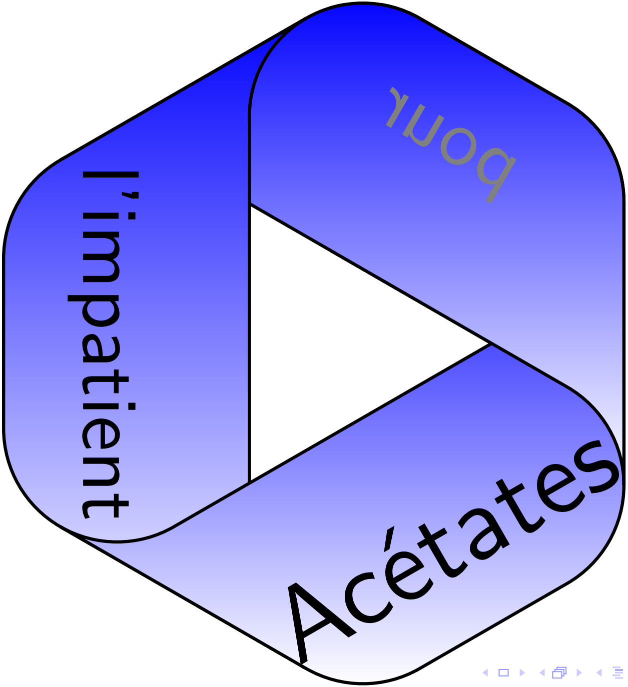
MAT 1910
Mathématiques de l'ingénieur II :
Intégrales triples en coordonnées cartésiennes

Dione Ibrahima

Chapitre III: Intégrales triples


Acétates
pour
l'impatient

Définition et propriétés des intégrales triples

- Définition : Le passage des intégrales doubles aux intégrales d'ordre supérieur (par exemple celles triples) semble trés naturel. Mais il y réside toutefois une difficulté d'ordre géométrique, due au fait que le graphe d'une fonction de trois variables est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$:

$$f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1}$$

Le graphe de f sera défini par $G_f := \Big\{(x, y, z, f(x, y, z)) : (x, y, z) \in D\Big\}$.
Il n'est donc pas possible de représenter G_f et encore moins de parler de volume algébrique dans $\mathbb{R}^4$. Ainsi l'utilisation de la somme de Riemann sera utilisé afin d'établir une définition des intégrales triples.
Dans le but d'établir une définition, on considère que le domaine est un parallélépipède rectangle dont les faces sont parallèles aux coordonnées : $D := [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Encore une fois, on procédera aux étapes suivantes permettant détablir une définition :

i. On définit une partition de D via un maillage des intervalles qui le composent :

$$\begin{aligned} a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b, \\ c = y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_{m-1} \leq y_m = d, \\ e = z_0 \leq z_1 \leq \cdots \leq z_{l-1} \leq z_l = f. \end{aligned}$$

Ce qui génère une partition P de D en $n \times m \times l$ parallélépipède ;

ii. La taille de la partition P est donnée par $(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$ où δ_x est la longueur du plus grand intervalle de la partition en x, δ_y celle en y et δ_z celle en z ;

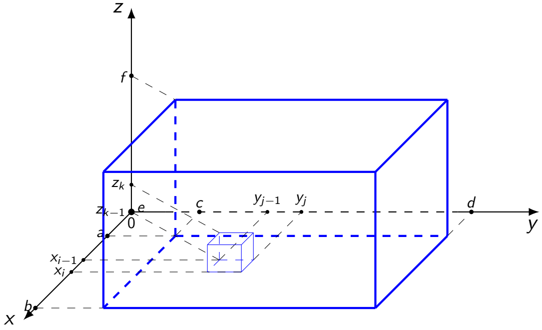
iii. le point milieu et le volume du parallélépipède en position (i, j, k) sont respectivement m_{ijk} et V_{ijk} :

$$\begin{aligned} m_{ijk} &:= \left(\frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i), \frac{1}{2}(y_{j-1} + y_j), \frac{1}{2}(z_{k-1} + z_k)\right), \\ V_{ijk} &:= (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}); \end{aligned}$$

iv. On définit la somme de Riemman de f pour la partition de P comme suit :

$$S_P := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} V_{ijk} f(x_i, y_j, z_k); \qquad (2)$$

v. Le même processus est répété avec une partition raffinée de P.



