UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Arithmétique (MATH 1413) - Chapitre 6: Les nombres rationnels

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

- ✓ Nous poursuivons notre programme d'extension de l'ensemble des nombres naturels [1].

- ✓ Nous allons définir dans ce chapitre, un ensemble dans lequel tout problème de division aura une solution.

- ✓ Nous pourrons observer un parallèle étroit entre

  - ⋆ le développement du présent chapitre, et

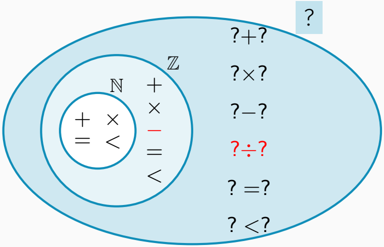
  - ⋆ et la démarche que nous avons suivie au chapitre précédent (lors de l'introduction de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers).

$$\begin{array}{c} \text{Entiers naturels} \\ \mathbb{N} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{Entiers} \\ \mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{Rationnels} \\ \mathbb{Q} = ? \end{array}$$

Les rationnels

- ✓ La non-fermeture de $\mathbb{N}$ (et de $\mathbb{Z}$) pour la division, amène à la recherche d'un **ensemble de nombres** où le problème de la division sera résoluble.
- ✓ Autrement dit, on veut un ensemble tel que le quotient $a \div b$ existe, quels que soient le dividende a et le diviseur $b \neq 0$ donnés dans $\mathbb{Z}$.
- ✓ On a déjà vu comment il est possible, même dans le cas d'une division non exacte, d'associer aux entiers a et b une sorte de quotient (le quotient euclidien).
- ✓ Donc, la non-fermeture de $\mathbb{Z}$ n'est pas liée à la division euclidien.
- ✓ Mais plutôt par rapport à la division exacte.

✓ Le schéma qui suit permet de visualiser l'ensemble dont on veut déterminer.



- ⋆ On y voit les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, munis des opérations $+$, $\times$ et $-$ (partout définie dans $\mathbb{Z}$) ainsi que de la relation $<$.
- ⋆ Nous voulons déterminer l'ensemble le plus simple possible qui contienne $\mathbb{Z}$ et qui soit doté d'opérations $+$, $\times$, $-$ et $\div$.
- ⋆ Et où la dernière $\div$ soit maintenant partout définie, ainsi que de $<$.

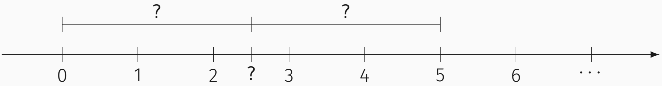
- La droite numérique nous fournit un autre support permettant de voir ces nouveaux nombres dont nous avons besoin.

- En guise de rappel, considérons d'abord le quotient de naturels $6 \div 2$.

- C'est le problème $2 \times \textbf{?} = 6$. On peut interpréter sa solution comme étant la longueur d'un segment qui, juxtaposé à lui-même donne 6; c'est 3.

- **Qu'en est-il maintenant du quotient $5 \div 2$?**

- Si on reprend l'interprétation qui précède, il s'agit de la longueur d'un segment qui, pris 2 fois, donne le point 5.



- Or un tel segment n'existe pas dans $\mathbb{N}$. Mais pourquoi ne pas créer de nouveaux nombre sur la droite numérique afin qu'il existe?

✓ La définition suivante vise à se doter d'un ensemble de nombres dans lequel tout problème de division aura une solution.

Définition

- On appelle **ensemble des rationnels** l'ensemble formé de tous les quotients de deux nombres entiers.
- On le désigne par le symbole $\mathbb{Q}$ et le décrit comme suit

$$\mathbb{Q} = \{a \div b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}. \tag{1}$$

Note:

- La condition $b \neq 0$ résulte évidemment du fait que le problème de division $b \times ? = a$ n'est défini que pour $b \neq 0$.
- La notation $\mathbb{Q}^{\star}$ est utilisée pour représenter l'ensemble des rationnels privé de 0, c'est-à-dire $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Principe de permanence (des lois arithmétiques)

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est muni des deux opérations d'addition et de multiplication qui satisfont également les propriétés $A1 - A5$ et $M0 - M6$ dans $\mathbb{Q}$.

