Chapitre 6

Dérivation et intégration numériques

Sommaire

Au chapitre précédent, on cherchait à évaluer la fonction $f(x)$ connue seulement aux points de collocation ou d'interpolation $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \cdots, n$. Dans le présent chapitre, l'objectif est de chercher une approximation

- des dérivées

$$f'(x_i),\ f''(x_i),\ f'''(x_i)\ \text{ et }\ f^{(4)}(x_i),\ i = 0, 1, \cdots, n, \tag{6.1}$$

- et de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx, \tag{6.2}$$

utilisant seulement les points connus de cette fonction $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, 2, \cdots, n$.

Note:

- On parle ainsi de dérivation et d'intégration numérique.
- Bien qu'en théorie on soit en mesure d'estimer les dérivées de tout ordre, en pratique on dépasse rarement l'ordre 4. Cela s'explique par le fait que la différentiation numérique est un procédé numériquement instable.

1 Dérivation numérique

Nous savons que la fonction $f(x)$ peut être convenablement estimée à l'aide d'un polynôme $p_n(x)$ de degré n, avec une certaine erreur. La méthode du développement de Taylor par exemple, permet d'écrire $f(x)$ comme suit

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x), \tag{6.3}$$

où $r_n(x)$ est l'erreur de troncature. Alors que les méthodes d'interpolation étudiées au chapitre précédent, permettent d'estimer la fonction $f(x)$ par

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x), \tag{6.4}$$

où $E_n(x)$ est l'erreur d'interpolation qui est d'ordre $(n + 1)$.
Nous utiliserons donc un mélange de ces deux approches (développement de Taylor en (6.3) ou polynôme d'interpolation en (6.4)) pour aborder la différentiation numérique, c'est à dire pour définir une approximation des dérivées définies en (6.1). Tout comme pour l'interpolation, nous avons le choix entre plusieurs polynômes de degré plus ou moins élevé. Et de ce choix dépendent l'ordre et la précision de l'approximation de la dérivée qui sera définie.

1.1 - Approximation de la dérivée première $f'(x_i)$

Si l'on a deux points de collocation $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ et grâce à la formule d'interpolation de Newton, on peut définir le polynôme $p_1(x)$ de degré 1 passant par ces points et l'erreur d'interpolation $E_1(x)$ tel que

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)}_{p_1(x)} + \underbrace{\frac{f^{(2)}(\zeta(x))}{2!}(x - x_0)(x - x_1)}_{E_1(x)}, \tag{6.5}$$

pour un certain $\zeta(x)$ compris dans l'intervalle $[x_0 \quad x_1]$. En dérivant l'expression (6.5),

$$f'(x) = f[x_0, x_1] + E'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + E_1'(x), \tag{6.6}$$

où

$$E_1'(x) = \frac{f^{(3)}(\zeta(x))}{2!}\zeta'(x)(x-x_0)(x-x_1) + \frac{f^{(2)}(\zeta(x))}{2!}(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(\zeta(x))}{2!}(x-x_1). \tag{6.7}$$

En prenant $x = x_0$ dans (6.6), en simplifiant la dérivée du terme d'erreur $E_1'(x_0)$ dans (6.7) et en posant $h = x_1 - x_0$, on obtient la dérivée $f'(x_0)$ à partir de la dérivée (6.6)

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{hf^{(2)}(\zeta_0)}{2!}, \text{ pour } \zeta_0 \in [x_0 \quad x_1]. \tag{6.8}$$

Remarque(s) : La relation (6.8) est appelé la différence avant d'ordre 1 en x_0. On l'appelle ainsi car pour évaluer la dérivée en $x = x_0$, on cherche de l'information vers l'avant (en $x = x_1$).

Et en remplaçant x par x_1 dans (6.6), et en simplifiant la dérivée du terme d'erreur $E_1'(x_1)$ dans (6.7), on a la dérivée $f'(x_1)$ définie par

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{hf^{(2)}(\zeta_1)}{2!}, \text{ pour } \zeta_1 \in [x_0 \quad x_1]. \tag{6.9}$$

Remarque(s) : La relation (6.9) est nommée la différence arrière d'ordre 1 en x_1 car on cherche l'information à l'arrière, pour l'évaluation de la dérivée en x_1.

Par contre avec trois points de collocations $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, on peut approximer la fonction $f(x)$ par un polynôme de Newton $p_2(x)$ de degré 2

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)}_{p_2(x)} + \underbrace{\frac{f^{(3)}(\zeta(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}_{E_2(x)}, \tag{6.10}$$

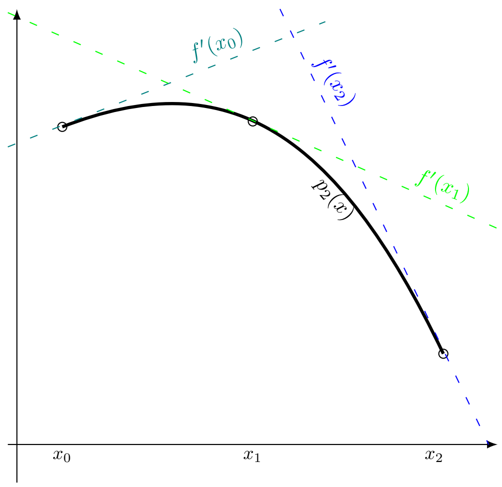
pour un certain $\zeta(x)$ compris dans l'intervalle $[x_0 \quad x_2]$. Ainsi la dérivée de la fonction $f(x)$ serait définie par

$$f'(x) = f[x_0,x_1] + f[x_0,x_1,x_2](2x - (x_0 + x_1)) + E_2'(x), \tag{6.11}$$

où

$$\begin{aligned} E_2'(x) = {} & \frac{f^{(4)}(\zeta(x))}{3!}\zeta'(x)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_1) + \frac{f^{(3)}(\zeta(x))}{3!}(x-x_1)(x-x_2) \\ & + \frac{f^{(3)}(\zeta(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_2) + \frac{f^{(3)}(\zeta(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_1). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Lorsque x prend successivement les valeurs x_0, x_1 et x_2, après simplification de la dérivée du terme d'erreur $E_2'(x)$ et en supposant $(x_1 - x_0) = (x_2 - x_1) = h$, on obtient les approximations d'ordre 2 suivantes



