Optimisation

MATH 3163

Ibrahima Dione

Hiver 2024

Table des matières

Chapitre 1

Notions fondamentales

Sommaire

1 Définitions

La structure de la plupart des problèmes de programmation mathématique, est un problème d'optimisation sous contrainte qui peut s'écrire de la façon suivante [2, 1] :

$$(P) \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{sous les constraintes :} \\ (i) \quad g_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, m \\ (ii)\ \ h_j(x) \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, p \end{cases} \tag{1.1}$$

où

- le vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est l'inconnue du problème,
- la fonction f est appelée la fonction objectif (appelée parfois fonction économique),
- et l'ensemble des conditions en (i) et en (ii) sont appelées les contraintes du problème d'optimisation.

Définition 1.1

L'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ g_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, m, \text{ et } h_j(x) \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, p\}$ est appelé ensemble des points admissibles.

Définition 1.2

On appelle solution optimale ou optimum global de (P), un point admissible x^* (c'est-à-dire $x^* \in S$) tel que

$$f(x^*) \leq f(x),\ \forall\, x \in S.$$

Note : Soit le vecteur $x = (x_1, \cdots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$.

- La norme euclidienne de x notée $\|x\|$ est définie par

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

- On appelle voisinage de x, l'ensemble noté $V_\varepsilon(x)$ et défini comme suit

$$V_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}, \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 0.$$

Définition 1.3

1. Un vecteur x^* est une solution locale ou optimum local du problème (P), s'il existe un voisinage $V_\varepsilon(x^*)$ de x^* tel que x^* soit optimum global du problème

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{sous les constraintes :} \\ x \in S \cap V_\varepsilon(x^*) \end{cases} \tag{1.2}$$

2. En d'autres termes, $g_i(x^*) = 0,\ i = 1, \ldots, m,\ h_i(x^*) \leq 0,\ i = 1, \ldots, p$ et

$$\exists\, \varepsilon > 0, \quad \text{tel que} \quad f(x) \geq f(x^*) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x \in V_\varepsilon(x^*) \\ g_i(x) = 0,\ i = 1, \cdots, m \\ h_j(x) \leq 0,\ i = 1, \cdots, p \end{cases} \tag{1.3}$$

La figure suivante illustre, à travers une fonction à une seule variable, les notions de solution globale et de solution locale.

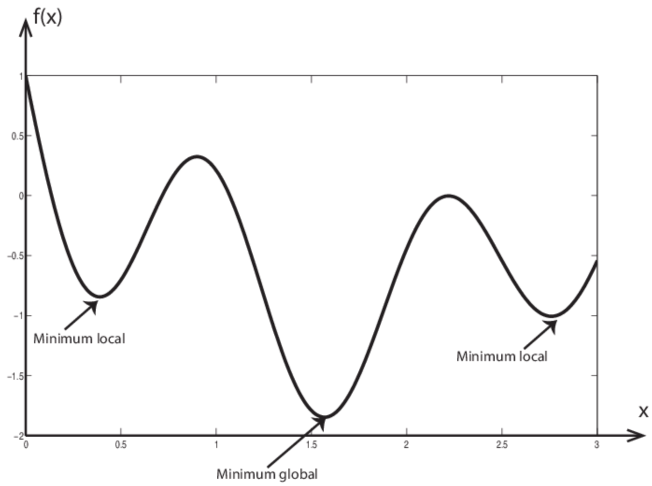


FIGURE 1.1 – Optimum local et optimum global

Nous verrons plus loin qu'il est souvent possible de caractériser les optimums locaux d'un problème, c'est-à-dire de donner des conditions nécessaires et / ou suffisantes pour qu'une solution x soit un optimum local.

Par contre il est généralement impossible de caractériser les optimums globaux d'un problème d'optimisation sauf dans le cas très particulier des fonctions convexes. Ceci explique la difficulté de résolution des programmes mathématiques non convexes.

2 Éléments de topologie et de calcul différentiel

Ce paragraphe est consacré aux rappels de quelques notions fondamentales.

2.1 Éléments de topologie

Nous nous plaçons ici dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme enclidienne $\|\cdot\|$.

- À partir de cette norme, on peut définir la distance $d(x,y)$ entre deux éléments $x=(x_1,\cdots,x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ et $y=(y_1,\cdots,y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ par :

$$d(x,y)=\|x-y\|=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- La boule $B(x,r)$ centrée en x de rayon r est l'ensemble de tous les vecteurs y dans $\mathbb{R}^n$ dont la distance de x est inférieur à r, c'est-à-dire

$$B(x,r)=\{y\in R^n : \|x-y\|<r\}.$$

Note : Notez que dans $\mathbb{R}^1$, la boule $B(x,r)$ n'est que l'intervalle ouvert $(x-r,x+r)$ centré en x de longueur $2r$;

Une suite infinie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$: $x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ sera notée $\left\{x^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ou simplement $\left\{x^k\right\}$.

- On dit que la suite $\left\{x^k\right\}$ converge vers x si la norme $\left\|x^k - x\right\|$ tend vers 0 quand $k \to \infty$ ou, d'une façon équivalente, si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N : \forall\, k \geqslant N \Longrightarrow \left\|x^k - x\right\| < \varepsilon.$$

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

- S est dit fermé si toute suite convergente d'éléments de S a une limite dans S :

$$\left.\begin{array}{l}\left\{x^k\right\} \subset S\\ x^k \longrightarrow x\end{array}\right\} \Rightarrow\ x \in S.$$

- S est dit borné si toute suite d'éléments de S est une suite borné ou, d'une façon équivalente, si S est contenu dans une boule B_M de rayon $M < +\infty$

$$B_M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < M\}\,.$$

- Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est dit compact si, de toute suite infinie $\left\{x^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K, on peut en extraire une sous-suite $\left\{x^\ell\right\}_{\ell\in L}$ $(L \subset \mathbb{N})$ convergeant vers un élément de K.

- Une propriété équivalente dans $\mathbb{R}^n$ est qu'un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact, si et seulement si il est fermé et borné.

- Un sous-ensembles S de $\mathbb{R}^n$ est dit ouvert si, pour tout $x_0 \in S$, il existe un voisinage $V_\varepsilon(x_0)$ de x_0 tel que $V_\varepsilon(x_0) \subset S$.

Exemple 2.1 :

- La boule unité $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ est un ouvert.
- L'ensemble $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$ est un compact.

Maintenant, nous allons énoncer un résultat fondamental concernant l'existence d'une solution optimale pour un problème d'optimisation.

Théorème 2.1

Théorème de Weierstrass

Si f est une fonction réelle continue sur un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ (i.e. K est fermé borné), alors le problème d'optimisation :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in K \end{cases}$$

a une solution optimale $x^\star \in K$.

Preuve :

- Soit $m = \inf_{x \in K}\{f(x)\}$, donc pour tout $x \in K$ on a : $m \leq f(x)$. (Notons que m peut valoir $-\infty$ si l'ensemble $f(K)$ n'est pas minoré).
  On peut alors construire une suite $\{x_k\}$ d'éléments de K telle que $f(x_k) \longrightarrow m$.
- Sachant que K est compact, il existe une sous-suite infinie $\{x_\ell\}_{\ell \in L}$ ($L \subset \mathbb{N}$) convergente vers $x^\star \in K$.
- Comme f est continue, on a alors : $f(x_\ell) \longrightarrow f(x^\star)$ et

$$m = \lim_{k \to \infty} f(x_k) = \lim_{\ell \to \infty} f(x_\ell) = f(x^\star)$$

  Comme $f(x^\star) > -\infty$, on a $m > -\infty$ et pour tout $x \in K$: $f(x^\star) = m \leqslant f(x)$; donc $x^\star \in K$ est une solution optimale du problème posé. □

- Ce résultat reste valide si on suppose f semi-continue inférieurement (s.c.i.).
- Par définition, $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si, pour toute suite convergente $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de limite $\bar{x}$, on a :

$$\liminf_{k \to \infty} f(x_k) \geq f(\bar{x})$$

- $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ est s.c.i. si et seulement si elle est s.c.i. en tout point de $\mathbb{R}^n$.

Le corollaire suivant du théorème de Weierstaass est immédiat mais est souvent utile dans les applications, par exemple dans le cas de l'optimisation sans contraintes où l'on cherche un optimum sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.

Corollaire 2.1

Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant de plus la condition :

$$f(x) \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } \|x\| \longrightarrow +\infty.$$

Alors le problème

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

a une solution optimale $x^\star$.

Preuve :

- Soit $x^\circ \in \mathbb{R}^n$ quelconque. En raison de l'hypothèse de croissance à l'infini, il existe $M > 0$ tel que :

$$\text{tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\| > M \;\Rightarrow\; f(x) > f(x^\circ).$$

- Ainsi, le problème se ramène à un problème d'optimisation sur la boule fermée :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant M\},$$

qui est compacte, et le théorème de Weierstrass s'applique. □

Remarque sur la notation $\min$ **:** L'emploi de la notation

$$\min_{x \in S} f(x)$$

sera reservée à des fonctions f telles que, si

$$-\infty < \inf_{x \in S} f(x) < +\infty,$$

alors il existe $x^\star \in S$ tel que $f(x^\star) = \inf_{x \in S} f(x)$. On pose alors :

$$\min_{x \in S} f(x) = f(x^\star).$$

Exemple 2.2 : Soit la fonction $f(x_1, x_2)$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1.$$

Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x_1, x_2) \geq -1$ et $f(0,0) = -1$; alors

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = -1 = f(0).$$

2.2 Éléments de calcul différentiel

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in U$ fixe. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction définie par $f_i : y \longmapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, est appelée la $i^{\text{ième}}$ fonction partielle de f en x.

- La dérivée de f_i en x_i est appelée la dérivée partielle (première) par rapport à la $i^{\text{ième}}$ composante de f en x et notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Exemple 2.3 : Soit l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et la fonction $f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}$.

- La dérivée partielle par rapport à x est :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2xy^3\left(x^2+y^2\right) - x^2y^3 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ &= \frac{2xy^5}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}$$

- La dérivée partielle par rapport à y est :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{3x^2y^2\left(x^2+y^2\right) - x^2y^3 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ &= \frac{3x^4y^2 + x^2y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2y^2\left(3x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}$$

- Un point $x \in U$ en lequel $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ est appelé point critique ou point stationnaire de f.

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est également appelée dirivée partielle (première) de f par rapport à x_i.

- Si toutes les dérivées partielles premières de f en un point x existent, on appelera le gradient de f au point x le vecteur de $\mathbb{R}^n$:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Exemple 2.4 : Soit $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 8x_2 + x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$. Alors,

$$\nabla f(x_1, x_2)^\top = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right) = (5 + x_2 - 2x_1,\ 8 + x_1 - 4x_2)$$

- On définit de la même manière les dévivées partielles secondes de f (et d'une façon générale les désivées partielles d'ordre m de f où $m \in \mathbb{N}$).

Exemple 2.5 : Par exemple, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ signifie la dérivée de premier ordre de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ par rapport à x_j au point x.

- Une fonction f, telle que toutes ses dérivées partielles d'ordre m existent et sont continues, est dite de classe m et sera notée par $f \in \mathrm{C}^m$.

Définition 2.1

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On appelle dévivée directionnelle de f au point x dans la direction u, la quantité suivante (quand elle existe)

$$f'(x; u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}.$$

Note :

- La dérivée partielle de f au point x par rapport à x_i, peut être définie de manière équivalente par la dérivée directionnelle de f au point x dans la direction

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\uparrow i^{\text{ieme}}\text{composante}}{1}, 0, \ldots, 0)$$

- Si le gradient de f existe au point x, alors on a

$$f'(x; u) = \nabla f(x)^\top u$$

où $\nabla f(x)^\top = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$.

- Si f est de classe C^2, on définit le Hessien (ou la matrice Hessienne) de f en x par la matrice d'ordre n notée $H(x)$ et définie par

$$H(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}$$

$H(x)$ est une matrice symétrique appelée aussi matrice jacobienne associée à f.

Exemple 2.6 : Définissons $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$, et soit

$$d = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\top$$

La dérivée directionnelle de f au point $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans la direction d est

$$f'(x;\, d) = \nabla f(x)^\top d = (x_2x_3,\ x_1x_3,\ x_1x_2)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + \sqrt{2}x_1x_2}{2}.$$

Notez que parce que $\|d\| = 1$, ce qui précède est également le taux d'augmentation de f à x dans la direction d.

Exemple 2.7 :

- Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)$. Son gradient et son Hessien sont

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

  où I est la matrice identité d'ordre n.

- Soit $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax + b^\top x$ où A est une matrice symétrique d'ordre n et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. $x^\top$ signifie le transposé du vecter x, i.e.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x^\top = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

  On a le gradient et le Hessien

$$\nabla f(x) = Ax + b,\ H(x) = A.$$

  Le premier point rentre dans le cadre du deuxième. En effet ;

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) = \frac{1}{2}x^\top Ix.$$

- Soit $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 8x_2 + x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$. Alors,

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

2.3 Développement de Taylor et formule de la moyenne.

- Si f est de classe C^1 dans une région contenant le segment $[x, y]$, alors le développement de Taylor à l'ordre 1 s'écrit :

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x) + o(\|y - x\|),$$

où $o(\|y - x\|) = \|y - x\|\varepsilon(y - x)$ avec $\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\varepsilon(y - x) \longrightarrow 0, \text{ lorsque } \|y - x\| \longrightarrow 0.$$

- Et la formule de la moyenne d'ordre 1 est : il existe $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$ tel que

$$\begin{cases} f(y) = f(x) + \nabla f(\xi)^\top (y - x) \\ \quad \xi = \alpha x + (1 - \alpha)y \end{cases}$$

- Si de plus f est de classe C^2, alors le développement de Taylor à l'ordre 2 s'ecrit :

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^\top H(x)(y - x) + o\left(\|y - x\|^2\right).$$

- Et la formule de la moyenne d'ordre 2 est : il existe $\alpha, 0 < \alpha < 1$ tel que

$$\begin{cases} f(y) = f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^\top H(\xi)(y - x) \\ \quad \xi = \alpha x + (1 - \alpha)y \end{cases}$$

Remarque sur les notations :

- Soient a et b deux points de $\mathbb{R}^n$. On désigne par le segment $[a, b]$ l'ensemble des points $x = ta + (1 - t)b$ où $t \in [0, 1]$

$$[a, b] = \left\{x = ta + (1 - t)b, \text{ tel que } t \in [0, 1]\right\}$$

- Soient $x = (x_1, \cdots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, on note par :

$$x^\top y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

qui n'est autre que le prodruit scalaire euclidien. Parfois ce produit scalaire sera noté tout simplement par (x, y).

