UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Optimisation

MATH 3163

Ibrahima Dione

Hiver 2024

Chapitre 1

Notions fondamentales

Sommaire

1 Définitions

La structure de la plupart des problèmes de programmation mathématique, est un problème d'optimisation sous contrainte qui peut s'écrire de la façon suivante [2, 1] :

$$(P) \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{sous les constraintes :} \\ (i) \quad g_j(x) = 0, \ j = 1, \dots, m \\ (ii) \ \ h_j(x) \leqslant 0, \ j = 1, \dots, p \end{cases} \tag{1.1}$$

où

- le vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est l'inconnue du problème,
- la fonction f est appelée la fonction objectif (appelée parfois fonction économique),
- et l'ensemble des conditions en (i) et en (ii) sont appelées les contraintes du problème d'optimisation.

Définition 1.1

L'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ g_j(x) = 0,\ j = 1, \dots, m, \text{ et } h_j(x) \leqslant 0,\ j = 1, \dots, p\}$ est appelé ensemble des points admissibles.

Définition 1.2

On appelle solution optimale ou optimum global de (P), un point admissible x^* (c'est-à-dire $x^* \in S$) tel que

$$f(x^*) \leq f(x),\ \forall\, x \in S.$$

Note : Soit le vecteur $x = (x_1, \cdots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$.

- La norme euclidienne de x notée $\|x\|$ est définie par

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

- On appelle voisinage de x, l'ensemble noté $V_\varepsilon(x)$ et défini comme suit

$$V_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}, \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 0.$$

Définition 1.3

1. Un vecteur x^* est une solution locale ou optimum local du problème (P), s'il existe un voisinage $V_\varepsilon(x^*)$ de x^* tel que x^* soit optimum global du problème

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{sous les constraintes :} \\ x \in S \cap V_\varepsilon(x^*) \end{cases} \tag{1.2}$$

2. En d'autres termes, $g_i(x^*) = 0,\ i = 1, \dots, m,\ h_i(x^*) \leq 0,\ i = 1, \dots, p$ et

$$\exists\, \varepsilon > 0, \quad \text{tel que} \quad f(x) \geq f(x^*) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x \in V_\varepsilon(x^*) \\ g_i(x) = 0,\ i = 1, \cdots, m \\ h_j(x) \leq 0,\ i = 1, \cdots, p \end{cases} \tag{1.3}$$

La figure suivante illustre, à travers une fonction à une seule variable, les notions de solution globale et de solution locale.

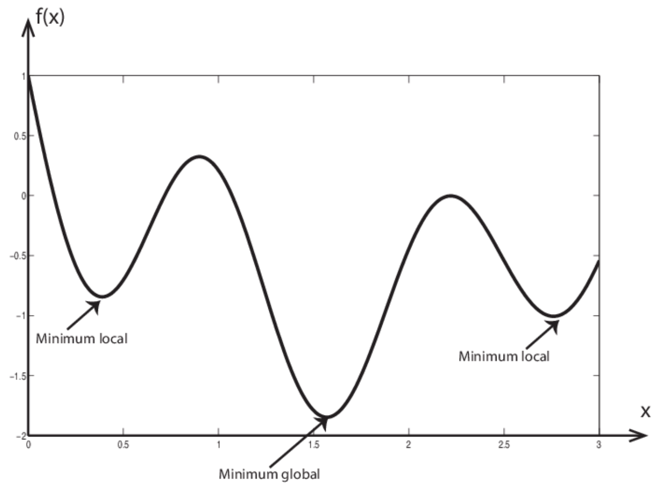


Figure 1.1 – Optimum local et optimum global

Nous verrons plus loin qu'il est souvent possible de caractériser les optimums locaux d'un problème, c'est-à-dire de donner des conditions nécessaires et / ou suffisantes pour qu'une solution x soit un optimum local.

Par contre il est généralement impossible de caractériser les optimums globaux d'un problème d'optimisation sauf dans le cas très particulier des fonctions convexes. Ceci explique la difficulté de résolution des programmes mathématiques non convexes.

2 Éléments de topologie et de calcul différentiel

Ce paragraphe est consacré aux rappels de quelques notions fondamentales.

2.1 Éléments de topologie

Nous nous plaçons ici dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme enclidienne $\|\cdot\|$.

