac{-1}{2}, \frac{-15}{4}\right)$	(0, -4)	$\left(\frac{1}{2}, \frac{-15}{4}\right)$	(1, -3)	(2, 0)	(3, 5)

- On obtient une esquisse du graphique en plaçant ces points dans le plan cartésien et en les reliant de façon approximative.

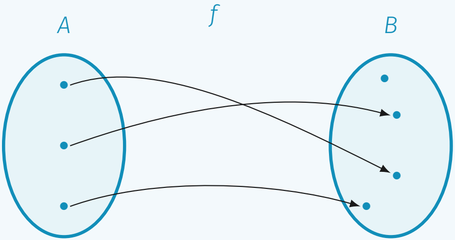
On constate que $f(-a) = f(a)$ pour tout $a \in dom(f)$. Ainsi, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x.



Puisque $dom(f) =]-3, 3]$, un intervalle ouvert à gauche et fermé à droite, on place un point vide en $(-3, 5)$ et un point plein en $(3, 5)$.

3 Une fonction f est **injective** de A dans B, si elle associe chaque $y \in B$ à au plus un $x \in A$.

$$\forall x, x' \in A,\ \left(f(x) = f(x') \implies x = x'\right)$$



4 De façon équivalente, on dit que f est injective si l'une des conditions suivantes est satisfaite:

- deux valeurs distinctes de x n'ont jamais la même image par f;

$$\forall x, x' \in A,\ \left(x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')\right)$$

- les secondes composantes des couples du graphe de f sont toutes différentes.

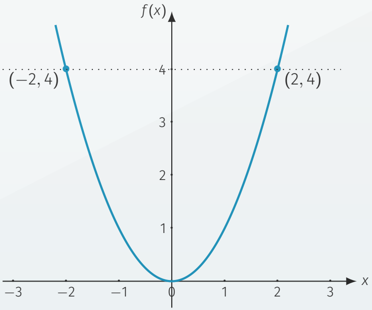
Note: On peut reconnaître le graphique d'une fonction injective au fait que deux points distincts n'ont jamais la même **ordonnée**.

Le test de la droite horizontale

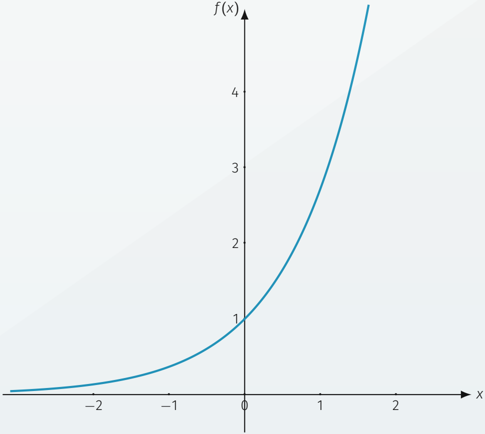
Une fonction est injective si une droite horizontale ne coupe jamais son graphique cartésien en plus d'un point.

Exemple 2.8:

- La fonction f ci-dessous n'est pas injective.



- La fonction f représentée par le graphique ci-dessous est injective, puisqu'une droite horizontale ne coupera jamais la courbe en plus d'un point.

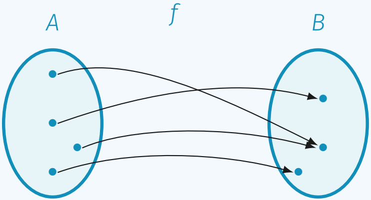


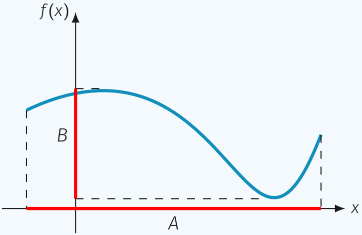
Domaine et image d'une fonction à partir de son graphique

- Le **domaine** d'une fonction est l'ensemble des **abscisses** des points de son graphique. Pour trouver le domaine, on projette verticalement tous les points du graphique sur l'axe horizontal.
- L'**ensemble image** d'une fonction est l'ensemble des **ordonnées** des points de son graphique. Pour trouver l'ensemble image, il suffit de projeter horizontalement tous les points du graphique sur l'axe vertical.

5 Une fonction f est **surjective** de A dans B, si elle associe chaque $y \in B$ à au moins un $x \in A$.

$$\forall y \in B, \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x)$$

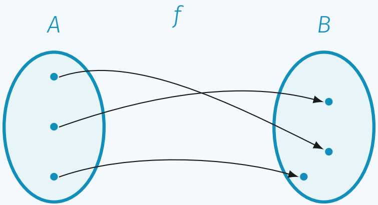


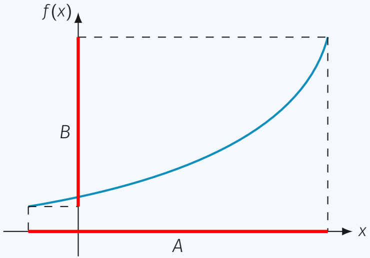


6 Une fonction f est **bijection** de A dans B, si elle est à la fois injective et surjective. C'est à dire pour tout $y \in B$, il **existe un unique** $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit:

$$\forall y \in B, \exists!\, x \in A \text{ tel que } y = f(x)$$

L'existence du x vient de la surjectivité et l'unicité de l'injectivité.





Propriétés de fonction

Faire l'**étude du signe** d'une fonction consiste à trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x) < 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) > 0$.

