UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Algèbre linéaire

MATH 2673

Mohamed Farhloul - Ibrahima Dione

Hiver 2023

Table des matières

1 Espaces Vectoriels **4**
1 Exemples introductifs et rappels . . . 4
1.1 Exemples . . . 4
1.2 Rappels . . . 6
2 Espaces vectoriels . . . 7
2.1 Définition . . . 7
2.2 Exemples d'espaces vectoriels . . . 9
3 Sous-espaces vectoriels . . . 11
3.1 Définition . . . 11
3.2 Exemples de sous-espaces vectoriels . . . 11
4 Espaces vectoriels engendrés . . . 12
4.1 Combinaisons linéaires . . . 12
4.2 Espaces vectoriels engendrés . . . 14
4.3 Espaces lignes d'une matrice . . . 16
5 Bases et dimension d'un espace vectoriel . . . 18
5.1 Dépendance et indépendance linéaires . . . 18
5.2 Bases et dimension d'un espace vectoriel . . . 20
6 Somme et somme directe . . . 26
6.1 Définition . . . 26
6.2 Composantes d'un vecteur . . . 29

2 Applications Linéaires **32**
1 Définitions, exemples et propriétés . . . 32
2 Noyau et image d'une application linéaire . . . 37
3 Opérations sur les applications linéaires . . . 43
4 Composés et inverses d'applications linéaires . . . 44
4.1 Composés d'applications linéaires . . . 44
4.2 Inverses d'applications linéaires . . . 46

3 Applications Linéaires et Matrices **50**
1 Représentation matricielle d'une application linéaire . . . 50

2 Propriétés des représentations matricielles 54
3 Changements de Bases 57

4 Diagonalisation 62
1 Rappels sur le déterminant 62
1.1 Propriétés du déterminant 63
1.2 Développement de Laplace 64
1.3 D'autres résultats sur le déterminant 65
2 Diagonalisation, valeurs propres et vecteurs propres 66
3 Propriétés des valeurs propres et des vecteurs propres 69
4 Opérateurs Linéaires 77

5 Produit Scalaire et Orthogonalité 81
1 Produit scalaire 81
1.1 Introduction 81
1.2 Propriétés du produit scalaire 84
2 Orthogonalité 86
2.1 Introduction 86
2.2 Ensembles orthogonaux et bases orthogonales 89
2.3 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt 92
2.4 Projection sur un sous-espace vectoriel 97

Chapitre 1

Espaces Vectoriels

Sommaire

1 ▪ Exemples introductifs et rappels . . . . Page 4
1.1 - Exemples 4
1.2 - Rappels 6
2 ▪ Espaces vectoriels . . . . Page 7
2.1 - Définition 7
2.2 - Exemples d'espaces vectoriels 9
3 ▪ Sous-espaces vectoriels . . . . Page 11
3.1 - Définition 11
3.2 - Exemples de sous-espaces vectoriels 11
4 ▪ Espaces vectoriels engendrés . . . . Page 12
4.1 - Combinaisons linéaires 12
4.2 - Espaces vectoriels engendrés. 14
4.3 - Espaces lignes d'une matrice 16
5 ▪ Bases et dimension d'un espace vectoriel . . . . Page 18
5.1 - Dépendance et indépendance linéaires. 18
5.2 - Bases et dimension d'un espace vectoriel. 20
6 ▪ Somme et somme directe . . . . Page 26
6.1 - Définition 26
6.2 - Composantes d'un vecteur 29

1 Exemples introductifs et rappels

1.1 Exemples

- Nous connaissons déjà le plan $\mathbb{R}^2$ défini par

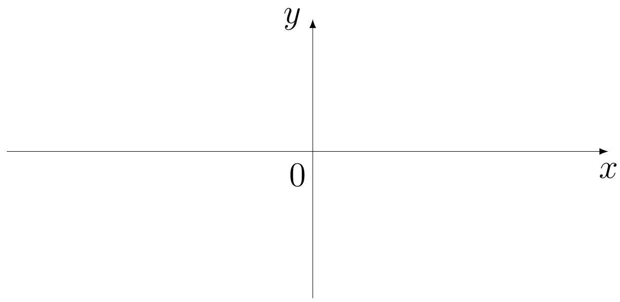
$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\},$$

où tout élément $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur de composantes a et b.

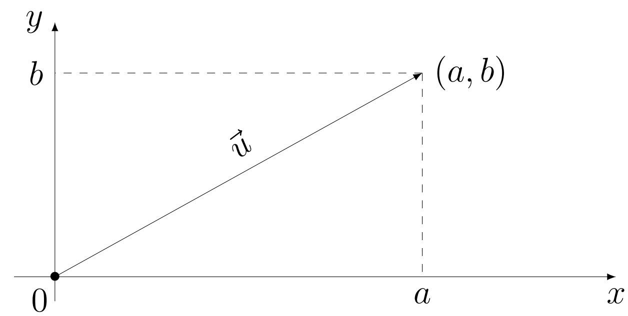
- L'addition de deux vectevrs $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (c,d) \in \mathbb{R}^2$ est également un vecteur, qu'on note $u+v$ et définit comme suit

$$u+v=(a+c,b+d) \quad \text{(règle du parallélogramme).}$$

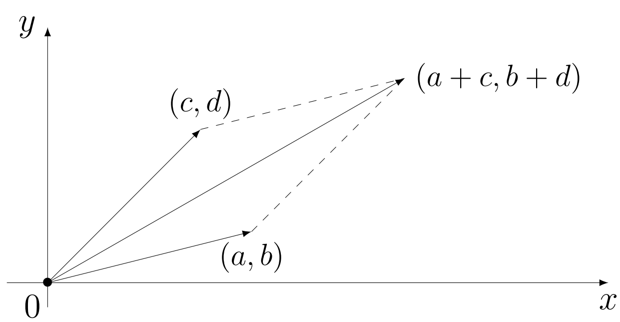
- La multiplication d'un vecteur $u=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ par un scalaine $k\in\mathbb{R}$, soit $ku=k(a,b)$ où $k\in\mathbb{R}$, est aussi le vecteur $ku=(ka,kb)$.



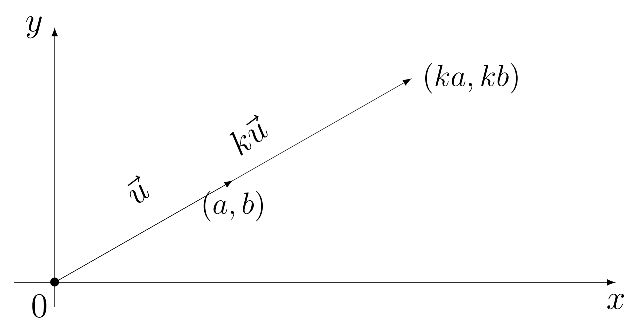
Plan $\mathbb{R}^2$



Vecteur $u=(a,b)\in\mathbb{R}^2$



Règle du parallélogramme



Multiplication vecteur et scalaire

- De façon général $\mathbb{R}^n$ défini comme suit

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R},1\le i\le n\},$$

où n est un entier positif, vérifie :

- Addition de deux vecteurs : Soit $u=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $v=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$. On a

$$u+v=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)\,.$$

- Multiplication d'un vecteur par un scalaire : Soit $u=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $k\in\mathbb{R}$ (un scalaire). Nous avons alors

$$ku=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)\,.$$

Propriété 1.1

Soit u, v, w des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et k, k' des scalaires de $\mathbb{R}$. Alors, on a les propriétés :

1. $u + v = v + u$
2. $k(u + v) = ku + kv$
3. $1u = u$
4. $(k + k')u = ku + k'u$
5. $u + 0 = u$
6. $k\,(k'u) = (kk')\,u$
7. $u + (-u) = 0$
8. $(u + v) + w = u + (v + w)$

où $O = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ fois}})$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$.

La définition d'un espace vectoriel repose sur les propriétés ci-dessus. L'opération de la multiplication d'un vecteur par un scalaire n'est pas limitée aux nombres réels. On peut aussi multiplier un vecteur par un nombre complexe. En fait, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des cas particuliers de corps.

1.2 Rappels

Définition 1.1

Soit K un ensemble non vide, muni de deux opérations notées $+$ et $\times$ telles que

$$\forall\, a, b \in K, a + b \in K \quad \text{et} \quad a \times b \in K.$$

On dit que K est un corps (commutatif) si les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $\forall\, a, b \in K,\ a + b = b + a$.
2. $\forall\, a, b, c \in K,\ (a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Il existe un élément de K, noté 0, tel que $\forall\, a \in K,\ a + 0 = a$.
4. Pour tout elément $a \in K$, il existe un unique élément $b \in K$ tel que
$$a + b = 0, \quad b \text{ est noté } -a.$$
5. $\forall\, a, b \in K,\ a \times b = b \times a$.
6. $\forall\, a, b, c \in K, \quad (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
7. Il existe un élément de K, noté 1, tel que $\forall\, a \in K,\ 1 \times a = a$.
8. $\forall\, a \in K, a \neq 0$, il existe un unique élément $b \in K$ tel que
$$a \times b = 1, \quad b \text{ est noté } a^{-1}.$$
9. $\forall\, a, b, c \in K, (a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

Note : Soit K un corps. On définit les opérations suivantes :

$$a - b = a + (-b) \text{ et } a/b = a \times b^{-1} \text{ pour } b \neq 0,$$

grâce aux propriétés des opérations $+$ et $\times$.

Exemple 1.1 :

- $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}$ sont des corps.
- Par contre, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas des corps.
- Dans toute la suite, on se restreint au corps des nombres reéls $\mathbb{R}$ ou au corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Quelques rappels sur les nombres complexes : Soit $z = a+ib, w = c+id$ deux nombres de $\mathbb{C}$. Alors,

- $z + w = (a + c) + i(b + d)$,
- $zw = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$,
- $z - w = (a - c) + i(b - d)$,
- pour $w \neq 0$, $\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}}$ où $\overline{w} = c - id$ et $w\overline{w} = c^2 + d^2$, $|w| = \sqrt{w\overline{w}} = \sqrt{c^2 + d^2}$.

2 Espaces vectoriels

2.1 Définition

Définition 2.1

Soit K un corps et V un ensemble non vide muni de deux operations :

- **Addition** : Deux éléments quelconques $u, v \in V$ est associé l'unique élément $u + v \in V$.
- **Multiplication par un scalaire** : Tout élément $u \in V$ et à tout scalaire $k \in K$, est associé l'unique élément $ku \in V$.

L'ensemble V est appelé **espace vectoriel** sur le corps K si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\forall u, v \in V, \quad u + v = v + u$.
2. $\forall u, v, w \in V$, $(u + v) + w = u + (v + w)$.
3. Il existe un élément de V, noté 0, tel que $\forall u \in V$, $u + 0 = u$.
4. Pour tout élément $u \in V$, il existe un unique élément de V, noté $-u$, tel que

$$u + (-u) = 0.$$

5 $\forall\, u, v \in V,\ \forall\, k \in K,\ k(u+v) = ku + kv.$

6 $\forall\, u \in V,\ \forall\, k, k' \in K,\ (k+k')\,u = ku + k'u.$

7 $\forall\, u \in V,\ \forall k, k' \in K,\ k\,(k'u) = (kk')\,u.$

8 $\forall\, u \in V,\ 1u = u$ où 1 est l'élément neutre de la multiplication dans K.

Note : Les éléments de V sont appelés **vecteurs**, tandis que les éléments de K sont appelés **scalaires**.

A partir de la définition d'un espace vectoriel, on peut déduire les propriétés suivantes :

- On définit la soustraction de deux vecteurs comme suit :

$$u - v = u + (-v)$$

- $\forall\, k \in K$, nous avons $k0 = 0$ où $0 \in V$ est le vecteur nul : En effet,

$$\begin{aligned} 0 + 0 = 0 &\Rightarrow k(0+0) = k0 \\ &\Rightarrow k0 + k0 = k0 \\ &\Rightarrow k0 + k0 + (-k0) = k0 + (-k0) \\ &\Rightarrow k0 = 0 \end{aligned}$$

- $\forall\, u \in V$, nous avons $0u = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} 0 + 0 = 0 &\Rightarrow (0+0)u = 0u \\ &\Rightarrow 0u + 0u = 0u \\ &\Rightarrow 0u + 0u + (-0u) = 0u + (-0u) \\ &\Rightarrow 0u = 0 \end{aligned}$$

- Lorsque $ku = 0$, alors c'est parce que $k = 0$ ou bien $u = 0$. En effet, si $k = 0$ alors c'est fini. Sinon, on a ainsi :

$$\begin{aligned} ku = 0 &\Rightarrow k^{-1}(ku) = k^{-1}0 \\ &\Rightarrow \left(k^{-1}k\right)u = 0 \\ &\Rightarrow 1u = 0 \\ &\Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

- $\forall\, k \in K, \forall\, u \in V$, alors $(-k)u = k(-u) = -ku$. En effet,

$$\begin{aligned} u + (-u) = 0 &\Rightarrow k(u + (-u)) = k0 \\ &\Rightarrow ku + k(-u) = 0 \\ &\Rightarrow k(-u) = -ku \\ k + (-k) = 0 &\Rightarrow (k + (-k))u = 0u \\ &\Rightarrow ku + (-k)u = 0 \\ &\Rightarrow (-k)u = -ku \end{aligned}$$

2.2 Exemples d'espaces vectoriels

- Soit K un corps et n un entier positif. On définit K^n comme suit

$$K^n = \{u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in K, i = 1, 2, \ldots, n\}\,.$$

Soit $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $v = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ deux éléments de K^n. L'addition de u et v est définie par

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)\,.$$

La multiplication de u par un scalaire $k \in K$ est définie par

$$ku = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$$

Note : K^n, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel sur K.

Le vecteur nul de l'espace vectoriel K^n est donné par

$$0 = (0, 0, \ldots, 0).$$

L'opposé d'un vecteur $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n$ est $-u = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

Note : En particulier, on a :

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^n \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{R} \\ &\mathbb{C}^n \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{C} \\ &\mathbb{C}^n \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

- **Espace des polynômes** :
Soit P l'ensemble des polynômes $p(t)$ de la variable t de la forme :

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_s t^s, s \in \mathbb{N},$$

où les coéfficients appartiennent à un corps K. Alors, l'ensemble P, muni des deux opérations usuelles

- addition de 2 polynômes : $p(t) + q(t)$,
- et multiplication d'un polynôme par un scalane : $kp(t)$,

est un espace vectoriel sur K.

Le polynôme nul O est le vecteur nul de P.

Note : L'espace des polynômes P est un espace vectoriel.

Espace des matrices :

Soit M l'ensemble des matrices $A = [a_{ij}]$ de format $m \times n$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ dont les eléments a_{ij} appartiemnent a un corps K. M est muni des deux opérations suivantes :

- addition de 2 matrices : $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$
- multiplication d'une matrice par un scalaire : $kA = k\,[a_{ij}] = [ka_{ij}]$.

M (muni de ces deux opérations) est un espace vectoriel sur K.

Note : L'espace des matrices M est un espace vectoriel.

Espace des fonctions :

Soit X un ensemble non vide et K un corps. On désigne par $F(X)$ l'ensemble de toutes les fonctions de X dans K, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow K \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

On munit $F(X)$ des deux opénations usuelles suivantes :

- addition de deux fonctions : la somme de deux fonctions f et g de $F(X)$ est la fonction $f + g$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall\, x \in X$.
- multiplication d'une fonction par un scalaire : soit $k \in K$, la multiplication d'une fonction f de $F(X)$ par k est la fonction kf définie par $(kf)(x) = kf(x), \forall\, x \in X$.

Note : L'espace des fonctions $F(X)$, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel sur K.

Le vecteur nul de $F(X)$ est la fonction O, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} O : X &\longrightarrow K \\ x &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

L'opposé de la fonction f est la fonction $-f$ définie par $(-f)(x) = -f(x), \forall\, x \in K$.

3 Sous-espaces vectoriels

3.1 Définition

Définition 3.1

Soit V un espace vectoriel sur un corps K et soit W un sous ensemble de V. On dit que W est un sous-espace vectoriel de V si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $0 \in W$.
2. $\forall u, v \in W, u + v \in W$.
3. $\forall u \in W, \forall k \in K,\ ku \in W$.

Note : Il est clair que W est un espace vectoriel sur K.

3.2 Exemples de sous-espaces vectoriels

Exemple 3.1 :

1. Pour tout espace vectoriel V, les sous-ensembles $\{0\}$ et V sont des sous-espaces vectoriels de V, appelés **sous-espaces banals ou triviaux**.
2. Soit

$$W = \left\{ u = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \right\}.$$

   W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. En effet,
   - $O = (0, 0, \ldots, 0) \in W$ car $\sum_{i=1}^{n} 0 = 0$.
   - $\forall u = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in W$ et $\forall v = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in W$, on a

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \in W,$$
$$\text{car } \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = 0 + 0 = 0.$$

   - $\forall k \in \mathbb{R}, \forall u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in W$, on a $ku = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n) \in W$ car

$$\sum_{i=1}^{n} ka_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i = k0 = 0$$

3. Soit

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 \right\}.$$

   W n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $0 \notin W$.

4 Soit M l'espace des matrices carrées d'ordre n. Soit N le sous-ensemble de M constitué des matrices symétriques. N est un sous-espace vectoriel de M. En effet,

- $O \in N$ où O est la matrice carrée nulle d'ordre n.
- $\forall A, B \in N$, on a $A + B \in N$, car $(A+B)^\top = A^\top + B^\top = A + B$.
- $\forall k \in K, \forall A \in N$, on a $kA \in N$, car $(kA)^\top = kA^\top = kA$.

5 Soit P l'espace vectoriel des polynômes $p(t)$ de la variable t et soit P_n le sous-ensemble de P constitué de polynôme de degré inférieur ou égale à n (degré $\leq n$). Alors, P_n est un sous-espace vectoriel de P.

Proposition 3.1

Soit V un espace vectoriel sur un corps K, et $\{W_i\}_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de V. Alors, l'intersection $W = \bigcap_{i\in I} W_i$ est un sous-espace vectoriel de V.

Démonstration :

- Sachant que $0 \in W_i, \forall i \in I$, alors $0 \in \bigcap_{i\in I} W_i$. D'où $0 \in W$.
- $\forall u, v \in W$, on a $u \in W_i$ et $v \in W_i, \forall i \in I$. Et donc
$$u + v \in W_i, \forall i \in I, \text{ ce qui implique que } u + v \in W = \bigcap_{i\in I} W_i.$$
- $\forall k \in K, \forall u \in W$, on a
$$\begin{aligned} u \in W_i, \forall i \in I &\Rightarrow ku \in W_i, \forall i \in I \\ &\Rightarrow ku \in W = \bigcap_{i\in I} W_i. \end{aligned}$$

□

4 Espaces vectoriels engendrés

4.1 Combinaisons linéaires

Définition 4.1

Soit V un espace vectoriel sur un corps K. Un vecteur $v \in V$ est dit **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$ s'il existe des scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_m \in K$ tels que
$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m.$$
On écrit aussi cette combinaison linéaire, en utilisant la notation $\sum$, comme suit :
$$v = \sum_{i=1}^{m} a_iu_i.$$

Exemple 4.1 :

1 Soit $v = (3, 7, -4), u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (2, 3, 7)$ et $u_3 = (3, 5, 6)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrons que v s'exprime comme combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3, c'est-à-dire qu'il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = xu_1 + yu_2 + zu_3, \text{ ce qui équivalent à}$$
$$(x + 2y + 3z, 2x + 3y + 5z, 3x + 7y + 6z) = (3, 7, -4).$$

Et donc

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 2x + 3y + 5z &= 7 \\ 3x + 7y + 6z &= -4 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Pour résoudre ce systeme d'équations linéaires, on peut utiliser la méthode de Gauss appliquée à la matrice angmentée du système :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & (-1) & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -13 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 3L_1 \to L_3 \end{array}$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \qquad L_3 + L_2 \to L_3$$

On obtient ainsi à partir de cette dernière matrice échelon, le système suivant (**équivalente au système initial** (1.1))

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ -y - z &= 1 \\ -4z &= -12 \end{aligned}$$

À partir de la troisième équation, on obtient la valeur de $z = 3$. On a celle de y à partir de la deuxième équation $y = -4$ et celle de x à partir de la première équation $x = 2$. Donc le vecteur v s'écrit comme suit : $v = 2u_1 - 4u_2 + 3u_3$.

