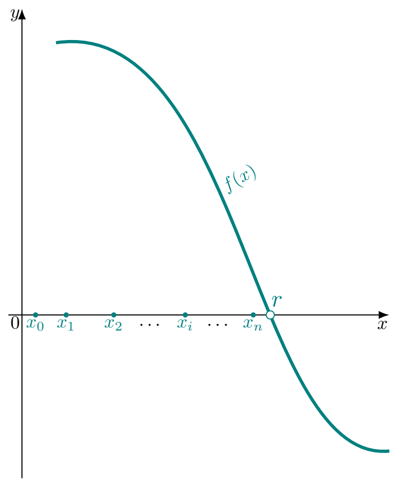
Approximation de racines d'équations non linéaires

Sommaire



Nous étudions ici, un des problèmes de calcul scientifique le plus rencontré qui consiste à déterminer la solution d'une fonction $f(x)$.

Note: On dit que r est une racine (ou solution) de $f(x)$, si

$$f(r) = 0. \tag{2.1}$$

Bien qu'il existe un procédé classique de résolution de l'équation (2.1) si $f(x)$ est une fonction polynômiale de degré un, deux, trois voire quatre, on ne sais cependant pas déterminer la racine si $f(x)$ est un polynôme de degré plus élevé (a fortiori pour une fonction non polynômiale). Dans de nombreux cas, on ne peut que localiser les solutions et le cas échéant calculer des valeurs numériques approximatives.
Dans ce chapitre, on va étudier les principales méthodes itératives de base dont l'objectif est de générer une suite de solutions approximatives x_i pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$, de la racine r. Nous nous intéresserons à la méthode de la bissection et les méthodes de points fixe (en particulier à la méthode de Newton et la méthode de la sécante).

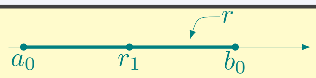
1 Méthode de la bissection

1.1 - Principe et algorithme de la méthode

La méthode de la bissection est une procédure qui, à plusieurs reprises, divise à moitié l'intervalle dans lequel la racine de l'équation $f(x) = 0$ a été localisée. Ce processus de *réduction de moitié d'intervalle* est réitéré jusqu'à ce que la précision ε_a souhaitée soit atteinte.

Méthode : Si la fonction continue $f(x)$ possède un changement de signe dans l'intervalle $[a_0, b_0]$, c'est à dire si $f(x)$ vérifie $f(a_0) * f(b_0) < 0$, alors elle admet une racine dans cette intervalle. Ainsi, la détermination de valeurs approximatives de cette racine par la méthode de la bissection reposera sur la démarche suivante :

a) Calculer le point médian $r_1 := \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ de l'intervalle $[a_0, b_0]$ et évaluer $f(r_1)$.
   - S'il se produit par hasard que $f(r_1) = 0$, alors la racine est trouvée, c'est à dire $r = r_1$.
   - Sinon, c'est à dire si $f(r_1) \neq 0$, alors on a un des cas suivants :



∗ soit $f(r_1) \times f(a_0) < 0$, ce qui implique $r \in [a_0, r_1]$,
∗ ou bien $f(r_1) \times f(a_0) > 0$, et dans ce cas $r \in [r_1, b_0]$.

La conséquence de ce point est la réduction de moitié de l'intervalle $[a_0; b_0]$; le nouveau intervalle sera $[a_1, b_1] := [a_0, r_1]$ ou bien $[a_1, b_1] := [r_1, b_0]$ et contient la racine :

$r \in [a_1, b_1]$ avec une longueur d'intervalle $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$ et une erreur absolue $|r - r_1| \leq (b_1 - a_1)$

b) De toute évidence, en répétant ce processus avec le nouvel intervalle à chaque fois, on génère ainsi une séquence d'intervalles $\{[a_n, b_n] : n \geq 1\}$ et de point milieu $\{r_n : n \geq 1\}$ telles que

$$r \in [a_n, b_n], \text{ avec une approximation de la racine } r_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}), \tag{2.2}$$

$$\text{avec une longueur } b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \text{ et une erreur absolue } |r - r_n| \leq (b_n - a_n)$$

c) On arrête ce processus, lorsque la longueur de l'intervalle $[a_n, b_n]$ est relativement faible par rapport à r_n.

A la fin de ce processus, la meilleure estimation de la racine r est la dernière valeur de r_n calculée dans (2.2).

La méthode de bissection est mis en oeuvre dans l'algorithme suivant :

Algorithme 1.1: Algorithme [a] de la bissection

1. Étant donné un intervalle $[a_0, b_0]$ pour lequel $f(x)$ possède un changement de signe
2. Étant donné ε_a, le critère d'arrêt, et N, le nombre maximal d'itérations
3. Poser
$$r_n := \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$$
4. Si $\frac{|b_0 - a_0|}{2|r_n|} < \varepsilon_a$
   * convergence atteinte
   * écrire la racine r_n
   * écrire $f(r_n)$
   * arrêt
5. Écrire a_0, b_0, r_n, $f(a_0)$, $f(b_0)$ et $f(r_n)$
6. Si $f(a_0) \times f(r_n) < 0$, alors $b_0 = r_n$
7. Si $f(a_0) \times f(r_n) > 0$, alors $a_0 = r_n$
8. Si le nombre maximal d'itérations N est atteint :
   * convergence non atteinte en N itérations
   * arrêt
9. Retour à l'étape 3

[a] André Fortin : Analyse numérique pour ingénieurs, Presses Internationales Polytechnique, Montréal, Québec (2016).

Remarque(s) :

- La quantité décrite au point 4 de cette algorithme, en l'occurrence,
$$\frac{|b_0 - a_0|}{2|r_n|}, \tag{2.3}$$
est une approximation de l'erreur relative. En effet, à chaque étape de cette division à moitié d'intervalle, la racine recherchée est soit dans $[a_0, r_n]$ ou dans $[r_n, b_0]$, qui sont tous deux de longueur $(b_0 - a_0)/2$ qui est une borne supérieure de l'erreur absolue.
- Dans l'algorithme précédent, il faut prendre garde au cas où la racine recherchée est zéro. Il y aura alors risque de division par 0 au cours de l'évaluation de l'erreur relative (2.3). Ce cas est toutefois rare en pratique.
- Il est parfois utile d'introduire un critère d'arrêt sur la valeur de $f(x)$, qui doit tendre également vers 0.

