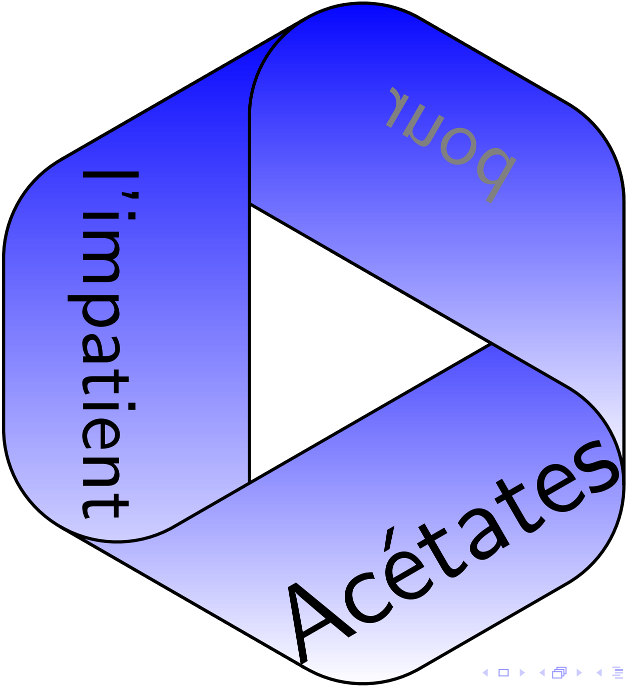
MAT 1910
Mathématiques de l'ingénieur II:
Intégrales triples en coordonnées cylindriques et sphériques.

Dione Ibrahima

Chapitre III: Intégrales triples


Acétates
pour
l'impatient

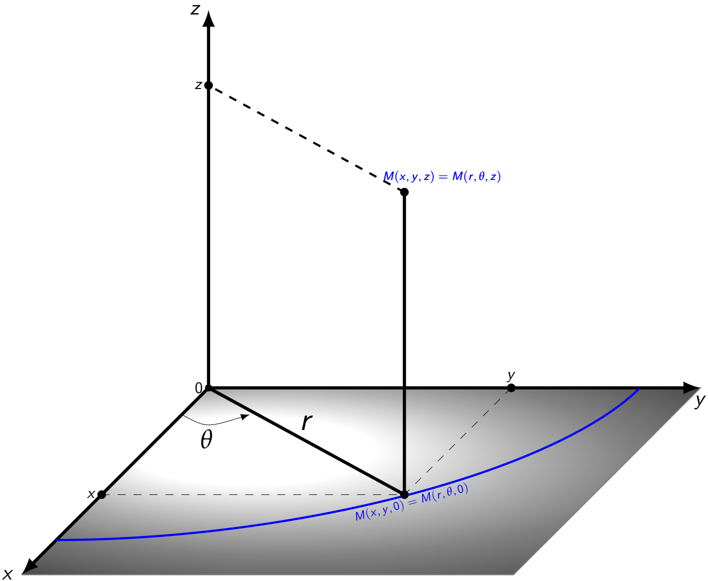
Intégrales triples en coordonnées cylindriques

- Définition des coordonnées cylindriques : Soit $P(x, y, z)$ un point de l'espace $\mathbb{R}^3$ d'origine O, où x, y et z désignent ses coordonnées cartésiennes. Sur le plan (XOY), les coordonnées x et y du point P peuvent être remplacées par celles polaires r et θ. Et le point $P(x, y, z)$ devient $P(r, \theta, z)$, où on a :

$$\begin{cases} x := r\,\cos\theta \\ \\ y := r\,\sin\theta \\ \\ z := z \end{cases} \iff \begin{cases} r := \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \theta := arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \\ z := z \end{cases} \tag{1}$$

Définition

On appelle coordonnées cylindriques d'un point $P(x, y, z) \neq O(0, 0, 0)$ le triplet (r, θ, z), défini par le changement de variables en (1).


z
z
M(x, y, z) = M(r, θ, z)
0
y
y
r
θ
x
M(x, y, 0) = M(r, θ, 0)
x

- Définition d'intégrales triples en cylindriques : Tout comme en dimension 2, dans le calcul des intégrales triples, il est toujours utile de remplacer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) par celles cylidriques (r, θ, z) qui découlent directement des coordonnées polaires. Par le changement de variables en (1), l'élément de volume en coordonnées cylindriques est donné par :

$$dV := r\, dz\, dr\, d\theta. \tag{2}$$

Ainsi on peut établir la définition de l'intégrale triple d'une fonction donnée.

Définition

Soient S un solide de $\mathbb{R}^3$ et S_c l'ensemble des coordonnées cylindriques des points de S défini par :

$$S_c := \Big\{(r, \theta, z) : (r\, \cos\theta, r\, \sin\theta, z) \in S\Big\}. \tag{3}$$

Si f est une fonction continue sur S, alors son intégrale triple en coordonnées cylindriques est donnée par la relation suivante :

$$\int\int\int_S f(x, y, z) dV := \int\int\int_{S_c} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta. \tag{4}$$

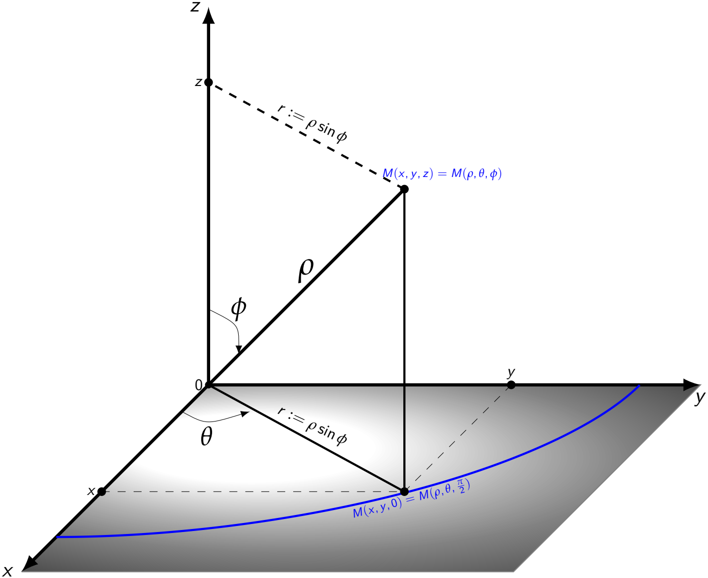
Intégrales triples en coordonnées sphériques

