

SÉRIE 4 - Algèbre linéaire (MATH 2673)

Exercice 1

Soit l'application linéaire $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$F(x, y, z, t) = (x + 2y + 3z + 2t, 2x + 4y + 7z + 5t, x + 2y + 6z + 5t).$$

- a Déterminez une base de $\text{Ker } F$ et $\dim(\text{Ker } F)$.
- b Déterminez une base de $\text{Im } F$ et $\dim(\text{Im } F)$.
- c F est-elle injective? F est-elle surjective? Justifiez.

Exercice 2

Soit P_n l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Soit $D : P_n \rightarrow P_n$ l'opérateur de dérivation.

- a Déterminez $\text{Ker } D$ et $\dim(\text{Ker } D)$.
- b En déduire la dimension de $\text{Im } D$.

Exercice 3

Soient V et W deux espaces vectoriels (sur un même corps K) de dimension finie tels que $\dim W > \dim V$. Montrez qu'il n'existe pas d'application linéaire $F : V \rightarrow W$ surjective.

Exercice 4

Soit $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de \mathbb{R}^3 où

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (0, 1, 2) \text{ et } u_3 = (0, 1, 1).$$

Soit l'opérateur linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$T(u_1) = (2, 0, -1), \quad T(u_2) = (0, 1, 4) \text{ et } T(u_3) = (0, 1, 1).$$

a Déterminez $T(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

b T est-il un isomorphisme? Justifiez.

Exercice 5

Soient V un espace vectoriel de dimension n et W un autre espace vectoriel (tous les deux sur le même corps K). Soit $F : V \rightarrow W$ une application linéaire injective. Montrez que si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une base de V , alors $\{F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n)\}$ est une base de $\text{Im } F$.

Exercice 6

Soit P_2 l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux en la variable t . Soit l'application linéaire $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$ définie par

$$F(x, y, z) = (x + y)t^2 + (x + 2y + 2z)t + (y + z).$$

a Montrez que F est un isomorphisme.

b Déterminez l'application linéaire inverse F^{-1} .