UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

MATH 2013 - Chapitre 1: Les suites et les séries numériques

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

Les suites

Définition

- Une **suite** est une liste de nombres écrits dans un ordre bien défini:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots \tag{1}$$

  - ⋆ Le nombre a_1 est appelé le « **premier terme** »,
  - ⋆ le nombre a_2 est le « **deuxième terme** » et,
  - ⋆ celui a_n est le « **n-ième terme** ».

- Nous allons seulement étudier des suites infinies, dans lesquelles chaque terme a_n a toujours un successeur a_{n+1}.

Note: La suite $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$ se note aussi ([2, 1])

$$\{a_n\} \text{ ou } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{2}$$

Exemple 1.1:

- $$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad a_n = \frac{n}{n+1}, \quad \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\right\}$$

- $$\left\{\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \ a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ \left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, \cdots, \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \cdots\right\}$$

- $$\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}, \quad a_n = \sqrt{n-3}, \ n \geq 3, \quad \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{n-3}, \cdots\right\}$$

- $$\left\{\cos\frac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}, \quad a_n = \cos\frac{n\pi}{6}, \ n \geq 0, \quad \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \cdots, \cos\frac{n\pi}{6}, \cdots\right\}$$

Exemple 1.2: Trouvons la formule du terme général a_n de la suite

$$\left\{ \frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \ldots \right\}$$

en supposant que tous les termes sont construits de la même façon que les premiers termes.

Note:

- Une suite $\{a_n\}$ peut être définie comme une fonction ayant pour domaine l'ensemble des entiers positifs.
- Car à chaque entier positif n correspond un terme a_n.

Exemple 1.3: Les suites ci-dessous ne possèdent pas de définition sous la forme d'une formule simple:

- La suite $\{p_n\}$, où p_n est la population mondiale le 1^{er} janvier de l'an n.
- La **suite de Fibonacci** $\{f_n\}$ est définie par récurrence comme suit

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 3.$$

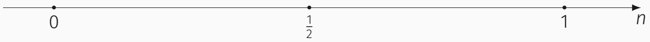
  Les quelques premiers termes de la suite de Fibonacci sont

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots\}.$$

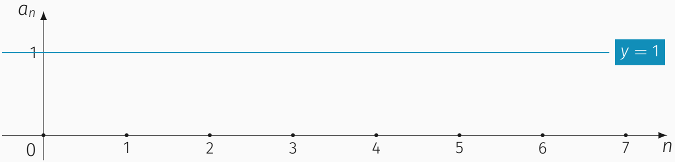
- On peut représenter graphiquement la suite $\{a_n\}$:

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$$

- en traçant ses termes sur une droite numérique.



- ou en représentant son graphe sur le plan



- Les termes de la suite $a_n = \frac{n}{n+1}$ tendent vers 1 lorsque n devient grand!

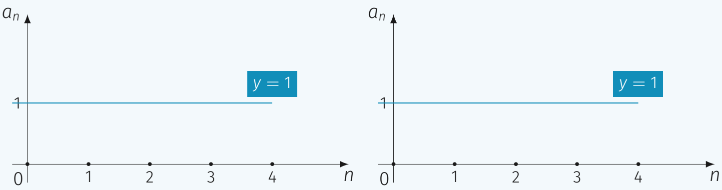
Définition

- Une suite $\{a_n\}$ a pour limite L, et on écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$

si on peut rendre ses termes a_n aussi proches de L qu'on le veut en prenant n suffisamment grand.

- Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, on dit que la suite « converge » (ou qu'elle est **convergente**).



- Sinon, on dit que la suite « diverge » (ou qu'elle est **divergente**).

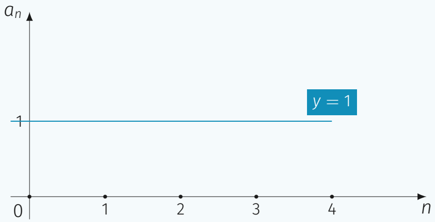
Remarque :

a Si la limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas parce que les termes de la suite deviennent de plus en plus grands (ou petits) avec n, on écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

b Dans certaines situations, on peut calculer la limite d'une suite en calculant celle d'une fonction qui représente cette suite. En effet, si $f(n) = a_n$ pour tout entier n alors

$$\text{si} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L, \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$



Exemple 1.4:

- ▷ Soit la suite $\left\{\frac{1}{n^r}\right\}$ où $r > 0$. Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^r},\ x > 0.$$

Puisque $f(n) = \frac{1}{n^r}$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$$

- ▷ Soit la suite $\left\{\frac{\ln(n)}{n}\right\}$. Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x},\ x > 0.$$

On a alors $f(n) = \frac{\ln(n)}{n}$. D'autre part, on note

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Et donc $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

LES PROPRIÉTÉS DES LIMITES POUR LES SUITES

Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont des suites convergentes et si c est une constante, alors

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n, \ \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \times b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n$$

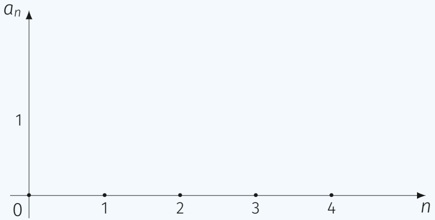
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{si} \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p, \quad \text{si} \quad p > 0 \quad \text{et} \quad a_n > 0$$

▷ Le théorème du sandwich, aussi appelé « théorème des gendarmes », peut être adapté aux suites.

LE THÉORÈME DU SANDWICH POUR LES SUITES

Si, pour un certain n_0, $a_n \leq b_n \leq c_n$ lorsque $n \geq n_0$ et si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, alors $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.



▷ Le théorème suivant cite un autre résultat relatif aux limites de suites.

▷ Il découle du Théorème du sandwich, compte tenu de $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$.

THÉORÈME

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \text{ alors } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Exemple 1.5: Calculer la limite de la suite suivante si elle existe.