3 Rappels sur les matrices définies positives

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice d'ordre n symétrique (i.e, $a_{ij} = a_{ji}, 1 \leq i, j \leq n$).

- A est dite définie positive si

$$x^\top Ax > 0,\ \forall\, x \neq 0 \ \text{ et } \ x \in \mathbb{R}^n.$$

On dit aussi la forme quadratique $x^\top Ax$ est définie positive.

- A est dite semi-définie positive si

$$x^\top Ax \geqslant 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 3.1 :

- Une matrice symétrique avec quelques entrées négatives peut être définie positive. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

correspond à la forme quadratique

$$Q_A(x) = x^\top Ax = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2.$$

Puisque $Q_A(x) = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$, on voit que si $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$, alors $Q_A(x) > 0$ puisque $(x_1 - x_2)^2 > 0$ si $x_1 \neq x_2$ et $3x_2^2 > 0$ si $x_1 = x_2$.

- La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

est défini positif car la forme quadratique associée $Q_A(x)$ est

$$Q_A(x) = x^\top Ax = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2$$

et donc $Q_A(x) > 0$ sauf si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Le résultat suivant permet de donner une caractérisation des matrices symétriques définies positives.

Théorème 3.1

Une matrice A symétrique est définie positive si et seulement si tous les mineurs principaux successifs de la matrice A sont strictement positifs.

Note :

- Les mineurs principaux successifs sont les déterminants des sous matrices carrées obtenues en éliminant successivement la dernière ligne et la dernière colonne.
- Pour une matrice $n \times n$, il y a n mineurs principaux.

Exemple 3.2 :

- Par exemple, si on considère la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- alors les trois mineurs principaux sont les trois déterminants

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Note : Nous ne pouvons pas affirmer ou non qu'une matrice est semi-définie positive pour le fait que les mineurs principaux sont positifs ou nuls !

Exemple 3.3 :

- Soit la matrice A donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Alors, on a ses mineurs principaux

$$a_{11} = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 25 = 13$$

Puisque tous les mineurs principaux sont strictement positifs, A est définie positive.

- Soit une autre matrice A donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

On a

$$a_{11} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Tous les mineurs principaux de A sont positifs ou nuls, et pourtant la matrice A n'est pas semi-définie positive. En effet, calculons $x^\top Ax$

$$\begin{aligned}(x, y, z)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= (x, y, z)\begin{pmatrix} z \\ -y - z \\ x - y + z \end{pmatrix} \\ &= 2xz - 2yz - y^2 + z^2\end{aligned}$$

Ainsi en prenant $(x, y, z) = (0, 1, 0)$, on observe que $(0, 1, 0)A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$.

Note : Soit A une matrice symétrique. Alors on a les résultats suivants :

- A est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
- A est semi-définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles.

4 Ensembles et fonctions convexes

Dans les poblèmes d'optimisation, avec ou sans contraintes, une notion va jouer un rôle très important : celle de convexité [3].

4.1 Ensembles convexes

Définition 4.1

- Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si et seulement si :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, x \in S \\ \forall\, y \in S \\ \forall\, \lambda \in [0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in S.$$

- C'est équivalent à dire que :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, x \in S \\ \forall\, y \in S \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ le segment } [x,y] \subset S.$$

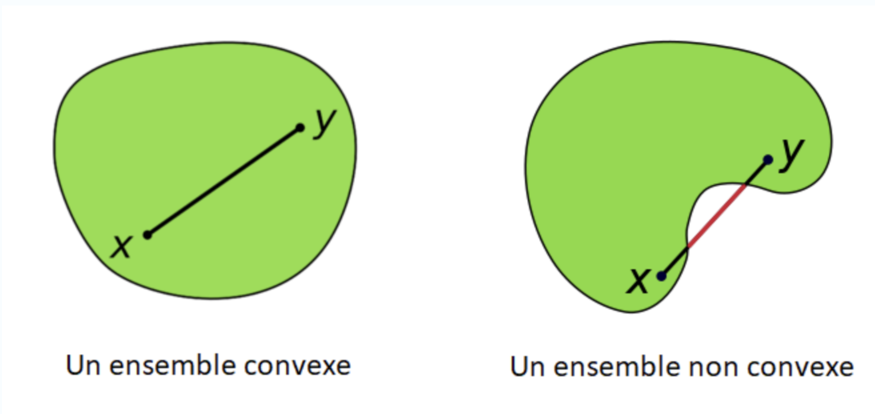


FIGURE 1.2 – Convexité d'un ensemble.

Exemple 4.1 :

- Par exemple, l'ensemble $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 4\} \subset \mathbb{R}^3$ est un plan dans $\mathbb{R}^3$. En prenant $a^\top = (1, 2, -1)$ et $c = 4$, alors l'ensemble H s'écrit

$$H = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : a^\top x = c\right\}$$

qui est bien un hyperplan et est convexe.

1. L'ensemble $H = \left\{x \in \mathbb{R}^n,\ a^\top x = c\right\}$ est appelé un **hyperplan dans $\mathbb{R}^n$**, où $a^\top = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ est un vecteur non nul dans $\mathbb{R}^n$, généralement appelé gradient ou normal à l'hyperplan, et c est un scalaire.

Note : Un hyperplan est un ensemble convexe !

2. Notez que si $\overline{x} \in H$, nous avons $a^\top \overline{x} = c$, alors de manière équivalente

$$H = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^\top (x - \overline{x}) = 0\right\}$$

Donc le vecteur a est orthogonal à tous les vecteurs $(x - \overline{x})$ pour $x \in H$.

Note : Le vecteur a est perpendiculaire à l'hyperplan H.

- L'ensemble $H_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4\} \subset \mathbb{R}^3$ est l'ensemble des points d'un côté de l'hyperplan H défini ci-dessus. H_1 forme un demi-espace et est convexe.

Note : En général, un demi-espace $H_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^n,\ a^\top x \leq c\right\}$ dans R^n est un ensemble convexe.

4.2 Fonctions convexes

Définition 4.2

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe. On dit que :

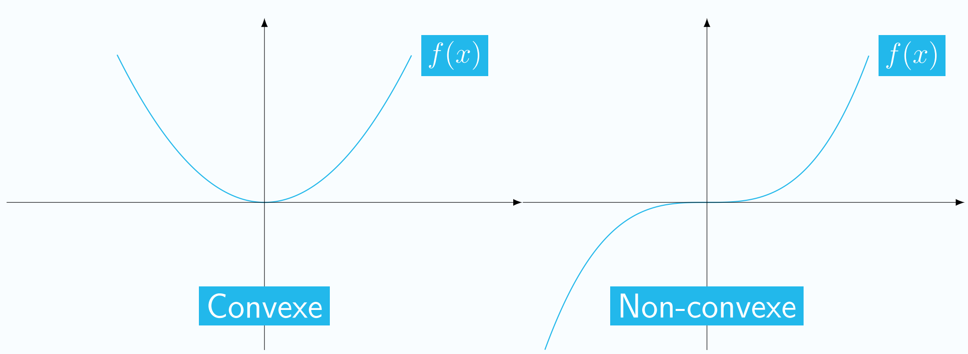
1. $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe, si elle vérifie pour tout $x,\ y \in S$ et tout $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

2. f est dite strictement convexe, si elle vérifie pour tout $x,\ y \in S$ et tout $\lambda \in]0, 1[$

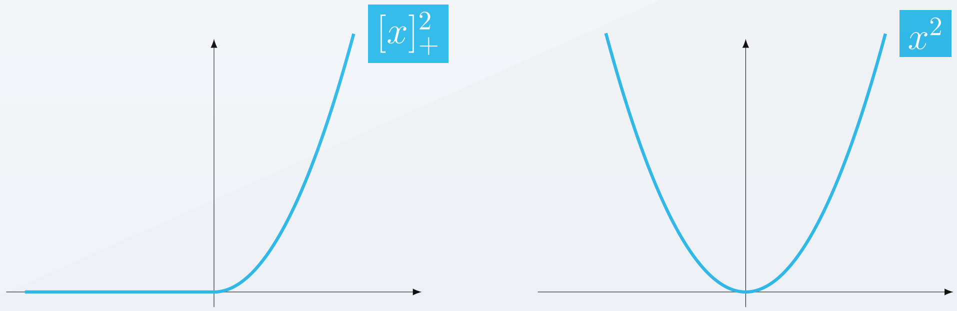
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

Géométriquement, une fonction est convexe si le segment joignant deux points du graphe se situe au dessus de celui-ci.



Exemple 4.2 :

- La fonction $f(x) = [x]_+^2$ est convexe, où par définiton $[x]_+ = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$.



- Alors que les fonctions $g(x) = e^x$ et $h(x) = x^2$, sont strictement convexes.

Propriété 4.1

1. La somme de deux fonctions convexes est convexe.
2. Le produit d'une fonction convexe par un scalaire positif est convexe.

Théorème 4.1

Soit $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, où S est un ensemble convexe. La fonction f est convexe si et seulement si $\forall\, x,\ y \in S,\ f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x)$.

Preuve :

- **Condition nécessaire :**
  - ✓ Supposons que f est convexe. Alors $\forall\, \alpha \in [0, 1]$,

$$f(\alpha y + (1-\alpha)x) \leqslant \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x)$$
$$\frac{f(x + \alpha(y - x)) - f(x)}{\alpha} \leqslant f(y) - f(x),\ \forall\, \alpha \in]0, 1].$$

  - ✓ En passant à la limite vers 0 en α, on obtient

$$\nabla f(x)^\top (y - x) \leqslant f(y) - f(x)$$

- **Condition suffisante :**
  - ✓ Supposons que $f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x),\ \forall\, x, y \in S$. Fixons $x_1, x_2 \in S$ (mais quelconques) et $\alpha \in [0, 1]$. Posons

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in S \ \ \text{(car } S \text{ est convexe), et } \ y = x_1.$$

Alors, on a :

$$f\left(x_1\right) \geqslant f(x)+\nabla f(x)^{\top}\left(x_1-x\right) \tag{1.4}$$

✓ Puis fixons $y=x_2$. Alors, on a :

$$f\left(x_2\right) \geqslant f(x)+\nabla f(x)^{\top}\left(x_2-x\right) \tag{1.5}$$

✓ Multiplions (1.4) par α et (1.5) par $(1-\alpha)$ et ajoutons ces termes membre à membre, on obtient

$$\alpha f\left(x_1\right)+(1-\alpha) f\left(x_2\right) \geqslant f(x)+\nabla f(x)^{\top} \underbrace{\left(\alpha x_1+(1-\alpha) x_2-x\right)}_{=0}$$

$$\text{donc } \; f\left(\alpha x_1+(1-\alpha) x_2\right) \leq \alpha f\left(x_1\right)+(1-\alpha) f\left(x_2\right).$$ □

Exemple 4.3 :

- Soit la fonction $f(x)=a_0+a_1 x_1+\cdots+a_n x_n=a_0+a^{\top} x$. Alors, on a

$$\nabla f(x)=\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)^{\top}=a.$$

D'autre part, on a

$$f(y)-f(x)=a^{\top}(y-x) \;\text{ et }\; \nabla f(x)^{\top}(y-x)=a^{\top}(y-x).$$

On peut donc noter l'égalité $f(y)-f(x)=\nabla f(x)^{\top}(y-x)$, et en déduire donc que f est convexe.

- Soit la fonction $f\left(x_1, x_2\right)=\left|x_1\right|$. Cette fonction n'est pas de classe C^1 mais elle est convexe. En effet, pour $x=\left(x_1, x_2\right)$ et $y=\left(y_1, y_2\right)$ on a

$$\begin{aligned} f(\alpha x+(1-\alpha) y) &= f\left(\alpha x_1+(1-\alpha) y_1, \alpha x_2+(1-\alpha) y_2\right) \\ &= \left|\alpha x_1+(1-\alpha) y_1\right| \\ &\leq \alpha\left|x_1\right|+(1-\alpha)\left|y_1\right| \end{aligned}$$

donc $f(\alpha x+(1-\alpha) y) \leqslant \alpha f(x)+(1-\alpha) f(y)$.

Théorème 4.2

Soit $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors f est convexe si et seulement si pour tout $x \in S$, la matrice Hessienme $H(x)$ est semi-définie positive.

Preuve :

- Condition nécessaire :

✓ Soit $x \in S$ et soit $z \in \mathbb{R}^n$. Il existe un $t \in \mathbb{R}$ (suffisamment petit) tel que $x + tz \in S$.

✓ D'après la formule de Taylor, on a :

$$f(x+tz) = f(x) + t\nabla f(x)^\top z + \frac{1}{2}t^2 z^\top H(\xi) z,$$

où $\xi = \alpha x + (1-\alpha)(x+tz)$, avec $\alpha \in]0,1[$.

✓ Comme f est convexe, alors

$$\begin{aligned} f(x+tz) &= f(x) + t\nabla f(x)^\top z + \frac{1}{2}t^2 z^\top H(\xi) z \\ &\geqslant f(x) + t\nabla f(x)^\top z \\ \text{i.e.,} \quad \frac{1}{2}t^2 z^\top H(\xi) z &\geqslant 0 \Rightarrow z^\top H(\xi) z \geq 0, \ \forall\, \xi \end{aligned}$$

Lorsque $t \longrightarrow 0$, on a $\xi \to x$ et $H(\xi) \to H(x)$, car $H \in C^0$ (puisque $f \in C^2$). D'où $z^\top H(x) z \geq 0$ et c'est vrai pour tout $z \in \mathbb{R}^n$.

- Condition suffisante :

✓ D'après la formule de Taylor, on a pour tout $x, y \in S$:

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^\top (y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^\top H(\xi)(y-x)$$

avec $\xi \in [x,y] \subset S$ (car S est convexe).

✓ Or par hypothèse on a : $(y-x)^\top H(\xi)(y-x) \geq 0$ d'où,

$$f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^\top (y-x),$$

ce qui entraîne (d'après le Théorème 4.1) que f est convexe. □

Théorème 4.3

Si $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 et si la matrice Hessienne $H(x)$ en tout point x de S est définie positive alors f est strictement convexe.

Preuve :

- La formule de Taylor donne :

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^\top (y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^\top H(\xi)(y-x)$$

où $x, y \in S$ et $\xi \in [x,y] \subset S$ (S convexe).

