UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Suites, séries, calcul dans $\mathbb{R}^n$ (MATH 2013) - Chapitre 1.3: Convergence des séries numériques

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

Critères de convergence pour les séries à termes positifs

- En général, il est difficile de trouver la somme exacte d'une série [1]:
  - On peut calculer la somme d'une série géométrique,
  - et celle de la série $\sum 1/[n(n+1)]$ par exemple.
- Parce que, dans chacun de ces cas, il est possible de trouver une formule simple pour la n-ième somme partielle s_n.
- Habituellement, toutefois, il n'est pas facile de calculer

$$\lim_{n\to\infty} s_n.$$

Note:

- Les tests (ou critères) développés dans cette section permettent de déterminer si une **série** dont tous les **termes sont positifs** converge ou diverge, sans trouver explicitement sa somme.

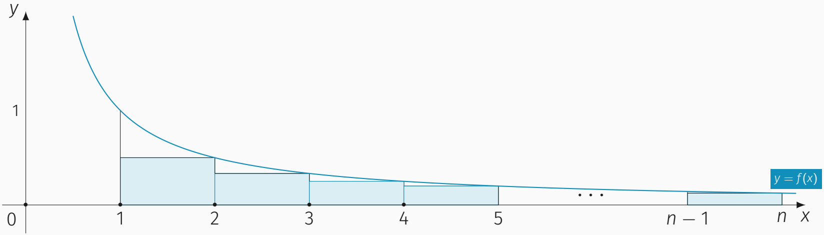
- Dans le cas d'une série à termes positifs, la suite des sommes partielles $\{s_n\}$ est croissante.
- Donc, si $\{s_n\}$ est bornée supérieurement alors la série est convergente.
- Sinon, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est divergente.

Critère (ou test) de l'intégrale

- Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $[1, \infty[$ et soit

$$a_n = f(n), \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$$

- L'aire total des rectangles est inférieur à l'aire sous $y = f(x)$ sur $[1, n]$.



- Et donc, on obtient:

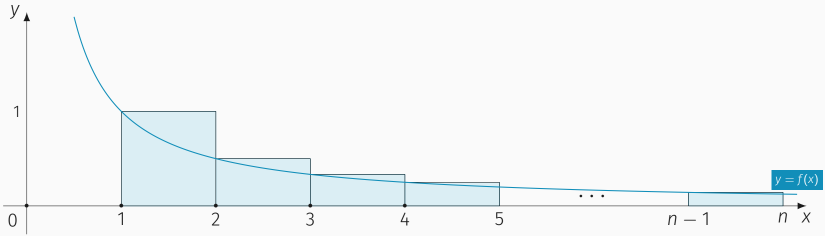
$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n < \int_1^n f(x)dx$$

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n}_{s_n} < a_1 + \int_1^n f(x)dx$$

▷ C'est-à-dire

$$s_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx$$

▷ L'aire sous la courbe $y = f(x)$ sur $[1, n]$, est inférieur à l'aire totale des rectangles.



▷ Et donc, on obtient:

$$\int_1^n f(x)dx < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1}$$

$$\int_1^n f(x)dx < \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n}_{s_n}, \quad \text{car } a_n \geq 0.$$

▷ C'est-à-dire

$$\int_1^n f(x)dx < s_n. \tag{1}$$

▷ D'une part, si l'intégrale impropre $\int_1^\infty f(x)dx$ est convergente, alors

$$s_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx < a_1 + \int_1^\infty f(x)dx.$$

▷ Et donc, la suite $\{s_n\}$ est bornée supérieurement et par conséquent la série $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge.

▷ D'autre part, si l'intégrale impropre $\int_1^\infty f(x)dx$ diverge, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \infty,$$

▷ alors la suite $\{s_n\}$ n'est pas bornée supérieurement car d'après (1), on a

$$s_n > \int_1^n f(x)dx, \quad \text{et donc} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^\infty a_n \geq \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \infty.$$

▷ Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverge.