▷ $\left\{\frac{3n^4+n-1}{2n^4+3n^2+1}\right\}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+n-1}{2n^4+3n^2+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\left(3+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

La suite $\left\{\frac{3n^4+n-1}{2n^4+3n^2+1}\right\}$ est convengente et $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+n-1}{2n^4+3n^2+1} = \frac{3}{2}$.

Exemple 1.6: Calculer la limite des suites suivantes si elle existe.

- $\{(-1)^n\}$
  Les valeuns de cette suite sont
  $$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$
  Cette suite oscille indéfiniment entre -1 et 1, donc sa limite n'existe pas.

- $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$
  $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$
  Par conséquent, en raison du théorème précédent on a
  $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Exemple 1.7: Calculer la limite de la suite suivante si elle existe.

- $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$
  Posons $a_n = \frac{n!}{n^n}$. On a

$$
\begin{aligned}
a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots n}{n\cdot n\cdot n\cdots n} &= \frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 3\cdot \ldots n}{n\cdot n\cdot n\cdots n}\right) \\
&\leq \frac{1}{n}\left(\frac{n\cdot n\ldots n}{n\cdot n\cdots n}\right) = \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

  On remarque donc $0 < a_n \leq \frac{1}{n}$, pour tout $n \geq 2$.
  Puisque $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Exemple 1.8: Calculer la limite de la suite suivante si elle existe.

▷ $\left\{\frac{n^5+n^2+2}{6n^4+n+3}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+n^2+2}{6n^4+n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^5\left(1+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^5}\right)}{n^4\left(6+\frac{1}{n^3}+\frac{3}{n^4}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^5}\right)}{6+\frac{1}{n^3}+\frac{3}{n^4}} = \infty$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+n^2+2}{6n^4+n+3} = \infty$$

et la suite $\left\{\frac{n^5+n^2+2}{6n^4+n+3}\right\}$ est divergente.

Exemple 1.9: Calculer la limite de la suite suivante si elle existe.

- $\left\{ \frac{n^2}{1-e^n} \right\}$

  Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2}{1-e^x}$. On a alors $f(n) = \frac{n^2}{1-e^n}$ et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1-e^x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{-e^x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{-e^x} = 0\end{aligned}$$

$$\text{et donc } \lim_{\mu\to\infty} \frac{n^2}{1-e^n} = 0$$

Exemple 1.10: Pour quelle valeurs de r la suite $\{r^n\}$ est-elle convergente?

- Considénons d'abord le cas $r > 0$ et posons $f(x) = x^r$. On a $f(n) = r^n$ et nous savons déjà la limite suivante

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ \infty & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

  Donc pour la suite, on a alors

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si} & 0 < r < 1 \\ 1 & \text{si} & r = 1 \\ \infty & \text{si} & r > 1 \end{cases}$$

- Pour $r < 0$, on a deux cas:
  - 1^{er} cas: $-1 < r < 0$. Dans ce cas, on a

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0 \ \text{ car } \ 0 < |r| < 1$$

    d'où $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

⋆ 2^e cas: $r \leq -1$.

Pour $r = -1$, on a vu que $\{(-1)^n\}$ diverge.

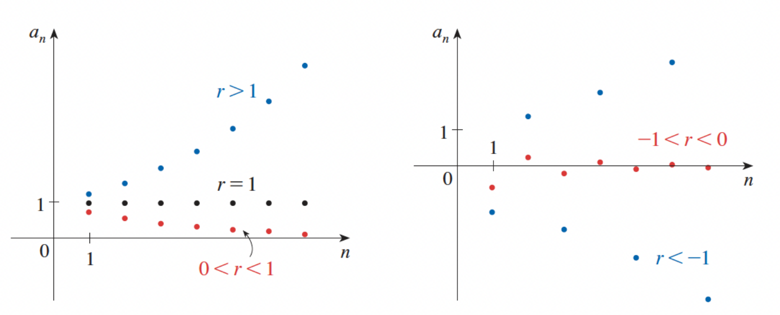
Pour $r < -1$, on peut alors écrire la suite comme suit

$$\left\{r^{2n}\right\} = \left\{\left(r^2\right)^n\right\}$$

Elle tend alors vers l'infini lorsque n tend vers l'infini car $r^2 > 1$. Et donc la suite $\{r^n\}$ diverge.

Conclusion: La suite $\{r^n\}$ est convergente si $-1 < r \leq 1$ et divergente pour toutes les autres valeurs de r:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1. \end{cases}$$



La suite $a_n = r^n$.

Définition

- Une suite $\{a_n\}$ est **croissante** si $a_n \leq a_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$, autrement dit si

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$$

- Elle est **décroissante** si $a_n \geq a_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.
- Une suite est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Exemple 1.11: La suite $\left\{\frac{3}{n+5}\right\}$ est décroissante, car

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

et donc $a_n > a_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

Exemple 1.12: Montrons que la suite $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ est décroissante.

- On doit montrer que $a_{n+1} \leq a_n$, autrement dit que

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}.$$

- **Solution 1**:
  - Cette inégalité est équivalente à celle qu'on obtient en effectuant le produit croisé :

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} &\Leftrightarrow (n+1)\left(n^2+1\right) \leq n\left[(n+1)^2+1\right] \\ &\Leftrightarrow n^3+n^2+n+1 \leq n^3+2n^2+2n \\ &\Leftrightarrow 1 \leq n^2+n.\end{aligned}$$

  - Or $n \geq 1$, donc l'inégalité $n^2+n \geq 1$ est vérifiée. On a donc $a_{n+1} \leq a_n$, et la suite $\{a_n\}$ est décroissante.

▷ **Solution 2**: Soit la fonction $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

- ⋆ On peut déterminer la monotonicité de la suite en utilisant la fonction $f(x)$ où $a_n = f(n)$ comme suit:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \text{ lorsque } x^2 > 1.$$

- ⋆ La fonction f est donc décroissante sur $[1, \infty[$.

