UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

# MATH 2013 - Chapitre 4.1: Les dérivées des fonctions de plusieurs variables

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

- Les dérivées partielles
- Les plans tangents et les approximations linéaires

# Les dérivées partielles

- Soit $f$ une fonction de deux variables $x$ et $y$ dans laquelle on ne fait varier que $x$ tout en gardant $y$ fixée à $y = b$, où $b$ est une constante [1].

- Dans ce cas, on considère une fonction d'une seule variable $x$, à savoir

$$g(x) = f(x, b).$$

- Si $g$ possède une dérivée en $a$, alors on l'appelle la **dérivée partielle** de $f$ par rapport à $x$ au point $(a, b)$, et on la note $f_x(a, b)$ :

$$f_x(a, b) = g'(a), \quad \text{où} \quad g(x) = f(x, b). \tag{1}$$

- Par définition d'une dérivée, on a $g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$ et l'équation (1) devient donc

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}. \tag{2}$$

- De même, on obtient la **dérivée partielle** de $f$ par rapport à $y$ en $(a, b)$, notée $f_y(a, b)$, par:

$$f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a,b)}{h}. \tag{3}$$

▷ Si le point $(a, b)$ est une variable dans les équations (2) et (3), $f_x$ et $f_y$ deviennent des fonctions des deux variables $x$ et $y$.

- Si $f$ est une fonction de deux variables, ses dérivées partielles sont les fonctions $f_x$ et $f_y$ définies par ces limites (si elles existent)

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h} \tag{4}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h} \tag{5}$$

▷ On peut écrire les dérivées partielles de plusieurs façons.

**Notations des dérivées partielles** Si $z = f(x, y)$, on écrit

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$
$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

**Méthode pour calculer les dérivées partielles de $z = f(x, y)$**

- Pour calculer $f_x$, on considère $y$ comme une constante et on dérive $f(x, y)$ par rapport à $x$.
- Pour calculer $f_y$, on considère $x$ comme une constante et on dérive $f(x, y)$ par rapport à $y$.

**Exemple 1.1:** Soit $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. Calculons $f_x(2,1)$ et $f_y(2,1)$.

Réponse:

- Si on garde $y$ constante et qu'on dérive l'équation par rapport à $x$, on obtient la fonction

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3.$$

- Et donc en l'évaluant au point $(2,1)$, on a:

$$f_x(2,1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16.$$

- En gardant $x$ constante et en dérivant par rapport à $y$, on obtient

$$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y.$$

- Et donc en l'évaluant au point $(2,1)$, on a:

$$f_y(2,1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8.$$

**Exemple 1.2:** Soit $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Déterminez le domaine de définition de chacune des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Réponse:

- En dérivant la fonction $f(x,y)$ par rapport à $x$, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{pour} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

  - ⋆ Si on évalue la fonction au point $(0,0)$, on a une indéterminantion!
  - ⋆ Est-ce que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est bien définie en $(0,0)$?
  - ⋆ Et si c'est la cas, la limite suivante devrait exister

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \pm 1 \end{aligned}$$

  - ⋆ Cette limite n'existe pas! Par suite, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'est pas bien définie! Le domaine de définition de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

- En dérivant la fonction $f(x, y)$ par rapport à $y$, on obtient

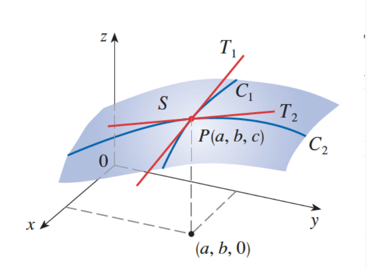
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{pour} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

  - ⋆ Est-ce que la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est bien définie en $(0, 0)$?
  - ⋆ Et si c'est la cas, la limite suivante devrait exister

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \pm 1\end{aligned}$$

  - ⋆ Cette limite n'existe pas! Par suite, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ n'est pas bien définie! Le domaine de définition de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

- L'équation $z = f(x, y)$ représente une surface $S$ dans l'espace (graphe $f$).
- Si $f(a, b) = c$, alors le point $P(a, b, c)$ appartient à $S$.
- En fixant $y = b$, on se restreint à la courbe d'intersection $C_1$ du plan vertical $y = b$ avec $S$.