Théorème

- Étant donné $u, v \in \mathbb{Q}$, il n'existe qu'un seul rationnel qui résout le problème de division $u \times ? = v$.
- C'est-à-dire, lorsque deux fractions résolvent toutes deux le même problème de division, alors elles sont égales.

Les fractions

✓ Nous allons à partir de maintenant favoriser une autre façon de représenter les quotients d'entiers: la notation fractionnaire introduite au chapitre 5.

- Avec l'écriture fractionnaire, l'ensemble des rationnels en (1) s'écrit

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}. \tag{2}$$

Note: On parle habituellement de fractions pour désigner les éléments de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire les quotients de deux entiers.

Définition

- Une fraction est un quotient

$$\frac{a}{b}$$

où a et b sont des entiers ($b \neq 0$). Un tel quotient se lit «a sur b».

- Soit la fraction a/b, solution du problème de division $b \times ? = a$:

  ✓ le dividende a prend le nom de numérateur de la fraction,

  ✓ et le diviseur b, celui de dénominateur de la fraction.

  ✓ Le trait séparant le numérateur du dénominateur s'appelle trait ou barre de fraction(on dit aussi barre de division).

Exemple 2.1:

- ✓ On a par exemple que $\frac{4}{7}$, $\frac{-6}{5}$ et $\frac{5}{-3}$ sont des fractions.
- ✓ Tandis que $\frac{30}{\pi}$ n'en est pas une, puisque $\pi \notin \mathbb{Z}$.

Exemple 2.2:

- ✓ Soit la fraction $15/5$. Il s'agit donc de la solution du problème de division $5\times ? = 15$. Et comme $5 \times 3 = 15$, on a

$$\frac{15}{5} = 3.$$

- ✓ Soit maintenant $36/12$, la solution du problème $12\times ? = 36$. Or $12 \times 3 = 36$, de sorte que

$$\frac{36}{12} = 3.$$

- ✓ Alors, ces deux fraction sont égales (d'après le théorème précédent):

$$\frac{15}{5} = 3 = \frac{36}{12}.$$

Nous venons de traiter la question de l'égalité de fractions dans le cas où celles-ci sont des entiers.

Exemple 2.3: On va montrer que

$$\frac{25}{15} = \frac{35}{21}$$

- ✓ La première fraction est, par définition, la solution du problème $15 \times ? = 25$; on a donc

$$15 \times \frac{25}{15} = 25 \tag{3}$$

  On a de même que l'autre fraction résout le problème $21 \times ? = 35$, de sorte que

$$21 \times \frac{35}{21} = 35 \tag{4}$$

- ✓ Multiplions chacun des membres des égalités (3) et (4) par 21 et 15, respectivement; on obtient

$$315 \times \frac{25}{15} = 525 \quad \text{et} \quad 315 \times \frac{35}{21} = 525.$$

- ✓ On constate ainsi que les fractions 25/15 et 35/21 sont toutes deux solution du problème de division $315 \times ? = 525$; elles sont donc égales.

✓ Le théorème suivant nous donne un critère efficace pour déterminer rapidement l'égalité de deux fractions, sans avoir à remonter constamment à un problème de division.

Théorème

Quels que soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, avec $b, d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Longleftrightarrow \quad a \times d = b \times c.$$

Note: L'intérêt de ce résultat est qu'il ramène la vérification de l'égalité de deux fractions à la vérification de l'égalité de deux produits d'entiers, ce que l'on sait faire.

Exemple 2.4:

- ✓ $\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$, puisque $3 \times 10 = 6 \times 5 = 30$.
- ✓ $\frac{-12}{16} = \frac{27}{-36}$, puisque $-12 \times -36 = 16 \times 27 = 432$.
- ✓ $\frac{5}{5} = \frac{-33}{-33}$.
- ✓ Plus généralement on: $\frac{a}{a} = \frac{c}{c}$, quels que soient $a, c \in \mathbb{Z}$.

