MAT 1910
Mathématiques de l'ingénieur II

Dione Ibrahima

Chapitre VI:Intégrales de surface (3)

Formes vectorielles du théorème de Green

- Version circulation du théorème : On considère ici la fonction vectorielle $\overrightarrow{\mathbb{F}} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ dont l'intégrale curviligne est donnée par :

$$\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy.$$

Considérant $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ comme étant un champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ dont la troisième compsante est nulle, son rotationnel est

$$rot(\overrightarrow{\mathbb{F}}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Par conséquent on a $rot(\overrightarrow{\mathbb{F}}) \cdot \vec{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \cdot \vec{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$.

Théorème (Forme circulation du théorème de Green)

Soient D une région du plan xy et $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ un champ continûment dérivable sur D. Si la frontière du domaine D notée C est orientée positivement par rapport à D, la circulation de $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ autour de la frontière C est égale au flux de $rot(\overrightarrow{\mathbb{F}})$ à travers D, c'est à dire

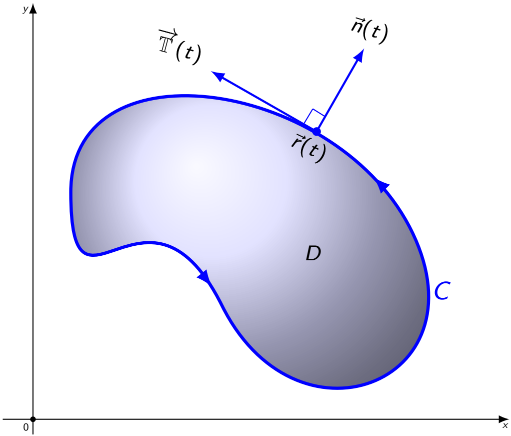
$$\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = \int\int_D rot(\overrightarrow{\mathbb{F}}) \cdot \vec{k}\, dxdy \tag{1}$$

- Version divergence du théorème : Si C est représentée par la fonction vectorielle $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \le t \le b$, le vecteur unitaire tangent est

$$\overrightarrow{\mathbb{T}} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||} = \frac{x'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||}\vec{i} + \frac{y'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||}\vec{j}.$$

Le vecteur normal unitaire à C, orienté vers l'extérieur de D, est donnée par

$$\vec{n}(t) = \frac{y'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||}\vec{i} - \frac{x'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||}\vec{j}.$$



Alors, compte tenu de ce qui précède on obtient par le théorème de Green :

$$\begin{aligned}
\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot \vec{n}\, ds &:= \int_a^b \Big(\overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot \vec{n}\Big)(t) ||\vec{r}\,'(t)||\, dt \\
&= \int_a^b P\Big(x(t), y(t)\Big) y'(t) dt - Q\Big(x(t), y(t)\Big) x'(t) dt \\
&= \int_C P\, dy - Q\, dx = \int\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA.
\end{aligned}$$

Théorème (Forme divergence du théorème de Green)

Soit $\overrightarrow{\mathbb{F}} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ un champ continûment dérivable dans une région plane D et sur sa frontière C (une courbe fermée). Si $\vec{n}$ désigne la normale unitaire extérieure de D en tout point de sa frontière C, on a

$$\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot \vec{n}\, ds = \int\int_D div\Big(\overrightarrow{\mathbb{F}}(x, y)\Big)\, dxdy \tag{2}$$

Remarque

L'intégrale $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot \vec{n}\, ds$ mesure le flux du champ $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ à travers la frontière de D.

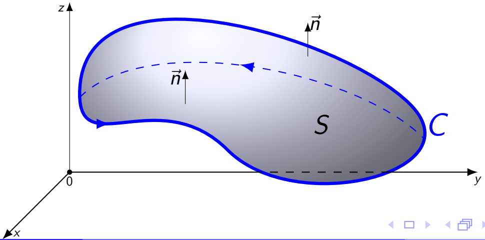
Le théorème de Stokes

- Définition : Le théorème de Stokes est une version en dimension supérieur de celui de Green car associant une intégrale de surface S à une intégrale curviligne autour de sa frontière (qui est une courbe dans l'espace), alors que le théorème de Green relie une intégrale double sur une région plane D à une intégrale curviligne autour de sa courbe frontière plane.

Théorème de Stokes

Soit S une surface lisse par morceaux orientée et bornée par une courbe C lisse par morceaux, fermée et simple, et orientée positivement par rapport à S. Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ dont les composantes ont des dérivées partielles continues sur une région ouverte dans $\mathbb{R}^3$ qui contient S :

$$\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = \int\int_S rot(\overrightarrow{\mathbb{F}}) \cdot d\vec{S} \qquad (3)$$



Par définition on a

$$\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = \int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbb{T}} ds \quad \text{et} \quad \int\int_S rot(\overrightarrow{\mathbb{F}}) \cdot d\vec{S} = \int\int_S rot(\overrightarrow{\mathbb{F}}) \cdot \vec{n} dS. \qquad (4)$$

Le théorème de Stokes énonce que l'intégrale curviligne autour de la courbe frontière de S de la composante tangentielle de $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ est égale à l'intégrale de surface de la composante normale du rotationnel de $\overrightarrow{\mathbb{F}}$.