- Autrement dit, $C_1$ est la trace de $S$ dans le plan $y = b$.
- De même, le plan vertical $x = a$ coupe $S$ selon la courbe $C_2$.

- Les deux courbes $C_1$ et $C_2$ passent par le point $P$ (voir la figure).
- On remarque que la courbe $C_1$ est le graphe de la fonction $g(x) = f(x, b)$, de sorte que la pente de sa droite tangente $T_1$ en $P$ est $g'(a) = f_x(a, b)$.
- La courbe $C_2$ est le graphe de la fonction $G(y) = f(a, y)$, de sorte que la pente de sa tangente $T_2$ en $P$ est $G'(b) = f_y(a, b)$.

- On peut interpréter géométriquement les dérivées partielles $f_x(a, b)$ et $f_y(a, b)$ comme étant les pentes des droites tangentes aux traces $C_1$ et $C_2$ de $S$ dans les plans $y = b$ et $x = a$, au point $P(a, b, c)$.
- On peut aussi interpréter les dérivées partielles comme étant des taux de variation. En effet, si $z = f(x, y)$ alors
  - $\partial z/\partial x$ est le taux de variation de $z$ par rapport à $x$ pour $y$ fixé.
  - $\partial z/\partial y$ est le taux de variation de $z$ par rapport à $y$ pour $x$ fixé.

**Exemple 1.3:** Soit $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Calculons $f_x(1,1)$ et $f_y(1,1)$ et interprétons ces nombres comme étant des pentes.

Réponse:

- On a
$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -2x \quad & f_y(x,y) &= -4y \\ f_x(1,1) &= -2 \quad & f_y(1,1) &= -4. \end{aligned}$$
- Le graphe de $f$ est le paraboloïde $z = 4 - x^2 - 2y^2$ et le plan vertical $y = 1$ le coupe selon la parabole $z = 2 - x^2, y = 1$.
- La pente de la droite tangente à cette parabole au point $(1,1,1)$ est $f_x(1,1) = -2$.

- De même, la courbe $C_2$, qui correspond à l'intersection du plan $x = 1$ avec le paraboloïde, est la parabole $z = 3 - 2y^2, x = 1$.

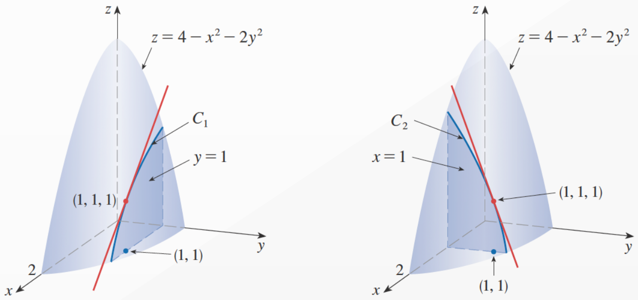



**FIGURE 2** **FIGURE 3**

- Et la pente de la droite tangente en $(1, 1, 1)$ est $f_y(1, 1) = -4$.

**Exemple 1.4:** Soit la fonction $f(x,y) = e^{\frac{y}{1+x}}$. Calculez $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Réponse:

- La dérivée par rapport à $x$ de la fonction $f(x,y)$ est

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^{\frac{y}{1+x}} \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{1+x}\right) \\ &= e^{\frac{y}{1+x}}\left(-\frac{y}{(1+x)^2}\right) = \frac{-ye^{\frac{y}{1+x}}}{(1+x)^2}\end{aligned}$$

- La dérivée par rapport à $x$ de la fonction $f(x,y)$ est

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= e^{\frac{y}{1+x}} \times \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1+x}\right) \\ &= e^{\frac{y}{1+x}}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \left(\frac{e^{\frac{y}{1+x}}}{1+x}\right)\end{aligned}$$

