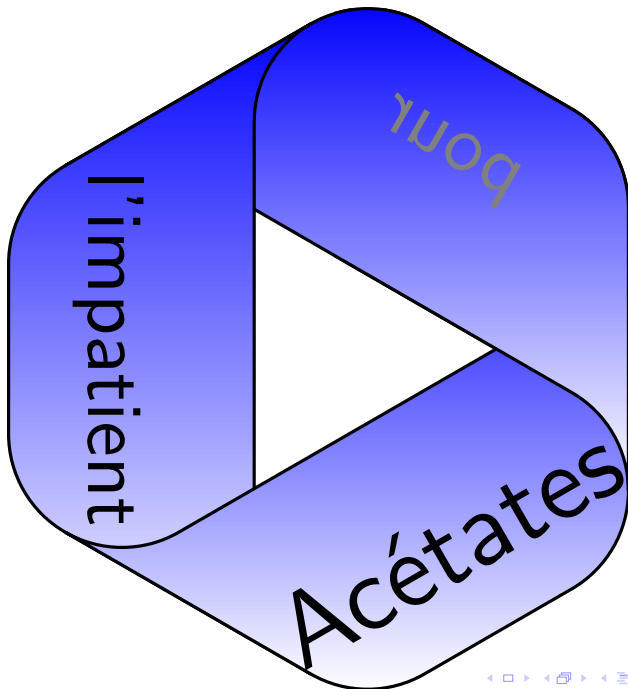


MAT 1910: Mathématiques de l'ingénieur II

Dione Ibrahima

Chapitre I: Intégration Simple



1 Définitions et théorèmes fondamentaux

- Définition de l'intégrale définie
- Définition de l'intégrale indéfinie
- Théorèmes fondamentaux de calcul

2 Les propriétés de l'intégrale simple

- Linéarité
- Positivité, croissance
- Relation de Chasles

3 Les principales techniques d'intégration

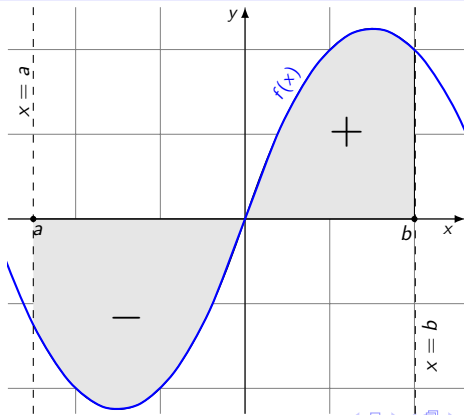
- Intégration «à vue» : Primitives usuelles
- Intégration par parties
- Intégration par substitution
- Intégration de fonctions rationnelles

Définitions et théorèmes fondamentaux

- Définition de l'intégrale définie

Définition 1

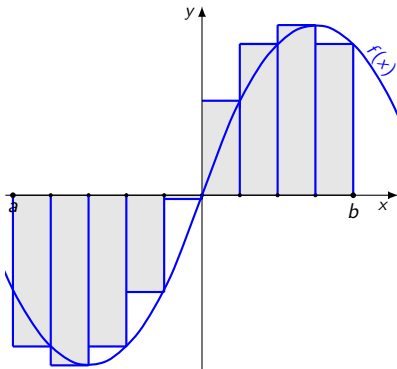
Soit $f(x)$ une fonction continue sur $[a, b]$. On appelle intégration de f entre a et b , notée $\int_a^b f(x)dx$, l'air algébrique de la partie du plan délimitée par le graphe de $y = f(x)$ et les droite verticales $x = a$ et $x = b$.



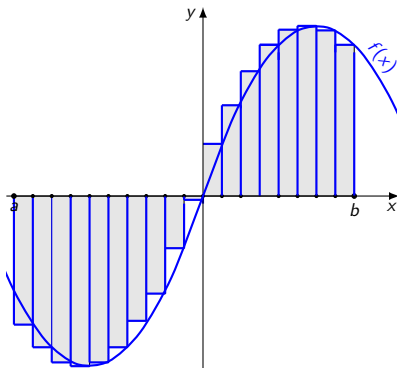
La définition précédente étant géométrique, une autre analytique s'impose :

