UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Hiver 2024

Série 1 - Optimisation (MATH 3163)

Exercice 1

Soient $h_1, h_2, \ldots, h_p, p$ fonctions convexes : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définies sur le sous-ensemble convexe $S \subset \mathbb{R}^n$. Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in S : f(x) = \text{Max}\,\{h_1(x); h_2(x); \ldots; h_p(x)\}$$

est convexe sur S.

Exercice 2

a Soit f une fonction convexe : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et g une fonction convexe et non décroissante : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Démontrer que la fonction composée $g_0 f$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par : $g_0 f(x) = g[f(x)]$ est convexe.

b Que peut-on dire de la convexité des fonctions suivantes :

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - x_1 x_2$$

$$h\left(x_1, x_2\right) = e^{x_1^2 + 3x_2^2 - x_1 x_2}$$

$$g\left(x_1, x_2\right) = x_1 x_2 - \alpha\left(x_1 + x_2 - 1\right)^2$$ (on discutera suivant les valeurs du paramètre α)

Exercice 3

Soient $u^1, u^2, \ldots, u^K, K$ points donnés de $\mathbb{R}^n$, et $X = \text{conv}\left\{u^1, u^2, \ldots, u^k\right\}$, l'ensemble des points combinaisons convexes de ces K points (X est appelé un polytope de $\mathbb{R}^n$). Soit f une fonction convexe : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Démontrer que le maximum de f sur X est nécessairement atteint en un des points u^k.

Exercice 4

On considère le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$(P)\begin{cases} \text{ Minimiser } f(x) = f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 x_2 + x_2 x_3^2 - 2x_1 x_3 \\ \text{ sous les contraintes :} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1 \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 1 \\ x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Le problème (P) a-t-il une solution optimale ?

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable (de classe C^1). En utilisant la formule classique des accroissements finis pour une fonction dérivable d'une variable, démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall\, y \in \mathbb{R}^n$, il existe $\xi \in [x, y]$ tel que :

$$f(y) - f(x) = \nabla f^T(\xi) \cdot (y - x)$$