**Exemple 1.5:** Trouvons $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$ si la fonction $z$ est définie implicitement comme une fonction de $x$ et $y$ par l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1.$$

Réponse:

- Pour trouver $\partial z/\partial x$, on dérive implicitement l'équation par rapport à $x$, en prenant soin de traiter $y$ comme une constante:

$$3x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

- La résolution de cette équation pour $\partial z/\partial x$ donne

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}.$$

- De même, la dérivation implicite par rapport à $y$ conduit à

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}.$$

▷ On peut aussi définir les dérivées partielles des fonctions de trois variables ou plus.

- Si $f$ est une fonction des trois variables $x, y$ et $z$, alors sa **dérivée partielle par rapport à $x$** est définie par

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}.$$

**Note:**

- Pour calculer $f_x(x, y, z)$, on considère $y$ et $z$ comme des constantes et on dérive $f(x, y, z)$ par rapport à $x$.

- Si $w = f(x, y, z)$, alors $f_x = \partial w / \partial x$ peut être interprétée comme étant le taux de variation de $w$ par rapport à $x$ (pour $y$ et $z$ fixées).

**Exemple 1.6:** Soit $f(x,y,z) = e^{xy}\ln z$. Trouvons $f_x, f_y$ et $f_z$.

Réponse:

- On garde $y$ et $z$ constantes et on dérive la fonction par rapport à $x$:

$$f_x = ye^{xy}\ln z.$$

- De même, la dérivée par rapport à $y$ et par rapport à $z$ sont:

$$f_y = xe^{xy}\ln z \quad \text{et} \quad f_z = \frac{e^{xy}}{z}.$$

- En général, si $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une fonction de $n$ variables, alors sa **dérivée partielle par rapport à la $i$-ième variable $x_i$** est

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

et on écrit

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

- Si $z = f(x, y)$ est une fonction de deux variables, alors ses dérivées partielles $f_x$ et $f_y$ sont aussi des fonctions de deux variables.

- Et on peut donc considérer leurs dérivées partielles $(f_x)_x$ , $(f_x)_y$ , $(f_y)_x$ et $(f_y)_y$, qui sont appelées **dérivées partielles secondes** ou **deuxièmes**, ou encore **dérivées partielles d'ordre 2 de $f$**:

$$
\begin{aligned}
(f_x)_x &= f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\\
(f_x)_y &= f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\\
(f_y)_x &= f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\\
(f_y)_y &= f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.
\end{aligned}
$$

**Exemple 1.7:** Calculons les dérivées partielles secondes de

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$$

Réponse:

- Les dérivées partielles $f_x$ et $f_y$ sont

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3 \quad f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y.$$

- On a donc les dérivées partielles secondes

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + 2xy^3\right) = 6x + 2y^3; \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 2xy^3\right) = 6xy^2;$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 - 4y\right) = 6xy^2; \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 - 4y\right) = 6x^2y - 4.$$

▷ À cet exemple, on remarque que $f_{xy} = f_{yx}$. Ce n'est pas une coïncidence!

▷ En effet, les dérivées mixtes (ou croisées) $f_{xy}$ et $f_{yx}$ sont égales pour la plupart des fonctions rencontrées dans la pratique.

▷ Ce théorème énonce les conditions permettant d'affirmer que $f_{xy} = f_{yx}$:

**Théorème**

- **Théorème de Clairaut** Soit une fonction $f$ définie sur un disque $D$ qui contient le point $(a, b)$. Si les fonctions $f_{xy}$ et $f_{yx}$ sont continues sur $D$, alors

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

- On peut aussi définir les dérivées d'ordre 3 ou plus:

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}.$$

- Le théorème de Clairaut permet de démontrer que $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ si ces fonctions sont continues.