- (i) Subdivision de l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$:
 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$;
- (ii) Pour chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on approxime l'aire du secteur sous la courbe par celle du rectangle de hauteur $f(x_{i+1})$;
- (iii) L'air totale sera approximée par la somme de Riemann suivante :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}). \quad (1)$$



Un choix de maillage plus fin, où chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est divisé par 2, donne



Définition 2

Soit $f(x)$ une fonction continue sur $[a, b]$. On appelle intégration de f entre a et b , notée $\int_a^b f(x)dx$, la limite de la somme de Riemann donnée en (1) :

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \max(x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}). \quad (2)$$

• Définition de l'intégrale indéfinie

Définition

Soit f une fonction continue sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$. On appelle primitive de f une fonction dérivable F définie sur D et satisfaisant en chaque point x de D la relation $F'(x) = f(x)$.

Définition

On appelle intégrale indéfinie de $f(x)$ l'ensemble, $F(x) + C$, de ses primitives. Ceci est conventionnellement décrit par : $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Exemples :

$$\textcircled{1} \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\textcircled{2} \text{ Si } n \neq -1, \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\textcircled{3} \int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\textcircled{4} \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\textcircled{5} \int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

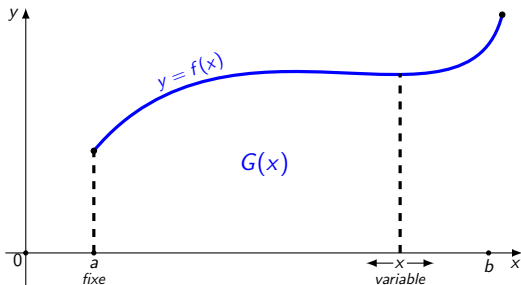
- Théorèmes fondamentaux de calcul

Théorème (Théorème fondamental du calcul I)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors la fonction G définie par

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b, \quad (3)$$

est dérivable en chaque point x de $[a, b]$, et on a $G'(x) = f(x)$.



Exemples : Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

$$F(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{1+t^2} dt, \quad G(x) = \int_x^3 \sqrt{1+t^2} dt, \quad H(x) = \int_x^2 \cos(t^2) dt.$$

Théorème (Théorème fondamental du calcul II)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors pour toute primitive F de f on a :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \quad (4)$$

Exemples : Évaluer les intégrales suivantes :

$$① \int_1^2 (x^3 - 2x^2 + 1)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x \right]_1^2 = \frac{1}{12}$$

$$② \int_0^4 2\sqrt{x}dx = \frac{4}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

$$③ \int_0^\pi \cos(x)dx = \left[\sin(x) \right]_0^\pi = 0$$

$$④ \int_1^e \ln(x)dx = \left[x \ln(x) - x \right]_1^e = 1$$

$$⑤ \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$⑥ \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \left[\sqrt{x^2+1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

Les propriétés de l'intégrale simple

- Linéarité : Si f et g sont continues sur $[a, b]$ et si α est un nombre réel, on a

$$\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt. \quad (5)$$

$$\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt \quad (6)$$

- Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors on a l'égalité

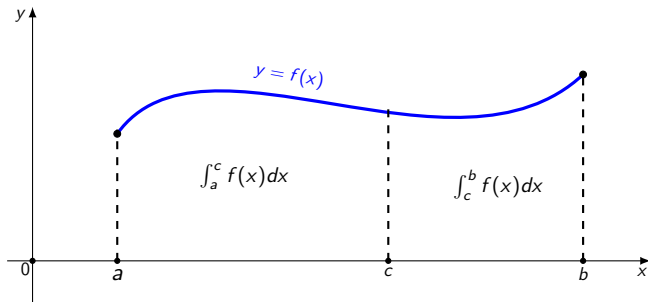
$$\int_a^b f(t)dt = - \int_b^a f(t)dt \quad (7)$$

- Si f est une fonction continue sur I , alors pour tout point $a \in I$, on a

$$\int_a^a f(t)dt = 0 \quad (8)$$

- Relation de Chasles : Si $f(x)$ est continue sur $[a, b]$, on a l'égalité suivante

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \forall c \in [a, b]. \quad (9)$$