Définition

Soit $f(x,y,z)$ une fonction continue sur un domaine D. L'intégration triple de f sur D, notée $\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz$, est la limite de la somme de Riemann définie en (2) :

$$\begin{aligned}\int\int\int_D f(x,y,z)dV &:= \lim_{(\delta_x,\delta_y,\delta_z)\to(0,0,0)} S_P, \\ &:= \lim_{(n,m,l)\to(+\infty,+\infty,+\infty)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} V_{i,j,k} f(x_i,y_j,z_k) \end{aligned} \quad (3)$$

- Les propriétés des intégrales triples : Les propriétés sont idem à celles d'intégrale simple et des intégrales doubles :

i. Linéarité : Si f et g sont continues sur D , α une constante, on a l'égalité

$$\int\int\int_D (f+\alpha g)dV = \int\int\int_D f\, dV + \alpha \int\int\int_D g\, dV. \tag{4}$$

ii. Positivité : Si $f(x,y,z) \geq 0$ pour tout (x,y,z) appartenant à D, alors on a

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dV \geq 0. \tag{5}$$

iii. Relation de Chasles : Si $D = D_1 \cup D_2$ où D_1 et D_2 ont des intérieurs disjoints,

$$\int\int\int_D f\, dV = \int\int\int_{D_1} f\, dV + \int\int\int_{D_2} f\, dV. \tag{6}$$

iv. Si $m \leq f(x,y,z) \leq M$ pour tout $(x,y,z) \in D$, alors on a l'inégalité suivante

$$mV(D) \leq \int\int\int_D f(x,y,z)dV \leq MV(D). \tag{7}$$

Calcul des intégrales triples

Le but ici est de voir comment évaluer l'intégrale triple d'une fonction f, définie et continue sur un domaine D. C'est à dire on s'intéresse à $\int\int\int_D f(x,y,z)dV$:

- Domaine parallélélipédique : Si le domaine d'intégration est un parallélélipède rectangle de la forme $D := [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, ou bien de facon explicite

$$D := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\Big\}, \tag{8}$$

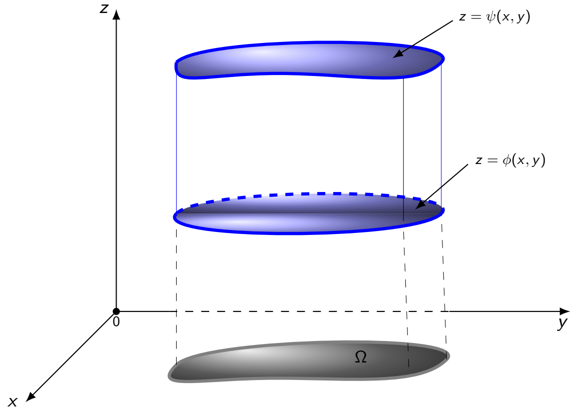
  on a l'intégrale triple qui est définie par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \int\int\int_D f(x,y,z)dV &:= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx \\ &:= \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_e^f f(x,y,z)dz\right)dx\right)dy \\ &:= .... \end{aligned} \tag{9}$$

  Il y a six combinaisons possibles.

- Domaine quelconque :
  i. Domaine de première espèse : C'est un domaine de la forme

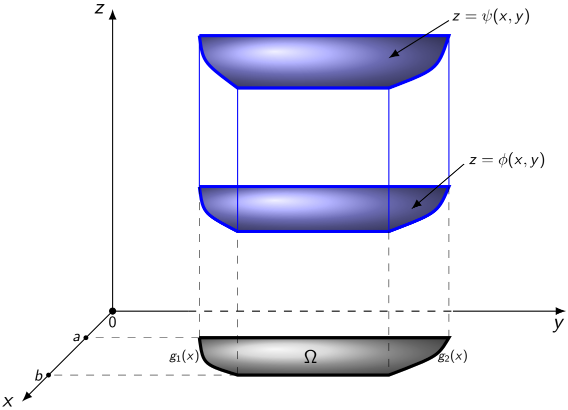
$$D := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y), (x,y) \in \Omega\right\}, \text{ où } \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$