- ⋆ Ce qui implique que $f(n) \geq f(n+1)$ pour tout entier positif n. Par conséquent, $\{a_n\}$ est décroissante.

Définition

- Une suite $\{a_n\}$ est **bornée supérieurement** (ou **majorée**) s'il existe un nombre M tel que

$$a_n \leq M, \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

- Elle est **bornée inférieurement** (ou **minorée**) s'il existe un nombre m tel que

$$m \leq a_n, \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

- Si elle est bornée supérieurement et inférieurement, alors $\{a_n\}$ est une suite **bornée**.

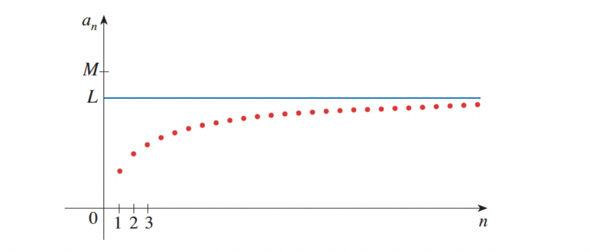
Exemple 1.13:

- ▷ Par exemple, la suite $a_n = n$ est bornée inférieurement ($a_n > 0$) mais non supérieurement.
- ▷ La suite $a_n = n/(n+1)$ est bornée, car $0 < a_n < 1$ pour tout n.

▷ Une suite peut être bornée sans être convergente. Par exemple, la suite $a_n = (-1)^n$ satisfait à $-1 \leq a_n \leq 1$, mais elle est divergente.

▷ De plus, une suite peut être monotone sans être convergente. Par exemple, $a_n = n$ tend vers ∞.

▷ Toute suite à la fois bornée et monotone est convergente.



Si $\{a_n\}$ est croissante et si $a_n \leq M$ pour tout n, alors les termes doivent forcément tendre vers un certain nombre $L \leq M$.

Théorème

Toute suite monotone et bornée est convergente.

Exemple 1.14: Montrer que la suite $\left\{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right\}$ est monotone et bornée.

- Soit $a_n = \left\{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right\}, \forall\, n \in \mathbb{N}^+$. On a $a_n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$.

- D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2(n+1)-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2(n+1))}\cdot\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\\ &= \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)(2n+2)}\cdot\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\\ &= \frac{2n+1}{2n+2} < 1\end{aligned}$$

- Donc $a_{n+1} < a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$, c'est-à-dire $\{a_n\}$ est strictement décroissante.

- Puisque $a_n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$, alors $\{a_n\}$ est borné inférieurement.

- **Conclusion**: Par conséquent $\{a_n\}$ est convergente.

Exemple 1.15: Étudions la suite $\{a_n\}$ définie par la relation de récurrence

$$a_1 = 2 \ \text{ et } \ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6), \quad \text{pour } \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

- On commence par calculer les premiers termes.

$$\begin{array}{lll} a_1 = 2 & a_2 = \frac{1}{2}(2+6) = 4 & a_3 = \frac{1}{2}(4+6) = 5 \\ a_4 = \frac{1}{2}(5+6) = 5,5 & a_5 = 5,75 & a_6 = 5,875 \\ a_7 = 5,9375 & a_8 = 5,96875 & a_9 = 5,984375 \end{array}$$

Ces premiers termes suggèrent que la suite est croissante et que les termes tendent vers la valeur 6.

- Pour confirmer que la suite est croissante, on montre par récurrence que $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout $n \geq 1$.

  - C'est vrai pour $n = 1$, car $a_2 = 4 > a_1$.
  - On suppose que l'inégalité est aussi vraie pour $n = k$:
    $$a_{k+1} \geq a_k$$
  - Déduisons-en que $a_{n+1} \geq a_n$ est vrai pour $n = k + 1$. En effet, à partir de l'inégalité précédente, on a
    $$\begin{aligned} a_{k+1} + 6 &\geq a_k + 6 \\ \frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) &\geq \frac{1}{2}(a_k + 6) \\ a_{k+2} &\geq a_{k+1}. \end{aligned}$$
  - L'inégalité est donc vraie pour tout n, par récurrence.

- ▷ On vérifie maintenant que $\{a_n\}$ est bornée pour tout n. La suite étant croissante, alors elle possède une borne inférieure $a_n \geq a_1 = 2$ pour tout n.

- ▷ Montrons par récurrence qu'elle possède une borne supérieur $a_n < 6$:
  - ⋆ Puisque $a_1 < 6$, cette affirmation est vraie pour $n = 1$.
  - ⋆ On suppose qu'elle est vraie aussi pour $n = k$. Alors, on a
  $$a_k < 6$$
  - ⋆ Montrons qu'elle l'est pour $n = k + 1$: On a de cette inégalité
  $$a_k + 6 < 6 + 6 = 12$$
  $$\frac{1}{2}(a_k + 6) < \frac{1}{2}(12) = 6$$
  $$a_{k+1} < 6$$
  - ⋆ Ce qui prouve par récurrence que $a_n < 6$ pour tout n.

- La suite $\{a_n\}$ étant croissante et bornée, le théorème pércédent implique qu'elle possède une limite, mais sans préciser sa valeur.

- Sachant que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe, la relation de récurrence permet d'écrire

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + 6) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} a_n + 6 = \frac{1}{2}(L + 6).$$

- Or $a_n \to L$, donc $a_{n+1} \to L$ également (lorsque $n \to \infty$, on a aussi $n + 1 \to \infty$). Par conséquent,

$$L = \frac{1}{2}(L + 6).$$

- La résolution de cette équation en L donne $L = 6$, comme prévu.

Séries numériques

Définition

- Une **série** est la somme des termes d'une suite $\{a_n\}$, c'est-à-dire

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots$$

On l'appelle aussi **série infinie** et elle est notée

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad \sum a_n$$

Exemple 2.1:

- Pour la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $a_n = n$, la somme de ses termes est

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$$

- Pour la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $a_n = \frac{1}{2^n}$, la série infinie est donnée par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Définition

- La $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est définie par

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

> Ces sommes partielles forment une nouvelle suite $\{s_n\}$, qui possède une limite ou non.