Exemple 1

La fonction $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ possède une racine dans l'intervalle $[1\ \ 2]$, car elle est continue et vérifie

$$f(1) \times f(2) = -4,0 \times 3,0 = -12,0 < 0$$

- On calcule le milieu de l'intervalle $r_1 := \frac{(1+2)}{2} = 1,5$ et on évalue $f(r_1) = f(1,5) = -1,875$. Donc $f(r_1) \neq 0$ et

  $$f(r_1) \times f(2) = -1,875 \times 3,0 < 0 = -5,625$$

  Alors le nouveau intervalle est $[1,5\ \ 2]$ car il possède un changement de signe, contrairement à l'intervalle $[1\ \ 1,5]$.
- Ainsi encore, le point milieu est $r_2 = \frac{(1,5+2)}{2} = \frac{7}{4} = 1,75$. Puisque $f(1,75) = 0,17187$, on prendra l'intervalle $[1,5\ \ 1,75]$ et ainsi de suite. Le tableau suivant résume les résultats

Méthode de la bissection : $f(x) \equiv x^3 + x^2 - 3x - 3$						
a_0	b_0	r_n	$f(a_0)$	$f(b_0)$	$f(r_n)$	Erreur absolue
$1,0$	$2,0$	$1,5$	$-4,0$	$3,0$	$-1,875$	$0,5$
$1,5$	$2,0$	$1,75$	$-1,875$	$3,0$	$0,171\,87$	$0,25$
$1,5$	$1,75$	$1,625$	$-1,875$	$0,171\,87$	$-0,943\,35$	$0,125$
$1,625$	$1,75$	$1,687\,5$	$-0,943\,35$	$0,171\,87$	$-0,409\,42$	$0,062\,5$
$1,687\,5$	$1,75$	$1,718\,75$	$-0,409\,42$	$0,171\,87$	$-0,124\,78$	$0,031\,25$

Remarque(s) : On peut déterminer à l'avance le nombre d'itérations n nécessaire pour obtenir une certaine erreur absolue Δr donnée sur la racine r. Il faut constater que si $L = b_0 - a_0$ est la longueur de l'intervalle de départ, après la première itération le nouvel intervalle est de longueur $\frac{L}{2}$ et après la $n^{ième}$ itérations la longueur de l'intervalle devient $\frac{L}{2^n}$. Ainsi pour connaître la valeur de n nécessaire pour avoir

$$\frac{L}{2^n} < \Delta r,$$

il suffit de résoudre cette inéquation en fonction de n et de trouver la condition que

$$n > \frac{\ln\left(\frac{L}{\Delta r}\right)}{\ln(2)}. \tag{2.4}$$

Note: Il est clair qu'on doit prendre pour valeur de n le plus petit entier vérifiant la condition (2.4).

On a aussi tout intérêt à bien cerner la racine recherchée et à prendre, dès le départ, un intervalle de longueur aussi petite que possible

Exemple 2

Dans l'exemple précédent, la longueur de l'intervalle initial est $L = 2,0 - 1,0$. Si l'on veut une erreur absolue plus petite que $0,5 \times 10^{-2}$ (ce qui revient à s'assurer que le chiffre des centièmes est significatif), il faut effectuer au moins

$$n > \frac{\ln\left(\frac{1,0}{0,5\times10^{-2}}\right)}{\ln(2)} = 7,64 \text{ itérations.}$$

On prendra donc $n = 8$ itérations pour s'assurer de cette précision.

Exercice du manuel (fortement suggéré) 1: Faire trois itérations de la méthode de la bissection pour les fonctions suivantes et à partir des intervalles indiqués. Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une solution dont le chiffre des millièmes est significatif.

a) $f(x) = -0,9x^2 + 1,7x + 2,5$ dans l'intervalle $[2,8 \quad 3,0]$

b) $f(x) = \frac{1-0,61x}{x}$ dans l'intervalle $[1,5 \quad 2,0]$

c) $f(x) = x^2\,|\sin(x)| - 4,1$ dans l'intervalle $[0 \quad 4]$

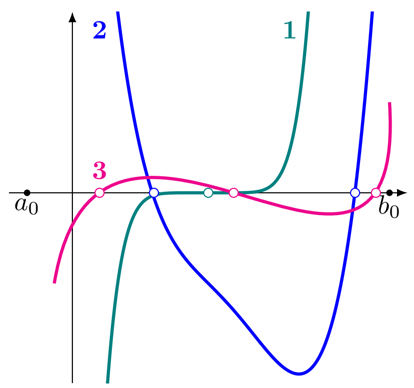
d) $f(x) = x^6 - x - 1$ dans l'intervalle $[1 \quad 2]$

1.2 - Analyse de convergence de la méthode

La convergence de la méthode de la bissection (s'il y a lieu) n'est pas très rapide, mais elle est sûre à partir du moment où on se place dans le contexte suivant : la fonction $f : [a_0, b_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ verifie les hypothèses

1. la fonction f est continue sur $[a_0, b_0]$,
2. la fonction f est strictement monotone sur $[a_0, b_0]$,
3. et la condition $f(a_0) \times f(b_0) < 0$.

Ces hypothèses garantissent l'existence et l'unicité de la racine r de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[a_0, b_0]$. On parle alors de méthode fermée car on travaille dans un intervalle fermé, contrairement aux méthodes des sections à venir, qui sont dites des méthodes ouvertes en ce sens qu'il n'y a pas d'intervalle à déterminer ayant un changement de signe. Les méthodes fermées par contre ne garantissent nullement la convergence, mais présentent toutefois d'autres avantages.



1 Il existe des cas où la méthode de la bissection ne fonctionne pas. La première situation critique est celle où la fonction $f(x)$ est tangente à l'axe des x et ne présente donc pas de changement de signe.

2 Il y a aussi celle où deux racines (ou un nombre pair de racines) sont présentes dans l'intervalle de départ ; en ce cas, il n'y a toujours pas de changement de signe.

3 Enfin, si l'intervalle de départ contient un nombre impair de racines, $f(x)$ change de signe, mais l'algorithme peut avoir des difficultés à choisir parmi ces racines.

Remarque(s) : Une façon d'éviter ces écueils est d'illustrer graphiquement la fonction $f(x)$ dans l'intervalle d'intérêt.

2 Méthodes des points fixes

2.1 - Principe, interprétation et algorithme de la méthode

La méthode des points fixes (dite encore des approximations successives) est la méthode itérative la plus importante dans l'approximation de la racine r de l'équation

$$f(x) = 0. \tag{2.5}$$

C'est une méthode dont l'application n'utilise pas directement l'équation (2.5), mais une équation de la forme

$$g(x) = x. \tag{2.6}$$

où la fonction $g(x)$ est construite à partir de la fonction $f(x)$. Le plus souvent, il va exister différentes façons de transformer l'équation (2.5) sous la forme (2.6).

Exemple 3

Considérons la fonction du second degré $f(x) := x^2 - 2x - 3$, avec laquelle on s'intéresse à l'équation

$$f(x) := x^2 - 2x - 3 = 0. \tag{2.7}$$

À partir de l'équation (2.7), on peut déduire trois formes de la fonction $g(x)$:

1. En isolant x^2 dans l'équation (2.7), on obtient $x = \sqrt{2x+3} =: g_1(x)$.

2. En reécrivant (2.7) sous la forme $x(x-2)-3=0$, on a $x = \frac{3}{x-2} =: g_2(x)$.

3. En isolant le x de $-2x$ dans l'équation (2.7), on établie $x = \frac{x^2-3}{2} =: g_3(x)$.

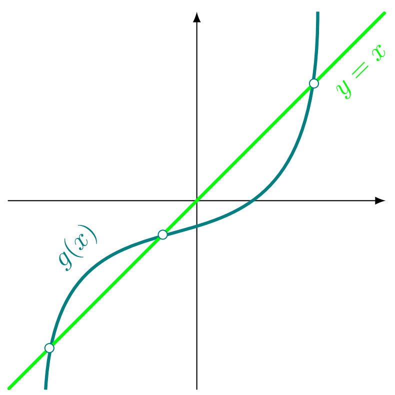
Note: On prendra garde de ne pas confondre les fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

Définition 2.1

Un point x^*, invariant par rapport à la fonction réelle $g(x)$, c'est à dire qui vérifie

$$x^* = g(x^*),$$

est appelé un point fixe de la fonction $g(x)$.



