UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Hiver 2024

SÉRIE 2 - Arithmétique (MATH 1413)

Exercice 1

Dites quelle(s) propriété(s) de l'addition ou de la multiplication dans les naturels justifie(nt) chacune des égalités suivantes.

i $(a + b) \times c = c \times (a + b)$

ii $(2a + b) + b = b + (b + 2a)$

iii $(a^2 + b^2) + c^2 = a^2 + (b^2 + c^2)$

Exercice 2

Dites quelle(s) propriété(s) de l'addition ou de la multiplication dans les naturels justifie(nt) chaque passage d'une ligne à l'autre.

$$\begin{aligned} 2b + b &= 2 \times b + b \\ &= 2 \times b + 1 \times b \\ &= (2 + 1) \times b \\ &= 3 \times b \\ &= 3b \end{aligned}$$

Exercice 3

Exprimez, à l'aide de symboles mathématiques appropriés, l'affirmation suivante : "L'addition est distributive sur la multiplication." Montrez ensuite par un exemple numérique que cette affirmation est fausse.

Exercice 4

Nous considérons l'opération binaire E définie comme suit :

$$aEb \overset{\text{déf}}{=} a^b.$$

Par exemple, $4E3 = 4^3 = 64$.
Est-ce que E est une opération commutative ? associative ? E a-t-elle un élément neutre ?

Exercice 5

Soit l'opération binaire $\spadesuit$ définie comme suit :

$$a \spadesuit b \stackrel{\text{déf}}{=} a + 2b$$

Par exemple, $5 \spadesuit 3 = 5 + 2 \cdot 3 = 11$.

- **a** À l'aide d'un exemple numérique, montrez que l'opération $\spadesuit$ n'est pas commutative.
- **b** Montrez que $u \spadesuit (v \spadesuit w) = u + 2v + 4w$.
- **c** Montrez que 0 n'est pas élément neutre pour l'opération $\spadesuit$.

Exercice 6

Pour effectuer l'addition $386 + 95$, nous pouvons utiliser le développement décimal de chacun de ces nombres, de façon à obtenir la suite d'égalités ci-dessous.

$$\begin{aligned}
386 + 95 &= \big(3 \times 10^2 + 8 \times 10 + 6\big) + (9 \times 10 + 5) && (1)\\
&= \big(\big(3 \times 10^2 + 8 \times 10 + 6\big) + 9 \times 10\big) + 5 && (2)\\
&= \big(\big(\big(3 \times 10^2 + 8 \times 10\big) + 6\big) + 9 \times 10\big) + 5 && (3)\\
&= \big(\big(3 \times 10^2 + (8 \times 10 + 6)\big) + 9 \times 10\big) + 5 && (4)\\
&= \big(3 \times 10^2 + ((8 \times 10 + 6) + 9 \times 10)\big) + 5 && (5)\\
&= \big(3 \times 10^2 + (9 \times 10 + (8 \times 10 + 6))\big) + 5 && (6)\\
&= \big(3 \times 10^2 + ((9 \times 10 + 8 \times 10) + 6)\big) + 5 && (7)\\
&= \big(3 \times 10^2 + ((9 + 8) \times 10 + 6)\big) + 5 && (8)\\
&= \big(3 \times 10^2 + (17 \times 10 + 6)\big) + 5 && (9)\\
&= \big(3 \times 10^2 + ((1 \times 10 + 7) \times 10 + 6)\big) + 5 && (10)
\end{aligned}$$

- **a** Dites quelle(s) propriété(s) de l'addition ou de la multiplication dans les naturels ou quelle(s) convention(s) justifie(nt) chaque passage d'une ligne à l'autre.
- **b** En partant d'une décomposition moins fine de ces nombres, on pourrait remplacer l'addition donnée par

  $$(300 + 80 + 6) + (90 + 5).$$

  Il s'agirait ensuite d'additionner les termes de même ordre pour trouver la somme. Effectuez les additions ainsi requises pour évaluer $386 + 95$.
- **c** Pour effectuer plus rapidement cette addition, nous pouvons recourir à un algorithme dans lequel les termes à additionner sont non décomposés et placés l'un en dessous de l'autre (dans le jargon scolaire, on parle d'un algorithme "debout").

Effectuez cette addition en procédant de droite à gauche. Recommencez, mais en allant cette fois de gauche à droite.

d Laquelle des deux méthodes de la partie (c) vous parait la plus efficace dans un contexte de calcul mental ?