L'intégrale triple est définie par la relation suivante :

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dV := \int\int_\Omega \left(\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dA. \qquad (10)$$

a. Si Ω est de type I : $\Omega := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\right\}$,



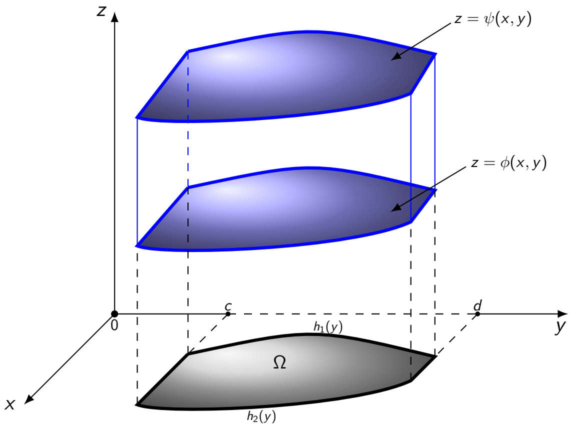
Alors le domain D, défini à la relation (10) est reécrit comme suit :

$$D := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x),\ \phi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\right\}.$$

Ainsi l'intégrale triple définie en (10) devient finallement :

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dV := \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dy\right) dx. \quad (11)$$

b. Si Ω est de type II : $\Omega := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\right\}$,



$$D := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y),\ \phi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\right\},$$

et donc l'intégrale triple définie en (10) est donnée finallement comme suit :

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dV := \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \left(\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dx \right) dy. \quad (12)$$

Exemple : Évaluons l'intégrale suivante $\int\int\int_D f(x,y,z)dzdydx$, où

$$\begin{aligned} D &:= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y), (x,y) \in \Omega\Big\}, \text{ où} \\ \psi(x,y) &:= \sqrt{8 - x^2 + y^2},\ \phi(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}, \\ \Omega &:= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\Big\}. \end{aligned}$$

Pour Ω de type I, $\Omega := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\Big\}$.

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dzdydx := \int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2+y^2}} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx.$$

Si Ω de type II, $\Omega := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 2, -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\Big\}$.

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dzdydx := \int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2+y^2}} f(x,y,z)dz\right)dx\right)dy.$$

ii. Domaine de deuxière espèse : C'est un domaine de la forme

$$D := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x, z) \leq y \leq \psi(x, z), (x, z) \in \Omega\Big\}, \tag{13}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = plan\,(xOz)$. L'intégrale triple est définie par la relation suivante :

$$\int\int\int_D f(x, y, z)dzdydx := \int\int_\Omega \left(\int_{\phi(x,z)}^{\psi(x,z)} f(x, y, z)dy\right)dA. \tag{14}$$

a. Si Ω est de type I ;$\Omega := \Big\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq z \leq g_2(x)\Big\}$, alors

$$D := \Bigg\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq z \leq g_2(x),\ \phi(x, z) \leq y \leq \psi(x, z)\Bigg\},$$

et donc l'intégrale (14) devient finallement :

$$\int\int\int_D f(x, y, z)dzdydx := \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{\phi(x,z)}^{\psi(x,z)} f(x, y, z)dy\right)dz\right)dx. \tag{15}$$

b. Si Ω est de type II ; $\Omega := \Big\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : e \leq z \leq f,\ h_1(z) \leq x \leq h_2(z)\Big\}$, alors

$$D := \Bigg\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e \leq z \leq f,\ h_1(z) \leq x \leq h_2(z),\ \phi(x, z) \leq y \leq \psi(x, z)\Bigg\},$$

et donc l'intégrale (14) est donnée finallement comme suit :

$$\int\int\int_D f(x, y, z)dzdydx := \int_e^f \left(\int_{h_1(z)}^{h_2(z)} \left(\int_{\phi(x,z)}^{\psi(x,z)} f(x, y, z)dy\right)dx\right)dz. \tag{16}$$