Remarque(s) :

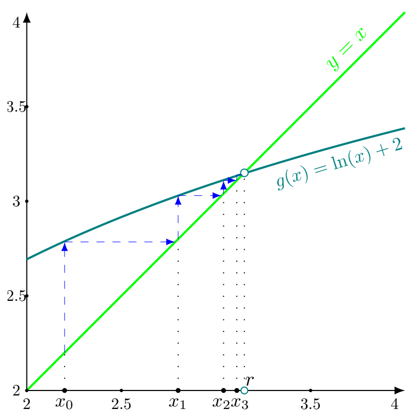
- Un point fixe de la fonction $g(x)$ est un point où cette fonction intersecte l'équation $y = x$, appelée la première bissectrice.
- Par l'exemple précédent, on peut transformer une équation $f(x) = 0$ en un problème équivalent de la forme $x = g(x)$. Donc un point fixe de $g(x)$, est également une racine de la fonction $f(x) = x - g(x)$ (la recherche d'un point fixe est similaire à la recherche d'une racine).
- Ainsi, l'équation $x = g(x)$ est la base du schéma itérative de points fixes pour approximer une racine de $f(x)$.

Il existe un algorithme très simple permettant de déterminer des points fixes. Il suffit en effet, à partir d'une valeur estimée initiale x_0, d'effectuer les itérations de la façon suivante

$$\begin{cases} \text{Étant donnée } x_0 \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases} \tag{2.8}$$

Remarque(s) : L'intérêt du schéma algorithmique (2.8) réside dans sa généralité et dans la relative facilité avec laquelle on peut en faire l'analyse de convergence (voir Section 2.2).

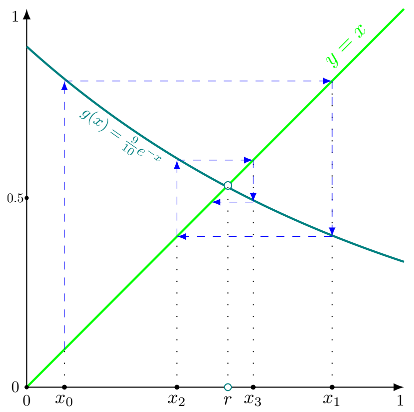
La méthode des points fixes possède une interprétation géométrique très élégante qui permet d'illustrer la convergence ou la divergence de la suite d'approximation x_n.



Les courbes $y = x$ et $g(x) = \ln(x) + 2$, où $2 \leq x \leq 4$, sont représentées ici et les points fixes sont bien entendu à l'intersection de ces deux courbes. On a une pente qui vérifie $0 < g'(r) < 1$.

À partir de la valeur initiale x_0, on se rend sur la courbe $y = g(x)$ au point $(x_0, g(x_0))$ et, de là, sur la droite $y = x$ au point $(g(x_0), g(x_0))$, qui est en fait (x_1, x_1).
On recommence le même processus à partir de x_1 pour se rendre à $(x_1, g(x_1))$ et, de là, sur la droite $y = x$ au point $(g(x_1), g(x_1)) = (x_2, x_2)$.

On répète ce trajet jusqu'à la convergence (ou la divergence) de l'algorithme

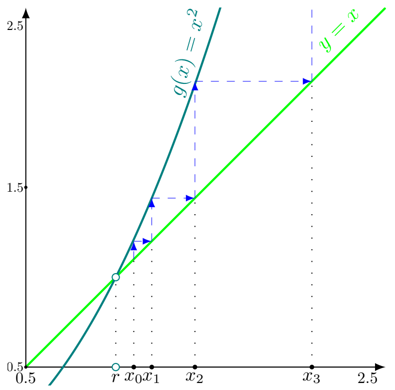


Cette figure présente la courbe $g(x) = \frac{9}{10}e^{-x}$, où $0 \leq x \leq 1$.

Pour identifier le(s) point(s) fixe(s) de cette fonction, on représente également la première bissectrice $y = x$. La pente est donnée par $g'(x) = -\frac{9}{10}e^{-x}$ et vérifie $-1 < g'(x) < 0$ pour $0 \leq x \leq 1$ et en particulier en la racine r.

À partir de la valeur initiale x_0, on se rend sur la courbe $y = g(x)$ au point $(x_0, g(x_0))$ et, de là, sur la droite $y = x$ au point $(g(x_0), g(x_0))$, qui est en fait (x_1, x_1).

On répète ce trajet avec x_1 jusqu'à la convergence (ou la divergence).



Par contre, on a ici la fonction $g(x) = x^2$ représentée sur $0.5 < x < 2.5$. La pente, définie par $g'(x) = 2x$, vérifie $g'(r) > 1$.

On remarque que pour une pente supérieure à 1, les itérations s'éloignent de la racine recherchée.

On a un résultat similaire dans le cas où $g'(r) < -1$; les itérations s'éloigneraient de la racine en oscillant de part et d'autre de la racine.

Remarque(s) : On voit immédiatement la différence de comportement entre les cas convergents $0 < g'(r) < 1$ et $-1 < g'(r) < 0$. Bien que les itérations oscillent de part et d'autre de la racine lorsque la pente est négative, la convergence n'en est pas moins assurée.

Algorithme 2.1: Algorithme des points fixes [a] :

1. Étant donné ε_a, un critère d'arrêt
2. Étant donné N, le nombre maximal d'itérations
3. Étant donné x_0, une valeur estimée initiale du point fixe
4. Effectuer $x_{n+1} = g(x_n)$
5. Si $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \varepsilon_a$:
   - ∗ convergence atteinte
   - ∗ écrire la solution x_{n+1}
   - ∗ arrêt
6. Si le nombre maximal d'itérations N est atteint :
   - ∗ convergence non atteinte en N itérations
   - ∗ arrêt
7. Retour à l'étape 4

a. André Fortin : Analyse numérique pour ingénieurs, Presses Internationales Polytechnique, Montréal, Québec (2016).

Exemple 4

Appliquons l'algorithme des points fixes à chacune des fonctions $g_i(x)$, $i = 1,\ 2,\ 3$, obtenues dans l'exemple précédent (dont il n'est pas nécessaire de recourir aux méthodes numériques pour résoudre ce problème car les deux racines de l'équation $f(x) = 0$ sont connues $r_1 = 3$ et $r_2 = -1$).

- À partir d'une estimation initiale $x_0 = 4$, on obtient pour $g_1(x)$:

$$\begin{array}{lcll}
x_1 = g_1(4) & = & \sqrt{2 \times 4 + 3} & = \; 3,3166248 \\
x_2 = g_1(3,3166248) & = & \sqrt{2 \times 3,3166248 + 3} & = \; 3,1037477 \\
x_3 = g_1(3,1037477) & = & \sqrt{2 \times 3,1037477 + 3} & = \; 3,0343855 \\
\vdots & & \vdots & \quad \vdots \\
x_{10} = g_1(3,0000470) & = & \sqrt{2 \times 3,0000470 + 3} & = \; 3,0000157
\end{array}$$

L'algorithme semble donc converger vers la racine $r_1 = 3$.

- Reprenons l'exercice avec $g_2(x)$, toujours en partant de $x_0 = 4$

$$\begin{array}{lcll}
x_1 = g_2(4) & = & \dfrac{3}{4-2} & = \; 1,5 \\
x_2 = g_2(1,5) & = & \dfrac{3}{1,5-2} & = \; -6,0 \\
x_3 = g_2(-6,0) & = & \dfrac{3}{-6,0-2} & = \; -0,375 \\
\vdots & & \vdots & \quad \vdots \\
x_{10} = g_2(-0,9989841) & = & \dfrac{3}{-0,9989841-2} & = \; -1,0003387
\end{array}$$

On remarque, contrairement au cas précédent, que les itérations convergent vers la racine $r_2 = -1$ en ignorant la racine $r_1 = 3$.