Interprétation géométrique des formules aux différences d'ordre 2

Formules de différences d'ordre 2 pour $f'(x)$

$$f'(x_0) = \frac{-f(x_2)+4f(x_1)-3f(x_0)}{2h} + \frac{h^2 f'''(\zeta_0)}{3}$$

Différence avant d'ordre 2

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_0)}{2h} - \frac{h^2 f'''(\zeta_1)}{6}$$

Différence centrée d'ordre 2

$$f'(x_2) = \frac{3f(x_2)-4f(x_1)+f(x_0)}{2h} + \frac{h^2 f'''(\zeta_2)}{3}$$

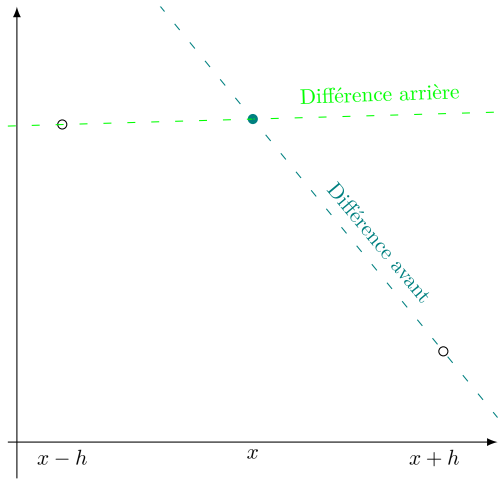
Différence arrière d'ordre 2

Remarque(s) : Toutes ces formules aux différences sont d'ordre 2. Les mentions avant, centrée et arrière renvoient au point où l'on calcule la dérivée et aux points utilisés pour la calculer :

- Ainsi, la différence avant est évaluée en x_0 sur la base des valeurs situées vers l'avant, soit en x_1 et en x_2.
- La différence arrière fixe la dérivée en $x = x_2$ avec l'appui des valeurs de la fonction en x_0 et en x_1.
- La différence centrée, quant à elle, fait intervenir des valeurs situées de part et d'autre de x_1.

Note: La figure ci-dessus illustre les différentes possibilités où on détermine un polynôme de degré 2 dont la pente en x_0, en x_1 et en x_2 donne respectivement les différences avant, centrée et arrière.

On peut aussi convenir de toujours évaluer la dérivée en x. Dans ce cas, on utilise les valeurs de $f(x+h)$ et de $f(x+2h)$ pour la différence avant et les valeurs de $f(x+h)$ et de $f(x-h)$ pour la différence centrée. En ce qui concerne le terme d'erreur, on ne retient que son ordre. Les tableaux suivants résument la situation.



Interprétation géométrique des formules aux différences d'ordre 1

Formules de différences finies d'ordre 1 pour $f'(x)$
$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \mathcal{O}(h)$$ Différence avant d'ordre 1
$$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h)$$ Différence arrière d'ordre 1

Remarque(s) : La figure ci-dessus illustre les deux possibilités de la différence d'ordre 1 où on estime la dérivée par la pente du segment de droite joignant les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$.

Formules de différences d'ordre 2 pour $f'(x)$
$$f'(x) = \frac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$ Différence avant d'ordre 2
$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$ Différence centrée d'ordre 2
$$f'(x) = \frac{3f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$ Différence arrière d'ordre 2

Exemple 1

On tente d'évaluer la dérivée de $f(x) = e^x$ en $x = 0$. La solution exacte est dans ce cas $f'(0) = e^0 = 1$. On peut dès lors comparer ce résultat avec ceux que l'on obtient par les différentes formules aux différences.

- Par exemple, la différence avant d'ordre 1 donne pour $h = 0,1$

$$f'(0) \simeq \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = \frac{e^{0,1} - 1}{0,1} = 1,05170918$$

Une valeur plus petite de h conduit à un résultat plus précis. Ainsi, si $h = 0,05$

$$f'(0) \simeq \frac{e^{0,05} - 1}{0,05} = 1,0254219$$

> On obtient ainsi une erreur à peu près deux fois plus petite, ce qui confirme que cette approximation est d'ordre 1.

- Si l'on utilise cette fois une différence centrée d'ordre 2, on obtient avec $h = 0,05$

$$f'(0) \simeq \frac{e^{0,05} - e^{-0,05}}{2(0,05)} = 1,0004167$$

qui est un résultat beaucoup plus précis. Avec $h = 0,025$, on obtient

$$f'(0) \simeq \frac{e^{0,025} - e^{-0,025}}{2(0,025)} = 1,00010418$$

> soit une erreur à peu près 4 fois plus petite qu'avec $h = 0,05$. On obtiendrait des résultats similaires avec les différences avant et arrière d'ordre 2.

1.2 - Approximation de la dérivée seconde $f''(x_i)$

Pour définir une approximation de la dérivée seconde, on procédera de la même façon, c'est à dire dériver un polynôme d'interpolation. Par contre, dériver plusieurs fois le terme d'erreur (mesurer déjà la complexité de la dérivée première à la relation (6.12)) est long et fastidieux. Ainsi, on suivra une approche légèrement différente basée sur le développement de Taylor.
Pour reconstituer la dérivée seconde à partir du développement de Taylor, il faut un aperçu de la forme de celle-ci. Et pour cela, il suffit de dériver deux fois le polynôme $p_2(x)$ de degré 2 déjà utilisé pour calculer la dérivée première

$$p_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

dont la dérivée seconde est donnée par

$$p_2''(x) = 2f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} \tag{6.13}$$

qui constitue une approximation de la dérivée seconde $f''(x)$ partout dans l'intervalle $[x_0 \quad x_2]$.
Pour effectuer un developpement de Taylor reconstituant l'approximation (6.13) évaluée aux points x_0, x_1 et x_2, on distinguera trois cas :

- L'approximation de la dérivée seconde $f''(x_0)$ en $x = x_0$: Si $x = x_0$, l'équation (6.13) à reconstituer devient

$$f''(x_0) \simeq p_2''(x_0) = \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2}$$

dont on peut remarquer immédiatement qu'il s'agit d'une formule aux différences avant. Dans un premier temps, on a ce développement de Taylor autour de x_0

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + f'(x_0)(2h) + \frac{f''(x_0)}{2!}(2h)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(2h)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(2h)^4 + \cdots$$

Et dans un deuxième temps, on a le dévelopement autour de x_0 suivant

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}h^4 + \cdots$$

On parvient alors à

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2} &= \frac{f''(x_0)h^2+f'''(x_0)h^3+\mathcal{O}(h^4)}{h^2}\\ &= f''(x_0)+f'''(x_0)h+\mathcal{O}(h^2)\\ &= f''(x_0)+\mathcal{O}(h)\end{aligned}$$

Remarque(s) : L'erreur liée à cette approximation est $\mathcal{O}(h)$. Cette différence avant est donc une approximation d'ordre 1 de la dérivée seconde.