- À partir de cette norme, on peut définir la distance $d(x, y)$ entre deux éléments $x, y \in \mathbb{R}^n$ par :

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Une suite infinie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$: $x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ sera notée $\left\{x^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ou simplement $\left\{x^k\right\}$.

- On dit que la suite $\left\{x^k\right\}$ converge vers x si la norme $\left\|x^k - x\right\|$ tend vers 0 quand $k \to \infty$ ou, d'une façon équivalente, si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N : \forall\, k \geqslant N \Longrightarrow \left\|x^k - x\right\| < \varepsilon.$$

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

- S est dit fermé si toute suite convergente d'éléments de S a une limite dans S :

$$\left.\begin{array}{l} \{x^k\} \subset S \\ x^k \longrightarrow x \end{array}\right\} \Rightarrow x \in S.$$

- S est dit borné si toute suite d'éléments de S est une suite borné ou, d'une façon équivalente, si S est contenu dans une boule B_M de rayon $M < +\infty$

$$B_M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < M\}.$$

- Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est dit compact si, de toute suite infinie $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K, on peut en extraire une sous-suite $\{x^\ell\}_{\ell\in L}$ $(L \subset \mathbb{N})$ convergeant vers un élément de K.

- Une propriété équivalente dans $\mathbb{R}^n$ est qu'un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact, si et seulement si il est fermé et borné.

- Un sous-ensembles S de $\mathbb{R}^n$ est dit ouvert si, pour tout $x_0 \in S$, il existe un voisinage $V_\varepsilon(x_0)$ de x_0 tel que $V_\varepsilon(x_0) \subset S$.

Exemple 2.1 :

- La boule unité $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ est un ouvert.
- L'ensemble $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$ est un compact.

Maintenant, nous allons énoncer un résultat fondamental concernant l'existence d'une solution optimale pour un problème d'optimisation.

Théorème 2.1

Théorème de Weierstrass

Si f est une fonction réelle continue sur un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ (i.e. K est fermé borné), alors le problème d'optimisation :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in K \end{cases}$$

a une solution optimale $x^\star \in K$.

Preuve :

- Soit $m = \inf_{x \in K}\{f(x)\}$, donc pour tout $x \in K$ on a : $m \leq f(x)$. (Notons que m peut valoir $-\infty$ si l'ensemble $f(K)$ n'est pas minoré).
  On peut alors construire une suite $\{x_k\}$ d'éléments de K telle que $f(x_k) \longrightarrow m$.
- Sachant que K est compact, il existe une sous-suite infinie $\{x_\ell\}_{\ell \in L}$ ($L \subset \mathbb{N}$) convergente vers $x^\star \in K$.
- Comme f est continue, on a alors : $f(x_\ell) \longrightarrow f(x^\star)$ et

$$m = \lim_{k \to \infty} f(x_k) = \lim_{\ell \to \infty} f(x_\ell) = f(x^\star)$$

  Comme $f(x^\star) > -\infty$, on a $m > -\infty$ et pour tout $x \in K$: $f(x^\star) = m \leqslant f(x)$; donc $x^\star \in K$ est une solution optimale du problème posé. □

- Ce résultat reste valide si on suppose f semi-continue inférieurement (s.c.i.).
- Par définition, $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si, pour toute suite convergente $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de limite $\bar{x}$, on a :

$$\liminf_{k \to \infty} f(x_k) \geq f(\bar{x})$$

- $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ est s.c.i. si et seulement si elle est s.c.i. en tout point de $\mathbb{R}^n$.

Le corollaire suivant du théorème de Weierstaass est immédiat mais est souvent utile dans les applications, par exemple dans le cas de l'optimisation sans contraintes où l'on cherche un optimum sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.

Corollaire 2.1

Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant de plus la condition :

$$f(x) \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } \|x\| \longrightarrow +\infty.$$

Alors le problème

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

a une solution optimale $x^\star$.