- En dernier lieu, essayons l'algorithme avec la fonction $g_3(x)$

$$\begin{array}{lcll}
x_1 = g_3(4) & = & \dfrac{(4)^2-3}{2} & = \; 6,5 \\
x_2 = g_3(6,5) & = & \dfrac{(6,5)^2-3}{2} & = \; 19,625 \\
x_3 = g_3(19,625) & = & \dfrac{(19,625)^2-3}{2} & = \; 191,0703 \\
x_4 = g_3(191,0703) & = & \dfrac{(191,0703)^2-3}{2} & = \; 18252,43 \\
\vdots & & \vdots & \quad \vdots
\end{array}$$

Visiblement, les itérations tendent vers l'infini et aucune des deux solutions possibles ne sera atteinte.

Note: Cet exemple montre clairement que l'algorithme des points fixes, selon le choix de la fonction itérative $g(x)$, converge vers l'une ou l'autre des racines et peut même diverger complètement dans certains cas. Il faut donc une analyse plus fine afin de déterminer dans quelles conditions la méthode des points fixes est convergente.

2.2 - Analyse de convergence de la méthode

Nous nous intéressons dans cette section au comportement de la méthode des points fixes pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$. On a d'abord transformé cette équation sous la forme équivalente $x = g(x)$.

Soit r une valeur qui est à la fois une racine de $f(x)$ et un point fixe de la fonction $g(x)$, c'est-à-dire qui vérifie

$$f(r) = 0 \;\text{ et }\; r = g(r) \tag{2.9}$$

En définissant à l'étape n, l'erreur e_n comme étant

$$e_n = x_n - r,$$

on cherche à déterminer sous quelles conditions l'algorithme des points fixes converge vers la racine r. Ce sera bien sûr le cas où e_n tend vers 0 lorsque n devient grand. D'autre part, à partir des relations (2.8) et (2.9), on a

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = g(x_n) - g(r).$$

Sachant que $x_n = r + (x_n - r) = r + e_n$ et grâce au développement de Taylor de la fonction $g(x)$ autour de r, on a

$$e_{n+1} = g'(r)e_n + g''(r)\frac{e_n^2}{2!} + g'''(r)\frac{e_n^3}{3!} + \cdots \tag{2.10}$$

L'étude de la relation (2.10) est fondamentale pour la compréhension de la méthode des points fixes. Au voisinage de la racine r, le premier terme non nul de l'expression de droite sera déterminant pour la convergence.

Remarque(s) : si $g'(r) \neq 0$ et l'on néglige les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en e_n dans l'équation (2.10),

$$e_{n+1} \simeq g'(r)e_n. \tag{2.11}$$

- Ainsi la relation (2.11) montre que l'erreur à l'étape $(n+1)$ est directement proportionnelle à l'erreur à l'étape n. Cette erreur ne pourra donc diminuer que si

$$|g'(r)| < 1. \tag{2.12}$$

- La condition (2.12) est une condition nécessaire de convergence d'une méthode des points fixes.
- On remarque également que le signe de $g'(r)$ a une influence sur la convergence. En effet, si $-1 < g' < 0$, l'erreur changera de signe à chaque itération en vertu de l'équation (2.11) et les valeurs de x_n oscilleront de part et d'autre de la racine recherchée r. La convergence n'en sera pas moins assurée.
- La relation (2.11) donne, de plus, la vitesse à laquelle l'erreur diminue. En effet, plus $g'(r)$ est petit, plus l'erreur diminue vite et donc plus la convergence est rapide. Cela nous amène à la définition suivante.

Définition 2.2

- Le taux de convergence d'une méthode des points fixes est donné par $|g'(r)|$.
- On dira qu'un point fixe r de la fonction $g(x)$ est attractif si

$$|g'(r)| < 1,$$

et répulsif si

$$|g'(r)| > 1.$$

Le cas où $|g'(r)| = 1$ est indéterminé.

Exercice du manuel (fortement suggéré) 2: Calculer les points fixes des fonctions suivantes et vérifier s'ils sont attractifs ou répulsifs.

a) $g(x) = 4x - x^2$
b) $g(x) = \sqrt{x}$
c) $g(x) = \arcsin(x)$
d) $g(x) = 5 + x - x^2$

Définition 2.3

On dit qu'une méthode des points fixes converge à l'ordre p si :

$$|e_{n+1}| \simeq c|e_n|^p, \tag{2.13}$$

où c est une constante.

Remarque(s) :

- Si $|g'(r)| < 1$ et $|g'(r)| \neq 0$, grâce à la relation (2.11) on a $|e_{n+1}| \simeq |g'(r)||e_n|$. Ainsi la méthode des points fixes converge à l'ordre 1 qui est également dite linéaire.
- Si $|g'(r)| = 0$ et $|g''(r)| \neq 0$, alors par la relation (2.10), l'erreur e_{n+1} est proportionnelle à e_n^2 et on a une convergence d'ordre 2 encore appelée convergence quadratique.
- Si $|g'(r)| = |g''(r)| = 0$ et $|g'''(r)| \neq 0$, la convergence est d'ordre 3.

- Et ainsi de suite $\cdots$.

La convergence d'une méthode des points fixes est également assujettie au choix de la valeur initiale x_0. En effet, un mauvais choix de cette valeur peut résulter en un algorithme divergent même si la condition (2.12) est respectée. Cela nous amène à définir la notion de bassin d'attraction d'une racine r.

Définition 2.4

Le bassin d'attraction de la racine r pour la méthode des points fixes $x_{n+1} = g(x_n)$ est l'ensemble des valeurs initiales x_0 pour lesquelles x_n tend vers r lorsque n tend vers l'infini.

Exemple 5

Revenons aux trois fonctions $g_i(x)$ de l'exemple précédent. On veut s'assurer que la condition (2.12) se vérifie à l'une ou l'autre des racines $r_1 = 3$ et $r_2 = -1$. On doit d'abord calculer les dérivées $g_1'(x)$ et $g_2'(x)$, pour comprendre les résultats obtenus précédemment :

$$g_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}, \quad g_2'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}, \quad g_3'(x) = x,$$

- Ainsi pour la racine $r_1 = 3$, on a les taux de convergence

$$g_1'(3) = 0,33333, \quad g_2'(3) = -3, \quad g_3'(3) = 3.$$

  La méthode des points fixes appliquée à $g_1(x)$ a convergé vers $r_1 = 3$, puisque $g_1'(3) < 1$.
  De même, avec $g_2(x)$, la méthode des points fixes ne peut converger vers $r_1 = 3$, car la dérivée de $g_2(x)$ en ce point est plus grande que 1. Les itérations ignorent r_1 et convergent vers r_2, où la valeur de la dérivée est inférieure à 1 (voir le point suivant).
  Enfin, la fonction $g_3(x)$ a également une dérivée plus grande que 1 en r_1.
- Et pour la racine $r_2 = -1$, on a les Taux de convergence suivants

$$g_1'(-1) = 1, \quad g_2'(-1) = -0,33333, \quad g_3'(-1) = -1.$$

  L'analyse de la convergence autour de $r_2 = -1$ est plus subtile. En effet, puisque $g_3'(x) = x$, on constate que la valeur absolue de la dérivée est inférieure à 1 à droite de r_2 et supérieure à 1 à gauche de r_2. De plus, cette dérivée est négative, ce qui signifie que la méthode des points fixes oscillera de part et d'autre de la racine. À une itération, la pente $g_3'(x_n)$ sera inférieure à 1 et, à l'itération suivante, la pente $g_3'(x_{n+1})$ sera supérieure à 1 en valeur absolue. On en conclut que l'algorithme des points fixes s'approchera légèrement de r_2 à une itération et s'en éloignera à la suivante. En un mot, l'algorithme piétinera.