- L'approximation de la dérivée seconde $f''(x_1)$ en $x = x_1$: Si $x = x_1$, l'équation (6.13) à reconstituer devient

$$f''(x_1) \simeq p_2''(x_1) = \frac{f(x_1+h)-2f(x_1)+f(x_1-h)}{h^2}$$

qui est une différence centrée. Comme dans le cas précédent, on fait un développements de Taylor autour de x_1

$$f(x_1+h) = f(x_1)+f'(x_1)h+\frac{f''(x_1)}{2!}h^2+\frac{f'''(x_1)}{3!}h^3+\frac{f^{(4)}(x_1)}{4!}h^4+\cdots$$

En remplaçant h par $(-h)$, on obtient également

$$f(x_1-h) = f(x_1)-f'(x_1)h+\frac{f''(x_1)}{2!}h^2-\frac{f'''(x_1)}{3!}h^3+\frac{f^{(4)}(x_1)}{4!}h^4+\cdots$$

Une fois combinées, ces deux relations deviennent

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1+h)-2f(x_1)+f(x_1-h)}{h^2} &= \frac{f''(x_1)h^2+\frac{f^{(4)}(x_1)}{12}h^4+\mathcal{O}(h^6)}{h^2}\\ &= f''(x_1)+\frac{f^{(4)}(x_1)}{12}h^2+\mathcal{O}(h^4)\\ &= f''(x_1)+\mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

Remarque(s) : L'erreur liée à cette approximation est $\mathcal{O}(h^2)$, c'est-à-dire une approximation d'ordre 2 de la dérivée $f''(x_1)$.

- L'approximation de la dérivée seconde $f''(x_2)$ en $x = x_2$: Si $x = x_2$, en reprenant un raisonnement similaire à celui du premier cas, on pourrait reconstituer l'équation (6.13) en montrant que c'est une approximation d'ordre 1 de la dérivée $f''(x_2)$.

Remarque(s) : Il peut sembler surprenant de constater que la même équation aux différences, obtenue à partir d'un polynôme de degré 2, soit d'ordre 1 en $x = x_0$ et en $x = x_2$ et soit d'ordre 2 en $x = x_1$. Cela s'explique par la symétrie des différences centrées, qui permet de gagner un ordre de précision.

On peut obtenir toute une série de formules aux différences finies en utilisant des polynômes de degré plus ou moins élevé et en choisissant les développements de Taylor appropriés pour en obtenir l'ordre de convergence. Les tableaux suivants présentent les principales d'entre elles.

Remarque(s) : La différentiation est un procédé numériquement instable. Toutes les formules de différences finies dépendent d'un paramètre h qui est la distance entre les points d'interpolation. On pourrait croire, de façon intuitive, que la précision du résultat augmente à mesure que diminue la valeur de h. Dans le cas de la différentiation numérique, il y a une limite aux valeurs de h qui peuvent être utilisées. En effet, si l'on prend, par exemple, une différence centrée pour estimer la dérivée première, c'est-à-dire

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

on constate que, lorsque h tend vers 0, le numérateur contient la soustraction de deux termes très proches l'un de l'autre. Cela résulte en l'élimination par soustraction (voir la section chapitre 1) de plusieurs chiffres significatifs lorsque h est trop petit. À quoi s'ajoute une division par un nombre très petit.

Formules de différences finies pour $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{f(x-2h)-2f(x-h)+f(x)}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

Différence arrière d'ordre 1

$$f''(x) = \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

Différence avant d'ordre 1

$$f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Différence centrée d'ordre 2

$$f''(x) = \frac{-f(x+2h)+16f(x+h)-30f(x)+16f(x-h)-f(x-2h)}{12h^2} + \mathcal{O}(h^4)$$

Différence centrée d'ordre 4

Formule de différences finies pour $f^{(4)}(x)$

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{h^4} + \mathcal{O}(h^2)$$

Différence centrée d'ordre 2

1.3 - Extrapolation de Richardson

La technique d'Extrapolation de Richardson permet d'augmenter la précision d'une méthode d'approximation et est valable non seulement pour la différentiation et l'intégration numériques, mais aussi pour l'interpolation, la résolution numérique des équations différentielles, etc.
Afin d'illustrer cette méthode, considérons une approximation numérique notée $Q_{app}(h)$ d'ordre n, d'une certaine quantité exacte Q_{exa} inconnue

$$Q_{exa} = Q_{app}(h) + \mathcal{O}(h^n)$$

où en explicitant la notation $\mathcal{O}(h^n)$, on a

$$Q_{exa} = Q_{app}(h) + c_n h^n + c_{n+1}h^{n+1} + c_{n+2}h^{n+2} + \cdots \tag{6.14}$$

et où les constantes $c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \cdots$ dépendent de la méthode numérique utilisée.

Remarque(s) :

- Généralement, plus h est petit, plus l'approximation (6.14) est précise.
- La méthode d'extrapolation de Richardson consiste à obtenir, à partir de l'approximation (6.14) d'ordre n, une

nouvelle approximation d'ordre au moins $(n+1)$.