Exemple : Évaluons l'intégrale suivante $\int\int\int_D f(x,y,z)dzdydx$, où

$$\begin{aligned} D &:= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \phi(x,z)\le y\le \psi(x,z), (x,z)\in\Omega\right\}, \text{ où} \\ \psi(x,z) &:= 4,\ \phi(x,z) := (x-1)^2+\frac{4}{9}z^2, \\ \Omega &:= \left\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{z^2}{9}\le 1\right\}. \end{aligned}$$

De type I, $\Omega := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 4, -3\sqrt{\frac{1-(x-2)^2}{4}}\le z\le 3\sqrt{\frac{1-(x-2)^2}{4}}\right\}$.

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dzdydx := \int_0^4\left(\int_{-3\sqrt{\frac{1-(x-2)^2}{4}}}^{3\sqrt{\frac{1-(x-2)^2}{4}}}\left(\int_{(x-1)^2+\frac{4}{9}z^2}^{4} f(x,y,z)dy\right)dz\right)dx.$$

Type II, $\Omega := \left\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 : -3\le z\le 3, 2-2\sqrt{1-\frac{z^2}{9}}\le x\le 2+2\sqrt{1-\frac{z^2}{9}}\right\}$.

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dzdydx := \int_{-3}^3\left(\int_{2-2\sqrt{1-\frac{z^2}{9}}}^{2+2\sqrt{1-\frac{z^2}{9}}}\left(\int_{(x-1)^2+\frac{4}{9}z^2}^{4} f(x,y,z)dy\right)dx\right)dz.$$

iii. Domaine de troisième espèse : C'est un domaine de la forme

$$D := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(y,z) \le x \le \psi(y,z), (y,z) \in \Omega\Big\}, \tag{17}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = plan\,(yOz)$. L'intégrale triple est définie par la relation suivante :

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dzdydx := \int\int_\Omega \left(\int_{\phi(y,z)}^{\psi(y,z)} f(x,y,z)dx\right)dA. \tag{18}$$

a. Si Ω est de type I ; $\Omega := \Big\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ g_1(y) \le z \le g_2(y)\Big\}$, alors

$D := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \le y \le d,\ g_1(y) \le z \le g_2(y),\ \phi(y,z) \le x \le \psi(y,z)\Big\}$,

et donc l'intégrale (18) devient finallement comme suit :

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dzdydx := \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \left(\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dx\right)dz\right)dy. \tag{19}$$

b. Si Ω est de type II ; $\Omega := \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : e \le z \le f,\ h_1(z) \le y \le h_2(z)\right\}$, alors

$D := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : e \le z \le f,\ h_1(z) \le y \le h_2(z),\ \phi(y,z) \le x \le \psi(y,z)\Big\}$,

et donc l'intégrale (18) est donnée finallement comme suit :

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dzdydx := \int_e^f \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \left(\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dx\right)dy\right)dz. \tag{20}$$

Exemple : Évaluons l'intégrale suivante $\int\int\int_D f(x,y,z)dzdydx$, où

$$\begin{aligned} D &:= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(y,z) \leq x \leq \psi(y,z), (y,z) \in \Omega\right\}, \text{ où} \\ \psi(y,z) &:= 4 - y - z,\ \phi(y,z) := y, \\ \Omega &:= \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, z \geq 0, 2y + z \leq 4\right\}. \end{aligned}$$

Pour Ω de type I, $\Omega := \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - 2y\right\}$.

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dzdydx := \int_0^2 \left(\int_0^{4-2y} \left(\int_y^{4-y-z} f(x,y,z)dx \right) dz \right) dy.$$

Si Ω de type II, $\Omega := \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq z \leq 4, 0 \leq y \leq 2 - \frac{1}{2}z\right\}$.

