RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

Ibrahima Dione (Ph.D.) & Van Son Lai (Ph.D., CFA)

Simulations Stochastiques et Applications en Finance

- Introduction aux Calculs Stochastiques
- Introduction aux Équations Différentielles Stochastiques
- Introduction aux Processus Stochastiques avec Sauts
- Quelques Solutions Numériques des EDS

Introduction aux Calculs Stochastiques

- La plupart des phénomènes en finance sont aléatoires.
- Ces phénomènes aléatoires peuvent être caractérisés par les outils statistiques de calculs stochastiques.
- À partir de la construction heuristique du processus de Wiener, nous introduisons les équations différentielles stochastiques.
- Soit $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ un processus aléatoire et considérons l'espace de probabilité engendré par le processus X

$$(S, A, P)$$

où S est l'univers des résultats, A est l'ensemble de tous les évènements possibles, P est l'ensemble des probabilités et $[0, T]$ est la droite de temps.

Définition

- L'ensemble de tous les évènements générés par les variables aléatoires $\{X(\tau), \tau \in [0, t]\}$ noté F_t est appelé une filtration. La filtration F_t contient toutes les informations disponibles jusqu'à l'instant t. Ainsi on a

$$F_{t_1} \subset F_{t_2} \subset A, \; \forall \, t_1 < t_2 \tag{1}$$

  Généralement en finance, F_t constitue l'information disponible jusqu'à l'instant t.

- Le processus X est dit adapté à la filtration $\{F_{t_i}, t_i \in [0, T]\}$ si X est une fonction mesurable sous (S, F_{t_i}) pour tout i. En d'autres termes, un processus stochastique est un processus adapté s'il ne peut pas être anticipé dans le futur.

- Un processus aléatoire X est une martingale si

$$E\left[X_t | F_\tau, \; \tau < t\right] = X_\tau \tag{2}$$

Théorème

Soit $W = \{W(t), 0 \leq t\}$ une martingale à variance finie telle que:

- $\star$ $W(0) = 0$,
- $\star$ $E\left[dW(t) | W(\tau), 0 \leq \tau \leq t\right] = 0$ où $dW(t) = W(t + dt) - W(t)$,
- $\star$ $E\left[(dW(t))^2 \, | W(\tau), 0 \leq \tau \leq t\right] = dt$.

Alors $W = \{W(t), 0 \leq t\}$ est un processus de Wiener standard.

Introduction aux Équations Différentielles Stochastiques

- Soit un processus aléatoire $X = \{X(t), t \geq 0\}$ et un processus de Wiener standard $W = \{W(t), t \geq 0\}$. Un processus aléatoire peut être décrit par l'équation

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a\left(X(\tau), \tau\right) d\tau + \int_0^t b\left(X(\tau), \tau\right) dW(\tau) \tag{3}$$

- Sur un intervalle infinitésimal, on peut l'écrire sous forme différentielle

$$dX(t) = a\left(X(t), t\right) dt + b\left(X(t), t\right) dW(t) \tag{4}$$

où $a(X(t), t)$ et $b(X(t), t)$ sont respectivement la moyenne instantanée et l'écart type instantané.

- L'intégrale d'Itô est définie comme suit

$$\int_0^t B\left(X(\tau)\right) dW(\tau) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} B(t_k)\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right), \quad \text{où} \;\; t_k = k\frac{t}{n} \tag{5}$$

Note: Cette intégrale dans le cas particulier où $B(t)$ est une fonction déterministe est appelée intégrale de Wiener.

- Soit X un processus unidimensionnel défini comme suit

$$dX(t) = a\left(X(t), t\right)dt + b\left(X(t), t\right)dW(t) \tag{6}$$

- Soit $Y(t) = g(t, X(t))$ où g est deux fois continûment dérivable. On suppose que a, b et g sont des transformations sans mémoire. La formule d'Itô est définie par

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}dt \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial t} + a\left(X(t), t\right)\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\left(X(t), t\right)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)dt + b\left(X(t), t\right)\frac{\partial g}{\partial x}dW \end{aligned} \tag{7}$$

- Soit $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire ayant pour processus

$$d\underline{X}(t) = A\left(\underline{X}(t), t\right) dt + B\left(\underline{X}(t), t\right) d\underline{W}(t) \tag{8}$$

où on a: $A\left(\underline{X}(t), t\right) \in \mathbb{R}^n$, $\underline{W}(t) \in \mathbb{R}^m$ et $B\left(\underline{X}(t), t\right) \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

- Posons $\underline{Y}(t) = \underline{g}(t, \underline{X}(t)) = (Y_1(t), \cdots, Y_d(t))^T$, avec $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$.

