UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Calcul Différentiel (MATH 1073) - Annexe B: Géométrie analytique

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

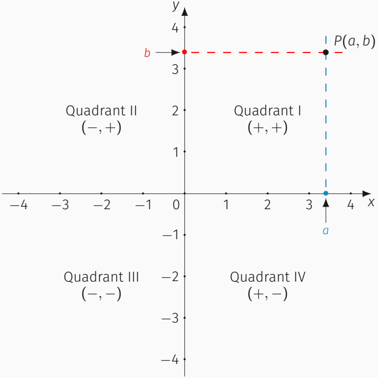
Sommaire

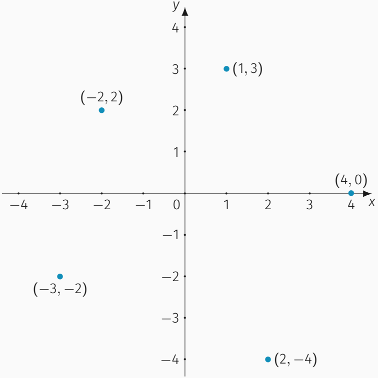
Plan de coordonnées ou plan cartésien

Plan de coordonnées ou plan cartésien (noté $\mathbb{R}^2$)

- Pour identifier les points dans le plan, on le munit d'un système de coordonnées.

- Le plan est appelé **plan de coordonnées** ou **plan cartésien**, noté $\mathbb{R}^2$.





Plan de coordonnées ou plan cartésien

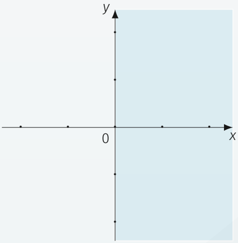
- Tout point P du plan est localisé par un seul couple de nombre réels (a, b):
  - Le premier nombre $\boxed{a}$ s'appelle l'**abscisse** de P.
  - Le second nombre $\boxed{b}$ s'appelle l'**ordonnée** de P.
- Les axes $0x$ et $0y$ sont les **axes de coordonnées** et ils divisent le plan cartésien en quatre quadrants, étiquetés I, II, III et IV.
- Remarquez que les points du **premier quadrant** ont leurs deux coordonnées x et y **positives**.

Exemple 1.1: Décrivez et coloriez les régions définies par les ensembles:

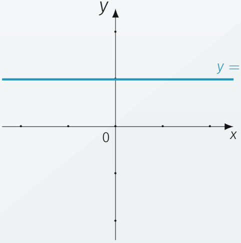
- $\{(x,y) \mid x \geq 0\}$
- $\{(x,y) \mid y = 1\}$
- $\{(x,y) \mid |y| < 1\}$

Solution

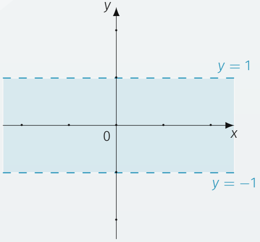
- Les points d'abscisse nulle ou positive se trouvent sur l'axe $0y$ ou à droite de celui-ci, comme le montre la figure à gauche.



$x \geq 0$



$y = 1$



$|y| < 1 \iff -1 < y < 1$

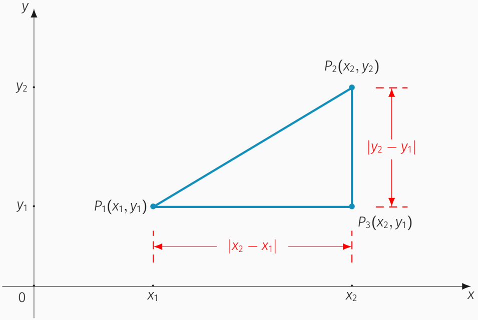
- Les points dont l'ordonnée est 1 est une droite horizontale.

- Les points du plan dont l'ordonnée y est comprise entre -1 et 1.

- Il a été vu à l'énoncé 7. que la distance entre deux points a et b sur un axe est $|a-b| = |b-a|$.

- Ainsi, la distance entre les deux points $P_1(x_1, y_1)$ et $P_3(x_2, y_1)$ sur une horizontale mesure $|x_2 - x_1|$.

- Et la distance entre les deux points $P_2(x_2, y_2)$ et $P_3(x_2, y_1)$ sur une verticale mesure $|y_2 - y_1|$.



Remarque : Le triangle $P_1P_2P_3$ de la figure précédente est rectangle.

- Pour mesurer la distance, notée $|P_1P_2|$, entre les deux points $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$, on applique ainsi le Théorème de Pythagore

$$|P_1P_2|^2 = |P_1P_3|^2 + |P_2P_3|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Formule de la distance

La distance entre les points $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ est égale à

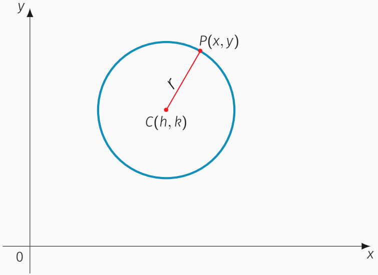
$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemple 1.2: Calculez la distance entre les points $(1, -2)$ et $(5, 3)$.