**Exemple 1.8:** Calculons $f_{xxyz}$, si la fonction $f(x, y, z) = \sin(3x + yz)$.

Réponse:

- La dérivée partielle $f_x$ est:

$$f_x = 3\cos(3x + yz)$$

- La dérivée partielle seconde $f_{xx}$ est:

$$f_{xx} = -9\sin(3x + yz)$$

- La dérivée partielle d'ordre 3 $f_{xxy}$ est:

$$f_{xxy} = -9z\cos(3x + yz)$$

- La dérivée partielle d'ordre 4 $f_{xxyz}$ est:

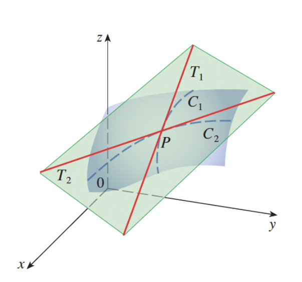
$$f_{xxyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\sin(3x + yz)$$

# Les plans tangents et les approximations linéaires

- Soit une surface $S$ d'équation $z = f(x, y)$, où $f$ possède des dérivées partielles premières continues, et soit $P(x_0, y_0, z_0)$ un point de $S$.

- Soit $C_1$ et $C_2$ les courbes d'intersection des plans verticaux $y = y_0$ et $x = x_0$ avec la surface $S$.

- Le point $P$ appartient alors à la fois à $C_1$ et à $C_2$.




- Soit $T_1$ et $T_2$ les droites tangentes aux courbes $C_1$ et $C_2$ au point $P$.

▷ Alors, le **plan tangent** à la surface $S$ au point $P$ est le plan qui contient les droites tangentes $T_1$ et $T_2$.

▷ Le plan tangent à $S$ en $P$ est constitué de toutes les droites tangentes en $P$ aux courbes qui appartiennent à $S$ et qui passent par ce point.

**Note:** Le plan tangent en $P$ est le plan qui approxime le mieux la surface $S$ au voisinage du point $P$.

Le plan passant par le point $P(x_0, y_0, z_0)$ a une équation de la forme

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) \tag{6}$$

▷ L'intersection du plan tangent en $P$ avec le plan $y = y_0$ est la droite tangente $T_1$, dont l'équation est obtenue à partir de (6) en posant $y = y_0$:

- L'équation (6) devient celle d'une droite de pente $a = f_x(x_0, y_0)$:

$$z - z_0 = a(x - x_0), \quad y = y_0 \tag{7}$$

- Alors qu'en posant $x = x_0$, l'équation (6) devient celle d'une droite de pente $b = f_y(x_0, y_0)$:

$$z - z_0 = b(y - y_0), \quad x = x_0 \tag{8}$$

- Si $f$ possède des **dérivées partielles continues**, alors **l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $P(x_0, y_0, z_0)$** est

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{9}$$

**Exemple 2.1:** Trouvons le plan tangent au paraboloïde elliptique $z = 2x^2 + y^2$ au point $(1, 1, 3)$.

Réponse:

- On pose $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Alors

$$\begin{array}{ll} f_x(x,y) = 4x & f_y(x,y) = 2y \\ f_x(1,1) = 4 & f_y(1,1) = 2 \end{array}$$

- Et l'équation (9) donne l'équation du plan tangent en $(1, 1, 3)$ sous la forme

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

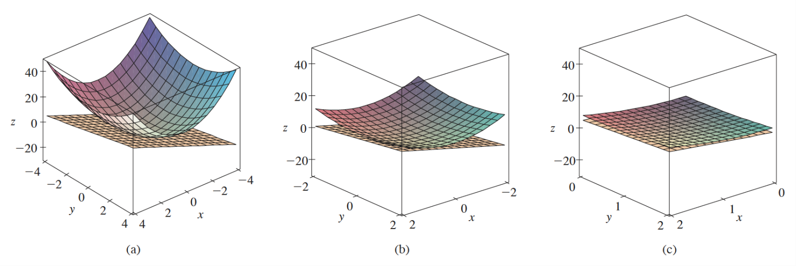
- Ou encore

$$z = 4x + 2y - 3.$$

▷ La figure a) montre le paraboloïde elliptique et son plan tangent en $(1, 1, 3)$ qu'on a déterminé à l'exemple précédent.