Exercice du manuel (fortement suggéré) 3: Utiliser l'algorithme des points fixes avec la fonction

$$g(x) = \sqrt{1+x} \text{ et } x_0 = 1,5.$$

Une fois le point fixe obtenu, calculer $|e_n|$ et $\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right|$. Obtenir expérimentalement le taux de convergence de la méthode.

Exemple 6

On considère la fonction $f(x) = e^{-x} - x$ et on s'intéresse, par la méthode des points fixes, aux approximations x_n de la racine $r = 0,56714329$ de l'équation

$$f(x) = 0. \tag{2.14}$$

On transforme l'équation (2.14) au problème de points fixes $x = e^{-x} =: g(x)$. En partant de l'approximation initiale $x_0 = 0$ et en posant $e_n = x_n - r$ l'erreur à l'étape n, on obtient le tableau ci-dessous. Ce tableau illustre principalement deux points :

* On constate que la méthode de points fixes converge puisque l'erreur e_n tend vers 0.
* Le rapport $|\frac{e_{n+1}}{e_n}|$ converge vers environ $0,5671$. Ce nombre n'est pas arbitraire, car en vertu de la relation (2.11), ce rapport doit converger vers $|g'(r)|$ qui vaut dans cet exemple la valeur $0,56714$. On remarque que ce rapport convergence vers la bonne valeur.

Méthode des points fixes : $g(x) \equiv e^{-x}$			
n	x_n	$\lvert e_n\rvert$	$\left\lvert\frac{e_{n+1}}{e_n}\right\rvert$
1	$1,000\,0000$	$0,4328 \times 10^{+0}$	$0,4603$
2	$0,367\,8794$	$0,1992 \times 10^{+0}$	$0,6276$
3	$0,692\,2006$	$0,1250 \times 10^{+0}$	$0,5331$
4	$0,500\,4735$	$0,6667 \times 10^{-1}$	$0,5864$
5	$0,606\,2435$	$0,3910 \times 10^{-1}$	$0,5562$
6	$0,545\,3957$	$0,2174 \times 10^{-1}$	$0,5733$
7	$0,579\,6123$	$0,1246 \times 10^{-1}$	$-$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
14	$0,566\,9089$	$0,2344 \times 10^{-3}$	$0,5670$
15	$0,567\,2762$	$0,1329 \times 10^{-3}$	$0,5672$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
35	$0,567\,1433$	$\simeq 0$	$0,5671$

Note: Le calcul de la suite $e_n = x_n - r$ permettant d'obtenir l'avant dernière et la dernière colonne du tableau précédent requiert bien entendu de connaître la racine r. Mais en réalité, cette racine n'est pas toujours accessible. Peut-t-on cependant éviter d'utiliser la racine r dans le calcul de l'erreur e_n ?

À partir de la relation (2.11), si $g'(r) \neq 0$, alors on a l'approximation suivante

$$\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} \simeq \frac{e_{n+1}}{e_n}, \text{ c'est à dire } \frac{x_{n+2}-r}{x_{n+1}-r} \simeq \frac{x_{n+1}-r}{x_n - r}.$$

En isolant la racine r, on trouve la formule numériquement instable suivante

$$r \simeq x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}. \tag{2.15}$$

Et partant de là, on peut reécrire le rapport $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ et obtenir la nouvelle formule

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{x_{n+1}-r}{x_n - r} \simeq \frac{x_{n+1}-x_{n+2}}{x_n - x_{n+1}} =: \frac{E_{n+1}}{E_n}. \tag{2.16}$$

On a ainsi introduit l'écart successif entre deux itérations dénoté E_n et défini par

$$E_n := x_n - x_{n+1}, \tag{2.17}$$

dont le calcul n'éxige pas de connaître la racine r.
On peut donc remplacer le rapport $\left\lvert\frac{e_{n+1}}{e_n}\right\rvert$ par celui-ci $\left\lvert\frac{E_{n+1}}{E_n}\right\rvert$ tel que établi à la relation (2.16).

Exemple 7

Reprenons l'exemple précédent en nous basant cette fois sur les écarts E_n pour faire l'analyse. On a le tableau ci-dessous où on peut aisément constater que les conclusions restent les mêmes.

Note: En pratique, on pourra se servir de $e_n = x_n - r$ ou de $E_n = x_n - x_{n+1}$ pour effectuer ce type d'analyse. Lorsque la racine r est connue, on préfére l'utilisation de l'erreur e_n à la place de l'écart E_n.

Méthode des points fixes : $g(x) \equiv e^{-x}$			
n	x_n	$\lvert E_n \rvert$	$\left\lvert \frac{E_{n+1}}{E_n} \right\rvert$
1	$1,000\,0000$	$0,6321 \times 10^{+0}$	$0,5131$
2	$0,367\,8794$	$0,3243 \times 10^{+0}$	$0,5912$
3	$0,692\,2006$	$0,1917 \times 10^{+0}$	$0,5517$
4	$0,500\,4735$	$0,1058 \times 10^{+0}$	$0,5753$
5	$0,606\,2435$	$0,6085 \times 10^{-1}$	$0,5623$
6	$0,545\,3957$	$0,3422 \times 10^{-1}$	$0,5698$
7	$0,579\,6123$	$0,1950 \times 10^{-1}$	$-$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
14	$0,566\,9089$	$0,3673 \times 10^{-3}$	$0,5672$
15	$0,567\,2762$	$0,2083 \times 10^{-3}$	$0,5671$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
35	$0,567\,1433$	$0,2469 \times 10^{-8}$	$0,5671$

Question: Si l'objectif de la méthode des points fixes est de déterminer une approximation de la racine r, peut-t-on considérer la formule (2.15) comme une approximation de celle-ci ?

Note: La réponse est oui et on obtient une meilleure approximation du point fixe r connue sous le nom d'extrapolation d'Aitken. La formule d'extrapolation d'Aitken converge quadratiquement (c'est une méthode d'ordre 2).

Méthode : À partir d'une méthode des points fixes convergeant à l'ordre 1 (car la formule (2.15) est établie dans le cadre où $g'(r) \neq 0$), en posant $n = 0$ on a une première approximation

$$r \simeq x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}, \tag{2.18}$$

à partir de x_0, x_1 et x_2. Cela résulte en un algorithme qui accélère grandement la convergence d'une méthode des points fixes. C'est l'algorithme de Steffenson.

Exemple 8

Reprenons l'exemple précédent de la méthode des points fixes en partant de $x_0 = 0$ et où on a le schéma suivant

$$x_{n+1} = g(x_n) = e^{-x_n}.$$

L'algorithme de Steffenson consiste à faire deux itérations de points fixes, à extrapoler pour obtenir x_e, à faire deux nouvelles itérations de points fixes à partir de x_e, à extrapoler à nouveau et ainsi de suite.