2 Exprimer le polynôme p défini par $p(t) = 3t^2 + 5t - 5$ comme combinaison linéaire des polynômes p_1, p_2, p_3 qui sont définis par

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^2 + 2t + 1, \\ p_2(t) &= 2t^2 + 5t + 4 \\ p_3(t) &= t^2 + 3t + 6 \end{aligned}$$

On cherche donc $x, y, z \in \mathbb{R}$ tel quce $p = xp_1 + yp_2 + zp_3$. Cette équation est équivalente à

$$\begin{aligned} 3t^2 + 5t - 5 &= x\left(t^2 + 2t + 1\right) + y\left(2t^2 + 5t + 4\right) + z\left(t^2 + 3t + 6\right) \\ 3t^2 + 5t - 5 &= (x + 2y + z)t^2 + (2x + 5y + 3z)t + x + 4y + 6z \end{aligned}$$

On aboutit à l'égalité de deux polynômes, et donc leurs coefficients sont identiques :

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 2x + 5y + 3z &= 5 \\ x + 4y + 6z &= -5 \end{aligned} \tag{1.2}$$

On utilise la méthode de Gauss à la matrice augmentée du système (1.2) :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & (1) & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -8 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right] \qquad L_3 - 2L_2 \to L_3$$

Le systeme initial (1.2) est ainsi equivalent au suivant :

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ y + z &= -1 \\ 3z &= -6 \end{aligned}$$

où à partir de la dernière équation on a $z = -2$, à la deuxième équation on en tire $y = -z - 1 = 2 - 1 = 1$ et à la première équation on obtient $x = 3 - 2y - z = 3 - 2 + 2 = 3$. Donc le polynôme p s'écrit $p = 3p_1 + p_2 - 2p_3$.

4.2 Espaces vectoriels engendrés

Soit $S = \{u_1, u_2, \ldots u_m\}$ un sous-ensemble d'un espace vectoviel V sur K. On désigne par $\text{Vect}(S)$ l'ensemble suivant

$$\text{Vect}(S) = \left\{ v \in V \mid v = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i, \text{ où } a_i \in K, 1 \leqslant i \leqslant m \right\}.$$

Théorème 4.1

- $\mathrm{Vect}(S)$ est un **sous-espace vectoriel** de V contenant S.
- Si W est un sous-espace vectoriel de V tel que $S \subset W$, alors $\mathrm{Vect}(S) \subset W$.

Démonstration :

- Montrons que $\mathrm{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de V :

  - $$0 \in \mathrm{Vect}(S) \quad \text{car} \quad 0 = \sum_{i=1}^{m} 0u_i.$$
  - $$\forall\, u = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \in \mathrm{Vect}(S),\ \forall\, v = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \in \mathrm{Vect}(S), \quad \text{on a :}$$
    $$u + v = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{i=1}^{m} b_i u_i = \sum_{i=1}^{m} (a_i + b_i)\, u_i \in \mathrm{Vect}(S).$$
  - $$\forall\, k \in K, \forall\, u = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \in \mathrm{Vect}(S), \quad \text{on a :}$$
    $$ku = k \sum_{i=1}^{m} a_i u_i = \sum_{i=1}^{m} (ka_i)\, u_i \in \mathrm{Vect}(S).$$

  Donc $\mathrm{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de V et on a bien $S \subset \mathrm{Vect}(S)$.
- $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subset W$, alors $\forall\ a_i \in K$, $i = 1, \ldots, m$, on a $\sum_{i=1}^{m} a_i u_i \in W$ car W est un sous-espace vectoriel de V. Donc $\mathrm{Vect}(S) \subset W$. $\square$

Définition 4.2

- On dit que $\mathrm{Vect}(S)$ est l'espace vectoriel engendré par S, et S est un **ensemble générateur** de $\mathrm{Vect}(S)$.
- D'après le $2^{\text{ième}}$ point du théorème précédent, $\mathrm{Vect}(S)$ est le **plus petit sous-espace vectoriel** de V contenant S.
- Si $S = \phi$, on convient que $\mathrm{Vect}(\phi) = \{0\}$.

Exemple 4.2 :

1. Soit le sous-ensemble $S = \big\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\big\} \subset \mathbb{R}^3$. L'espace vectoriel engendré par S est
$$\mathrm{Vect}(S) = \left\{ u = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i, \quad \text{où} \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$
Sachant que $\sum_{i=1}^{3} a_i e_i = (a_1, a_2, a_3)$, alors $\mathrm{Vect}(S)$ peut aussi s'écrire comme suit
$$\mathrm{Vect}(S) = \{u = (a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{Vect}(S) = \mathbb{R}^3.$$

On en déduit que $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ est un ensemble générateur de $\mathbb{R}^3$.

2 Soit $S = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\} \subset P_n$, où P_n est l'espace des polynômes de degré $\leq n$. Alors, $\mathrm{Vect}(S) = P_n$. En effet, $\forall\, p \in P_n$ s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, \\ &= a_0 \times 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, \text{ où } a_i \in K,\ i = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

$p(t)$ s'écrit ainsi comme une combinaison d'éléments de S, donc $P_n \subset \mathrm{Vect}(S)$. D'autre part comme $S \subset P_n$, alors on a aussi $\mathrm{Vect}(S) \subset P_n$. Par suite, on a $\mathrm{Vect}(S) = P_n$. Ainsi $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ est un ensemble générateur de P_n.

3 Soit $M_{m\times n}$ l'espace vectoriel des matrices de format $m \times n$ à coéfficients dans un corps K. Soit le sous-ensembe S de $M_{m\times n}$ défini par

$$S = \Big\{ A_{ij} \in M_{m\times n} \mid \text{le coefficient à la } i \text{ ligne et la } j \text{ colonne est égal à } 1 \text{ et tous les autres coefficients sont nuls, } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \Big\}$$

Montrons que $\mathrm{Vect}(S) = M_{m\times n}$. Pour cela, $\forall\, A \in M_{m\times n}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m_2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} a_{ij} A_{ij}$$

Donc $M_{m\times n} \subset \mathrm{Vect}(S)$. D'autre part, comme $S \subset M_{m\times n}$, alors $\mathrm{Vect}(S) \subset M_{m\times n}$. Par conséquent, $\mathrm{Vect}(S) = M_{m\times n}$. On en déduit que : $S = \{A_{ij} \in M_{m\times n} \mid \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ est un ensemble genérateur de $M_{m\times n}$.

4.3 Espaces lignes d'une matrice

Définition 4.3

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice de format $m \times n$ dont les éléments a_{ij} appartiennent à un corps K. Les lignes $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})\,, i = 1, \ldots, m$, de la matrice peuvent être considérées comme des vecteurs de K^n. On appelle l'espace ligne de la matrice A, noté $\mathrm{Lig}(A)$, l'espace vectoriel engendré par ses lignes :

$$\mathrm{Lig}(A) = \mathrm{Vect}\,(A_1, A_2, \ldots, A_m)\,.$$

Note : À noter que $\mathrm{Lig}(A)$ est un sous-espace vectoriel de K^n.

Théorème 4.2

Si A et B sont deux **matrices équivalentes** en ligne $(A \sim B)$, alors $\mathrm{Lig}(A) = \mathrm{Lig}(B)$.

Démonstration :
Comme B est obtenue par application d'opérations élémentaires sur les lignes de A, alors les lignes de B sont des combinaisons linéaires des lignes de A. Donc $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\} \subset \mathrm{Lig}(A)$ et par conséquent $\mathrm{Lig}(B) \subset \mathrm{Lig}(A)$.
D'autre part, puisque $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, et donc $\mathrm{Lig}(A) \subset \mathrm{Lig}(B)$. D'où, $\mathrm{Lig}(A) = \mathrm{Lig}(B)$. □

Exemple 4.3 :

1. Soit $S = \{(1,2,0),(2,0,4),(0,3,6)\} \subset \mathbb{R}^3$. Déterminons $\mathrm{Vect}(S)$.

   Posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. Il nous faut alors $\mathrm{Vect}(S) = \mathrm{Vect}\left(A_1, A_2, A_3\right)$.

   Or $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, et donc $\mathrm{Vect}(S) = \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} = \mathbb{R}^3$.

2. Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$u_1 = (1,2,-1,3), \quad u_2 = (2,4,1,-2), u_3 = (3,6,3,-7),$$
$$w_1 = (1,2,-4,11), w_2 = (2,4,-5,14).$$

   Soit $U = \mathrm{Vect}\left(u_1, u_2, u_3\right)$ et $W = \mathrm{Vect}\left(w_1, w_2\right)$. Montrons que $U = W$.
   Pour cela, utilisons les espaces lignes de matrices. D'abors, on a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   et

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 2 & 4 & -5 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Alors,

$$U = \text{Vect}\{(1,2,0,1/3),(0,0,1,-8/3)\} \text{ et}$$
$$W = \text{Vect}\{(1,2,0,1/3),(0,0,1,-8/3)\}, \text{ d'où } U = W.$$

5 Bases et dimension d'un espace vectoriel

5.1 Dépendance et indépendance linéaires

Définition 5.1

- Soit V un espace vectoriel sur un corps K. On dit que les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de V sont **linéairement dépendants**, ou sont **liés**, s'il existe des scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de K **non tous nuls** tels que

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m = 0.$$

- Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sont **linéairement indépendants** (ou $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ est linéairement indépendants, ou **libre**).

Note :

- Un ensemble de vecteurs contenant le vecteur nul est linéairement dépendant.
- Donc $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ est linéairement indépendant si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{m} a_iu_i = 0 \Rightarrow a_i = 0, \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

Exemple 5.1 :

1. L'ensemble $S = \{e_1 = (1,0,\cdots,0), e_2 = (0,1,0,\cdots,0), \cdots e_n = (0,\cdots,0,1)\}$, où $e_i \in K^n, i = 1,\cdots,n$, est linéairement indépendant.
2. Soit $S = \{(1,0,0),(1,1,0),(2,-3,1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Montrons que S est linéairement indépendant. Pour cela, soit la combinaison linéaire nulle suivante

$$x(1,0,0) + y(1,1,0) + z(2,-3,1) = (0,0,0).$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ y - 3z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $x = y = z = 0$, et donc S est linéairement indépendant.

3 Soit $S = \{(1,0,1,1),(2,3,1,0),(5,6,3,1)\} \subset \mathbb{R}^4$. S est-il linéairement indépendant ? Pour répondre à la question, on considère la combinaison linéaire nulle

$$x(1,0,1,1) + y(2,3,1,0) + z(5,6,3,1) = (0,0,0,0).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} x + 2y + 5z &= 0 \\ 3y + 6z &= 0 \\ x + y + 3z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}$$

La matrice associée à ce système homogène est

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et donc, le système initial est équivalent à

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= -z \\ y &= -2z. \end{aligned}$$

Par exemple, en prenant $z = 1$, on obtient $x = -1$ ef $y = -2$, et on constate que

$$-(1,0,1,1) - 2(2,3,1,0) + (5,6,3,1) = (0,0,0,0).$$

Alors, S est linéairement dépendant (c'est-à-dire lié).

4 Soit V l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que les fonctions f et g, définies par $f(t) = \cos t$ et $g(t) = \sin t$, sont linéairement indépendantes. On a,

$$\begin{aligned} af + bg = 0 \quad &\Rightarrow \quad af(t) + bg(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad a\cos t + b\sin t = 0, \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Alors en prenant $t = 0$, on obtient $a = 0$. Et en prenant $t = \frac{\pi}{2}$, on obtient $b = 0$; ainsi les fonctions f et g sont linéairement indépendantes.

5 Les lignes non nulles de toute matrice échelon sont linéairement indépendantes.

5.2 Bases et dimension d'un espace vectoriel

Définition 5.2

Un sous-ensemble B d'un espace vectoriel V est appelé une base de V si

- $\text{Vect}(B) = V$, c'est-à-dire B engendre V et
- B est linéairement indépendant.

Exemple 5.2 :

1. Soit les n vecteurs de K^n

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots,\ e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1).$$

Tout vecteur $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n$, il s'écrit

$$u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n$$

et donc $\text{Vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_n) = K^n$.
D'autre part, les n vecteurs $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ sont linéairement indépendants. Par conséquent, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une base de K^n, appelée la base canonique.

2. Soit $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (2, -3, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$. On a déjà montré que B est linéairement indépendant. D'autre part $\text{Vect}(B) = \mathbb{R}^3$. En effet, la matrice dont les lignes sont les vecteurs de B est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(qui est une matrice inversible puisque son déterminant, égale à 1, est non nul).
Et donc

$$\text{Vect}(B) = \text{Vect}\,\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} = \mathbb{R}^3.$$

Alors, B est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. $B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ est une base de l'espace P_n des polynômes de degré $\leq n$.
En effet, $\forall\, p \in P_n$, $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$, et donc $\text{Vect}(B) = P_n$.
D'autre part,

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n = 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R}\ \Rightarrow\ a_i = 0,\ \forall\, i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\},$$

c'est-à-dire B est linéairement indépendant. Donc B est une base de P_n.

L'objectif maintenant est de montrer que deux bases quelconques d'un espace vectoriel ont le même nombre d'éléments.

Théorème 5.1

Soit $B = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base d'un espace vectoriel V $(V \neq \{0\})$. Soit $S = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ un sous ensemble de V. Si $m > n$ alors S est linéairement dépendant.

Démonstration :
Supposons que S est linéairement indépendant. Comme B est une base, et donc $\text{Vect}(B) = V$, alors on a

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \tag{1.3}$$

De plus comme $v_1 \neq 0$, alors au moins un des a_i est non nul. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_1 \neq 0$. Alors, à partir de l'égalité (1.3) on obtient

$$u_1 = \frac{1}{a_1} v_1 + \left(\frac{-a_2}{a_1}\right) u_2 + \cdots + \left(\frac{-a_n}{a_1}\right) u_n,$$

et on en conclut donc $u_1 \in \text{Vect}\,(v_1, u_2, \ldots, u_n)$. Mais sachant que $V = \text{Vect}\,(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, alors on en arrive à $V = \text{Vect}\,(v_1, u_2, \ldots, u_n)$.
Ainsi, on répète le même procédé avec cette fois-ci v_2

$$v_2 = b_1 v_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n, \text{ où au moins un des } c_i \neq 0.$$

Car si $c_i = 0, \forall\, i \in \{2, \ldots, n\}$, on aura $v_2 = b_1 v_1$ et donc (v_1, v_2) est lié. Ceci est en contradition avec l'hypothèse que S est libre. On peut supposer que c'est $c_2 \neq 0$. Alors,

$$u_2 = \left(-\frac{b_1}{c_2}\right) v_1 + \frac{1}{c_2} v_2 + \left(-\frac{c_3}{c_2}\right) u_3 + \cdots + \left(-\frac{c_n}{c_2}\right) u_n$$

c'est-à-dire $u_2 \in \text{Vect}\,(v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n)$. Mais $V = \text{Vect}\,(v_1, u_2, \ldots, u_n)$, alors on a $V = \text{Vect}\,(v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n)$.
En continuant cette procédure, on aboutit à

$$V = \text{Vect}\,(v_1, v_2, \ldots, v_n)\,.$$

Comme $m > n$, alos $v_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, c'est-à-dire $(v_1, v_2, \ldots, v_{n+1})$ est liée. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse que $S = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ est libre. Par conséquent S est linéairement dépendant (lié). $\square$

Théorème 5.2

Soit $V (V \neq \{0\})$ un espace vectoriel possédant une base composée de m éléments et une seconde base composée de n éléments. Alors $m = n$.

Démonstration :
Soit $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ et $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ deux bases de V.

- Si $m > n$, alors B est linéairement dépendant car B' est une base. Ceci contredit le fait que B est une base.
- Si $n > m$, alons B' est linéairement dépendant car B est une base. Ceci contredit le fait que B' est une base.

Par conséquent $m = n$. □

Note :

- On dit qu'un espace vectoriel V est de dimension finie n, et on écrit $\dim V = n$, si V possède une base à n éléments.
- D'après le théorème précédent, toute base de V a le même nombre d'éléments.
- Si $V = \{0\}$, alors par définition $\dim\{0\} = 0$, puisque $\{0\} = \mathrm{Vect}(\phi)$ ou bien $\{0\}$ ne possède pas de base.
- Un espace vectoriel ne possèdant pas de base à nombre fini d'éléments est dit de dimension infinie.

Exemple 5.3 :

1. Pour l'espace vectoriel K^n sur le corps K, on a vu que $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, où $e_i = (\underbrace{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{1 \text{ à la } i^{\text{ème}} \text{ composante}}), i = 1, \dots, n$, est une base de K^n. Alors, dim $K^n = n$.

2. Soit $M_{m \times n}$ l'espace vectoriel des matrices de format $m \times n$. Soit $E_{ij} \in M_{m \times n}$ la matrice dont l'élément à la i^{e} ligne et la j^{e} colonne vaut 1 et dont tous les autres sont nuls.
On a vu que $B = \{E_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$ engendre $M_{m \times n}$. De plus, B est libre. En effet,

$$\sum_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} a_{ij} E_{ij} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

ce qui veut dire que $a_{ij} = 0, \forall\, i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ et $\forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Donc B est une base de $M_{m\times n}$, appelée la base canonique. Alors, dim $M_{m\times n} = m \times n$.

3 Soit P_n l'**espace des polynômes de degré** $\leq n$. On a vu que $B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ est une base de P_n. Alors, dim $P_n = n + 1$.

4 Soit P **l'espace des polynômes (de degré quelcongue)**. P est un espace vectoriel de dimension infinie.
En effet, supposons que P possède une base B à nombre fini d'éléments. Soit m le degré maximum des éléments de B. Dans ce cas un polynôme de P de degré $m+1$ ne peut être une combinaison linéaire des eléments de B. Alors, B n'est pas un ensemble génénateur de P. D'où la contradiction.
Donc, P est de dimension infinie.

Définition 5.3

Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un ensemble d'éléments d'un espace vectoriel V et r un entier inférieur ou égale à n $(r \leq n)$. On dit que $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ est un sous-ensemble maximal d'éléments linéairement indépendants,

- si $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sont linéairement indépendants,
- et si, étant donné un v_i quelconque où $i > r$, les éléments $v_1, v_2, \ldots, v_r, v_i$ sont linéairement dépendants.

Théorème 5.3

Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un systeme générateur d'un espace vectoriel V $(V \neq \{0\})$. Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}, r \leqslant n$, un sous-emsemble maximal d'éléments linéairement indépendants. Alors $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ est une base de V.

Démonstration :
Comme $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ est linéairement indépendant, il suffit de montrer que c'est un ensemble générateur de V. Pour cela, montrons d'abord que chaque v_i, $i > r$, est une combinaison linéaire des éléments $v_1, v_2, \ldots, v_r$.
Comme $v_1, \ldots, v_r, v_i$ sont linéairement dépendants (car $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ est un sous-emsemble maximal et $i > r$), alors il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_r, b$ non tous nuls tels que

$$a_1v_1 + \cdots + a_rv_r + bv_i = 0.$$

De plus $b \neq 0$, sinon on aurait $a_1v_1 + \ldots + a_rv_r = 0$ avec au moins un $a_i \neq 0$. Ce qui est contradictoire avec le fait que $\{v_1, \ldots, v_r\}$ est linéairement indépendant. Donc,

$$v_i = \left(-\frac{a_i}{b}\right) v_1 + \cdots + \left(-\frac{a_r}{b}\right) v_r, \text{ c'est-à-dire } v_i \in \mathrm{Vect}(S), \forall\, i > r.$$

Maintenant, comme $V = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_n)$ et $v_i \in \mathrm{Vec}\,(v_1, \ldots, v_r)\,, \forall\, i > r$, alors $V = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_r)$. Par conséquent, $\{v_1, \ldots, v_r\}$ est une base de V. □

Théorème 5.4

Soit $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un systeme générateur d'un espace vectoriel V $(V \neq \{0\})$. Alors, V possède une base B contenue dans S.