- ✓ Le résultat suivant fournit une façon fort commode de générer une foultitude de fractions égales entre elles:

  On n'a qu'à multiplier chacun des termes d'une fraction donnée par une même constante.

- Quel que soit l'entier $k \neq 0$,

$$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}.$$

- Lorsque lue de droite à gauche, cette égalité nous donne une règle de simplification des fractions:
  on peut supprimer un facteur commun au numérateur et au dénominateur.

Exemple 2.5: Les fractions suivantes sont toutes égales à $3/12$:

$$\frac{6}{24} = \frac{2 \times 3}{2 \times 12}, \quad \frac{9}{36} = \frac{3 \times 3}{3 \times 12}, \quad \frac{12}{48} = \frac{4 \times 3}{4 \times 12}, \quad \text{etc.}$$

- ✓ Réduire une fraction a/b, c'est la remplacer par une fraction égale qui est «plus simple».

- Si a et b ont un facteur commun supérieur à 1, on dit que la fraction a/b est **réductible**, car on peut la réduire en divisant chacun de ses termes par ce facteur.

- Si par contre a et b sont premiers entre eux (c'est-à-dire lorsque $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$), alors a/b est une fraction **irréductible**,
  - ✓ en ce sens qu'elle est déjà ramenée à sa plus simple expression.
  - ✓ Elle a donc, pour ainsi dire, été réduite «jusqu'au bout».

Exemple 2.6:

- ✓ La fraction $77/87$ est irréductible.
- ✓ La fraction $210/448$ est réductible.
  - ⋆ On peut soit éliminer successivement les facteurs communs 2 et 7:
    - pour obtenir d'abord $105/224$ (qui est elle-même réductible),
    - puis avoir enfin $15/32$ (qui est irréductible).
  - ⋆ Soit réduire directement la fraction donnée à sa plus simple expression par élimination du facteur commun:

$$14 = \mathrm{PGCD}(210, 448).$$

✓ Le résultat suivant confirme la robustesse de la notion de forme réduite: deux fractions égales ont forcément la même forme réduite.

- Soit les deux fractions a/b et c/d. Alors $a/b = c/d$ si, et seulement si, la forme réduite de a/b est la même que la forme réduite de c/d.

- Insistons sur le fait que $a/b = c/d$ n'entraîne pas que $a = c$ et $b = d$.

Exemple 2.7: Par exemple, $6/9 = 10/15$.

Exemple 2.8: Les fractions $24/56$ et $39/91$ sont égales (produits en croix des termes). On ne peut passer de la première à l'autre en multipliant ses termes par un certain naturel. On a cependant

$$\frac{24}{56} = \frac{8 \times 3}{8 \times 7} = \frac{3}{7} \quad \text{et} \quad \frac{39}{91} = \frac{13 \times 3}{13 \times 7} = \frac{3}{7},$$

avec $3/7$ une fraction irréductible.

Fraction entière

- Dans le cas particulier où le dénominateur d'une fraction est 1, on dira qu'il s'agit d'une fraction entière.

Exemple 2.9: Par exemple, $3/1$.

Théorème

- Soit $a \in \mathbb{Z}$. Alors
$$\frac{a}{1} = a.$$
- C'est-à-dire, tout élément de $\mathbb{Z}$ peut être vu comme une fraction.

Fraction décimale

- ✓ Dans notre système usuel de représentation des nombres, le nombre 10 joue un rôle clé en tant que base d'écriture.
- ✓ Il n'est donc pas étonnant qu'on veuille mettre ce nombre en relief dans le contexte des fractions.

On appelle fraction décimale, une fraction a/b qui satisfait à l'une des deux propriétés suivantes:

- soit que le dénominateur b est une puissance de 10 ($b = 10^m$ pour $m \geq 1$),
- soit qu'on peut trouver une fraction c/d égale à a/b et dont le dénominateur d est une puissance de 10.