Le Test de l'intégrale

On suppose que f est une fonction continue, positive et décroissante sur $[1, \infty[$ et soit $a_n = f(n)$. Alors, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

est convergente si et seulement si l'intégrale impropre

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

est convergente. En d'autres mots,

- Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente.
- Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est divergente.

Exemple 1.1: Montrer que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

- On introduit la fonction $f(x)$ définie comme suit:

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}, \ x \geq 2.$$

- Il est clair que f est continue, positive et décroissante sur $[2, \infty[$.

- D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx &= \lim_{t \to \infty} \left(\int_2^t \frac{1}{x \ln x} dx \right) \\
&= \lim_{t \to \infty} \ln(\ln x) \Big|_2^t \\
&= \lim_{t \to \infty} \Big(\ln(\ln t) - \ln(\ln 2) \Big) = \infty.
\end{aligned}$$

- Donc $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ diverge et par conséquent la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \quad \text{diverge.}$$

Exemple 1.2: Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n/5}}$ converge.

- Soit $f(x) = \frac{x}{e^{x/5}} = xe^{-x/5}$, une fonction continue et positive $\forall\, x > 0$.
- Pour déterminer si f est décroissante, on calcule sa dérivée:
$$f'(x) = e^{-x/5} + x\left(-\frac{1}{5}e^{-x/5}\right) = \left(1 - \frac{x}{5}\right)e^{-x/5}.$$
- Ainsi $f'(x) < 0$ si et seulement si $1 - \frac{x}{5} < 0$, c'est-à-dire $x > 5$.
Donc f est décroissante pour tout $x > 5$.
- On peut appliquer le critère de l'intégrale sur la série $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n}{e^{n/5}}$
car la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} \frac{n}{e^{n/5}}$ n'affecte pas la convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n/5}}$.
- Pour calculer l'intégrale impropre $\int_5^{\infty} xe^{-\frac{x}{5}}\,dx$, on s'intéresse au calcul de $\int_5^{t} xe^{-\frac{x}{5}}\,dx$, où $t > 5$.

- Effectuons ainsi une intégration par parties, en posant $u = x$, $dv = e^{-x/5}dx$ et donc $v = -5e^{-x/5}$

$$\begin{aligned}
\int_5^t xe^{-\frac{x}{5}}\,dx &= -\left.5xe^{-x/5}\right|_5^t + 5\int_5^t e^{-x/5}dx \\
&= -5te^{-\frac{t}{5}} + 25e^{-1} + 5\left(-\left.5e^{-x/5}\right|_5^t\right) \\
&= -5\frac{t}{e^{t/5}} + 25e^{-1} - 25\left(e^{-t/5} - e^{-1}\right) \\
&= -5\frac{t}{e^{t/5}} - \frac{25}{e^{t/5}} + 50e^{-1} \\
\lim_{t\to\infty}\int_5^t xe^{-\frac{x}{5}}\,dx &= -5\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t/5}} - 25\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{t/5}} + \frac{50}{e} \\
&= -5\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{t}e^{t/5}} + \frac{50}{e}.
\end{aligned}$$

- Alors, $\int_5^\infty xe^{-\frac{x}{5}}dx$ est convergente car

$$\int_5^\infty xe^{-x/5}dx = \lim_{t\to\infty}\int_5^t xe^{-x/5}dx = \frac{50}{e}.$$

- Par conséquent, la série $\sum_{n=5}^\infty \frac{n}{e^{n/5}}$ est convergente, d'où la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{e^{n/5}}$ est convergente.

Exemple 1.3: Pour quelles valeurs de p la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge-t-elle?