L'étude du signe d'une fonction à l'aide de son graphique

Une fonction est:

- **négative** sur les intervalles où son graphique est situé **au-dessous de l'axe des** x.
- **nulle** aux abscisses des points situés **sur l'axe des** x, c'est-à-dire les zéros.
- **positive** sur les intervalles où son graphique est situé **au-dessus de l'axe des** x.

La présentation de l'étude du signe dans un tableau

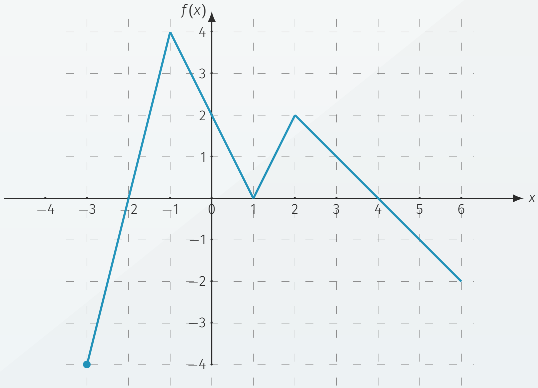
- Sur la première ligne, on inscrit les extrémités du domaine (ou le symbole de l'infini avec son signe) et les valeurs critiques de la fonction.

- Sur la deuxième ligne, on inscrit 0 pour un zéro et $\nexists$ pour les valeurs n'appartenant pas au domaine, puis le signe de la fonction sur chaque intervalle inclus dans le domaine, selon que le graphique est au-dessus ou au-dessous de l'axe des x.

Exemple 3.1:

- La fonction f ci-dessous a pour $dom(f) = [-3, +\infty[$.
  Les zéros sont là où la fonction pourrait changer de signe:

$$f(x) < 0 \text{ si } x \in [-3, -2[\cup]4, +\infty[\quad \text{et} \quad f(x) > 0 \text{ si } x \in]-2, 1[\cup]1, 4[$$



Ainsi, on a:

$$f(x) = 0 \text{ si } x = -2, \text{ ou } x = 1, \text{ ou } x = 4$$

Dans le cas présent, la fonction change de signe en passant par les zéros $x = -2$ et $x = 4$, mais elle reste positive avant et après le zéro $x = 1$.

Valeur de x	-3		-2		1		4	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Pour faire l'étude du signe d'une fonction $f(x)$, on doit

- déterminer son domaine de définition,
- résoudre l'équation $f(x) = 0$,
- déterminer les intervalles où $f(x) < 0$ et $f(x) > 0$ se réalisent.

Exemple 3.2: Soit la fonction $f(x) = \frac{-5(2-x)}{x+1}$, où $dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

- Le zéro de la fonction est la valeur qui annule le numérateur, soit 2.
- On inscrit ce zéro sur la première ligne du tableau, de même que la valeur -1, qui n'appartient pas au domaine.
- On construit le tableau en tenant compte qu'on ne peut pas diviser par 0.

Valeurs de x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
-5	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-5(2-x)}{x+1}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

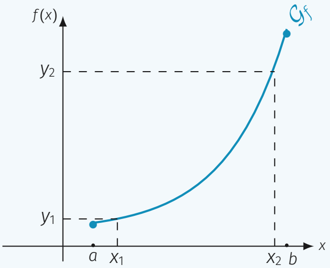
- $f(x) < 0$ si $x \in]-1, 2[$, $f(x) = 0$ si $x = 2$ $f(x) > 0$ si $x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

Définition

1 Une fonction f est **croissante** sur un intervalle $I \subseteq dom(f)$ si, pour toutes les valeurs x_1 et x_2 dans cet intervalle,

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

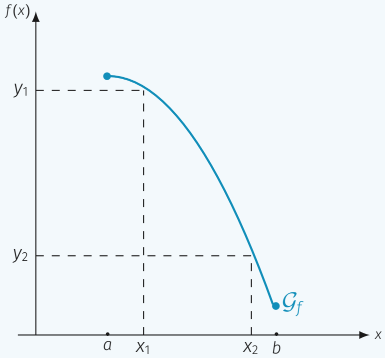
Dans cet intervalle, les valeurs de y augmentent lorsque celles de x augmentent et le graphique est une courbe ascendante.



2 Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle $I \subseteq dom(f)$ si, pour toutes les valeurs x_1 et x_2 dans cet intervalle,

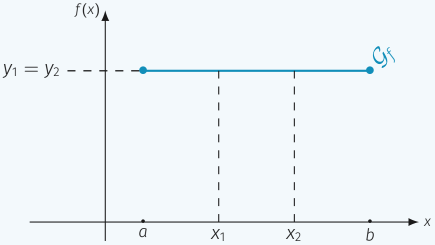
$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

Dans cet intervalle, les valeurs de y diminuent lorsque celles de x augmentent et le graphique est une courbe descendante.



