MAT 1910
Mathématiques de l'ingénieur II

Dione Ibrahima

Chapitre VI: Intégrales de surface (1)

Surfaces paramétrées

- Définition : Aussi bien qu'on a pu représenter une courbe sur le plan ou dans l'espace par des équations paramétriques de la forme :

$$\vec{r}(t) := x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \qquad \text{Courbe plane}$$
$$\vec{r}(t) := x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \qquad \text{Courbe de l'espace}$$

on pourra de la même façon décrire une surface par une fonction vectorielle $\vec{r}(u, v)$ de deux paramètres u et v.

Définition

Soit S une surface de l'espace où tout point P est déterminé par ses coordonnées (x, y, z). Si les composantes x, y et z sont représentables sous la forme de fonction continue de deux variables u et v dans D, alors la surface S donnée par :

$$\vec{r}(u, v) := x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

est dite surface paramétrée. Les équations $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ et $z = z(u, v)$ sont dites équations paramétriques de la surface S.

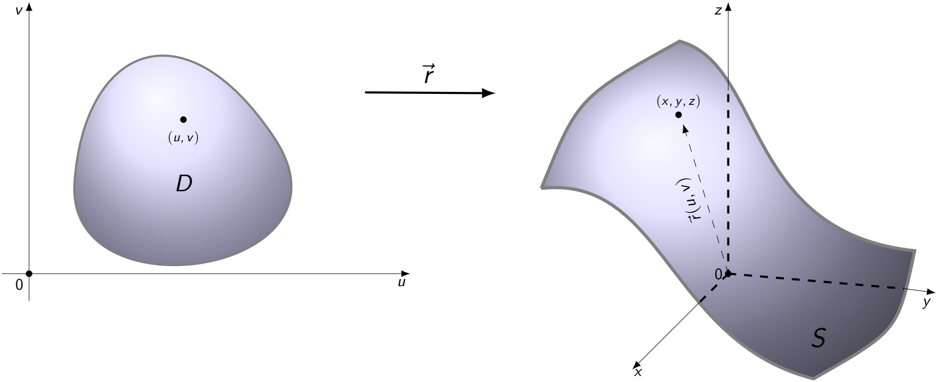


FIGURE: Paramétrisation de la surface S.

- Exemples : Aperçu de surfaces paramétriques

    i. Identifier et donner un aperçu de la surface paramétrique S définie par :

    $$\vec{r}(u,v) := 3\cos(u)\vec{i} + 3\sin(u)\vec{j} + v\vec{k}, \ \ 0 \leq u \leq 2\pi \ \text{ et } \ 0 \leq v \leq 4.$$

    ii. Identifier et donner un aperçu de la surface paramétrique S définie par :

    $$\vec{r}(u,v) := \sin(u)\cos(v)\vec{i} + \sin(u)\sin(v)\vec{j} + \cos(u)\vec{k}, \ \ 0 \leq u \leq \pi, \ \ 0 \leq v \leq 2\pi.$$

    iii. Identifier et donner un aperçu de la surface paramétrique S définie par :

    $$\vec{r}(r,\theta) := r\cos(\theta)\vec{i} + r\sin(\theta)\vec{j} + \alpha r\vec{k}, \ \ 0 \leq r \leq R, \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ \text{ et } \ \alpha > 0.$$

    iv. Soit $P_o(x_o, y_o, z_o)$ un point du plan $(\mathcal{A})$ et $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ un vecteur normal au même plan. L'équation cartésienne de ce plan $(\mathcal{A})$ sera donnée par :

    $$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_oP} = 0 \ \text{ soit } n_1(x - x_o) + n_2(y - y_o) + n_3(z - z_o) = 0\,,$$

    pour tout point $P(x,y,z) \in (\mathcal{A})$.

Méthode de paramétrisation de surface

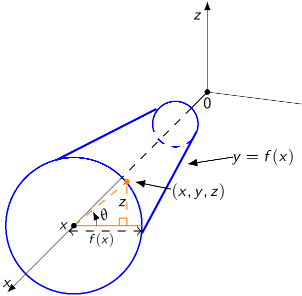
- Méthode : Aux exemples précédents, il était question d'identifier une surface décrite par ses équations paramétriques. Le problème inverse, qui consiste à déterminer les équations paramétriques d'une surface donnée, est plus difficile.