Les cercles

- Exploitons la formule de la distance pour déterminer l'équation d'un cercle de rayon r centré au point $C(h, k)$.

- Par définition, le cercle est l'ensemble de tous les points $P(x, y)$ dont la distance au centre $C(h, k)$ est ègale au rayon r (voyez la figure).



- Dès lors, P appartient au cercle si et seulement si $|PC| = r$ c'est à dire

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Équation d'un cercle

Une équation du cercle de centre (h, k) et de rayon r est

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

En particulier, si le centre est l'origine $O(0,0)$, l'équation devient

$$x^2+y^2=r^2.$$

Exemple 2.1:

- Le cercle de rayon 3 et de centre $(2,-5)$ a pour équation

$$(x-2)^2+(y+5)^2=9$$

- Soit l'équation $x^2+y^2+2x-6y+7=0.$
  - Montrez qu'il s'agit de l'équation d'un cercle.
  - Faites alors le graphique de cette équation.

Les droites

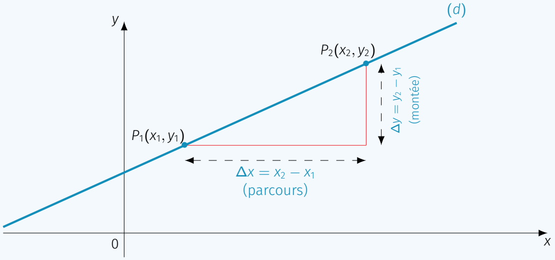
▷ Pour déterminer l'équation d'une droite (d), on se sert de sa *pente* qui est une **mesure de sa raideur**.

Définition

- La **pente** de la droite non verticale (d) qui passe par les points $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ est définie par

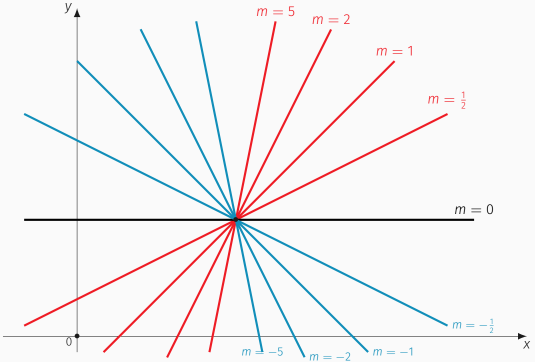
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

- La pente d'une droite verticale n'est pas définie, alors que celle d'une droite horizontale est nulle.



- Par conséquent, la pente est le **taux de variation** de y par rapport à x.

- Le fait que (d) est une ligne droite, explique pourquoi ce taux de variation est constant.



- La figure exhibe quelques droites marquées de leur pente.

- Celles dont la pente est positive sont inclinées vers le haut à droite; celles dont la pente est négative penchent vers le bas à droite.

Équation de la droite (d) passant par $P_1(x_1, y_1)$ et de pente m

- Pour tout autre point $P(x, y)$ ($\neq P_1(x_1, y_1)$, c'est à dire $x \neq x_1$) sur la droite (d), nous avons sa pente m donnée par la formule

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

- Cette équation, écrite sous la forme suivante, donne l'équation de (d):

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Forme point-pente de l'équation d'une droite

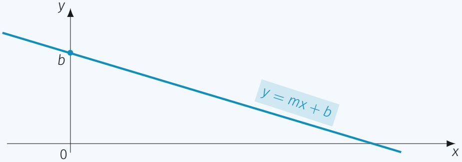
Une équation de la droite qui passe par le point $P_1(x_1, y_1)$ et de pente m est

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

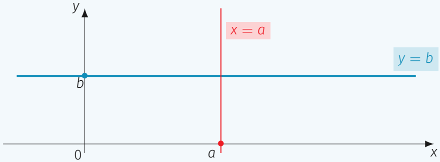
Exemple 3.1: Écrivez une équation de la droite qui passe par les points $(-1, 2)$ et $(3, -4)$.

Forme pente-ordonnée à l'origine de l'équation d'une droite

- Une équation de la droite de pente m et d'ordonnée à l'origine b est donnée par $\boxed{y = mx + b}$.



- En particulier, si la droite est horizontale, sa pente est $m = 0$ et son équation est donnée par $\boxed{y = b}$.



Exemple 3.2: Représentez graphiquement la solution de l'inéquation $x + 2y > 5$.

Des droites parallèles et des droites perpendiculaires

- Que des droites soient parallèles ou perpendiculaires dépend de leur pente.