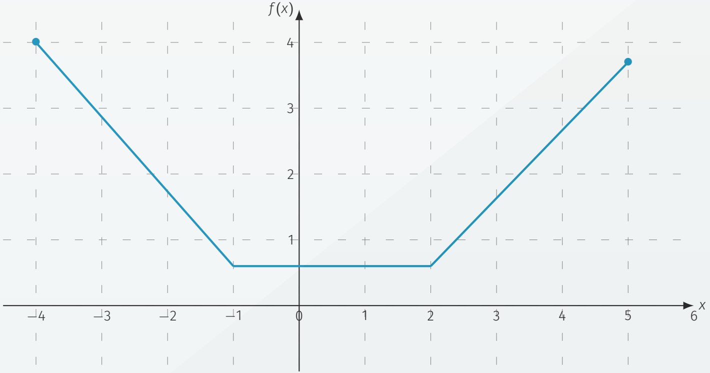
3 Une fonction f est **constante** sur un intervalle $I \subseteq dom(f)$ si, pour toutes les valeurs x_1 et x_2 dans cet intervalle, $f(x_1) = f(x_2)$.

Dans cet intervalle, les valeurs de y sont égales pour toutes les valeurs de x et le graphique est une droite horizontale.



Exemple 3.3:

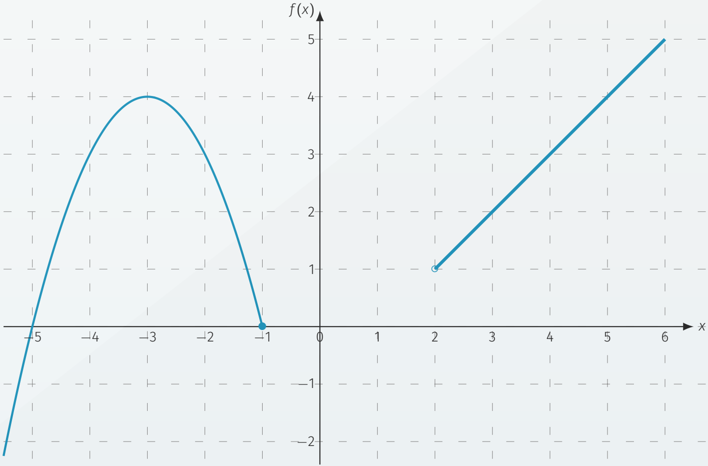
- Soit la fonction f représentée par le graphique ci-contre.



- f est décroissante sur $[-4, -1[$.
- f est constante sur $[-1, 2]$.
- f est croissante sur $[2, 5]$.

Exemple 3.4:

- Soit la fonction f représentée par le graphique ci-dessous.
  f est croissante sur $]-\infty,-3]$ et sur $]2,+\infty[$, et décroissante sur $[-3,-1]$.



Définition

- Le **maximum** (ou **maximum absolu**) d'une fonction f, désigné par $\max(f)$, est la plus grande valeur atteinte par $f(x)$.

$$\max(f) \geq f(x) \text{ pour tout } x \in dom(f)$$

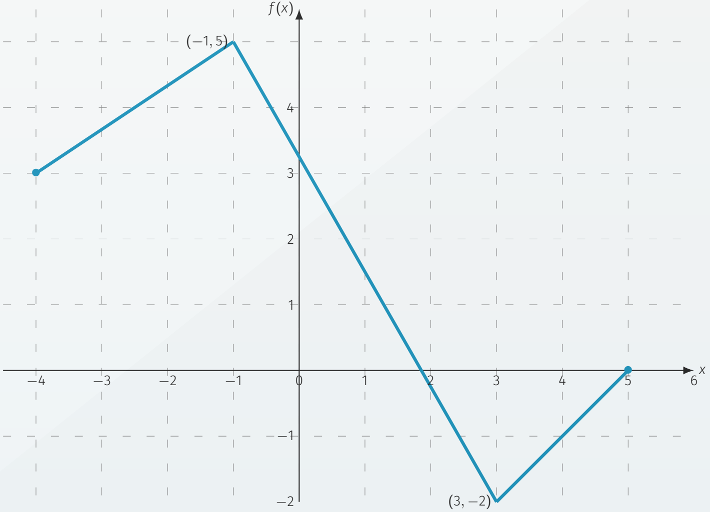
- Le **minimum** (ou **minimum absolu**) d'une fonction f, désigné par $\min(f)$, est la plus grande valeur atteinte par $f(x)$.

$$\min(f) \leq f(x) \text{ pour tout } x \in dom(f)$$

- On appelle **extremum** d'une fonction une valeur qui est soit son maximum, soit son minimum.

Exemple 3.5:

- Soit la fonction f représentée par le graphique ci-contre. Son domaine est $dom(f) = [-4, 5]$.



- ⋆ Son maximum est $\max(f) = 5$. La fonction atteint ce maximum absolu lorsque $x = -1$.

- ⋆ Le maximum est le nombre 5. Le point $(-1, 5)$, quant à lui, est le point où la fonction atteint ce maximum, qu'on peut appeler «**point de maximum**».

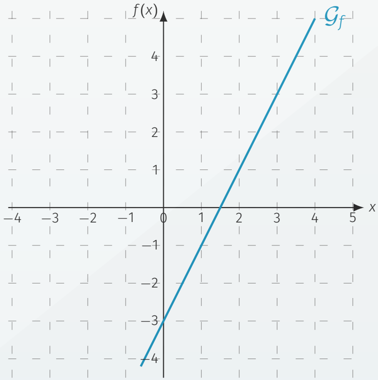
- ⋆ Son minimum est $\min(f) = -2$. La fonction atteint ce minimum absolu lorsque $x = 3$.

- ⋆ Le minimum est le nombre -2. Le point $(3, -2)$ est le point de minimum. $y = f(x)$ prend toutes les valeurs entre -2 et 5.

