MAT 1910
Mathématiques de l'ingénieur II

Dione Ibrahima

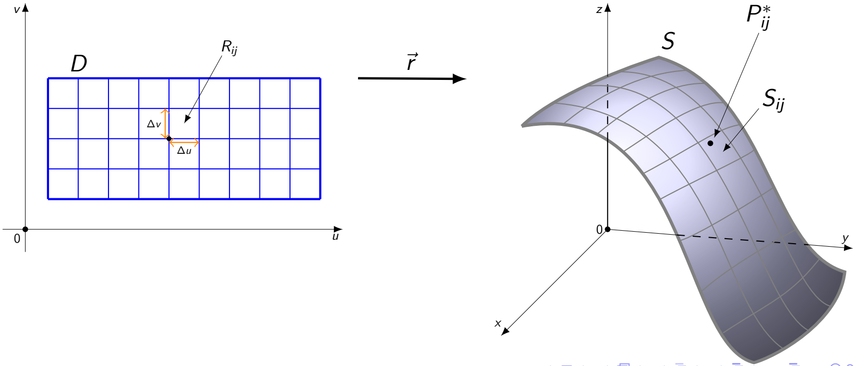
Chapitre VI:Intégrales de surface (2)

Intégrale d'un champ scalaire sur une surface

- Définition : Supposons la surface S décrite par la représentation vectorielle

$$\vec{r}(u,v) := x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}\,,\ (u,v) \in D. \tag{1}$$

On fait l'hypothèse que u et v varient dans un domaine rectangulaire D, qu'on divise en sous-rectangles R_{ij} de dimensions Δu et Δv. Alors la surface S est divisée en éléments d'aire S_{ij}. On forme ainsi la somme de Riemann suivante où on évalue f en un point P_{ij}^* de S_{ij} qu'on multiplie par l'aire ΔS_{ij} :



$$S_{nm} := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij}. \quad (2)$$

Définition 1

On définit l'intégrale de surface de f comme étant la limite de la somme en (2) :

$$\int\int_S f(x,y,z)dS := \lim_{m,n\to+\infty} S_{nm} := \lim_{m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij}. \quad (3)$$

En remplaçant l'aire de l'élément de surface ΔS_{ij} par celle qui lui est à peu près égale et qui est celle du parallélogramme du plan tangent $\Delta S_{ij} = ||\vec{r}_u \times \vec{r}_v||\Delta u \Delta v$, on a la définition de l'intégrale de surface paramétrique S suivante :

Définition 2

Soit S une surface de représentation paramétrique $\vec{r}$ définie en (1). L'intégrale du champs scalaire f sur la surface paramétrée S est définie par :

$$\int\int_S f(x,y,z)dS := \int\int_D f\left(\vec{r}(u,v)\right)||\vec{r}_u \times \vec{r}_v||dudv. \quad (4)$$

- Exemples :

  i. Calculer l'intégrale de surface $\displaystyle\int\int_S x^2\,dS$, où S est la sphère unité.

On sait qu'une surface S d'équation $z = g(x, y)$ est vue comme la surface paramétrique d'équations $x = x$, $y = y$, $z = g(x, y)$. Ainsi l'intégrale de surface d'une fonction f sur une telle surface sera donnée par

$$\begin{aligned}\int\int_S f(x,y,z)dS &= \int\int_D f(x,y,g(x,y))||\vec{r}_x \times \vec{r}_y||dxdx \\ &= \int\int_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\;dxdy \qquad (5)\end{aligned}$$

  ii. Calculer $\displaystyle\int\int_S y\,dS$, où S est la surface $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

Si S est une surface lisse par morceaux, c'est à dire, une réunion finie de surfaces lisses $S_1, S_2, \cdots, S_n$ qui n'ont en commun que leurs frontières, l'intégrale de surface de f est

$$\int\int_S f(x,y,z)dS = \int\int_{S_1} f(x,y,z)dS + \int\int_{S_2} f(x,y,z)dS + \cdots + \int\int_{S_n} f(x,y,z)dS.$$

  iii. Calculer $\displaystyle\int\int_S z\,dS$, où $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, S_1 étant le cylindre $x^2 + y^2 = 1$, S_2 est le disque $x^2 + y^2 \leq 1$ et S_3 est la portion du plan $z = x + 1$.