Exemple 2.10:

- ✓ Voici quelques exemples de fractions décimales :

$$\frac{6}{10}, \frac{33}{100}, \frac{23}{10}, \frac{-144}{100}, \frac{15}{20}, \frac{7}{8}, \frac{8}{5}, \frac{3}{3}.$$

- ✓ Les quatre dernières de ces fractions, lorsqu'on écrit leur dénominateur sous forme de puissance de 10, deviennent

$$\frac{75}{100}, \frac{875}{1000}, \frac{16}{10}, \frac{10}{10}.$$

Note: On aura remarqué que le passage à la forme décimale consiste, dans de tels cas, à multiplier les deux termes de la fraction par une constante appropriée de façon à rendre le dénominateur égal à une puissance de 10.

Exemple 2.11: Par exemple, dans le cas de 7/8 on a:

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \times 125}{8 \times 125} = \frac{875}{1000} = \frac{875}{10^3}.$$

Exemple 2.12:

- ✓ La fraction 7/8 est décimale. On a

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{2^3} = \frac{7 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{7 \times 125}{10^3} = \frac{875}{1000}$$

- ✓ La fraction 53/40 est décimale. On a

$$\frac{53}{40} = \frac{53}{2^3 \times 5} = \frac{53 \times 5^2}{2^3 \times 5^3} = \frac{53 \times 25}{10^3} = \frac{1325}{1000}$$

- ✓ La fraction 555/1250 est décimale. On a

$$\frac{555}{1250} = \frac{555}{2 \times 5^4} = \frac{555 \times 2^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{555 \times 8}{10^4} = \frac{4440}{10000}.$$

- ✓ La fraction 27/60 est décimale. En effet, la ramenant d'abord à sa forme réduite, on trouve

$$\frac{27}{60} = \frac{3^3}{2^2 \times 3 \times 5} = \frac{3^2}{2^2 \times 5} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{9 \times 5}{10^2} = \frac{45}{100}.$$

Pourcentage

✓ Les fractions décimales de dénominateur 100 constituent une classe particulièrement importante.

- Le quotient $a/100$ s'appelle un pourcentage et se représente par la notation spéciale $a\%$ (qui est lue «*a* pour cent», plutôt que «*a* centièmes»).

Exemple 2.13:

✓ J'ai répondu correctement à 16 des 20 questions de l'examen. Ma note est de 80%.

✓ Le taux d'intérêt sur les placements à court terme est maintenant de 4%.

✓ Le taux de chômage cet hiver est de 13%.

- ✓ Mon salaire de l'année dernière était de 25000$ et il est maintenant de 28000$. J'ai donc eu une augmentation de

$$\frac{3000}{25000} = \frac{3}{25} = 12\%.$$

- ✓ On annonce des rabais de 15% sur toute la marchandise.

Exemple 2.14:

✓ Considérons le problème de division

$$\frac{5}{7} \times ? = \frac{1}{3}.$$

- ⋆ Son quotient peut se représenter par la notation $\frac{1}{3} \div \frac{5}{7}$, ou encore,

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{7}}.$$

- ⋆ On pourra faire ressortir le regroupement des termes à l'aide de parenthèses,

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{5}{7}\right)},$$

- ⋆ ou même utiliser un mélange d'écritures qui facilite parfois la lecture:

$$\frac{1/3}{5/7}$$

- ⋆ Ce quotient se ramener à une fraction sous la forme $7/15$.

- ✓ Si on permet l'utilisation des opérations arithmétiques, on peut obtenir des expressions plus ou moins monstrueuses, telle que:

$$\frac{\left(\frac{5}{6}+\frac{13}{15}\right)+\frac{5}{2}\times\left(\frac{\frac{1}{5}-\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}}{\frac{17}{40}-\frac{3}{8}+\frac{7}{5}\times\frac{1}{4}}\right)}{\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{7}+\frac{11}{56}\right)+\frac{2}{5}}.$$

  - ⋆ Il s'agit encore là d'un quotient, donc de la solution d'un certain problème de division (ouf!).
  - ⋆ Les règles de calcul nous disent comment simplifier une telle expression fractionnaire.
  - ⋆ Ces règles la ramenant ainsi à une fraction (on trouve ici 69/28).

- ✓ Dans le cas du chapitre précédent, après avoir défini $\mathbb{Z}$, nous avions introduit une «opération»: l'opposition.
- ✓ Il y aura dans $\mathbb{Q}$ une opération qui y joue un rôle tout à fait analogue: l'inversion.