- ⋆ Ainsi, $ima(f) = [-2, 5]$.

Exemple 3.6:

- La fonction $f(x) = 2x - 3$ représentée par ce graphique, a pour domaine $dom(f) = \mathbb{R}$.



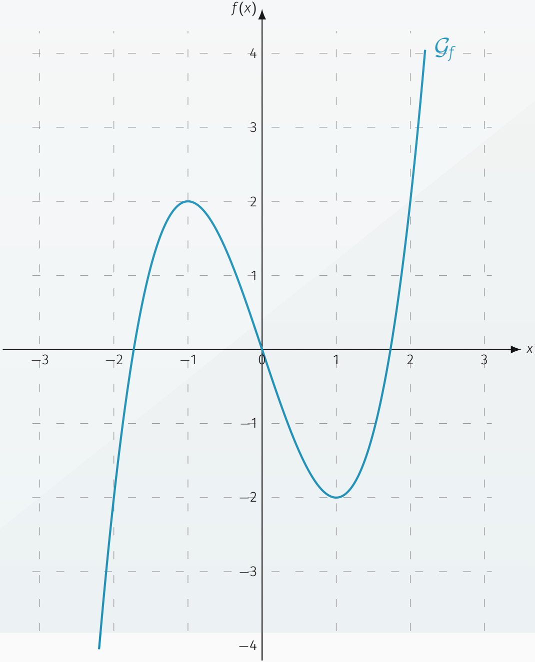
  - ⋆ La fonction n'a ni minimum ni maximum, puisqu'elle est représentée par une droite oblique.

  - ⋆ Ainsi, $Ima(f) = \mathbb{R}$.

- L'ordonnée $f(a)$ d'un point du graphique est un **maximum relatif** (ou **minimum relatif**) si c'est la **plus grande** (ou la **plus petite**) valeur de $y = f(x)$ pour les valeurs de x comprises dans un intervalle ouvert autour de a.
- Tout maximum (minimum) absolu est aussi un maximum (minimum) relatif.

Exemple 3.7:

- Soit la fonction f représentée par le graphique ci-dessous.
    - Cette fonction n'a ni minimum absolu ni maximum absolu.
    - Elle possède toutefois un maximum relatif 2 au point $(-1, 2)$ et un minimum relatif -2 au point $(1, -2)$.



$f(x)$
$\mathcal{G}_f$
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
x

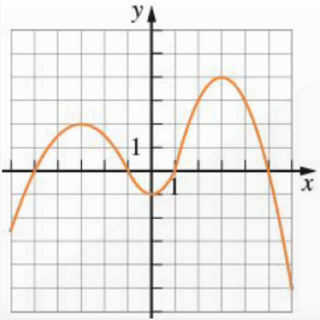
Le tableau de variation d'une fonction

- Déterminer le domaine de la fonction.
- Calculer l'ordonnée à l'origine et en déduire le point d'intersection du graphique avec l'axe des y.
- Trouver les zéros de la fonction et en déduire les points d'intersection du graphique avec l'axe des x.
- Faire l'étude du signe de la fonction: préciser les intervalles sur lesquels la fonction est positive, négative ou nulle.
- Faire l'étude de croissance de la fonction : préciser les intervalles sur lesquels la fonction est croissante, décroissante ou constante.
- Préciser les extremums, absolus ou relatifs, et en déduire l'ensemble image de la fonction.
- Regrouper toutes les informations précédentes dans un tableau de variation.
- Tracer une esquisse du graphique.

L'ordre des étapes peut varier selon les éléments dont on dispose.

Exemple 3.8:

- Soit la fonction f représentée par le graphique ci-dessous.



- Sur la première ligne, on inscrit les valeurs pertinentes de x:
  - extrémités du domaine,
  - points où la fonction n'est pas définie,
  - zéros et extremums s'il y a lieu.

- Sur la deuxième ligne, on inscrit les résultats de l’étude du signe de la fonction.

- Sur la troisième ligne, on inscrit les résultats de l’analyse de croissance en utilisant des flèches ascendantes pour la croissance et des flèches descendantes pour la décroissance, puis en précisant les extremums.

Valeurs de x	$-\infty$	-5		-3		-1		0		1		3		5	$+\infty$
Signe de f	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−
Croissance de f	↗			max. rel. 2	↘			-1 min. rel.	↗			max. 4	↘		

Opérations sur les fonctions

- Chaque image $y = f(x)$ d'un nombre réel x est aussi un nombre réel.
- On peut donc effectuer des opérations élémentaires sur ces valeurs.

Exemple 4.1:

- Soit $f(x) = 4x - 1$ et $g(x) = x^2$, avec $dom(f) = \mathbb{R}$ et $dom(g) = \mathbb{R}$.

$$3 \in dom(f) \text{ et } f(3) = 4(3) - 1 = 11$$
$$3 \in dom(g) \text{ et } g(3) = 3^2 = 9$$

Pour $x = 3$, on peut effectuer les opérations suivantes.

$$f(3) + g(3) = 11 + 9 = 20$$
$$f(3) - g(3) = 11 - 9 = 2$$
$$(f(3))(g(3)) = (11)(9) = 99$$
$$\frac{f(3)}{g(3)} = \frac{11}{9}$$

De façon générale:

$$f(x) + g(x) = 4x - 1 + x^2$$

$$f(x) - g(x) = 4x - 1 - x^2$$

$$(f(x))(g(x)) = (4x - 1)(x^2)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x - 1}{x^2}, \text{ si } x \neq 0$$

En évaluant les quatre expressions algébriques précédentes pour $x = 3$, on obtient encore 20, 2, 99 et $\frac{11}{9}$ respectivement.