- Similarité entre théorèmes de Green et de Stokes :

Dans le cas particulier où la surface S est une partie du plan xy et est orientée vers le haut, le vecteur normal unitaire est $\vec{k}$, l'intégrale de surface devient une intégrale double et le théorème de Stokes devient

$$\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = \int\int_S rot(\overrightarrow{\mathbb{F}}) \cdot d\vec{S} = \int\int_S rot(\overrightarrow{\mathbb{F}}) \cdot \vec{k} dxdy. \qquad (5)$$

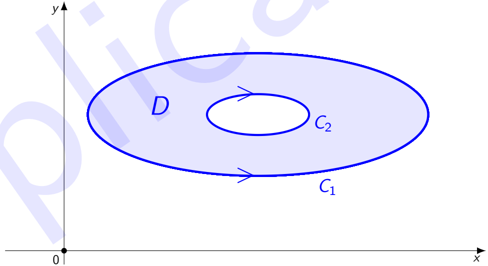
Il s'agit précisement de la version circulation du théorème de Green donnée dans (1). Le théorème de Green est donc un cas particulier du théorème de Stokes.

Applications des théorèmes de Green et de Stokes

- Le théorème de Green :
  i. Version scalaire du théorème de Green

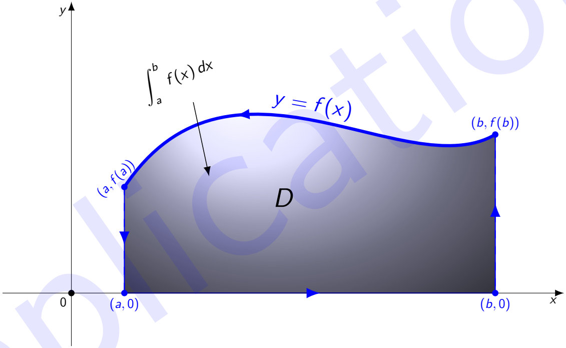
Le théorème de Green peut être étendu à des régions qui ont des trous, i.e. des régions qui ne sont pas simplement connexes. La frontière C du domaine D dans la figure ci-dessous se compose de deux courbes simples fermées C_1 et C_2. On suppose que ces frontières sont orientées positivement. La formule de Green est :

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy. \tag{6}$$



Exemple : Soit $\overrightarrow{\mathbb{F}}(x, y) = (-y\vec{i} + x\vec{j})/(x^2 + y^2)$. Montrer que $\displaystyle\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = 2\pi$ sur tout chemin fermé orienté positivement qui entoure l'origine.

ii. Formes vectorielles du théorème de Green : Soit $f(x)$ une fonction strictement positive pour $x \in [a, b]$. On note D, le domaine délimité par la courbe $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, les segments $[(a, 0), (a, f(a))]$, $[(b, 0), (b, f(b))]$ et le segment $[a, b]$ de l'axe (Ox). On appelle C la frontière de D orientée positivement.



Calculer $\int_C (x^2 - y + 1, xy + y^2) \cdot d\vec{r}$ en fonction de $I = \int_a^b f(x)\,dx$ et de la position du centre de gravité de D. Réponse :

$$\int_C (x^2 - y + 1, xy + y^2) \cdot d\vec{r} = \int\int_D (y + 1)\,dxdy = A(D)(\bar{y} + 1) = I(\bar{y} + 1).$$

- Le théorème de Stokes :

  i. Calculer $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r}$, $\overrightarrow{\mathbb{F}}(x,y,z) := -y^2\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ et où C est la courbe d'intersection du plan $y + z = 2$ et du cylindre $x^2 + y^2 = 1$. (La courbe C est orientée de manière que, vue du dessus, elle soit parcourue dans le sens antihoraire.)
  Solution : $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = \pi$.

  ii. Utiliser le théorème de Stokes pour calculer l'intégrale $\int\int_S rot(\overrightarrow{\mathbb{F}}) \cdot d\vec{S}$, où $\overrightarrow{\mathbb{F}}(x,y,z) := xz\vec{i} + yz\vec{j} + xy\vec{k}$, et S est la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ située dans le cylindre $x^2 + y^2 = 1$ et au dessus du plan xy.
  Solution : $\int\int_S rot(\overrightarrow{\mathbb{F}}) \cdot d\vec{S} = 0$.

  iii. Calculer le travail éffectué par le champ vectoriel

$$\overrightarrow{\mathbb{F}}(x,y,z) := (z^2 - e^{x^2})\vec{i} + (x^2 - e^{y^2})\vec{j} + (xy - e^{z^2})\vec{k} \tag{7}$$

  le long de la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) := 3\cos(t)\vec{i} + 3\sin(t)\vec{j} + 9\cos^2(t)\vec{k},\ 0 \leq t \leq 2\pi. \tag{8}$$

  Solution : $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = -\frac{81\pi}{2}$.

Exercices du Livre Stewart (édition MODULO) à Faire :

- Section 10.3 : Exercices 23, 33.
- Section 10.4 : Exercices 3, 5, 9, 13, 15, 19, 21, 25.

Références :

- Livre Stewart (édition MODULO), page 435-448 : section 10.3-10.4
- Livre Stewart (édition 2), page 935-946 : section 13.4-13.5
- Pour un cours de Maple complet : http ://alamanya.free.fr/