UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Arithmétique (MATH 1413) - Chapitre 5: Les nombres entiers

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

- ✓ Le contexte fondamental pour l'arithmétique élémentaire est celui des nombres naturels [1].
- ✓ C'est pourquoi une partie majeure du cours est consacrée à l'étude des entiers naturels $\mathbb{N}$ et des opérations qui s'y exécutent $(+, \times, -, \div)$.
- ✓ On peut effectuer sans restriction l'addition et la multiplication dans les entiers naturels ($\mathbb{N}$ est fermé ou stable).
- ✓ Ce qui n'est pas le cas avec la soustraction ou la division.
- ✓ On va étudier ici un ensemble de nombres qui sera fermé par rapport à ces deux dernières opérations: les **Nombres Entiers**.

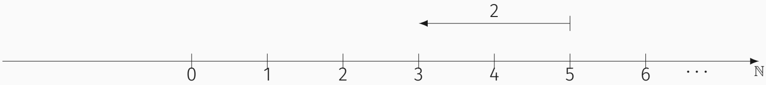
Les entiers

✓ La différence $b - a$ de deux naturels donnés est le naturel z qui, lorsqu'il existe, satisfait à l'égalité caractéristique de la différence

$$z = b - a \quad \Longleftrightarrow \quad a + z = b.$$

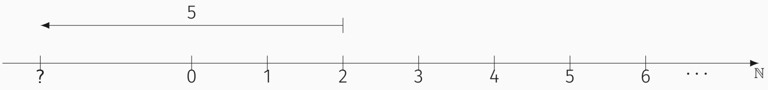
✓ Ainsi la différence $5 - 2$ existe dans $\mathbb{N}$, puisque $2 + 3 = 5$.

✓ Dans la droite numérique, la différence $5 - 2$ aboutit par un déplacement de 2 unités vers la gauche à partir du point 5.



✓ Cependant, la différence $2 - 5$ n'existe pas dans $\mathbb{N}$, puisqu'il n'y a pas de nombre naturel qui ajouté à 5, donne 2.

✓ D'un point de vu géométrique, la différence $2 - 5$ aboutit par un déplacement de 5 unités vers la gauche à partir de 2.



✓ **Notre objectif est d'identifier un ensemble de nombres dans lequel tout problème de soustraction de naturels a une solution.**

✓ C'est cette intuition que cherche à formaliser la discussion du chapitre.

Définition

- On appelle **ensemble des entiers**, l'ensemble formé de toutes les différences de deux nombres naturels.
- On le désigne par le symbole $\mathbb{Z}$ et le décrit comme suit

$$\mathbb{Z} = \{b - a \mid a, b \in \mathbb{N}\}.$$

✓ L'ensemble des **entiers naturels** est

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}.$$

✓ Alors que l'ensemble des **entiers** est

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\} \cup \{?, ?, ?, ?, ?, ?, \cdots\}.$$

✓ Notons d'abord qu'on a bel et bien $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Exemple 1.1:

- ✓ Le naturel 3 peut être vu comme la différence $5 - 2$.
- ✓ Mais notons qu'on a aussi $3 = 9 - 6$, ou encore $3 = 21 - 18$.
- ✓ Ou même, plus simplement, $3 = 3 - 0$.
- ✓ On avait évoqué ce procédé à travers le résultat suivant:

Corollaire

Soit $u, v, k \in \mathbb{N}$ tels que les différences $u - v$, $u - k$ et $v - k$ existent dans l'ensemble des naturels $\mathbb{N}$. Alors, nous avons le résultat

$$u - v = (u - k) - (v - k). \tag{1}$$

- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est muni des deux opérations d'**addition** et de **multiplication**.

- Ces deux opérations satisfont aux propriétés $A_1 - A_5$ et $M_0 - M_6$ lorsqu'elles sont appliquées à des éléments de $\mathbb{Z}$.