Droites parallèles et perpendiculaires

- Deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.
- Deux droites de pente m_1 et m_2 sont perpendiculaires si et seulement si $m_1 m_2 = -1$, c'est à dire si une pente est l'opposé de l'autre:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Exemple 4.1:

- Déterminez une équation de la droite parallèle à la droite $4x + 6y + 5 = 0$ passant par le point $(5, 2)$.

- Démontrez la perpendiculaire des droites $2x + 3y = 1$ et $6x - 4y - 1 = 0$.

Les Sections coniques: Paraboles, Ellipses et Hyperboles

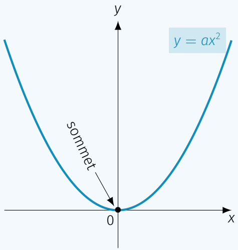
- Nous passons en revue les définitions géométriques des paraboles, des ellipses et des hyperboles et de leur équations standard.

- Ces courbes portent le nom de coniques, car étants les diverses intersections possibles d'un cône par un plan.

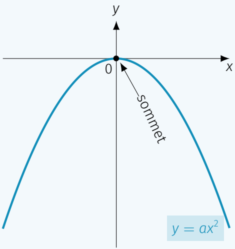
L'équation de la parabole

- L'équation de la parabole est simple si on place son sommet à l'origine et symétriquement à l'axe Oy. Elle est définie par

$$y = ax^2$$



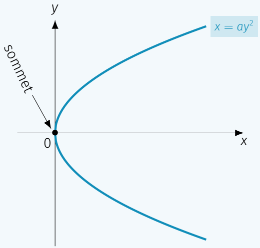
Parabole ouverte vers le haut: a > 0



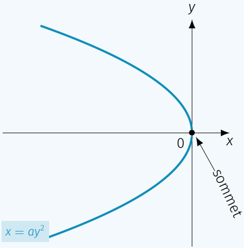
Parabole ouverte vers le bas: a < 0

- Si on échange x et y dans l'équation $y = ax^2$, on obtient toujours une parabole de sommet placé à l'origine, symétriquement à l'axe Ox et d'équation

$$x = ay^2$$



Parabole ouverte vers la droite: a > 0

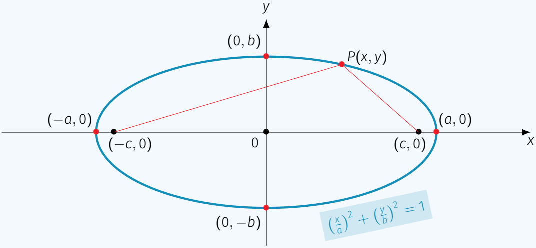


Parabole ouverte vers la gauche: a < 0

Exemple 5.1: Ombrez la région délimitée par la parabole $x = 1 - y^2$ et la droite $x + y + 1 = 0$.

- L'équation la plus simple d'une ellipse s'écrit comme suit

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \tag{1}$$

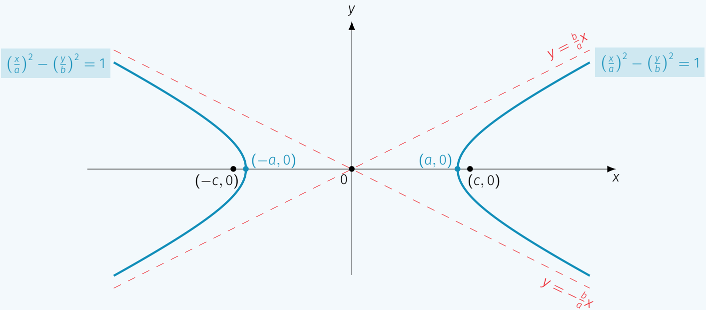


- L'équation de l'ellipse (1) coupe l'axe $0x$ en $(\pm a, 0)$, l'axe $0y$ en $(0, \pm b)$ et les foyers sont en $(\pm c, 0)$ où $c^2 = a^2 - b^2$.

Exemple 5.2: Tracez le graphique de $9x^2 + 16y^2 = 144$ et localisez les foyers.

- L'équation la plus simple d'une hyperbole s'écrit comme suit

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad (2)$$



- L'équation de l'hyperbole (2) coupe l'axe $0x$ en $(\pm a, 0)$ et les foyers sont en $(\pm c, 0)$ où $c^2 = a^2 + b^2$.

Exemple 5.3: Déterminez les foyers et les asymptotes de l'hyperbole $9x^2 - 16y^2 = 144$ et dessinez-la.

Exercices suggérés

Exercices suggérés

1. Trouvez une équation de la droite passant par le point de coordonnées $(0, 1)$ et qui est perpendiculaire à la droite d'équation $x - 3y + 2 = 0$.

2. Identifiez précisément la courbe dont l'équation est $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 6$.

3. Les droites $y - ax = 4$ et $2y = 6x + 8$ sont paralléles. Déterminez la valeur de a.

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)
- Disponibilité:

  Lundi 13:00 - 15:00, MRR B-214

  Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214

  Jeudi 12:00 - 13:15, MRR B-214