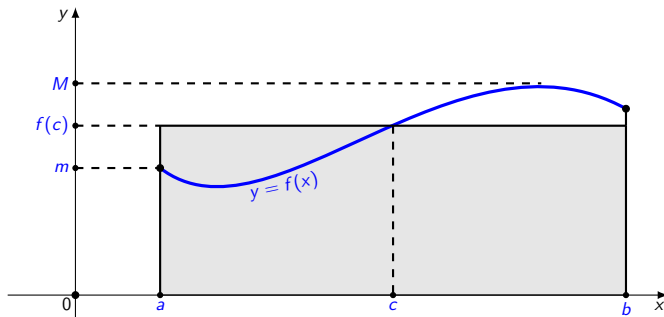


- Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, on a l'inégalité suivante

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt \quad (10)$$

- Si f est continue sur $[a, b]$, il existe un nombre c de $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b - a). \quad (11)$$

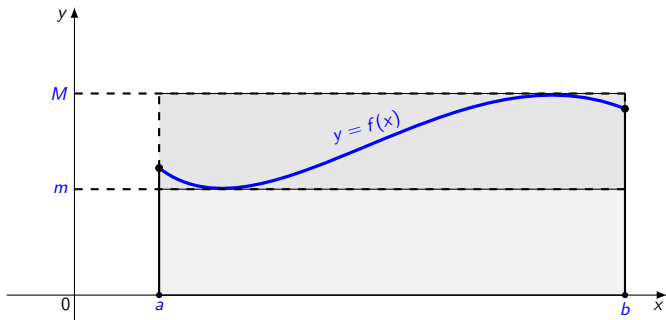


- Positivité : Si $f(x)$ est continue et $f(x) \geq 0$ pour tout x de $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0. \quad (12)$$

- Inégalité de le moyenne : Si f est continue dans $[a, b]$ et $m \leq f(x) \leq M \forall x$,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a) \quad (13)$$



Exemples :

- ❶ Utiliser la propriété de linéarité de l'intégrale afin de calculer

$$\int_0^1 (4 + 3x^2) dx. \quad (14)$$

- ❷ Si $\int_0^1 f(t) dt = 2$, $\int_0^4 f(t) dt = -6$ et $\int_3^4 f(t) dt = 1$, que vaut donc

$$\int_1^3 f(t) dt ? \quad (15)$$

- ❸ Montrer la relation suivante :

$$0 \leq \int_1^3 \ln(x) dx \leq 2 \ln(3). \quad (16)$$

- ❹ Utiliser la propriété de l'inégalité de la moyenne pour estimer l'intégrale :

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx \quad (17)$$

Les principales techniques d'intégration

- Intégration «à vue» : primitives usuelles

Fonctions	Primitives	Fonctions	Primitives
$\cos(x)$	$\sin(x)$	e^x	e^x
$u'(x) \cos(u(x))$	$\sin(u(x))$	$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\frac{1}{x}$	$\ln (x) $
$u'(x) \sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) $
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x^n, n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\arctan(u(x))$	$u'(x)u^n(x), n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}(x)$

- Intégration par parties :

Soit I un intervalle, a et b deux éléments de I , u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur I . Alors on a :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt. \quad (18)$$

Cette relation (18) s'applique aussi au cas d'intégrale indéfinie :

$$\int u(t)v'(t)dt = \left[u(t)v(t) \right] - \int u'(t)v(t)dt. \quad (19)$$

Exemples : Calculer les intégrales suivantes :

❶ $\int_0^1 te^t dt = \left[te^t \right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt$

❷ $\int_0^\pi t \sin(t) dt = \left[-t \cos(t) \right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(t)$

❸ $\int \ln(t) dt = \left[t \ln(t) \right] - \int \frac{t}{t} dt = t \ln(t) - t + C$

- Intégration par substitution :

Soit I un intervalle, a et b deux éléments de I , u une fonction dérivable et de dérivée continue sur I et f une fonction continue sur l'intervalle image de I par la fonction u (noté $u(I)$). Alors on a :

$$\int_a^b u'(t)f(u(t))dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)dy \quad (20)$$

Il faut noter que $u'(t)$ n'est que la notation différentielle de la dérivée $\frac{du}{dt}$.

Exemples : Calculer les intégrales : $A = \int_0^1 \frac{1+\sqrt{x+1}}{x+1} dx$, $C = \int_0^1 \frac{1+t}{t^2+2t+3} dt$.