Exemple 1.2:

- ✓ Par exemple, l'addition dans les entiers est **commutative**, **associative**, etc.

- ✓ Même si on ne sait pas encore comment évaluer la somme $a + b$ ou le produit $a \times b$ pour a et b quelconques appartenant à $\mathbb{Z}$.

- ✓ Cependant, remarquons que lorsque a et b sont tous deux des naturels, on sait comment évaluer $a + b$ ou $a \times b$.

- ✓ **Mais il nous reste à régler le cas de calculs où l'un ou l'autre des termes est négatif.**

L’opération d’opposition

L'opposé d'un naturel

- ✓ Soit le problème de soustraction $b+? = a$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a < b$.
- ✓ Nous sommes face à un problème qui n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.
- ✓ Considérons néanmoins la différence $a - b$ et appliquons lui les manipulations qui résultent du résultat (1):
  - ⋆ Voici par exemple ce que cela donne pour la différence
  $$2 - 5 = 1 - 4 = 0 - 3.$$
  - ⋆ C'est-à-dire la différence $2 - 5$, qui résulte du problème $5+? = 2$, est aussi solution du problème $3+? = 0$.
  - ⋆ De même $24 - 41 = 23 - 40 = \cdots = 2 - 19 = 1 - 18 = 0 - 17$;
  - ⋆ $24 - 41$ est donc solution du problème $17+? = 0$.

✓ Ceci nous amène donc aux deux constats équivalents suivants:

- Tout problème de soustraction $b+? = a$, avec $a, b \in \mathbb{N}, a < b$, est équivalent à un problème de la forme $n+? = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$.
- Lorsqu'une différence de naturels $a - b$ n'est pas dans $\mathbb{N}$, elle est égale à une différence de la forme $0 - n$, avec $n \in \mathbb{N}^\star$.

Définition

- Soit $n \in \mathbb{N}$. La différence $0 - n$ s'appelle l'**opposé** de n et est notée $-n$.
- Le symbole $-n$ peut se lire **moins n**.
- L'opération unaire qui à n associe $-n$ s'appelle l'**opposition**.

✓ Le symbole $-n$ se veut donc une abréviation commode pour désigner la différence $0 - n$. Par définition, $-n$ satisfait à l'égalité

$$n + (-n) = 0.$$

On appelle cette dernière l'égalité caractéristique de l'opposé.

✓ **Chaque naturel n, nous donne donc un opposé $-n$:**

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto -0 \\ 1 &\mapsto -1 \\ 2 &\mapsto -2 \\ 3 &\mapsto -3 \\ &\vdots \\ 49 &\mapsto -49 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- ✓ En résumé, étant donné deux naturels quelconques a et b:

  - ⋆ ou bien la différence $a - b$ est un naturel.

    Cela se produit lorsque $a \geq b$; par exemple, $5 - 2 = 3 \in \mathbb{N}$.

  - ⋆ ou bien la différence $a - b$ est un opposé de naturel.

    Cela se produit lorsque $a \leq b$; par exemple, $2 - 5 = -3 \notin \mathbb{N}$.

- ✓ On forme ainsi un nouvel ensemble $\mathbb{Z}$ en ajoutant à $\mathbb{N}$ tous les opposés de naturels.

- ✓ Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, tout problème de soustraction de naturels peut s'effectuer.

Définition

On appelle ensemble des entiers, l'ensemble $\mathbb{Z}$ défini comme suit

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &= \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\} \cup \{-1, -2, -3, -4, -5, \cdots\}\end{aligned}$$

Exemple 2.1:

- ✓ Soit $z = 17$. Alors $-z = -17$ et $-(-z) = 17 = z$.
- ✓ Soit $m = -114$. Alors $-m = 114$ et $-(-m) = -114 = m$.

La droite numérique entière

✓ On introduire une représentation pour mieux concevoir les nombres entiers: la **droite numérique entière**.

✓ A noter que les entiers négatifs s’étendent indéfiniment vers la gauche à partir du point 0.