- Si $p < 0$, alors $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) = \infty$ et donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.
- Si $p = 0$, alors $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) = 1$ et donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.
- Dans ces deux cas, nous avons appliqué le test de divergence.
- Si $p > 0$, alors clairement la fonction $f(x) = 1/x^p$ est continue, positive et décroissante sur $[1, \infty[$.
  - ⋆ Calculons l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$. soit $t > 1$, on a

$$\int_1^t \frac{dx}{x^p} = \int_1^t x^{-p}dx = \begin{cases} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^t & \text{si } p \neq 1 \\ \ln(x)|_1^t & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left(t^{1-p} - 1\right) & \text{si } p \neq 1 \\ \ln t & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{-1}{1-p} & \text{si } 1-p < 0 \quad \Leftrightarrow \quad p > 1 \\ \infty & \text{si } 1-p > 0 \quad \text{ou} \quad p = 1 \Leftrightarrow p \leq 1. \end{cases}$$

- ⋆ On a montré que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{converge si} \quad p > 1 \quad \text{et diverge si} \quad p \leq 1.$$

- ⋆ Selon le test de l'intégrale, la série $\sum 1/n^p$ converge donc si $p > 1$ et diverge si $0 < p \leq 1$.

- La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ et diverge si $p \leq 1$.
- Cette série est appelée **série de Riemann** (ou **série p**).
- Pour $p = 1$, cette série est la **série harmonique**.

5 Test de Comparaison

Supposons que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries à termes positifs.

1. Si $\sum b_n$ converge et si $a_n \leq b_n$ pour tout n, alors $\sum a_n$ converge.
2. Si $\sum b_n$ diverge et si $a_n \geq b_n$ pour tout n, alors $\sum a_n$ diverge aussi.

Démonstration:

1. Soit les sommes partielles:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \quad \text{et} \quad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

- ⋆ Puisque les termes des deux séries sont positifs, les suites $\{s_n\}$ et $\{t_n\}$ sont croissantes ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$).
- ⋆ De plus, $t_n \to t$ et donc $t_n \leq t$ pour tout n. Puisque $a_i \leq b_i$, on a $s_n \leq t_n$. Par conséquent, $s_n \leq t$ pour tout n.

- ⋆ Cela signifie que $\{s_n\}$ est croissante et bornée supérieurement et donc qu'elle converge, selon le théorème des suites monotones.
- ⋆ Par conséquent, la série $\sum a_n$ converge.

2. Pour le deuxième point:

- ⋆ Si $\sum b_n$ diverge, alors $t_n \to \infty$ (puisque $\{t_n\}$ est croissante).
- ⋆ Mais $a_i \geq b_i$, et donc $s_n \geq t_n$. Par conséquent, $s_n \to \infty$.
- ⋆ Donc, la série $\sum a_n$ diverge.

$\square$

On recourt souvent à l'une des séries suivantes, pour faire la comparaison.

- Une série de Riemann:

$$\sum 1/n^p, \text{ qui converge si } p > 1 \text{ et diverge si } p \leq 1;$$

- Une série géométrique:

$$\sum ar^{n-1}, \text{ converge si } |r| < 1 \text{ et diverge si } |r| \geq 1.$$

Exemple 1.4: Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

- On a

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n \geqslant \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 2 = 2^{n-1}}_{(n-1) \text{ fois}}$$

- Et donc, on obtient: $0 < \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

- Puisque la série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est convergente, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

converge.

Exemple 1.5: Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$ converge ou diverge.

- Pour un n assez grand, le terme dominant du dénominateur est $2n^2$, ce qui suggère la comparaison avec la série $\sum \frac{5}{2n^2}$. On a alors
$$\frac{5}{2n^2+4n+3} < \frac{5}{2n^2}$$
car le dénominateur du membre de gauche est plus grand.
a_n est le membre de gauche et b_n le membre de droite.

- On sait que
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
converge parce que c'est une série de Riemann avec $p = 2 > 1$ multipliée par une constante.

- En conséquence, la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$$
converge, selon le point 1. du test de comparaison.

Note: Bien que la condition $a_n \leq b_n$ ou $a_n \geq b_n$ du test de comparaison soit énoncée pour tout n, il suffit de vérifier cette condition pour $n \geq N$, où N est un nombre entier fixé, car la convergence d'une série n'est pas influencée par un nombre fini de termes.

Exemple 1.6: Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converge ou diverge.

- On remarque que $(\ln n/n) \geq 0$ et que $\ln n > 1$ pour $n \geq 3$, donc

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \quad \text{si} \quad n \geq 3.$$

- On sait que la série harmonique $\sum 1/n$ diverge (série de Riemann avec $p = 1$).