- Comme $H(z)$ est définie positive pour tout $z \in S$ alors

$$\frac{1}{2}(y-x)^\top H(\xi)(y-x) > 0, y \neq x, \text{ d'où } f(y) > f(x) + \nabla f(x)^\top (y-x), \; \forall\, x, y \in S.$$

- Fixons, $x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2$ (quelconques) et soit $\lambda \in]0,1[$. Posons $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$ et $y = x_1$, on a :

$$f(x_1) > f(x) + \nabla f(x)^\top (x_1 - x) \tag{1.6}$$

De même en posant $y = x_2$, on obtient

$$f(x_2) > f(x) + \nabla f(x)^\top (x_2 - x) \tag{1.7}$$

- Multiplions (1.6) par λ et (1.7) par $(1-\lambda)$ et ajoutons terme à terme, on obtient

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) > f(x) + \nabla f(x)^\top \underbrace{(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x)}_{=0}$$

$$\text{d'où} \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

pour tous $x_1, x_2 \in S, \; x_1 \neq x_2$ et pour tout $\lambda \in]0,1[$. □

Note : Dans le théorème précédent, la condition sur la matrice Hessienne est une condition suffisante mais pas nécessaire.

Les notions d'ensemble convexe et de fonction convexe sont reliées par ce résultat :

Théorème 4.4

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors pour tout M fini l'ensemble $S_M = \{x \in C, f(x) \leq M\}$ est convexe.

Preuve :

- Soit $x, y \in S_M$, donc on a $x, y \in C$ (par définition de S_M) et comme C est convexe alors $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$, pour tout $\alpha \in [0,1]$.
- Comme f est convexe, alors

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1-\alpha)y) &\leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \\ &\leqslant \alpha M + (1-\alpha) M = M \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\alpha x + (1-\alpha)y \in S_M$. □

Exemple 4.4 : Soit la fonction convexe $f(x,y) = |x| + y^2$; l'ensemble

$$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \leq 2\}$$

est alors convexe.

Le résultat suivant montre que la notion de solution locale et globale est identique dans le cas des progammes convexes.

Théorème 4.5

Pour un programme convexe de la forme

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in S \end{cases}$$

où S est un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe, tout optimum local est aussi optimum global.

Preuve :

- Soit x^* un optimum local. Pour montrer que x^* est un optimum global, considérons $y \in S$, $y \neq x^*$ quelconque et montrons que nécessairement $f(x^*) \leq f(y)$.
- Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe au moins un $y \in S$ $(y \neq x^*)$ tel que $f(x^*) > f(y)$.
- Comme f est convexe et que S est convexe alors pour tout $\alpha \in]0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f\left(x^* + \alpha\left(y - x^*\right)\right) &= f\left(\alpha y + (1-\alpha) x^*\right) \\ &\leqslant \alpha f(y) + (1-\alpha) f\left(x^*\right) \\ &< f\left(x^*\right), \quad \text{car} \quad \alpha(f(y) - f(x^*)) < 0, \ \forall\, \alpha \in]0,1]. \end{aligned}$$

D'où la contradiction car x^* est un optimum local (il suffit de prendre α assez petit). □

Note : La démonstration du théorème précédant en y introduisant les contraintes $g_i(x) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$ est la même à condition que toutes les fonctions g_i soient convexes.

Chapitre 2

Optimisation sans contraintes

Sommaire

Le problème étudié ici est celui de la recherche du minimum (ou du maximum) d'une fonction réelle $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, de n variables réelles $x_1, x_2, \cdots, x_n$, chacune de ces variables pouvant prendre n'importe quelle valeur de $-\infty$ à $+\infty$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{2.1}$$

Le problème (2.1) s'agit donc de déterminer un point $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)^\top \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ f\left(x^*\right) \leqslant f(x),$$

c'est-à-dire un minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$ [2]. Lorsque l'inégalité stricte $f\left(x^*\right) < f(x)$ est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq x^*$, le minimum global x^* est alors unique.

Pour beaucoup de problèmes d'optimisation sans contraintes, les principales méthodes de résolution connues ne permettent pas la détermination d'un minimum global : il faut alors se contenter d'optimums locaux. Nous allons voir maintenant comment de tels points peuvent être caractérisés.

1 Conditions d'optimalité

1.1 Conditions nécessaires d'optimalité

Théorème 1.1

Condition nécessaire du premier ordre

Soit f une fonction de classe C^1. Une condition nécessaire pour que x^* soit un minimum local de f est :

$$\nabla f(x^*) = 0, \quad \text{(stationnarité)}. \tag{2.2}$$

Preuve :

- x^* est un minimum local de f, alors il existe un voisinage de x^* noté $V_\varepsilon(x^*)$ t.q.

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \text{pour tout} \quad x \in V_\varepsilon(x^*). \tag{2.3}$$

- Soit $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ d'autre part une suite de nombres réels strictement positifs, qui tend vers 0. Construisons ainsi la suite $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ comme suit

$$x^k = x^* - \varepsilon_k \nabla f(x^*). \tag{2.4}$$

Ainsi, en remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons l'égalité

$$\begin{aligned} \|x^k - x^*\| &= \| - \varepsilon_k \nabla f(x^*)\| \\ &= \varepsilon_k \|\nabla f(x^*)\| \end{aligned}$$

alors à partir d'un certain k suffisamment grand, on a $x^k \in V_\varepsilon(x^*)$. Et d'après (2.3), on a alors $f(x^*) \leq f(x^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grand.

- Finalement, f étant de classe C^1, d'après la formule de la moyenne d'ordre 1 on a :

$$0 \leqslant f\left(x^k\right) - f(x^*) = \nabla f\left(\xi^k\right)^\top \cdot \left(x^k - x^*\right), \quad \text{où} \quad \xi^k \in \left[x^k, x^*\right]. \tag{2.5}$$

Ainsi tenant compte de (2.4), on obtient à partir de (2.5)

$$0 \leqslant f\left(x^k\right) - f(x^*) = -\varepsilon_k \nabla f\left(\xi^k\right)^\top \nabla f(x^*).$$

Ce qui entraine $\nabla f\left(\xi^k\right)^\top \nabla f(x^*) \leqslant 0$, pour $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. Or

$$\lim_{k\to+\infty} \nabla f\left(\xi^k\right) = \nabla f(x^*),$$

car ∇f est continue du fait que f est de classe C^1. On obtient finalement

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} \nabla f\left(\xi^k\right)^\top \nabla f(x^*) &= \nabla f(x^*)^\top \nabla f(x^*) \\ &= \|\nabla f(x^*)\|^2 \leqslant 0, \ \text{i.e. }, \nabla f(x^*) = 0. \end{aligned}$$

□

Exemple 1.1 : Considérons le problème de minimisation suivant

$$\min_{x_1,x_2\geq 0} f(x_1,x_2), \quad \text{où} \quad f(x_1,x_2) = x_1^2 + 0.5x_2^2 + 3x_2 + 4.5.$$

Est-ce que les points suivants sont des minimums de ce problème ?

$$x = (1,3)^\top, \quad x = (0,0)^\top$$

Réponse :

- Le point $(x_1,x_2) = (1,3)^\top$ est un point intérieur de

$$S = \{(x_1,x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

En ce point $(x_1,x_2) = (1,3)^\top$, nous avons

$$\nabla f(x_1,x_2) = (2x_1, x_2+3)^\top = (2,6)^\top \neq (0,0)^\top.$$

Par conséquent, la condition de stationnarité $\nabla f(x_1,x_2) = 0$ n'est pas vérifiée. Le point $(x_1,x_2) = (1,3)^\top$ n'est pas un minimum local.

Si de plus f est de classe C^2 alors on a le théorème :

Théorème 1.2

Condition nécessaire du 2ième ordre

On suppose que f est une fonction de classe C^2. Une condition nécessaire pour que x^* soit un minimum local de f est que le Hessien $H(x^*)$ est une matrice semi-définie positive, c'est-à-dire

$$y^\top H(x^*)\, y \geqslant 0, \ \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve :

- Soit $z \in \mathbb{R}^n$ et $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui tend vers 0. On définit la suite $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ comme suit

$$x^k = x^* + \varepsilon_k z. \tag{2.6}$$

- En appliquant la formule de la moyenne d'ordre 2, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &\leq f\left(x^k\right) - f\left(x^*\right) \\ &= \nabla f\left(x^*\right)^\top \left(x^k - x^*\right) + \frac{1}{2}\left(x^k - x^*\right)^\top H\left(\xi^k\right)\left(x^k - x^*\right) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_k^2 z^\top H\left(\xi^k\right) z, \quad \text{où } \xi^k \in \left[x^k, x^*\right]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

car $\nabla f(x^*) = 0$ (d'après le théorème 1). Alors, on obtient à partir de (2.7) que

$$z^\top \cdot H\left(\xi^k\right) \cdot z \geqslant 0, \ \forall\, k \ \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} z^\top \cdot H\left(\xi^k\right) \cdot z \geqslant 0,$$
$$z^\top \cdot H\left(x^*\right) \cdot z \geqslant 0, \ \forall\, z \in \mathbb{R}^n. \qquad \square$$

Note :

- Les théorèmes 1.1 et 1.2 permettent de caractériser les minimums locaux et non de les calculer, donc d'exclure les points qui ne sont pas solutions.
- Un point x^* qui vérifie la condition (2.2), c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \ i = 1, \cdots, n$, est appelé un point stationnaire.

Exemple 1.2 : Considérons le problème de minimisation suivant

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y), \quad \text{où} \quad f(x,y) = x^3 - x^2y + 2y^2.$$

- Déterminons les points qui annulent le gradient. On a,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2xy \\ -x^2 + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{cases} 3x^2 - 2xy = 0 \\ -x^2 + 4y = 0. \end{cases}$$

  $(x,y) = (0,0)$ est une solution évidente du système. Si $x \neq 0$, alors on obtient à partir de la première équation du système $y = (3/2)x$. Ainsi, la deuxième équation devient $-x^2 + 6x = 0$, d'où $x = 6$ et $y = 9$. Il y a alors deux points stationnaires :

$$(0,0) \quad \text{et} \quad (6,9).$$

- Calculons le Hessien de f :

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x - 2y & -2x \\ -2x & 4 \end{bmatrix}$$

  On a alors,

$$H(6,9) = \begin{bmatrix} 18 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$$

  qui n'est pas semi-définie positive, par conséquent $(6,9)$ n'est pas un minimum.

1.2 Conditions suffisantes d'optimalité

Théorème 1.3

Condition suffisante du $2^{\text{ième}}$ ordre

Soit f de classe C^2. Une condition suffisante pour que x^* soit un minimum local de f est :

$$\nabla f(x^*) = 0 \text{ et le Hessien } H(x^*) \text{ est une matrice définie positive.}$$

Preuve :

- Considérons un point x^* vérifiant les conditions suivantes :

$$\nabla f(x^*) = 0 \text{ et } H(x^*) \text{ définie positive.}$$

- Le développement de Taylor de f au voisinage de x^* s'écrit :

$$f(x) = f(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^\top \cdot H(x^*) \cdot (x - x^*) + o\left(\|x - x^*\|^2\right), \tag{2.8}$$

où $o\left(\|x - x^*\|^2\right) = \|x - x^*\|^2 \varepsilon(x - x^*)$ avec $\varepsilon(x - x^*) \to 0$ lorsque $\|x - x^*\| \to 0$. Pour toute direction de déplacement $d \in \mathbb{R}^n$ ($\|d\| = 1$), en prenant $x = x^* + \theta d$, on obtient à partir de (2.8) la nouvelle formule

$$f(x^* + \theta d) = f(x^*) + \frac{1}{2}\theta^2 d^\top \cdot H(x^*) \cdot d + o\left(\theta^2\right).$$

- Comme $H(x^*)$ est définie positive, alors pour θ suffisamment petit, on aura :

$$f(x^* + \theta d) \geqslant f(x^*).$$

Donc, x^* est bien un minimum local. $\square$

Note : Dans le cas d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ de classe C^2, on peut montrer le critère suivant : Pour tout point (x^*, y^*) de $\mathbb{R}^2$ tel que $\nabla f(x^*, y^*) = 0$, posons

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*)\right)^2.$$

Alors :

1. (x^*, y^*) est un minimum local, si $\Delta > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) > 0$.
2. (x^*, y^*) est un maximum local, si $\Delta > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) < 0$.
3. Si $\Delta < 0$, alors (x^*, y^*) est un point-selle.

4 Si $\Delta = 0$, on ne peut rien conclure.

Exemple 1.3 : Revenons à l'exemple de minimisation précédant $\min x^3 - x^2y + 2y^2$.

- On peut voir que $(6, 9)$ est un point stationnaine et qu'il n'est pas un minimum.
- En réalité c'est un point-selle, car on observe de plus que

$$\Delta = 18 \times 4 - 12 \times 12 = 8(9 - 18) < 0$$

- Par contre pour le point stationncine $(0, 0)$, on ne peut rien conclure car $\Delta = O$ du fait que

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.3 Cas des fonctions convexes et formes quadratiques

• 1.3.1 - Cas des fonctions convexes

Pour une fonction convexe, on a le théorème suivant.

Théorème 1.4

Soit f une fonction convexe de classe C^1. Une condition nécessaire et suffisante pour que x^* soit un optimum global de f est que $\nabla f(x^*) = 0$.

Preuve :

- **Condition nécessaire :** Si x^* optimum global, alors x^* est un optimum local et donc

$$\nabla f(x^*) = 0, \quad \text{(d'après le théorème 2.1)}$$

- **Condition suffisante :** f étant convexe, alors d'après Théorème 4.1 - chap. I, on a

$$f(x) \geqslant f(x^*) + \nabla f(x^*)^\top \cdot (x - x^*), \; \forall \, x \in \mathbb{R}^n$$

Et comme $\nabla f(x^*) = 0$, alors on obtient finalement

$$f(x) \geqslant f(x^*), \; \forall \, x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{i.e.,}$$

x^* est un minimum global. □

Théorème 1.5

Un minimum d'une fonction strictement convexe est unique.

Preuve :

- Supposons qu'il existe deux minimums x^* et ξ^* avec $x^* \neq \xi^*$. Alors,

$$f\left(x^*\right) \leqslant f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

et

$$f\left(\xi^*\right) \leqslant f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Ce qui implique, en particulier, que $f\left(x^*\right) = f\left(\xi^*\right)$.

- Or f est strictement convexe, donc

$$\begin{aligned} & f\left(\lambda x^* + (1-\lambda)\xi^*\right) < \lambda f\left(x^*\right) + (1-\lambda) f\left(\xi^*\right),\ \forall\, \lambda \in]0,1[, \\ \text{i.e.}\quad & f\left(\lambda x^* + (1-\lambda)\xi^*\right) < f\left(x^*\right). \end{aligned}$$

D'où la contradiction ! Par suite, on a $x^* = \xi^*$. □

• 1.3.2 - Cas des formes quadratiques

Soit A une matrice symétrique d'ordre n. Soit la fonctionnelle quadratique

$$\begin{aligned} J : \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R} \\ x \longrightarrow J(x) &= \frac{1}{2}(Ax,\, x) + (b,\, x) + c \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c, \end{aligned}$$

où b est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$ une constante.