Définition

Si f et g sont deux fonctions, on obtient de nouvelles fonctions en effectuant des opérations élémentaires sur les expressions qui constituent leurs règles de correspondance.

Fonction somme

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \text{ où } dom(f+g) = dom(f) \cap dom(g)$$

Fonction différence

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), \text{ où } dom(f-g) = dom(f) \cap dom(g)$$

Fonction produit

$$(fg)(x) = (f(x))(g(x)), \text{ où } dom(fg) = dom(f) \cap dom(g)$$

Fonction quotient

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ où}$$

$$dom\left(\frac{f}{g}\right) = \Big(dom(f) \cap dom(g)\Big) \setminus \Big\{x \in dom(g) \mid g(x) = 0\Big\}$$

Exemple 4.2:

- Soit $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ et $g(x) = 3x^2$. On a les domaines de f et g: $dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $dom(g) = \mathbb{R}$.

  - ⋆ $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \frac{x+2}{x-1} + 3x^2 = \frac{x+2+3x^2(x-1)}{x-1} = \frac{3x^3-3x^2+x+2}{x-1}$ et donc $dom(f+g) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

  - ⋆ $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \frac{x+2}{x-1} - 3x^2 = \frac{x+2-3x^2(x-1)}{x-1} = \frac{-3x^3+3x^2+x+2}{x-1}$ et donc $dom(f-g) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

  - ⋆ $(fg)(x) = (f(x))(g(x)) = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)(3x^2) = \left(\frac{3x^2(x+2)}{x-1}\right)$ et donc $dom(fg) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

  - ⋆ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x+2}{x-1}}{3x^2} = \frac{x+2}{x-1} \times \frac{1}{3x^2} = \frac{x+2}{3x^2(x-1)}$ et donc $dom\left(\frac{f}{g}\right) = (\mathbb{R}\backslash\{1\}) \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

  - ⋆ $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{3x^2}{\frac{x+2}{x-1}} = 3x^2 \times \frac{x-1}{x+2} = \frac{3x^2(x-1)}{x+2}$

    et donc $dom\left(\frac{g}{f}\right) = (\mathbb{R}\backslash\{1\}) \setminus \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+2}{x-1} \neq 0\right\} = \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$.

La composée de fonctions

Exemple 4.3: Soit la fonction $h(x) = (x+3)^4$.

- Pour calculer $(x+3)^4$, il faut d'abord ajouter 3 à x, puis élever le résultat à la quatrième puissance, selon l'ordre de priorité des opérations (voir le chapitre 1).

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & x+3 \arrow[r, "g"] & (x+3)^4
\end{tikzcd}
$$

- On peut décomposer $h(x) = (x+3)^4$ en deux fonctions simples:
  - ⋆ $f(x) = x+3$ est la fonction par laquelle on ajoute 3 à un nombre réel;
  - ⋆ $g(x) = x^4$ est la fonction par laquelle on élève un nombre réel à la quatrième puissance.

- On peut évaluer $h(2)$ en calculant directement $h(2) = (2+3)^4 = 5^4 = 625$.

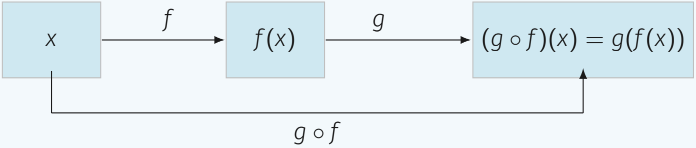
- On pourrait aussi calculer d'abord $f(2) = 2+3 = 5$, puis $g(5) = 5^4 = 625$.
  Ainsi, $h(2) = g(f(2))$.

Définition

La composée $g \circ f$ (lire «g rond f») de la fonction g et de la fonction f est

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

On peut représenter l'opération de composition par le diagramme suivant.



Exemple 4.4: Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x + 1$.

- On trouve l'expression de $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ en remplaçant la variable x par $f(x)$ dans la règle de correspondance de g.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 3x^2 + 1$$

- On peut alors évaluer la fonction $g \circ f$ pour une valeur donnée de x, par exemple $x = 2$.

$$(g \circ f)(x) = 3x^2 + 1$$
$$(g \circ f)(2) = 3(2^2) + 1 = 13$$

- On obtient le même résultat en utilisant directement la définition de la composition.

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2^2) = g(4) = 3(4) + 1 = 13$$

- Pour trouver l'expression de $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, on remplace la variable x par $g(x)$ dans la règle de correspondance de f.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = (3x + 1)^2$$

Attention !

L'opération de composition n'est pas commutative, c'est-à-dire que, de façon générale

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Le domaine d'une fonction composée

$$dom(g \circ f) = \left\{ x \in \ | \, x \in dom(f) \text{ et } f(x) \in dom(g) \right\}$$

Attention !

La règle de correspondance d'une fonction composée ne suffit pas pour déterminer son domaine.

Exemple 4.5: Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = x^2$.

- $dom(f) = \{x \mid x+1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$, car on ne peut pas extraire la racine carrée d'un nombre négatif.

- $dom(g) = \mathbb{R}$, car il n'y a aucune restriction.