- Si la suite des sommes partielles $\{s_n\}$ convergente et si

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

alors la **série** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est dite **convergente**, et on écrit

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Le nombre s est **la somme** de la série.

- Si la suite $\{s_n\}$ divergente, la série est dite **divergente**.

Exemple 2.2:

- La série $\sum_{n=1}^{\infty} n$ est divergente. En effet,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

  Puisque $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} n$ est divergente.

- La série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ est divergente car

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = -1+1-1+1-1+\cdots = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

  et donc $\lim_{n\to\infty} s_n$ n'existe pas.

Exemple 2.3: Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ est convergente.

- Soit $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. On a

$$\frac{1}{2} s_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Et donc

$$s_n - \frac{1}{2} s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow s_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

- Par suite, on a la limite suivante

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

d'où la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ est convergente et on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \overset{n=1}{\lim_{n\to\infty}} s_n = 1.$$

Définition

- Une **série géométrique** est une série de la forme:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, a \neq 0.$$

On obtient chaque terme en multipliant son prédécesseur par la **raison** r.

Exemple 2.4:

- Par exemple,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

est une série géométrique dont le **premier terme** est $a = \frac{1}{2}$ et la raison est $r = \frac{1}{2}$.

▷ Si $r = 1$, alors $s_n = a + a + \cdots + a = na \to \pm\infty$. Puisque $\lim_{n\to\infty} s_n$ n'existe pas, la série géométrique diverge dans ce cas.

▷ Si $r \neq 1$, on a et

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$
$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$
$$s_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}.$$

▷ Si $-1 < r < 1$, alors $r^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1 - r}.$$

Par conséquent, lorsque $|r| < 1$, la série géométrique converge et sa somme est $a/(1 - r)$.

▷ Si $r \leq -1$ ou $r > 1$, la suite $\{r^n\}$ diverge et donc, $\lim_{n\to\infty} s_n$ n'existe pas. La série géométrique diverge donc dans ces deux cas.

- La série géométrique

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

converge si $|r| < 1$ et, dans ce cas, sa somme est

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1. \tag{3}$$

- Si $|r| \geq 1$, la série géométrique diverge.

Exemple 2.5: Trouvons la somme de la série géométrique

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

- Le premier terme est $a = 5$ et la raison $r = -\frac{2}{3}$, car la série s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

- Comme $|r| = \frac{2}{3} < 1$, la série converge et sa somme, selon la formule (3), est

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3.$$

Exemple 2.6: Est-ce que la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$ converge ou diverge?

- On réécrit d'abord le n-ième terme de la série sous la forme ar^{n-1} :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^2\right)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

- Il s'agit d'une série géométrique avec $a = 4$ et $r = \frac{4}{3}$.

- Comme $|r| > 1$, la série diverge.

Exemple 2.7: Trouvons la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, où $|x| < 1$.

- Il faut noter que cette série débute avec $n = 0$ et donc que le premier terme est $x^0 = 1$. On a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

- Cette série est géométrique avec $a = 1$ et $r = x$.

- Comme $|r| = |x| < 1$, elle converge et la formule (3) permet d'obtenir la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}.$$

Exemple 2.8: Écrivons le nombre $2,3\overline{17} = 2,3171717\ldots$ sous la forme d'une fraction (un rapport de nombres entiers).

- Le nombre s'écrit
$$2,3171717\ldots = 2,3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$
- Après le premier terme, on a une série géométrique avec $a = 17/10^3$ et $r = 1/10^2 < 1$.
- Par conséquent,
$$2,3\overline{17} = 2,3 + \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 2,3 + \frac{\frac{17}{1000}}{\frac{99}{100}}$$
$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}$$

Exemple 2.9: Montrons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et trouvons sa somme.

- Cette série n'est pas géométrique. On doit donc revenir à la définition d'une série convergente et calculer la somme:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

- On simplifie la somme en la décomposant en fractions simples:

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}.$$

- On obtient

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

- ▷ et donc, on calcule la limite de la somme partielle:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1.$$

- ▷ Par conséquent, la série donnée converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \tag{4}$$

Exemple 2.10: Montrons que la **série harmonique**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \qquad \text{est divergente.}$$

- Pour cette série particulière, il est commode de considérer les sommes partielles $s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \ldots$ et de montrer qu'elles deviennent arbitrairement grandes.

- On effectue les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2} \\
S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_{16} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}
\end{aligned}
$$

- De même, $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}, s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$, et en général

$$S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

- Ce qui montre que $s_{2^n} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ et donc que $\{s_n\}$ diverge. Par conséquent, la série harmonique est divergente.

Théorème

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Démonstration:

- Soit $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Alors, $a_n = s_n - s_{n-1}$.
- Comme la série $\sum a_n$ converge, la suite des sommes partielles $\{s_n\}$ converge. Soit
$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$
- Puisque $n - 1 \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, on a aussi
$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s.$$
- Par conséquent,
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) &= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \\ &= s - s = 0.\end{aligned}$$

$\square$

Note:

- En général, la réciproque de ce théorème n'est pas vraie. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, on ne peut pas conclure que $\sum a_n$ converge.

- Par exemple, pour la série harmonique $\sum 1/n$, on a $a_n = 1/n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, mais on a montré que $\sum 1/n$ diverge.

Le Test de divergence

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ou si $\lim_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exemple 2.11: Montrons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ diverge.

▷ On a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

donc, selon le test de divergence, la série diverge.

Théorème

Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, alors les séries $\sum ca_n$ (où c est une constante), $\sum(a_n + b_n)$, $\sum(a_n - b_n)$ convergent aussi et

- $$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

▷ Soit

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \quad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

▷ La n-ième somme partielle de la série $\sum (a_n + b_n)$ est

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

▷ On a donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t.$$

▷ Par conséquent, $\sum (a_n + b_n)$ converge et sa somme est

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

□

Exemple 2.12: Trouvons la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$.

