



UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Calcul Différentiel (MATH 1073) - Annexe A: Intervalles, inégalités et valeurs absolues



Ibrahima Dione



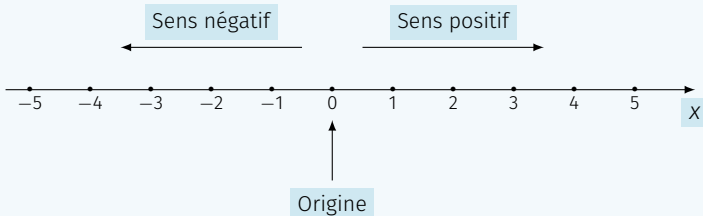
Département de Mathématiques et de Statistique

- Intervalles
- Les inégalités
- La valeur absolue
- Exercices suggérés

Intervalles

Droite réelle

Nous pouvons géométriquement représenter les nombres réels par des points sur une droite.



Définition

Un **intervalle** est l'ensemble des nombres compris entre deux valeurs réelles a et b . Par exemple, si $a < b$:

- L'**intervalle ouvert** de a jusqu'à b noté $]a, b[$, est décrit par

$$]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$$


Note: Les extrémités de l'intervalle, a et b , sont exclues.

- L'**intervalle fermé** de a jusqu'à b noté $[a, b]$, est décrit par

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$


Note: Les extrémités de l'intervalle, a et b , sont comprises.

Définition

Un **intervalle** est également l'ensemble des nombres supérieurs (ou inférieurs, ou supérieurs ou égaux, ou inférieurs ou égaux) à une valeur réelle a . Par exemple:










- L'intervalle infini, défini par l'ensemble des nombres réels supérieurs à a , est représenté par

$$]a, +\infty[= \{x \mid x > a\} \quad \begin{array}{c} | \\ \text{---} \circ \text{---} \longrightarrow +\infty \\ a \end{array}$$

- L'intervalle infini, défini par l'ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à a , est représenté par

$$[a, +\infty[= \{x \mid x \geq a\} \quad \begin{array}{c} | \\ \text{---} \bullet \text{---} \longrightarrow +\infty \\ a \end{array}$$

Note: Le symbole $+\infty$ ne sert qu'à indiquer que l'intervalle s'étend indéfiniment du côté positif.

Notation	Description ensembliste	Représentation graphique
$]a, b[$	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b[$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$]a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
$]a, \infty[$	$\{x \mid x > a\}$	
$[a, \infty[$	$\{x \mid x \geq a\}$	
$] - \infty, b[$	$\{x \mid x < b\}$	
$] - \infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$] - \infty, \infty[$	\mathbb{R} (ensemble des nombres réels)	

Les inégalités

Soit a, b, c et d des nombres réels.

1. Si $a < b$, alors $a + c < b + c$.

Exemple 2.1: $4 < 10$, donc $4 - 2 < 10 - 2 \implies 2 < 8$

2. Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.

Exemple 2.2: $4 < 5$ et $1 < 10$, donc $4 + 1 < 5 + 10 \implies 5 < 15$

3. Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$.

Exemple 2.3: $-6 < -3$ et $2 > 0$, donc $(-6)(2) < (-3)(2) \implies -12 < -6$

4. Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$.

Exemple 2.4: $-6 < -3$ et $-2 < 0$, donc $(-6)(-2) > (-3)(-2) \Rightarrow 12 > 6$

5. Si $0 < a < b$, alors $1/a > 1/b$.

Exemple 2.5: $0 < 2 < 3$, donc $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

Attention !

Quand on multiplie (ou on divise) les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif, il faut changer le sens de l'inégalité.

Exemple 2.6: $-9 < -3x < 3 \Rightarrow 3 > x > -1$

Exemple 2.7:

▷ Résolvez l'inégalité $1 + x < 7x + 5$.

► Résolvez l'inégalité $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

▷ Résolvez $x^3 + 3x^2 > 4x$.

La valeur absolue

Définition

- La **valeur absolue** d'un nombre réel a , noté $|a|$, est définie par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad (1)$$

- D'un point de vue géométrique, la valeur absolue $|a|$ est la distance entre le point a et l'origine sur la droite numérique.



- Comme les distances sont toujours positives ou nulles, on a $|a| \geq 0$ quel que soit a .

Exemple 3.1:

- $|-3| = 3$

- $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$

- $|3 - \pi| = \pi - 3$

Exemple 3.2: Comment écrire $|3x - 2|$ sans employer le symbole de valeur absolue.

- ▶ Le symbole $\sqrt{\quad}$ signifie «la racine carrée positive de».
- ▶ Donc, $\sqrt{r} = s$ signifie $s^2 = r$ et $s \geq 0$.
- ▶ De ce fait, l'équation $\sqrt{a^2} = a$ n'est pas toujours vraie (elle n'est vraie que si $a \geq 0$).
- ▶ Si $a < 0$, alors $-a > 0$ et donc $\sqrt{a^2} = -a$.
- ▶ Compte tenu de la définition en (1), l'équation suivante est vraie pour toute valeur de a

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Exemple 3.3:

- $\sqrt{(-5)^2} = |-5|$

- $\sqrt{(2x-5)^2} = |2x-5|$

Propriétés des valeurs absolues

Soit a et b des nombres réels et n un entier. Alors, on a

$$\begin{array}{lll} 1. & |ab| = |a||b| & 2. \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0) \quad 3. \quad |a^n| = |a|^n \end{array}$$

Exemple 3.4:

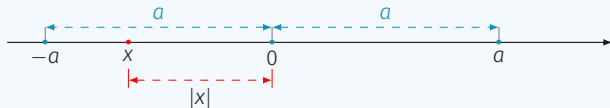
- $|(-4)8| = |-4||8| = 4 \times 8 = 32.$
- $\left| \frac{-6}{7} \right| = \frac{|-6|}{|7|} = \frac{6}{7}.$
- $|(-2)^5| = |-2|^5 = 2^5 = 32.$

Pour résoudre des équations ou des inéquations qui contiennent des valeurs absolues, il est souvent utile de faire appel aux énoncés suivants.

On suppose $a > 0$. Alors

4. $|x| = a$ si et seulement si $x = \pm a$.

5. $|x| < a$ si et seulement si $-a < x < a$



6. $|x| > a$ si et seulement si $x > a$ ou $x < -a$.

On suppose a et b des nombres réels quelconques. Alors

7. la distance entre a et b est la valeur absolue de la différence, à savoir $|a - b|$, qui est aussi égale à $|b - a|$.



Longueur d'un segment = $|a - b|$

Exemple 3.5:

- Résolvez $|2x - 5| = 3$.

Exemple 3.6:

- Résolvez $|x - 5| < 2$.

- Résolvez $|3x + 2| \geq 4$.

Exercices suggérés

1. Résoudre

$$\star |x^2 - 3x| \geq 4$$

$$\star x^3 \leq x^2 + 6x$$

$$\star |x - 1| = -x$$

2. Écrivez les expressions suivantes sans le symbole de valeur absolue (en simplifiant votre réponse le plus possible).

$$\star 3x + |x - 4|$$

$$\star |x^2 - 4|$$

$$\star |x^2 - 6x - 7|$$

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)

- Disponibilité:

Lundi 13:00 - 15:00, MRR B-214

Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214

Jeudi 12:00 - 13:15, MRR B-214