- La composition de $(g \circ f)$ est déterminée par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = x+1$$

- Même si $x+1$ est défini pour tout nombre réel, le domaine de $g \circ f$ n'est pas $\mathbb{R}$.

- En effet, pour évaluer $(g \circ f)(x)$, il faut d'abord calculer $f(x)$, qui n'est défini que si $x \geq -1$.
  Par exemple, $(g \circ f)(-3) = g(f(-3)) = g(\sqrt{-3+1}) = g(\sqrt{-2})$, qui n'est pas défini.

- Les valeurs appartenant au domaine de $g \circ f$ doivent respecter les deux conditions:

  - $x \in dom(f)$, c'est à dire $x \geq -1$.
  - $f(x) \in dom(g)$, c'est à dire $\sqrt{x+1} \in \mathbb{R}$, ce qui est vrai pour tout $x \geq -1$.

  Donc $dom(g \circ f) = \{x \mid x \geq -1\} = [-1, +\infty[$.

- Par un raisonnement semblable, on trouverait $dom(f \circ g) = \mathbb{R}$.

Types de fonctions

Définition

Une **fonction affine** est une fonction polynomiale du premier degré dont la règle de correspondance est donnée par:

$$y = f(x) = ax + b, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes réelles et } a \neq 0.$$

Dans le cas où $b = 0$, cette fonction polynomiale du premier degré est appelé une **fonction linéaire** et est donnée par:

$$y = f(x) = ax, \text{ où } a \text{ est une constante réelle et } a \neq 0.$$

Note: Soit une fonction affine $y = f(x) = ax + b$, où $a \neq 0$.

- La constante a est la **pente** de la droite qui représente la fonction.

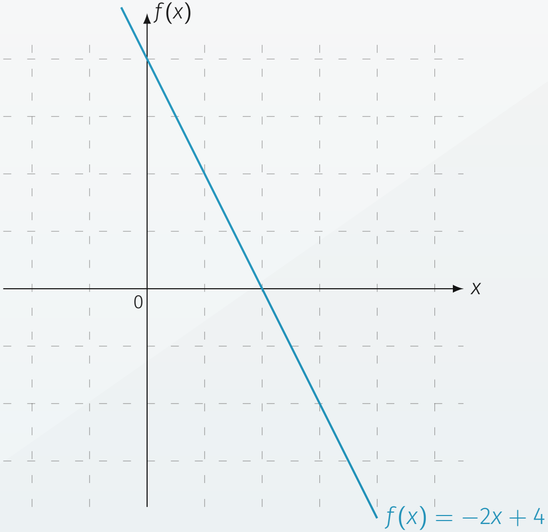
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{variation de } y}{\text{variation de } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ si } x_1 \neq x_2$$

> a est aussi appelée le **taux de variation moyen** de y par rapport à x.

- La constante b est l'**ordonnée à l'origine** de la droite qui représente la fonction.

Exemple 5.1: Soit la fonction $f(x) = -2x + 4$.

- L'ordonnée à l'origine $b = 4$ indique que la droite qui représente cette fonction coupe l'axe des y au point $(0, 4)$.



- La pente $a = -2$ signifie que y diminue de 2 lorsque x augmente de 1. Il s'agit d'une variation négative.

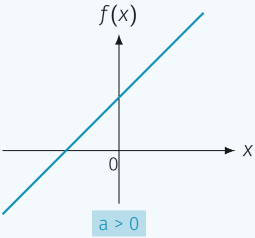
- Ces valeurs de a et de b permettent de tracer le graphique de la fonction. À partir du point $(0, 4)$, on se déplace de 1 unité vers la droite (l'accroissement de x) et de 2 unités vers le bas (la diminution correspondante de y). On atteint ainsi le point $(1, 2)$, appartenant lui aussi à la droite.

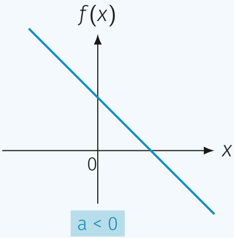
- La droite $f(x) = -2x + 4$ passe par ces deux points, qui suffisent pour tracer la droite.

Les caractéristiques d'une fonction affine

La **fonction affine** $y = f(x) = ax+b$ (où $a \neq 0$) possède les caractéristiques suivantes:

- $dom(f) = \mathbb{R}$ et $ima(f) = \mathbb{R}$.
- La fonction est représentée par une droite oblique de pente a.





- L'ordonnée à l'origine est b: la droite coupe l'axe vertical au point $(0, b)$.

- La fonction possède un seul zéro: $x = \frac{-b}{a}$. La droite coupe l'axe horizontal au point $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$. Ce zéro est aussi appelé «abscisse à l'origine».
- Si $a > 0$, la fonction est négative jusqu'à son zéro, et positive après. C'est l'inverse si $a < 0$.
- Si $a > 0$, la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$; elle est décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 0$.
- La fonction linéaire n'a ni minimum ni maximum.

Définition

Une **fonction quadratique** est une **fonction polynomiale du second degré**. Sa règle de correspondance est de la forme $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des constantes et $a \neq 0$.