Preuve :

- Soit $x^\circ \in \mathbb{R}^n$ quelconque. En raison de l'hypothèse de croissance à l'infini, il existe $M > 0$ tel que :

$$\text{tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\| > M \ \Rightarrow\ f(x) > f(x^\circ).$$

- Ainsi, le problème se ramène à un problème d'optimisation sur la boule fermée :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant M\},$$

qui est compacte, et le théorème de Weierstrass s'applique. □

Remarque sur la notation min : L'emploi de la notation

$$\min_{x \in S} f(x)$$

sera reservée à des fonctions f telles que, si

$$-\infty < \inf_{x \in S} f(x) < +\infty,$$

alors il existe $x^\star \in S$ tel que $f(x^\star) = \inf_{x \in S} f(x)$. On pose alors :

$$\min_{x \in S} f(x) = f(x^\star).$$

Exemple 2.2 : Soit la fonction $f(x_1, x_2)$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1.$$

Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x_1, x_2) \geq -1$ et $f(0,0) = -1$; alors

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = -1 = f(0).$$

2.2 Éléments de calcul différentiel

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in U$ fixe. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction définie par $f_i : y \longmapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, est appelée la $i^{\text{ième}}$ fonction partielle de f en x.

- La dérivée de f_i en x_i est appelée la dérivée partielle (première) par rapport à la $i^{\text{ième}}$ composante de f en x et notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Exemple 2.3 : Soit l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et la fonction $f(x,y) = \frac{x^2 y^3}{x^2+y^2}$.

- La dérivée partielle par rapport à x est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3\left(x^2+y^2\right) - x^2y^32x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2xy^5}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

- La dérivée partielle par rapport à y est :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3x^2y^2\left(x^2+y^2\right) - x^2y^32y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{3x^4y^2 + x^2y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2y^2\left(3x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

- Un point $x \in U$ en lequel $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ est appelé point critique ou point stationnaire de f.

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est également appelée dirivée partielle (première) de f par rapport à x_i.

- Si toutes les dérivées partielles premières de f en un point x existent, on appelera le gradient de f au point x le vecteur de $\mathbb{R}^n$:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

- On définit de la même manière les dévivées partielles secondes de f (et d'une façon générale les désivées partielles d'ordre m de f où $m \in \mathbb{N}$).

Exemple 2.4 : Par exemple, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ signifie la dérivée de premier ordre de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ par rapport à x_j au point x.

- Une fonction f, telle que toutes ses dérivées partielles d'ordre m existent et sont continues, est dite de classe m et sera notée par $f \in \mathrm{C}^m$.

Définition 2.1

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On appelle dévivée directionnelle de f au point x dans la direction u, la quantité suivante (quand elle existe)

$$f'(x;u) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu)-f(x)}{t}.$$

Note :

- La dérivée partielle de f au point x par rapport à x_i, peut être définie de manière équivalente par la dérivée directionnelle de f au point x dans la direction

$$e_i = (0,\dots,0,\underset{\uparrow_{i^{\text{ieme}}\text{composante}}}{1},0,\dots,0)$$

- Si le gradient de f existe au point x, alors on a

$$f'(x;u) = \nabla f(x)^\top u$$

où $\nabla f(x)^\top = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$.

- Si f est de classe C^2, on définit le Hessien (ou la matrice Hessienne) de f en x par la matrice d'ordre n notée $H(x)$ et définie par

$$H(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}(x) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}$$

$H(x)$ est une matrice symétrique appelée aussi matrice jacobienne associée à f.

Exemple 2.5 :

- Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)$. Son gradient et son Hessien sont

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

où I est la matrice identité d'ordre n.

- Soit $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax + b^\top x$ où A est une matrice symétrique d'ordre n et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. $x^\top$ signifie le transposé du vecter x, i.e.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x^\top = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

On a le gradient et le Hessien

$$\nabla f(x) = Ax + b, \; H(x) = A.$$

Le premier point rentre dans le cadre du deuxième. En effet ;

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) = \frac{1}{2} x^\top I x.$$

2.3 Développement de Taylor et formule de la moyenne.

- Si f est de classe C^1 dans une région contenant le segment $[x, y]$, alors le développement de Taylor à l'ordre 1 s'écrit :

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x) + o(\|y - x\|),$$

où $o(\|y - x\|) = \|y - x\| \varepsilon(y - x)$ avec $\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\varepsilon(y - x) \longrightarrow 0, \;\; \text{lorsque} \;\; \|y - x\| \longrightarrow 0.$$