- La série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ est une série géométrique avec $a=\frac{1}{2}$ et $r=\frac{1}{2}$, donc
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$
- Selon le résultat (4),
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$
- Par conséquent, en vertu du théorème précédent, la série donnée converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=3\times 1+1=4.$$

Note:

- Un nombre fini de termes n'influe pas sur la convergence ou la divergence d'une série.

- En d'autres mots, si $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ converge, alors la série complète

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

converge. Toutefois, les sommes des deux séries ne sont pas égales.

Exemple 2.13: Par exemple, si l'on peut montrer que la série

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

converge vers s, alors, puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

il s'ensuit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} n/\left(n^3+1\right)$ converge vers $s+1/2+2/9+3/28$.

Critères de convergence pour les séries à termes positifs

- En général, il est difficile de trouver la somme exacte d'une série:
  - On peut calculer la somme d'une série géométrique,
  - et celle de la série $\sum 1/[n(n+1)]$ par exemple.
- Parce que, dans chacun de ces cas, il est possible de trouver une formule simple pour la n-ième somme partielle s_n.
- Habituellement, toutefois, il n'est pas facile de calculer

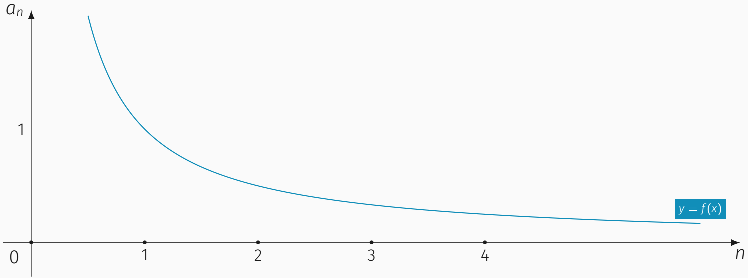
$$\lim_{n\to\infty} s_n.$$

Note: Les tests (ou critères) développés dans cette section permettent de déterminer si une série dont tous les termes sont positifs converge ou diverge, sans trouver explicitement sa somme.

- Dans le cas d'une série à termes positifs, la suite des sommes partielles $\{s_n\}$ est croissante.
- Donc, si $\{s_n\}$ est bornée supérieurement alors la série est convergente.
- Sinon, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est divergente.
- Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $[1, \infty[$ et soit

$$a_n = f(n), \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$$

▷ L'aire total des rectangles est inférieur à l'aire sous $y = f(x)$ sur $[1, n]$.



▷ Et donc, on obtient:

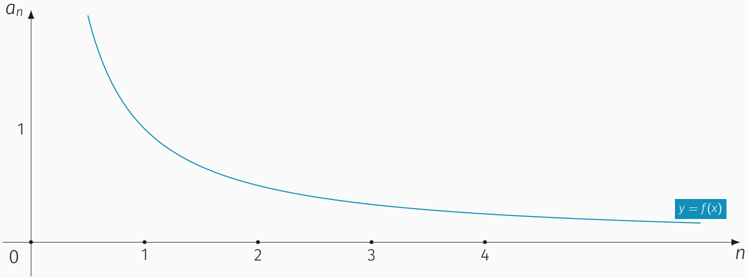
$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n < \int_1^n f(x)dx$$

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n}_{s_n} < a_1 + \int_1^n f(x)dx$$

▷ C'est-à-dire

$$s_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx$$

- L'aire sous la courbe $y = f(x)$ sur $[1, n]$, est inférieur à l'aire totale des rectangles.



- Et donc, on obtient:

$$\int_1^n f(x)dx < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1}$$

$$\int_1^n f(x)dx < \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n}_{s_n}, \quad \text{car } a_n \geq 0.$$

- C'est-à-dire

$$\int_1^n f(x)dx < s_n.$$

- D'une part, si l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} f(x)dx$ est convergente, alors

$$s_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx < a_1 + \int_1^{\infty} f(x)dx.$$

- Et donc, la suite $\{s_n\}$ est bornée supérieurement et par conséquent la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

- D'autre part, si l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \infty,$$

- alors la suite $\{s_n\}$ n'est pas bornée supérieurement car

$$s_n > \int_1^n f(x)dx.$$

- Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Le Test de l'intégrale

On suppose que f est une fonction continue, positive et décroissante sur $[1, \infty[$ et soit $a_n = f(n)$. Alors, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

est convergente si et seulement si l'intégrale impropre

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

est convergente. En d'autres mots,

- Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente.
- Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est divergente.

Exemple 3.1: Montrer que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

- Soit $f(x) = \frac{1}{x \ln x}, x \geq 2$. Il est clair que f est continue, positive et décroissante sur $[2, \infty[$.

- D'autre part,

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx &= \lim_{t \to \infty} \left(\int_2^t \frac{1}{x \ln x} dx \right) \\ &= \lim_{t \to \infty} \ln(\ln x) \Big|_2^t \\ &= \lim_{t \to \infty} \Big(\ln(\ln t) - \ln(\ln 2) \Big) = \infty.\end{aligned}$$

- Donc $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ diverge et par conséquent la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

Exemple 3.2: Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n/5}}$ converge.

- ▷ Soit $f(x) = \frac{x}{e^{x/5}} = xe^{-x/5}$, une fonction continue et positive $\forall\, x > 0$.

- ▷ Pour déterminer si f est décroissante, on calcule sa dérivée:

$$f'(x) = e^{-x/5} + x\left(-\frac{1}{5}e^{-x/5}\right) = \left(1 - \frac{x}{5}\right)e^{-x/5}.$$

- ▷ Ainsi $f'(x) < 0$ si et seulement si $1 - \frac{x}{5} < 0$, c'est-à-dire $x > 5$.
Donc f est décroissante pour $x > 5$.