Méthode 1

Soit S une surface définie par l'équation $z = f(x, y)$. Une paramétrisation de la surface S pourrait être définie par la fonction vectorielle $\vec{r}$ comme suit :

$$\vec{r}(x, y) := x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}\,.$$

- Surface de révolution :



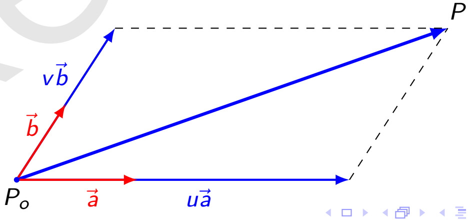
Méthode 2

Considérons la surface S obtenue par rotation autour de l'axe $(0x)$ de la courbe $y = f(x)$, où $a \leq x \leq b$ et $f(x) \geq 0$. Désignant par θ l'angle de rotation, alors une description paramétrique de S en tout point (x, y, z) est donnée par

$$x := x\,,\quad y = f(x)\cos(\theta)\,,\quad z := f(x)\sin(\theta)\,. \tag{1}$$

- Exemples :
  i. Chercher la fonction vectorielle qui représente le plan qui passe par le point P_o de vecteur position $\vec{r}_o$ et qui contient les deux vecteurs non parallèles $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
  Solution : Un point quelconque du plan peut être rejoint à partir de P_o moyennant un déplacement parallèlement à $\vec{a}$ et un déplacement parallèlement à $\vec{b}$. Ainsi donc $\overrightarrow{P_oP} = u\vec{a} + v\vec{b}$. Si $\vec{r}(u, v)$ désigne le vecteur position de P :

$$\vec{r}(u, v) := \vec{r}_o + u\vec{a} + v\vec{b}\,,\ \text{pour tout } u, v \in \mathbb{R}.$$



ii. Donner une paramétrisation du cône défini par l'équation : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

iii. Chercher une représentation paramétrique de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Réponse : $x = a\sin(\phi)\cos(\theta)$, $y = a\sin(\phi)\sin(\theta)$, $z = a\cos(\phi)$, où le domaine de définition des paramètres est $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

iv. Chercher une représentation paramétrique du cylindre

$$x^2 + y^2 = 4, \ 0 \leq z \leq 1.$$

R eponse : $x = 2\cos(\theta)$, $y = 2\sin(\theta)$, $z = z$, où $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq z \leq 1$.

v. Chercher une fonction vectorielle qui représente le paraboloide elliptique $z = x^2 + 2y^2$.
Réponse : On a $x = x$, $y = y$, $z = x^2 + 2y^2$, soit l'équation vectorielle suivante $\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (x^2 + 2y^2)\vec{k}$.

vi. On fait tourner autour de l'axe $(0x)$ l'arc de courbe $y = \sin(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Écrire les équations paramétriques pour cette surface à l'aide de ces équations.
Réponse : $x = x$, $y = \sin(x)\cos(\theta)$, $z = \sin(x)\sin(\theta)$, où $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Vecteur normal et plan tangent de surface paramétrée

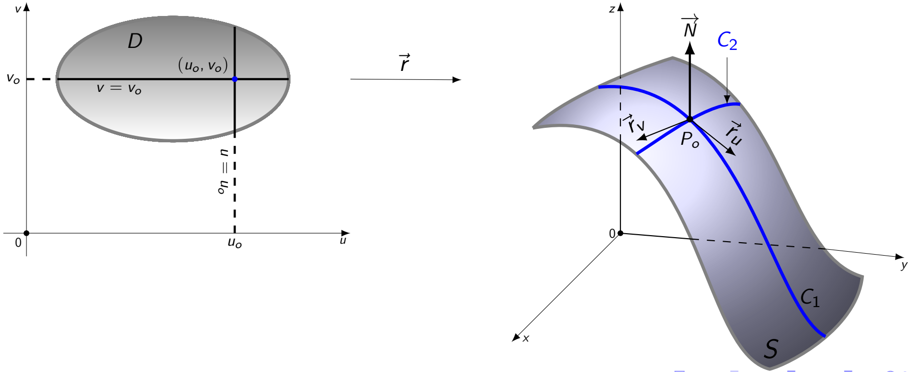
- Vecteur normal et plan tangent : Soit S une surface paramétrique définie par

$$\vec{r}(u,v) := x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}, \text{ où } u, v \in D. \tag{2}$$