- Et la formule de la moyenne d'ordre 1 est : il existe $\alpha, \; 0 < \alpha < 1$ tel que

$$\begin{cases} f(y) = f(x) + \nabla f(\xi)^\top (y - x) \\ \quad \xi = \alpha x + (1 - \alpha) y \end{cases}$$

- Si de plus f est de classe C^2, alors le développement de Taylor à l'ordre 2 s'ecrit :

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^\top H(x)(y - x) + o\left(\|y - x\|^2\right).$$

- Et la formule de la moyenne d'ordre 2 est : il existe $\alpha, 0 < \alpha < 1$ tel que

$$\begin{cases} f(y) = f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x) + \dfrac{1}{2}(y - x)^\top H(\xi)(y - x) \\ \quad \xi = \alpha x + (1 - \alpha) y \end{cases}$$

Remarque sur les notations :

- Soient a et b deux points de $\mathbb{R}^n$. On désigne par le segment $[a, b]$ l'ensemble des points $x = ta + (1-t)b$ où $t \in [0, 1]$

$$[a, b] = \left\{x = ta + (1-t)b, \text{ tel que } t \in [0, 1]\right\}$$

- Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$, on note par :

$$x^\top y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

qui n'est autre que le prodruit scalaire euclidien. Parfois ce produit scalaire sera noté tout simplement par (x, y).

3 Rappels sur les matrices définies positives

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice d'ordre n symétrique (i.e, $a_{ij} = a_{ji}, 1 \leq i, j \leq n$).

- A est dite définie positive si

$$x^\top A x > 0, \ \forall \, x \neq 0 \ \text{ et } \ x \in \mathbb{R}^n.$$

On dit aussi la forme quadratique $x^\top A x$ est définie positive.

- A est dite semi-définie positive si

$$x^\top A x \geqslant 0, \ \forall \, x \in \mathbb{R}^n.$$

Le résultat suivant permet de donner une caractérisation des matrices symétriques définies positives.

Théorème 3.1

Une matrice A symétrique est définie positive si et seulement si tous les mineurs principaux successifs de la matrice A sont strictement positifs.

Note :

- Les mineurs principaux successifs sont les déterminants des sous matrices carrées obtenues en éliminant successivement la dernière ligne et la dernière colonne.

- Pour une matrice $n \times n$, il y a n mineurs principaux.

Exemple 3.1 :

- Par exemple, si on considère la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- alors les trois mineurs principaux sont les trois déterminants

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Note : Nous ne pouvons pas affirmer ou non qu'une matrice est semi-définie positive pour le fait que les mineurs principaux sont positifs ou nuls !

Exemple 3.2 :

- Soit la matrice A donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Alors, on a ses mineurs principaux

$$a_{11} = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 25 = 13$$

Puisque tous les mineurs principaux sont strictement positifs, A est définie positive.

- Soit une autre matrice A donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

On a

$$a_{11} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Tous les mineurs principaux de A sont positifs ou nuls, et pourtant la matrice A n'est pas semi-définie positive. En effet, calculons $x^\top Ax$

$$\begin{aligned}(x,y,z)\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} &= (x,y,z)\begin{pmatrix}z\\ -y-z\\ x-y+z\end{pmatrix}\\ &= 2xz-2yz-y^2+z^2\end{aligned}$$

Ainsi en prenant $(x,y,z)=(0,1,0)$, on observe que $(0,1,0)A\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = -1 < 0.$

Note : Soit A une matrice symétrique. Alors on a les résultats suivants :

- A est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
- A est semi-définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles.

4 Ensembles et fonctions convexes

Dans les poblèmes d'optimisation, avec ou sans contraintes, une notion va jouer un rôle très important : celle de convexité [3].