⋆ Dans les figures b) et c), on s'approche du point $(1, 1, 3)$ en restreignant le domaine de la fonction $f(x, y) = 2x^2 + y^2$.

⋆ On remarque que plus on s'approche, plus le graphe s'aplatit et ressemble à son plan tangent.




▷ La figure c) corrobore cette impression en s'approchant du point $(1, 1)$.

- On a trouvé que l'équation du plan tangent au graphe de la fonction $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ au point $(1, 1, 3)$ est $z = 4x + 2y - 3$.

- Selon les figures b) et c), la fonction linéaire de deux variables

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3$$

est une bonne approximation de $f(x, y)$ pour $(x, y)$ proche de $(1, 1)$.

- La fonction $L$ est appelée **linéarisation** de $f$ en $(1, 1)$, et l'approximation

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

est appelée **approximation linéaire** de $f$ en $(1, 1)$.

- Par exemple, au point $(1,1; 0,95)$, l'approximation linéaire donne

$$f(1,1; 0,95) \approx 4(1,1) + 2(0,95) - 3 = 3,3$$

une valeur très proche de la vraie valeur

$$f(1,1; 0,95) = 2(1,1)^2 + (0,95)^2 = 3,3225.$$

- Si on prend un point plus éloigné de $(1,1)$, tel $(2,3)$, on n'obtient pas une bonne approximation. En fait, $L(2,3) = 11$, tandis que $f(2,3) = 17$.

- L'équation du plan tangent en (9) de la fonction $f$ de deux variables au point $(a, b, f(a, b))$, représente la **linéarisation** de $f$ en $(a, b)$:

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

- Cette linéarisation est l'**approximation linéaire** de $f$ en $(a, b)$:

$$f(x, y) \approx \underbrace{f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)}_{L(x,y)}$$

- Le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ est défini sous l'hypothèse que $f$ a des dérivées partielles $f_x(x, y)$ et $f_y(x, y)$ continues.

- Si ces dérivées ne sont pas continues, l'approximation linéaire peut être mauvaise.

- En effet, considérons la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- On peut vérifier que les dérivées partielles existent à l'origine et sont égales à $f_x(0, 0) = 0$ et à $f_y(0, 0) = 0$.

- Mais ces dérivées $f_x(x, y)$ et $f_y(x, y)$ ne sont pas continues en $(0, 0)$.

- L'approximation linéaire de $f(x, y)$ autour de $(0, 0)$ serait $L(x, y) = 0$, alors que $f(x, y) = \frac{1}{2}$ en tout point sur la droite $y = x$.

- On voit qu'une fonction de deux variables peut mal se comporter même si ses deux dérivées partielles existent.

- Pour exclure un tel comportement, il est nécessaire de préciser la notion de **fonction différentiable de deux variables**.

▷ On se rappelle que pour une fonction d'une variable, $y = f(x)$, si $x$ varie de $a$ à $a + \Delta x$, alors, par définition, l'accroissement de $y$ est

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Dans un premier cours de calcul différentiel, on apprend que si $f$ est différentiable en $a$, alors

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x, \text{ où } \varepsilon \to 0 \text{ lorsque } \Delta x \to 0.$$

(Ici, $\varepsilon$ est une fonction de $\Delta x$.)

▷ Considérons maintenant une fonction de deux variables $z = f(x, y)$, et supposons que $x$ varie de $a$ à $a + \Delta x$ et que $y$ varie de $b$ à $b + \Delta y$. L'accroissement de $z$ correspondant est

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b).$$

L'accroissement $\Delta z$ représente la **variation de la valeur de $f$** lorsque $(x, y)$ varie de $(a, b)$ à $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

## Définition

Si $z = f(x, y)$, alors **$f$ est différentiable en $(a, b)$** si on peut exprimer $\Delta z$ sous la forme

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

où $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2 \to 0$ lorsque $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. ( $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ sont des fonctions de $\Delta x$ et $\Delta y$.)