Les dérivées partielles de $\vec{r}$ par rapport à ses variables u et v sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial u} = \vec{r}_u \quad &:= \quad \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\vec{k}, \\ \frac{\partial r}{\partial v} = \vec{r}_v \quad &:= \quad \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\vec{k}, \end{aligned}$$

où x, y et z ont des dérivées partielles continues sur D.



En fixant $v = v_o$, alors $\vec{r}(u, v_o)$ est une paramétrisation d'une courbe sur la surface S qu'on va noter C_1. Et on a déjà établi que le vecteur tangent à C_1 au point $P_o\big(x(u_o, v_o), y(u_o, v_o), z(u_o, v_o)\big)$ est donné par l'égalité suivante :

$$\vec{r}_u(u_o, v_o) := \frac{\partial x}{\partial u}(u_o, v_o)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_o, v_o)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_o, v_o)\vec{k}\,, \tag{3}$$

De facon idem, en fixant $u = u_o$, la courbe $\vec{r}(u_o, v)$ définit la courbe notée C_2, de vecteur tangent au point $P_o\big(x(u_o, v_o), y(u_o, v_o), z(u_o, v_o)\big)$ qui est :

$$\vec{r}_v(u_o, v_o) := \frac{\partial x}{\partial v}(u_o, v_o)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_o, v_o)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_o, v_o)\vec{k}\,. \tag{4}$$

Une surface S d'équation paramétrique $\vec{r}(u, v)$ est dite lisse, si le vecteur $\vec{r}_u(u_o, v_o) \times \vec{r}_v(u_o, v_o)$ est non nul en tout point (u_o, v_o) du domaine D.

Définition (Vecteur normal et plan tangent)

Soit S une surface lisse d'équation paramétrique $\vec{r}(u, v)$; on appelle :

1. Vecteur normal à la surface S au point $P_o\big(x(u_o, v_o), y(u_o, v_o), z(u_o, v_o)\big)$ où $(u_o, v_o) \in D$, le vecteur $\overrightarrow{N}(u_o, v_o) := \vec{r}_u(u_o, v_o) \times \vec{r}_v(u_o, v_o)$;
2. Plan tangent à S au point P_o, le plan défini par $\vec{r}_u(u_o, v_o)$ et $\vec{r}_v(u_o, v_o)$.

- Exemples :
  i. Trouver le plan tangent, à la surface S d'équations paramétriques $x = u^2$, $y = v^2$ et $z = u + 2v$, au point $(1, 1, 3)$.

  ii. Trouver l'équation du plan tangent au paraboloide donné par $\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 + v^2)\vec{k}$ au point $(1, 2, 5)$.

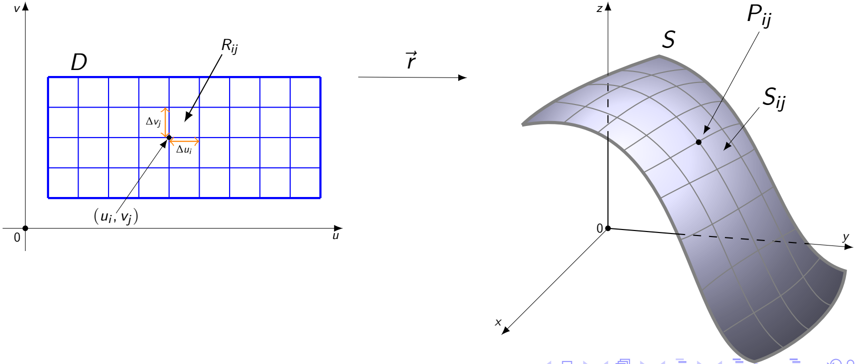
  iii. Donner l'équation paramétrique du plan P défini par les trois points non colinéaires A, B et C.

  iv. Donner l'équation paramétrique du plan tangent, au point P_o, à la surface S de représentation paramétrique $\vec{r}(u, v)$.
  Solution : $\overrightarrow{R}(u, v) = \vec{r}(u_o, v_o) + u\vec{r}_u(u_o, v_o) + v\vec{r}_v(u_o, v_o)$, où $P_o = \vec{r}(u_o, v_o)$.