4.1 Ensembles convexes

Définition 4.1

- Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si et seulement si :

$$\left.\begin{array}{l}\forall\, x \in S\\ \forall\, y \in S\\ \forall\, \lambda \in [0,1]\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in S.$$

- C'est équivalent à dire que :

$$\left.\begin{array}{l}\forall\, x \in S\\ \forall\, y \in S\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ le segment } [x,y] \subset S.$$

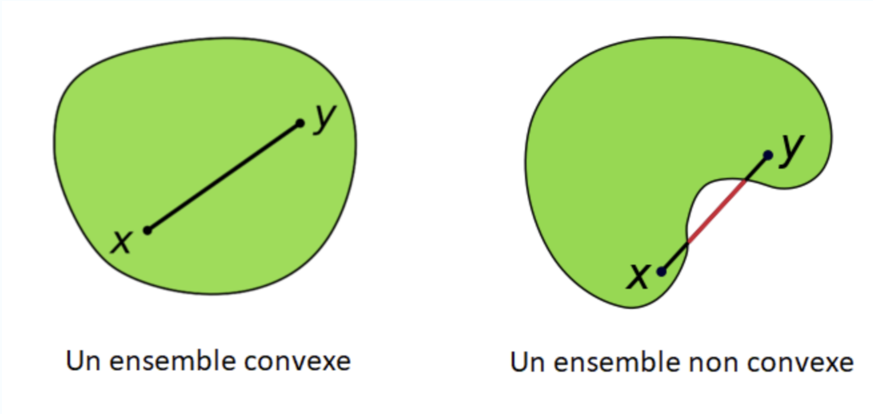


FIGURE 1.2 – Convexité d'un ensemble.

Exemple 4.1 : Soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et soit c un nombre réel. On appelle **hyperplan** l'ensemble $H = \left\{x \in \mathbb{R}^n,\ a^\top x = c\right\}$.

Note : Un hyperplan est convexe.

4.2 Fonctions convexes

Définition 4.2

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe. On dit que :

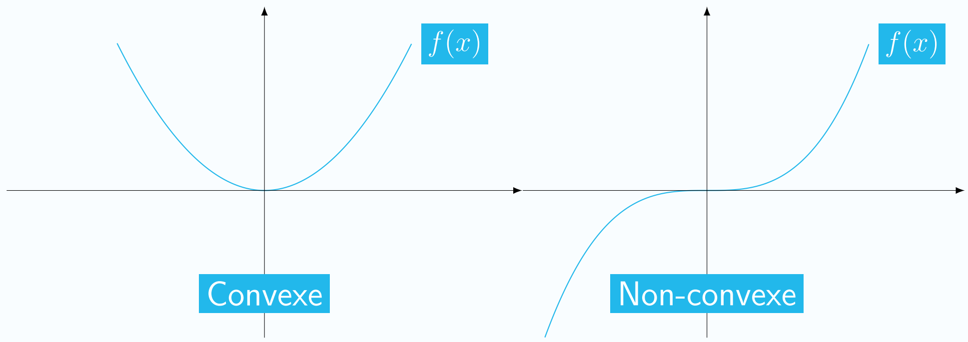
1. $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe, si elle vérifie pour tout $x,\ y \in S$ et tout $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

2. f est dite strictement convexe, si elle vérifie pour tout $x,\ y \in S$ et tout $\lambda \in]0, 1[$

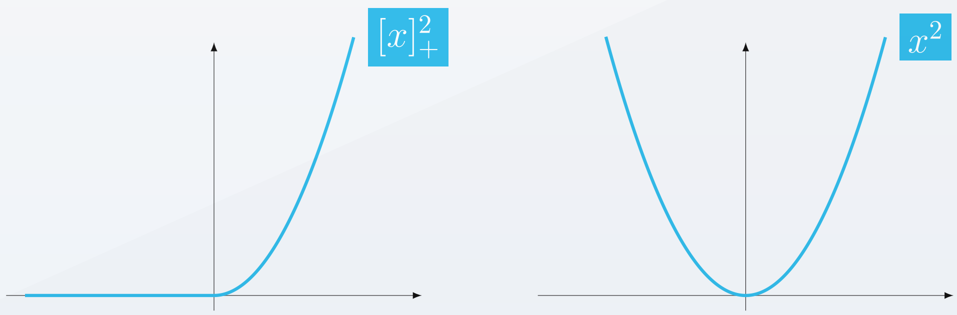
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Géométriquement, une fonction est convexe si le segment joignant deux points du graphe se situe au dessus de celui-ci.



Exemple 4.2 :

- La fonction $f(x) = [x]_+^2$ est convexe, où par définiton $[x]_+ = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$.



- Alors que les fonctions $g(x) = e^x$ et $h(x) = x^2$, sont strictement convexes.

Propriété 4.1

1. La somme de deux fonctions convexes est convexe.
2. Le produit d'une fonction convexe par un scalaire positif est convexe.