- La formule d'Itô généralisée est définie comme suit

$$dY_k(t) = \frac{\partial g_k}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_i} dX_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j} dX_i(t) dX_j(t) \tag{9}$$

Note: Plusieurs équations différentielles grâce à la formule d'Itô peuvent être résolues analytiquement. Toutefois, la formule d'Itô n'a nullement comme objectif la résolution analytique d'équations différentielles.

- Équation d'Ornstein Uhlenbeck:

- Soit $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un processus aléatoire défini par

$$dX(t) = -aX(t)dt + bdW(t) \tag{10}$$

où $dW(t) = \zeta(t)dt$ et ζ est distribution normal.

- La résolution de cette équation différentielle implique que

$$X(t) = X(0)e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)} bdW(s) \tag{11}$$

- En finance, ce processus est très souvent utilisé pour décrire la dynamique des taux d'intérêt.

- Processus log-normal:

- Considérons le processus $X = \{X(t), t \geq 0\}$ défini par la dynamique

$$dX(t) = aX(t)dt + bX(t)dW(t) \tag{12}$$

- En appliquant le lemme d'Itô au processus $Z(t) = \ln(X(t))$, on obtient

$$Z(t) = Z(0) + \left(a - \frac{1}{2}b^2\right)t + bW(t) \tag{13}$$

- La solution exacte est ainsi donnée par la formule

$$X(t) = X(0)e^{\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)t + bW(t)}, \quad \text{avec } X(0) = X(t)_{|t=0} = e^{Z(0)} \tag{14}$$

- Ce processus est régulièrement utilisé pour décrire la dynamique des prix des actifs en finance

Introduction aux Processus Stochastiques avec Sauts

- Un processus de diffusion à sauts s'écrit sous la forme :

$$dX(t) = \mu\,(X(t), t)\,dt + \sigma\,(X(t), t)\,dW(t) + J(X(t_-), t)dN(t) \qquad (15)$$

où $N(t)$ est un processus de comptage de Poisson.

Note: Dans le cas le plus simple, $N(t)$ est un processus de Poisson de paramètre λ et représente le nombre de sauts sur l'intervalle $[0, t]$ et $J(X(t_-), t)$ correspond à l'amplitude du saut.

- On a sous forme intégrale

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mu\,(X(s), s)\,ds + \int_{t_0}^{t} \sigma\,(X(s), s)\,dW(s) + \int_{t_0}^{t} J(X(s_-), s)dN(s) \qquad (16)$$

où $dN(s)$ est le nombre de sauts qui se sont produits entre s_- et $s_- + ds$.

Quelques Solutions Numériques des EDS

- Pour mieux cerner la résolution des EDS, nous avons besoin de faire un rappel des schémas de discrétisation numériques des équations différentielles ordinaires.

- Soit l'équation différentielle ordinaire

$$dx = a(x,t)dt$$
$$x(t_0) = x_0$$

- Définissons $t_{n+1} = t_n + \Delta t, x(t_{n+1}) = x_{n+1}$ et y_{n+1} est l'approximation linéaire de x_{n+1}.

- L'erreur locale est obtenue par $\varepsilon_l(n+1) = |x_{n+1} - y_{n+1}|$.

- L'erreur globale est : $\varepsilon_g(n+1) = |x_{n+1} - y_{(n+1,x_0)}|$.

- On dira que l'approximation est stable si, pour $\Delta t \longrightarrow 0$, l'erreur tend aussi vers 0.