L’opération d’inversion

L'inverse d'un entier

- ✓ On s'intéresse ici au problème de division $b \times ? = 1$ avec $b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.
- ✓ Autrement dit, on s'intéresse aux quotients d'entiers dont le numérateur est l'élément neutre multiplicatif.

Définition

- La solution (unique) du problème de division $b \times ? = 1$, avec $b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, s'appelle l'inverse de b. Elle se note

$$\frac{1}{b}$$

ce qui se lit «1 sur b».

- L'opération unaire qui à b associe son inverse s'appelle l'**inversion**.

Note:

- L'inverse $1/b$ satisfait donc à l'égalité

$$b \times \frac{1}{b} = 1,$$

qui s'appelle l'égalité caractéristique de l'inverse.

Exemple 3.1:

✓ Par exemple, $1/7$ désigne la solution du problème $7\times? = 1$, et on a $7 \times \frac{1}{7} = 1$.

✓ De même, $1/-5$ est la solution du problème $-5\times? = 1$.

- De façon générale, un inverse d'entier $1/b$ est un «nouveau» nombre, en ce sens que $1/b \notin \mathbb{Z}$.

- Sauf pour les cas $b = 1$ et $b = -1$, où nous avons

$$\frac{1}{1} = 1 \in \mathbb{Z},$$

  c'est-à-dire que 1 est son propre inverse.

- Toute fraction peut s'écrire en termes de l'inverse d'un entier

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}, \quad \text{où} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Définition

- L'inverse du rationnel $\frac{a}{b}$ est le rationnel $\frac{b}{a}$, obtenu par

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{a}.$$

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est fermé pour l'opération d'inversion.
- C'est-à-dire, l'inverse d'un rationnel est toujours un rationnel.

Exemple 3.2:

✓ Par exemple, l'inverse de nombre $\frac{5}{6}$ est $\frac{6}{5}$.

✓ Par exemple, l'inverse de nombre $\frac{1}{5}$ est 5.

Calculer avec les inverses

- Quels que soient les rationnels x et y,

$$\frac{1}{x \times y} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{y}.$$

L'inverse d'un produit de rationnels est le produit des inverses de chacun de ces deux rationnels.

Exemple 4.1:

✓ Par exemple, nous avons $\frac{1}{4\times 2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

✓ On a aussi $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{3\times 5} = \frac{1}{15}$.

- Quels que soient les rationnels non nuls x et y,

$$\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{y}{x}$$

> L'inverse du quotient de deux rationnels est le quotient des inverses de chacun de ces deux rationnels, ou encore le quotient obtenu en interchangeant les deux rationnels.

Exemple 4.2:

- ✓ $\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{2}$.
- ✓ Le produit des deux inverses $\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} \times \frac{1}{\left(\frac{5}{7}\right)}$ peut se réécrire soit comme l'inverse d'un produit $\frac{1}{\left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}\right)}$. Et donc comme le produit de deux fractions $\frac{3}{2} \times \frac{7}{5}$.

- ✓ Dès le début de nos études secondaires, nous savons résoudre l'équation $3x = 12$.
- ✓ La règle qu'on applique consiste à faire passer le coefficient 3 du côté droit de l'égalité, mais en dessous:

$$x = \frac{12}{3} = 4$$

- ✓ Qu'est-ce qui explique au juste un tel comportement «sous-marin» ?
- ✓ C'est là le contenu du prochain résultat.

- Toute équation $a \times x = c$, où a et c sont des entiers et x une variable, admet une solution unique $x = \frac{c}{a} \in \mathbb{Q}$.

Exemple 4.3:

✓ Résolvez l'équation suivante $2x = 1$.

✓ Résolvez l'équation suivante $3x = 7$.

- Toute équation $ax + b = c$, où a, b et c sont des entiers et x une variable, admet une solution unique $x = \frac{c-b}{a} \in \mathbb{Q}$.