Théorème 4.1

Soit $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, où S est un ensemble convexe. La fonction f est convexe si et seulement si $\forall\ x,\ y \in S,\ f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x)$.

Preuve :

- **Condition nécessaire :**
  - ✓ Supposons que f est convexe. Alors $\forall\ \alpha \in [0,1]$,

$$f(\alpha y + (1-\alpha)x) \leqslant \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x)$$
$$\frac{f(x + \alpha(y-x)) - f(x)}{\alpha} \leqslant f(y) - f(x),\ \forall\ \alpha \in]0,1].$$

- ✓ En passant à la limite vers 0 en α, on obtient

$$\nabla f(x)^\top (y-x) \leqslant f(y) - f(x)$$

Condition suffisante :

- ✓ Supposons que $f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^\top (y-x)$, $\forall\ x, y \in S$. Fixons $x_1, x_2 \in S$ (mais quelconques) et $\alpha \in [0,1]$. Posons

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in S \quad (\text{car } S \text{ est convexe}), \text{ et } \; y = x_1.$$

Alors, on a :

$$f(x_1) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^\top (x_1 - x) \tag{1.4}$$

- ✓ Puis fixons $y = x_2$. Alors, on a :

$$f(x_2) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^\top (x_2 - x) \tag{1.5}$$

- ✓ Multiplions (1.4) par α et (1.5) par $(1-\alpha)$ et ajoutons ces termes membre à membre, on obtient

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^\top \underbrace{(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 - x)}_{=0}$$

donc $\; f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$. □

Exemple 4.3 :

- Soit la fonction $f(x) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = a_0 + a^\top x$. Alors, on a

$$\nabla f(x) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^\top = a.$$

D'autre part, on a

$$f(y) - f(x) = a^\top (y-x) \;\text{ et }\; \nabla f(x)^\top (y-x) = a^\top (y-x).$$

On peut donc noter l'égalité $f(y) - f(x) = \nabla f(x)^\top (y-x)$, et en déduire donc que f est convexe.

- Soit la fonction $f(x_1, x_2) = |x_1|$. Cette fonction n'est pas de classe C^1 mais elle est convexe. En effet, pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ on a

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1-\alpha)y) &= f(\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1, \alpha x_2 + (1-\alpha)y_2) \\ &= |\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1| \\ &\leq \alpha |x_1| + (1-\alpha)|y_1| \end{aligned}$$

donc $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$.

Théorème 4.2

Soit $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors f est convexe si et seulement si pour tout $x \in S$, la matrice Hessienme $H(x)$ est semi-définie positive.

Preuve :

- **Condition nécessaire :**
  - ✓ Soit $x \in S$ et soit $z \in \mathbb{R}^n$. Il existe un $t \in \mathbb{R}$ (suffisamment petit) tel que $x + tz \in S$.
  - ✓ D'après la formule de Taylor, on a :

    $$f(x+tz) = f(x) + t\nabla f(x)^\top z + \frac{1}{2}t^2 z^\top H(\xi)z,$$

    où $\xi = \alpha x + (1-\alpha)(x+tz)$, avec $\alpha \in]0,1[$.
  - ✓ Comme f est convexe, alors

    $$\begin{aligned} f(x+tz) &= f(x) + t\nabla f(x)^\top z + \frac{1}{2}t^2 z^\top H(\xi)z \\ &\geqslant f(x) + t\nabla f(x)^\top z \end{aligned}$$

    $$\text{i.e.,} \quad \frac{1}{2}t^2 z^\top H(\xi)z \geqslant 0 \Rightarrow z^\top H(\xi)z \geq 0$$

    Lorsque $t \longrightarrow 0$, on a $\xi \to x$ et $H(\xi) \to H(x)$, car $H \in C^0$ (puisque $f \in C^2$). D'où $z^\top H(x)z \geq 0$ et c'est vrai pour tout $z \in \mathbb{R}^n$.
- **Condition suffisante :**
  - ✓ D'après la formule de Taylor, on a pour tout $x, y \in S$:

    $$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^\top (y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^\top H(\xi)(y-x)$$

    avec $\xi \in [x,y] \subset S$ (car S est convere).
  - ✓ Or par hypothèse on a : $(y-x)^\top H(\xi)(y-x) \geq 0$ d'où,

    $$f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^\top (y-x),$$

    ce qui entraîne (d'après le Théorème 4.1) que f est convexe. □

Théorème 4.3

Si $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 et si la matrice Hessienne $H(x)$ en tout point x de S est définie positive alors f est strictement convexe.