✓ Le lien entre un naturel donné et son opposé peut se voir en imaginant un miroir placé au point 0.

> **Un nombre entier et son opposé sont donc situés de part et d’autre de 0, à la même distance de celui-ci.**

Théorème

Quel que soit $m, n \in \mathbb{Z}$.

a. $-(-n) = n$.

b. $n = -n \iff n = 0$.

c. La différence de deux entiers est la somme du premier avec l'opposé du second: $m - n = m + (-n)$.

Exemple 2.2:

✓ $5 - 2 = 5 + (-2) = 3$.
(on fait un bond de longueur 2 vers la gauche à partir du point 5).

✓ $-4 - (-10) = -4 + - - 10 = -4 + 10 = 6$
(on fait un bond de longueur 10 vers la droite à partir du point -4).

L’ordre dans les entiers

L'ordre dans les entiers

Définition

Soit a et b deux nombres entiers, c'est-à-dire $a, b \in \mathbb{Z}$.

- Nous disons que a est plus petit ou égal à b, ce qui s'écrit $a \leq b$, si et seulement si la différence $b - a$ est dans $\mathbb{N}$.
- Si de plus cette différence est positive, nous disons alors que a est plus petit que b, et on écrit $a < b$.

✓ $\{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ est l'ensemble des entiers positifs.

✓ $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$ est l'ensemble des entiers non négatifs.

✓ $\{n \in \mathbb{Z} \mid n < 0\}$ est l'ensemble des entiers négatifs.

- Pour tous les nombres entiers m et n,

$$\boxed{m < n \quad \text{si et seulement si} \quad -n < -m}.$$

Note: Si n est à la droite de m, alors $-n$ est à la gauche de $-m$.

Exemple 3.1:

✓ Voici l'énumération des entiers selon leur ordre usuel, c'est-à-dire tels qu'on les rencontre sur la droite numérique:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

✓ Cette liste est illimitée à la fois vers la gauche et vers la droite.

✓ Nous avons $3 < 5$, alors $-5 < -3$.

✓ Et puisque $-5 < -3$, alors $3 < 5$.

- Pour tous les nombres entiers a, b et c,

$$\text{si } b < c \text{ et si } a < 0, \text{ alors } a \times b > a \times c$$

Note: Multiplier une inégalité par un nombre négatif renverse le sens de l'inégalité.

Exemple 3.2:

- ✓ Nous avons $12 < 25$, alors $5 \times 12 < 5 \times 25$;
- ✓ mais $-5 \times 12 > -5 \times 25$.
- ✓ $12 < 25$ et $-12 > -25$ (on a multiplié par -1).
- ✓ $-33 < 21$. En simplifiant par 3, on obtient $-11 < 7$; et en simplifiant par -3, on trouve $11 > -7$.
  (On utilise ici les égalités $-33 = 3 \times -11 = -3 \times 11$ et $21 = 3 \times 7$.)

- Quel que soit l'entier z, on a $z^2 \geq z$.

Exemple 3.3:

✓ Nous avons $2^2 > 2$, et $5^2 > 5$.

- L'inéquation $x + a < b$, où a et b sont des entiers, admet pour solution tout entier x qui satisfait $x < b - a$.

- De même, l'inéquation $x + a \leq b$ a pour solution les valeurs x telles que $x \leq b - a$.

Exemple 3.4:

✓ Soit l'inéquation $x + 5 > 2$. Additionnant -5 de chaque côté du signe d'inégalité, on obtient $x > 2 + (-5)$, c'est-à-dire $x > -3$.

- ⋆ Les valeurs suivantes de x vérifient donc l'inéquation de départ: $-2, -1, 0, 1, 2$, etc.
- ⋆ On dit alors que l'ensemble-solution de l'inéquation est

$$\{-2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}.$$

✓ Sachant que $x + 5 \leq 12$, on trouve $x \leq 12 - 5 = 7$.

