UNIVERSITÉ DE MONCTON
CAMPUS DE MONCTON

Devoir 2 - Optimisation (MATH 3163)

À remettre mercredi 14 février 2024

À 16h00 au plus tard

Professeur : Ibrahima Dione

Nom(s) personne étudiante : ________________________________

Numéro personne étudiante : ________________________________

Le devoir est composé de **2 questions**, pour un total de 25 points.

- Ceci est un devoir à livres ouverts et les notes du cours sont permises.
- Répondez aux questions dans l'espace fourni.
- Imprimez le devoir en recto et utilisez le verso des feuilles si nécessaire.
- Ne sera pas accepté, tout travail rendu sur un format outre que celui-ci.

Question I

Considérons la forme quadratique

$$f(X) = \frac{1}{2}(AX, X) \tag{1}$$

où A est une matrice carrée, d'ordre 2, symétrique et définie positive et $X^T = (x, y)$.

1. Montrer que le problème

$$\min_{X \in \mathbb{R}^2} f(X) \tag{2}$$

possède une solution unique et calculer cette solution.

2. Supposons que la matrice A est diagonale, c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

a) Montrer qu'en appliquant la méthode de la plus forte pente au problème (2), les itérés $X^k = (x_k, y_k)$ vérifient les relation suivantes

$$x_{k+1} = \frac{b^2(b-a)y_k^2}{a^3x_k^2 + b^3y_k^2}x_k, \quad y_{k+1} = \frac{a^2(a-b)x_k^2}{a^3x_k^2 + b^3y_k^2}y_k$$

b) En déduire que la droite passant par (x_0, y_0) et (x_2, y_2) passe par l'origine.

c) Indiquer comment on peut montrer ce dernier résultat si la matrice A est symétrique mais pas forcément diagonale.

3. Pour résoudre le problème (2), nous proposons l'algorithme suivant

- $X^0 = (x_0, y_0)$ étant donné ;
- Calculer X^1 et X^2 par la méthode de la plus forte pente ;
- Déterminer X^3 par $X^3 = X^2 + \alpha_2(X^2 - X^0)$;
- où $\alpha_2 = \arg\min_{\alpha \geq 0} f(X^2 + \alpha(X^2 - X^0))$

a) Montrer que

$$\alpha_2 = -\frac{(AX^2, X^2 - X^0)}{(A(X^2 - X^0), X^2 - X^0)}$$

b) Quel est l'intérêt de l'algorithme en **3.** par rapport à la méthode de la plus forte pente ?

Question II

Une utilisation courante de l'optimisation est celle concernant l'approximation de fonctions. Supposons, par exemple, que des valeurs expérimentales d'une fonction g sont observées en m points distincts x_1, $x_2 \ldots, x_m$. Donc les valeurs $g(x_1)$, $g(x_2)$, ..., $g(x_m)$ sont connues. On désire trouver une approximation de g par un polynôme de la forme

$$h(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

de degré inférieur ou égal à n, où $n < m$. Pour n'importe quel choix de l'approximation polynomiale, il y a un ensemble d'erreurs $\epsilon_k = g(x_k) - h(x_k)$. On définit la meilleure approximation par le polynôme minimisant la somme des carrés de ces erreurs, c'est-à-dire, minimiser $\sum\limits_{k=1}^{m} (\epsilon_k)^2$. Ceci revient à minimiser

$$f(a) = \sum_{k=1}^{m} [g(x_k) - (a_n x_k^n + a_{n-1} x_k^{n-1} + \ldots + a_0)]^2$$

par rapport à $a = (a_0, a_1, ..., a_n)$ afin de trouver les meilleurs coefficients. Cette méthode porte le nom des moindres carrés.

1. On définit les coefficients q_{ij} et b_j suivants, pour $i, j = 0, 1, ..., n$, et c, comme suit

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (x_k)^{(i+j)}\,,\ b_j = \sum_{k=1}^{m} g(x_k)(x_k)^j \text{ et } c = \sum_{k=1}^{m} (g(x_k))^2.$$

Montrer que

$$f(a) = a^T Q a - 2\, b^T a + c,$$

où $Q = [q_{ij}],\ b = [b_j]$. Dans cette dernière expression de $f(a)$, les vecteurs a et b sont des vecteurs colonnes.

2. Montrer que le minimum de $f(a)$ est atteint en un point a^* qui est solution du système d'équations linéaires suivant

$$Q\,a \;=\; b.$$

3. Quelle méthode retrouve-t-on si $n = 1$, c'est-à-dire le polynôme d'approximation est de degré inférieur ou égal à 1 ?