Preuve :

- La formule de Taylor donne :

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^\top H(\xi)(y - x)$$

  où $x, y \in S$ et $\xi \in [x, y] \subset S$ (S convexe).

- Comme $H(z)$ est définie positive pour tout $z \in S$ alors

  $\frac{1}{2}(y - x)^\top H(\xi)(y - x) > 0, y \neq x,$ d'où $f(y) > f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x), \ \forall\, x, y \in S.$

- Fixons, $x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2$ (quelconques) et soit $\lambda \in]0, 1[$. Posons $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$ et $y = x_1$, on a :

$$f\left(x_1\right) > f(x) + \nabla f(x)^\top \left(x_1 - x\right) \tag{1.6}$$

  De même en posant $y = x_2$, on obtient

$$f\left(x_2\right) > f(x) + \nabla f(x)^\top \left(x_2 - x\right) \tag{1.7}$$

- Multiplions (1.6) par λ et (1.7) par $(1 - \lambda)$ et ajoutons terme à terme, on obtient

$$\lambda f\left(x_1\right) + (1 - \lambda) f\left(x_2\right) > f(x) + \nabla f(x)^\top \underbrace{(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x)}_{= 0}$$

$$\text{d'où} \quad f\left(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\right) < \lambda f\left(x_1\right) + (1 - \lambda) f\left(x_2\right),$$

  pour tous $x_1, x_2 \in S,\ x_1 \neq x_2$ et pour tout $\lambda \in]0, 1[$. □

Note : Dans le théorème précédent, la condition sur la matrice Hessienne est une condition suffisante mais pas nécessaire.

Les notions d'ensemble convexe et de fonction convexe sont reliées par ce résultat :

Théorème 4.4

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors pour tout M fini l'ensemble $S_M = \{x \in C, f(x) \leq M\}$ est convexe.

Preuve :

- Soit $x, y \in S_M$, donc on a $x, y \in C$ (par définition de S_M) et comme C est convexe alors $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$, pour tout $\alpha \in [0, 1]$.

- Comme f est convexe, alors

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &\leqslant \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) \\ &\leqslant \alpha M + (1 - \alpha)M = M \end{aligned}$$

  c'est-à-dire que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in S_M$. □

Exemple 4.4 : Soit la fonction convexe $f(x,y) = |x| + y^2$; l'ensemble

$$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \leq 2\}$$

est alors convexe.

Le résultat suivant montre que la notion de solution locale et globale est identique dans le cas des progammes convexes.

Théorème 4.5

Pour un programme convexe de la forme

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in S \end{cases}$$

où S est un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe, tout optimum local est aussi optimum global.

Preuve :

- Soit x^* un optimum local. Pour montrer que x^* est un optimum global, considérons $y \in S$, $y \neq x^*$ quelconque et montrons que nécessairement $f(x^*) \leq f(y)$.
- Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe au moins un $y \in S$ $(y \neq x^*)$ tel que $f(x^*) > f(y)$.
- Comme f est convexe et que S est convexe alors pour tout $\alpha \in]0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f(x^* + \alpha(y - x^*)) &= f(\alpha y + (1-\alpha)x^*) \\ &\leqslant \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x^*) \\ &< f(x^*), \quad \text{car} \quad \alpha(f(y) - f(x^*)) < 0, \ \forall\, \alpha \in]0,1]. \end{aligned}$$

D'où la contradiction car x^* est un optimum local (il suffit de prendre α assez petit). □

Note : La démonstration du théorème précédant en y introduisant les contraintes $g_i(x) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$ est la même à condition que toutes les fonctions g_i soient convexes.

Bibliographie :

[1] **V. Karmanov. Programmation mathématique. Editions Mir, Moscou, 1977.**

[2] **M. Minoux. Programmation mathématique. Théorie et algorithmes. Lavoisier, Paris, 2008.**

[3] **B. T. Polyak. Introduction to Optimization. Optimization Software, New York, 1987.**