Note :

- Un point critique de la fonctionnelle quadratique $J(x) = \frac{1}{2}(Ax,\, x) + (b,\, x) + c$, s'obtient en résolvant le système linéaire

$$Ax + b = 0.$$

- Si A est semi-définie positive alors J est convexe et dans ce cas x^* est un minimum si et seulement si $Ax^* + b = 0$.
- Si de plus A est définie positive, alors J admet un minimum unique donné par

$$x^* = -A^{-1}b.$$

2 Méthodes numériques : cas des fonctions différentiables

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Comme, dans tous les cas, la stationnarité de f est une condition nécessaire d'optimalité, pratiquement toutes les méthodes d'optimisation sans contraintes consistent à rechercher un point x^* stationnaire, i.e.,

$$\nabla f\left(x^*\right) = 0.$$

Ce problème est équivalent à la résolution du système d'équations non linéaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^*\right) = 0, \ \ i = 1, \ldots, n.$$

On peut chercher à résoudre directement ce système, ce qui conduit à la méthode de Newton. Cette méthode suppose la fonction f de classe C^2 et nécessite le calcul des dérivées secondes en chaque point.

C'est pourquoi les méthodes les plus couramment utilisées procèdent différemment : il s'agit de procédures itératives où l'on engendre une suite de points $x^0, x^1, \ldots, x^k$ convergeant vers un optimum local de f.
A chaque étape k, x^{k+1} est défini par $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$, où d^k est une direction de déplacement qui peut être ($\alpha_k > 0$) :

1. soit l'opposé du gradient de f en x_k : $d^k = -\nabla f\left(x^k\right)$;
2. soit une direction calculée à partir du gradient $\nabla f\left(x^k\right)$;
3. soit choisie de façon à constituer une direction de descente, c'est-à-dire telle que

$$\nabla f\left(x_k\right)^\top \cdot d^k < 0.$$

Note : La condition sur la direction d^k

$$\nabla f\left(x^k\right)^\top \cdot d^k < 0, \quad \text{(i.e. direction de descente)}$$

peut être expliquée de la manière suivante :

- A la $k^{\text{ième}}$ itération, on choisit une direction d^k et un scalaire $\alpha_k > 0$ tel que

$$f\left(x^{k+1}\right) < f\left(x^k\right) \tag{2.9}$$

- La direction d^k et le scalaire α_k permettent de calculer x^{k+1} par

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k \tag{2.10}$$

- On peut caractériser la direction d^k en considérant les développements en série de Taylor de $f\left(x^{k+1}\right)$ en fonction de $f\left(x^k\right)$ et $\nabla f\left(x^k\right)$ quand α_k tend vers 0,

$$f\left(x^{k+1}\right) = f\left(x^k + \alpha_k d^k\right) \simeq f\left(x^k\right) + \alpha_k \nabla f\left(x_k\right)^\top \cdot d^k$$

Pour satisfaire (2.9), le choix de d^k doit être tel que $\nabla f\left(x^k\right)^T \cdot d^k < 0$.

2.1 Méthode de gradient

Il s'agit ici de se déplacer dans la direction opposée au gradient, c'est-à-dire

$$d^k = -\frac{\nabla f\left(x^k\right)}{\|\nabla f\left(x^k\right)\|}.$$

Algorithme : L'algorithme est le suivant :

- On part d'un point x^0, on calcule le gradient $\nabla f\left(x^0\right)$ et définit le point x^1 par

$$x^1 = x^0 - \alpha_0 \frac{\nabla f\left(x^0\right)}{\|\nabla f\left(x^0\right)\|}, \quad \text{où} \quad \alpha_0 > 0.$$

- La procédure est répétée et engendre les points $x^0, x^1, \ldots, x^k$ suivant la relation

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k \frac{\nabla f\left(x^k\right)}{\|\nabla f\left(x^k\right)\|}, \quad \text{où} \quad \alpha_k > 0, \ \forall\, k.$$

2.2 Méthode du gradient à pas déterminé

C'est la méthode de gradient dans laquelle on choisit a priori les valeurs de déplacements α_k. L'inconvenient de cette méthode est que la convergence peut être très lente. Le principal intérêt des méthodes de gradient à pas déterminé est de se généraliser au cas des fonctions non partout différentiables.

2.3 Méthode de la plus forte pente (steepest descent)

• 2.3.1 - Fonction quelconque de classe C^1

Dans cette méthode d'utilisation très courante, on choisit $d^k = -\nabla f\left(x^k\right)$ et α_k est choisi de façon à minimiser la fonction d'une variable α :

$$g(\alpha) = f\left(x^k - \alpha \nabla f\left(x^k\right)\right)$$

sur l'ensemble des $\alpha \geqslant 0$ (minimisation unidimensionnelle). On est alors conduit à la méthode itérative suivante :

Algorithme :

1. Choisir un point de départ x^0 (correspondant à $k = 0$).
2. À l'itération k :
   - Calculer : $d^k = -\nabla f\left(x^k\right)$.
   - Rechercher α_k tel que :

$$f\left(x^k + \alpha_k d^k\right) = \min_{\alpha \geqslant 0} f\left(x^k + \alpha d^k\right) \iff g(\alpha_k) = \min_{\alpha \geqslant 0} g(\alpha).$$

- Faire $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$.

3 Test d'arrêt (ou critère d'arrêt) :

- Si vérifié : FIN.
- Sinon, faire $k \longleftarrow k+1$ et retourner en 2.

Comme la convergence n'est pas, en général, finie on doit définir un test d'arrêt. Donnons, à titre indicatif, quelques uns des critères d'arrêt les plus utilisés :

- Critère 1 :

$$\max_{i=1,\dots,n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| < \varepsilon$$

- Critère 2 :

$$\|\nabla f\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 < \varepsilon$$

- Critère 3 :

$$\left| f\left(x^{k+1}\right) - f\left(x^k\right) \right| < \varepsilon$$

où $\varepsilon > 0$, est donné.

Concernant la convergence globale de la plus forte pente, on peut énoncer

Proposition 2.1

Si f est une fonction de classe C^1 et si $f(x) \longrightarrow +\infty$ pour $\|x\| \longrightarrow +\infty$, alors pour tout point de départ x^0, la méthode de la plus forte pente (avec optimisation unidimensionnelle exacte ou approchée) converge vers un point stationnaire de f.

Note :

- Rappelons ici que la convergence globale ne signifie pas que l'on obtient nécessairement un optimum de f.
- Si f est de classe C^1, tout ce que l'on peut dire c'est que l'on obtient un point stationnaire x^* de f.
- Si f est de classe C^2 et que $H\left(x^*\right)$ est définie positive, alors x^* est un minimum local de f.

C'est seulement dans des cas bien particuliers, (f convexe différentiable par exemple) que l'on peut être sûr d'obtenir un minimum global de f.

Note : Le principal défaut de la méthode de la plus forte pente est que la convergence peut être très lente pour certains types de fonctions. En effet ;

- α_k doit minimiser la fonction d'une variable

$$g(\alpha) = f\left(x^k + \alpha d^k\right), \quad \text{pour} \quad \alpha \geqslant 0.$$

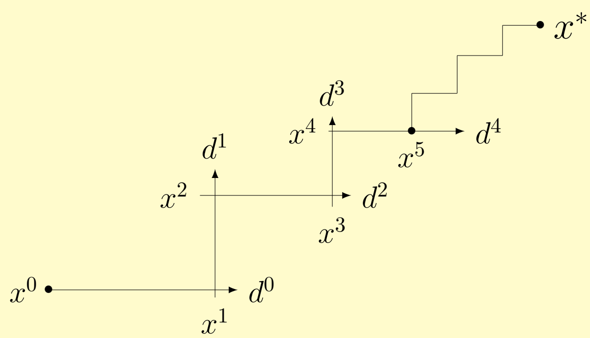
- Alors, on doit avoir

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\alpha}(\alpha_k) &= \left(d^k\right)^\top \cdot \nabla f\left(x^k + \alpha_k d^k\right) \\ &= \left(d^k\right)^\top \cdot \nabla f\left(x^{k+1}\right) = 0. \end{aligned}$$

- D'où l'on obtient :

$$\left(d^k\right)^\top \cdot d^{k+1} = 0.$$

Ce qui prouve que les directions de déplacement successives sont orthogonales.



Exemple 2.1 : Nous utilisons la méthode de la plus forte pente pour minimiser

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 4)^4 + (x_2 - 3)^2 + 4(x_3 + 5)^4.$$

Nous allons effectuer trois itérations à partir du point initial $\boldsymbol{x}^{(0)} = (4,\ 2,\ -1)^\top$.

- Pour la première itération, Nous trouvons d'abord le gradient de la fonction f

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(4(x_1 - 4)^3,\ 2(x_2 - 3),\ 16(x_3 + 5)^3\right)^\top.$$

Ainsi,

$$\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right) = (0,\ -2,\ 1024)^\top.$$

Pour calculer $\boldsymbol{x}^{(1)}$, nous avons besoin

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \underset{\alpha\geq 0}{\arg\min}\ f\left(\boldsymbol{x}^{(0)} - \alpha\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right)\right)\\ &= \underset{\alpha\geq 0}{\arg\min}\left(0 + (2+2\alpha-3)^2 + 4(-1-1024\alpha+5)^4\right)\\ &= \underset{\alpha\geq 0}{\arg\min}\ \phi_0(\alpha).\end{aligned}$$

En utilisant la méthode sécante, nous obtenons

$$\alpha_0 = 3.967\times 10^{-3}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{(1)} &= \boldsymbol{x}^{(0)} - \alpha_0\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right)\\ &= (4.000,\ 2.008,\ -5.062)^\top.\end{aligned}$$

- Pour trouver $\boldsymbol{x}^{(2)}$, nous déterminons d'abord

$$\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(1)}\right) = (0.000, -1.984, -0.003875)^\top.$$

Ensuite, nous trouvons α_1, où

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \underset{\alpha\geq 0}{\arg\min}\left(0 + (2.008+1.984\alpha-3)^2 + 4(-5.062+0.003875\alpha+5)^4\right)\\ &= \underset{\alpha\geq 0}{\arg\min}\ \phi_1(\alpha).\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la méthode sécante, on obtient $\alpha_1 = 0.5000$. Ainsi

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(1)} - \alpha_1\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(1)}\right) = (4.000, 3.000, -5.060)^\top.$$

- Pour trouver $\boldsymbol{x}^{(3)}$, nous déterminons d'abord

$$\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(2)}\right) = (0.000,\ 0.000,\ -0.003525)^\top$$

et

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \underset{\alpha\geq 0}{\arg\min}\left(0.000 + 0.000 + 4(-5.060+0.003525\alpha+5)^4\right)\\ &= \underset{\alpha\geq 0}{\arg\min}\ \phi_2(\alpha).\end{aligned}$$

On procède comme dans les itérations précédentes pour obtenir $\alpha_2 = 16.29$. La valeur de $x^{(3)}$ est

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = (4.000,\ 3.000,\ -5.002)^\top.$$

Notez que le minimiseur de f est $(4,\ 3,\ -5)^\top$, et il semble donc que nous soyons arrivés au minimiseur en seulement trois itérations.

- ### 2.3.2 - Cas d'une fonction quadratique

Soit $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$, où A est une matrice symétrique d'ordre n, b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et c un scalaire. On a $d^k = -\nabla f\left(x^k\right) = -\left(Ax^k + b\right)$, et donc

$$\begin{aligned} g(\alpha) = f\left(x^k + \alpha d^k\right) &= \frac{1}{2}\left(A\left(x^k + \alpha d^k\right), x^k + \alpha d^k\right) + \left(b,\, x^k + \alpha d^k\right) + c \\ &= \frac{1}{2}\left(Ax^k,\, x^k\right) + \left(b,\, x^k\right) + c \\ &+ \frac{\alpha^2}{2}\left(Ad^k, d^k\right) + \alpha\left(Ax^k,\, d^k\right) + \alpha\left(b,\, d^k\right). \end{aligned}$$

Alors, la dérivée de g par rapport à α donne :

$$\left.\frac{dg(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_k} = 0 \Rightarrow \alpha_k\left(Ad^k,\, d^k\right) + \left(Ax^k + b,\, d^k\right) = 0.$$

Or $\nabla f\left(x^k\right) = Ax^k + b$ et $d^k = -\nabla f\left(x^k\right)$, donc $\alpha_k\left(Ad^k,\, d^k\right) = \left(d^k,\, d^k\right) = \left\|d^k\right\|^2$. D'où

$$\alpha_k = \frac{\left\|d^k\right\|^2}{\left(Ad^k,\, d^k\right)}.$$

Cette dernière formule a un sens dans le cas (par exemple) où A est définie positive.

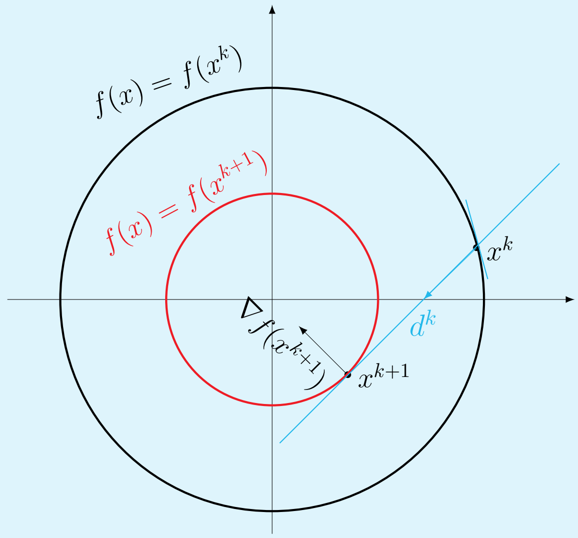
Une itération de la méthode devient (steepest descent dans le cas quadratique) :

- $d^k = -\left(Ax^k + b\right)$
- $\alpha_k = \frac{\left\|d^k\right\|^2}{\left(Ad^k, d^k\right)}$
- $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$

Avant de donner un exemple, donnons une interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^2$ de la méthode de la plus forte pente.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, on notera par x le point de composante (x_1, x_2).