- Alors, la série diverge en vertu du point 2. du test de comparaison:

$$\infty \longleftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

▷ Il n'est pas toujours facile de comparer directement des séries similaires.

▷ Cependant, on peut appliquer le test suivant.

4 Forme Limite du Test de Comparaison

Supposons que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries à termes positifs. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

où L est un nombre fini et $L > 0$, alors ou bien les deux séries convergent ou bien les deux divergent.

Démonstration:

▷ Sachant que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \frac{L}{2}, \ \forall \, n \geq n_0.$$

- Donc $\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}, \forall\, n \geqslant n_0$ et le résultat s'en suit grâce au test de comparaison. $\square$

- Dans le cas où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty, \text{ alors il existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{a_n}{b_n} > 1, \forall\, n \geqslant n_0,$$

c'est-à-dire $a_n > b_n,\ \forall\, n \geqslant n_0$.

- Dans le cas où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \text{ alors } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty.$$

Et donc si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ corverge.

Note: Dans la forme limite du test de comparaison, on peut aussi utiliser, de façon équivalente, la limite $\lim_{n\to\infty} (b_n/a_n)$.

Exemple 1.7: Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ converge ou diverge.

- On utilise la forme limite du test de comparaison avec

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{2^n}.$$

- On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\left(2^n-1\right)}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-1/2^n} = 1 > 0.$$

- Puisque la limite existe et est non nulle, et que

$$\sum 1/2^n$$

est une série géométrique convergente, la série donnée converge, selon la forme limite du test de comparaison.

Exemple 1.8: Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n}(3n-2)}$ diverge

- Soit $a_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n}(3n-2)}$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\sqrt{n}}{\sqrt{n}(3n-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{2}{3}$$

- Puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{3} > 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n}(3n-2)}$$

diverge.

▷ D'Alembert a établi un critère qui permet de tester:

- ⋆ La convergence ou la divergende d'une série à termes positifs.
- ⋆ Sans recourir explicitement à une série de comparaison.

4 Critère de d'Alembert

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série à termes poritifs. On suppose que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

- Si $L < 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $L > 1$ ou si L est infini, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- Si $L = 1$, le critère n'est pas concluant.

Démonstration:

- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ et $L < 1$, alors soit $0 \leqslant L < R < 1$, et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < R, \forall\, n \geqslant n_0$.

  - Par conséquent $a_{n+1} < a_n R,\ \forall\, n \geqslant n_0$, c'est-à-dire
$$a_{n_0+1} < a_{n_0} R$$
$$a_{n_0+2} < a_{n_0+1} R < a_{n_0} R^2$$
$$a_{n_0+3} < a_{n_0+2} R < a_{n_0} R^3$$
  - Et donc, on obtient $a_{n_0+k} < a_{n_0} R^k\ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

  - Puisque $0 < R < 1$, alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0} R^k$ est convergente et donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ est convergente.

  - Par suite, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente.

- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ et $L > 1$, alors soit $1 < R < L$. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > R,\ \forall\, n \geqslant n_0$. Alors $a_{n_0+k} > a_{n_0} R^k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

  - Puisque $R > 1$, alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0} R^k$ est divergente et donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ diverge.

- Pour montrer que le critère de d'Alembert n'est pas concluant si $L = 1$:
  - Il suffit de considérer la série harmonique (divergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

  - Alors que la série de Riemann (convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

  - Ces deux exemples montrent que si $L = 1$, alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

    pourrait converger ou diverger.

$\square$

Exemple 1.9: Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ converge.

- Soit $a_n = \frac{3^n}{n!}$. Alors
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{3^n} = \lim_{\mu\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0.$$

- Puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ converge.

Exemple 1.10: Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ converge.

- Soit le terme $a_n = n^n/n!$, alors on a
$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \text{ lorsque } n \to \infty. \end{aligned}$$

- Or $e > 1$, la série est divergente d'après le critère de d'Alambert.

- Pouvez-vous montrer autrement que cette série est divergente!