Démonstration :

- Si S est linéairement indépendant alors S est une base de V.
- Sinon, il existe au moins un vecteur de S qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres. Sans perte de généralité, on peut supposer que $u_n \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_{n-1})$ et donc $V = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_{n-1})$. Si $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ est linéairement indépendant, alors $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ est une base de V.
- Sinon, on peut répeter cette procédure jusqu'à obtenir un sous-ensemble maximal de vecteurs linéairement indépendants, et donc (d'après le théorème précédent) une base de V. □

Théorème 5.5

Soit V un espace vectoriel de dimension n.

- Tout ensemble générateur de V à n éléments est une base de V.
- Tout système linéairement indépendant à n éléments est une base de V.

Démonstration :

- Soit $S = \{u_1, \cdots, u_n\}$ un systeme générateur de V. Il existe une base B de V telle que $B \subset S$. Puisque $\dim V = n$, B contient n éléments. Par conséquent $B = S$, et donc S est une base de V.
- Soit $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ un système libre. Supposons que S n'est pas un ensemble générateur de V. Alors $\exists\, w \in V$ tel que $w \notin \mathrm{Vect}(S)$, et donc $S' = \{u_1, \ldots, u_n, w\}$ est linéairement indépendant. En effet, si

  $$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i + bw = 0, \text{ alors } b = 0 \text{ car } w \notin \mathrm{Vect}(S)$$

  et par suite $a_i = 0, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, car S est libre.
  Mais comme $\dim V = n$, donc $\{u_1, \ldots, u_n, w\}$ est linéairement dépendant (car il

contient plus de n éléments).
D'où la contradiction et par conséquent $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est un ensemble générateur de V et par suite une base de V. $\square$

Corollaire 5.1

Soit V un espace vectoriel de dimension n. Soit r un entier positif, avec $r < n$, et soit $v_1, \ldots, v_r$ des vecteurs linéairement indépendants. On peut alors trouver des vecteurs $v_{r+1}, \ldots, v_n$ tels que $\{v_1, \ldots v_n\}$ soit une base de V.

Démonstration :
Puisque $\dim V = n$ et $r < n, \{v_1, \ldots v_r\}$ n'est pas un système générateur de V. Alors $\exists\, v_{r+1} \in V$ tel que $v_{r+1} \notin \text{Vect}\,(v_1, \ldots, v_r)$, et donc $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}\}$ est linéairement indépendant.
Si $r+1 < n$, alors $\exists\, v_{r+2} \in V$ tel que $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}\}$ est linéairement indépendant.
En répétant ce raisonnement, on obtient un systeme de n vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ linéairement indépendants, et donc forment une base de V. $\square$

Corollaire 5.2

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel W de V est de dimension finie, et $\dim W \leq \dim V$.

Démonstration :
Posons $\dim V = n$. Si $W = \{0\}$, alors $\dim W = 0 \leq n$. Si $W \neq \{0\}$, soit $\{w_1, \ldots, w_r\} \subset W$ un système libre. Alors, $\exists\, w_{r+1}, \ldots, w_m \in W$ tel que $\{w_1, \ldots, w_m\}$ soit une base de W. En particulier, $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset V$ est libre. Puisque $\dim V = n$, on a $m \leqslant n$. Donc $\dim W \leq \dim V$. $\square$

Note : Si W est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel V de dimension finie et si $\dim W = \dim V$, alors $W = V$.

En effet, toute base de W est une base de V.

Exemple 5.4 : Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 2, 1, -2), u_2 = (2, 4, 4, -3),\ u_3 = (3, 6, 7, -4)$.

1 Déterminons une base de W et $\dim W$. Considérons la matrice A dont les lignes

sont les vecteurs u_1, u_2, u_3. Alors,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & 7 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit $v_1 = (1,2,1,-2), v_2 = (0,0,2,1)$. On a, $W = \text{Vect}\,(u_1,u_2,u_3) = \text{Vect}\,(v_1,v_2)$ et $\{v_1,v_2\}$ est libre. Donc, $B = \{v_1,v_2\}$ est une base de W et $\dim W = 2$.

2 Complétons la base trouvée en 1 pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.
Soit la matrice échelon suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posons $v_3 = (0,1,0,0)$ et $v_4 = (0,0,0,1)$. Alors, $S = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ est libre et comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, alors S est une base de $\mathbb{R}^4$.

6 Somme et somme directe

6.1 Définition

Définition 6.1

Soit U et W deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V. On appelle somme de U et W, noté $U+W$, l'ensemble suivant :

$$U+W = \Big\{v \in V \mid v = u+w, u \in U, w \in W\Big\}$$

Note : Il est facile de vérifier que $U+W$ est un sous-espace vectoriel de V.

Théorème 6.1

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Soit U et W deux sous-espaces vectoriels de V. Alors,

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Démonstration :

Soit $B = \{u_1,\cdots,u_k\}$ une base de $U\cap W$. On peut compléter B en une base $C =$

$\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_s\}$ de U, et en une base $D = \{u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_t\}$ de W. Alors,

$$\begin{aligned} \forall\, u \in U, u &= \sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i \text{ et} \\ \forall\, v \in W, v &= \sum_{i=1}^{k} c_i u_i + \sum_{i=1}^{t} d_i w_i, \quad \text{et donc} \\ u + v &= \sum_{i=1}^{k} (a_i + c_i)\, u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i + \sum_{i=1}^{t} d_i w_i, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $S = \{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_t\}$ engendre $U + W$.
Montrons que S est linéairement indépendant. Soit la combinaison linéaire nulle suivante, des éléments de S :

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i + \sum_{i=1}^{t} c_i w_i = 0 \ \text{ et posons } \ w = \sum_{i=1}^{t} c_i w_i \in W.$$

Alors,

$$w = \sum_{i=1}^{k} (-a_i)\, u_i + \sum_{i=1}^{s} (-b_i)\, v_i \in U, \quad \text{et donc } \ w \in U \cap W.$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} w = \sum_{i=1}^{k} d_i u_i \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} d_i u_i + \sum_{i=1}^{t} (-c_i)\, w_i = 0 \\ &\Rightarrow \quad d_i = 0, \forall\, i \in \{1, \cdots, k\} \ \text{ et } \ c_i = 0, \forall\, i \in \{1, \cdots, t\} \end{aligned}$$

car D est une base de W. Alors,

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i = 0 \Rightarrow a_i = 0, \forall\ i \in \{1, \ldots, k\} \ \text{ et } \ b_i = 0, \forall\, i \in \{1, \cdots, s\},$$

car C est une base de U. Par conséquent S est libre, et donc S est une base de $U + W$. Alors, $\dim(U + W) = k + s + t = (k + s) + (k + t) - k$, d'où $\operatorname{din}(U + W) = \operatorname{din} U + \operatorname{din} W - \operatorname{din}(U \cap W)$. □

Définition 6.2

Soit V un espace vectoriel et Soit U et W deux sous-espaces vectoriels de V. On dit que V est la somme directe de U et W, noté $V = U \oplus W$, si pour tout $v \in V$, ils existent un unique $u \in U$ et un unique $w \in W$ tels que $v = u + w$.

Théorème 6.2

Soit V un espace vectoriel et Soit U et W deux sous-espaces vectoriels de V. Alors, $V = U \oplus W$ si et seulement si $V = U + W$ et $U \cap W = \{0\}$.

Démonstration :
Commençons par montrer que

$$V = U \oplus W \quad \Rightarrow \quad V = U + W \ \text{ et } \ U \cap W = \{0\}$$

Tout d'abord, d'après la définition de $V = U \oplus W$, on a $V = U + W$. il reste à montrer que $U \cap W = \{0\}$. Pour cela, soit $v \in U \cap W$ alors $v = v + 0 = 0 + v$ et d'après l'unicité on a $v = 0$, et donc $U \cap W = \{0\}$.
Montrons maintenant l'implication dans l'autre sens, c'est-à-dire

$$V = U + W \ \text{ et } \ U \cap W = \{0\} \quad \Rightarrow \quad V = U \oplus W.$$

Comme $V = U + W$, alors

$$\forall\, v \in V, \ \text{ alors } \ v = u + w \ \text{ avec } \ u \in U \ \text{ et } \ w \in W.$$

Il reste à montrer l'unicité de cette décomposition. Soit $v \in V$, et supposons qu'on a deux décompositions de v

$$v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2, \ \text{ avec } \ u_1, u_2 \in U \ \text{ et } \ w_1, w_2 \in W.$$

Alors $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$, et comme $u_1 - u_2 \in U$ et $w_2 - w_1 \in W$ alors $u_1 - u_2 \in \mathrm{U} \cap \mathrm{W} = \{0\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \ \text{ et} \\ w_2 - w_1 = 0 \Rightarrow w_1 = w_2, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Note : Sachant que $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \mathrm{din}(U \cap W)$, alors on a

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W.$$

Exemple 6.1 :

1. Soit les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3 \ \text{ et } \ W = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Il est clair que $\mathbb{R}^3 = U + W$ et $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$ et donc $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

2 Soit $M_{n\times n}$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Soit

$$\mathrm{S_{ym}} = \left\{A \in M_{n\times n} \mid A^\top = A\right\} \text{ et } \mathrm{A_{sym}} = \left\{A \in M_{n\times n} \mid A^\top = -A\right\}$$

Il est évident que $\mathrm{S_{ym}}$ et $\mathrm{A_{sym}}$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_{n\times n}$. Montrons que $M_{n\times n} = \mathrm{S_{ym}} \oplus \mathrm{A_{sym}}$. Pour cela, soit $A \in M_{n\times n}$, alors

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right).$$

Comme

$$\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) \in \mathrm{S_{ym}} \text{ et } \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) \in \mathrm{A_{sym}} \text{ alors } M_{n\times n} = \mathrm{S_{ym}} + \mathrm{A_{sym}}.$$

Il reste à montrer que $\mathrm{S_{ym}} \cap \mathrm{A_{sym}} = \{0\}$.
Soit $A \in \mathrm{S_{ym}} \cap \mathrm{A_{sym}}$, alors $A^\top = A$ et $A^\top = -A$, cela implique $2A^\top = 0$ et $A = 0$. Par conséquent $\mathrm{S_{ym}} \cap \mathrm{A_{sym}} = \{0\}$. D'où, $M_{m\times n} = \mathrm{S_{ym}} \oplus \mathrm{A_{sym}}$.

6.2 Composantes d'un vecteur

Théorème 6.3

Soit V un espace vectoriel de dimension n. Soit $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une base de V. Alors tout vecteur $v \in V$ s'écrit, de **façon unique**, comme combinaison linéaire des éléments de la base B :

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = \sum_{i=1}^{n} a_iv_i.$$

Démonstration :
En effet, considérons les deux écritures suivante du vecteur v

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_iv_i \text{ et } v = \sum_{i=1}^{n} b_iv_i.$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_iv_i - \sum_{i=1}^{n} b_iv_i = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)\, v_i = 0, \\ &\Rightarrow a_i - b_i = 0, \forall\, i, \text{ car } B \text{ est libre}, \\ &\Rightarrow a_i - b_i = 0, \forall\, i.\end{aligned}$$

$\square$

Note : Les scalaires $a_i, i = 1, \ldots, n$, sont appelés les composantes de v relativement à la base B. On utilise la notation suivante pour les désigner

$$_B[v] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \text{qui signifie que } \; v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

Exemple 6.2 :

1. Soit $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canonique de l'espace vectoriel K^n sur le corps K. Alors, tout vecteur $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n$ s'écrit

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \; \text{ et donc } \; _B[v] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

2. Soit $B = \{u_1 = (1, -1, 0), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (0, 1, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $_B[u]$.
Posons $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$. Alors,

$$(x, y, z) = (a_1 + a_2, -a_1 + a_2 + a_3, a_3)$$

ce qui est équivalent à résoudre. le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= x \\ -a_1 + a_2 + a_3 &= y \\ a_3 &= z \end{aligned}$$

La solution de ce dernier système est

$$a_1 = \frac{1}{2}(x - y + z), \quad a_2 = \frac{1}{2}(x + y - z), a_3 = z$$

et donc

$$_B[u] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x - y + z) \\ \frac{1}{2}(x + y - z) \\ z \end{pmatrix}$$

Note : . Si on désigne par B' la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors

$$_{B'}[u] = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3 Soit P_2 l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 en la variable t. Soit $B = \{p_1 = 1, p_2 = t-1, p_3 = (t-1)^2\}$ une base de P_2. Soit $p = 2t^2 - 5t + 9$. Determiner $_B[p]$. On a :

$$\begin{aligned} p = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 &\Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 9 = a_1 + a_2(t-1) + a_3(t-1)^2 \\ &\Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 9 = a_3t^2 + (a_2 - 2a_3)\,t + (a_1 - a_2 + a_3) \\ &\Leftrightarrow a_3 = 2, a_2 - 2a_3 = -5, a_1 - a_2 + a_3 = 9 \\ &\Leftrightarrow a_3 = 2,\ a_2 = -1,\ a_1 = 6 \\ &\text{et donc } _B[p] = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note :

- Soit $\mathbb{C}$ en tant qu'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$. Alors, sa dimension est 1.
- Soit $\mathbb{C}$ en tant qu'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. Alors, sa dimension est 2. En effet, $\forall\, z \in \mathbb{C}, z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et donc $\{1, i\}$ est une base.

Chapitre 2

Applications Linéaires

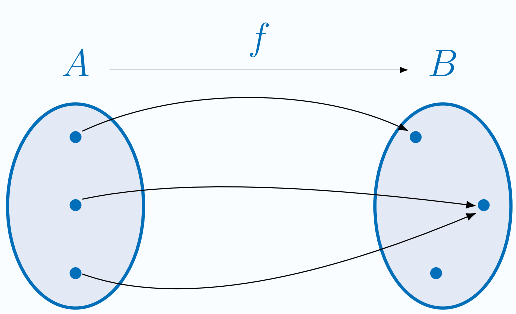
Sommaire

1 ▪ Définitions, exemples et propriétés . . . . . . Page 32
2 ▪ Noyau et image d'une application linéaire . . . . . . Page 37
3 ▪ Opérations sur les applications linéaires . . . . . . Page 43
4 ▪ Composés et inverses d'applications linéaires . . . . . . Page 44
4.1 - Composés d'applications linéaires 44
4.2 - Inverses d'applications linéaires 46

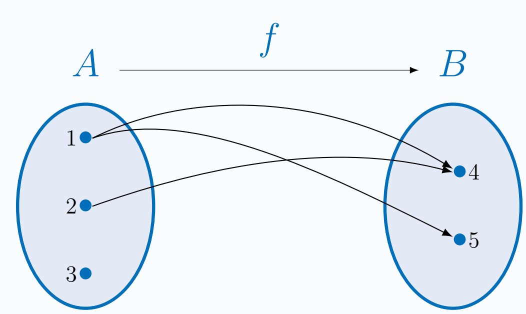
1 Définitions, exemples et propriétés

Définition 1.1

Soit A et B deux ensembles non vides. Une application f de A dans B est un procédé qui à chaque élément de A associe **un et un seul** élément de B.



Est une application de A dans B.



N'est pas une application de A dans B.

Note : L'application f est ainsi notée comme suit :

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

Définition 1.2

Soit V et W deux espaces vectoriels sur un même corps K. Une application $F : V \longrightarrow W$ est appelée **application linéaire** si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

- $\forall\, u, v \in V,\ F(u+v) = F(u) + F(v)$,
- $\forall\, k \in K,\ \forall\, u \in V,\ F(ku) = kF(u)$.

Note : Une application linéaire est aussi appelée **transformation linéaire** ou encore **homomorphisme**.

Exemple 1.1 :

- Soit l'application F définie comme suit :

$$\begin{aligned} F \ :\ \ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = (x, y) \end{aligned}$$

  F est une application linéaire. En effet,
  - $\forall\, u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\forall\, v = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, nous avons

$$\begin{aligned} F(u+v) &= F\left(a + a', b + b', c + c'\right) \\ &= \left(a + a', b + b'\right) \\ &= (a, b) + (a', b') = F(u) + F(v). \end{aligned}$$

  - $\forall\, k \in \mathbb{R}$ et $\forall\, u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, nous avons aussi

$$F(ku) = F(ka, kb, kc) = (ka, kb) = k(a, b) = kF(u).$$

- Soit V l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables. Soit l'application

$$\begin{aligned} D : \ V &\longrightarrow V \\ f &\longmapsto Df = f' \end{aligned}$$

  D est une application linéaire.

- **Application nulle** : Soit V et W deux espaces vectoriels sur un même corps K. Soit la fonction F définie par

$$\begin{aligned} F : \ V &\longrightarrow W \\ u &\longmapsto F(u) = 0 \end{aligned}$$

  F est une application linéaire.

- **Application identité** : Soit V un espace vectoriel et I la fonction définie par

$$\begin{aligned} I :\ V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto I(v) = v \end{aligned}$$

  I est une application linéaire.

- Soit A une matrice de format $m \times n$. Soit T_A la fonction définie comme suit

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}_c^n &\longrightarrow \mathbb{R}_c^m \\ X &\longrightarrow T_A(X) = AX \end{aligned}$$

  T_A est une application linéaire.

Propriété 1.1

Soit $F : V \to W$ une application linéaire. Alors,

1. $\forall\, u_1, \ldots, u_m \in V, \forall\, a_1, \ldots, a_m \in K,$

$$F\left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i F\left(u_i\right)$$

2. $F(0) = 0.$

Démonstration :

1. À faire en guise d'exercice !
2. En effet, $\forall\, k \in K, \forall\, u \in V,\ F(ku) = kF(u)$. En particulier, en prenant $k = 0$, on obtient $F(0u) = 0F(u)$ et donc $F(0) = 0$. □

Exemple 1.2 : Soit la fonction G définie par

$$\begin{aligned} G :\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto G(x, y) = (x + 1, y) \end{aligned}$$

G n'est pas une application linéaire car $G(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$.

Théorème 1.1

Soit V et W deux espaces vectoriels sur un même corps K. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de V et soit $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs quelconques de W. Alors il existe une application linéaire et une seule $F : V \longrightarrow W$ telle que $F\left(u_i\right) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Démonstration :

- Sachant que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de V, alors tout élément $u \in V$ s'écrit
$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i.$$
Définissons la fonction F comme suit :
$$\begin{aligned} F :\ V &\longrightarrow W \\ u &\longmapsto F(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \end{aligned} \tag{2.1}$$
Ainsi, par le choix de F suivant la formule (2.1), on a bien $F(u_i) = v_i, i = 1, \ldots, n$.

- D'une part, $F(u+u') = F(u) + F(u')$. En effet,
$$\forall\ u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in V, \quad \forall\ u' = \sum_{i=1}^{n} a'_i u_i \in V, \ \text{ alors on a } \ u + u' = \sum_{i=1}^{n} (a_i + a'_i)\, u_i.$$
Et donc,
$$\begin{aligned} F(u+u') &= F\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + a'_i)\, u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i + a'_i)\, F(u_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i + a'_i)\, v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = F(u) + F(u')\,. \end{aligned}$$

- D'autre part, $F(ku) = kF(u)$. En effet
$$\forall\ k \in K, \forall\ u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in V, \ \text{ alors } \ ku = \sum_{i=1}^{n} k a_i u_i.$$
Et donc,
$$\begin{aligned} F(ku) &= \sum_{i=1}^{n} k a_i v_i \\ &= k \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = kF(u). \end{aligned}$$
Nous venons d'établir, à partir des deux points précédents, que F est linéaire !