- ⋆ Tout entier inférieur ou égal à 7 satisfait à l'inéquation.
- ⋆ L'ensemble-solution est donc $\{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, \cdots\}$.

La valeur absolue

Définition

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

- La valeur absolue de a (en symboles, $|a|$) désigne la distance, c'est-à-dire le nombre d'unités, séparant le point a du point 0.

$$|a| = |a - 0|$$

- Comme les distances sont toujours positives ou nulles, on a $|a| \geq 0$ quel que soit $a \in \mathbb{Z}$.

- C'est donc un nombre naturel qui est égal à a lui-même, lorsque a est positif ou nul, et à son opposé, lorsque a est négatif

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } \ a \geq 0 \\ -a & \text{si } \ a < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Exemple 4.1:

✓ $|-3| = -(-3) = 3$ ✓ $\left|\sqrt{2}-1\right| = \sqrt{2}-1$ ✓ $|3-\pi| = \pi - 3$

- Le symbole $\sqrt{}$ signifie «la racine carrée positive de».
- Donc, $\sqrt{r} = s$ signifie $s^2 = r$ et $s \geq 0$.
- De ce fait, **l'équation $\sqrt{a^2} = a$ n'est pas toujours vraie (elle n'est vraie que si $a \geq 0$)**.
- Si $a < 0$, alors $-a > 0$ et donc $\sqrt{a^2} = -a$.
- Compte tenu de la définition en (2), l'équation suivante est vraie pour toute valeur de a

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

Exemple 4.2:

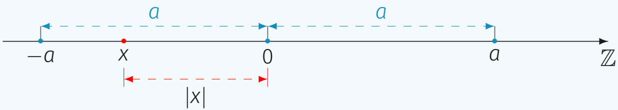
✓ $\sqrt{(-5)^2} = |-5|$

✓ $\sqrt{(2x-5)^2} = |2x-5|$

Pour résoudre des équations ou des inéquations qui contiennent des valeurs absolues, il est souvent utile de faire appel aux énoncés suivants.

On suppose que l'entier $a > 0$. Alors

- $|x| = a$ si et seulement si $x = \pm a$.
- $|x| < a$ si et seulement si $-a < x < a$



- $|x| > a$ si et seulement si $x > a$ ou $x < -a$.

- ✓ On peut, grâce à la notion de valeur absolue, définir de façon générale la distance de deux entiers quelconques.

- ✓ L'idée intuitive est qu'il s'agit de la longueur du segment de la droite numérique entière reliant ces deux points.

- La distance de deux entiers a et b est donnée par $|a - b|$, la valeur absolue de leur différence.

- On écrit $d(a, b)$ pour désigner la distance de a et b:

$$d(a, b) = |a - b|.$$

Note: Lorsque $b = 0$, on a $d(a, 0) = |a - 0| = |a|$.

Exemple 4.3:

- ✓ $d(6,10) = |6-10| = |-4| = 4.$
- ✓ $d(-6,-10) = |-6-(-10)| = |4| = 4.$
- ✓ $d(-6,10) = |-6-10| = |-16| = 16.$
- ✓ $d(6,-10) = |6-(-10)| = |16| = 16.$

Note: Le calcul de la distance de deux points est indépendante de l'ordre des deux points:

$$d(a,b) = d(b,a)$$

Les quatre opérations dans les entiers

- ✓ Nous allons examiner chacune des quatre opérations arithmétiques de base afin de déterminer des règles de calcul permettant de les effectuer.
- ✓ Pour faire un calcul dans $\mathbb{Z}$, on se ramènera à un calcul dans $\mathbb{N}$ en ajustant le signe.
- ✓ Dans toute cette section, les variables m et n représentent des entiers positifs, c'est-à-dire $m, n \in \mathbb{N}$.

- ✓ Soit donc à évaluer la somme $m + (-n)$, pour $m, n \in \mathbb{N}$.
  - ⋆ Lorsque $m \geq n$, alors nous avons $m + (-n) = m - n$.