Séries alternées et convergence absolue

Séries alternées

- Les tests de convergence vus jusqu'à présent ne s'appliquent qu'aux séries à termes positifs.
- Dans cette section, nous verrons comment traiter les séries dont les termes ne sont pas nécessairement positifs.
- Les séries alternées, c'est-à-dire dont le signe des termes alterne, sont particulièrement importantes.

Définition

- Une **série alternée** est une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.

Exemple 2.1: En voici deux exemples:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{6}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}.$$

- Une série alternée est une série de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \quad \text{ou bien} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n, \quad \text{où} \quad a_n \geq 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^{+}.$$

Note: Puisqu'on a l'égalité suivante entre ces deux séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,$$

on se focalisera dans la suite à l'étude de la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$.

▷ Le résultat suivant donne des conditions suffisantes pour qu'une série alternée converge.

Théorème de Leibniz Soit la série alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \quad \text{où} \quad a_n \geqslant 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^+.$$

Si $a_{n+1} \leqslant a_n$ (décroissance) pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors

- la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \quad \text{converge},$$

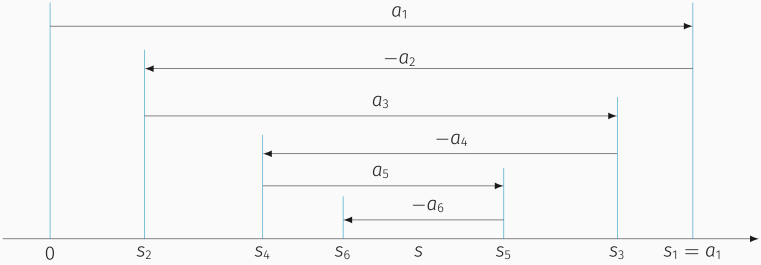
- et on a l'inégalité suivante

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - s\right| \leq a_{n+1}, \quad \text{où} \quad s = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n.$$

Démonstration:

- Pour montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ converge, on va montrer que la suite $\{s_n\}$ des sommes partielles converge.

- Considérons la suite $\{s_{2n}\}$ d'indice pair et celle $\{s_{2n+1}\}$ d'indice impair.



- La suite $\{s_{2n}\}$ est croissante bornée supérieurement par a_1, donc elle converge!

- La suite $\{s_{2n+1}\}$ est décroissante bornée inférieurement par 0, donc elle converge!

▷ D'autre part, puisque $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$, alors

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - s_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0, \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = 0.$$

▷ Alors, $\{s_{2n}\}$ et $\{s_{2n+1}\}$ converge vers la même limite et donc $\{s_n\}$ est convergente.

▷ Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ converge.

▷ Montrons maintenant que $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - s\right| \leq a_{n+1}$. on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - s &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k \\
&= -\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k \\
&= (-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + (-1)^{n+3}a_{n+3} + \cdots \\
&= (-1)^{n+1}\Big(a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots\Big)
\end{aligned}$$

▷ Si n est impair, alors

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - s = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots$$
$$\leq a_{n+1}, \quad \text{car} \quad \{a_n\} \quad \text{est décroissante.}$$

▷ Si n est pair, alors

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - s = -\Big(a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots\Big)$$
$$-\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - s\right) = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots$$
$$s - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k \leq a_{n+1}.$$

▷ Et donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - s\right| \leq a_{n+1}$$

□

Exemple 2.2: La série harmonique alternée

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

où $a_n=\frac{1}{n}$ satisfait à

- ▷ L'inégalité

$$a_{n+1}<a_n \ \textbf{car} \ \frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

- ▷ Et vérifie la limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

- ▷ Alors, la série converge en vertu du théorème de Leibniz.

Exemple 2.3: La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ est-elle convergente on divergente?

- Soit $a_n = \frac{\ln n}{n}$. Alors, on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0, \left(\text{car } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \right)$$

- Pour montrer que la suite $\{a_n\}$ est décroissante, on définit

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},\ x > 0\,; \quad \text{on a } \ f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Et donc $f'(x) < 0$, si $1 - \ln x < 0$, c'est-à-dire $\ln x > 1$ et donc $x > e$.

