



Suites, séries, calcul dans \mathbb{R}^n (MATH 2013)

Examen 1

05 octobre 2023, Durée 1h15

 Professeur : Ibrahima Dione

Nom étudiant.e. : _____

Numéro étudiant.e. : _____

Prenez le temps de lire l'examen au complet avant de commencer. Vérifiez qu'il y a 9 pages à votre examen. L'examen est composé de **3 questions**, pour un total de 25 points.

- Ceci est un examen à livres fermés et aucune note du cours n'est permise.
- L'utilisation de la calculatrice n'est pas permise.
- Répondez aux questions dans l'espace fourni.
- Utilisez le verso des feuilles si nécessaire.

Exercice 1 (9 points)

Calculer la limite, si elle existe, de chacune des suites suivantes

1. $\left\{ n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \right\}$

2. $\left\{ \frac{\ln n}{\sqrt{n^2 + 1}} \right\}$

3. $\left\{ \frac{1}{(n+1)^n} \right\}$

Exercice 2 (6 points)

Soit la suite $\{a_n\}$ définie par, pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}, \quad a_1 = 1.$$

1. Montrer que $\{a_n\}$ est croissante et que $1 \leq a_n < 3$, pour tout n positif.

2. Déduire que $\{a_n\}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 3 (10 points)

Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle converge ou diverge.
Dans le cas où elle converge, déterminer sa somme.

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right)$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(\frac{n}{\sqrt{2n^2 + 1}} \right) + \frac{1}{3^n} \right)$$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} 4^{1-n}$$