Il suffit, pour cela, de remplacer h par $\frac{h}{2}$ dans l'équation (6.14)

$$Q_{exa} = Q_{app}\left(\frac{h}{2}\right) + c_n\left(\frac{h}{2}\right)^n + c_{n+1}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} + c_{n+2}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+2} + \cdots \tag{6.15}$$

et à combiner les relations (6.14) et (6.15) de telle sorte que les termes d'ordre n (en l'occurence $c_n h^n$ et $c_n\left(\frac{h}{2}\right)^n$) disparaissent. Cela est possible si l'on multiplie l'équation (6.15) par 2^n pour obtenir

$$2^n Q_{exa} = 2^n Q_{app}\left(\frac{h}{2}\right) + c_n\left(h\right)^n + c_{n+1}\left(\frac{h^{n+1}}{2}\right) + c_{n+2}\left(\frac{h^{n+2}}{2^2}\right) + \cdots$$

En soustrayant l'énoncé (6.14) de cette dernière relation, on obtient

$$(2^n-1)Q_{exa} = 2^n Q_{app}\left(\frac{h}{2}\right) - Q_{app}(h) - \frac{1}{2}c_{n+1}h^{n+1} - \frac{3}{4}c_{n+2}h^{n+2} + \cdots$$

qui s'écrit plus simplement

$$Q_{exa} = \frac{2^n Q_{app}\left(\frac{h}{2}\right) - Q_{app}(h)}{2^n-1} + \mathcal{O}\left(h^{n+1}\right) \tag{6.16}$$

Remarque(s) :

- L'expression de droite de la relation (6.16) est donc une approximation d'ordre au moins $(n+1)$ de Q_{exa}.
- L'extrapolation de Richardson permet donc de gagner au moins un ordre de convergence.
- On peut en gagner davantage si, on a $c_{n+1}=0$. Dans ce cas, la nouvelle approximation est d'ordre $(n+2)$.

Exemple 2

On a vu qu'en utilisant une différence avant d'ordre 1 pour calculer la dérivée de e^x en $x=0$. On obtient :

- Pour $h=0,1$

$$f'(0) \simeq \frac{e^{0+h}-e^0}{h} = \frac{e^{0,1}-1}{0,1} = 1,05170918 = Q_{app}(0,1)$$

- Et pour $h=0,05$, on a

$$f'(0) \simeq \frac{e^{0,05}-1}{0,05} = 1,0254219 = Q_{app}(0,05)$$

On peut maintenant faire le calcul à l'aide de l'extrapolation de Richardson (définie à l'équation (6.16)) avec $n=1$:

$$f'(0) \simeq \frac{2^1 Q_{app}(0,05) - Q_{app}(0,1)}{2^1-1} = (2)(1,0254219) - 1,05170918 = 0,99913462$$

qui est une approximation d'ordre 2 et donc plus précise de $f'(0)$.
De même, si l'on utilise une différence centrée d'ordre 2, on obtient

- Pour $h=0,05$

$$f'(0) \simeq \frac{e^{0,05}-e^{-0,05}}{2(0,05)} = 1,0004167$$

- et avec $h=0,025$, on a

$$f'(0) \simeq \frac{e^{0,025}-e^{-0,025}}{2(0,025)} = 1,00010418$$

Dans ce cas, l'extrapolation de Richardson permet de gagner 2 ordres de précision puisque seules les puissances paires de h apparaissent dans le terme d'erreur. Plus précisément, on a

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{f'''(x)h^2}{3!} + \frac{f^{(5)}(x)h^4}{5!} + \mathcal{O}\left(h^6\right)$$

En effectuant une extrapolation de Richardson à cette différence centrée qui est d'ordre $n = 2$, on obtient

$$f'(0) \simeq \frac{2^2 Q_{app}(0,025) - Q_{app}(0,05)}{2^2 - 1} = \frac{(4)(1,00010418) - 1,0004167}{3} = 1,000000007$$

qui est une approximation d'ordre 4 de la solution exacte.

2 Intégration numérique

L'intégration numérique est basée principalement sur la relation

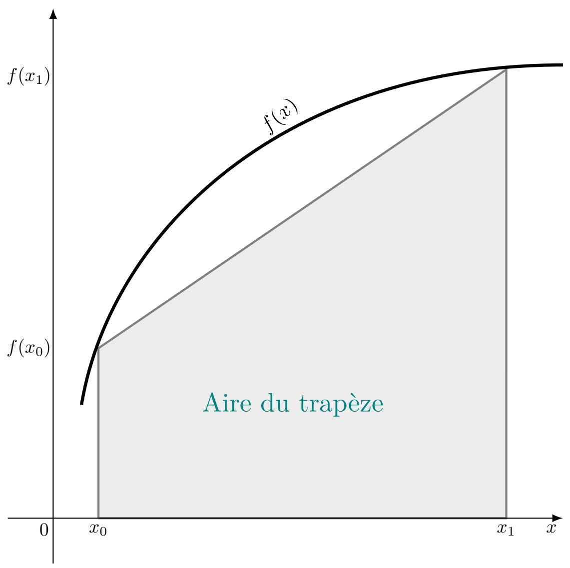
$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} p_n(x)dx + \int_{x_0}^{x_n} E_n(x)dx \tag{6.17}$$

où $p_n(x)$ est un polynôme d'interpolation et $E_n(x)$ est l'erreur qui y est associée.

Remarque(s) : En principe, plus n est élevé, plus grande est la précision liée à la valeur de l'intégrale recherchée. En pratique cependant, on emploie rarement des valeurs de n supérieures à 4.

2.1 - Formules de Newton-Cotes simples et composées

2.1.1 - Méthode des trapèzes



Méthode du trapèze

On souhaite évaluer, si $f(x)$ est une fonction connue seulement en deux points $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ ou encore une fonction n'ayant pas de primitive, l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$

La solution qui vient tout de suite à l'esprit consiste à remplacer $f(x)$ par le polynôme $p_1(x)$ de degré 1 passant par ces points tel que l'illustre la figure.
La valeur approximative de l'intégrale correspond à l'aire sous la courbe du polynôme. Cette aire forme un trapèze qui donne son nom à la méthode du trapèze :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \simeq \underbrace{\frac{(x_1 - x_0)}{2}(f(x_0) + f(x_1))}_{\text{Aire du trapèze}} \tag{6.18}$$

Remarque(s) : Évidemment, l'approximation est grossière et l'on peut d'ores et déjà soupçonner que le résultat sera peu précis.