- Alors, f est décroissante sur $]e, \infty[$ et donc la suite $\{a_n\}$ est décroissante pour tout $n \geq 3$.

- Par suite, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ est convergente d'après Leibniz.

Exemple 2.4: La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\arctan n}$ est-elle convergente ou divergente?

- Le terme générale de cette série est $\frac{(-1)^{n-1}}{\arctan n}$.
- Considérons la suite formée du terme général d'indice impair,

$$\frac{1}{\arctan(2n+1)}$$

- On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\arctan(2n+1)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

- Et donc $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\arctan(2n+1)} \neq 0$. Par conséquent, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\arctan n} \quad \text{diverge.}$$

Convergence absolue

- Nous allons établir un critère de convergence pour une série qui n'est ni à termes positifs ni alternée.

- Pour toute série donnée $\sum a_n$, on peut former la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$
dont les termes sont les valeurs absolues des termes de la série originale.

Définition

Une série $\sum a_n$ est dite **absolument convergente** si la série des valeurs absolues $\sum |a_n|$ converge.

Note: Si $\sum a_n$ est une série à termes positifs, alors $|a_n| = a_n$ et la convergence absolue revient à la convergence au sens habituel.

Exemple 2.5:

- ▷ La série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$
converge absolument,

- ▷ car
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$
est une série de Riemann convergente ($p = 2$).

Exemple 2.6:

- ▷ la série harmonique alternée
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots, \quad \text{converge!}$$
- ▷ Elle ne converge pas absolument, car la série des valeurs absolues
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$
est la série harmonique (série de Riemann où $p = 1$) qui diverge.

Théorème

Si une série $\sum a_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration:

- L'inégalité
$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$
est valide, car $|a_n|$ vaut soit a_n, soit $-a_n$.

- Si $\sum a_n$ est absolument convergente, alors $\sum |a_n|$ converge et donc la série $\sum 2|a_n| = 2\sum^n |a_n|$ converge aussi.

- Par conséquent, selon le test de comparaison, la série $\Sigma(a_n + |a_n|)$ est convergente. Ainsi, la série
$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$
est la différence de deux séries convergentes et elle est donc convergente.

$\square$

Exemple 2.7: Déterminons si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

converge ou diverge.

- Cette série contient des termes positifs et des termes négatifs, mais elle n'est pas alternée.
- (Le premier terme est positif, les trois prochains sont négatifs et les trois suivants sont positifs: le signe change irrégulièrement.)
- On applique le test de comparaison à la série valeurs absolues:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}.$$

  Puisque $|\cos n| \leq 1$ pour tout n, on a $\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.
- On sait que $\sum 1/n^2$ converge (série de Riemann avec $p = 2$). Selon le test de comparaison, $\sum |\cos n|/n^2$ converge aussi.

▷ Par conséquent, la série donnée est absolument convergente, donc elle est convergente selon le théorème.

Exemple 2.8: Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ est absolument convergente.

▷ On utilise le critère de d'Alembert pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, où

$$a_n = (-1)^n n^3/3^n, \quad \text{et donc} \quad a_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1)^3/3^{n+1}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1.$$

▷ Selon le critère de d'Alembert, la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ est convergente,

▷ c'est-à-dire que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ est absolument convergente et, par conséquent, elle converge.

Définition

La série $\sum a_n$ est dite conditionnellement convergente (ou semi-convergente) si elle est convergente, mais pas absolument convergente (c'est-à-dire que $\sum |a_n|$ diverge).

Exemple 2.9:

- La série harmonique alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots ,$$

est conditionnellement convergente (ou semi-convergente).

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)
- Disponibilités:
  - ⋆ Lundi 10H00 - 12H00, MRR B-214
  - ⋆ Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214
  - ⋆ Jeudi 08H00 - 10H00, MRR B-214
- Manuels du cours:

[1] J. Stewart.
Analyse concepts et contextes. Volume 1. Fonctions d'une variable.
DE BOECK SUP; 3e édition, Rue des Minimes 39, B- 1000 Bruxelles, 2011.