- Il reste à montrer l'unicité de F. Pour cela, soit $G : V \to W$ une autre application linéaire telle que $G(u_i) = v_i, i = 1, \ldots, n$. Alors,
$$\begin{aligned} \forall\ u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in V, \ \text{ on a } \ G(u) &= G\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i G(u_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} a_i v_i = F(u). \end{aligned}$$

Par suite, nous avons bien $G = F$. D'où l'unicité de l'application F. $\square$

Exemple 1.3 :

- Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonione de $\mathbb{R}^3$. Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que

$$T(e_1) = (1, 0),\ T(e_2) = (-1, 1) \text{ et } T(e_3) = (1, 0).$$

Alors, $\forall\, u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$T(u) = T(x_1, x_2, x_3) = T\left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{3} x_i T(e_i).$$

Et donc

$$T(x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0) + x_2(-1, 1) + x_3(1, 0), \text{ d'où}$$
$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_2).$$

- Soit $B = \{u_1 = (1, 1), u_2 = (1, -1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$. Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que

$$T(u_1) = (2, 1, -1) \text{ et } T(u_2) = (0, 1, 1)$$

Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Notons que les coordonnées (x, y) du vecteur u sont celles par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Cependant, pour calculer $T(u)$ il faudra d'abord déterminer les coordonnées de u dans la base B à travers laquelle l'application T est définie. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} u = a_1u_1 + a_2u_2 &\Leftrightarrow (x, y) = (a_1 + a_2, a_1 - a_2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = x \\ a_1 - a_2 = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a_1 = \frac{x+y}{2} \text{ et } a_2 = \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} T(u) &= T(a_1u_1 + a_2u_2) \\ &= a_1T(u_1) + a_2T(u_2) \\ &= a_1(2, 1, -1) + a_2(0, 1, 1) \\ &= (2a_1, a_1 + a_2, -a_1 + a_2) = (x + y, x, -y). \end{aligned}$$

2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 2.1

Soit $F : V \longrightarrow W$ une application linéaire.

1. On appelle **noyau** de l'application F, noté $Ker\ F$, l'ensemble suivant :

$$Ker\ F = \{v \in V \mid F(v) = 0\}.$$

2. On appelle **image** de l'application F, noté $Im\ F$, l'ensemble suvant :

$$Im\ F = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ tel que } F(v) = w\}.$$

Théorème 2.1

Soit $F : V \longrightarrow W$ une application linéaire. Alors,

1. $Ker\ F$ est un sous-espace vectoriel de V.
2. $Im\ F$ est un sous-espace vectoriel de W.

Démonstration :

- Montrons que $Ker\ F$ est un sous-espace vectoriel de V.
  - ✓ $0 \in Ker\ F$ car $F(0) = 0$.
  - ✓ $\forall\, u, v \in Ker\ F$, alors on $F(u) = 0$ et $F(v) = 0$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} F(u+v) &= F(u) + F(v) \\ &= 0 + 0 = 0 \ \text{ et donc } \ u + v \in Ker\ F. \end{aligned}$$

  - ✓ $\forall\, k \in K, \forall\, u \in Ker\ F$, alors on $F(u) = 0$. Et donc, nous avons

$$F(ku) = kF(u) = k0 = 0, \quad \text{et donc } \ ku \in Ker\ F.$$

  Et donc, $Ker\ F$ est un sous-espace vectoriel de V.

- Montrons que $Im\ F$ est un sous-espace vectoriel de W.
  - ✓ $0 \in Im\ F$ car $F(0) = 0$.
  - ✓ $\forall\, w_1, w_2 \in Im\ F$, ils existent $u_1, u_2 \in V$ tels que

$$F(u_1) = w_1 \text{ et } F(u_2) = w_2.$$

  Alors, $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2) = w_1 + w_2$ et donc $w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}\, F$.

✓ $\forall\, k \in K, \forall\, w \in Im\ F$, il existe $u \in V$ tel que $F(u) = w$. Alors,

$$F(ku) = kF(u) = kw$$

et donc $kw \in Im\ F$.
Par suite, $Im\ F$ est un sous-espace vectoriel de W. □

Proposition 2.1

Soit $F:\ V \rightarrow W$ une application linéaire. Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ un système générateur de V. Alors $\{F(v_1), F(v_2), \ldots, F(v_m)\}$ est un système générateur de $Im\ F$.

Démonstration :
Soit $w \in Im\ F$, alors $\exists\ v \in V$ tel que $w = F(v)$. Or, $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ est un système générateur de V. Alors,

$$v = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i, \ \text{ et donc } \ w = F\left(\sum_{i=1}^{m} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i F(v_i),$$

c'est-à-dire $\{F(v_1), F(v_2), \ldots, F(v_m)\}$ est un systeme génénateur de $Im\ F$. □

Exemple 2.1 : Soit $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$F(x, y, z, t) = (x - y + z + t,\ 2x - 2y + 3z + 4t,\ 3x - 3y + 4z + 5t).$$

- Déterminons une base de $Im\ F$ et $dim\, Im\, F$.
  Soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Comme $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est un système générateur de $\mathbb{R}^4$, alors $\{F(e_1), F(e_2), F(e_3), F(e_4)\}$ est un système générateur de $Im\ F$. On a,

$$\begin{aligned}
F(e_1) &= F(1,0,0,0) = (1,2,3)\\
F(e_2) &= F(0,1,0,0) = (-1,-2,-3)\\
F(e_3) &= F(0,0,1,0) = (1,3,4)\\
F(e_4) &= F(0,0,0,1) = (1,4,5)
\end{aligned}$$

  Soit la matrice suivante dont les lignes sont formées des vecteurs $F(e_1)$, $F(e_2)$, $F(e_3)$ et $F(e_4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Alors $\{(1,2,3), (0,1,1)\}$ est une base de $Im\ F$ et donc $dim\, Im\, F = 2$.

- Déterminons une base de $Ker\ F$ et $dim\, Ker\ F$. On a

$$
\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in Ker\ F &\Leftrightarrow F(x,y,z,t) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + 4t = 0 \\ 3x - 3y + 4z + 5t = 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

La matrice associée à ce système homogène est

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ qui est ligne équivalente à } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Alors le système homogène (2.2) est équivalent à

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - t = 0 \\ z + 2t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + t \\ z = -2t \end{cases}
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
Ker\ F &= \{(y+t, y, -2t, t) \mid y, t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(1,1,0,0) + t(1,0,-2,1) \mid y, t \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

et donc $Ker\ F = \mathrm{Vect}((1,1,0,0),(1,0,-2,1))$.
D'autre part, il est évident que $\{(1,1,0,0),(1,0,-2,1)\}$ est libre, et par conséquent c'est une base de $Ker\ F$ et $dim\ \ker F = 2$.

Théorème 2.2

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et soit $F : V \to W$ une application linéaire. Alors

$$\dim V = \dim\ Ker\, F + \dim\ Im\, F.$$

Démonstration :
Soit $dim\, V = n$ et soit $\{u_1, \ldots, u_k\}$ une base de $Ker\, F$ où $k \leq n$. On peut compléter la base $\{u_1, \ldots, u_k\}$ en une base $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ de V. Montrons que $\{F(u_{k+1}), \ldots, F(u_n)\}$ est une base de $Im\, F$.

- $\forall\, w \in Im\ F, \exists\, u \in V$ tel que $w = F(u)$. Or $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$, et donc

$$\begin{aligned} w = F\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} a_i F\left(u_i\right) \\ &= \sum_{i=k+1}^{n} a_i F\left(u_i\right) \quad \text{car} \quad F\left(u_i\right) = 0, \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}. \end{aligned}$$

  Alors $\{F\left(u_{k+1}\right), \ldots, F\left(u_n\right)\}$ est un système générateur de $Im\, F$.

- Il reste à montrer que $\{F\left(u_{k+1}\right), \ldots, F\left(u_n\right)\}$ est linéairement indépendant. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^{n} a_i F\left(u_i\right) = 0 \Rightarrow F\left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i\right) &= 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i \in Ker\ F \\ &\Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i = \sum_{i=1}^{k} b_i u_i \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \left(-b_i\right) u_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i = 0 \\ &\Rightarrow b_i = 0, i = 1, \ldots, k \text{ et } a_i = 0, i = k+1, \ldots, n, \end{aligned}$$

  car $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ est libre. Donc $\{F\left(u_{k+1}\right), \ldots, F\left(u_n\right)\}$ est libre. Par conséquent, $\{F\left(u_{k+1}\right), \ldots, F\left(u_n\right)\}$ est une base de $Im\ F$. On a donc

$$dim\, Im\, F = n - k = dim\, V - dim\, Ker\, F$$

  c'est-à-dire $dim\, V = dim\, Ker\, F + dim\, Im\, F$. $\square$

Définition 2.2

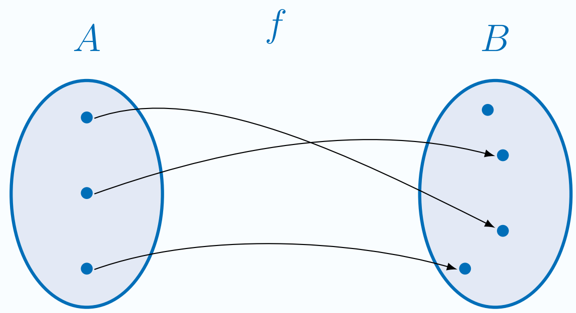
Soit $f : A \longrightarrow B$ une application.

1. f est dite **injective** si

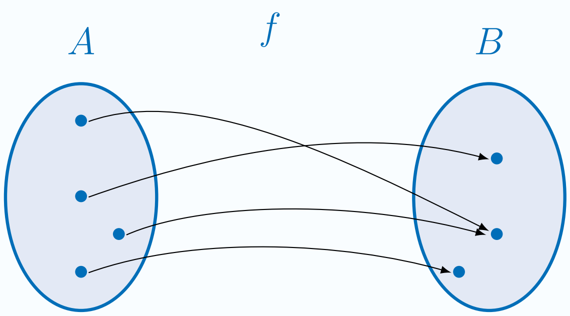
$$\forall\, a, b \in A; a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b).$$

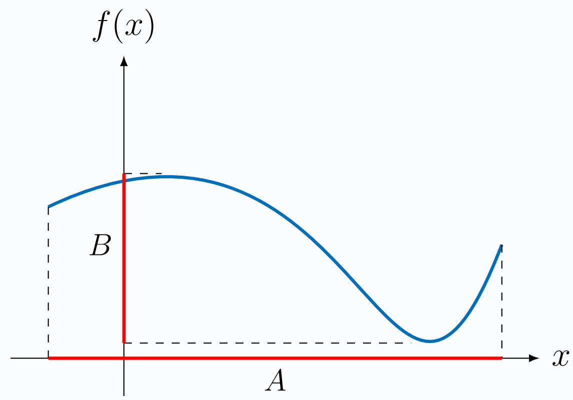
   Ce qui est équivalent à

$$\forall\, a, b \in A; \quad f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

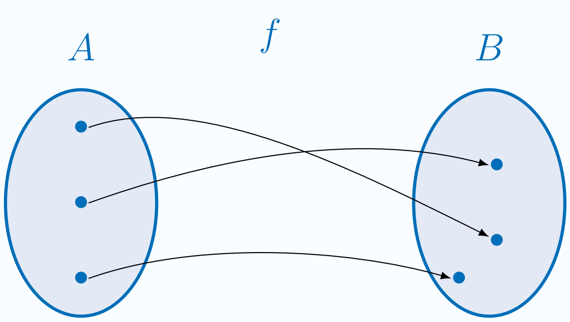


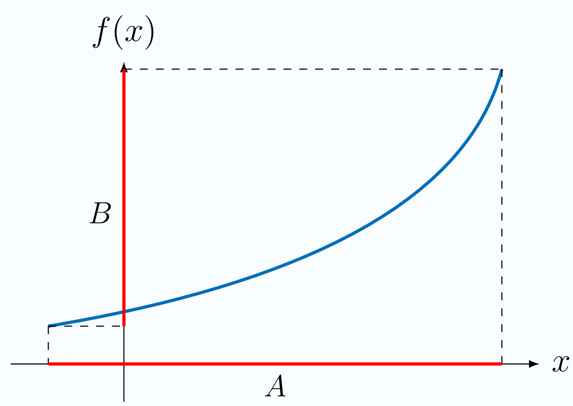
2 f est dite **surjective** si son ensemble image est B, c'est-à-dire $Im\ f = B$.





3 f est dite **bijective** si f est à la fois **injective** et **sujective**.





Proposition 2.2

Une application linéaire $F : V \to W$ est injective si et seulement si $Ker\ F = \{0\}$.

Démonstration :

- Supposons que F est injective et montrons que $Ker\ F = \{0\}$.

Soit $u \in Ker\ F$, alors $F(u) = 0$. Or $F(0) = 0$, donc $F(u) = F(0) \Rightarrow u = 0$ et donc $Ker\ F = \{0\}$.

- Supposons que $Ker\ F = \{0\}$ et montrons que F est injective.

$$\begin{aligned} \forall\, u, v \in V \quad \text{tel que} \quad & F(u) = F(v) \\ & \Rightarrow F(u) - F(v) = 0 \\ & \Rightarrow F(u - v) = 0 \\ & \Rightarrow u - v \in Ker\ F = \{0\} \\ & \Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Exemple 2.2 : **(Rotation d'angle θ)** Soit la fonction F suivante

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \end{aligned}$$

où θ est un angle fixe. F est une **application linéaire** (Vérifiez le !). De plus, F est bijective. En effet :

- Commençons par montrer qu'elle est injective, c'est-à-dire $Ker\ F = \{0\}$. Soit $(x, y) \in Ker\ F$, alors

$$F(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x\cos\theta - y\sin\theta = 0 \\ x\sin\theta + y\cos\theta = 0 \end{aligned} \Rightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est inversible car $\det A = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$. Donc la seule solution du système linéaire est $(0, 0)$, d'où $Ker\ F = \{0\}$ et donc F est injective.

- Pour montrer que F est surjective, utilisons le résultat qui dit que

$$dim\,\mathbb{R}^2 = dim\,Ker\,F + dim\,Im\,F.$$

Alors, $2 = 0 + dim\,Im\,F \Rightarrow dim\,Im\,F = 2$. Or, $Im\,F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, alors $Im\,F = \mathbb{R}^2$ car $dim\,Im\,F = dim\,\mathbb{R}^2$.

Définition 2.3

Une application linéaire $F : V \longrightarrow W$ est dite un **isomorphisme** si elle est bijective.

Théorème 2.3

Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $dim\,V = dim\,W$, et soit $F : V \to W$ une application linéaire. Alors, F est un isomorphisme si et seulement si $Ker\,F = \{0\}$.

Démonstration :

- Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \text{F isomorphisme} \quad &\Rightarrow F \ \text{ est injective} \\ &\Rightarrow \text{Ker}\, F = \{0\}. \end{aligned}$$

- Montrons maintenant l'implication dans l'autre sens :

$$\text{Ker}\, F = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \text{F isomorphisme}$$

  - Du fait que Ker $F = \{0\}$, alors F est injective (voir proposition précédente) !
  - D'autre part, comme $dim\,V = dim\,Ker\,F + dim\,Im\,F$ et $Ker\,F = \{0\}$, alors $dim\,Im\,F = dim\,V$ ($= dim\,W$ par hypothèse). Or $Im\,F$ est un sous-espace vectoriel de W, alors $Im\,F = W$ et donc F est surjective.

  Par conséquent, F est un isomorphisme. □

Exemple 2.3 :

- On a vu que l'application **rotation d'angle** θ est bijective, donc c'est un isomorphisme.
- Soit A une **matrice carrée d'ordre** n **inversible**. Alors, l'application linéaire

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n_c &\longrightarrow \mathbb{R}^n_c \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

  est un isomorphisme. En effet,

$$\begin{aligned} X \in Ker\,T_A &\Rightarrow AX = 0 \\ &\Rightarrow X = 0 \ \text{ car } A \text{ est inversible,} \end{aligned}$$

  et donc $Ker\,T_A = \{0\}$. Par conséquent, T_A est un isomorphisme.

3 Opérations sur les applications linéaires

- Soient $F : V \to W$ et $G : V \to W$ deux applications linéaires. On définit la somme $F + G : V \longrightarrow W$ par

$$(F + G)(v) = F(v) + G(v), \forall\, v \in V.$$

- Soit $k \in K$, où K est le corps sur lequel sont définis V et W. On définit le produit $kF : V \longrightarrow W$ par

$$(kF)(v) = kF(v), \forall\, v \in V.$$

Il est évident que les applications $F + G$ et kF sont linéaires.

Exemple 3.1 : Soit A et B deux matrices de format $m \times n$. Considérons les applications linéaires

$$\begin{aligned} T_A :\ \mathbb{R}^n_c &\longrightarrow \mathbb{R}^m_c \\ X &\longmapsto T_A(X) = AX \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} T_B :\ \mathbb{R}^n_c &\longrightarrow \mathbb{R}^m_c \\ X &\longmapsto T_B(X) = BX \end{aligned}$$

Alors, on a $T_A + T_B : \mathbb{R}^n_c \longrightarrow \mathbb{R}^m_c$ et $\forall\ X \in \mathbb{R}^n_c$, cette somme est définie comme suit

$$(T_A + T_B)(X) = T_A(X) + T_B(X) = AX + BX = (A + B)X$$

Donc, $(T_A + T_B)(X) = T_{A+B}(X), \forall\ X \in \mathbb{R}^n_c$, c'est-à-dire $T_A + T_B = T_{A+B}$. De même, on a $kT_A = T_{(kA)}$ où $k \in \mathbb{R}$.

4 Composés et inverses d'applications linéaires

4.1 Composés d'applications linéaires

Définition 4.1

Soient U, V et W trois espaces vectoriels sur un même corps K. Soient

$$F :\ U \longrightarrow V \quad \text{et} \quad G :\ V \longrightarrow W$$

deux applications linéaires. L'**application composée** $G \circ F$ est définie par

$$\begin{aligned} G \circ F :\ U &\longrightarrow W \\ u &\longmapsto (G \circ F)(u) = G(F(u)). \end{aligned}$$

Proposition 4.1

L'**application composée** $G \circ F$ est une application linéaire.

Démonstration :
En effet,

- $\forall\, u, u' \in U$,

$$\begin{aligned}(G \circ F)(u+u') &= G(F(u+u')) \\ &= G(F(u)+F(u')) \\ &= G(F(u)) + G(F(u')) = (G\circ F)(u) + (G \circ F)(u').\end{aligned}$$

- $\forall\, k \in K, \forall\, u \in U$,

$$\begin{aligned}(G \circ F)(ku) &= G(F(ku)) \\ &= G(kF(u)) \\ &= kG(F(u)) = k(G\circ F)(u).\end{aligned}$$

□

Exemple 4.1 : Soit A une matrice de format $m \times n$ et B une matrice de format $n \times p$. Soit les applications T_A et T_B définies comme suit

$$\begin{aligned} T_A :\ \mathbb{R}^n_c &\longrightarrow \mathbb{R}^m_c \\ X &\longmapsto AX \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} T_B :\ \mathbb{R}^p_c &\longrightarrow \mathbb{R}^n_c \\ X &\longmapsto BX. \end{aligned}$$

Alors, la composition $T_A \circ T_B : \mathbb{R}^p_c \longrightarrow \mathbb{R}^m_c$ est définie pour toute variable $X \in \mathbb{R}^p_c$ par

$$(T_A \circ T_B)(X) = T_A(T_B(X)) = T_A(BX) = A(BX) = (AB)X,$$

c'est-à-dire $(T_A \circ T_B)(X) = T_{AB}(X)$. Donc $T_A \circ T_B = T_{AB}$.

Note : En général $G \circ F \neq F \circ G$.

Propriété 4.1

Soit U, V et W des espaces vectoriels sur un même corps K, et soient les applications linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} F &: U \longrightarrow V, & F' &: U \longrightarrow V, \\ G &: V \longrightarrow W, & G' &: V \longrightarrow W. \end{aligned}$$

Alors,

1. $G \circ (F + F') = G \circ F + G \circ F'$.
2. $(G + G') \circ F = G \circ F + G' \circ F$.
3. $\forall\, k \in K,\ k(G \circ F) = (kG) \circ F = G \circ (kF)$.