- ▷ On peut appliquer le critère de l'intégrale sur la série

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n}{e^{n/5}} \quad \left(\sum_{n=1}^{4} \frac{n}{e^{n/5}} \text{ n'affecte pas la convergence de la série } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n/5}}\right).$$

- ▷ Pour calculer l'intégrale impropre $\int_5^{\infty} xe^{-\frac{x}{5}}\,dx$, on s'intéresse au calcul de $\int_5^t xe^{-\frac{x}{5}}\,dx$, où $t > 5$.

▷ Effectuons ainsi une intégration par parties, en posant $u = x$, $dv = e^{-x/5}dx, v = -5e^{-x/5}$

$$\begin{aligned}\int_5^t xe^{-\frac{x}{5}}dx &= -\left.5xe^{-x/5}\right|_5^t + 5\int_5^t e^{-x/5}dx \\ &= -5te^{-\frac{t}{5}} + 25e^{-1} + 5\left(-\left.5e^{-x/5}\right|_5^t\right) \\ &= -5\frac{t}{e^{t/5}} + 25e^{-1} - 25\left(e^{-t/5} - e^{-1}\right) \\ &= -5\frac{t}{e^{t/5}} - \frac{25}{e^{t/5}} + 50e^{-1}\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_5^t xe^{-\frac{x}{5}}dx = -5\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t/5}} + \frac{50}{e} = -5\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{t}e^{t/5}} + \frac{50}{e}.$$

▷ Alors, $\int_5^\infty xe^{-\frac{x}{5}}dx$ est convergente car

$$\int_5^\infty xe^{-x/5}dx = \lim_{t\to\infty}\int_5^t xe^{-x/5}dx = \frac{50}{e}.$$

▷ Par conséquent, la série $\sum_{n=5}^\infty \frac{n}{e^{n/5}}$ est convergente, d'où la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{e^{n/5}}$ est convergente.

Exemple 3.3: Pour quelles valeurs de p la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge-t-elle?

- Si $p < 0$, alors $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$.
- Si $p = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = 1$.
- Dans ces deux cas, $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$, de sorte que la série diverge, selon le test de divergence.
- Si $p > 0$, alors clairement la fonction $f(x) = 1/x^p$ est continue, positive et décroissante sur $[1, \infty[$.
- Calculons l'intégiale impropre $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$. soit $t > 1$, on a

$$\int_1^t \frac{dx}{x^p} = \int_1^t x^{-p} dx = \begin{cases} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^t & \text{si } p \neq 1 \\ \ln |x|\big|_1^t & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left(t^{1-p} - 1\right) & \text{si } p \neq 1 \\ \ln t & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{-1}{1-p} & \text{si } 1 - p < 0 \Leftrightarrow p > 1 \\ \infty & \text{si } 1 - p > 0 \text{ ou } p = 1 \Leftrightarrow p \leq 1. \end{cases}$$

- On a montré que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \text{ converge si } p > 1 \text{ et diverge si } p \leq 1.$$

- Selon le test de l'intégrale, la série $\sum 1/n^p$ converge donc si $p > 1$ et diverge si $0 < p \leq 1$.

- Pour $p = 1$, cette série est la **série harmonique**.
- La série de cette exemple est appelée **série de Riemann (ou série p)**.

5 Test de Comparaison

Supposons que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries à termes positifs.

- Si $\sum b_n$ converge et si $a_n \leq b_n$ pour tout n, alors $\sum a_n$ converge.
- Si $\sum b_n$ diverge et si $a_n \geq b_n$ pour tout n, alors $\sum a_n$ diverge aussi.

Démonstration:

▷ Soit les sommes partielles:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \quad \text{et} \quad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

⋆ Puisque les termes des deux séries sont positifs, les suites $\{s_n\}$ et $\{t_n\}$ sont croissantes ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$).

⋆ De plus, $t_n \to t$ et donc $t_n \leq t$ pour tout n. Puisque $a_i \leq b_i$, on a $s_n \leq t_n$. Par conséquent, $s_n \leq t$ pour tout n.

- ⋆ Cela signifie que $\{s_n\}$ est croissante et bornée supérieurement et donc qu'elle converge, selon le théorème des suites monotones.
- ⋆ Par conséquent, la série $\sum a_n$ converge.

▷ Pour le deuxième point:

- ⋆ Si $\sum b_n$ diverge, alors $t_n \to \infty$ (puisque $\{t_n\}$ est croissante).
- ⋆ Mais $a_i \geq b_i$, et donc $s_n \geq t_n$. Par conséquent, $s_n \to \infty$.
- ⋆ Donc, la série $\sum a_n$ diverge.

$\square$

On recourt souvent aux séries suivantes pour effectuer la comparaison.

- Une série de Riemann:

$$\sum 1/n^p, \text{ qui converge si } p > 1 \text{ et diverge si } p \leq 1;$$

- Une série géométrique:

$$\sum ar^{n-1}, \text{ converge si } |r| < 1 \text{ et diverge si } |r| \geq 1.$$

Exemple 3.4: Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

- On a

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n \geqslant \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 2 = 2^{n-1}}_{(n-1) \text{ fois}}$$

- Et donc, on obtient: $0 < \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

- Puisque la série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est convergente, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

converge.

Exemple 3.5: Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$ converge ou diverge.

- Pour un n assez grand, le terme dominant du dénominateur est $2n^2$, ce qui suggère la comparaison avec la série $\sum \frac{5}{2n^2}$. On a alors
$$\frac{5}{2n^2+4n+3} < \frac{5}{2n^2}$$
car le dénominateur du membre de gauche est plus grand.
Test-Comp.:a_n **est le membre de gauche et b_n, le membre de droite.**

- On sait que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
converge parce que c'est une série de Riemann avec $p = 2 > 1$ multipliée par une constante.

- En conséquence, la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$$
converge, selon la partie i) du test de comparaison.