Exemple 4.4: Soit l'équation

$$8x + 31 = 12$$

✓ Transférant d'abord le 31 du côté droit de l'égalité, on obtient $8x = 12 + (-31)$, d'où

$$8x = -19$$

✓ Transférant ensuite le 8 du côté droit de l'égalité, on trouve

$$x = (-19)/8$$

L’arithmétique des fractions

- ✓ Nous présentons maintenant les règles de calcul permettant d'évaluer chacune des quatre opérations arithmétiques avec des fractions.
- ✓ Ces règles reposent sur les techniques précédentes de manipulation des inverses.
- ✓ Et sont donc essentiels pour la pratique du calcul dans $\mathbb{Q}$.
- ✓ Nous convenons que dans toute cette section, les variables a, b, c et d représentent des entiers quelconques, avec $b, d \neq 0$.

L'addition de fractions

- L'addition de deux fractions de même dénominateur s'effectue par:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Deux fractions de même dénominateur s'additionnent donc en additionnant les numérateurs et en gardant le même dénominateur.

Exemple 5.1: Par exemple, on a $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}$.

✓ Le théorème précédent nous donne un excellent indice sur la façon de traiter l'addition de deux fractions quelconques.

✓ Il s'agit de les remplacer par deux fractions équivalentes et de même dénominateur.

✓ Cette transformation s'appelle la réduction au même dénominateur.

■ L'addition de deux fractions de dénominateur différente s'effectue:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Exemple 5.2: $\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = \frac{3\times7}{5\times7} + \frac{5\times4}{5\times7} = \frac{3\times7+5\times4}{5\times7} = \frac{21+20}{35} = \frac{41}{35}$.

■ L'ensemble $\mathbb{Q}$ est fermé pour l'addition.

✓ Pour effectuer une addition de deux fractions faisant intervenir des nombres moins gros, on peut l'effectuer comme suit:

■ L'addition de deux fractions de dénominateur différente peut s'obtenir comme suit:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times\frac{\mathrm{PPCM}(b,d)}{b}+\frac{\mathrm{PPCM}(b,d)}{d}\times c}{\mathrm{PPCM}(b,d)}$$

Cette méthode nécessite comme travail préliminaire le calcul d'un PPCM.

Exemple 5.3: Soit à évaluer $\frac{2}{51} + \frac{3}{68}$.

- ✓ Première méthode: En utilisant la première méthode, on a:

$$\frac{2}{51} + \frac{3}{68} = \frac{2 \times 68 + 51 \times 3}{51 \times 68} = \frac{136 + 153}{3468} = \frac{289}{3468}.$$

Simplifiant cette somme, on trouve la fraction irréductible $\frac{1}{12}$.

- ✓ Deuxième méthode: Réduisons au plus petit dénominateur commun. Comme $51 = 3 \times 17$ et $68 = 4 \times 17$, on a

$$\mathrm{PPCM}(51, 68) = 3 \times 4 \times 17 = 204.$$

De plus $204 = 51 \times 4 = 68 \times 3$. D'où les calculs suivants:

$$\frac{2}{51} + \frac{3}{68} = \frac{2 \times 4 + 3 \times 3}{204} = \frac{8 + 9}{204} = \frac{17}{204}.$$

Simplifiant cette fraction, on trouve la fraction irréductible $\frac{1}{12}$.

La soustraction de fractions

- La soustraction de deux fractions de dénominateur différente s'obtient:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Exemple 5.4:

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{5} = \frac{7 \times 5 - 8 \times 3}{8 \times 5} = \frac{35 - 24}{40} = \frac{11}{40}.$$

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est fermé pour la soustraction.

- La multiplication de deux fractions de dénominateur différente s'obtient:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemple 5.5:

$$\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{7 \times 4} = \frac{15}{28}.$$

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est fermé pour la multiplication.

- Quel que soit l'entier k, on a

$$k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}.$$

- Quel que soit le naturel n, on a

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

La division de fractions

- La division de deux fractions s'effectue en multipliant la première fraction par l'inverse de la deuxième:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemple 5.6:

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est fermé pour la division.

L’ordre dans les rationnels

L'ordre dans les rationnels

✓ Nous voulons maintenant étendre à $\mathbb{Q}$ la relation d'ordre définie d'abord sur $\mathbb{N}$, puis sur $\mathbb{Z}$.