Note :

- Une application linéaire $F : V \longrightarrow V$ est appelée un opérateur linéaire.
- Pour un opérateur linéaire, on a $F^2 = F \circ F : \ V \longrightarrow V$ et donc $F^3 = F \circ F \circ F = F^2 \circ F$.
- De façon générale,

$$F^n = \underbrace{F \circ F \circ \ldots \circ F}_{n \text{ fois}} : \ V \longrightarrow V$$

est un opérateur linéaire. Par convention,

$$\begin{aligned} F^\circ = I : \ & V \to V \\ & v \longmapsto v. \end{aligned}$$

Exemple 4.2 : Soit A une matrice carré d'ordre n. Alors,

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n_c & \longrightarrow \mathbb{R}^n_c \\ X & \longrightarrow AX \end{aligned}$$

est un opérateur linéaire. Soit m un entier positif. Alors,

$$T_A^m = \underbrace{T_A \circ T_A \cdots \circ T_A}_{m \text{ fois}} : \ \mathbb{R}^n_c \longrightarrow \mathbb{R}^n_c \text{ et on a } T_A^m = T_{A^m}.$$

4.2 Inverses d'applications linéaires

Définition 4.2

Soit F : $V \longrightarrow W$ une application linéaire. On dit que F possède un **inverse** (ou F est **inversible**) s'il existe une application

$$G : \ W \longrightarrow V$$

telle que $G \circ F = I_V$ et $F \circ G = I_W$.

- Si G existe alors elle est unique.

En effet ; supposons qu'il existe $G' : \ W \longrightarrow V$ telle que $G' \circ F = I_V$ et $F \circ G' = I_W$.

Alors,

$$\begin{aligned}(G' \circ F) \circ G = I_V \circ G &\Rightarrow G' \circ (F \circ G) = G \\ &\Rightarrow G' \circ I_W = G \\ &\Rightarrow G' = G, \quad \text{d'où l'unicité de } G.\end{aligned}$$

- On note F^{-1} l'inverse de l'application linéaire F (si F^{-1} existe).

Proposition 4.2

L'inverse F^{-1} d'une application linéaire F est une application linéaire.

Démonstration :

Soit $F: V \to W$ et $F^{-1}: W \to V$, alors $F^{-1} \circ F = I_V$ et $F \circ F^{-1} = I_W$.

- D'une part, $\forall\, w, w' \in W$ et $\forall\, k \in K$, on a

$$F^{-1}(w) = v \in V \text{ et } F^{-1}\left(w'\right) = v' \in V, \text{ donc } v + v' = F^{-1}(w) + F^{-1}\left(w'\right).$$

Alors,

$$\begin{aligned}F\left(v + v'\right) &= F(v) + F\left(v'\right) \\ &= F\left(F^{-1}(w)\right) + F\left(F^{-1}\left(w'\right)\right) = w + w'\end{aligned}$$

et donc

$$F^{-1}\left(F\left(v + v'\right)\right) = F^{-1}\left(w + w'\right)$$

c'est-à-dire

$$F^{-1}\left(w + w'\right) = v + v' = F^{-1}(w) + F^{-1}\left(w'\right).$$

- D'autre part, $F(kv) = kF(v) = kF\left(F^{-1}(w)\right) = kw$ et donc

$$F^{-1}(F(kv)) = F^{-1}(kw) \text{ d'où } F^{-1}(kw) = kv = kF^{-1}(w).$$

Par conséquent, F^{-1} est une application linéaire. □

Théorème 4.1

Soit $F: V \longrightarrow W$ une application linéaire. Alors, F est inversible si et seulement si F est un isomorphisme.

Démonstration :

- Supposons que F est inversible, et montrons que F est un isomorphisme.

- Soit $v \in Ker\, F \Rightarrow F(v) = 0 \Rightarrow F^{-1}(F(v)) = F^{-1}(0) \Rightarrow v = 0$, donc $\text{Ker}\, F = \{0\}$, d'où F est injective.
- $\forall\, w \in W$, on a $F^{-1}(w) = v \in V$, donc $F\left(F^{-1}(w)\right) = F(v)$, c'est-à-dire $w = F(v)$, d'où F est surjective. Par suite, F est un isomorphisme.

■ Supposons maintenant que F est un isomorphisme, et montrons que F est inversible. $\forall\, w \in W$, alors il existe un unique $v \in V$ tel que $w = F(v)$. Alors, soit

$$\begin{aligned} G:\ W &\longrightarrow V \\ w &\longrightarrow G(w) = v \end{aligned}$$

- $\forall\, v \in V, (G \circ F)(v) = G(F(v)) = G(w) = v$, donc $G \circ F = I_V$.
- $\forall\, w \in W, (F \circ G)\,(w) = F(G(w)) = F(v) = w$, donc $F \circ G = I_W$

Alors, F est inversible et $F^{-1} = G$. □

Corollaire 4.1

Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $dim\, V = dim\, W$. Soit $F:\ V \longrightarrow W$ une application linéaire. Alors, F est inversible si et seulement si $Ker\, F = \{0\}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} F \text{ est inversible } &\iff F \text{ est un isomophisme} \\ &\iff Ker\ F = \{0\} \end{aligned}$$ □

Exemple 4.3 :

1. Soit F : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'opérateur linéaire défini par $F(x, y) = (3x - 2y, 2x - y)$. F est un isomorphisme. En effet,

$$(x, y) \in \text{Ker} \iff \begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array} \Longrightarrow y = 2x$$

et donc $3x - 2y = 0 \Rightarrow 3x - 4x = 0 \Rightarrow -x = 0$, d'où $x = y = 0$. Alors, $Ker\ F = \{0\}$. Donc F est inversible.
Déterminons F^{-1}.

$$\begin{aligned} F^{-1}(x, y) = (s, t) &\iff (x, y) = F(s, t) \\ &\iff \begin{array}{l} 3s - 2t = x \\ 2s - t = y \end{array} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{array}{l} 3s - 2t = x \\ 4s - 2t = 2y \end{array} \quad \Rightarrow \quad s = 2y - x$$

et $t = 2s - y = 2(2y - x) - y = -2x + 3y$. Donc,

$$F^{-1}(x, y) = (-x + 2y, -2x + 3y).$$

2 Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ, définie par

$$F(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

On a déja montré que F est un isomorphisme. Détermimons F^{-1} :

$$\begin{aligned} F^{-1}(x, y) = (s, t) &\iff (x, y) = F(s, t) \\ &\iff s\cos\theta - t\sin\theta = x \qquad (2.3) \\ & s\sin\theta + t\cos\theta = y \qquad (2.4) \end{aligned}$$

En multipliant l'équation (2.3) par $\cos\theta$ ajoutée à l'équation (2.4) multipliée par $\sin\theta$ et en sommant membre à membre, nous obtenons $s = x\cos\theta + y\sin\theta$.
En multipliant l'équation (2.3) par $(-\sin\theta)$ ajoutée à l'équation (2.4) multipliée par $\cos\theta$ et en sommant membre à membre, nous obtenons $t = -x\sin\theta + y\cos\theta$.
Par suite, l'application réciproque F^{-1} s'écrit

$$\begin{aligned} F^{-1}(x, y) &= (x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta) \\ &= (x\cos(-\theta) - y\sin(-\theta), x\sin(-\theta) + y\cos(-\theta)), \end{aligned}$$

qui n'est autre que la rotation d'angle $(-\theta)$.

3 Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible. Alors, l'opération linéaire

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n_c &\longrightarrow \mathbb{R}^n_c \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Déterminons ${T_A}^{-1}$:

$$\begin{aligned} T_A^{-1}(X) = Y &\Leftrightarrow X = T_A(Y) \\ &\Leftrightarrow AY = X \\ &\Leftrightarrow Y = A^{-1}X \end{aligned}$$

et donc ${T_A}^{-1}(X) = A^{-1}X$, c'est-à-dire $\boxed{{T_A}^{-1} = T_{A^{-1}}}$.

Chapitre 3

Applications Linéaires et Matrices

Sommaire

1 ▪ Représentation matricielle d'une application linéaire . . . . PAGE 50
2 ▪ Propriétés des représentations matricielles . . . . PAGE 54
3 ▪ Changements de Bases . . . . PAGE 57

1 Représentation matricielle d'une application linéaire

Dans ce chapitre tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

Définition 1.1

Soient V et W deux espaces vectoriels sur un même corps K, avec $\dim V = n$ et $\dim W = m$. Soient $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une base de V et $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ une base de W. Soit $F : V \longrightarrow W$ une application linéaire.

- Alors, on a

$$\begin{aligned} F(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ F(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ F(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

- La matrice suivante

$${}_C[F]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

est appelée représentation matricielle de F par rapport aux bases B et C.

En fait, on a

$$_C[F]_B = \Big({}_C[F(v_1)] \cdots {}_C[F(v_j)] \cdots {}_C[F(v_n)] \Big).$$

$_C[F]_B$ est une matrice de format $m \times n$ où $m = \dim W$ et $n = \dim V$.

Exemple 1.1 : Soit l'application linéaire $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definie par

$$F(x,y) = (x+3y, 2x-y, y).$$

1. Déterminons $_C[F]_B$ où B est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et C est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $B = \{e_1, e_2\}$. Alors,

$$F(e_1) = F(1,0) = (1,2,0) \quad \Longrightarrow \quad {}_C[F(e_1)] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F(e_2) = F(0,1) = (3,-1,1) \quad \Longrightarrow \quad {}_C[F(e_2)] = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$_C[F]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $\forall\, v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ 2x-y \\ y \end{pmatrix} = {}_C[F(v)],$$

et donc $_C[F]_{B\,B}[v] = {}_C[F(v)]$.

2. Soit $B' = \{(1,1), (-1,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminons $_C[F]_{B'}$ où C est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a,

$$F(1,1) = (4,1,1) \quad \Longrightarrow \quad {}_C[F(1,1)] = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(-1,1) = (2,-3,1) \quad \Longrightarrow \quad {}_C[F(-1,1)] = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$_C[F]_{B'} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, si $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors ${}_C[F(v)] = {}_C[F]_{B'B'}[v]$. En effet, $v = a_1(1,1) + a_2(-1,1)$, et donc

$$\begin{gathered}(a_1 - a_2, a_1 + a_2) = (x, y), \quad \text{d'où} \\ a_1 = \frac{x+y}{2} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{y-x}{2}.\end{gathered}$$

Alors,

$$\begin{aligned}{}_C[F]_{B'B'}[v] &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_1 + 2a_2 \\ a_1 - 3a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x + 3y \\ 2x - y \\ y \end{pmatrix} = {}_C[F(v)].\end{aligned}$$

Proposition 1.1

Soit $F : V \longrightarrow W$ une application linéaire. Soient B une base de V et C une base de W. Alors, $\forall\, v \in V$, ${}_C[F(v)] = {}_C[F]_{BB}[v]$.

Démonstration :

Posons $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ et

$${}_C[F]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

où

$${}_C\left[F\left(v_j\right)\right] = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \; j = 1, \ldots, n,$$

c'est-à-dire $F\left(v_j\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$. Soit $v \in V$, alors

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \quad \text{et} \quad {}_B[v] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} F(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j F(v_j) &= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) w_i \end{aligned}$$

et donc

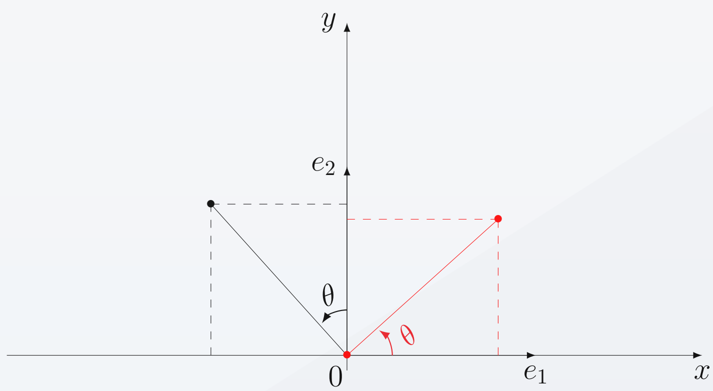
$$_C[F(v)] = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad \square$$

c'est-à-dire

$$_C[F(v)] = {}_C[F]_{B\,B}[v].$$

Exemple 1.2 : Rotation d'angle θ

Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tel que $F(e_1) = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $F(e_2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$.



$B = \{e_1, e_2\}$ est la base canoniaque de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$_B\left[F\left(e_1\right)\right] = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad {}_B\left[F\left(e_2\right)\right] = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

et donc

$$_B[F]_B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Maintenant, soit $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a ${}_B[v] = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} {}_B[F(v)] = {}_B[F]_{BB}[v] &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où $F(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$.

Exemple 1.3 : Soit V un espace vectoriel de dimension n et soit B une base de V. Alors,

$$\boxed{{}_B[I_V]_B = I_n}$$

En effet, soit $B = \{v_1, \dots v_n\}$. Alors,

$$I_V(v_j) = v_j, \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \text{et donc}$$

$${}_B[I_V(v_j)] = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j^{\text{ième}} = \text{composante}$$

Par conséquent,

$${}_B[I_V]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

2 Propriétés des représentations matricielles

Propriété 2.1

Soient V et W deux espaces vectoriels avec $\dim V = n$ et $\dim W = m$. Soient B une base de V et C une base de W. Soient $F : V \longrightarrow W$ et $G : V \longrightarrow W$ deux applications linéaires. Alors,

- ${}_C[F+G]_B = {}_C[F]_B + {}_C[G]_B$.
- $\forall\, k \in K,\ {}_C[kF]_B = k\,{}_C[F]_B$.

Démonstration :

- En effet, $\forall\, v \in V$, on a

$$\begin{aligned}{}_C[F+G]_{BB}[v] = {}_C[(F+G)(v)] &= {}_C[F(v)+G(v)]\\ &= {}_C[F(v)] + {}_C[G(v)]\\ &= {}_C[F]_{BB}[v] +_C [G]_{BB}[v]\\ &= \big({}_C[F]_B + {}_C[G]_B\big)_B[v]\end{aligned}$$

donc, $\forall\, v \in V$, nous avons

$$ {}_C[F+G]_{BB}[v] = \left({}_C[F]_B +_C [G]_B\right)_B[v].$$

D'où

$$ {}_C[F+G]_B = {}_C[F]_B + {}_C[G]_B.$$

- De même pour montrer le second point, $\forall\, v \in V$, on a

$$ {}_C[(kF)(v)] = {}_C[kF(v)] = k_C[F(v)] = k_C[F]_{BB}[v]$$

donc, $\forall\, v \in V$, on arrive à

$$ {}_C[kF]_{BB}[v] = k_C[F]_{BB}[v] \ \text{ d'où } \ {}_C[kF]_B = k_C[F]_B.$$

Théorème 2.1

Soient $F : U \to V$ et $G : V \to W$ deux applications linéaires. Soient A une base de U, B une base de V et C une base de W. Alors,

$$ {}_C[G\circ F]_A = {}_C[G]_{BB}[F]_A.$$

Démonstration :

$\forall\, u \in U$, on a

$$\begin{aligned}{}_C[G\circ F]_{AA}[u] = {}_C[(G\circ F)(u)] &= {}_C[G(F(u))]\\ &= {}_C[G]_{BB}[F(u)]\\ &= {}_C[G]_{BB}[F]_{AA}[u]\end{aligned}$$

Donc, $\forall\, u \in U$, on a

$$ {}_C[G\circ F]_{AA}[u] = {}_C[G]_{BB}[F]_{AA}[U], \ \text{ d'où } \ {}_C[G\circ F]_A = {}_C[G]_{BB}[F]_A$$

Corollaire 2.1

Soient V et W deux espaces vectoriels de **même dimension**. Soient $F : V \longrightarrow W$ une application linéaire et $A = {}_C[F]_B$, où B est une base de V et C une base de W. Alors, F est un isomorphisme si et seulement si A est inversible. Et dans ce cas, on a

$$ {}_B[F^{-1}]_C = A^{-1} = ({}_C[F]_B)^{-1}. $$

Démonstration :

- Supposons que F est un isomorphisme et montrons que A est inversible :
On a $F^{-1} : W \to V$ telle que $F^{-1} \circ F = I_V$ et $F \circ F^{-1} = I_W$. Rappelons que $\dim V = \dim W = n$. Alors,

$$ \begin{aligned} {}_B\left[F^{-1} \circ F\right]_B = {}_B\left[I_V\right]_B \quad & \Longrightarrow \quad {}_B[F^{-1}]_C\,{}_C[F]_B = I_n \quad \text{(théorème précédent)} \\ & \Longrightarrow \quad {}_B[F^{-1}]_C A = I_n. \end{aligned} $$

De même, on a

$$ \begin{aligned} {}_C[F \circ F^{-1}]_C = {}_C\left[I_W\right]_C \quad & \Longrightarrow \quad {}_C[F]_B\,{}_B[F^{-1}]_C = I_n \quad \text{(théorème précédent)} \\ & \Longrightarrow \quad A\,{}_B\left[F^{-1}\right]_C = I_n \end{aligned} $$

donc $A^{-1} = {}_B\left[F^{-1}\right]_C$.

- Supposons maintenant que A est inversible, et montrons F est un isomorphisme.
Soit $G : W \to V$ telle que ${}_B[G]_C = A^{-1}$. Alors, d'après le théorème précédent

$$ {}_B[G \circ F]_B = {}_B[G]_C\,{}_C[F]_B = A^{-1}A = I_n = {}_B\left[I_V\right]_B $$

et donc $G \circ F = I_V$.
De même, on a

$$ {}_C[F \circ G]_C = {}_C[F]_B\,{}_B[G]_C = AA^{-1} = I_n = {}_C\left[I_W\right]_C $$

et donc $F \circ G = I_W$. D'où F est inversible et son inverse est $F^{-1} = G$. □

Exemple 2.1 : Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ. On a vu que F est un isomorphisme et

$$ {}_B[F]_B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} $$

où B est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{aligned} {}_B\left[F^{-1}\right]_B &= \left({}_B[F]_B\right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce n'est autre que la rotation d'angle $-\theta$.

3 Changements de Bases

Définition 3.1

Soient V un espace vectoriel de dimension n, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ et $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ deux bases de V. On a,

$${}_{B'}[v] = {}_{B'}[I_V(v)] = {}_{B'}[I_V]_{B\,B}[v].$$

La matrice $P = {}_{B'}\left[I_V\right]_B$ est appeleé matrice de passage de la base B à la base B', et on a ${}_{B'}[v] = P_B[v]$ où

$$P = \left({}_{B'}\left[v_1\right] \cdots {}_{B'}\left[v_j\right] \cdots {}_{B'}\left[v_n\right]\right).$$

Exemple 3.1 : Soient $B = \{(1,0), (1,1)\}$ et $B' = \{(3,1), (2,1)\}$ des bases de $\mathbb{R}^2$. Déterminons $P = {}_{B'}[I]_B$. On a,

$$(1,0) = a_1(3,1) + a_2(2,1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a_1 + 2a_2 &= 1 \\ a_1 + a_2 &= 0 \end{cases}$$

donc $a_2 = -a_1, a_1 = 1$ d'où

$${}_{B'}[(1,0)] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(1,1) = a_1(3,1) + a_2(2,1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a_1 + 2a_2 &= 1 \\ a_1 + a_2 &= 1 \end{cases}$$

donc $a_1 = -1$ et $a_2 = 2$, d'où

$${}_{B'}[(1,1)] = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad P = {}_{B'}[I]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

D'autre part, $\forall\, v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(x,y) = (x-y)(1,0) + y(1,1) \quad \text{et donc} \quad {}_B[v] = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} {}_{B'}[v] &= {}_{B'}[I]_{B\,B}[v] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}, \text{ c'est-à-dire } {}_{B'}[v] = \begin{pmatrix} x-2y \\ -x+3y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposition 3.1

Soient B et B' deux bases d'un espace vectoriel V de dimension finie. Soit $P = {}_{B'}[I_V]_B$ la matrice de passage de la base B à la base B'. Alors P est inversible et

$$P^{-1} = {}_B[I_V]_{B'}$$

est la matrice de passage de la base B' à la base B.