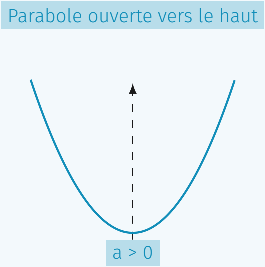
Exemple 5.2:

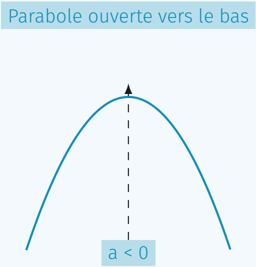
- $f(x) = \frac{2}{5} - 4x + 3x^2$ est une fonction polynomiale du second degré. En replaçant ses termes en ordre décroissant de leurs degrés, on obtient $f(x) = 3x^2 - 4x + \frac{2}{5}$, et on a alors
  - $a = 3$ (le coefficient du terme de second degré),
  - $b = -4$ (le coefficient du terme de premier degré) et
  - $c = \frac{2}{5}$ (le terme constant).

- $f(x) = -12x^2$ est une fonction quadratique, où $a = -12$, $b = 0$ et $c = 0$.
- $f(x) = \frac{5x^2-7x+8}{6}$ est une fonction quadratique, car on peut l'exprimer sous la forme $f(x) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{4}{3}$. On a alors $a = \frac{5}{6}$, $b = \frac{-7}{6}$ et $c = \frac{4}{3}$.

- Le domaine d'une fonction $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ est $\mathbb{R}$.

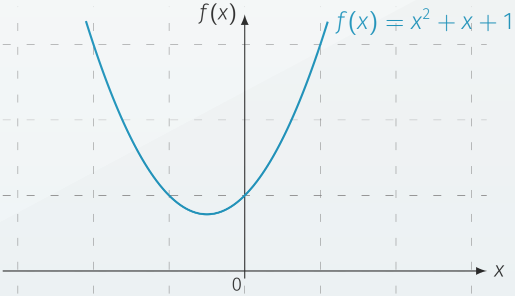
- Le graphique d'une fonction quadratique $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole dont les deux branches sont symétriques par rapport à un axe vertical. L'orientation de la parabole dépend du signe de a.



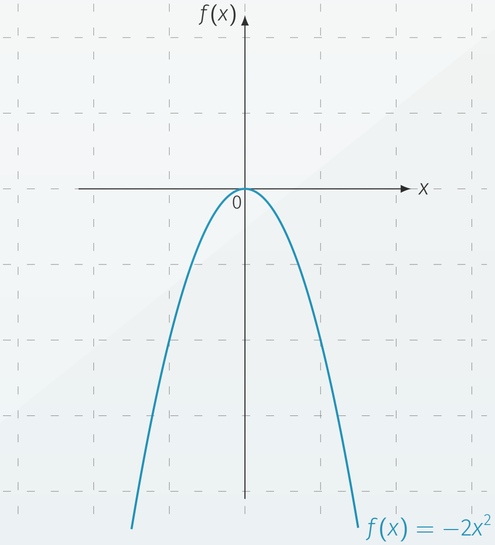


Exemple 5.3:

- Soit la fonction $f(x) = x^2 + x + 1$, où $dom(f) = \mathbb{R}$. La parabole est ouverte vers le haut, puisque $a = 1$ (donc $a > 0$).



- Soit la fonction $f(x) = -2x^2$, où $dom(f) = \mathbb{R}$. La parabole est ouverte vers le bas, puisque $a = -2$ (donc $a < 0$).



Définition

- La **fonction valeur absolue** est une fonction de la forme $y = f(x) = |x|$, où:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- La valeur absolue d'un nombre x est toujours positive ou nulle.

Exemple 5.4:

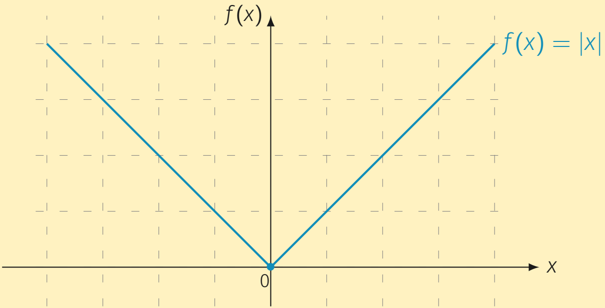
- $|3| = 3$, car 3 0. $\quad |-3| = -(-3)$, car $-3 < 0$ et $|0| = 0$.

- Si $x < 0$, $|x| = -x$ n'est pas un nombre négatif. Par exemple, si $x = -5$, alors $|x| = |-5| = -(-5)$, un nombre positif.

Note: La fonction valeur absolue est définie en deux parties:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Si $x < 0$, la règle de correspondance de la fonction devient $y = -x$, qu'on représente par une portion de la droite de pente -1 passant par l'origine, tracée sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.
- Si $x \geq 0$, la règle de correspondance devient $y = x$, qu'on représente par une portion de la droite de pente 1 passant par l'origine, tracée sur l'intervalle $[0, +\infty[$.



La fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ possède les caractéristiques suivantes:

- $dom(f) = \mathbb{R}$.
- $ima(f) = [0, +\infty[$.
- La fonction possède un seul zéro: $x = 0$.
- f est positive sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et nulle si $x = 0$; elle n'est jamais négative.
- f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
- f possède un minimum $\mathbf{min}(f) = 0$, atteint lorsque $x = 0$. Elle n'a pas de maximum.
- Le sommet du graphique est situé au point $(0, 0)$.

Définition

- La **fonction racine carrée** est la fonction dont la règle de correspondance est de la forme

$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

- On peut écrire $\sqrt{x}$ sous la forme $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Puisqu'il s'agit d'un exposant fractionnaire, la fonction $y = f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas une fonction polynomiale.

