



Examen-Final MATH 1073, Calcul Différentiel

13 décembre 2022, Durée 180 minutes (3h)

 Professeurs : Ibrahima Dione - Ismaila Baldé

Nom étudiant.e. : _____

Numéro étudiant.e. : _____

Prenez le temps de lire l'examen au complet avant de commencer. Lisez attentivement chaque question. Vérifiez qu'il y a 17 pages à votre examen. L'examen est composé de **10 questions**, pour un total de 100 points.

- Ceci est un examen à livres fermés et aucune note du cours n'est permise.
- L'utilisation de tout appareil électronique est interdite.
- Répondez aux questions dans l'espace fourni.
- Utilisez le verso des feuilles si nécessaire.

1 Exercice (15 points)

1 Calculez la limite suivante si elle existe

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}.$$

2 Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0.$$

3 Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 1} = 2.$$

2 Exercice (10 points)

En utilisant la définition de la dérivée exprimée comme une limite, calculez $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{2x + 1}$.

3 Exercice (10 points)

En utilisant les règles de dérivation, calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1 $f(x) = \frac{1}{\sin(2x)}$

2 $g(x) = x \ln(x)$

4 Exercice (10 points)

Ecrivez une équation de la tangente à la courbe $y = \ln(x^2 - 3x + 1)$ au point $(3, 0)$.

5 Exercice (10 points)

Par dérivation implicite, trouvez l'expression de $\frac{dy}{dx}$ si on a l'équation suivante

$$x^3 + y^2 = 2xy.$$

6 Exercice (20 points)

Soit la fonction $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

- 1** Déterminez les intervalles sur lesquels $f(x)$ est strictement croissante ou décroissante.

2 Déterminez les valeurs extrêmes de $f(x)$.

-
- 3** Déterminer les intervalles de concavité et de convexité ainsi que les points d'inflexion.

4 Tracez le graphique de $f(x)$ en accord avec les réponses des points **1**, **2** et **3**.

7 Exercice (5 points)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Expliquez pourquoi la fonction f est discontinue au point $a = 0$.

8 Exercice (5 points)

Déterminez les asymptotes horizontales et verticales de la fonction $f(x)$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 5}$$

9 Exercice (5 points)

Démontrez, à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, l'existence pour la fonction $f(x) = e^x + 2x - 3$ d'une racine dans l'intervalle $]0, 1[$. Notez que $e \approx 2,71$.

10 Exercice (10 points)

Soit la fonction $f(x)$ définie comme suit

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

1 Donnez la forme indéterminée qu'on obtient en calculant la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

2 Traitez cette indétermination et calculez cette limite (règle de l'Hospital)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

3 En utilisant la limite obtenue au point **2**, déterminez la limite de $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$