Démonstration :
Comme I_V est un isomorplisme, alors P est inversible et on a

$$I = {}_{B'}[I_V]_{B'} = {}_{B'}[I_V \circ I_V]_{B'} = {}_{B'}[I_V]_{B\,B}[I_V]_{B'}$$

d'où $P_B[I_V]_{B'} = I$. De même,

$$I = {}_B[I_V]_B = {}_B[I_V \circ I_V]_B = {}_B[I_V]_{B'\,B'}[I_V]_B$$

c'est-à-dire ${}_B[I_V]_{B'}P = I$.
Alors, $P^{-1} = {}_B[I_V]_{B'}$. □

Exemple 3.2 :

1. Reprenons l'exemple précédent, où $B = \{(1,0),(1,1)\}$ et $B' = \{(3,1),(2,1)\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$. On a déjà calculé la matrice de passage de B a B' et on a

$$P = {}_{B'}[I]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors, la matrice de passage de B' à B est

$${}_B[I]_{B'} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = \{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ une autre base de $\mathbb{R}^3$.
Déterminons la matrice de passage de B à B' et ${}_{B'}[v]$ où $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Calculons tout d'abord la matrice de passage de B' à B (car étant plus simple à

obtenir)

$$P = {}_B[I]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors, la matrice de passage de B à B' est ${}_{B'}[I]_B = P^{-1}$, déterminée comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1/4 & 5/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc ${}_{B'}[I]_B = P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Soit $v = (x, y, z)$, alors

$${}_{B'}[v] = {}_{B'}[I]_{B\,B}[v] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et donc

$${}_{B'}[v] = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(3x - y - z) \\ \frac{1}{4}(-x + 3y - z) \\ \frac{1}{4}(-x - y + 3z) \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.1

Soient V et W des e.v. de dimension finie, $F : V \to W$ une application linéaire, B et B' des bases de V, et C et C' des bases de W. Alors, si

$$A = {}_C[F]_B \text{ et } A' = {}_{C'}[F]_{B'},$$

on a $A' = P^{-1}AQ$, où $Q = {}_B[I_V]_{B'}$ et $P = {}_C[I_W]_{C'}$.

Démonstration :

$$F = I_W \circ F \circ I_V$$

et donc

$$\begin{aligned} {}_{C'}[F]_{B'} &= {}_{C'}[I_W \circ F \circ I_V]_{B'} \\ &= {}_{C'}[I_W]_{CC}[F]_{BB}[I_V]_{B'} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $A' = P^{-1}AQ$. □

Le theoreme suivant est un cas particulier du théorème précédent.

Théorème 3.2

Soient V un e.v. de dimension finie, $F : V \longrightarrow V$ un opérateur linéaire, et B et B' des bases de V. Alors, si

$$A = {}_B[F]_B \text{ et } A' = {}_{B'}[F]_{B'}$$

et si $P =_B [I_V]_{B'}$ est la matrice de passage de la base B' à la base B, on a

$$A' = P^{-1}AP$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} A' = {}_{B'}[F]_{B'} &= {}_{B'}[I_V \circ F \circ I_V]_{B'} \\ &= {}_{B'}[I_V]_{BB}[F]_{BB}[I_V]_{B'} \end{aligned}$$

donc $A' = P^{-1}AP$. □

Définition 3.2

Deux matrices carrées A et A' sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que

$$A' = P^{-1}AP.$$

Note : Alors, deux matrices sont semblabes si et seulement si elles représentent le même opérateur linéaire.

Définition 3.3

Un opérateur linéaire $F : V \to V$ est dit **diagonalisable** s'il existe une base B de V telle que ${}_B[F]_B$ soit une matrice diagonale.

Soit A une représentation matricielle d'un opérateur linéaire F. Alors F est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Exemple 3.3 : Soit l'opérateur linéaire $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$T(x, y, z) = (-x + 2z, 12x - 2y - 6z, -4x + 5z)$$

Soit $B' = \{(1, 2, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 2)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminons $A =_B [T]_B$ et $A' =_{B'} [T]_{B'}$ où B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$A =_B [T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 12 & -2 & -6 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Soit $P^{-1} = {}_{B'}[I]_B$. Alors,

$$P = {}_B[I]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned} A' &= {}_{B'}[T]_{B'} = {}_{B'}[I]_{BB}[T]_{BB}[I]_{B'} \\ &= P^{-1}AP \end{aligned}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

L'opérateur T est diagonalisable.

Chapitre 4

Diagonalisation

Sommaire

1 ▪ Rappels sur le déterminant .... Page 62
1.1 - Propriétés du déterminant 63
1.2 - Développement de Laplace 64
1.3 - D'autres résultats sur le déterminant 65
2 ▪ Diagonalisation, valeurs propres et vecteurs propres .... Page 66
3 ▪ Propriétés des valeurs propres et des vecteurs propres .... Page 69
4 ▪ Opérateurs Linéaires .... Page 77

1 Rappels sur le déterminant

Dans toute la suite, les matrices considérées sout des matrices carrées.

Définition 1.1

Soit A une matrice carrée. Le déterminant de A, noté $\det A$ ou $|A|$, est le nombre réel :

- $\det A = a$, si $A = a \in \mathbb{R}$.
- $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

■ Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \Big(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}\Big) \\ &- \Big(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33}\Big), \end{aligned}$$ appelé la «Règle de Sarrus».

Note : À partir de la régle de Sarrus, on a

$$\begin{aligned} \det A = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) \\ - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) \\ + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right) \\ = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

C'est le développement de Laplace suivant la premièe ligne !

1.1 Propriétés du déterminant

Propriété 1.1

1. $\det A^\top = \det A$.
2. Si A contient une ligne (ou une colonne) nulle, alors det $A = 0$.
3. Si A contient deux lignes (colonnes) identiques, alors $\det A = 0$.
4. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de sa diagonale principale. En particulier, $\det I = 1$.
5. Considénons une matrice B obtenue à partir d'une matrice A par une opération élémentaire sur les lignes (respectivement sur les colonnes) :
   a. Si l'on échange deux lignes (resp. colonnes) de A, alors $\det B = -\det A$.
   b. Si l'on multiplice une ligne (resp. une colonne) de A par un scalaire k, alors $\det B = k \det A$.

c. Si l'on ajoute un multiple d'une ligne (resp. colonne) de A à une autre ligne (resp. colonne) de A, alors $\det B = \det A$.

Exemple 1.1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2-2L_1 \\ L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -(1)(1)(-3) = 3$$

1.2 Développement de Laplace

Définition 1.2

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On désigne par M_{ij} la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant de A sa i-ème ligne et sa j-ème colonne.

- On appelle mineur de l'élément a_{ij} le déterminant de la matrice M_{ij}.
- Et on appelle cofacteur de a_{ij}, noté α_{ij}, le nombre α_{ij} défini par

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}.$$

- Le déterminant de la matrice A est donné par

$$\det A = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in}.$$

On dit que le déterminant de la matrice A est obtenu par un développement de Laplace suivant la i-ème ligne.

- Le déterminant de la matrice A est donné par

$$\det A = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj}.$$

On dit que le déterminant de la matrice A est obtenu par un développennent de Laplace suivant la j-ème colonne.

Exemple 1.2 :

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_1-3L_2 \\ L_3-2L_2 \\ L_4-3L_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Développennent de Laplace suivant la $1^{\text{ière}}$ colonne $= (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

$$\overset{L_1+L_3}{=} (-1)\begin{vmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Développennent de Laplace suivant la $1^{\text{ière}}$ colonne $= (-1)\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(27-9) = -18$

1.3 D'autres résultats sur le déterminant

- A est inversible $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
- Conséquences :
  - ⋆

$$\begin{aligned} 1 = \det(I) &= \det\left(AA^{-1}\right) \\ &= (\det A)\left(\det A^{-1}\right) \quad \text{et donc} \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}. \end{aligned}$$

  - ⋆ Soit A et B deux **matrices semblables**, c'est-à-dire $B = P^{-1}AP$. Alors,

$$\begin{aligned} \det B &= \left(\det P^{-1}\right)(\det A)(\det P) \\ &= \frac{1}{\det \mathrm{P}}(\det A)(\det P) \quad \text{et donc} \quad \det B = \det A. \end{aligned}$$

2 Diagonalisation, valeurs propres et vecteurs propres

Définition 2.1

Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est **diagonalisable** s'il existe une matrice inversible P, telle que

$$P^{-1}AP = D \quad \text{où} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{est une matrice diagonale.}$$

Écrivons P sous sa partition en colonnes :

$$P = [X_1 \; X_2 \; \cdots \; X_n], \; X_i \neq 0, \; i = 1, \cdots, n.$$

Alors,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = D &\Leftrightarrow AP = PD \\ &\Leftrightarrow A[X_1 \; X_2 \; \cdots \; X_n] = [X_1 \; X_2 \; \cdots \; X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow [AX_1 \; AX_2 \; \cdots \; AX_n] = [\lambda_1 X_1 \; \lambda_2 X_2 \; \cdots \; \lambda_n X_n] \\ &\Leftrightarrow AX_i = \lambda_i X_i, \; i = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

Définition 2.2

Soit A une matrice carrée. S'il existe un vecteur non nul $X \neq 0$ et un scalaire λ tels que $AX = \lambda X$, alors on dit que

- le scalaire λ est une **valeur propre** de la matrice A ;
- et que le vecteur colonne X est un **vecteur propre** de A, associé à λ.

Note : Soit X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Alors pour tout nombre $k \neq 0$, le vecteur kX est aussi un vecteur propre de A associé à la même valeur propre λ.

En effet, $A(kX) = kAX = k\lambda X = \lambda(kX)$ pour tout $kX \neq 0$.

Théorème 2.1

Une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable, si et seulement si elle possède n vecteurs propres linéairement indépendants $X_1,\ X_2,\ \cdots\ ,\ X_n$.

Démonstration :

- Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = D \ \text{ soit diagonale.}$$

Donc

$$AP = PD \Longrightarrow A\,[X_1\ X_2\ \cdots\ X_n] = [X_1\ X_2\ \cdots\ X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow AX_i = \lambda_i X_i,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Comme P est inversible, alors $X_1\ X_2\ \cdots\ X_n$ sont linéairement indépendants.

- Montrons maintenant l'implication dans l'autre sens. Pour cela, considérons

$$P = [X_1\ X_2\ \cdots\ X_n] \ \text{ où } \ AX_i = \lambda_i X_i,\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

et $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont linéairement indépendants. Alors, P est inversible et

$$AP = [AX_1\ AX_2\ \cdots\ AX_n] = [\lambda_1 X_1\ \lambda_2 X_2\ \cdots\ \lambda_n X_n] \quad \text{ et donc}$$
$$AP = [X_1\ X_2\ \cdots\ X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = PD, \ \text{ d'où } \ P^{-1}AP = D. \qquad \square$$

Proposition 2.1

Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes d'une matrice. Soit X_1 un vecteur propre associé à λ_1 et X_2 un vecteur propre associé à λ_2. Alors, $\{X_1, X_2\}$ est linéainement indépendant.

Démonstration :

Considérons la combinaison linéaire nulle suivante $a_1X_1+a_2X_2 = 0$, alors en multipliant cette combinaison par la matrice A on a

$$A\,(a_1X_1 + a_2X_2) = 0 \Rightarrow a_1AX_1 + a_2AX_2 = 0$$
$$\Rightarrow a_1\lambda_1 X_1 + a_2\lambda_2 X_2 = 0. \tag{4.1}$$

D'autre part, en multipliant cette même combinaison par λ_1 on obtient

$$a_1X_1 + a_2X_2 = 0 \Rightarrow a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_1X_2 = 0. \tag{4.2}$$

Et donc, en combinant les équations (4.1) et (4.2) nous avons le système

$$\begin{cases} a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_2X_2 = 0 \\ a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_1X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_2(\lambda_2 - \lambda_1)X_2 = 0$$

$$\Rightarrow a_2 = 0 \ \text{ car } \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \ \text{ et } \ X_2 \neq 0.$$

Alors $a_1X_1 + a_2X_2 = 0 \Rightarrow a_1X_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ car $X_1 \neq 0$, d'où $\{X_1, X_2\}$ est libre. □

Théorème 2.2

Soit A une matrice carrée. Si toutes les valeurs propres de A sont distinctes alors A est diagonalisable.

Démonstration :

Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\forall\, i, j \in \{1, \cdots, n\}$ et $i \neq j$, où $\lambda_i, i = 1, \cdots, n$, sont les valeurs propres de A. Pour chaque λ_i, soit X_i un vecteur propre de A associé à λ_i, c'est-à-dire

$$AX_i = \lambda_iX_i, \ X_i \neq 0, \ i = 1, \cdots, n.$$

Montrons, par récurrence, que $\{X_1, \cdots, X_n\}$ est libre.

- C'est vrai pour $\{X_1\}$ car $X_1 \neq 0$.
- Supposons que $\{X_1, \cdots, X_k\}$ est libre.
- Montrons que $\{X_1, \cdots, X_{k+1}\}$ est libre. Pour cela, considérons la combinaisons linéaire nulle suivante :

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_iX_i = 0 \implies \sum_{i=1}^{k+1} a_iAX_i = 0 \tag{4.3}$$

$$\implies \sum_{i=1}^{k+1} a_i\lambda_iX_i = 0. \tag{4.4}$$

D'autre part, comme

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_iX_i = 0 \ \text{ alors } \ \sum_{i=1}^{k_i+1} a_i\lambda_{k+1}X_i = 0. \tag{4.5}$$

Donc à partir de (4.4) et (4.5), nous avons la combinaison linéaire nulle suivante

$$\sum_{i=1}^{k} a_i\left(\lambda_i - \lambda_{k+1}\right)X_i = 0 \implies a_i\left(\lambda_i - \lambda_{k+1}\right) = 0,$$

car $\{X_1, \cdots, X_k\}$ est libre. Or le fait que $a_i\left(\lambda_i - \lambda_{k+1}\right) = 0, i = 1, \cdots, k$, implique que $a_i = 0, i = 1, \cdots, k$ car $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$. Finallement de la combinaisons linéaire nulle (4.3), il ne reste que $a_{k+1}X_{k+1} = 0$ ce qui implique que $a_{k+1} = 0$ car $X_{k+1} \neq 0$. □

3 Propriétés des valeurs propres et des vecteurs propres

Définition 3.1

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

- Si X un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors on a

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\iff AX = \lambda I X \\ &\iff (A - \lambda I)X = 0. \end{aligned}$$

- L'espace $E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}_c^n \mid (A - \lambda I)X = 0\}$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}_c^n$ appelé l'**espace propre** associé à λ.

Note :

- Pour l'espace propre E_λ, nous avons :

$$\begin{aligned} E_\lambda \neq \{0\} &\Leftrightarrow (A - \lambda I) \text{ est une matrice singulière} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \end{aligned}$$

- Le $\det(A - \lambda I)$ est un polynôme, en λ, de degré n. Il est appelé le **polynôme caractéristique** de A.
- L'équation $\det(A - \lambda I) = 0$ est appelée l'**équation caractéristique** de A.
- Les racines du polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I)$, c'est-à-dire les solutions de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$, sont les valeurs propres de A.
- Pour chaque valeur propre λ, on détermine l'espace propre E_λ associé en résolvant le système d'équations linéaires homogène $(A - \lambda I)X = 0$.

Exemple 3.1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

La matrice A est-elle diagonalisable ?

- Valeurs propres :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} &= (\lambda - 4)(\lambda + 1) - 6 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 10 \end{aligned}$$

donc

$$\det(A-\lambda I)=0 \Longleftrightarrow \lambda^2-3\lambda-10=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda=-2 \text{ ou } \lambda=5$$

A possede deux valeurs propres $\lambda_1=-2, \lambda_2=5$, et donc A est diagonalisable.

- Vecteurs propres :

$\lambda_1=-2$

$$\begin{aligned}(A+2I)X=0 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}6&2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ &\Longleftrightarrow 6x_1+2x_2=0\\ &\Longleftrightarrow x_2=-3x_1\end{aligned}$$

Donc $X=\begin{pmatrix}x_1\\-3x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}, x_1\in\mathbb{R}$. D'où

$$E_{\lambda_1}=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\right\}.$$

$\lambda_2=5$

$$\begin{aligned}(A-5I)X=0 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}-1&2\\3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ &\Longleftrightarrow -x_1+2x_2=0\\ &\Longleftrightarrow x_1=2x_2\end{aligned}$$

Donc $X=\begin{pmatrix}2x_2\\x_2\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, x_2\in\mathbb{R}$. D'où

$$E_{\lambda_2}=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Fimalement, on a

$$P=\begin{pmatrix}1&2\\-3&1\end{pmatrix},\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0\\0&5\end{pmatrix}.$$

Exemple 3.2 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

- Valeurs propres :

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 2\right) - (2 - 2(2-\lambda)) \\
&= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 2\right) - 2(\lambda - 1) \\
&= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ **qui est double**.

- Vecteurs propres :

$\lambda_1 = 1$

$$(A - \lambda_1 I)\, X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(A - I)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{matrix}
\end{aligned}$$

Alors, $X = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{\lambda_1} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\lambda_2 = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2x_2$$

$$x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$$

$$\text{donc } X = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{\lambda_2} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La matrice A n'est pas diagonalisable car elle ne possède que 2 vecteurs propres linéairements indépendants.

Définition 3.2

Soit λ une valeur propre d'une matrice A.

- On appelle **multiplicité algébrique** de λ, la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique.
- Alors que la **multiplicité géométrique** de λ est la dimension de l'espace propre associé E_λ.

Proposition 3.1

La multiplicité géométrique d'une valeur propre d'une matrice A est plus petite ou égale à sa multiplicité algébrique.

Démonstration :

Soit A une matrice carrée d'ordre n, et soit λ_1, une valeur propre de A de multiplicité géométrique k ($\dim E_{\lambda_1} = k$).

Soit $\{X_1, \cdots, X_k\}$ un ensemble linéairement indépendant, formé de vecteurs propres associés a λ_1. On complète $\{X_1, \cdots, X_k\}$ en une base $\{X_1, \cdots, X_k, X_{k+1}, \cdots, X_n\}$ de $\mathbb{R}_c^n$.

Posons $P = [X_1 \cdots X_k \, X_{k+1} \cdots X_n]$. Alors,

$$AP = [AX_1 \cdots AX_k \; AX_{k+1} \cdots AX_n] = [\lambda_1 X_1 \cdots \lambda_1 X_k \; AX_{k+1} \cdots AX_n]$$

et donc

$$AP = \underbrace{[X_1 \cdots X_k \; X_{k+1} \cdots X_n]}_{P} \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & B \\ 0 & & \lambda_1 & \\ \hline & 0 & & C \end{array}\right] \tag{4.6}$$

où $P\left[\frac{B}{C}\right] = A\left[X_{k+1} \cdots X_n\right] \Rightarrow \left[\frac{B}{C}\right] = P^{-1}A\left[X_{k+1} \cdots X_n\right]$.
À partir de l'égalité en (4.6), nous obtenons ainsi la décomposition

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 I_k & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$$

Et sachant que A et $P^{-1}AP$ sont semblables, alors nous avons

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det\left(P^{-1}AP - \lambda I\right) \\ &= \det\left(\left[\begin{array}{c|c} (\lambda_1 - \lambda)I_k & B \\ \hline 0 & C - \lambda I_{(n-k)} \end{array}\right]\right) \\ &= \det\left(\left(\lambda_1 - \lambda\right) I_k\right) \times \det\left(C - \lambda I_{(n-k)}\right) \\ &= \left(\lambda_1 - \lambda\right)^k \times \det\left(C - \lambda I_{(n-k)}\right). \end{aligned}$$

Alors $(\lambda_1 - \lambda)^k$ divise le polynôme caractéristique de A, et par conséquent k est plus petit ou égal à la multiplicité algébrique de λ_1. □

Proposition 3.2

Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes d'une matrice A. Alors, $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.

Démonstration :
Soit $X \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$ alors $AX = \lambda_1 X$ et $AX = \lambda_2 X$. Donc $(\lambda_1 - \lambda_2)\, X = 0 \Rightarrow X = 0$, car $\lambda_1 \neq \lambda_2$. D'où $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$. □

Proposition 3.3

Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes d'une matrice A. Soit $\{X_1, \cdots, X_p\} \subset E_{\lambda_1}$ et $\{Y_1, \cdots, Y_q\} \subset E_{\lambda_2}$. Si $\{X_1, \cdots, X_p\}$ et $\{Y_1, \cdots, Y_q\}$ sont linéairement indépendants alors $\{X_1, \cdots, X_p, Y_1, \cdots, Y_q\}$ est un ensemble linéairement indépendant.