Exercice 7

Pour effectuer la multiplication 23×15, nous pouvons utiliser le développement décimal de chacun de ces nombres, de façon à obtenir la suite d'égalités ci-dessous.

$$
\begin{aligned}
23 \times 15 &= (2 \times 10 + 3) \times (1 \times 10 + 5) && (1)\\
&= ((2 \times 10 + 3) \times (1 \times 10)) + ((2 \times 10 + 3) \times 5) && (2)\\
&= ((2 \times 10) \times (1 \times 10) + 3 \times (1 \times 10)) + && (3)\\
&\quad ((2 \times 10) \times 5 + 3 \times 5) && \\
&= ((2 \times 10) \times 10 + 3 \times 10) + ((2 \times 10) \times 5 + 3 \times 5) && (4)\\
&= ((2 \times 10) \times 10 + 3 \times 10) + (5 \times (2 \times 10) + 3 \times 5) && (5)\\
&= (2 \times 10 \times 10 + 3 \times 10) + (5 \times (2 \times 10) + 3 \times 5) && (6)\\
&= (2 \times 10 \times 10 + 3 \times 10) + ((5 \times 2) \times 10 + 3 \times 5) && (7)\\
&= (2 \times 10 \times 10 + 3 \times 10) + (10 \times 10 + 15) && (8)\\
&= \left(2 \times 10^2 + 3 \times 10\right) + \left(10^2 + 15\right) && (9)\\
&= \left(2 \times 10^2 + 3 \times 10\right) + \left(1 \times 10^2 + 15\right) && (10)
\end{aligned}
$$

a Dites quelle(s) propriété(s) de l'addition ou de la multiplication dans les naturels ou quelle(s) convention(s) justifie(nt) chaque passage d'une ligne à l'autre.

b En partant d'une décomposition moins fine de ces nombres, on pourrait remplacer la multiplication donnée par

$$(20 + 3) \times (10 + 5).$$

Or la multiplication de ces deux expressions donne quatre "produits partiels". Identifiez ces produits partiels et additionnez-les pour trouver le produit 23×15.

c Pour effectuer plus rapidement cette multiplication, nous pouvons recourir à un algorithme dans lequel les facteurs à multiplier sont non décomposés et placés l'un en dessous de l'autre. Effectuez cette multiplication en procédant de droite à gauche ; observez les produits partiels et comparez avec la partie (b). Recommencez, mais en allant cette fois de gauche à droite.

d Laquelle des deux méthodes de la partie (c) vous parait la plus efficace dans un contexte de calcul mental ?

Exercice 8

Voici une série d'égalités permettant d'obtenir le produit $(a+b)^2$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)\times(a+b) && (1)\\
&= (a+b)\times a + (a+b)\times b && (2)\\
&= (a\times a + b\times a) + (a\times b + b\times b) && (3)\\
&= \left(a^2 + b\times a\right) + \left(a\times b + b^2\right) && (4)\\
&= \left(a^2 + a\times b\right) + \left(a\times b + b^2\right) && (5)\\
&= \left(\left(a^2 + a\times b\right) + a\times b\right) + b^2 && (6)\\
&= \left(a^2 + (a\times b + a\times b)\right) + b^2 && (7)\\
&= \left(a^2 + (1\times(a\times b) + 1\times(a\times b))\right) + b^2 && (8)\\
&= \left(a^2 + (1+1)\times(a\times b)\right) + b^2 && (9)\\
&= \left(a^2 + 2\times(a\times b)\right) + b^2 && (10)\\
&= a^2 + 2\times(a\times b) + b^2 && (11)\\
&= a^2 + (2\times a)\times b + b^2 && (12)\\
&= a^2 + 2ab + b^2 && (13)
\end{aligned}$$

a Dites quelle(s) propriété(s) de l'addition ou de la multiplication dans les naturels ou quelle(s) convention(s) justifie(nt) chaque passage d'une ligne à l'autre.

b Refaites cette multiplication de façon plus concise, en plaçant les deux facteurs l'un au-dessous de l'autre. Observez bien l'arrivée de chacun des produits partiels qui, à la fin, doivent être additionnés.

Exercice 9

En utilisant la méthode de l'exercice 8 – b, évaluez le produit $(n+3)\times(n+7)$.