- L'ensemble des points x pour lesquels $f(x) =$ cte forme une courbe du plan $\mathbb{R}^2$.
- Pour les différentes valeurs de x^k, on obtient une famille de courbes $f(x) = f\left(x^k\right)$ et qui représentent les courbes de niveau.
- Le vecteur $\nabla f\left(x^{k+1}\right)$ est orthogonal à la courbe de niveau $f(x) = f\left(x^{k+1}\right)$.
- Comme le vecteur $d^{k+1} = -\nabla f\left(x^{k+1}\right)$ est orthogonal au vecteur d^k, alors d^k est tangent à la courbe de niveau $f(x) = f\left(x^{k+1}\right)$.



Exemple 2.2 : Soit à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}\left(x^2 + ay^2\right), \quad \text{où } \ a \geq 1 \ \text{ est donné.}$$

- Ce problème rentre dans le cadre de formes quadratiques. En effet, on a :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right), \quad \text{où } \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

- Remarquons que A est définie positive, et donc f est strictement convexe. Alors, f admet un minimum global unique qui est caractérisé par $\nabla f(x^*, y^*) = (0,0)$:

$$A\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x^* = 0 \\ ay^* = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad (x^*, y^*) = (0,0),$$

est le minimmm (ce qui est évident à voir à partir de la définition de f).

- Maintenant, appliquons la méthode de la plus forte pente à ce poblème. On a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ ay \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} d^k = -\nabla f\left(x_k, y_k\right) = -\begin{pmatrix} x_k \\ ay_k \end{pmatrix} \\ \text{et} \\ \left\|d^k\right\|^2 = x_k^2 + a^2 y_k^2 \end{cases}$$

Sachant que $\alpha_k = \frac{\left\|d^k\right\|^2}{(Ad^k, d^k)}$, alors on effectue d'abors les calculs

$$Ad^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_k \\ -ay_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_k \\ -a^2 y_k \end{pmatrix}$$

$$\left(Ad^k, d^k\right) = x_k^2 + a^3 y_k^2$$

Donc le calcul de α_k donne $\alpha_k = \frac{x_k^2+a^2y_k^2}{x_k^2+a^3y_k^2}$, et on a l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \alpha_k\left(-x_k\right) \\ y_{k+1} = y_k + \alpha_k\left(-ay_k\right) \end{cases} \iff \begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2+a^2y_k^2}{x_k^2+a^3y_k^2} \times x_k \\ \\ y_{k+1} = y_k - a \times \frac{x_k^2+a^2y_k^2}{x_k^2+a^3y_k^2} \times y_k \end{cases}$$

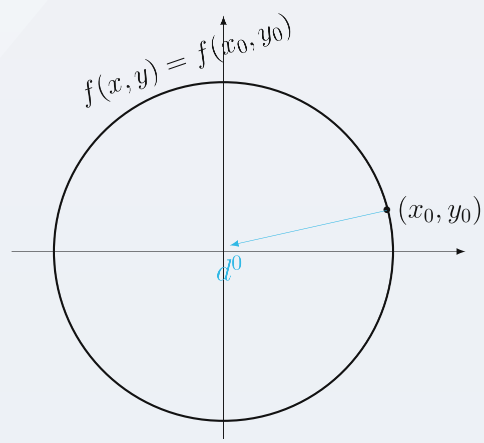
$$\text{donc} \quad \begin{cases} x_{k+1} = \frac{a^2(a-1)y_k^2}{x_k^2+a^3y_k^2} \times x_k \\ \\ y_{k+1} = \frac{(1-a)x_k^2}{x_k^2+a^3y_k^2} \times y_k \end{cases}$$

- Il y a deux cas à distinguer pour les valeurs du paramètre a :
  - ✓ 1^er^ cas, $a = 1$

    Alors on a, pour tout point de départ (x_0, y_0) : $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$; c'est-à-dire que le minimum est atteint en une seule itération. Du point de vu géométrique, l'équation suivante

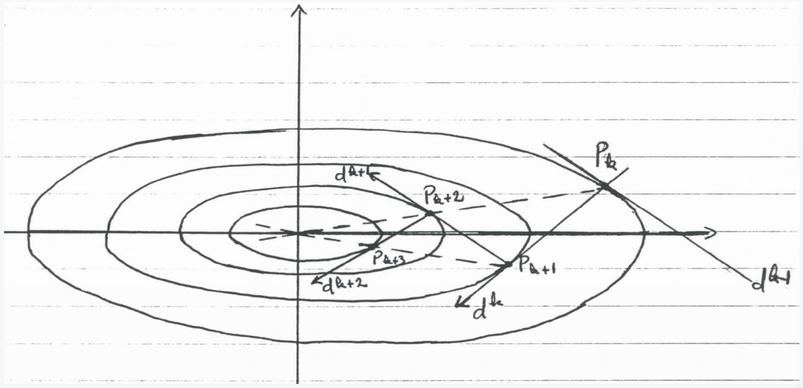
    $$\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) = \text{ cte},$$

    est celle d'un cercle centré à l'origine. D'où, on a le schéma suivant

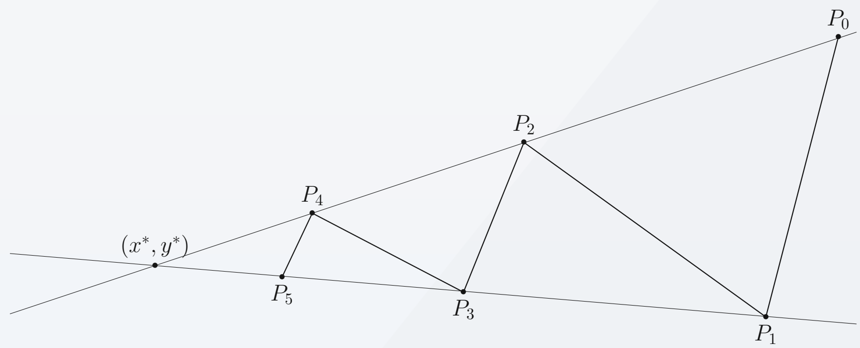
    

    de n'importe quel point (x_0, y_0), le gradient pointe vers le centre (qui est l'origine).
  - ✓ 2^e^ cas, $a > 1$

    Dans ce cas, les courbes de niveau $\frac{1}{2}\left(x^2+ay^2\right) = \text{cte}$ sont des éllipses



Les itérés successifs sont situés sur deux droites passant par l'origine.



Ce dernier résultat, peut être montré analytiquement. En effet, on a :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{a^2(a-1)y_k^2}{x_k^2+a^3y_k^2} \times x_k \\ \\ y_{k+1} = \frac{(1-a)x_k^2}{x_k^2+a^3y_k^2} \times y_k \end{cases}$$

donc en divisant ces deux équations terme à terme, on obtient l'égalité

$$\frac{y_{k+1}}{x_{k+1}} = -\frac{(1-a)x_k^2 y_k}{a^2(1-a)y_k^2 x_k} = -\frac{1}{a^2}\frac{x_k}{y_k}$$

Ainsi, on n'en tire le rapport $\frac{y_k}{x_k} = -\frac{1}{a^2}\frac{x_{k-1}}{y_{k-1}}$, et donc $\frac{y_{k+1}}{x_{k+1}} = \frac{y_{k-1}}{x_{k-1}}$. Par suite, en prenant $k = 1, 3, 5, \cdots, 2p-1$, on a

$$\frac{y_{2p}}{x_{2p}} = \frac{y_{2p-2}}{x_{2p-2}} = \cdots = \frac{y_0}{x_0}$$

Et en prenant $k = 2, 4, 6, \cdots, 2p$, on obtient

$$\frac{y_{2p+1}}{x_{2p+1}} = \frac{y_{2p-1}}{x_{2p-1}} = \cdots = \frac{y_1}{x_1}$$

On en tire les équations suivantes

$$x_0 y_{2k} - y_0 x_{2k} = 0$$

et

$$x_1 y_{2k+1} - y_1 x_{2k+1} = 0$$

d'où, on obtient les équations de droite suivantes

$$\begin{aligned} P_{2k} \in D_0 :\ & x_0 y - y_0 x = 0, \\ P_{2k+1} \in D_1 :\ & x_1 y - y_1 x = 0. \end{aligned}$$

2.4 Méthode de directions conjuguées : principe général

Pour améliorer la convergence des méthodes de gradient, d'autres méthodes plus élaborées ont été proposées. Elles sont basées sur la remarque suivante :
Puisque, en un minimum local x^* on a $\nabla f(x^*) = 0$, le développement de f en série de Taylor s'écrit alors au voisinage de x^* comme suit :

$$f(x) \simeq f(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^\top \cdot H(x^*) \cdot (x - x^*).$$

La fonction f se comporte donc, au voisinage de x^* comme une fonction quadratique. Il en résulte qu'une méthode itérative générale de minimisation, pour être efficace, doit au moins converger rapidement sur des fonctions quadratiques.

Dans cette optique, les méthodes de directions conjuguées sont des méthodes itératives qui, appliquées à une fonction quadratiques de n variables conduisent à l'optimum en n itérations au plus. Considérons une fonction quadratique quelconque :

$$\begin{aligned} J : \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c, \end{aligned}$$

où A est une matrice symétrique, définie positive et d'ordre n, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.
Le principe des méthodes de directions conjuguée consiste, à partir d'un point x^0, à minimiser $J(x)$ successivement suivant n directions linéairement indépendantes $d^0, d^1, \ldots, d^{n-1}$ possédant la propriété d'être mutuellement A - conjuguées, i.e.,

$$\left(Ad^i, d^j\right) = 0,\ \forall\, i \neq j \quad (i, j = 0, \cdots, n-1) \tag{2.11}$$

Supposons donc que, $\forall\, k = 0, 1, \ldots, n-1$, x^{k+1} soit déterminé à partir de x^k par :

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k,$$

où λ_k est la valeur de λ qui minimise $J\left(x^k + \lambda d^k\right)$:

$$J\left(x^k + \lambda_k d^k\right) = \min_\lambda J\left(x^k + \lambda d^k\right),\ \forall\, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Nous allons voir que, dans ces conditions le point obtenu à la $n^{\text{ième}}$ itération, c'est-à-dire

$$x^n = x^0 + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j d^j,$$

est nécessairement l'optimum du problème, autrement dit, vérifie

$$Ax^n + b = \nabla J\left(x^n\right) = 0.$$

Comme λ_k minimise J dans la direction d^k, on a pour tout $k = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$\left(\nabla J\left(x^k + \lambda_k d^k\right), d^k\right) = \left(A\left(x^k + \lambda_k d^k\right) + b, d^k\right) = 0.$$

d'où l'on tire

$$\lambda_k = -\frac{\left(Ax^k + b, d^k\right)}{\left(Ad^k, d^k\right)}.$$

On peut alors démontrer la propriété suivante, caractéristique de toutes les méthodes de directions conjuguées !

Proposition 2.2

$x^n = x^0 + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j d^j$ est l'optimum de la fonction quadratique $J(x)$ sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve :

- Observons que pour tout $i = 0, \cdots, n-1$, nous avons :

$$\begin{aligned}\left(Ax^n, d^i\right) &= \left(Ax^0, d^i\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \left(Ad^j, d^i\right)\\ &= \left(Ax^0, d^i\right) + \lambda_i \left(Ad^i, d^i\right), \quad \text{grâce à } (2.11)\end{aligned}$$

- Comme $\lambda_i = -\frac{(Ax^i + b, d^i)}{(Ad^i, d^i)}$ et que

$$\begin{aligned}\left(Ax^i, d^i\right) &= \left(Ax^0, d^i\right) + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j \left(Ad^j, d^i\right)\\ &= \left(Ax^0, d^i\right)\end{aligned}$$

  alors $\lambda_i = -\frac{(Ax^0 + b, d^i)}{(Ad^i, d^i)}$ donc,

$$\begin{aligned}\left(Ax^n, d^i\right) &= \left(Ax^0, d^i\right) - \left(Ax^0 + b, d^i\right)\\ &= -\left(b, d^i\right)\end{aligned}$$

  et par suite pour tout $i = 0, 1, \ldots, n-1$, on a : $\left(Ax^n + b,\, d^i\right) = 0$.

- Ceci entraine que $Ax^n + b$ est orthogonal à $\mathbb{R}^n$ (car $d^0, d^1, \ldots, d^{n-1}$ sont linéairement indépendantes et donc engendrent $\mathbb{R}^n$), et par conséquent $Ax^n + b = 0$. □

Note :

- Une méthode de directions conjuguée converge donc de façon finie en au plus n itérations dans le cas d'une fonction quadratique dans $\mathbb{R}^n$.
- Comme il existe un certain nombre de degrés de liberté pour le choix des directions $(d^0, d^1, \ldots, d^{n-1})$, on peut imaginer de nombreux algorithmes basés sur le principe général des directions conjuguées.
- Nous étudierons plus particulièrement la méthode dite du gradient conjugué pour les fonctions quadratiques et la méthode de Fletcher et Reeves pour les fonctions quelconques.

2.5 Méthode de gradient conjugué pour les fonctions quadratiques

• 2.5.1 - Analyse de la méthode

On suppose ici que la fonction à minimiser est quadratique de la forme :

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax,\, x) + (b,\, x) + c.$$

L'idée de la méthode de gradient conjugué est de construire progressivement des directions $d^0, d^1, \ldots, d^k$ mutuellement A - conjuguées.
A l'étape k, la direction d^k est obtenue par combinaison linéaire

- ✓ du gradient $-\nabla J\left(x^k\right)$ en x^k,
- ✓ et des directions précédentes $d^0, d^1, \ldots, d^{k-1}$,
- ✓ les coefficients de la combinaison linéaire étant choisis de telle sorte que d^k soit conjuguée par rapport à toutes les directions précédentes.