Orientation d'une surface

- Définition

Définition

Une surface S est dite orientable s'il existe un champ vectoriel $\vec{n}(x, y, z)$ continu de vecteurs unitaires normaux en chaque point (x, y, z) de la surface.

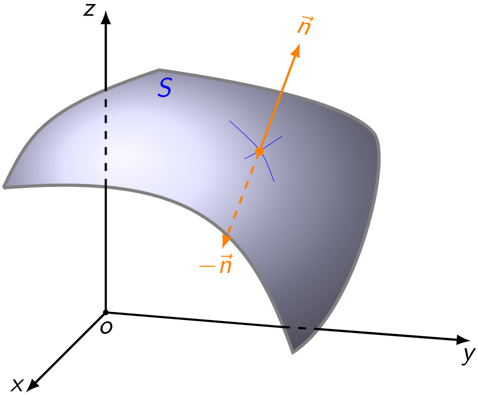


FIGURE: Orientation de la surface S.

Remarque

1. Au cas où S est une surface lisse orientable décrite paramétriquement par une fonction vectorielle $\vec{r}(u,v)$, alors elle est automatiquement dotée d'une orientation par le vecteur unitaire normal

$$\vec{n} := \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{||\vec{r}_u \times \vec{r}_v||}. \tag{6}$$

2. La surface S d'équation $z = f(x,y)$ dont $\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k}$, on lui associe l'orientation naturelle du vecteur unitaire normal $\vec{n}$ donné par :

$$\vec{n} := \frac{\vec{r}_x \times \vec{r}_y}{||\vec{r}_x \times \vec{r}_y||} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}. \tag{7}$$

La composante en $\vec{k}$ étant positive, la surface S est orientée vers le haut.

- Exemples : Pour le cas de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, donner le vecteur normal unitaire $\vec{n}$ défini par l'orientation induite par la fonction vectorielle $\vec{r}(\phi,\theta) = a\sin\phi\cos\theta\vec{i} + a\sin\phi\sin\theta\vec{j} + a\cos\phi\vec{k}$.
Réponse : $\vec{n} = \frac{1}{a}\vec{r}(\phi,\theta)$.

Intégrale d'un champ vectoriel sur une surface

- Définition et concept de flux :

Définition 1

Si $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ est un champ vectoriel défini sur une surface orientée S de vecteur unitaire normal $\vec{n}$, alors l'intégrale de surface $\displaystyle\int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{S}$ de $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ sur S est définie par :

$$\int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{S} := \int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot \vec{n}\, dS. \tag{8}$$

Cette intégrale est aussi appelée le flux du champ $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ à travers S.

Définition 2

Si $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ est un champ vectoriel défini sur une surface paramétrique S de fonction vectorielle $\vec{r}(u, v)$ où $u,\ v \in D$, le flux est donc défini par l'intégrale suivante :

$$\int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{S} := \int\int_D \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, dA. \tag{9}$$

Interprétation du flux

Afin de comprendre le concept de flux, il suffit d'imaginer un fluide de densité $\rho(x, y, z)$ dont la particule de fluide au point (x, y, z) se déplace à la vitesse $\vec{v}(x, y, z)$. Le flux est le débit du fluide qui passe à travers la surface S, c'est-à-dire la quantité de fluide par unité de temps qui traverse la surface S.

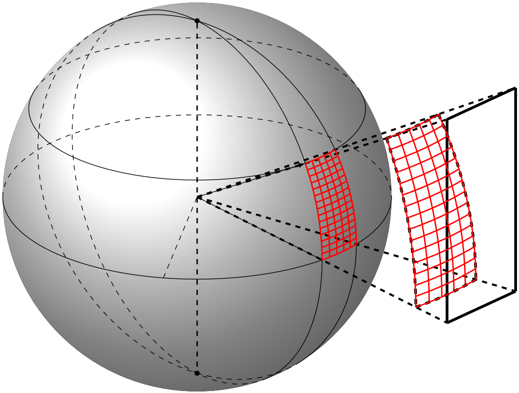


FIGURE: Interprétation du flux.