Démonstration :
Soit la combinaison linéaire suivante

$$\sum_{i=1}^{p} a_i X_i + \sum_{i=1}^{q} b_i Y_i = 0 \quad \text{alors} \quad \sum_{i=1}^{p} a_i X_i = -\sum_{i=1}^{q} b_i Y_i.$$

Et donc

$$\sum_{i=1}^{p} a_i X_i \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}.$$

Or, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et donc $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$. Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{p} a_i X_i = 0 \text{ et donc } a_i = 0, i \in \{1, \cdots, p\} \text{ car } \{X_1, \cdots, X_p\} \text{ est libre.}$$

Pour les mêmes raisons, nous avons également

$$\sum_{i=1}^{q} b_i Y_i = 0 \Rightarrow b_i = 0,\ i \in \{1, \cdots, q\}, \text{ car } \{Y_1, \cdots, Y_q\} \text{ est libre.}$$

Ce qui démontre le résultat. □

Théorème 3.1

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Soit λ_i, $i = 1, \cdots, k$, des valeurs propres distinctes de A et de multiplicité algébrique m_i, $i = 1, \cdots, k$, avec $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$. Si $\dim E_{\lambda_i} = m_i$, $i = 1, \cdots, k$, alors A est diagonalisable.

Démonstration :

Soit B_i une base de $E_{\lambda_i}, i = 1, \cdots, k$. Comme B_i est libre $\forall\, i \in \{1, \cdots, k\}$, alors $B_i \cup B_j$ est libre, $\forall\, i \neq j$. En fait, on a $\cup_{i=1}^{k} B_i$ est libre.
En effet, montrons par exemple que $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ est libre. Pour cela, posons

$$B_1 = \{X_1, \cdots, X_p\},\ B_2 = \{Y_1, \cdots, Y_q\} \text{ et } B_3 = \{Z_1, \cdots, Z_r\}$$

Soit alors la combinaison linéaire nulle suivante :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p} a_i X_i}_{X} + \underbrace{\sum_{i=1}^{q} b_i Y_i}_{Y} + \underbrace{\sum_{i=1}^{r} c_i Z_i}_{Z} = 0$$

$$X + Y + Z = 0 \tag{4.7}$$

$$AX + AY + AZ = 0$$

$$\lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 Z = 0 \tag{4.8}$$

Si on multiplie l'équation (4.7) par λ_3, on a :

$$\lambda_3 X + \lambda_3 Y + \lambda_3 Z = 0 \tag{4.9}$$

Et donc, la différence des équations (4.8) et (4.9) donne

$$\begin{gathered}(\lambda_1-\lambda_3)\,X+(\lambda_2-\lambda_3)\,Y=0\\ \sum_{i=1}^{p}a_i\,(\lambda_1-\lambda_3)\,X_i+\sum_{i=1}^{q}b_i\,(\lambda_2-\lambda_3)\,Y_i=0\\ a_i\,(\lambda_1-\lambda_3)=0\ \text{ et }\ b_i\,(\lambda_2-\lambda_3)=0,\forall\, i,\end{gathered}$$

car $B_1\cup B_2=\{X_1,\cdots,X_p\}\cup\{Y_1,\cdots,Y_q\}$ est libre. Par conséquent, $a_i=0$ et $b_i=0$, $\forall\, i$, car $\lambda_1\neq\lambda_2$ et $\lambda_2\neq\lambda_3$. Alors,

$$\sum_{i=1}^{r}c_iZ_i=0\ \text{ et donc }\ c_i=0,\forall\, i,\ \text{ car }\ \{Z_1,\cdots,Z_r\}\ \text{ est libre.}$$

En répétant le même argument, on aboutit à $\cup_{i=1}^{k}B_i$ est libre.
Maintenant, le nombre d'éléments de $\cup_{i=1}^{k}B_i$ est égal à $\sum_{i=1}^{k}m_i=n$. Et donc A possède n vecteurs propres linéairement indépendants, et par conséquent A est diagonalisable.□

Exemple 3.3 : Soit $A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$.

- Valeurs propres de A :

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I)&=\begin{vmatrix}1-\lambda&-3&3\\3&-5-\lambda&3\\6&-6&4-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&3\\3&-2-\lambda&3\\6&-2-\lambda&4-\lambda\end{vmatrix}\\ &=-(2+\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&0&3\\3&1&3\\6&1&4-\lambda\end{vmatrix}=-(2+\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&0&3\\3&1&3\\3&0&1-\lambda\end{vmatrix}\\ &=-(2+\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&3\\3&1-\lambda\end{vmatrix}=-(2+\lambda)\left((1-\lambda)^2-9\right)\\ &=-(2+\lambda)(1-\lambda-3)(1-\lambda+3)\\ &=-(2+\lambda)(-\lambda-2)(4-\lambda)=(2+\lambda)^2(4-\lambda)\end{aligned}$$

Ainsi, $\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow(2+\lambda)^2(4-\lambda)=0$ et on a deux valeurs propres : $\lambda_1=4$ simple et $\lambda_2=-2$ double.

- Vecteurs propres :

$\lambda_1=4$

$$A-\lambda_1I=A-4I=\begin{pmatrix}-3&-3&3\\3&-9&3\\6&-6&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&-1/2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(A-4I)X=0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{matrix} x_1-\frac{1}{2}x_3=0 \\ x_2-\frac{1}{2}x_3=0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x_1=\frac{1}{2}x_3 \\ x_2=\frac{1}{2}x_3 \end{matrix}$$

et donc $E_{\lambda_1}=\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ et $\dim E_{\lambda_1}=1$.

$\lambda_2=-2$

$$A-\lambda_2 I=A+2I=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+2I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1-x_2+x_3=0$$

$$\Leftrightarrow x_1=x_2-x_3$$

et donc

$$X=\begin{pmatrix} x_2-x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$E_{\lambda_2}=\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \textit{ et } \dim E_{\lambda_2}=2.$$

Alors, A est diagonalisable et on a

$$P^{-1}AP=D \text{ où } P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Note : Soit A une matrice diagonalisable. Alors, $P^{-1}AP=D$ et donc

$$\left(P^{-1}AP\right)^n=D^n \Longrightarrow P^{-1}A^nP=D^n \text{ d'où } A^n=PD^nP^{-1}.$$

Théorème 3.2

Toute matrice symétrique est diagonalisable.

4 Opérateurs Linéaires

Soit V un espace vectoriel de dimension n et $T : V \longrightarrow V$ un opérateur linéaire. T est diagonalisable s'il existe une base $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de V, telle que

$$_S[T]_S = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Or

$$_S[T]_S = \Big({}_S\left[T\left(v_1\right)\right] \cdots {}_S\left[T\left(v_j\right)\right] \cdots {}_S\left[T\left(v_n\right)\right] \Big)$$

Et donc

$$_S[T]_S = D \Longleftrightarrow {}_S\left[T\left(v_j\right)\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j^{\text{ième}} \text{ ligne }, \ j = 1, \cdots, n$$

$$\Longleftrightarrow T\left(v_j\right) = \lambda_j v_j, \ j = 1, \cdots, n.$$

Définition 4.1

Soit $T : V \longrightarrow V$ un opérateur linéaire.

- Le scalaire λ est appelé **valeur propre** de T, s'il existe un vecteur v non nul tel que $T(v) = \lambda v$.
- Tout vecteur non nul vérifiant cette relation est appelé **vecteur propre** de T associé à la valeur propre λ.

Soit $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ une base de V, formée de vecteurs propres de T. Soit B une autre base de V. Posons ainsi, $A = {}_B[T]_B$ et $D = {}_S[T]_S$. Alors,

$$A = {}_B[T]_B = {}_B[I_V]_{SS}[T]_{SS}[I_V]_B$$

C'est-à-dire

$$A = PDP^{-1} \text{ où } P = {}_B\left[I_V\right]_S$$

et donc $P^{-1}AP = D$.
Alors, T est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Corollaire 4.1

Soit V un espace vectoriel de dimension n et $T : V \longrightarrow V$ un opérateur linéaire. Alors, T est diagonalisable si et seulement si T possède n vecteurs propres linéairenement indépendants.

Exemple 4.1 : Soit l'opérateur linéaire $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$T(x, y, z) = (-x + 2z, 12x - 2y - 6z, -4x + 5z).$$

L'opérateur T est-il diagonalisable ?
Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors, on a

$$A = {}_B[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 12 & -2 & -6 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Valeurs propres de A :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 12 & -2-\lambda & -6 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(2+\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(2+\lambda)((\lambda+1)(\lambda-5)+8) \\ &= -(2+\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right) \\ &= -(2+\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3) \end{aligned}$$

  Alors, $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -(2+\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3) = 0$, et donc les valeus propres de A sont $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$.
  Comme les valeurs propres de A sont distinctes, alors A est diagonalisable et par conséquent T est diagonalisable.

- Vecteurs propres :

$\lambda_1 = -2$

$$A - \lambda_1 I = A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A + 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0, x_3 = 0 \text{ donc } X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où $E_{\lambda_1} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

$\lambda_2 = 1$

$$A - \lambda_2 I = A - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 12 & -3 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{matrix}$$

donc $X = \begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $E_{\lambda_2} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$\lambda_3 = 3$

$$A - \lambda_3 I = A - 3I = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 12 & -5 & -6 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-3I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 & = 0 \\ x_2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

donc $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où $E_{\lambda_3} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$. Donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres de T sont

$$\begin{aligned} v_1 &= (0,1,0) \text{ associé à } \lambda_1 = -2, \\ v_2 &= (1,2,1) \text{ associé à } \lambda_2 = 1, \\ v_3 &= (1,0,2) \text{ associé à } \lambda_3 = 3. \end{aligned}$$

Chapitre 5

Produit Scalaire et Orthogonalité

Sommaire

1 ▪ Produit scalaire .... Page 81
1.1 - Introduction 81
1.2 - Propriétés du produit scalaire 84
2 ▪ Orthogonalité .... Page 86
2.1 - Introduction 86
2.2 - Ensembles orthogonaux et bases orthogonales 89
2.3 - Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt 92
2.4 - Projection sur un sous-espace vectoriel 97

1 Produit scalaire

1.1 Introduction

Définition 1.1

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire sur V est une fonction, notée

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto \langle u,v\rangle \end{aligned}$$

qui est symétrique, bilinéaine et définie positive, c'est-à-dire $\forall\, u,v,w \in V, \forall\, k \in \mathbb{R}$:

1. $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$.
2. $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$,
   $\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$.
3. $\langle ku,v\rangle = k\langle u,v\rangle$,
   $\langle u,kv\rangle = k\langle u,v\rangle$.

Note : Les points 2 et 3 signifient que $\langle\ ,\ \rangle$ est **bilinéaire**.

4 $\langle u, u\rangle \geq 0$, $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$.

Note : Le point 4 traduit que $\langle\ ,\ \rangle$ est **définie positive**.

Note :

- À partir de la symétrie en 1 et de la linéarité par rapport au premier argument en $2-3$, on a la linéarité par rapport au deuxième argument.
  En effet, $\forall\, u, v, w \in V, \forall\, k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\langle u, v+w\rangle = \langle v+w, u\rangle &= \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle \\ &= \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \\ \langle u, kv\rangle = \langle kv, u\rangle &= k\langle v, u\rangle = k\langle u, v\rangle.\end{aligned}$$

- À partir du point 3, on a $\forall\, u \in V$,

$$\langle 0, u\rangle = \langle 00, u\rangle = 0\langle 0, u\rangle = 0.$$

- Soit $u_i \in V, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$, et $v_j \in V, b_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, m$. Alors,

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i u_i,\ \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} a_i \left\langle u_i,\ \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \left\langle u_i,\ v_j\right\rangle .\end{aligned}$$

Définition 1.2

- On appelle espace (vectoriel) euclidien, un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire.
- La norme (ou la longueur) d'un vecteur u, notée $\|u\|$, est $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.
- Un vecteur u est dit unitaire si $\|u\| = 1$.

Note :

- $\forall\, u \in V$, nous avons $\|u\| \geqslant 0$; et $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
- $\forall\, u \in V, \forall\, k \in \mathbb{R}$, nous avons $\|ku\| = |k|\|u\|$.
- $\forall\, u \in V, u \neq 0$, le vecteur $\hat{u} = \frac{u}{\|u\|}$ est tel que $\|\hat{u}\| = 1$. Ce procédé est appelé normalisation du vecteur u.

Exemple 1.1 :

- **L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$** Soient les vecteurs

$$u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Le produit scalaire euclidien (naturel) dans $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$\langle u, v\rangle = u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On vérifie aisément que c'est bien un prodiuit scalaire.

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

C'est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

Note : Dans le cas de l'espace $\mathbb{R}^n_c$, nous avons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$X^\top Y = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \left\langle X^\top, Y^\top \right\rangle,$$

qui n'est autre que le produit scalaire des vecteurs $X^\top$ et $Y^\top$ de $\mathbb{R}^n$.

- **L'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, noté $C[a, b]$.** $C[a, b]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ car c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions réelles. Sur l'espace $C[a, b]$, on définit le produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \forall\, f, g \in C[a, b].$$

Vérifions que c'est bien un produit scalaire : $\forall\, f, g, h \in C[a, b], \forall\, k \in \mathbb{R}$,

  - ⋆ $$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g, f\rangle$$

⋆

$$\begin{aligned}\langle f+g,h\rangle &= \int_a^b (f+g)(x)h(x)dx\\ &= \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx\\ &= \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle\end{aligned}$$

⋆

$$\begin{aligned}\langle kf,g\rangle = \int_a^b (kf)(x)g(x)dx = k\int_a^b f(x)g(x)dx\\ =k\langle f,g\rangle\end{aligned}$$

⋆

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b (f(x))^2dx \geqslant 0,$$
$$\langle f,f\rangle = 0 \iff \int_a^b (f(x))^2dx = 0 \iff f=0.$$

D'où le résultat.

1.2 Propriétés du produit scalaire

Théorème 1.1

L'inégalité de Cauchy-Schwarz Soit V un espace euclidien. Alors, $\forall\, u,v\in V$, on a

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

Démonstration :
Pour tout $t\in\mathbb{R}$, nous avons

$$\langle u+tv,u+tv\rangle = \|u+tv\|^2 \geqslant 0.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\langle u+tv,u+tv\rangle &= \langle u,u\rangle + 2t\langle u,v\rangle + t^2\langle v,v\rangle\\ &= \|v\|^2t^2 + 2\langle u,v\rangle t + \|u\|^2 \geqslant 0,\ \forall\, t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Alors, $\Delta = 4\langle u,v\rangle^2 - 4\|v\|^2\|u\|^2 \leq 0$, ce qui est équivalent à $\langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$ d'où $|\langle u,v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$. □

Exemple 1.2 :

- **Dans $\mathbb{R}^n$** Soit $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$| \langle X, Y \rangle | \leq \|X\| \|Y\|$$
$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n| \leqslant \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2\right)^{1/2} \left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right)^{1/2}$$
$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

- **Dans $C[a, b]$** Nous avons

$$| \langle f, g \rangle | \leqslant \|f\| \|g\|$$

c'est-à-dire $$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right)^{1/2}.$$

Théorème 1.2

L'inégalité du triangle Soit V un espace euclidien. Alors $\forall\, u, v \in V$, on a

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

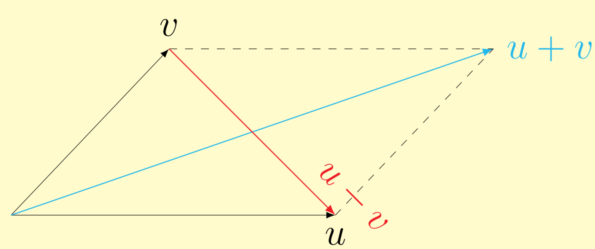
Démonstration :
Pour tous $u, v \in V$, nous avons

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \end{aligned}$$

et donc $\|u + v\|^2 \leqslant (\|u\| + \|v\|)^2$, d'où $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. □

Régle du parallélogramme Pour tous $u, v \in V$, où V est un espace euclidien, on a

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$



Démonstration :
En effet,

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 &= \langle u+v,u+v\rangle+\langle u-v,u-v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle \\ &+\langle u,u\rangle-2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle \\ &= 2\|u\|^2+2\|v\|^2.\end{aligned}$$

2 Orthogonalité

2.1 Introduction

Soit V un espace euclidien et u, v deux vecteurs de V. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

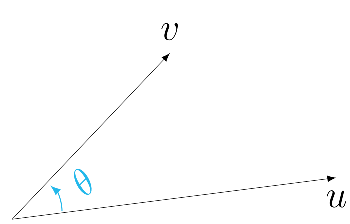
$$\begin{aligned}|\langle u,v\rangle|\leqslant\|u\|\|v\| &\iff -\|u\|\|v\|\leqslant\langle u,v\rangle\leqslant\|u\|\|v\| \\ &\iff -1\leqslant\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}\leqslant 1,\end{aligned}$$

à condition que $u\neq 0$ et $v\neq 0$. On définit ainsi l'angle θ, $0\leq\theta\leq\pi$, entre u et v par

$$\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|},\quad (u\neq 0\ \text{ et }\ v\neq 0)$$

Donc, on obtient

$$\langle u,v\rangle=\|u\|\|v\|\cos\theta$$



Définition 2.1

Soit V un espace euclidien et u, v deux vecteurs de V. On dit que u et v sont orthogonaux si $\langle u,v\rangle=0$.

Exemple 2.1 : Considérons l'espace $C[-\pi,\pi]$. Soit les fonctions continues $f(t)=\sin t$ et $g(t)=\cos t$. Alors, on a

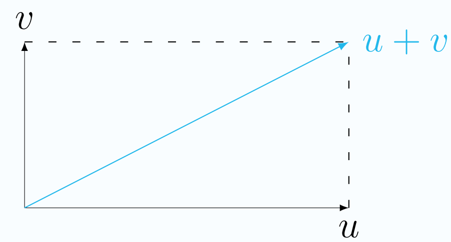
$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t\,dt=\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Donc f et g sont deux fonctions orthogonales de $C[-\pi, \pi]$.

Théorème 2.1

Pythagore Si u et v sont orthogonaux, alors

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$



Démonstration :

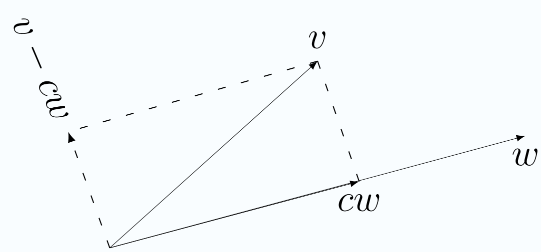
$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 \ \text{ car } \ \langle u,v\rangle = 0\end{aligned}$$ □

Définition 2.2

Soit V un espace euclidien et soit $w \in V$ un vecteur **non nul**. Soit v un vecteur quelconque de V.

- On appelle la **projection de v sur w**, le vecteur cw tel que $v - cw$ soit orthogonal à w où la constante c est donnée par

$$\begin{aligned}\langle v - cw, w\rangle = 0 \ &\Leftrightarrow \ \langle v,w\rangle - c\langle w,w\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \ c = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}.\end{aligned}$$



- La projection de v sur w est donc le vecteur $\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w$.
- La constante $c = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$ est appelée la composante de v sur w.

Définition 2.3

Soit S un sous-ensemble d'un espace euclidien V. Le **complément orthogonal** de S, noté $S^\perp$, est l'ensemble suivant

$$S^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u\rangle = 0, \forall\, u \in S\}$$

Proposition 2.1

Soit S un sous-ensemble d'un espace euclidien V. Alors $S^\perp$ est un **sous-espace vectoriel** de V.