A partir de x^0 donné, x^{k+1} est choisi sous la forme :

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha_k d^k \\ \text{où} \qquad \alpha_k &= -\frac{\left(Ax^k + b,\, d^k\right)}{\left(Ad^k,\, d^k\right)} \qquad \left(\begin{array}{l} \alpha_k \text{ minimisant} \\ J\left(x^k + \alpha d^k\right) \end{array}\right) \\ &= \frac{\left(r^k,\, d^k\right)}{\left(Ad^k,\, d^k\right)} \end{aligned}$$

avec, par difinition, le résidu r^k est

$$r^k = -\left(Ax^k + b\right)\left(= -\nabla J\left(x^k\right)\right),$$

et où la direction d^k est choisie par la formule suivante

$$d^k = r^k + \beta_k d^{k-1}, \;\text{ pour }\; k \geq 1,$$

où $d^0 = r^0$. Alors, le coefficient β_k est choisi à travers la formule suivante

$$\beta_k = -\frac{\left(Ad^{k-1}, r^k\right)}{\left(Ad^{k-1}, d^{k-1}\right)} \quad \begin{pmatrix} \beta_k \text{ est obtenu à travers} \\ \text{la condition } \left(Ad^k, d^{k-1}\right) = 0 \end{pmatrix}$$

On a finalement le résultat suivant :

Théorème 2.1

1. $\left(r^{k+1},\, d^k\right) = 0$
2. $\left(r^{k+1},\, r^k\right) = 0$
3. $\alpha_k = \frac{\left(r^k, r^k\right)}{\left(Ad^k, d^k\right)}$
4. $\beta_k = \frac{\left(r^k, r^k\right)}{\left(r^{k-1}, r^{k-1}\right)}$
5. $r^n = -\left(Ax^n + b\right) = 0.$

Preuve :

1

$$\begin{aligned}
\left(r^{k+1},\, d^k\right) &= -\left(Ax^{k+1} + b,\, d^k\right) \\
&= -\left(Ax^k + \alpha_k Ad^k + b,\, d^k\right) \\
&= -\left(Ax^k + b,\, d^k\right) - \alpha_k \left(Ad^k,\, d^k\right) \\
&= \left(r^k,\, d^k\right) - \frac{\left(r^k,\, d^k\right)}{\left(Ad^k,\, d^k\right)} \left(Ad^k,\, d^k\right) = 0.
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
\left(r^{k+1},\, r^k\right) &= \left(r^{k+1},\, d^k - \beta_k d^{k-1}\right) \\
&= -\beta_k \left(r^{k+1},\, d^{k-1}\right) \\
&= \beta_k \left(Ax^{k+1} + b,\, d^{k-1}\right) \\
&= \beta_k \left(Ax^k + \alpha_k Ad^k + b,\, d^{k-1}\right) \\
&= \beta_k \left(Ax^k + b, d^{k-1}\right) + \beta_k \alpha_k \left(Ad^k,\, d^{k-1}\right) \\
&= -\beta_k \left(r^k,\, d^{k-1}\right) = 0. \quad (\text{pour } k \geqslant 1)
\end{aligned}$$

Pour $k = 0$, on a $\left(r^1,\, r^0\right) = \left(r^1, d^0\right) = 0$, d'après le point 1.

3

$$\begin{aligned}
\alpha_k = \frac{\left(r^k, d^k\right)}{\left(Ad^k, d^k\right)} &= \frac{\left(r^k, r^k + \beta_k d^{k-1}\right)}{\left(Ad^k, d^k\right)} \\
&= \frac{\left(r^k, r^k\right) + \beta_k \left(r^k, d^{k-1}\right)}{\left(Ad^k, d^k\right)} = \frac{\left(r^k, r^k\right)}{\left(Ad^k, d^k\right)}.
\end{aligned}$$

4

$$\text{On a} \quad \beta_k = -\frac{\left(Ad^{k-1},\, r^k\right)}{\left(Ad^{k-1},\, d^{k-1}\right)}, \quad \text{or} \quad d^{k-1} = \frac{1}{\alpha_{k-1}}\left(x^k - x^{k-1}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{donc} \quad Ad^{k-1} &= \frac{1}{\alpha_{k-1}}\left(Ax^k - Ax^{k-1}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha_{k-1}}\left(\left(Ax^k + b\right) - \left(Ax^{k-1} + b\right)\right) \\
\text{i.e.,} \quad Ad^{k-1} &= \frac{1}{\alpha_{k-1}}\left(r^{k-1} - r^k\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d'où} \quad \beta_k &= \frac{1}{\alpha_{k-1}} \frac{\left(r^k - r^{k-1},\, r^k\right)}{\left(Ad^{k-1},\, d^{k-1}\right)} \\
&= \frac{1}{\alpha_{k-1}} \frac{\left(r^k,\, r^k\right)}{\left(Ad^{k-1},\, d^{k-1}\right)} \\
&= \frac{\left(Ad^{k-1},\, d^{k-1}\right)}{\left(r^{k-1},\, r^{k-1}\right)} \frac{\left(r^k,\, r^k\right)}{\left(Ad^{k-1},\, d^{k-1}\right)} \\
\text{i.e.,} \quad \beta_k &= \frac{\left(r^k,\, r^k\right)}{\left(r^{k-1}, r^{k-1}\right)}
\end{aligned}$$

5 D'après la démonstration de la proposition pécédente, il suffit de montrer que $(d^0, d^1, \ldots, d^{n-1})$ sont linéairement indépendantes et qu'elles sont mutuellement A - conjuguées.

- Commençons par montrer que $(d^0, d^1, \ldots, d^{n-1})$ sont mutuellement A - conjuguées. Nous allons raisonner par récurrence :
  - ✓ Tout d'abord pour (d^0, d^1), on a $(Ad^1, d^0) = 0$ par définition de β_1.
  - ✓ Supposons que $\left(d^0, d^1, \ldots, d^k\right)$ sont mutuellement A - conjuguées et montrons que c'est vrai pour $\left(d^0, d^1, \ldots, d^{k+1}\right)$.
  - ✓ Tout d'abord on a $\left(Ad^{k+1},\, d^k\right) = 0$ par définition de β_{k+1}. Alors, il reste à montrer que

    $$\left(Ad^{k+1}, d^i\right) = 0,\ \forall\, i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}.$$

    Pour cela, vérifions tout d'abord que r^{k+1} est orthogonal à d^i, $\forall\ i\ \in$

$\{0, 1, \ldots, k\}$. In effet, on a

$$\begin{aligned}
\left(Ax^{k+1}, d^i\right) &= \left(Ax^0, d^i\right) + \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \left(Ad^j,\, d^i\right) \\
&= \left(Ax^0,\, d^i\right) + \alpha_i \left(Ad^i,\, d^i\right) \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \left(Ax^0,\, d^i\right) - \frac{\left(Ax^0 + b,\, d^i\right)}{\left(Ad^i,\, d^i\right)} \left(Ad^i,\, d^i\right) \\
&= -\left(b,\, d^i\right)
\end{aligned}$$

i.e., $\quad \left(Ax^{k+1} + b,\, d^i\right) = 0, \;\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, k\}$

c.a.d. $\quad \left(r^{k+1},\, d^i\right) = 0, \;\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, k\}$

Maintenant, soit $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, on a $d^{k+1} = r^{k+1} + \beta_{k+1} d^k$ donc

$$\begin{aligned}
\left(Ad^{k+1}, d^i\right) &= \left(Ar^{k+1},\, d^i\right) + \beta_{k+1} \left(Ad^k,\, d^i\right) \\
&= \left(r^{k+1},\, Ad^i\right)
\end{aligned}$$

$$\text{or } d^i = \frac{1}{\alpha_i}\left(x^{i+1} - x^i\right) \text{ donc } Ad^i = -\frac{1}{\alpha_i}\left(r^{i+1} - r^i\right) = -\frac{1}{\alpha_i}\left(d^{i+1} - \beta_{i+1} d^i - d^i + \beta_i d^{i-1}\right)$$

c.à.d. Ad_i est combinaison linéaire de d^{i-1}, d^i et d^{i+1}, qu'on écrit sous la forme $Ad^i = ad^{i-1} + bd^i + cd^{i+1}$. Donc

$$\begin{aligned}
\left(Ad^{k+1},\, d^i\right) &= \left(r^{k+1},\, Ad^i\right) \\
&= a\left(r^{k+1},\, d^{i-1}\right) + b\left(r^{k+1},\, d^i\right) + c\left(r^{k+1},\, d^{i+1}\right)
\end{aligned}$$

avec $i \leqslant k-1 \Rightarrow i+1 \leqslant k$, d'où $\left(Ad^{k+1},\, d^i\right) = 0, \quad \forall\, i \leq k-1$, car $\left(r^{k+1}, d^j\right) = 0, \;\forall\, j \leqslant k$.

- Il reste à montrer que $(d^0, d^1, \ldots, d^{n-1})$ sont linéairement indépendantes. Soit

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} a_i d^i = 0 \;&\Rightarrow\; \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(Ad^i, d^j\right) = 0 \\
&\Rightarrow\; a_i \left(Ad^i, d^i\right) = 0 \\
&\Rightarrow\; \quad a_i = 0, \text{ car } A \text{ est définie positive,}
\end{aligned}$$

(à condition que $d^i \neq 0$ mais si $d^i = 0$ alors l'optimum est atteint). Ce qui termine la démonstration. □

Algorithme : L'algorithme du gradient conjugué pour minimiser la quadratique

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$$

s'écrit alors :

i x^0 donné, $d^0 = r^0 = -\left(Ax^0 + b\right)$.

ii Etape k :

1. $\alpha_k = \frac{\|r^k\|^2}{(Ad^k, d^k)}$
2. $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$
3. $r^{k+1} = r^k - \alpha_k A d^k$
4. $\beta_{k+1} = \frac{\|r^{k+1}\|^2}{\|r^k\|^2}$
5. $d^{k+1} = r^{k+1} + \beta_{k+1} d^k$
6. faire $k \longleftarrow k+1$ et retourner en ii.

Exemple 2.3 : Soit à résoudre le problème

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y), \quad \text{où} \quad f(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + ay^2\right) \text{ avec } a > 0.$$

- $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ ay \end{pmatrix}$ et $A = H(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ qui est difinie positive pour $a > 0$.
- Nous allons appliquer l'algorithme du gradient conjugué à ce poblème en partant du point $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

$$d^0 = r^0 = -Ax^0 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = \frac{\|r^0\|^2}{(Ad^0, d^0)}, \quad \|r^0\|^2 = 1 + a^2$$

$$Ad^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -a^2 \end{pmatrix}$$

$$\left(Ad^0, d^0\right) = 1 + a^3$$

Donc $\alpha_0 = \frac{1+a^2}{1+a^3}$

$$\begin{aligned}
x^1 &= x^0 + \alpha_0 d^0 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1+a^2}{1+a^3}\begin{pmatrix} -1 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1+a^2}{1+a^3} \\ 1-a\frac{1+a^2}{1+a^3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1+a^3}\begin{pmatrix} a^3-a^2 \\ 1-a \end{pmatrix} = \frac{a-1}{1+a^3}\begin{pmatrix} a^2 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e.i. $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{a-1}{1+a^3}\begin{pmatrix} a^2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
r^1 &= r^0 - \alpha_0 A d^0 \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ -a \end{pmatrix} - \frac{1+a^2}{1+a^3}\begin{pmatrix} -1 \\ -a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\frac{1+a^2}{1+a^3} \\ -a+a^2\frac{1+a^2}{1+a^3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
r^1 &= \frac{1}{1+a^3}\begin{pmatrix} -a^3+a^2 \\ -a+a^2 \end{pmatrix} = \frac{a(a-1)}{1+a^3}\begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \\
\beta_1 &= \frac{\|r^1\|^2}{\|r^0\|^2} \\
\|r^1\|^2 &= \frac{a^2(a-1)^2}{(1+a^3)^2}\left(a^2+1\right),\ \|r^0\|^2 = 1+a^2
\end{aligned}$$

donc $\beta_1 = \frac{a^2(a-1)^2}{(1+a^3)^2}$

$$\begin{aligned}
d^1 &= r^1 + \beta_1 d^0 \\
&= \frac{a(a-1)}{1+a^3}\begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a^2(a-1)^2}{(1+a^3)^2}\begin{pmatrix} -1 \\ -a \end{pmatrix} \\
&= \frac{a(a-1)}{1+a^3}\begin{pmatrix} -a-\frac{a(a-1)}{1+a^3} \\ 1-\frac{a^2(a-1)}{1+a^3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{a(a-1)}{(1+a^3)^2}\begin{pmatrix} -a^4-a^2 \\ 1+a^2 \end{pmatrix} = \frac{a(a-1)\left(1+a^2\right)}{(1+a^3)^2}\begin{pmatrix} -a^2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\|r^1\|^2}{(Ad^1, d^1)} \\
\|r^1\|^2 &= \frac{a^2(a-1)^2}{(1+a^3)^2}\left(a^2+1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ad^1 &= \frac{a(a-1)\left(1+a^2\right)}{\left(1+a^3\right)^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a^2\\ 1\end{pmatrix}\\
&= \frac{a(a-1)\left(1+a^2\right)}{\left(1+a^3\right)^2}\begin{pmatrix}-a^2\\ a\end{pmatrix}\\
&= \frac{a^2(a-1)\left(1+a^2\right)}{\left(1+a^3\right)^2}\begin{pmatrix}-a\\ 1\end{pmatrix}\\
\left(Ad^1, d^1\right) &= \frac{a^3(a-1)^2\left(1+a^2\right)^2}{\left(1+a^3\right)^4}\left(a^3+1\right)\\
&= \frac{a^3(a-1)^2\left(1+a^2\right)^2}{\left(1+a^3\right)^3}, \quad \text{d'où} \quad \alpha_1 = \frac{1+a^3}{a\left(1+a^2\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 &= x^1 + \alpha_1 d^1\\
&= \frac{a-1}{1+a^3}\begin{pmatrix}a^2\\ -1\end{pmatrix} + \frac{1+a^3}{a\left(1+a^2\right)}\left(\frac{a(a-1)\left(1+a^2\right)}{\left(1+a^3\right)^2}\right)\begin{pmatrix}-a^2\\ 1\end{pmatrix}\\
&= \frac{a-1}{1+a^3}\begin{pmatrix}a^2\\ -1\end{pmatrix} + \frac{a-1}{1+a^3}\begin{pmatrix}-a^2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

i.e. $x^2 = (0, 0)$.

- Donc, le minimum est atteint en deux itérations en partant du point $(1, 1)$.
- En partant du point $(1, 0)$ (par exemple), on atteint le minimum $(0, 0)$ en une itération. Dans tous les cas, on atteint le minimum en au plus 2 itérations.