- Exemples
  i. Calculer le flux du champ $\overrightarrow{\mathbb{F}}(x,y,z) = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$ à travers la sphère de rayon unité $x^2+y^2+z^2=1$. Réponse : $\displaystyle\int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}}\cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{3}$.

Au cas où la surface S est la représentation graphique d'équation $z = g(x,y)$, le flux est

$$\int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}}\cdot d\vec{S} := \int\int_D \overrightarrow{\mathbb{F}}\cdot(\vec{r}_x \times \vec{r}_y)\,dA = \int\int_D (P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k})\cdot\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}\right)dA$$

$$:= \int\int_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right)dA. \tag{10}$$

  ii. Calculer $\displaystyle\int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}}\cdot d\vec{S}$, où $\overrightarrow{\mathbb{F}}(x,y,z) = y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$ et S est la frontière du solide E fermé par le paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ et le plan $z = 0$.
  Réponse $\displaystyle\int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}}\cdot d\vec{S} = \frac{\pi}{2}$.
  iii. La température u en un point d'une boule métallique est proportionnelle au carré de la distance au centre de la boule. Calculer le taux de transmission de chaleur à travers la sphère S de rayon a centrée au centre de la sphère.
  Réponse $\displaystyle\int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}}\cdot d\vec{S} = -8KC\pi a^3$.

Applications des intégrales de surfaces

Les applications des intégrales de surfaces sont les mêmes que celles des intégrales que nous avons rencontrées précédemment. Si S une surface de densité notée ρ :

- Masse et centre de masse d'une surface : La masse de la surface S est

$$m := \int\int_S \rho(x, y, z)\, dS. \tag{11}$$

Les coordonnées du centre d'inertie sont définies par les relations suivantes :

$$\bar{x} := \frac{1}{m}\int\int_S x\rho(x, y, z)\, dS,\ \ \bar{y} := \frac{1}{m}\int\int_S y\rho(x, y, z)\, dS,\ \ \bar{z} := \frac{1}{m}\int\int_S z\rho(x, y, z)\, dS \tag{12}$$

- Moment d'inertie d'une surface : Les moments d'inertie par rapport aux axes x, y, z sont

$$I_x := \int\int_S (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dS, \tag{13}$$

$$I_y := \int\int_S (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dS, \tag{14}$$

$$I_z := \int\int_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dS. \tag{15}$$

Et le moment d'inertie polaire est donné par la relation suivante :

$$I_o := \int\int_S (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dS. \tag{16}$$

Un résumé des intégrales curvilignes et de surfaces

1. Intégrales curvilignes :

$$\int_C f(x,y,z)\,ds := \int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\|\vec{r}\,'(t)\|dt$$

$$\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} := \int_a^b \overrightarrow{\mathbb{F}}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt$$

2. Intégrales de surfaces $\Big[z = g(x,y)\Big]$:

$$\int\int_S f(x,y,z)dS := \int\int_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA$$

$$\int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{S} := \int\int_D (P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}) \cdot (-\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial g}{\partial y}\vec{j}+\vec{k})\,dA$$

3. Intégrales de surfaces (forme paramétrique) :

$$\int\int_S f(x,y,z)dS := \int\int_D f\big(\vec{r}(u,v)\big)\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|dA$$

$$\int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{S} := \int\int_D \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\,dA.$$

Exercices du Livre Stewart (édition MODULO) à Faire :

- Section 10.2 : Exercices 5, 9, 11, 19, 29, 39, 45.

Références :

- Livre Stewart (édition MODULO), page 423-433 : section 10.2
- Livre Stewart (édition 2), page 949 : section 13.6
- Pour un cours de Maple complet : http ://alamanya.free.fr/