**Note:**

- une fonction est différentiable si son approximation linéaire est une bonne approximation de la fonction lorsque $(x, y)$ est proche de $(a, b)$.
- Autrement dit, une fonction est différentiable si le plan tangent approxime bien le graphe de $f$ près du point de tangence.

▷ Le théorème suivant fournit une condition suffisante pour vérifier en pratique la différentiabilité d'une fonction de deux variables.

**Théorème**

Si les dérivées partielles $f_x$ et $f_y$ existent près de $(a, b)$ et sont continues en $(a, b)$, alors $f$ est différentiable en $(a, b)$.

**Exemple 2.2:** Montrons que $f(x,y) = xe^{xy}$ est différentiable en $(1,0)$ et trouvons sa linéarisation en ce point. Utilisons-la ensuite pour approximer $f(1,1;-0,1)$.

Réponse:

- Les dérivées partielles sont

$$f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}; \quad f_y(x,y) = x^2e^{xy}; \quad f_x(1,0) = 1; \quad f_y(1,0) = 1.$$

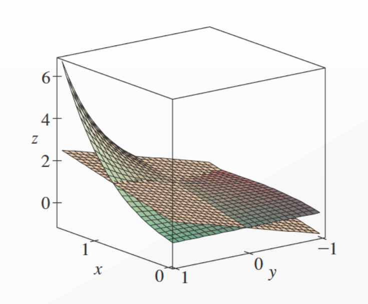
- Les fonctions $f_x$ et $f_y$ sont continues et donc $f$ est différentiable selon le théorème précédent.

- La linéarisation est

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0) \\ &= 1 + 1(x-1) + 1 \cdot y = x + y. \end{aligned}$$

- L'approximation linéaire correspondante est

$$xe^{xy} \approx x + y.$$



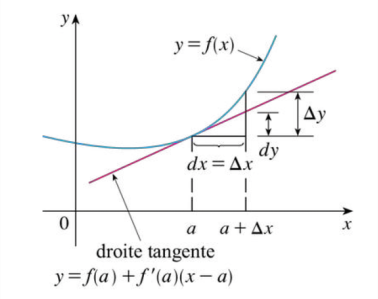

- On a donc $f(1,1;-0,1) \approx 1,1 - 0,1 = 1$.

- La vraie valeur est $f(1,1;-0,1) = 1,1e^{-0,11} \approx 0,98542$.

- Pour une fonction différentiable d'une variable $y = f(x)$, on définit la différentielle $dx$ comme étant une variable indépendante;

- c'est-à-dire que $dx$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

La différentielle de $y$ est alors $dy = f'(x)dx$.




- $\Delta y$ représente la variation de l'ordonnée de la courbe $y = f(x)$,

- ▷ et $dy$ est la variation de l'ordonnée de la droite tangente lorsque $x$ varie de la quantité $dx = \Delta x$.
- ▷ Pour une fonction différentiable de deux variables, $z = f(x, y)$, les différentielles $dx$ et $dy$ sont définies comme étant des variables indépendantes;
- ▷ c'est-à-dire qu'elles peuvent prendre n'importe quelles valeurs réelles.