- À partir de $x_0 = 0$, on a la première approximation

$$x_1 = e^0 \quad = 1,0$$
$$x_2 = e^{-1} = 0,3678794.$$

  Ainsi la valeur extrapolée est

$$x_e = 0 - \frac{(1-0)^2}{0,3678794 - 2(1) + 0} = 0,6126998.$$

- À partir de cette nouvelle valeur, on recommence le processus en faisant encore deux itérations de points fixes

$$x_1 = e^{-0,6126998} = 0,5418859$$
$$x_2 = e^{-0,5418859} = 0,5816503.$$

  La nouvelle valeur extrapolée est alors

$$x_e = 0,6126998 - \frac{(0,5418859 - 0,6126998)^2}{0,5816503 - 2(0,5418859) + 0,6126998} = 0,5673509.$$

- En continuant ainsi, on obtient la valeur extrapolée suivante $x_e = 0,5671433$ et ainsi de suite $\cdots$.

On remarque que la convergence est plus rapide avec l'algorithme de Steffenson qu'avec la méthode des points fixes dont elle est issue. Trois itérations suffisent pour obtenir la même précision. On peut montrer en fait que la convergence est quadratique.

Note: On note toutefois que chaque itération de l'algorithme de Steffenson demande plus de calculs qu'une méthode des points fixes. Il y a un prix à payer pour obtenir une convergence quadratique.

Algorithme 2.2: Algorithme de Steffenson [a] :

1. Étant donné ε_a, un critère d'arrêt
2. Étant donné N, le nombre maximal d'itérations
3. Étant donné x_0, une valeur estimée initiale du point fixe
4. Effectuer $x_{n+1} = g(x_n)$
   - $x_1 = g(x_0)$
   - $x_2 = g(x_1)$
   - $x_e = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}$
5. Si $\frac{|x_e - x_0|}{|x_e|} < \varepsilon_a$:
   - convergence atteinte
   - écrire la solution x_e
   - arrêt
6. Si le nombre maximal d'itérations N est atteint :
   - convergence non atteinte en N itérations
   - arrêt
7. $x_0 = x_e$ Retour à l'étape 4

[a] André Fortin : Analyse numérique pour ingénieurs, Presses Internationales Polytechnique, Montréal, Québec (2016).

3 Méthode de Newton

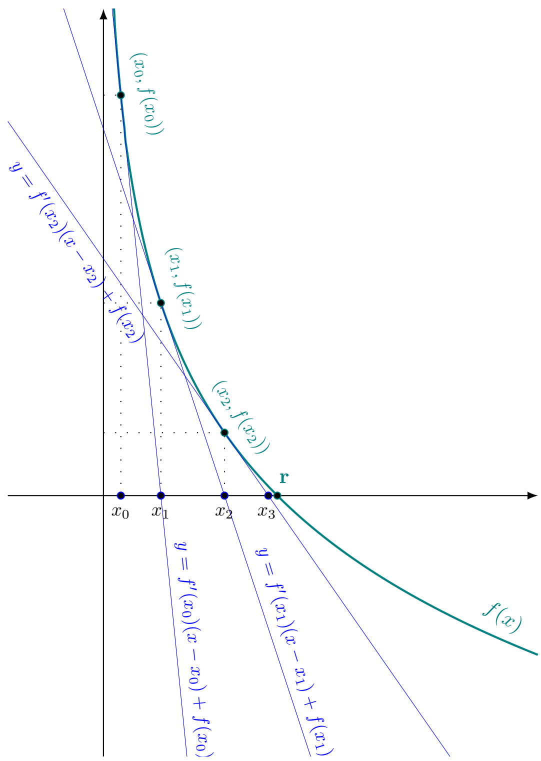
3.1 - Principe, interprétation et algorithme de la méthode

L'objectif reste le même, c'est à dire, définir une méthode itérative affin de générer une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de valeurs numériques approximatives de la racine r de l'équation (linéaire ou non linéaires) suivante

$$f(x) = 0. \tag{2.19}$$

Méthode : L'idée principale de la méthode de Newton repose sur le fait qu'au voisinage de la racine r, la fonction $f(x)$ peut être confondue avec la tangente au point x_0 proche de r :

- Cela revient à confondre $f(x)$ avec son développement de Taylor à l'ordre 1 autour de x_0
$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
- La racine de l'équation (2.19), peut donc être approchée par la résolution de l'équation
$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$
dont la solution, qu'on dénote x_1, est donnée par
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
la nouvelle valeur x_1 est une première approximation de la racine r de l'équation (2.19).
- En réitérant le procédé ci-dessus, on construit un schéma algorithmique défini par
$$\begin{cases} \text{À partir d'une valeur initiale } x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{cases} \tag{2.20}$$
où $n \geq 0$, et résultant à l'algorithme suivant.



Sur la figure on a la courbe représentative de la fonction $f(x)$, la valeur initiale x_0 et le point $(x_0, f(x_0))$. De plus, on a aussi la droite tangente à la courbe au point x_0 dont l'équation est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Cette droite coupe l'axe des x en $y = 0$, et génère ainsi une première approximation x_1 de la racine r défini par

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

On reprend ensuite le même raisonnement à partir du point $(x_1, f(x_1))$ et ainsi de suite.

Note: La méthode de Newton est un cas particulier de la méthode des points fixes où la fonction $g(x)$ est définie

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Exemple 9

On cherche à résoudre, par la méthode de Newton, l'équation

$$f(x) = 0,$$

où la fonction est définie par $f(x) = e^{-x} - x$. Calculons alors la dérivée $f'(x) = -e^{-x} - 1$ et l'algorithme se résume à

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1}. \tag{2.21}$$

À partir de la valeur initiale $x_0 = 0$, on compile les résultats de l'algorithme (2.21) dans le tableau ci-dessous.

Méthode de Newton : $f(x) \equiv e^{-x} - x$			
n	x_n	$\lvert e_n \rvert$	$\left\lvert \frac{e_{n+1}}{e_n} \right\rvert$
0	$0,000\ 0000$	$0,5671 \times 10^{+0}$	$0,1183 \times 10^{+0}$
1	$0,500\ 0000$	$0,6714 \times 10^{-1}$	$0,1239 \times 10^{-1}$
2	$0,566\ 3110$	$0,8323 \times 10^{-3}$	$0,1501 \times 10^{-3}$
3	$0,567\ 1432$	$0,1250 \times 10^{-6}$	$\simeq 0$
4	$0,567\ 1433$	$0,4097 \times 10^{-9}$	$-$

On remarque que l'erreur absolue $|e_n|$ tend à grands pas vers 0, d'où la convergence très rapide de la méthode de Newton.

On note également que le nombre de chiffres significatifs double à chaque itération. Ce phénomène est caractéristique de la méthode de Newton. La dernière colonne, qui converge vers 0, donne une indication à ce sujet.

Cette colonne est censée converger vers $|g'(r)|$, qui est donc nul dans ce cas, ce qui semble indiquer que la convergence est au moins quadratique.

Algorithme 3.1: Algorithme de la méthode de Newton [a] :

1. Étant donné ε_a, un critère d'arrêt
2. Étant donné N, le nombre maximal d'itérations
3. Étant donné x_0, une valeur estimée initiale de la solution
4. Effectuer
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
5. Si $\frac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_{n+1}|} < \varepsilon_a$:
   * convergence atteinte
   * écrire la solution x_{n+1}
   * arrêt
6. Si le nombre maximal d'itérations N est atteint :
   * convergence non atteinte en N itérations
   * arrêt
7. Retour à l'étape 4

a. André Fortin : Analyse numérique pour ingénieurs, Presses Internationales Polytechnique, Montréal, Québec (2016).