En choisissant $p_1(x)$ comme étant un polynôme d'interpolation de Newton (voir chapitre 5), la formule d'intégration (6.18) obtenue géométriquement, se prouve rigoureusement comme suit

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} E_1(x)dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(\zeta(x))}{2!}(x - x_0)(x - x_1)dx\end{aligned}$$

ce qui peut également s'écrire, si l'on intègre le polynôme

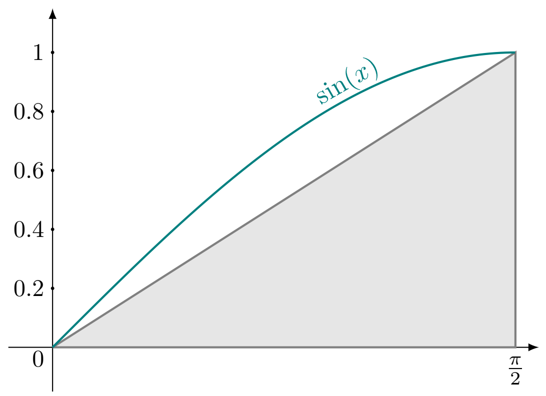
$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} E_1(x)dx \\ &= \frac{(x_1 - x_0)}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(\zeta(x))}{2!}(x - x_0)(x - x_1)dx \end{aligned} \tag{6.19}$$

Remarque(s) :

- Le premier terme de droite de la relation (6.19) n'est rien d'autre que l'aire du trapèze décrit par la formule (6.18) (et représentée par la figure ci-dessus).
- Tandis que le deuxième terme de la relation (6.19) est l'erreur commise dont après simplification, la méthode du trapèze se résume donc à l'égalité suivante

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1)) - \frac{f''(\eta)}{12}h^3, \text{ pour } \eta \in [x_0 \quad x_1]$$

- La méthode du trapèze demeure peu précise, comme en témoigne l'exemple suivant.



Méthode du trapèze avec $f(x) = \sin(x)$

Exemple 3

Il s'agit d'évaluer numériquement l'intégrale suivante dont la valeur exacte est 1.

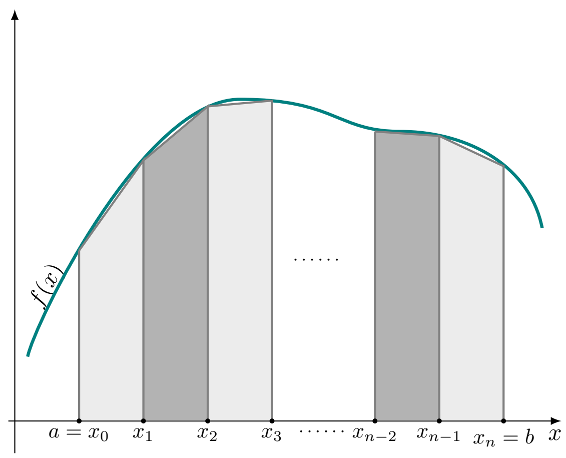
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$$

La méthode du trapèze donne dans ce cas

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = \frac{\frac{\pi}{2}}{2}\left(\sin(0)+\sin(\frac{\pi}{2})\right) = \frac{\pi}{4} = 0,785398164$$

qui est une piètre approximation de la valeur exacte 1.

Remarque(s) : Ce résultat peu impressionnant vient du fait que l'on approche la fonction $\sin(x)$ dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ au moyen d'un polynôme de degré 1. Cette approximation est assez médiocre, comme en témoigne la figure à coté.



Méthode des trapèzes composée

Une meilleure stratégie consiste à décomposer l'intervalle où l'on doit faire l'intégration, soit l'intervalle $[a, b]$, en n sous-intervalles de longueur

$$h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} \tag{6.20}$$

Les différents points engendrés sont notés x_i pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ et dans chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on peut utiliser la méthode du trapèze pour finallement obtenir l'approximation

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2\big[f(x_1)+f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\big] + f(x_n)\Big) \tag{6.21}$$

qui est la formule des trapèzes composée. Qu'en est-il du terme d'erreur ? Dans chacun des n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, on commet une erreur liée à la méthode du trapèze. l'erreur totale commise est

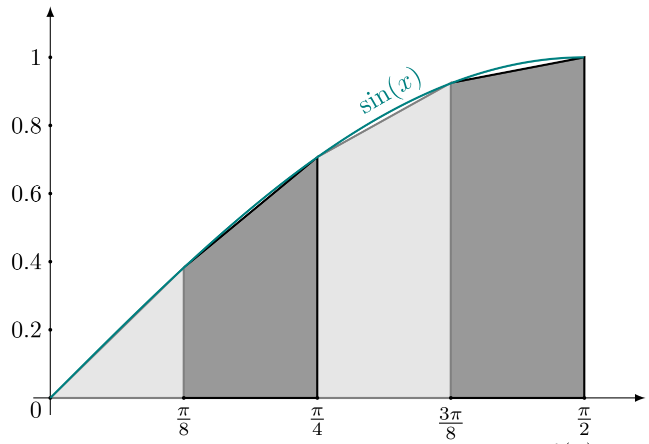
$$-\frac{b-a}{12}f''(\eta)h^2, \text{ pour } \eta \in [a, b] \tag{6.22}$$

la méthode des trapèzes composée est d'ordre 2.

Exemple 4

On reprend le calcul de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$ mais cette fois à l'aide de la méthode des trapèzes composée.

- Soit d'abord 4 intervalles de
$$h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{4} = \frac{\pi}{8}$$
tels que montre à la figure en (A). On a alors
$$I \simeq \frac{\frac{\pi}{8}}{2}\left(\sin(0) + 2\left[\sin(\frac{\pi}{8}) + \sin(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{3\pi}{8})\right] + \sin(\frac{\pi}{2})\right) = 0,9871158$$
soit une erreur absolue d'environ $0,01288$ par rapport à la solution exacte. On constate une nette amélioration en comparaison du résultat obtenu avec un seul intervalle.