Aire d'une surface paramétrée

- Définition : Soit S une surface lisse d'équation paramétrique $\vec{r} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, où D est un rectangle. On considère une partition de D en rectangles R_{ij} où (u_i, v_j) est un sommet de R_{ij}. Pour des variations Δu_i et Δv_j petites, l'aire de la surface élémentaire S_{ij}, image de R_{ij}, est approximée par l'aire du parallélogramme (sur le plan tangent) de cotés $\Delta u_i \, \vec{r}_u$ et $\Delta v_j \, \vec{r}_v$. Ainsi

$$A(S) = \sum_{i,j} A(\vec{r}(R_{ij})) \simeq \sum_{i,j} ||\Delta u_i \vec{r}_u \times \Delta v_j \vec{r}_v|| = \sum_{i,j} ||\vec{r}_u \times \vec{r}_v|| \Delta u_i \Delta v_j, \qquad (5)$$



le membre de droite de (5) étant une somme de Riemann de la fonction $||\vec{r}_u \times \vec{r}_v||$.

Définition

Soit S une surface lisse de représentation paramétrique $\vec{r}$ définie par

$$\vec{r}(u,v) := x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}\,, \text{ pour tout } (u,v) \in D.$$

Alors l'aire de la surface S est donnée par la relation suivante :

$$A(S) := \int\int_D ||\vec{r}_u \times \vec{r}_v||dudv. \tag{6}$$

L'expression $dS := ||\vec{r}_u \times \vec{r}_v||dudv$ est appelée élément de surface.

Remarque

Pour le cas de la surface S d'équation $z = f(x,y)$ où $x,\ y \in D$, on a les équations paramétriques suivantes : $x = x$, $y = y$ et $z = f(x,y)$.
Ainsi l'aire de la surface S est donnée par la formule particulière de (6) suivante :

$$A(S) := \int\int_D ||\vec{r}_x \times \vec{r}_y||dxdx = \int\int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA. \tag{7}$$

- Exemples :

   i. Déterminer l'aire du cône C paramétré par $\vec{r}(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), r)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $r \in (0, 1]$.
   Solution : $A(C) = \pi\sqrt{2}$.

   ii. Trouver l'aire de la sphère de rayon a.
   Solution : $A(S) = 4\pi a^2$.

   iii. Trouver l'aire du tore T dont l'équation paramétrique est donnée par : $\vec{r}(u,v) = (2+\cos(u))\cos(v)\vec{i} + (2+\cos(u))\sin(v)\vec{j} + \sin(u)\vec{k}$, où le domaine D est donné par $0 \leq u \leq 2\pi$ et $0 \leq v \leq 2\pi$.
   Réponse : $A(T) = 8\pi^2$

   iv. Trouver l'aire du paraboloide $z = x^2 + y^2$, située sous le plan $z = 9$.
   Solution : Une application directe de la formule (7) donne : $A = \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1)$.

   v. Calculer l'aire de la surface engendrée par la rotation de $y = x$, $0 \leq x \leq 1$ autour de l'axe des x.
   Solution : Définissez la paramétrisation : $\vec{r}(x,\theta) = (x, x\cos\theta, x\sin\theta)$ et utilisez la formule (6) ; $A = \pi\sqrt{2}$.

Exercices du Livre Stewart (édition MODULO) à Faire :

- Section 10.1 : Exercices 21, 23, 25, 33, 41, 49.

Références :

- Livre Stewart (édition MODULO), page 412-421 : section 10.1
- Livre Stewart (édition 2), page 729 : section 10.5 ; page 868 : section 12.6
- Pour un cours de Maple complet : http ://alamanya.free.fr/