3.2 - Analyse de convergence de la méthode et le cas d'une racine multiple

3.2.1 - Analyse de convergence de la méthode de Newton

La méthode de Newton est un cas particulier de la méthode des points fixes, donc il n'est pas nécessaire de reprendre l'analyse de convergence.

On a déjà établi que la convergence dépend de $g'(r)$ et l'on a dans ce cas précis

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}. \tag{2.22}$$

Puisque $f(r) = 0$ car r étant une racine, on a immédiatement $g'(r) = 0$ et donc une convergence au moins quadratique de la méthode de Newton, en vertu de la relation (2.10).

Remarque(s) : Il faut noter que, dans le cas où $f'(r)$ est également nul, le résultat précédent n'est plus vrai dans la mesure où $g'(r)$ pourra être différent de 0. Nous étudierons cette question en détail un peu plus loin.

Pour s'assurer que la convergence de la méthode de Newton est bel et bien quadratique en général, on calcule $g''(r)$. On a, en vertu de l'équation (2.22)

$$g''(r) = \frac{f''(r)}{f'(r)}. \tag{2.23}$$

et que $g''(r)$ n'a a priori aucune raison d'être nul. Il reste que l'on doit supposer que $f'(r) \neq 0$, ce qui n'est pas toujours vrai. Enfin, de la relation (2.10), on déduit

$$e_{n+1} \simeq \frac{g''(r)}{2}e_n^2 = \frac{f''(r)}{2f'(r)}e_n^2 \tag{2.24}$$

qui démontre bien la convergence quadratique (si $f'(r) \neq 0$).

Note: La convergence de l'algorithme de Newton est donc très rapide.

3.2.2 - Cas des racines multiples

Il arrive parfois que la méthode de Newton ne converge pas aussi vite que l'on s'y attendait. Cela est souvent le signe d'une **racine multiple**, dont nous rappelons la définition.

Définition 3.1

Une racine r de la fonction $f(x)$ est dite de multiplicité m si la fonction $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = (x - r)^m h(x) \tag{2.25}$$

et ce, pour une fonction $h(x)$ vérifiant $\lim_{x \to r} h(x) = h(r)$ avec $h(r) \neq 0$.

Théorème 3.1

Une racine r est de multiplicité m (où m est un entier) si et seulement si

$$f(r) = f'(r) = f''(r) = \cdots = f^{m-1}(r) = 0, \; f^m(r) \neq 0 \tag{2.26}$$

c'est-à-dire si la fonction de même que ses $(m-1)$ premières dérivées s'annulent en r (la dérivée d'ordre m ne doit pas s'annuler en r).

Exemple 10

La fonction $f(x) = xsin(x)$ possède une racine de multiplicité 2 en $x = 0$. En effet

$$\begin{aligned} f(x) &= xsin(x) \\ f'(x) &= sin(x) + xcos(x) \\ f''(x) &= 2cos(x) - xsin(x) \end{aligned}$$

et l'on conclut aisément que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$.

Exercice du manuel (fortement suggéré) 4: Obtenir la multiplicité m de la racine r des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, en $r = 1$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, en $r = 0$

c) $f(x) = x\sin(x)$, en $r = 0$

d) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ en $r = 0$

Question: Qu'arrive-t-il si l'on applique la méthode de Newton dans le cas d'une racine multiple ?

Pour répondre à la question, il faut examiner la quantité $g'(r)$ qui permet de déterminer la nature de la convergence (linéaire, quadratique, $\cdots$). À partir de la relation (2.26), on peut simplifier la valeur $g'(r)$ dont la formule est donnée dans (2.22) et on obtient

$$g'(r) = 1 - \frac{1}{m}. \tag{2.27}$$

- On constate que $g'(r) = 0$ seulement si $m = 1$, c'est-à-dire si l'on a une racine simple (de multiplicité 1).

  Note: La convergence de la méthode de Newton ne sera donc quadratique que pour les racines simples.

- Si $m \neq 1$, la méthode de Newton converge linéairement avec un taux de convergence de $1 - \frac{1}{m}$.
- On remarque aussi que, plus m est grand, plus la convergence est lente, car $g'(r)$ est de plus en plus près de 1.

Exemple 11

On considère la résolution de la fonction

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0.$$

En partant de la première approximation $x_0 = 0$, on obtient par la méthode de Newton le tableau ci-dessous.

Méthode de Newton : $f(x) \equiv x^3 - 5x^2 + 7x - 3$				
n	x_n	$\lvert e_n\rvert$	$\left\lvert\frac{e_{n+1}}{e_n}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{e_{n+1}}{e_n^2}\right\rvert$
0	$0,000\,0000$	$1,0000$	$0,5714$	$0,5714$
1	$0,428\,5714$	$0,5714$	$0,5499$	$0,9625$
2	$0,685\,7143$	$0,3142$	$0,5318$	$1,6926$
3	$0,832\,8654$	$0,1671$	$0,5185$	$3,1017$
4	$0,913\,3299$	$0,0866$	$0,5102$	$5,8864$
5	$0,955\,7833$	$0,0442$	$0,5045$	$11,429$
6	$0,977\,6551$	$0,0223$	$-$	$-$

Malgré la méthode de Newtone appliquée, on remarque une convergence (car $|e_n| \longrightarrow 0$) lente vers la racine $r = 1$.

Mais en vérifiant aisément que $f(1) = f'(1) = 0$, on remarque que la racine 1 est de multiplicité 2 ($m = 2$). Cela est confirmé par le rapport $\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|}$ de la quatrième colonne du tableau, qui doit normalement converger vers $1 - \frac{1}{m}$, c'est-à-dire vers $0,5$ dans ce cas précis.

On note enfin que les valeurs de la dernière colonne semblent augmenter sans cesse et tendent vers l'infini. Cela indique une fois de plus que la convergence est linéaire et non quadratique.

Remarque(s) : Il existe des moyens de récupérer la convergence quadratique dans le cas de racines multiples. Il suffit en effet de transformer le problème en un problème équivalent ayant les mêmes racines, mais de multiplicité 1. Un exemple de choix de fonction est

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

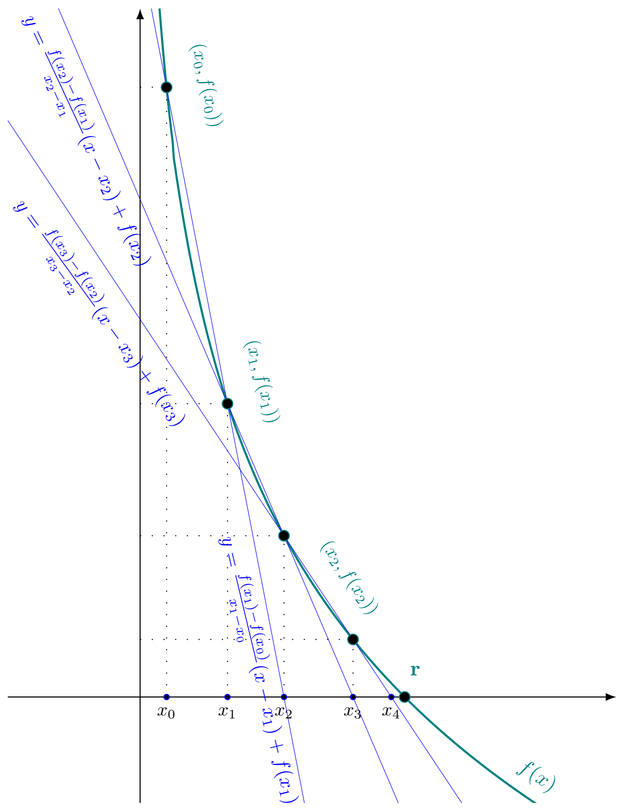
En effet la racine multiple r de la fonction $f(x)$ est ici une racine simple de la fonction $u(x)$, car après calcul on a $u'(r) = \frac{1}{m}$. L'application de l'algorithme de Newton à la fonction $u(x)$ présente un schéma algorithmique défini par

$$\begin{cases} \text{À partir d'une valeur initiale } x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n)}. \end{cases} \tag{2.28}$$

Note: L'algorithme (2.28) permet de récupérer la convergence quadratique de la méthode de Newton d'une racine multiple, mais il exige de connaître à l'avance la multiplicité m de cette racine recherchée.