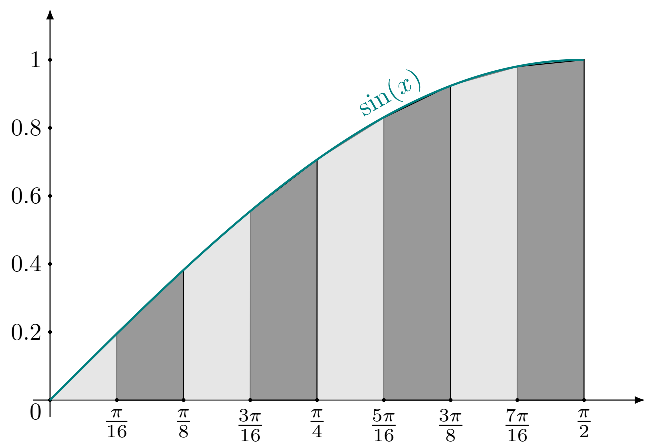


(A)

Méthode des trapèzes composée avec 4 intervalles, $f(x) = \sin(x)$

- Il est intéressant de refaire ce calcul avec 8 intervalles (voir figure (B)). La valeur de h est maintenant $\frac{\pi}{16}$ et l'on a
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \simeq \frac{\frac{\pi}{16}}{2}\Big(\sin(0) + 2\Big[\sin(\frac{\pi}{16}) + \sin(\frac{\pi}{8}) + \sin(\frac{3\pi}{16})$$
$$+ \sin(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{5\pi}{16}) + \sin(\frac{3\pi}{8}) + \sin(\frac{7\pi}{16})\Big] + \sin(\frac{\pi}{2})\Big) = 0,9967852$$
L'erreur absolue a été réduite à $0,0032$

> Cette erreur absolue est environ 4 fois plus petite que l'erreur obtenue avec 4 intervalles, ce qui confirme que cette méthode est d'ordre 2.



(B)

Méthode des trapèzes composée avec 8 intervalles, $f(x) = \sin(x)$

- On peut de plus utiliser l'extrapolation de Richardson pour améliorer la précision de ces deux résultats. En utilisant l'équation (6.16) avec $n = 2$, on obtient l'approximation d'ordre au moins 3 suivante
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \simeq \frac{2^2(0,9967852) - 0,9871158}{2^2 - 1} = 1,00000833$$

ce qui s'approche de plus en plus de la valeur exacte. Comme il sera démontré un peu plus loin, il s'agit en fait d'une approximation d'ordre 4.

Remarque(s) :

- La méthode du trapèze avec un seul intervalle est également connue sous le nom de méthode des trapèzes simple.
- La méthode des trapèzes composée est d'ordre 2. La méthode des trapèzes simple, bien que d'ordre 3, est rarement utilisée, car elle est trop imprécise.
- La méthode des trapèzes composée donne un résultat exact si la fonction $f(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. Cela s'explique par la présence de la dérivée seconde de $f(x)$ dans le terme d'erreur : celle-ci s'annule dans le cas de polynômes de degré 1.

Définition 2.1

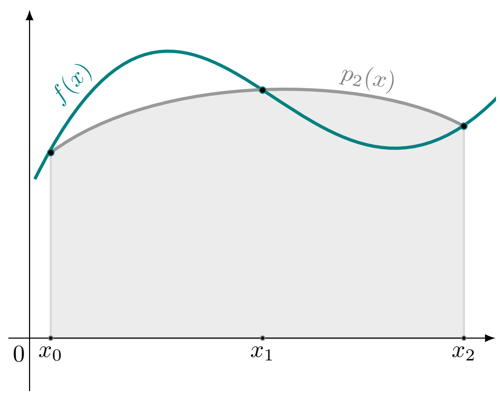
Les formules d'intégration numérique sont également appelées formules de quadrature.

Définition 2.2

Le degré d'exactitude ou encore le degré de précision d'une formule de quadrature est le plus grand entier n pour lequel la formule de quadrature est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n.

Note: Le degré d'exactitude de la formule des trapèzes est 1.

- **2.1.2 - Formule de Simpson $1/3$**



Méthode de Simpson $1/3$

Reprenons le raisonnement utilisé avec la méthode des trapèzes, mais cette fois en utilisant un polynôme de degré 2 dont la courbe passe par les points $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$. Ce polynôme est donné par la formule de Newton

$$p_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Par ce polynôme, on détermine l'intégrale de $f(x)$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx + \int_{x_0}^{x_2} E_2(x)dx$$

La méthode de Simpson $1/3$ simple se résume donc à

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) - \frac{f^{(4)}(\eta)}{90}h^5 \tag{6.23}$$

où $\eta \in [x_0, x_2]$. Cette terminologie est due au facteur de $\frac{1}{3}$ qui multiplie h.

Remarque(s) : La valeur de h exprime toujours la distance entre les points x_i, c'est-à-dire qu'elle équivaut dans ce cas à la longueur de l'intervalle divisée par 2.

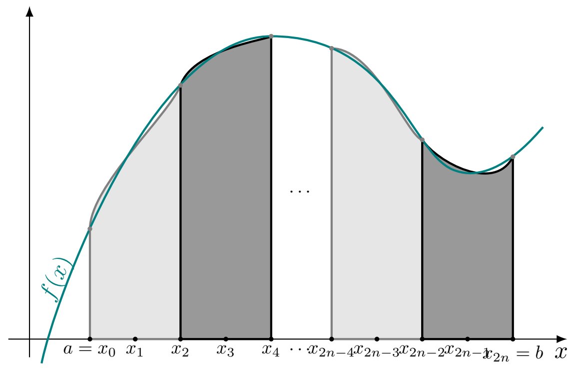
Exemple 5

On reprend une fois de plus le calcul des exemples précédents. Pour $f(x) = \sin(x)$ dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = \frac{\frac{\pi}{4}}{3}\left(\sin(0) + 4\sin(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{2})\right) = 1,0022799$$

Ce résultat est plus précis que l'approximation obtenue par la méthode du trapèze simple, mais il demeure peu satisfaisant.

Note: La méthode de Simpson $1/3$ simple est peu précise, tout comme la méthode du trapèze, comme en témoigne cet exemple.



Méthode de Simpson 1/3 composée

On peut encore une fois améliorer la précision de la formule de Simpson $1/3$ en la composant. Puisque la méthode simple requiert deux intervalles, il semble souhaitable de diviser l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en $2n$ sous-intervalles et d'utiliser la méthode de Simpson $1/3$ simple dans chaque paire de sous-intervalle.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+1}} f(x)dx$$
$$\simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} \left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right)$$

Remarque(s) : Le terme d'erreur de la méthode de Simpson $1/3$ composée est

$$-\frac{(b-a)}{180} f^{(4)}(\eta)h^4, \text{ pour un certain } \eta \in [a, b] \tag{6.24}$$

ce qui en fait une méthode d'ordre 4. De plus, en raison de la présence de la dérivée quatrième de $f(x)$, cette méthode est exacte dans le cas des polynômes de degré 3. Le degré d'exactitude de cette méthode est donc 3.