- Méthode d'Euler: On considère l'approximation suivante

$$y_{n+1} = y_n + a(y_n, t_n)\Delta t \tag{17}$$

- Méthode d'Euler implicite: On prend a l'approximation numérique

$$y_{n+1} = y_n + 0.5(a(y_n, t_n) + a(y_{n+1}, t_{n+1}))\Delta t \tag{18}$$

- Méthode de Runge Kutta: Cette méthode repose sur le schéma d'approximation suivant

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_n^1 + 2k_n^2 + 2k_n^3 + k_n^4\right)\Delta \tag{19}$$

où

$$\begin{aligned}
k_n^1 &= a(y_n, t_n)\\
k_n^2 &= a(y_n + \frac{1}{2}k_n^1\Delta t, t_n + \frac{1}{2}\Delta t)\\
k_n^3 &= a(y_n + \frac{1}{2}k_n^2\Delta t, t_n + \frac{1}{2}\Delta t)\\
k_n^4 &= a(y_n + k_n^3\Delta t, t_{n+1})
\end{aligned}$$

- Développement en série de Taylor de l'équation

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^{t} a ds + \int_{t_0}^{t} b dW_s \tag{20}$$

- L'approximation de X est donnée par

$$\begin{aligned} Y_{k+1} = Y_k + a\left(Y_k\right)\Delta + b\left(Y_k\right)\Delta W_k \\ + b\left(Y_k\right)\frac{\partial b}{\partial x}\left(Y_k\right)\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{s_k} dW_z dW_s \end{aligned} \tag{21}$$

- Schéma d'Euler: On considère seulement les termes d'ordre 1 du développement de Taylor

$$Y_{n+1} = Y_n + a\left(Y_n\right)\Delta + b\left(Y_n\right)\Delta W_k \tag{22}$$

- La précision est mesurée par $E\left[(X_n - Y_n)^2\right] = 0$.

- La solution qui satisfait cette précision est appelée solution forte. Les algorithmes qui nous conduisent à cette solution forte sont appelés des approximations fortes.

- L'algorithme d'Euler est de degré 0.5.

- Schéma de Milstein de l'approximation de X,

$$\begin{aligned} Y_{k+1} = Y_k + a\left(Y_k\right)\Delta t + b\left(Y_k\right)\Delta W_k \\ + b\left(Y_k\right)\frac{\partial b}{\partial x}\left(Y_k\right)\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{s_k} dW_z dW_s \end{aligned} \tag{23}$$

- On calcule le dernier terme

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{s_k} dW_z dW_s = \int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(W_s - W_k\right)dW_s = \frac{1}{2}\left(\Delta W_k\right)^2 - \frac{1}{2}\Delta t \tag{24}$$

- Alors on a

$$Y_{k+1} = Y_k + a\left(Y_k\right)\Delta t + b\left(Y_k\right)\Delta W_k + \frac{1}{2} b\left(Y_k\right)\frac{\partial b}{\partial x}\left(Y_k\right)\left(\left(\Delta W_k\right)^2 - \Delta t\right) \tag{25}$$

- Le schéma de Milstein permet d'obtenir des précisions d'ordre 1.

- Pour lectures complémentaires: [1, 9, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]

[1] G. J. Borse.
Numericals methods with MATLAB.
PWS Punlisjing Company, 1997.

[2] H. Choe.
Note sur le calcul differentielle stochastique.
Finance, pages 55–78, 1983.

[3] J. R. Demange, G.
Méthodes mathématiques de la finance.
Economica, 2005.

[4] E. P. Kloeden, P. E. and H. Schurz.
Numerical solution of SDE through computer experiments.
Springer, 2nd edition, 1997.

[5] P. E. Kloeden and E. Platen.
Numerical solution of stochastic differential equations.
Springer, 1992.

[6] B. L. Lamberton, D.
Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.
Ellipse, 1992.

[7] S. Neftci.
An introduction to the mathematics of financial derivatives.
Academic Press, 2000.

[8] B. Oksendal.
Stochastic differential equations.
Springer, 6e edition, 2003.

[9] B. T.
Arbitrage theory in continuous time.
Oxford University Press, 1999.