• 2.5.2 - Convergence de la méthode de la plus forte pente

Rappelons qu'une itération de la méthode de steepest descent pour une forme quadratique $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$ est

$$\begin{cases}
d^k = -\left(Ax^k + b\right) = -\nabla f\left(x^k\right)\\
\alpha_k = \frac{\left\|d^k\right\|^2}{\left(Ad^k, d^k\right)}\\
x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k
\end{cases}$$

On suppose que A est définie positive. Notons par $\lambda_{\min}$ (resp. $\lambda_{\max}$) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de A. On définit le conditionnement de la matrice A par

$$\kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

Notons aussi par x^* l'optimum de $f(x)$. Alors, on a le résultat suivant :

Théorème 2.2

$$\left\|x^k - x^*\right\| \leq C \left(\frac{\kappa(A)-1}{\kappa(A)+1}\right)^k, \text{ avec } C = \left(\frac{2\left(f\left(x^0\right) - f\left(x^*\right)\right)}{\lambda_{\min}}\right)^{1/2}.$$

Preuve :

- On a $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k,\ d^k = -\left(Ax^k + b\right)$

$$\begin{aligned} f\left(x^{k+1}\right) &= \frac{1}{2}\left(Ax^k + \alpha_k Ad^k,\, x^k + \alpha_k d^k\right) + \left(b,\, x^k + \alpha_k d^k\right) + c \\ &= f\left(x^k\right) + \frac{1}{2}\alpha_k^2\left(Ad^k,\, d^k\right) + \alpha_k\left(Ax^k + b,\, d^k\right) \\ &= f\left(x^k\right) - \alpha_k\left(d^k,\, d^k\right) + \frac{\alpha_k^2}{2}\left(Ad^k,\, d^k\right) \end{aligned}$$

or $\alpha_k = \frac{\left\|d^k\right\|^2}{\left(Ad^k, d^k\right)}$, donc $f\left(x^{k+1}\right) = f\left(x^k\right) - (1/2)\frac{\left\|d^k\right\|^4}{\left(Ad^k, d^k\right)}$. D'autre part ;

$$\begin{aligned} f\left(x^k\right) - f\left(x^*\right) =& \frac{1}{2}\left(Ax^k,\, x^k\right) + \left(b,\, x^k\right) - \frac{1}{2}\left(Ax^*,\, x^*\right) - \left(b,\, x^*\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(A\left(x^k - x^*\right),\, x^k - x^*\right) + \left(Ax^*,\, x^k\right) \\ & - \left(Ax^*, x^*\right) + \left(b, x^k\right) - \left(b, x^*\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(A\left(x^k - x^*\right),\, x^k - x^*\right) \end{aligned}$$

car $Ax^* + b = 0$. Et $d^k = -\left(Ax^k + b\right) = -\left(Ax^k - Ax^*\right) = -A\left(x^k - x^*\right)$, donc $\left(x^k - x^*\right) = -A^{-1}d^k$. D'où

$$f\left(x^k\right) - f\left(x^*\right) = \frac{1}{2}\left(A^{-1}d^k, d^k\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} f\left(x^{k+1}\right) &= f\left(x^k\right) - (1/2)\frac{\left\|d^k\right\|^4}{\left(Ad^k, d^k\right)} \\ &= f\left(x^*\right) + \frac{1}{2}\left(A^{-1}d^k, d^k\right) - \frac{1}{2}\frac{\left\|d^k\right\|^4}{\left(Ad^k, d^k\right)} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{f\left(x^{k+1}\right) - f\left(x^*\right)}{f\left(x^k\right) - f\left(x^*\right)} = 1 - \frac{\left\|d^k\right\|^4}{\left(A^{-1}d^k, d^k\right)\left(Ad^k, d^k\right)}$$

- Maintenant, on utilise l'inégalité de Kantorovich qui dit :

$$(Ax,\, x)\left(A^{-1}x,\, x\right) \leqslant \frac{\left(\lambda_{\max} + \lambda_{\min}\right)^2}{4\lambda_{\max}\lambda_{\min}}\|x\|^4,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

d'où

$$\frac{f\left(x^{k+1}\right)-f\left(x^*\right)}{f\left(x^k\right)-f\left(x^*\right)} \leqslant 1-\frac{4\lambda_{\max}\lambda_{\min}}{\left(\lambda_{\max}+\lambda_{\min}\right)^2}$$

$$\frac{f\left(x^k+1\right)-f\left(x^*\right)}{f\left(x^k\right)-f\left(x^*\right)} \leqslant \left(\frac{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}+\lambda_{\min}}\right)^2$$

- D'autre part, on a

$$\begin{aligned} f\left(x^k\right)-f\left(x^*\right) &= \frac{1}{2}\left(A\left(x^k-x^*\right), x^k-x^*\right) \\ &\geqslant \frac{\lambda_{\min}}{2}\left\|x^k-x^*\right\|^2 \end{aligned}$$

alors

$$\left\|x^k-x^*\right\|^2 \leqslant \frac{2}{\lambda_{\min}}\left(f\left(x^k\right)-f\left(x^*\right)\right)$$

Comme

$$f\left(x^k\right)-f\left(x^*\right) \leq \left(\frac{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}+\lambda_{\min}}\right)^2\left(f\left(x^{k-1}\right)-f\left(x^*\right)\right),$$

on en déduit que

$$f\left(x^k\right)-f\left(x^*\right) \leqslant \left(\frac{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}+\lambda_{\min}}\right)^{2k}\left(f\left(x^0\right)-f\left(x^*\right)\right).$$

On en conclut que

$$\left\|x^k-x^*\right\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_{\min}}\left(\frac{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}+\lambda_{\min}}\right)^{2k}\left(f\left(x^0\right)-f\left(x^*\right)\right)$$

i.e.

$$\left\|x^k-x^*\right\| \leqslant \sqrt{\frac{2\left(f\left(x^0\right)-f\left(x^*\right)\right)}{\lambda_{\min}}}\left(\frac{\kappa(A)-1}{\kappa(A)+1}\right)^k.$$

Ce qui achève la démonstration. □

La méthode du gradient à paramètre local optimal est convergente. Sa rapidité de convergence dépend de $\frac{\kappa(A)-1}{\kappa(A)+1}$.

- Plus que $\kappa(A)$ est proche de 1, plus la méthode converge vite.
- Lorsque $\kappa(A)=1$, la méthode converge en une itération.
- Lorsque $\kappa(A)$ est trop grand, la convergence est lente.

Exemple 2.4 : Reprenons l'exemple (déjà traité) où on avait la fonction suivante

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + ay^2\right), \quad \text{avec } a \geqslant 1.$$

- Le gradient et le Hessien sont donnés par

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ ay \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

- Ainsi, on peut caculer le conditionnement et obtenir

$$\kappa(A) = a, \quad \text{si } a > 1$$
$$\kappa(A) = 1, \quad \text{si } a = 1$$

- Si a est très grand, la convergence est lente.
- Si $a = 1$, l'optimum est atteint en une itération. Ceci confirme les résultats déjà obtenus géométriquement.

2.5.3 - Convergence de la méthode de Richardson (pas constant)

La méthode de Richardson est une méthode du gradient à paramètre α_k constant. On prend toujours une direction de descente (celle du gradient) et on choisit α indépendant de k de façon que la suite des points $\{x^k\}$ converge vers la solution de $Ax^* + b = 0$:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha d^k, \; \alpha > 0$$
$$d^k = -\left(Ax^k + b\right) = A\left(x^* - x^k\right)$$

L'erreur à la $(k+1)^{\text{ième}}$ itération $e^{k+1} = x^{k+1} - x^*$ peut s'exprimer en fonction de l'erreur à la $k^{\text{ième}}$ itération e^k :

$$e^{k+1} = (I - \alpha A)e^k.$$

En effet ;

$$\begin{aligned} e^{k+1} &= x^{k+1} - x^* \\ &= x^k + \alpha d^k - x^* \\ &= x^k - x^* + \alpha A\left(x^* - x^k\right) \\ &= (I - \alpha A)\left(x^k - x^*\right) \\ &= (I - \alpha A)e^k. \end{aligned}$$

D'où l'on obtient

$$e^k = (I - \alpha A)^k e^0, \; \text{ où } \; e^0 = x^0 - x^*.$$

Donc, en prenant la norme de cette équation on obtient $\left\|e^k\right\| \leq \|I-\alpha A\|^k \left\|e^0\right\|$. Or

$$\begin{aligned} e^k \longrightarrow 0 &\iff \|I-\alpha A\| < 1 \\ &\iff \max_{i=1,\dots,n} |1-\alpha\lambda_i| < 1, \end{aligned}$$

où les λ_i $(i=1,\dots,n)$ sont les valeurs propres de la matrice A. On a alors

$$\begin{aligned} e^k \longrightarrow 0 &\iff 0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_i},\ \forall\, i=1,\dots,n, \\ &\iff 0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}}. \end{aligned}$$

En effet,

$$\max_{i=1,\dots,n} |1-\alpha\lambda_i| < 1 \iff |1-\alpha\lambda_i| < 1,\ \forall\, i=1,\dots,n,$$

Il y a deux cas à distinguer :

- ⋆ Soit que $1-\alpha\lambda_i \geqslant 0$ et donc $|1-\alpha\lambda_i| < 1 \ \Rightarrow\ 1-\alpha\lambda_i < 1 \Rightarrow \alpha > 0$.
- ⋆ Soit que $1-\alpha\lambda_i \leq 0$ et donc $|1-\alpha\lambda_i| < 1 \ \Rightarrow\ \alpha\lambda_i - 1 < 1 \Rightarrow \alpha < \frac{2}{\lambda_i}$.

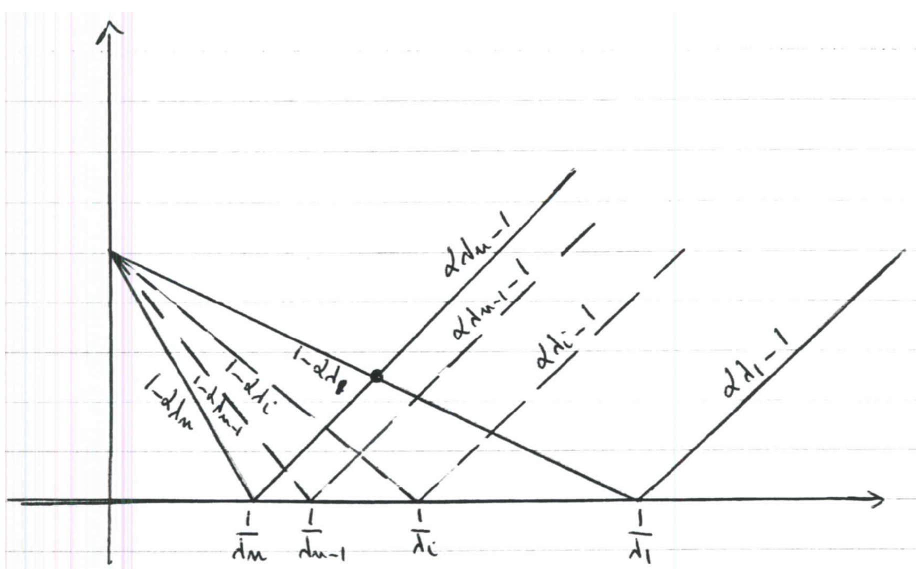
Le meilleur choix de α est celui qui minimise $\|I-\alpha A\|$. Or

$$\|I-\alpha A\| = \max_{i=1,\dots,n} |1-\alpha\lambda_i|\,.$$

En classant les valeurs propres comme suit

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_i \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n,$$

où on note $\lambda_1 = \lambda_{\min}$ et $\lambda_n = \lambda_{\max}$, on obtient le graphique suivant



alors α_{opt} est celui qui vérifie $1 - \alpha\lambda_1 = \alpha\lambda_n - 1$ i.e., $\alpha = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$, c'est-à-dire

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\|I - \alpha_{\text{opt}} A\| &= \max\left\{|1 - \alpha_{\text{opt}}\lambda_{\min}|, |1 - \alpha_{\text{opt}}\,\lambda_{\max}|\right\} \\ &= \max\left\{\left|\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}\right|, \left|\frac{\lambda_{\min} - \lambda_{\max}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}\right|\right\} \\ &= \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} = \frac{\kappa(A) - 1}{\kappa(A) + 1}\end{aligned}$$

et dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\left\|e^k\right\| &\leq \|I - \alpha_{\text{opt}} A\|^k \left\|e^0\right\| \\ \text{i.e.} \qquad \left\|x^k - x^*\right\| &\leq \left(\frac{\kappa(A) - 1}{\kappa(A) + 1}\right)^k \left\|x^0 - x^*\right\|.\end{aligned}$$

Le facteur de réduction de l'erreur (taux de convergence) est de l'ordre de $\frac{\kappa(A)-1}{\kappa(A)+1}$.

Exemple 2.5 :

$$\min_{\mathbb{R}^2} f(x, y), \quad \text{où} \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 4x + 7y$$

- À partir de la matrice A, on calcule les valeurs propres

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} &= (2 - \lambda)^2 - 1 = (2 - \lambda - 1)(2 - \lambda + 1) \\ &= (1 - \lambda)(3 - \lambda)\end{aligned}$$

- Donc, les valeurs propres de A sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$, d'où $\kappa(A) = 3$ et le taux de convergence est de l'ordre

$$\frac{\kappa(A) - 1}{\kappa(A) + 1} = \frac{2}{4} = 1/2$$

Note : Pour la méthode du gradient conjugué (dans le cas quadratique), on a la majoration d'erreur suivante :

$$\left\|x^k - x^*\right\|_A \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{\kappa(A)}-1}{\sqrt{\kappa(A)}+1}\right)^k \left\|x^0 - x^*\right\|_A, \text{ où } \|x\|_A^2 = (Ax, x).$$

2.6 Cas des fonctions quelconques

On suppose $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. Nous allons décrire certaines méthodes numériques pour la résolution du problème

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

- ### 2.6.1 - La méthode du gradient à pas constant:méthode de Richardson

Cette méthode a été déjà étudiée dans le cadre des fonctions quadratiques et consiste à utiliser la méthode du gradient avec le paramètre α_k constant pour toutes les itérations, i.e.,

$$\begin{cases} d^k & = -\nabla f\left(x^k\right) \\ x^{k+1} & = x^k + \alpha d^k, \ \alpha > 0. \end{cases}$$

- ### 2.6.2 - Les méthodes de Fletcher-Reeves et de Polak-Ribière.

La méthode de Fletcher-Reeves est une extension directe de la méthode du gradient conjugué au cas des fonctions quelconques. Appliquée à une fonction quadratique, elle est identique au gradient conjugué.

Algorithme :

i x^0 donné, $d^0 = -\nabla f\left(x^0\right)$.

ii Etape k :

- choisir α_k minimisant $g(\alpha) = f\left(x^k + \alpha d^k\right)$
- poser $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$
- et $d^{k+1} = -\nabla f\left(x^{k+1}\right) + \beta_{k+1} d^k$, avec $\beta_{k+1} = \frac{\left\|\nabla f\left(x^{k+1}\right)\right\|^2}{\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|^2}$

iii Test d'arrêt. Si vérifié : FIN, sinon faire $k \longleftarrow k+1$ et retouner en ii.