    Note: La somme $m + (-n)$ égale à la différence $m - n$ que l'on sait évaluer dans $\mathbb{N}$.

  - ⋆ Lorsque $m < n$, alors nous avons $m + (-n) = -(n - m)$.

    Note: Il s'agit donc de faire le calcul dans $\mathbb{N}$ de la différence $n-m$, puis d'en prendre l'opposé.

- ✓ Comme l'addition est commutative dans $\mathbb{Z}$, on effectuera $-n + m$ de la même façon.

Addition de deux entiers négatifs

- ✓ On veut évaluer la somme $(-m) + (-n)$, pour $m, n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$(-m) + (-n) = -(m+n)$$

.

Note: Il s'agit simplement d'évaluer une somme dans $\mathbb{N}$, puis d'en prendre l'opposé.

Exemple 5.1:

- ✓ $6 + (-4) = 6 - 4 = 2.$
- ✓ $4 + (-6) = -(6 - 4) = -2.$
- ✓ $-6 + (-4) = -(6 + 4) = -10.$

- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est fermé pour l'addition.

✓ Le calcul d'une différence dans $\mathbb{Z}$ peut se voir comme celui d'une somme.

✓ Il obéit donc aux règles qu'on vient de voir et ne nécessite pas de commentaires additionnels.

Exemple 5.2:

✓ $4 - 6 = 4 + (-6) = -(6 - 4) = -2.$

✓ $(-4) - 6 = (-4) + (-6) = -(4 + 6) = -10.$

✓ $4 - (-6) = 4 + (-(-6)) = 4 + 6 = 10..$

- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est fermé pour la soustraction.
- Autrement dit, tout problème de soustraction dans $\mathbb{Z}$ y admet une solution.

✓ Soit donc à évaluer le produit $m \times (-n)$, pour $m, n \in \mathbb{N}^\star$.

- ⋆ Nous avons $m \times (-n) = -(m \times n)$.

  Note: Il s'agit de l'opposé du produit des deux naturels m et n.

- ⋆ De même $(-m) \times n = -(m \times n)$.

Exemple 5.3:

✓ $6 \times (-4) = -(6 \times 4) = -24 = (-6) \times 4$.

- ✓ On veut évaluer la produit $(-m) \times (-n)$, pour $m, n \in \mathbb{N}^{\star}$.
  - ⋆ Nous avons $(-m) \times (-n) = m \times n$.

Note: On se trouve à évaluer un produit dans $\mathbb{N}$.

Exemple 5.4:

- ✓ $(-6) \times (-4) = -(-(6 \times 4)) = 24$.

- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est fermé pour la multiplication.

Règle des signes

- Le produit de deux nombres de même signe est positif:

  «plus par plus» et «moins par moins» donnent «plus».

- Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif:

  «plus par moins» et «moins par plus» donnent «moins».

- ✓ Le problème de la division dans $\mathbb{Z}$ est bien sûr la recherche d'un entier qui satisfait à l'égalité $a\times ? = b$, avec a et b appartenant à $\mathbb{Z}$.

- ✓ Par exemple, les problèmes de la division

$$3\times ? = -24, \quad -3\times ? = 24 \quad \text{et} \quad -3\times ? = -24,$$

ont touts les trois pour solution -8 et 8, respectivement.

- ✓ Par ailleurs, les problèmes suivants

$$3\times ? = -25, \quad \text{et} \quad -3\times ? = -25,$$

n'ont pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Etant donné deux entiers a et b (avec $a \neq 0$), nous disons que a divise b lorsque le problème de la division $a\times ? = b$ a une solution dans $\mathbb{Z}$. Notation: $a|b$.