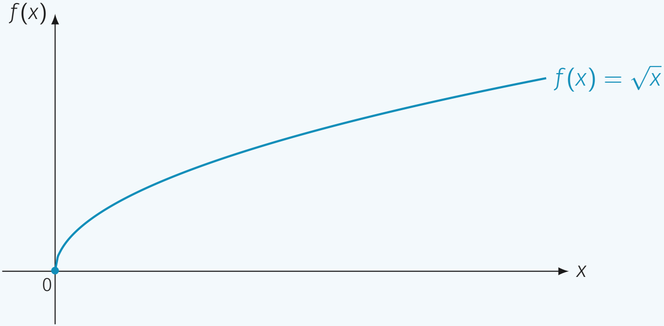
- La relation entre la racine carrée et la valeur absolue:

$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Les caractéristiques de la fonction racine carrée

La fonction racine carrée $y = f(x) = \sqrt{x}$ possède les caractéristiques:

- $dom(f) = [0, +\infty[$ et $ima(f) = [0, +\infty[$.
- La fonction possède un seul zéro: $x = 0$.
- L'ordonnée à l'origine est 0.



- f est croissante sur tout son domaine, soit sur $[0, +\infty[$.
- f possède un minimum $\min(f) = 0$, atteint lorsque $x = 0$.
- La fonction ne possède pas de maximum.
- L'extrémité du graphique est le point $(0, 0)$.
- f est positive sur $]0, +\infty[$ et nulle si $x = 0$; elle n'est jamais négative.

Définition

- Soit une fonction f telle que $y = f(x)$. La **réciproque** de f est la relation qui, à chaque élément y, associe (s'il en existe) les valeurs de x dont il est l'image. La réciproque de f est désignée par f^{-1}.

- Le «-1» de f^{-1} n'est pas un exposant. On ne peut pas interpréter f^{-1} comme $\frac{1}{f}$.

- Pour trouver $f^{-1}(b)$, il faut chercher les valeurs de x pour lesquelles $f(a) = b$, qu'on trouve en résolvant cette dernière équation.

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$$

Exemple 5.5:

- Soit $f(x) = 2x + 1$. Pour calculer $f^{-1}(7)$, on cherche les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 7$.

$$2x + 1 = 7$$
$$2x = 6 \quad \text{c'est à dire} \quad x = 3$$

  Ainsi, $f^{-1}(7) = 3$ et cette valeur est unique.
  On peut vérifier la solution en calculant $f(3) = 2(3) + 1 = 7$.

- Soit $f(x) = x^2$. Pour calculer $f^{-1}(16)$, on cherche les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 16$.

$$x^2 = 16$$
$$x^2 - 16 = 0$$
$$(x + 4)(x - 4) = 0$$
$$x + 4 = 0 \text{ ou } x - 4 = 0$$
$$x = -4 \text{ ou } x = 4$$

  Ainsi, $f^{-1}(16) = -4$ et $f^{-1}(16) = 4$. On a bien $f(-4) = (-4)^2 = 16$ et $f(4) = 4^2 = 16$.

Note: La règle de correspondance de la réciproque

Pour trouver l'expression de la réciproque f^{-1} d'une fonction f:

1. On remplace x par y et y par x dans l'expression $y = f(x)$.
2. On isole y dans la nouvelle expression.

Exemple 5.6: Soit $f(x) = \frac{2x-1}{5+3x}$.

- On remplace x par y et y par x.

$$f : y = \frac{2x-1}{5+3x} \qquad (\text{où } 5+3x \neq 0)$$

$$f^{-1} : x = \frac{2y-1}{5+3y} \qquad (\text{où } 5+3y \neq 0)$$

- On isole y dans cette dernière expression.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2y-1}{5+3y} \\
x(5+3y) &= \frac{2y-1}{5+3y}(5+3y) && \text{(multiplier des deux membres par un même nombre)} \\
x(5+3y) &= 2y-1 && \text{(simplifier)} \\
5x+3xy &= 2y-1 \\
3xy-2y &= -5x-1 && \text{(reproupement des termes en } y \text{ d'un coté)} \\
y(3x-2) &= -5x-1 && \text{(mise en évidence simple)} \\
y &= \frac{-5x-1}{3x-2} && \text{(division des deux membres par un même nombre)}
\end{aligned}
$$

On remarque qu'avant d'isoler y il a fallu regrouper d'un côté de l'égalité tous les termes contenant y, ce qui a permis de mettre y en évidence.

- On a donc $f^{-1}(x) = \frac{-5x-1}{3x-2}$ ou $f^{-1}(x) = \frac{5x+1}{2-3x}$.

- Vérifions par un exemple si les composantes des couples sont bien permutées par la fonction réciproque.

  Soit $x = -6$ dans la fonction f.

$$f(-6) = \frac{2(-6) - 1}{5 + 3(-6)} = \frac{-13}{-13} = 1$$

  Soit maintenant $x = 1$ dans la fonction f^{-1}.

$$f^{-1}(1) = \frac{5(1) + 1}{2 - 3(1)} = \frac{6}{-1} = -6$$

  Le couple $(-6, 1)$ de la fonction f devient $(1, -6)$ pour la fonction f^{-1}.

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)
- Disponibilités:
  1. Lundi 13:00 - 15:00, MRR B-214
  2. Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214
  3. Jeudi 12:00 - 13:15, MRR B-214