- Intégration de fonctions rationnelles

i) Décomposition d'une fraction : La décomposition se fait suivant les étapes :

a) Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles :

Soit $P(x)/Q(x)$ une fraction rationnelle, où $Q(x) := x^n + \dots$. La décomposition du dénominateur en fraction irréductibles est de la forme :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \dots (x^2+b_1x+c_1)^{l_1}(x^2+b_2x+c_2)^{l_2} \dots} \quad (21)$$

Exemple : $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$.

b) Décomposition en éléments simples à coefficients indéterminés :

On peut maintenant décomposer la fraction en une somme d'éléments simples. Le nombre et le type d'éléments simples dépendent des facteurs du dénominateur. Ils sont à choisir selon les listes suivantes :

Facteurs de $Q(x)$	Éléments simples correspondants
$(x - a)$	$\frac{\alpha}{x-a}$, (α à déterminer)
$(x - a)^2$	$\frac{\alpha_1}{(x-a)^2} + \frac{\alpha_2}{(x-a)}$, (α_1, α_2 à déterminer)
\vdots	\vdots
$(x - a)^k$	$\frac{\alpha_1}{(x-a)^k} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{\alpha_k}{x-a}$, (α_i à déterminer)
$(x^2 + bx + c)$	$\frac{\beta x + \gamma}{x^2 + bx + c}$, (β, γ à déterminer)
$(x^2 + bx + c)^2$	$\frac{\beta_1 x + \gamma_1}{(x^2 + bx + c)^2} + \frac{\beta_2 x + \gamma_2}{x^2 + bx + c}$, ($\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2$ à déterminer)
\vdots	\vdots
$(x^2 + bx + c)^k$	$\frac{\beta_1 x + \gamma_1}{(x^2 + bx + c)^k} + \frac{\beta_2 x + \gamma_2}{(x^2 + bx + c)^{k-1}} + \cdots + \frac{\beta_k x + \gamma_k}{x^2 + bx + c}$, (β_i, γ_i à déterminer)

Exemple : $\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$.

c) Déterminer les coefficients des éléments simples :

La méthode consiste à poser sur un dénominateur commun les éléments simples. Le dénominateur commun étant bien sûr encore $Q(x)$, nous avons : $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\dots}{Q(x)}$.

Exemple : $\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+b(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(a+b)x+b-a}{(x+1)(x-1)}$

Le numérateur de gauche est identique à celui de droite :

$$1 \equiv (a+b)x + b - a$$

Deux polynômes sont identiques si leurs coefficients respectifs sont les mêmes :

$$a + b = 0 \text{ et } b - a = 1.$$

Ce qui conduit au résultat $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ et donc $\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$

ii) Intégration d'une fonction rationnelle :

Méthode

L'intégration de la fraction rationnelle $P(x)/Q(x)$, où $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$ s'effectue en deux étapes :

- ▶ Décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples.
- ▶ Intégration des éléments simples obtenus.

Exemple : Intégrer les fonctions : $f(x) := \frac{1}{x^2-1}$, $g(x) := \frac{1}{x^4-1}$, et $h(x) := \frac{1}{x^3-1}$.

Méthode

Cette intégration peut être ramenée à l'intégration de fonctions rationnelles à l'aide de substitutions bien choisies. Soit à résoudre

$$\int f(\cos(x), \sin(x)) dx, \text{ où } f \text{ est rationnelle :} \quad (22)$$

- ▶ Cas 1. Si $f(u, v)$ est impaire en u (resp. v), alors la substitution $t = \sin(x)$ (resp. $t = \cos(x)$) ramène le problème à l'intégration d'une fonction rationnelle.
- ▶ Cas 2. Si $f(u, v)$ est paire en u et v , alors la substitution $t = \tan(x)$ ramène le problème à une intégrale d'une fonction rationnelle.
- ▶ Cas 3. La substitution $t = \tan(x/2)$ ramène toutes les intégrales du type (22) à des intégrales de fonctions rationnelles. Dans ce cas on aura :

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Exemple : Intégrer les fonctions rationnelles de fonctions trigonométriques suivantes :

$$g(x) := \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}, \quad h(x) := \frac{1}{1+\sin^2(x)}$$

Fin

Et