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dzdydx := \int_0^4 \left(\int_0^{2-\frac{1}{2}z} \left(\int_y^{4-y-z} f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz.$$

Applications

Dans la suite, S est un solide de $\mathbb{R}^3$ de masse volumique $\rho(x, y, z)$. On a ainsi :

- Calcul de volume, de la masse et du centre de masse :

Le volume et la masse de S, notés respectivement $V(S)$ et $M(S)$ sont définis par

$$V(S) := \int\int\int_S dxdydz, \; M(S) := \int\int\int_S \rho(x, y, z)dxdydz.$$

Les coordonnées du centre de masse $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, sont données par

$$\bar{x} := \frac{1}{M}\int\int\int_S x\rho(x, y, z)dV, \; \bar{y} := \frac{1}{M}\int\int\int_S y\rho(x, y, z)dV, \; \bar{z} := \frac{1}{M}\int\int\int_S z\rho(x, y, z)dV.$$

Dans le cas où le solide est homogène, c'est à dire de densité constante

$$\bar{x} := \frac{1}{V(S)}\int\int\int_S xdV, \; \bar{y} := \frac{1}{V(S)}\int\int\int_S ydV, \; \bar{z} := \frac{1}{V(S)}\int\int\int_S zdV.$$

- Calcul de moment d'inertie par rapport à un axe : On suppose que Δ est un axe quelconque de $\mathbb{R}^3$ et $d((x, y, z), \Delta)$ désigne la distance du point (x, y, z) du solide S à l'axe Δ. On définit le moment d'inertie J_Δ par rapport à Δ par :

$$J_\Delta := \int\int\int_S \left[d((x, y, z), \Delta)\right]^2 \rho(x, y, z) dxdydz \tag{21}$$

Remarque

- Par rapport à l'axe $\Delta := (Ox)$, on a $d((x, y, z), \Delta) := \sqrt{y^2 + z^2}$ et donc J_Δ devient

$$J_\Delta := \int\int\int_S (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dxdydz. \tag{22}$$

- Par rapport à l'axe $\Delta := (Oy)$, on a $d((x, y, z), \Delta) := \sqrt{x^2 + z^2}$ et donc J_Δ devient

$$J_\Delta := \int\int\int_S (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dxdydz. \tag{23}$$

- Par rapport à l'axe $\Delta := (Oz)$, on a $d((x, y, z), \Delta) := \sqrt{x^2 + y^2}$ et donc J_Δ devient

$$J_\Delta := \int\int\int_S (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dxdydz. \tag{24}$$

Exemple : On désigne par S le segment de cylindre d'éfini par $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ et $z \in [1, 2]$. On suppose que sa densité est constante égale à 2. Calculer la masse de S, son centre de masse et son moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz).
Par définition de la masse on la relation suivante :

$$
\begin{aligned}
M(S) &:= \int\int\int_S 2dxdydz., \\
&= \int\int_{1\leq x^2+y^2\leq 4} \left(\int_1^2 2dz\right) dxdy = \int\int_{1\leq x^2+y^2\leq 4} 2dxdy.
\end{aligned}
$$

La forme du domaine suggère l'usage des coordonnées polaires :

$$
M(S) = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 2rdr\right) d\theta = 6\pi.
$$

Les coordonnées du centre de gravité sont données par

$$
\bar{z} = \frac{2}{6\pi} \int\int_{1\leq x^2+y^2\leq 4} \left(\int_1^2 zdz\right) dxdy = \frac{1}{2\pi} \int\int_{1\leq x^2+y^2\leq 4} dxdy = \frac{3}{2},
$$

car cette dernière intégrale n'est rien d'autre que l'aire de l'anneau, i.e. 3π.

Finallement le moment d'inertie est déterminé par le calcule suivant :

$$J_{(Oz)} := 2\int\int_{1\leq x^2+y^2\leq 4}\left(\int_1^2 (x^2+y^2)dz\right)dxdy = 2\int\int_{1\leq x^2+y^2\leq 4}(x^2+y^2)dxdy.$$

Par passage au coordonnées polaires on le resultat suivant

$$J_{(Oz)} = 2\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3 dr d\theta = 15\pi.$$

- Livre J. Stewart (Édition MODULO), page 296-303 : sections 7.1.
- Livre Stewart, page 873 : section 12.7.
- Pour un cours de maple complet : http ://alamanya.free.fr/

Fin