Démonstration :

- $0 \in S^\perp$ car $\langle 0, u\rangle = 0, \forall\, u \in S$.
- $\forall\, v_1, v_2 \in S^\perp$, et $\forall\, u \in S$, on a $\langle v_1 + v_2, u\rangle = \langle v_1, u\rangle + \langle v_2, u\rangle = 0 + 0 = 0$ et donc $v_1 + v_2 \in S^\perp$
- $\forall\, k \in \mathbb{R}, \forall\, v \in S^\perp$, et $\forall\, u \in S$, on a $\langle kv, u\rangle = k\langle v, u\rangle = k \times 0 = 0$ et donc $kv \in S^\perp$. Par suite, $S^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel de V. $\square$

Exemple 2.2 : Soit $S = \{u_1, u_2\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ où $u_1 = (1, 2, 1)$ et $u_2 = (2, 5, 4)$. Déterminer $S^\perp$. Soit $v = (x, y, z) \in S^\perp$. Alors,

$$\begin{cases} \langle v, u_1\rangle = 0 \\ \text{et} \\ \langle v, u_2\rangle = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ \text{et} \\ 2x + 5y + 4z = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

La matrice du système (5.1) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc le système (5.1) est équivalent au suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = -2z \end{cases}$$

Alors,

$$S^\perp = \{(3z, -2z, z) = z(3, -2, 1) \mid z \in \mathbb{R}\}, \text{ c'est-à-dire } S^\perp = \text{Vect}\,\{(3, -2, 1)\}.$$

2.2 Ensembles orthogonaux et bases orthogonales

Définition 2.4

Soit V un espace euclidien, et soit $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ un ensemble de vecteurs **non nuls** de V.

- L'ensemble S est dit orthogonal si pour tous $i, j \in \{1, \cdots, r\}$, on a

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \text{ si } i \neq j.$$

- S est dit orthonormal si pour tous $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, on a

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Note : Si $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ est orthogonal, alors $\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \cdots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$ est orthonormal.

En effet ; $\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\|v_i\|\|v_j\|} \langle v_i, v_j \rangle = 0, \text{ si } i \neq j \\ \frac{1}{\|v_i\|\|v_i\|} \langle v_i, v_i \rangle = \frac{\|v_i\|^2}{\|v_i\|^2} = 1 \end{cases}$$

Théorème 2.2

Soit S un ensemble orthogonal. Alors S est linéainement indépendant.

Démonstration :

Soit $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ un ensemble orthogonal. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} a_i v_i = 0 \ \Rightarrow\ & \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i v_i, v_j \right\rangle = 0, \forall\, j \in \{1, \ldots, r\} \\ \Rightarrow\ & \sum_{i=1}^{r} a_i \langle v_i, v_j \rangle = 0, \forall\, j \in \{1, \ldots, r\} \\ \Rightarrow\ & a_j \langle v_j, v_j \rangle = 0, \forall\, j \in \{1, \ldots, r\} \\ \Rightarrow\ & a_j = 0, \forall\, j \in \{1, \ldots, r\} \text{ car } v_j \neq 0. \end{aligned}$$

$\square$

Définition 2.5

Soit V un espace euclidien de dimension finie. Soit B une base de V.

- B est dite une **base orthogonale** si B est un ensemble orthogonal.
- Elle est dite une **base orthonormale** si B est un ensenble orthonormal.

Proposition 2.2

Soit V un espace euclidien de dimension n. Soit $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un ensemble orthogonal de V. Alors B est une base orthogonale de V.

Démonstration :
Comme B est un ensemble orthogonal, alors B est linéairement indépendant. D'autre part, comme $\dim V = n$ et B contient n éléments de V alors B est une base de V. Et donc B est une base orthogonale de V. □

Exemple 2.3 : Dans $\mathbb{R}^n$, la base canonique $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. En effet ;

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= 0 \quad \text{si } i \neq j,\ \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}, \\ \langle e_i, e_i \rangle &= 1 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Proposition 2.3

Soit V un espace euclidien de dimension n. Soit $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une **base orthogonale** de V. Alors $\forall\, v \in V$, on a

$$_B[v] = \begin{pmatrix} \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \\ \vdots \\ \frac{\langle v, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} \\ \vdots \\ \frac{\langle v, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} \end{pmatrix}$$

Démonstration :
$\forall\, v \in V$, on a $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$. Et pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, on a

$$\langle v, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle v_i, v_j \rangle = a_j \langle v_j, v_j \rangle$$

et donc

$$a_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle},\ \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

$\square$

Exemple 2.4 : Soit $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (2, 1, -4)$ et $u_3 = (3, -2, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On vérifie facilement que

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad \forall\, i \neq j.$$

Alors, $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
Maintenant, soit $u = (7, 1, 9)$. Alors,

$$_B[v] = \begin{pmatrix} \frac{\langle u,u_1 \rangle}{\langle u_1,u_1 \rangle} \\ \\ \frac{\langle u,u_2 \rangle}{\langle u_2,u_2 \rangle} \\ \\ \frac{\langle u,u_3 \rangle}{\langle u_3,u_3 \rangle} \end{pmatrix}$$

Or $\frac{\langle u,u_1 \rangle}{\langle u_1,u_1 \rangle} = \frac{18}{6} = 3$, $\frac{\langle u,u_2 \rangle}{\langle u_2,u_2 \rangle} = \frac{-21}{21} = -1$ et $\frac{\langle u,u_3 \rangle}{\langle u_3,u_3 \rangle} = \frac{28}{14} = 2$, alors $_B[v] = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

C'est-à-dire $u = 3u_1 - u_2 + 2u_3$.

Proposition 2.4

Soit V un espace euclidien de dimension finie, et soit B une base orthornormale de V. Alors $\forall\, u, v \in V$, on a

$$\langle u, v \rangle = {_B[u]}^\top {_B[v]}.$$

Démonstration :
Posons $\dim V = n$ et $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base orthonormale de V. Pour tous $u, v \in V$, posons $u = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ et $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$. Alors,

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n a_i b_i \langle v_i, v_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ &= (a_1\, a_2\, \cdots\, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = {_B\,[u]}^\top {_B\,[v]}. \end{aligned}$$

□

2.3 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit V un espace euclidien. Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ un sous-ensemble de V **linéairement indépendant**. Alors, on peut construire à partir de $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ un ensemble $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ orthogonal.

Démonstration :

En effet, posons $w_1 = v_1$.

Soit $w_2 = v_2 + c_{21} w_1$ tel que $\langle w_2, w_1 \rangle = 0$. Alors,

$$\langle w_2, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle + c_{21} \langle w_1, w_1 \rangle = 0$$

Et donc $c_{21} = -\frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$, d'où $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$.

Soit $w_3 = v_3 + c_{31} w_1 + c_{32} w_2$ tel que $\langle w_3, w_1 \rangle = 0$ et $\langle w_3, w_2 \rangle = 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \langle w_3, w_1 \rangle &= \langle v_3, w_1 \rangle + c_{31} \langle w_1, w_1 \rangle + c_{32} \langle w_2, w_1 \rangle \\ &= \langle v_3, w_1 \rangle + c_{31} \langle w_1, w_1 \rangle = 0 \end{aligned}$$

et donc $c_{31} = -\frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$.

$$\begin{aligned} \langle w_3, w_2 \rangle &= \langle v_3, w_2 \rangle + c_{31} \langle w_1, w_2 \rangle + c_{32} \langle w_2, w_2 \rangle \\ &= \langle v_3, w_2 \rangle + c_{32} \langle w_2, w_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

et donc $c_{32} = -\frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle}$. Alors, $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$. En continuant ce procédé, on aboutit à

$$w_1 = v_1$$

$$w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i, \ j = 2, \cdots, r$$

On obtient ainsi un ensemble $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ orthogonal. À partir de cet ensemble, on obtient aussi l'ensemble orthonormal suivant

$$\left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \cdots, \frac{w_r}{\|w_r\|} \right\}.$$

□

Théorème 2.3

Sout V un espace euclidien de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoviel de V posséde une base orthonormale.

Démonstration :
Soit W un sous-espace vectoriel de V et posons $\dim W = m$. Soit $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ une base de W. Alors, en utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on obtient $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ un ensemble orthogonal de W. Donc S est une base orthogonale de W, et $\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \cdots, \frac{w_m}{\|w_m\|}\right\}$ est une base orthonormale de W. □

Exemple 2.5 :

- Soient $v_1 = (1,1,0,1)$, $v_2 = (1,-2,0,0)$ et $v_3 = (1,0,-1,2)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Déterminons une base orthonormale de $W = \text{Vect}\,\{v_1, v_2, v_3\}$.
  - Tout d'abord, on vérifie facilement que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est linéairement indépendant et par conséquent c'est une base de W.
  - Ainsi, en utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on a

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = (1,1,0,1), \\ w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = v_2 - \left(\frac{-1}{3}\right) w_1 \end{aligned}$$

et donc $w_2 = (1,-2,0,0) + \frac{1}{3}(1,1,0,1) = \frac{1}{3}(4,-5,0,1)$.

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 \ \text{ où} \\ \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} &= \frac{3}{3} = 1, \qquad \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} = \frac{6/3}{42/9} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Par suite, $w_3 = (1,0,-1,2) - (1,1,0,1) - \frac{3}{7} \times \frac{1}{3}(4,-5,0,1)$ et donc

$$w_3 = (0,-1,-1,1) - \frac{1}{7}(4,-5,0,1) = \frac{1}{7}(-4,-2,-7,6).$$

  - Alors, une base orthonormale de W est $\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|}\right\}$ où nous avons

$$\begin{aligned} \frac{w_1}{\|w_1\|} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1), \\ \|w_2\|^2 &= \frac{1}{9}(16+25+1) = \frac{42}{9} \\ \frac{w_2}{\|w_2\|} &= \frac{3}{\sqrt{42}}\frac{1}{3}(4,-5,0,1) = \frac{1}{\sqrt{42}}(4,-5,0,1) \\ \|w_3\|^2 &= \frac{1}{49}(16+4+49+36) = \frac{105}{49} \\ \frac{w_3}{\|w_3\|} &= \frac{7}{\sqrt{105}}\frac{1}{7}(-4,-2,-7,6) = \frac{1}{\sqrt{105}}(-4,-2,-7,6) \end{aligned}$$

- Soit l'espace vectoriel $V = C[-1,1]$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Déterminer une base orthogonale $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}$ de l'espace P_3 des polynônes de degré $\leqslant 3$ en utilisant la base canonique $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ de P_3 où

$$f_0(t) = 1,\ f_1(t) = t,\ f_2(t) = t^2 \text{ et } f_3(t) = t^3.$$

  - ⋆ $g_0 = f_0$, c'est-à-dire $g_0(t) = 1$.
  - ⋆

$$g_1 = f_1 - \frac{\langle f_1, g_0\rangle}{\langle g_0, g_0\rangle} g_0$$
$$\langle f_1, g_0\rangle = \int_{-1}^{1} f_1(t)g_0(t)dt = \int_{-1}^{1} tdt = 0$$

donc $g_1 = f_1$, c'est-à-dire $g_1(t) = t$.

  - ⋆

$$g_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, g_0\rangle}{\langle g_0, g_0\rangle} g_0 - \frac{\langle f_2, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1$$
$$\langle f_2, g_0\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}, \quad \langle g_0, g_0\rangle = \int_{-1}^{1} dt = 2,$$
$$\langle f_2, g_1\rangle = \int_{-1}^{1} t^3 dt = 0,$$

donc $g_2 = f_2 - \frac{2/3}{2} g_0 = f_2 - \frac{1}{3} g_0$, c'est-à-dire $g_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$.

  - ⋆

$$g_3 = f_3 - \frac{\langle f_3, g_0\rangle}{\langle g_0, g_0\rangle} g_0 - \frac{\langle f_3, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1 - \frac{\langle f_3, g_2\rangle}{\langle g_2, g_2\rangle} g_2$$
$$\langle f_3, g_0\rangle = \int_{-1}^{1} t^3 dt = 0,$$
$$\langle f_3, g_1\rangle = \int_{-1}^{1} t^4 dt = \frac{2}{5}, \quad \langle g_1, g_1\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3},$$
$$\langle f_3, g_2\rangle = \int_{-1}^{1} t^3 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) dt = 0,$$

donc $g_3 = f_3 - \frac{2/5}{2/3} g_1 = f_3 - \frac{3}{5} g_1$, c'est-à-dire $g_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t$.
Alors, une base orthogonale de P_3 est $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}$ où

$$g_0(t) = 1,\ g_1(t) = t,\ g_2(t) = t^2 - \frac{1}{3} \text{ et } g_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t.$$

Note : Les polynômes g_0, g_1, g_2 et g_3 sont les 4 premiers polynômes de Legendre. Ils sont utiles en «Analyse numérique».

Théorème 2.4

Soit V un espace euclidien de dimension n. Soit $S = \{w_1, w_2, \cdots, w_r\}$ une base orthogonale d'un sous-espace vectoriel W de V. Alors on peut compléter S pour obtenir une base orthogonale de V.

Démonstration :

- D'abord, on complète S pour obtenir la base $B = \{w_1, \cdots, w_r, u_{r+1}, \cdots, u_n\}$ de V.
- Maintenant, en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à B, on obtient un ensemble $\{w_1, \cdots, w_n\}$ orthogonal de V.
- Donc $\{w_1, \cdots, w_n\}$ est une base orthogonale de V. $\square$

Théorème 2.5

Soit V un espace euclidien de dimension finie. Soit W un sous-espace vectoriel de V. Alors, V est la somme directe de W et $W^{\perp}$, c'est-à-dire, $V = W \oplus W^{\perp}$.

Note : $W^{\perp}$ est appelée supplémentaire orthogonal de W.

Démonstration :

- Posons $\dim V = n$ et $\dim W = r$. Comme W est un sous-espace de V, alors il existe $S = \{w_1, \cdots, w_r\}$ une base orthogonale de W.
- D'autre part, on peut compléter S en une base $B = \{w_1, \cdots, w_r, w_{r+1}, \cdots, w_n\}$ orthogonale de V. Alors,

$$\langle w_{r+1}, w_i \rangle = 0,\ \langle w_{r+2}, w_i \rangle = 0, \cdots,\ \langle w_n, w_i \rangle = 0,\ \forall\, i \in \{1, \ldots, r\},$$

  et donc $\{w_{r+1}, \cdots, w_n\} \subset W^{\perp}$.
- Montrons que $V = W \oplus W^{\perp}$.
  - Montrons tout d'abors que $V = W + W^{\perp}$, il vient :

$$\forall\, v \in V,\ v = \sum_{i=1}^{r} a_i w_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i w_i,$$

    car $\{w_1, \ldots, w_n\}$ est une base de V. Alors, $v = w + w'$ où $w \in W$ et $w' \in W^{\perp}$.
  - Il reste à montrer que $W \cap W^{\perp} = \{0\}$. Pour cela, soit $v \in W \cap W^{\perp}$ alors $v \in W$ et $v \in W^{\perp}$ et donc $\langle v, v \rangle = 0$, d'où $v = 0$. Par consequent, $V = W \oplus W^{\perp}$. $\square$

Note : D'après la démonstration de ce théorème, on a $S' = \{w_{r+1}, \ldots, w_n\}$ est une base de $W^\perp$.

En effet S' est libre car c'est un ensemble orthogonale. D'autre part, $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$, et donc $\dim W^\perp = n - r$. Par conséquent S' est une base de W.

Exemple 2.6 : Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par $u = (1, 2, 3, -1, 2)$ et $v = (2, 4, 7, 2, -1)$. Trouvons une base du supplémentaire orthogonal $W^\perp$ de W.

- Tout d'abord, définissons le sous-espace $W^\perp$. Il vient,

$$w \in W^\perp \;\Leftrightarrow\; \langle w, au + bv\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; a\langle w, u\rangle + b\langle w, v\rangle = 0,\; \forall\, a, b \in \mathbb{R},$$

et donc $\langle w, u\rangle = 0$ et $\langle w, v\rangle = 0$. Ainsi, le sous-espace $W^\perp$ est caractérisé par

$$w^\perp = \left\{w \in \mathbb{R}^5 \mid \langle w, u\rangle = 0 \text{ et } \langle w, v\rangle = 0\right\}.$$

- Déterminons donc une base de $W^\perp$. Soit $w = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in W^\perp$, on a

$$\begin{aligned} \langle w, u\rangle = 0 \;&\Leftrightarrow\; x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ \langle w, v\rangle = 0 \;&\Leftrightarrow\; 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{aligned}$$

La matrice de ce dernier système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Alors, le système initial est équivalent à

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 13x_4 + 17x_5 &= 0 \\ x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{aligned} x_1 &= -2x_2 + 13x_4 - 17x_5 \\ x_3 &= -4x_4 + 5x_5 \end{aligned}$$

Donc, on obtient $w = (-2x_2 + 13x_4 - 17x_5,\ x_2,\ -4x_4 + 5x_5,\ x_4,\ x_5)$ et une base de $W^\perp$ est le système $\{w_1, w_2, w_3\}$ où

$$w_1 = (-2, 1, 0, 0, 0),\ w_2 = (13, 0, -4, 1, 0),\ w_3 = (-17, 0, 5, 0, 1).$$

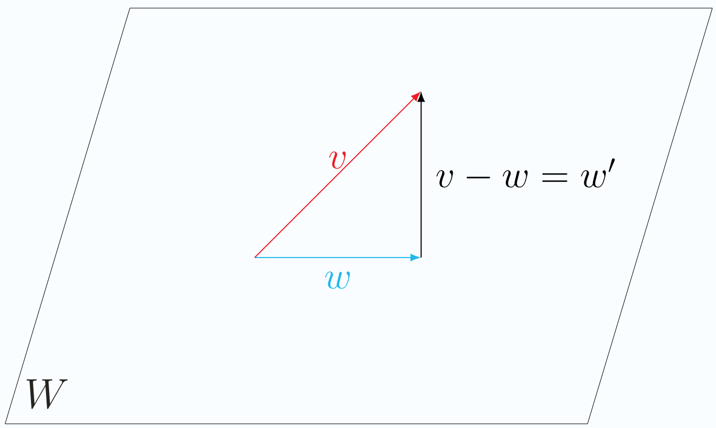
On a $\mathbb{R}^5 = W \oplus W^\perp$ et $\dim W^\perp = 3$.

2.4 Projection sur un sous-espace vectoriel

Définition 2.6

Soir V un espace euclidien de dimension finie. Soit W un sous-espace vectoriel de V. Alors, $V = W \oplus W^{\perp}$ et donc $\forall\, v \in V$, on a $v = w + w'$ avec $w \in W,\ w' \in W^{\perp}$.

- Donc $\forall\ u \in W$, on a
$$\langle v - w, u\rangle = \langle w', u\rangle = 0.$$
- Le vecteur w est appelé **projection de v sur W**, et on le note
$$w = \mathrm{proj}(v, W).$$



Maintenant, soit $\{w_1, w_2, \cdots, w_r\}$ une base orthogonale de W. On peut compléter cette base en une base $\{w_1, \cdots, w_n\}$ orthogonale de V. De plus, on sait que $\{w_{r+1}, \cdots, w_n\}$ est une base orthogonale de $W^{\perp}$. Alors $\forall\ v \in V$, on a

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \quad \text{et} \quad \langle v, w_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle w_i, w_j\rangle = a_j \langle w_j, w_j\rangle\,,\ \forall\ j \in \{1, \dots, n\}.$$

C'est-à-dire

$$a_j = \frac{\langle v, w_j\rangle}{\langle w_j, w_j\rangle}, \forall\ j \in \{1, \dots, n\}.$$

Donc $\forall\ v \in V$, on a

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{r} a_i w_i}_{\mathrm{proj}(v,W)} + \sum_{i=r+1}^{n} a_i w_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i}_{\mathrm{proj}(v,W)} + \sum_{i=r+1}^{n} a_i w_i. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que la projection de v sur W est donnée par la formule

$$\operatorname{proj}(v, W) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i.$$

Exemple 2.7 : Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par $v_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$ et $v_2 = (1, -1, 2, -1, 1)$. Soit un autre vecteur $v = (1, 2, 3, 4, 6)$. Déterminons la projection de v sur W.

- Remarquons d'abord que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Donc $\{v_1, v_2\}$ est une base orthogonale de W.
- Alors, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}(v, W) &= \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2, \quad \text{où} \\
\frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} &= \frac{1+4+3+8+6}{1+4+1+4+1} = \frac{22}{11} = 2, \\
\frac{\langle v, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} &= \frac{1-2+6-4+6}{1+1+4+1+1} = \frac{7}{8}.
\end{aligned}$$

- D'où,

$$\operatorname{proj}(v, W) = 2v_1 + \frac{7}{8} v_2 = \frac{1}{8}(23,\ 25,\ 30,\ 25,\ 23).$$