La différentielle $dz$, aussi appelée **différentielle totale**, est

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{10}$$

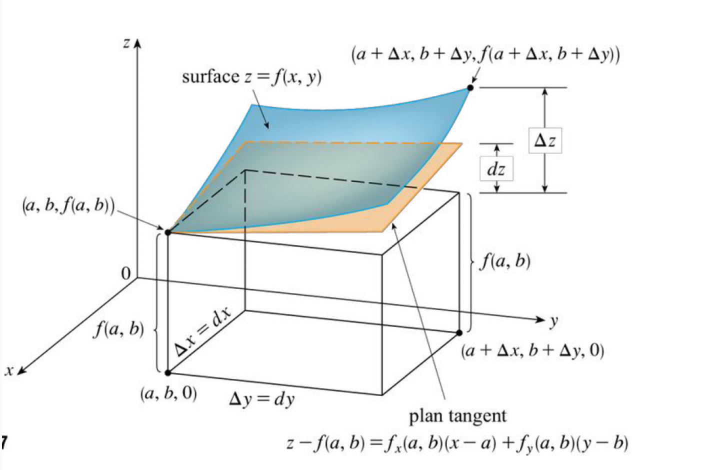
On utilise parfois la notation $df$ au lieu de $dz$.

- ▷ En posant $dx = \Delta x = x - a$ et $dy = \Delta y = y - b$ dans l'équation (10), la différentielle de $z$ est

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

▷ L'approximation linéaire peut donc s'écrire

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$




▷ $dz$ représente la variation de la hauteur du plan tangent, tandis que $\Delta z$ représente la variation de la hauteur de la surface $z = f(x, y)$ lorsque $(x, y)$ varie de $(a, b)$ à $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

**Exemple 2.3:** Le rayon de la base et la hauteur d'un cône circulaire droit mesurent respectivement 10 $\mathrm{cm}$ et 25 $\mathrm{cm}$, avec une erreur maximale possible de $0,1\ \mathrm{cm}$ sur chaque mesure. Utilisons les différentielles pour estimer l'erreur maximale sur le volume du cône calculé avec ces mesures.

Réponse:

- Le volume $V$ d'un cône de hauteur $h$ dont la base a un rayon $r$ est $V = \pi r^2 h/3$. La différentielle de $V$ est

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi rh}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh.$$

- Puisque chaque erreur est d'au plus $0,1\ \mathrm{cm}$, on a:

$$|\Delta r| \leq 0,1 \text{ et } |\Delta h| \leq 0,1.$$

- Pour trouver l'erreur maximale sur le volume, on prend l'erreur maximale sur les mesures de $r$ et de $h$, c'est-à-dire $dr = 0,1$ et $dh = 0,1$ avec $r = 10$ et $h = 25$. On obtient

$$dV = \frac{500\pi}{3}(0,1) + \frac{100\pi}{3}(0,1) = 20\pi$$

- L'erreur maximale sur le volume calculé est d'environ $20\pi\mathrm{cm}^3 \approx 63\ \mathrm{cm}^3$.
- La différentielle $dV$ donne une estimation de l'erreur absolue sur le volume.

- On peut calculer l'erreur relative en divisant $dV$ par $V$ :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial h}dh \\ &= \frac{1}{\pi r^2 h/3}\frac{2\pi r h}{3}dr + \frac{1}{\pi r^2 h/3}\frac{\pi r^2}{3}dh \\ &= 2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h} \\ &= 2\frac{0,1}{10} + \frac{0,1}{25} = 0,024 \end{aligned}$$

▷ On définit similairement les approximations linéaires, la différentiabilité et les différentielles des fonctions de plus de deux variables.

- **L'approximation linéaire** au point $(a, b, c)$ d'une fonction de trois variables est

  $$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c),$$

  où sa linéarisation $L(x, y, z)$ est le membre droit de cette expression.

- Si $w = f(x, y, z)$, alors **l'accroissement** de $w$ est

  $$w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

- On définit la **différentielle** $dw$ en termes des différentielles $dx$, $dy$ et $dz$ des variables indépendantes, à savoir

  $$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

# Informations sur le cours

# Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)

- Disponibilités:
  - ⋆ Lundi 10H00 - 12H00, MRR B-214
  - ⋆ Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214
  - ⋆ Jeudi 08H00 - 10H00, MRR B-214

- Manuels du cours:

[1] J. Stewart.
*Analyse concepts et contextes : Volume 2. Fonctions de plusieurs.*
DE BOECK, 2011.