Exemple 5.5:

- ✓ $4|(-12)$, car $4 \times (-3) = -12$.
- ✓ $-4|12$, car $-4 \times (-3) = 12$.
- ✓ $-4| - 12$, car $-4 \times 3 = -12$.
- ✓ $4|12$, car $4 \times 3 = 12$.
- ✓ $div\ 6 = div\ (-6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

- Les exemples précédents illustrent le fait que l'affirmation $a|b$ est équivalente à chacune des suivantes:

$$a|(-b), \quad (-a)|b, \quad (-a)|(-b).$$

- Autrement dit, l'opération d'opposition n'affecte en rien la divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

- ✓ Pour $m, n \in \mathbb{N}^\star$ tels que le quotient $m \div n$ soit défini, alors:
  - ⋆ nous avons
$$m \div (-n) = (-m) \div n = -(m \div n).$$
  - ⋆ Nous avons également
$$(-m) \div (-n) = m \div n.$$
- ✓ Si on utilise la notation fractionnaire pour désigner le quotient, on a donc, pour un quotient $\frac{m}{n}$ défini dans $\mathbb{N}$:
$$\frac{m}{-n} = \frac{-m}{n} = -\left(\frac{m}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{-m}{-n} = \frac{m}{n}.$$

Exemple 5.6:

- ✓ $-12 \div 4 = -(12 \div 4) = -3.$
- ✓ $12 \div (-4) = -(12 \div 4) = -3.$
- ✓ $-12 \div (-4) = 12 \div 4 = 3.$

Survol de la théorie des nombres dans les entiers

- Les nombres pairs sont tous les nombres de la forme $n = 2k$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$:

$$\text{Pairs } = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

- Ainsi, voici la liste des entiers pairs (c'est-à-dire des multiples de 2):

$$\cdots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots$$

- Les nombres impairs sont tous les nombres de la forme $n = 2k + 1$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$:

$$\text{Impairs } = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

- Ainsi, voici la liste des entiers impairs:

$$\cdots, -7, -5, -3, 1, 3, 5, 7, \cdots$$

- Le PGCD de deux entiers a et b est le plus grand entier divisant à la fois a et b; il est bien sûr positif.

- Quant au PPCM, on le définit comme le plus petit multiple positif commun à a et à b.

Exemple 6.1: $\mathbf{PGCD}(9,-12)=3$ et $\mathbf{PPCM}(9,-12)=36$.

✓ On a en effet d'une part

$$\begin{aligned} \operatorname{div} 9 &= \{-9,-3,-1,1,3,9\}, \\ \operatorname{div} -12 &= \{-12,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,6,12\}, \\ \operatorname{div} 9 \cap \operatorname{div} -12 &= \{-3,-1,1,3\}. \end{aligned}$$

✓ Et d'autre part

$$\begin{aligned} \operatorname{mult} 9 &= \{\cdots, -45,-36,-27,-18,-9,0,9,18,27,36,45,\cdots\}, \\ \operatorname{mult} -12 &= \{\cdots, -60,-48,-36,-24,-12,0,12,24,36,48,60,\cdots\}, \\ \operatorname{mult} 9 \cap \operatorname{mult} -12 &= \{\cdots, -72,-36,0,36,72,\cdots\}. \end{aligned}$$

- Etant donné deux entiers a et b, avec $a > 0$, la division euclidienne de b par a donne de façon unique un quotient (euclidien) q et un reste r déterminés par les conditions

$$b = q \times a + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < a.$$

Exemple 6.2:

- ✓ $a = 4, b = 17.$ Comme $17 = 4 \times 4 + 1$, on a $q = 4$ et $r = 1$.
- ✓ $a = 4$ et $b = -17.$ L'égalité $-17 = -5 \times 4 + 3$ nous donne $q = -5$ et $r = 3$.

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)
- Disponibilités:
  - Lundi 10H00 - 13H00, MRR B-214
  - Mercredi 10H00 - 13H00, MRR B-214
- Manuels du cours:

[1] B. Hodgson and L. Lessard.
***Arithmétique élémentaire* (1re *et* 2^{e} *parties*).**
coop Université Laval, Québec, Canada, 2002.