- Définition des coordonnées sphériques : Soit $P(x, y, z)$ un point de l'espace $\mathbb{R}^3$ d'origine O, où x, y et z désignent ses coordonnées cartésiennes. Un tel point peut aussi être caractérisé par sa distance à l'origine notée ici $\rho := OP$, l'angle défini par les droites (OZ) et (OP) noté ϕ et l'angle donné par les droites (OX) et (OM) noté ici θ, où le point $M(x, y, 0)$ est le projété orthogonal de P sur le plan (XOY) (voir figure ci-dessous). Ce nouveau type de répérage (ρ, θ, ϕ) est relié aux coordonnées $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} x := \rho \cos\theta \sin\phi \\ \\ y := \rho \sin\theta \sin\phi \\ \\ z := \rho\cos\phi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \rho := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \\ \theta := arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \\ \phi := arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \end{array}\right. \tag{5}$$

Définition

On appelle coordonnées sphériques d'un point $P(x, y, z) \neq O(0, 0, 0)$ le triplet (ρ, θ, ϕ), défini par le changement de variables en (5).


z
z
$r := \rho \sin \phi$
$M(x, y, z) = M(\rho, \theta, \phi)$
ρ
ϕ
0
y
y
θ
$r := \rho \sin \phi$
x
$M(x, y, 0) = M(\rho, \theta, \frac{\pi}{2})$
x

Remarque

Il est intéressant de faire le lien entre les coordonnées cylindriques et celles sphériques. On voit que la coordonnée θ est la même dans les deux cas. Par ailleurs on passe des coordonnées (r, z) aux coordonnées (ρ, ϕ) en posant

$$\begin{cases} z := \rho \cos\phi \\ r := \rho \sin\phi \end{cases} \tag{6}$$

- Définition d'intégrales triples en sphériques : Par le changement de variables en (5), l'élément de volume en coordonnées cylindriques est donné par :

$$dV := \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta. \tag{7}$$

On établit ainsi la définition de l'intégrale triple d'une fonction donnée par :

Définition

Soient S un solide de $\mathbb{R}^3$ et S_s l'ensemble des coordonnées sphérques des points de S, c'est à dire

$$S_s := \Big\{(\rho, \theta, \phi) : (\rho \cos\theta \sin\phi, \rho \sin\theta \sin\phi, \rho \cos\phi) \in S\Big\}. \tag{8}$$

Si f est une fonction continue sur S, alors son intégrale triple en coordonnées sphérques est définie comme suit :

$$\int\int\int_S f(x, y, z) dV := \int\int\int_{S_s} f(\rho \cos\theta \sin\phi, \rho \sin\theta \sin\phi, \rho \cos\phi)\rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta.$$

Applications

- Cas des coordonnées cylindriques

  a. Soit f une fonction continue sur un domaine D de type I, défini comme suit :

  $$D := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \right\},$$

  où en coordonnées polaires, le domaine Ω est donné par la relation suivante :

  $$\Omega := \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,\ g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta) \right\}.$$

  Ainsi l'intégrale triple de la fonction f sur le domaine D est donnée par

  $$\int\int\int_D f(x, y, z) dV := \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \left(\int_{\phi(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{\psi(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dz \right) dr \right) d\theta.$$

  b. Calculer l'intégrale en suivant les étapes ci-dessous :

  $$\int_{-2}^{2} \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2 + y^2) dz \right) dy \right) dx$$

  1. Donner le domaine en coordonnées cartésiennes de l'intégrale ;
  2. Redéfinir ce domaine en coordonnées cylindriques ;
  3. Effectuer l'intégrale en utilisant ces coordonnées cylindriques.

- Cas des coordonnées sphériques
  a. Calculer le moment d'inertie d'un anneau sphérique A, de rayon intérieur a et de rayon extérieur b par rapport à un axe passant par l'origine, sous l'hypothèse que la masse volumique est $\sigma(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
  Solution : De par sa définition, la masse volumique ne dépend que de la distance d'un point au centre. Ainsi le moment d'inertie ne dépend pas du choix de l'axe. Pour ce cas on choisit l'axe (Oz). On a alors

  $$J = \int\int\int_A (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz.$$

  La description de A en coordonnées sphériques est simple :

  $$A_s := [a, b] \times [0, 2\pi) \times [0, \pi].$$

  Donc en coordonnées sphériques, on a le moment d'inertie qui est donné par :

  $$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_a^b (\rho^2 \sin^2\phi)\rho\, \rho^2 \sin\phi\, d\rho\right) d\phi\right) d\theta, \\ &= \frac{(b^6 - a^6)\pi}{3}\int_0^{\pi} \sin^3\phi\, d\phi = \frac{4}{9}(b^6 - a^6)\pi. \end{aligned}$$

  b. Calculer l'intégrale suivante sur $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$:

  $$\int\int\int_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dV$$

Références :

- Livre Stewart, page 306 : section 7.2, 7.3, 7.4
- Livre Stewart, page 883 : section 12.8
- Pour un cours de maple complet : http ://alamanya.free.fr/

Fin