4 Méthode de la sécante

4.1 - Interprétation et algorithme de la méthode



La méthode de Newton possède de grands avantages, mais elle nécessite le calcul de la dérivée de la fonction $f(x)$ qui dans certain cas, est difficile à évaluer.

La méthode de la sécante contourne cette difficulté en remplaçant le calcul de la pente $f'(x_n)$ de la droite tangente au point $(x_n, f(x_n))$ de $f(x)$, par l'expression suivante

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}. \qquad (2.29)$$

Cela revient à utiliser **la droite sécante** passant par les points $(x_n, f(x_n))$ et $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ plutôt que **la droite tangente** au point $(x_n, f(x_n))$ telle que utilisée par la méthode de Newton.

Algorithme 4.1: Algorithme de la méthode de la sécante [a] :

1. Étant donné ε_a, un critère d'arrêt
2. Étant donné N, le nombre maximal d'itérations
3. Étant donné x_0 et x_1, deux valeurs initiales de la solution
4. Effectuer

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{(f(x_n) - f(x_{n-1}))}$$

5. Si $\frac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_{n+1}|} < \varepsilon_a$:
   - ∗ convergence atteinte
   - ∗ écrire la solution x_{n+1}
   - ∗ arrêt
6. Si le nombre maximal d'itérations N est atteint :
   - ∗ convergence non atteinte en N itérations
   - ∗ arrêt
7. Retour à l'étape 4

a. André Fortin : Analyse numérique pour ingénieurs, Presses Internationales Polytechnique, Montréal, Québec (2016).

Remarque(s) : Plusieurs remarques s'imposent au sujet de cet algorithme :

- La dérivée de $f(x)$ n'apparaît plus dans l'algorithme.
- Il faut fournir au départ 2 valeurs initiales. C'est ce qu'on appelle **un algorithme à deux pas**.
- On choisit les valeurs initiales le plus près possible de la racine recherchée. Il n'est cependant pas nécessaire qu'il y ait un changement de signe dans l'intervalle $[x_0, x_1]$, comme c'est le cas avec la méthode de la bissection.

4.2 - Analyse de convergence de la méthode

On ne peut pas se servir ici de l'analyse d'erreur élaborée pour les méthodes des points fixes parce que la méthode de la sécante n'est pas une méthode des points fixes au sens du schéma algorithmique (2.8). Il s'agit d'une méthode à deux pas puisqu'on a besoin de x_{n-1} et x_n pour calculer x_{n+1}. Par contre l'analyse d'erreur est cependant similaire. En effet, une tel analyse permet d'établir

$$e_n \simeq c e_{n-1}^p, \tag{2.30}$$

où $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarque(s) : l'ordre de convergence de la méthode de la sécante est le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, appelé le nombre d'or. La convergence n'est donc pas quadratique, mais elle est plus que linéaire. On parle alors **de convergence superlinéaire**.

Exemple 12

On cherche à résoudre l'équation suivante que nous avons déjà abordé par d'autres méthodes

$$e^{-x} - x = 0.$$

En prenant des deux valeurs initiales $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$, on trouve les itérations présentées sur le tableau ci-dessous.

Méthode de la sécante : $f(x) \equiv e^{-x} - x$

n	x_n	$\lvert e_n \rvert$	$\left\lvert \frac{e_{n+1}}{e_n} \right\rvert$	$\left\lvert \frac{e_{n+1}}{e_n^\alpha} \right\rvert$	$\left\lvert \frac{e_{n+1}}{e_n^2} \right\rvert$
0	$0,000\,0000$	$0,5671 \times 10^{+0}$	$0,7632 \times 10^{+0}$	$1,0835$	$1,342$
1	$1,000\,0000$	$0,4328 \times 10^{+0}$	$0,1052 \times 10^{+0}$	$0,1766$	$0,243$
2	$0,612\,6998$	$0,4555 \times 10^{-1}$	$0,7254 \times 10^{-1}$	$0,1766$	$1,592$
3	$0,563\,8384$	$0,3305 \times 10^{-2}$	$0,8190 \times 10^{-2}$	$0,2796$	$2,478$
4	$0,567\,1704$	$0,2707 \times 10^{-4}$	$0,6134 \times 10^{-3}$	$0,4078$	$22,66$
5	$0,567\,1433$	$0,1660 \times 10^{-7}$	$\simeq 0$	–	–
6	$0,567\,1433$	$\simeq 0$	–	–	–

La chose la plus importante à remarquer est que le rapport $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ tend vers 0, mais que le rapport $\frac{e_{n+1}}{e_n^2}$ tend vers l'infini, ce qui confirme que l'ordre de convergence se trouve quelque part entre 1 et 2.

De plus, on remarque que le quotient $\frac{e_{n+1}}{e_n^\alpha}$ avec $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, semble se stabiliser autour de $0,4$.

Exercices suggérés du manuel !

- Exercices [a] suggérés : 1, 4, 5, 7-13, 17-19, 22-26, 29, 30.
- Exercices fortement suggérés : 1, 4, 7, 8b, 13, 17, 19, 24, 30.

a. André Fortin : Analyse numérique pour ingénieurs, Presses Internationales Polytechnique 2016.

À Retenir !

Je dois pouvoir répondre aux questions [a] suivantes :

1. Je maîtrise la bissection et son terme d'erreur.
2. Je distingue une racine et un point fixe.
3. Je sais construire la fonction $g(x)$ dont le point fixe correspond à la racine de l'équation $f(x) = 0$.
4. Je sais caractériser un point fixe (répulsif, $\cdots$) et je comprends ce qu'est un bassin d'attraction.
5. Je sais établir la convergence ou non d'une méthode de point fixe.
6. Je comprends et je sais déterminer l'ordre d'une méthode de point fixe.
7. Je sais utiliser l'extrapolation de Aitken.
8. Je connais les particularités que constituent les méthodes de :
   * Steffenson (construction, utilisation et ordre de convergence à connaitre)
   * Newton (utilisation et ordre de la méthode à connaitre)
   * la sécante (utilisation et ordre de la méthode à connaitre)
9. Je comprends la notion de racine multiple et son impact sur la méthode de Newton.
10. Je comprends que toutes ces méthodes sont sensibles à la position du point de départ x_0.
11. Je connais une ou deux méthodes corrigeant la perte d'ordre dans le cas de Newton.
12. Je sais analyser le comportement d'une méthode en me basant sur un tableau de résultat :
    * comportement normal ou anomalie imprévue
    * convergence
    * ordre

---

a. André Fortin : Analyse numérique pour ingénieurs, Presses Internationales Polytechnique, Québec (2016), pages 51-96.