Note: Bien que la condition $a_n \leq b_n$ ou $a_n \geq b_n$ du test de comparaison soit énoncée pour tout n, il suffit de vérifier cette condition pour $n \geq N$, où N est un nombre entier fixé, car la convergence d'une série n'est pas influencée par un nombre fini de termes.

Exemple 3.6: Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converge ou diverge.

- On remarque que $(\ln n/n) \geq 0$ et que $\ln n > 1$ pour $n \geq 3$, donc

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \quad \text{si} \quad n \geq 3.$$

- On sait que la série harmonique $\sum 1/n$ diverge (série de Riemann avec $p = 1$).

- Alors, la série donnée diverge, en vertu du test de comparaison:

$$\infty \longleftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

▷ Il n'est pas toujoirs facile de comparer directement des séries similaires.

▷ Cependant, on peut appliquer le test suivant.

4 Forme Limite du Test de Comparaison

Supposons que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries à termes positifs. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

où L est un nombre fini et $L > 0$, alors ou bien les deux séries convergent ou bien les deux divergent.

Démonstration:

▷ Sachant que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \frac{L}{2}, \ \forall\, n \geq n_0.$$

▷ Et donc $\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}, \forall\, n \geqslant n_0$ et le résultat s'en suit grâce au théorème précédent.

⋆ Dans le cas où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty, \text{ alors il existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{a_n}{b_n} > 1, \forall\, n \geqslant n_0,$$

c'est-à-dire $a_n > b_n,\ \forall\, n \geqslant n_0$.

⋆ Dans le cas où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \text{ alors } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty.$$

Et donc, si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, alors $\sum_{\mu=1}^{\infty} a_n$ corverge.

Note: Dans la forme limite du test de comparaison, on peut aussi utiliser, de façon équivalente, la limite $\lim_{n\to\infty} (b_n/a_n)$.

Exemple 3.7: Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ converge ou diverge.

- On utilise la forme limite du test de comparaison avec

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{2^n}.$$

- On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\left(2^n - 1\right)}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0.$$

- Puisque la limite existe et est non nulle, et que

$$\sum 1/2^n$$

est une série géométrique convergente, la série donnée converge, selon la forme limite du test de comparaison.

Exemple 3.8: Montrer que la sénie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n}(3n-2)}$ diverge

- Soit $a_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n}(3n-2)}$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\sqrt{n}}{\sqrt{n}(3n-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{2}{3}$$

- Puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{3} > 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n}(3n-2)}$$

diverge.

- D'Alembert a établi un critère qui permet de tester:
  - La convergence on la divergende d'une série à termes positifs.
  - Sans recourir explicitement à une série de comparaison.

4 Critère de d'Alembert

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série à termes poritifs. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

- Si $L < 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $L > 1$ ou si L est infini, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- Si $L = 1$, le critère n'est pas concluant.

Démonstration:

▷ Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ et $L < 1$, alors soit $0 \leqslant L < R < 1$, et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < R, \forall\, n \geqslant n_0$.

- ⋆ Par conséquent $a_{n+1} < a_n R,\ \forall\, n \geqslant n_0$, c'est-à-dire

$$a_{n_0+1} < a_{n_0} R$$
$$a_{n_0+2} < a_{n_0+1} R < a_{n_0} R^2$$
$$a_{n_0+3} < a_{n_0+2} R < a_{n_0} R^3$$

- ⋆ Et donc, on obtient $a_{n_0+k} < a_{n_0} R^k \ \forall\ k \in \mathbb{N}$.

- ⋆ Puisque $0 < R < 1$, alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0} R^k$ est convergente et donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ est convergente.

- ⋆ Par suite, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente.

▷ Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ et $L > 1$, alors soit $1 < R < L$. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > R,\ \forall\, n \geqslant n_0$. Alors $a_{n_0} + k > a_{n_0} R^k,\ \forall\ k \in \mathbb{N}$.

- ⋆ Puisque $R > 1$, alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0} R^k$ est divergente et donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ diverge.

- Pour montrer que le critère de d'Alembert n'est pas concluant si $L = 1$:
  - Il suffit de considérer la série harmonique (divergente)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

  - Alors que la série de Riemann (convergente)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

  - Ces deux exemples montrent que si $L = 1$, alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ pourrait converger ou diverger.

□

Exemple 3.9: Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ converge.

▷ Soit $a_n = \frac{3^n}{n!}$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{3^n} = \lim_{\mu\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0.$$

▷ Puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ converge.

Exemple 3.10: Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ converge.

▷ Soit le terme $a_n = n^n/n!$, alors on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$
$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \text{ lorsque } n \to \infty.$$

▷ Puisque $e > 1$, la série est divergente, d'après le test du rapport.

▷ Pouvez-vous montrer autrement que cette série est convergente!

Séries alternées et convergence absolue

- Les tests de convergence vus jusqu'à présent ne s'appliquent qu'aux séries à termes positifs.
- Dans cette section, nous verrons comment traiter les séries dont les termes ne sont pas nécessairement positifs.
- **Les séries alternées**, c'est-à-dire dont le signe des termes alterne, sont particulièrement importantes.

Définition

- Une série alternée est une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs. En voici deux exemples:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{6}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}.$$

- Une série alternée est une série de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \quad \text{ou bien} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n, \quad \text{où} \quad a_n\geq 0,\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Note: Puisqu'on a légalité suivante entre ces deux séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,$$

alors, on se focalisera dans la suite à l'étude de la deuxième série.

Théorème de Leibniz Soit la série alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \quad \text{où} \quad a_n \geqslant 0, \, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Si $a_{n+1} \leqslant a_n,$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors

- la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \quad \text{converge},$$

- et on a l'inégalité suivante

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - s\right| \leq a_{n+1}, \quad \text{où} \quad s = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n.$$

Démonstration:

- Pour montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ converge, on va montrer que la suite $\{s_n\}$ des sommes partielles converge.

- Considérons la suite $\{s_{2n}\}$ d'indice pair et celle $\{s_{2n+1}\}$ d'indice impair.

FIGURE ICI !!!