Exemple 6

- On divise l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ en 4 sous-intervalles de longueur $h = \frac{\pi}{8}$. On a alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \simeq \frac{\frac{\pi}{8}}{3} \left(\sin(0) + 4\sin(\frac{\pi}{8}) + 2\sin(\frac{\pi}{4}) + 4\sin(\frac{3\pi}{8}) + \sin(\frac{\pi}{2})\right)$$
$$= 1,0001346$$

Pour une quantité de travail similaire, on obtient une précision supérieure à celle de la méthode des trapèzes.

- Avec 8 sous-intervalles de longueur $\frac{\pi}{16}$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \simeq \frac{\frac{\pi}{16}}{3} \Big(\sin(0) + 4\sin(\frac{\pi}{16}) + 2\sin(\frac{\pi}{8}) + 4\sin(\frac{3\pi}{16}) + 2\sin(\frac{\pi}{4})$$
$$+ 4\sin(\frac{5\pi}{16}) + 2\sin(\frac{3\pi}{8}) + 4\sin(\frac{7\pi}{16}) + \sin(\frac{\pi}{2})\Big) = 1,000008296$$

Cette plus grande précision vient du fait que cette méthode est d'ordre 4. On constate qu'en passant de 4 à 8 intervalles (c'est-à-dire en divisant h par 2) on divise l'erreur par un facteur d'environ $16,22$, ce qui confirme l'ordre 4 de la méthode.

- On peut également utiliser l'extrapolation de Richardson (6.16) avec $n = 4$ à partir de ces deux valeurs. On obtient ainsi l'approximation suivante qui est d'ordre au moins 5

$$\frac{2^4(1,000008296) - 1,0001346}{2^4 - 1} = 0,999999876$$

• 2.1.3 - Formule de Simpson 3/8

- Si l'on utilise un polynôme de degré 3 dans l'intervalle $[x_0, x_3]$ et passant par les points $((x_i, f(x_i)),\ i = 0, 1, 2, 3)$, on obtient la formule de Simpson 3/8 simple suivante

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right) - \frac{3f^{(4)}(\eta)}{80}h^5 \tag{6.25}$$

pour un certain $\eta \in [x_0, x_3]$.

- On peut également composer cette méthode en divisant l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en $3n$ sous-intervalles de longueur

$$h = \frac{b-a}{3n}$$

et en utilisant la formule de Simpson 3/8 simple dans chaque triplet de sous-intervalle, on obtient

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{3i}}^{x_{3i+3}} f(x)dx = \frac{3h}{8}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_{3i}) + 3f(x_{3i+1}) + 3f(x_{3i+2}) + f(x_{3i+3})\right) - \frac{(b-a)f^{(4)}(\eta)}{80}h^4 \tag{6.26}$$

Remarque(s) : La méthode de Simpson 3/8 composée a le même ordre de convergence (soit 4) et le même degré d'exactitude (soit 3) que la méthode de Simpson 1/3 composée. Pour cette raison, on lui préfère souvent la méthode de Simpson 1/3.

• 2.2 - Quadratures de Gauss-Legendre

La méthode du trapèze étudiée préalablement par exemple, a un degré d'exactitude égale à 1 (car étant exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1) et requiert l'évaluation de la fonction $f(x)$ aux extrémités de l'intervalle

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{(b-c)}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Question: Peut-on optimiser ce schéma d'intégration numérique en choisissant plus judicieusement les points où est évaluée la fonction $f(x)$?

La réponse à cette question est la base de la méthode de quadratures de Gauss-Legendre, c'est à dire choisir judicieusement les points où évaluer la fonction $f(x)$ ainsi que les coefficients appropriés afin que le schéma d'intégration ait un degré d'exactitude supérieur aux méthodes d'intégration étudiées jusque là, en particulier celles de Newton-Cotes.

Pour définir la méthode de quadratures de Gauss-Legendre, nous allons nous restreindre à l'intervalle $[-1 \quad 1]$ où tout le développement sera effectué. Ainsi pour effectuer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, il suffira de faire le changement de variable

$$x = \frac{(b-a)t + (a+b)}{2} \qquad \text{et} \qquad dx = \frac{(b-a)}{2}dt \tag{6.27}$$

qui envoie l'intervalle $[-1 \quad 1]$ sur un intervalle quelconque $[a \quad b]$, et donc de remplacer cette intégrale par

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right)}_{g(t)} \frac{(b-a)}{2}dt = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} g(t)dt \tag{6.28}$$

Définition 2.3

La quadrature de Gauss-Legendre à n points consiste à choisir t_i et w_i tels que la quadrature

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i g(t_i) \tag{6.29}$$

ait un degré d'exactitude le plus élevé possible (c'est à dire l'expression (6.29) soit exacte dans le cas des polynômes de degré le plus élevé possible).

Note: Les t_i sont appelés points d'intégration, tandis que les coefficients w_i sont les poids d'intégration.

- **2.2.1 - Quadrature de Gauss-Legendre à 1 point**

Question: Si on a une quadrature de Gauss-Legendre à $n = 1$ point, comment choisir t_1 et w_1 afin que l'expression (6.29) soit exacte pour tout polynôme $p(t)$ de degré le plus élevé possible, c'est à dire

$$\int_{-1}^{1} p(t)dt = w_1 p(t_1) \tag{6.30}$$

Commençant par le polynôme de degré 0, $p(t) = 1$ pour tout $t \in [-1 \quad 1]$, la formule (6.30) donne

$$\int_{-1}^{1} 1dt = 2 = w_1$$

qui détermine l'unique poids d'intégration.
Et pour le polynôme de degré 1, $p(t) = t$ pour tout $t \in [-1 \quad 1]$, la formule (6.30) devient

$$\int_{-1}^{1} tdt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{1} = 0 = w_1 t_1 = 2t_1$$

Ce qui entraine que $t_1 = 0$

Note: La quadrature de Gauss-Legendre à 1 point s'écrit

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \simeq 2g(0) \tag{6.31}$$

et est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égale à 1.

