UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Hiver 2025

SÉRIE 5 - Algèbre linéaire (MATH 2673)

Exercice 1

Soit $M_{n\times n}$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Soit U le sous-espace verctoriel de $M_{n\times n}$ formé des matrices triangulaires inférieures et V le sous-espace verctoriel de $M_{n\times n}$ formé des matrices triangulaires supérieures.

a Montrer que $M_{n\times n} = U + V$.

b Déterminer la dimension de $U \cap V$.

b Est-ce que $M_{n\times n} = U \oplus V$?

Exercice 2

Soit $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ où

$$u_1 = (0,0,1)\,,\ u_2 = (0,1,1) \text{ et } u_3 = (1,1,1)\,.$$

Soit l'opérateur linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$T(u_1) = (-3,-4,1)\,,\ T(u_2) = (-1,1,5) \text{ et } T(u_3) = (0,3,6)\,.$$

a Déterminez $T(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

b T est-il un isomorphisme ?

Exercice 3

Soit P_2 l'espace vectoriel des polynômes, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à deux en la variable t. Soit l'application linéaire $F : P_2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$F(at^2 + bt + c) \;=\; (b - 2c, a - b + 2c, -a + b - c)\,.$$

a Montrer que F est un isomorphisme.

b Déterminer l'application linéaire inverse F^{-1}.

Exercice 4

Soit l'application linéaire $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$F(x, y, z) = (x - 4y - 2z,\ 2x + y - 7z,\ -3y + 9z,\ -x + 4y - 5z).$$

a Déterminez une base de $\operatorname{Im} F$ et la dimension de $\operatorname{Im} F$.

b F est-elle injective ?

Exercice 5

Soit V et W deux espaces vectoriels sur un même corps K. Soit $F : V \to W$ une application linéaire injective et $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ un sous-ensemble de V. Montrer que si $\{F(v_1), F(v_2), ..., F(v_p)\}$ est linéairement dépendant alors $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ est linéairement dépendant.