- La suite $\{s_{2n}\}$ est croissante bornée supérieurement par a_1, donc elle converge!

- La suite $\{s_{2n+1}\}$ est décroissante bornée inférieurement par 0, donc elle converge!

▷ D'autre part, puisque $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$, alors

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - s_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0, \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = 0.$$

▷ Alors, $\{s_{2n}\}$ et $\{s_{2n+1}\}$ converge vers la même limite et donc $\{s_n\}$ est convergente.

▷ Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ converge.

▷ Montrons maintenant que $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - s\right| \leq a_{n+1}$. on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - s &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k \\
&= -\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k \\
&= (-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + (-1)^{n+3}a_{n+3} + \cdots \\
&= (-1)^{n+1}\Big(a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots\Big)
\end{aligned}$$

▷ Si n est impair, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - s &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots \\ &= a_{n+1}, \quad \text{car } \ \{a_n\} \ \text{ est décroissante.}\end{aligned}$$

▷ Si n est pair, alors

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - s = -\Big(a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots\Big)$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - s\right) = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots$$

$$s - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k \leq a_{n+1}.$$

▷ Et donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k - s\right| \leq a_{n+1}$$

□

Exemple 4.1: La série harmonique alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

où $a_n = \frac{1}{n}$ satisfait à

- L'inégalité

$$a_{n+1} < a_n \ \text{car} \ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

- Et vérifie la limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

- Alors, la série converge en vertu du théorème de Leibniz.

Exemple 4.2: La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ est elle convergente on divergente?

- ▷ Soit $a_n = \frac{\ln n}{n}$. Alors, on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0, \left(\text{car } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \right)$$

- ▷ Pour montrer que la suite $\{a_n\}$ est décroissante, on définit

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},\ x > 0\,; \quad \text{on a } f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Et donc $f'(x) < 0$, si $1 - \ln x < 0$, c'est-à-dire $\ln x > 1$ et donc $x > e$.

- ▷ Alors, f est décroissante sur $]e, \infty[$ et donc la suite $\{a_n\}$ est décroissante pour tout $n \geq 3$.

- ▷ Par suite, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ est convergente.

Exemple 4.3: La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\arctan n}$ est-elle convergente ou divergente?

- Le terme générale de cette série est $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\arctan n}$.
- Considérons la suite formée du terme général d'indice impair,

$$a_{2n+1} = \frac{1}{\arctan(2n+1)}$$

- On a

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\arctan(2n+1)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

- Et donc $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Par conséquent, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\arctan n} \text{ diverge.}$$

- Nous allons établir un critère de convergence pour une série qui n'est ni à termes positifs ni alternée.

- Pour toute série donnée $\sum a_n$, on peut former la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$
dont les termes sont les valeurs absolues des termes de la série originale.

Définition

Une série $\sum a_n$ est dite **absolument convergente** si la série des valeurs absolues $\sum |a_n|$ converge.

Note: Si $\sum a_n$ est une série à termes positifs, alors $|a_n| = a_n$ et la convergence absolue revient à la convergence au sens habituel.

Exemple 4.4:

- ▷ La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

converge absolument,

- ▷ car

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

est une série de Riemann convergente ($p = 2$).

Exemple 4.5:

- ▷ la série harmonique alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots, \quad \text{converge!}$$

- ▷ Elle ne converge pas absolument, car la série des valeurs absolues

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

est la série harmonique (série de Riemann où $p = 1$) qui diverge.

Théorème

Si une série $\sum a_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration:

- L'inégalité
$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2\,|a_n|$$
est valide, car $|a_n|$ vaut soit a_n, soit $-a_n$.

- Si $\sum a_n$ est absolument convergente, alors $\sum |a_n|$ converge et donc la série $\sum 2\,|a_n| = 2\sum^n |a_n|$ converge aussi.

- Par conséquent, selon le test de comparaison, la série $\Sigma\,(a_n + |a_n|)$ est convergente. Ainsi, la série
$$\sum a_n = \Sigma\,(a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$
est la différence de deux séries convergentes et elle est donc convergente.

$\square$

Exemple 4.6: Déterminons si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

converge ou diverge.

- ▷ Cette série contient des termes positifs et des termes négatifs, mais elle n'est pas alternée.
- ▷ (Le premier terme est positif, les trois prochains sont négatifs et les trois suivants sont positifs: le signe change irrégulièrement.)
- ▷ On applique le test de comparaison à la série valeurs absolues:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}.$$

  Puisque $|\cos n| \leq 1$ pour tout n, on a $\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

- ▷ On sait que $\Sigma 1/n^2$ converge (série de Riemann avec $p = 2$). Selon le test de comparaison, $\Sigma |\cos n|/n^2$ converge aussi.

- Par conséquent, la série donnée est absolument convergente, donc elle est convergente selon le théorème.

Exemple 4.7: Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ est absolument convergente.

- On utilise le critère de d'Alembert pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, où $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1.$$

- Selon le critère de d'Alembert, la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ est convergente,
- c'est-à-dire que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ est absolument convergente et, par conséquent, elle converge.

Définition

La série $\sum a_n$ est dite conditionnellement convergente (ou semi-convergente) si elle est convergente, mais pas absolument convergente (c'est-à-dire que $\sum |a_n|$ diverge).

Exemple 4.8:

- La série harmonique alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

est conditionnellement convergente (ou semi-convergente).

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)

- Disponibilités:
  - ⋆ Lundi 10:00 - 12:00, MRR B-214
  - ⋆ Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214
  - ⋆ Jeudi 08H30 - 10H30, MRR B-214

- Manuels du cours:

[1] J. Stewart.
Analyse concepts et contextes. Volume 1. Fonctions d'une variable.
DE BOECK SUP; 3e édition, Rue des Minimes 39, B- 1000 Bruxelles, 2011.

[2] J. Stewart.
Analyse concepts et contextes. Volume 2. Fonctions de plusieurs variables.
DE BOECK, 2011.