UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

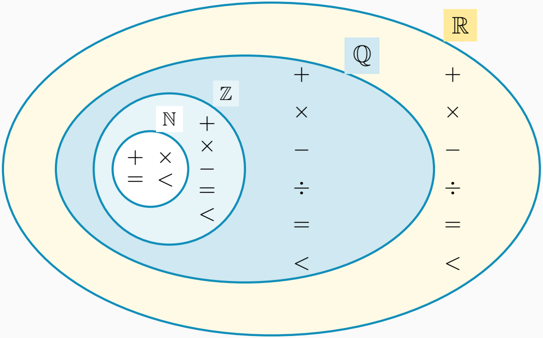
Arithmétique (MATH 1413) - Chapitre 7: Les nombres réels

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

- L’ensemble des réels
- Les opérations arithmétiques sur les réels
- L’arithmétique réelle

- ✓ Nous terminons l'étude des nombres par celle des nombres réels [1].



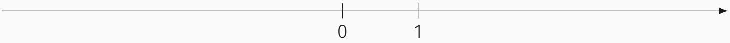
- ✓ Leurs applications est surtout dans les mathématiques avancées.
- ✓ Il est néanmoins important de les connaitre afin d'apprécier leurs portées.

L’ensemble des réels

- C'est par le biais des longueurs que les nombres réels font leur apparition dans le paysage mathématique.

- Considérons une droite sur laquelle sont marqués deux points 0 et 1:

  - ⋆ la position du point 0 donne l'origine de la droite,
  - ⋆ et la distance de 0 et 1 est la longueur étalon, c'est-à-dire l'unité.



- Cette droite est la droite numérique - nous dirons aussi droite numérique réelle.

- ✓ Considérons un segment dont l'extrémité gauche est le point 0.
- ✓ En faisant varier l'extrémité droite, on obtient diverses longueurs, mesurées par rapport à l'unité donnée.
- ✓ La longueur est nulle lorsque les deux extrémités coïncident.

> Ces longueurs sont les nombres réels positifs ou nuls.

- ✓ Si l'extrémité droite du segment est le point 0, les longueurs obtenues en faisant varier l'extrémité gauche sont des opposés de réels positifs.

> On parlera alors évidemment de nombres réels négatifs.

Exemple 1.1:

- ✓ Tout nombre rationnel satisfait à la condition précédente, car il correspond à un certain segment, donc à un point de la droite numérique.
- ✓ On en conclut aussi que le naturel 5 est un réel positif, de même que les rationnels $3/2$ et $-5/2$ sont des réels.
- ✓ Autrement dit, tous les nombres rencontrés jusqu'ici ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$) se retrouvent d'emblée dans ce nouveau ensemble de nombres:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Définition

- L'ensemble des nombres réels est formé de tous les nombres réels positifs, nul ou négatifs, tels que nous venons de les décrire.
- C'est donc l'ensemble de toutes les longueurs géométriques et de leurs opposés, c'est-à-dire de tous les points de la droite numérique.
- On utilise le symbole $\mathbb{R}$ pour désigner cet ensemble.

✓ On a évidemment $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

✓ On peut se demander alors, quels sont les nouveaux nombres $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$?

Définition

- On appelle **nombre irrationnel** un élément de l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
- Un irrationnel est un **réel non rationnel**, c'est-à-dire il ne peut s'exprimer selon un rapport d'entiers.

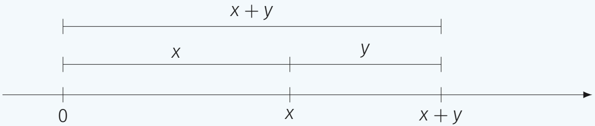
Note: L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est ainsi décomposé en deux parties disjointes, les rationnels et les irrationnels:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$$

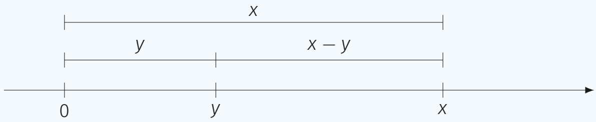
Les opérations arithmétiques sur les réels

- ✓ Nous allons développer l'arithmétique réelle uniquement en termes de longueurs.
- ✓ Les nombres dont il est question pour le moment sont donc les réels non négatifs.
- ✓ La généralisation à tout $\mathbb{R}$ pourra ensuite se faire par le biais de l'opération d'opposition.

- Additionner deux réels x et y revient simplement à juxtaposer les segments qui leur correspondent.



- La soustraction $x - y$ consiste à identifier un segment qui, ajouté à y, donne le segment de longueur x.



- On cherche en effet à résoudre le problème $y + ? = x$.

La multiplication et la division de réels

- Lorsque x est un entier positif, le produit $x \times y$ peut se voir comme la juxtaposition répétée d'un segment de longueur y:

$$x \times y = y + y + \cdots + y \quad (x \text{ fois}).$$

- La division étant une multiplication déguisée, la construction du quotient $x \div y$ repose sur la même approche que les chapitres précédents.

L’arithmétique réelle

Théorème

- Quels que soient x, y, $z \in \mathbb{R}$, $z \geq 0$, on a alors que

$$x + y \in \mathbb{R}, \quad x - y \in \mathbb{R}, \quad x \times y \in \mathbb{R}, \quad x \div y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \sqrt{z} \in \mathbb{R}.$$

- De plus, les propriétés $A_1 - A_5$ et $M_0 - M_6$ demeurent vraies lorsqu'appliquées à des éléments de $\mathbb{R}$.

- Il va de soi tout d'abord qu'un réel négatif n'a pas de racine carrée.
- Autrement dit, $\mathbb{R}$ n'est pas fermé pour l'extraction de la racine carrée.

Exemple 3.1: Soit $r = 5$.

- ✓ La racine positive $\sqrt{5}$ est donc réelle et on a l'égalité $(\sqrt{5})^2 = 5$.
- ✓ Par ailleurs, passant à l'opposé de cette racine, on en a un autre réel dont le carré est 5 : $(-\sqrt{5})^2 = 5$.
- ✓ Remarquons par contre que $\sqrt{-5}$ n'est évidemment pas définie.

Note:

- ✓ En utilisant la notion de valeur absolue, la racine carrée d'un carré s'écrit:

$$\sqrt{r^2} = |r|$$

- ✓ Tout réel non négatif x est un carré:

$$x = (\sqrt{x})^2$$

(autrement dit, c'est le carré de sa racine carrée).

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)

- Disponibilités:
  - ⋆ Lundi 10H00 - 13H00, MRR B-214
  - ⋆ Mercredi 10H00 - 13H00, MRR B-214

- Manuels du cours:

[1] B. Hodgson and L. Lessard.
Arithmétique élémentaire (1re et 2e parties).
Département de mathématiques et de statistique Universitée Laval, 1045, av. de la Médecine, Québec (Québec), G1V 0A6, Canada, 2022.