- Nous disons qu'une fraction a/b est positive si les deux termes a et b sont tous deux positifs, ou encore tous deux négatifs.
- À l'exception de 0 ($= 0/b$, pour n'importe quel entier $b \neq 0$), les autres fractions sont dites négatives.

Exemple 6.1:

✓ Par exemple, $4/5$ et $-8/-3$ sont deux fractions positives.

✓ $-4/5,\ 5/-6$ sont des fractions négatives.

- Étant donné deux fractions a/b et c/d, nous disons que a/b est plus petit que c/d si et seulement si le problème de soustraction $a/b + ? = c/d$ a une solution positive. Notation

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

- On définit analoguement les relations $\leq, >$ et $\geq$.

Remarque : En d'autres termes,

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff \frac{c}{d} - \frac{a}{b} > 0$$

Exemple 6.2:

✓ $\frac{7}{10} < \frac{11}{15}$, puisque $\frac{11}{15} - \frac{7}{10} = \frac{22-21}{30} = \frac{1}{30} > 0$.

- Une fraction positive a/b satisfait donc à $a/b > 0$.
- Il est d'usage de désigner par $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble des rationnels positifs ou nuls,

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{ \ \tfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ \middle| \ \tfrac{a}{b} \geq 0 \ \right\},$$

- Et par $\mathbb{Q}_+^*$ l'ensemble des rationnels positifs

$$\mathbb{Q}_+^* = \left\{ \ \tfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ \middle| \ \tfrac{a}{b} > 0 \ \right\}.$$

- Soit deux fractions a/b et c/d (avec b et d positifs); alors

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \iff \quad a \times d < b \times c$$

Exemple 6.3:

- ✓ Comparer les fractions $\frac{13}{15}$ et $\frac{16}{19}$.
  Comme $13 \times 19 = 247$ et $15 \times 16 = 240$, on a $\frac{13}{15} > \frac{16}{19}$.

- ✓ Comparer les fractions $\frac{-3}{2}$ et $\frac{1}{6}$.
  Il n'y a aucun calcul à faire: comme la première fraction est négative et l'autre positive, on a $\frac{-3}{2} < \frac{1}{6}$.

- ✓ Comparer les fractions $\frac{-13}{29}$ et $\frac{-4}{9}$.
  On effectue les produits croisés: $-13 \times 9 = -117$ et $29 \times -4 = -116$. Comme $-117 < -116$, on a donc $\frac{-13}{29} < \frac{-4}{9}$.

- ✓ Comparer les fractions $\frac{23}{-17}$ et $\frac{-33}{24}$.
  Il faut d'abord transformer la première fraction en $\frac{-23}{17}$ avant d'appliquer le critère des produits croisés. On trouve $\frac{-23}{17} > \frac{-33}{24}$, puisque $-23 \times 24 = -552 > (-561) = 17 \times (-33)$.

Soit x et y, deux entiers positifs. Alors

$$x < y \iff \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

Exemple 6.4:

- ✓ On a par exemple $3 < 5$ et $1/5 < 1/3$.

  À noter que le résultat ne tient plus si on enlève l'hypothèse que les deux nombres sont positifs

- ✓ Ainsi $-3 < 5$ mais $1/-3 < 1/5$.

- Soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x \geq 0$. Alors
  - ✓ $x^2 > x$, si $x > 1$
  - ✓ $x^2 = x$, si $x = 0$ ou $x = 1$,
  - ✓ $x^2 < x$, si $0 < x < 1$.

Exemple 6.5:

✓ Soit $x = 5/3$. Alors

$$x^2 = \frac{25}{9} > \frac{5}{3} = x.$$

✓ Soit $x = 2/3$. Alors

$$x^2 = \frac{4}{9} < \frac{2}{3} = x.$$

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)

- Disponibilités:
  - Lundi 10H00 - 13H00, MRR B-214
  - Mercredi 10H00 - 13H00, MRR B-214

- Manuels du cours:

[1] B. Hodgson and L. Lessard.
Arithmétique élémentaire (1re et 2e parties).
Département de mathématiques et de statistique Universitée Laval, 1045, av. de la Médecine, Québec (Québec), G1V 0A6, Canada, 2022.