Remarque(s) : La quadrature de Gauss-Legendre à 1 point a le même degré d'exactitude (soit 1) que la méthode du trapèze, qui est une formule à 2 points. La quadrature de Gauss-Legendre à 1 point est également connue sous le nom de formule du point milieu.

- **2.2.2 - Quadrature de Gauss-Legendre à 2 points**

Question: Si on a une quadrature de Gauss-Legendre à $n = 2$ points, comment déterminer les 4 coefficients t_1, t_2, w_1 et w_2 afin que l'expression (6.29) soit exacte pour tout polynôme $p(t)$ de degré le plus élevé possible, e.i.

$$\int_{-1}^{1} p(t)dt = w_1 p(t_1) + w_2 p(t_2) \tag{6.32}$$

Remarque(s) : On a $t_1 \neq t_2$ et les poids w_1 et w_2 qui sont non nuls, sinon on se retrouve avec une formule à 1 point.

En choisissant respectivement $p(t) = 1$, $p(t) = t$, $p(t) = t^2$ et $p(t) = t^3$, la formule (6.32) génére un système non linéaire à 4 équations

$$\int_{-1}^{1} 1dt = 2 = w_1 + w_2$$
$$\int_{-1}^{1} tdt = 0 = w_1 t_1 + w_2 t_2$$
$$\int_{-1}^{1} t^2 dt = 0 = w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2$$
$$\int_{-1}^{1} t^3 dt = 0 = w_1 t_1^3 + w_2 t_2^3$$

dont la solution est $w_1 = w_2 = 1$, $t_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ et $t_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Note: La formule de Gauss-Legendre à 2 points s'écrit donc

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \simeq g\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + g\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \tag{6.33}$$

et est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égale à 3.

Remarque(s) : Pour un même nombre de points d'intégration, la quadrature de Gauss-Legendre à 2 points a un degré d'exactitude de 3 par comparaison avec 1 pour la méthode du trapèze. Pour un même effort de calcul, on a ainsi une plus grande précision.

• 2.2.3 - Quadratures de Gauss-Legendre à n points

Il est possible de déterminer des quadratures de Gauss-Legendre à un grand nombre de points n. Il suffit de déterminer les $2n$ coefficients w_i et t_i en résolvant le système non linéaire de $2n$ équations que l'on obtient en prenant $p(t) = t^k$ pour $k = 0, 1, 2, \cdots, (2n-1)$. Le tableau ci-dessous résume les principales quadratures de Gauss-Legendre pour $n = 1, 2, 3$ et 4.
D'autre part, on a le résultat général suivant :

Théorème 2.1

La quadrature de Gauss-Legendre à n points (6.29) est exacte dans le cas des polynômes de degré $(2n-1)$. Le degré d'exactitude de cette quadrature est donc $(2n-1)$ et le terme d'erreur est donné par

$$\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} g^{(2n)}(\zeta), \quad \text{où } \zeta \in [-1 \quad 1] \tag{6.34}$$

Exemple 7

On doit évaluer l'intégrale suivante

$$I = \int_{0}^{1} (4x^3 + 3x^2 + 2)dx$$

dont la valeur exacte est 4. Il faut d'abord effectuer le changement de variable (6.27) pour obtenir

$$\int_{0}^{1} (4x^3 + 3x^2 + 2)dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{-1} \left(4\left(\frac{t+1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + 2\right) dx$$

- La formule de Gauss-Legendre à 1 point donne l'approximation

$$I \simeq \frac{2}{2}\left(4\left(\frac{0+1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{0+1}{2}\right)^2 + 2\right) = 3,25$$

- Par contre, la quadrature de Gauss-Legendre à 2 points donne

$$I \simeq \frac{1}{2}\left[4\left(\frac{-\sqrt{\frac{1}{3}}+1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{-\sqrt{\frac{1}{3}}+1}{2}\right)^2 + 2 + 4\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}+1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}+1}{2}\right)^2 + 2\right] = 4 \tag{6.35}$$

L'exactitude du résultat obtenue à la relation (6.35) était prévisible, car la fonction intégrée est de degré 3 et que la quadrature de Gauss-Legendre à 2 points est exacte (par construction) pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Quadratures de Gauss-Legendre

n	Points d'intégration (t_i)	Poids d'intégration (w_i)	Degré d'exactitude
1	0	2	1
2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	3
	$+\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	
3	$-\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{5}{9}$	5
	0	$\frac{8}{9}$	
	$+\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{5}{9}$	
4	$-\frac{\sqrt{525+70\sqrt{30}}}{35}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	7
	$-\frac{\sqrt{525-70\sqrt{30}}}{35}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	
	$+\frac{\sqrt{525-70\sqrt{30}}}{35}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	
	$+\frac{\sqrt{525+70\sqrt{30}}}{35}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	

Exercices suggérés du manuel !

- Exercices [a] suggérés : 3, 5, 6a, 6c, 7, 8, 28a-c, 11, 12a, 13, 14, 21-25, 29-31, 33.
- Exercices fortement suggérés : 3, 7, 12a, 13, 14, 23, 25, 33.

a. André Fortin : Analyse numérique pour ingénieurs, Presses Internationales Polytechnique 2016.

À Retenir !

Je dois pouvoir répondre aux questions [a] suivantes :

1. Je comprends comment construire une formule aux différences.
2. Je sais appliquer les formules aux différences pour approximer les dérivées d'une fonction.
3. Je suis conscient des instabilités numériques qui peuvent apparaitre dans les formules.
4. Je connais la différence entre les formules avant, arrière et centrée.
5. Je sais utiliser l'extrapolation de Richardson pour augmenter l'ordre d'une formule aux différences.
6. Je comprends et sais construire une quadrature de type Newton-Cotes.
7. Je sais exploiter le terme d'erreur pour déterminer approximativement le nombre de sous intervalles d'une formule composée.
8. Je comprends le concept de degré de précision.
9. Je sais utiliser les formules de Newton-Cotes et de Gauss-Legendre.
10. Je connais la précision des formules de Gauss-Legendre.
11. Basé sur le même principe que Gauss-Legendre je pourrais construire une formule de quadrature.

a. André Fortin : Analyse numérique pour ingénieurs, Presses internationales Polytechnique, Montréal, Québec (2011), pages 299-347.