La méthode de Polak-Ribière est une variante de la méthode de Fletcher-Reeves. Elle consiste à définir β_{k+1} par la formule :

$$\beta_{k+1} = \frac{\left(\nabla f\left(x^{k+1}\right) - \nabla f\left(x^k\right), \nabla f\left(x^{k+1}\right)\right)}{\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|^2}.$$

2.7 La méthode de Newton

On suppose $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2. L'idée consiste à remplacer, au voisinage du point courant x^k, la fonction f par son approximation quadratique :

$$J(x) = f\left(x^k\right) + \nabla f\left(x^k\right)^\top \cdot \left(x - x^k\right) + \frac{1}{2}\left(x - x^k\right)^\top \cdot H\left(x^k\right)\left(x - x^k\right)$$

où $H\left(x^k\right) = \nabla^2 f\left(x^k\right)$. On prend alors comme point x^{k+1} le minimum de $J(x)$ lorsqu'il existe. Ceci ne peut être le cas que si $H\left(x^k\right)$ est une matrice définie positive.

La fonction $J(x)$ a alors un minimum unique x^{k+1} définie par :

$$\nabla J\left(x^{k+1}\right) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \;\; H\left(x^k\right) \cdot \left(x^{k+1} - x^k\right) + \nabla f\left(x^k\right) = 0.$$

D'où la formule itérative :

$$x^{k+1} = x^k - H\left(x^k\right)^{-1} \nabla f\left(x^k\right).$$

Cette formule n'est autre que la méthode de Newton appliquée à la résolution du système d'équations non linéaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

Note :

- On a $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$ avec $\alpha_k = 1$ et $d^k = -H\left(x^k\right)^{-1} \nabla f\left(x^k\right)$. Donc, dans ce cas la direction et le pas de déplacement sont fixés.
- Une propriété intéressante de la méthode de Newton est qu'elle converge en une seule itération, lorsqu'elle est appliquée à une fonction quadratiqne strictement convexe.

En effet, soit

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$$

avec A symétrique définie positive. On a :

$$\nabla f(x) = Ax + b \;\; \text{et} \;\; H(x) = A.$$

Donc, étant donné x^0 (quelconque) on a

$$\begin{aligned} x^1 &= x^0 - H\left(x^0\right)^{-1} \nabla f\left(x^0\right) \\ &= x^0 - A^{-1}\left(Ax^0 + b\right) = -A^{-1} b \end{aligned}$$

i.e., $\quad x^1 = -A^{-1} b$ donc x^1 est l'optimum.

- Au voisinage de x^*, la convergence de la méthode de Newton est quadratique. Cependant, elle ne possède pas la propriété de la convergence globale : si le point de départ x^0 est trop éloigné de x^* la méthode de Newton peut ne pas converger.

Exemple 2.6 : Considérons le problème suivant

$$\min_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z), \text{ où la fonction est définie par}$$
$$f(x,y,z) = (2x-1)^2 + (y-2)^2 + (3z-3)^2 + xz - 4$$

- Nous avons le gradient et le Hessien donnés par

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4(2x-1)+z \\ 2(y-2) \\ 6(3z-3)+x \end{pmatrix}, \quad H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $\nabla f(x,y,z) = 0 \iff x = \frac{54}{143},\ y = 2,\ z = \frac{140}{143}$.

- Il est facile de vérifier que $H(x,y,z)$ est définie positive. Alors, le minimum est atteint au point $(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{54}{143}, 2, \frac{140}{143}\right)$.
- Appliquons la méthode de Newton à ce problème en partant du point $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$. La matrice H^{-1} est

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{18}{143} & 0 & -\frac{1}{143} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{143} & 0 & \frac{8}{143} \end{pmatrix}$$

Alors $x^{(1)} = x^{(0)} - H\left(x^0\right)^{-1} \nabla f\left(x^0\right)$ avec

$$\nabla f\left(x^0\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$H\left(x^0\right)^{-1} \nabla f\left(x^0\right) = \frac{1}{143} \begin{pmatrix} 18 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{143}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{143} \begin{pmatrix} 89 \\ -143 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{143} \begin{pmatrix} 89 \\ -143 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{143} \begin{pmatrix} 54 \\ 2 \times 143 \\ 140 \end{pmatrix}$$

$$\text{i.e.} \quad x^{(1)} := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{54}{143} \\ 2 \\ \frac{140}{143} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$$

Afin de rendre la méthode de Newton "globalement" convergente, certaines modifications ont été apportées à cette méthode. Nous allons en citer deux.

- ⋆ La première modification est d'introduire le pas de déplacement α_k dépendant de k, i.e.,
$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k H\left(x^k\right)^{-1} \nabla f\left(x^k\right),$$
où α_k est choisi de telle sorte qu'il minimise la fonction d'une variable
$$g(\alpha) = f\left(x^k - \alpha H\left(x^k\right)^{-1} \nabla f\left(x^k\right)\right),$$
sur l'ensemble des $\alpha \geqslant 0$.
- ⋆ La deuxième modification est de changer le Hessien $H\left(x^k\right)$ par $H\left(x^k\right) + \alpha_k I$, i.e.,
$$x^{k+1} = x^k - \left[H\left(x^k\right) + \alpha_k I\right]^{-1} \nabla f\left(x^k\right)$$
où $\alpha_k > 0$. (Le scalaire α_k peut être choisi minimal avec la contrainte que toutes les valeurs propres de $H\left(x^k\right) + \alpha_k I$ soient supérieures ou égales à une constante $\delta > 0$ donnée). Cette méthode est connue sous le nom de la méthode de Levenberg-Marquardt.
Lorsque $\alpha_k = 0$, on retrouve la méthode de Newton. L'intérêt de cette méthode est que dans le cas où $H\left(x^k\right)$ n'est pas définie positive on peut trouver un $\alpha_k > 0$ tel que $H\left(x^k\right) + \alpha_k I$ soit définie positive.
- ⋆ Une autre variante de la méthode de Newton est proposée dans le but de diminuer la quantité de calcul (notamment le calcul du Hessien $H\left(x^k\right)$ et son inverse à chaque itération). Cette méthode consiste à partir d'un point x^0 donné, de calculer le Hessien. $H = H\left(x^0\right)$ et d'utiliser le même Hessien H dans la méthode de Newton pendant p itérations, puis changer H par $H\left(x^p\right)$ et répéter la procédure.

Algorithme : L'algorithme peut s'écrire pour $m = 0, 1, \ldots,$ par

i. $H = H\left(x^{mp}\right)$.

ii. $x^{k+1} = x^k - H^{-1} \nabla f\left(x^k\right)$, pour $mp \leq k \leqslant (m+1)p - 1$.

p varie entre 2 et 4 itérations. Si $p = 1$, on retrouve la méthode de Newton.

Chapitre 3

Optimisation avec contraintes

Sommaire

1 Optimisation sur des ensembles simples

Nous commençons l'étude des problèmes d'optimisation avec contraintes par le "plus simple" d'entre eux, à savoir le problème (P) suivant

$$(P) \quad \min_{x \in S} f(x)$$

où S est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la "structure est simple". Pour être plus précis, nous considérerons ces quelques exemples de ce sous-ensemble :

$$\begin{aligned} &S = \{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = b\}\,, \\ &S = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leqslant r\}\,, \\ &S = \{x \in \mathbb{R}^n;\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n\}\,. \end{aligned}$$

1.1 Etude théorique

Théorème 1.1

Condition nécessaire du 1er ordre

Soit x^* un mininum local de f. On suppose que S est convexe et que f est de classe C^1 sur S. Alors, on a

$$(\nabla f(x^*), x - x^*) \geqslant 0, \forall\, x \in S.$$

Preuve :

- Supposons qu'il existe un point $x^0 \in S$, tel que

$$\left(\nabla f(x^*), x^0 - x^*\right) < 0.$$

  - ✓ Alors, prenons $x = x^* + \alpha(x^0 - x^*) \in S$, pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, on a

$$f(x) = f(x^*) + \alpha \underbrace{\left(\nabla f(x^*), x^0 - x^*\right)}_{<0} + o(\alpha) < f(x^*)$$

  - ✓ Et pour $\alpha > 0$ suffisamment petit, alors on obtient

$$f(x) < f(x^*)$$

  - ✓ Ce qui contredit le fait que x^* est un minimum local. □

Contrairement à un problème d'optimisation sans contraintes, une condition suffisante d'optimalité pour le problème (P) peut être formulée à partir du gradient de la fonction non convexe f.

Théorème 1.2

Soit f une fonction de classe C^1 sur S et soit x^* un point de S. On suppose que S est convexe et f satisfait la condition :

$$(\nabla f(x^*), x - x^*) \geqslant \alpha \|x - x^*\|, \ \alpha > 0, \text{ pour tout } x \in S \text{ et voisin de } x^*.$$

Alors x^* est un minimum local de $f(x)$ sur S.

Preuve :

- Soit le voisinage $V_\varepsilon(x^*) \cap S$ de x^*, pour lequel

$$(\nabla f(x^*), x - x^*) \geqslant \alpha \|x - x^*\|, \ \forall\, x \in V_\varepsilon(x^*) \cap S.$$

  - ✓ Soit $\varepsilon_1 > 0$, avec $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$, alors nous avons

$$|f(x^* + y) - f(x^*) - (\nabla f(x^*), y)| \leqslant (\alpha/2)\|y\|$$

    pour tout y tel que $\|y\| \leqslant \varepsilon_1$.

✓ En effet, par un développement de Taylor d'ordre 1, on a

$$f(x^* + y) = f(x^*) + (\nabla f(x^*), y) + o(\|y\|)$$

où $o(\|y\|) = \|y\|\varepsilon(y)$, avec $\varepsilon(y) \underset{y \to 0}{\longrightarrow} 0$. Cette limite signifie

$$\forall\, \eta_1 > 0,\ \exists\, \eta_2 > 0 : \forall\, y,\ \|y\| \leqslant \eta_2 \Rightarrow |\varepsilon(y)| \leqslant \eta_1$$

Prenons dans ce cas la valeur $\eta_1 = \alpha/2$, il existe alors un $\eta_2 > 0$ tel que

$$\forall\, y,\ \|y\| \leqslant \eta_2 \Rightarrow |\varepsilon(y)| \leqslant \alpha/2$$

En particulier, il suffit de prendre $\varepsilon_1 = \inf(\eta_2, \varepsilon)$, et alors on obtient

$$|f(x^* + y) - f(x^*) - (\nabla f(x^*), y)| = \|y\| |\varepsilon(y)| \leqslant \alpha/2 \|y\|,$$

pour tout y tel que $\|y\| \leqslant \varepsilon_1$.

- Par suite, pour $x \in S$, tel que $\|x - x^*\| \leqslant \varepsilon_1$ (où $y = x - x^*$), nous avons

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x^*) - (\nabla f(x^*), x - x^*) &\geqslant -(\alpha/2)\|x - x^*\| \\
f(x) &\geqslant f(x^*) + (\nabla f(x^*), x - x^*) - (\alpha/2)\|x - x^*\| \\
f(x) &\geqslant f(x^*) + (\alpha/2)\|x - x^*\| \\
f(x) &\geqslant f(x^*),
\end{aligned}$$

pour tout $x \in S$ et $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$, i.e., x^* est un minimum local. □

Note : La condition $(\nabla f(x^*), x - x^*) \geqslant \alpha \|x - x^*\|, \alpha > 0$ dans le Théorème 1.2 ne peut être vérifiée si x^* est un point de l'intérieur de S. Alors, sous les conditions du Théorème 1.2 le minimum est nécessairement atteint sur le bord de S.

On peut aussi montrer le résultat suivant :

Théorème 1.3

Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur S avec S convexe. Soit x^* un point de S. Alors la condition suivante

$$(\nabla f(x^*), x - x^*) \geqslant 0,\ \forall\, x \in S,$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que x^* soit un minimum global de $f(x)$ sur S.

Preuve :

- Condition nécessaire :

✓ C'est une conséquence immédiate du Théorème 1.1,

✓ et du fait que tout optimum local est aussi global pour les problèmes convexes.

- Condition suffisante :

✓ D'après le Théorème 4.1 du chapitre I, on a :

$$f(x) \geqslant f(x^*) + (\nabla f(x^*), x - x^*)$$

car f est convexe et de classe C^1.

✓ Et donc $f(x) \geqslant f(x^*), \forall x \in S$. □

Exemple 1.1 : Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et S un convexe de $\mathbb{R}^n$. Soit la fonction $f(x) = \|x - a\|^2$ et on cherche à résoudre le problème

$$\min_{x \in S} f(x).$$

- Tout d'abord on a $\nabla f(x) = 2(x - a)$ et donc la matrice Hessienne $H(x) = 2I$. Donc $f(x)$ est strictement convexe.
- Alors, d'après le Théorème 1.3, une condition nécessaire et suffisante pour que x^* soit un minimum global de $f(x)$ sur S est

$$(\nabla f(x^*), x - x^*) \geqslant 0, \ \forall x \in S, \ \text{c'est-à-dire } (x^* - a, x - x^*) \geqslant 0, \ \forall x \in S.$$

- Ce qui veut dire, en d'autres termes, que x^* est la projection du vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ sur le convexe S (notée $x^* = P_S(a)$, où P_S est l'opérateur de projection). De plus cette solution est unique car $f(x)$ est strictement convexe.

Note :

- Soit S un convexe de $\mathbb{R}^n$. $P_S(x)$ est le point de S qui réalise le minimum de $\|x - y\|$ sur l'ensemble des $y \in S$. On notera par :

$$P_S(x) = \operatorname*{argmin}_{y \in S} \|x - y\|.$$

- La caractérisation de la projection sur un ensemble convexe S est donnée par :

$$(x - P_S(x), y - P_S(x)) \leqslant 0, \ \forall y \in S.$$

- Il est évident que si $x \in S$, alors $P_S(x) = x$.

Exemple 1.2 : Soit l'ensemble convexe $S = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| \leq \rho\}$. Alors, on a

$$P_S(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leqslant \rho, \\ \rho \frac{x}{\|x\|}, & \text{si } \|x\| > \rho. \end{cases} \tag{3.1}$$

Concernant l'unicité de la solution du problème (P), on peut énoncer les résultats suivants :

Théorème 1.4

Sous les hypothèses du Théorème 1.2, x^* est l'unique minimum local.

Preuve :

- D'après la démonstration du Théorème 1.2, on a vu que

$$f(x) \geqslant f(x^*) + \alpha/2 \|x - x^*\|,$$

pour tout x dans un voisinage de x^*.

- Supposons qu'il existe un autre minimum local ξ^*. Alors on a aussi

$$f(x) \geqslant f(\xi^*) + \alpha/2 \|x - \xi^*\|. \tag{3.2}$$

- D'où, on obtient à partir de (3.2)

$$f(x^*) \geqslant f(\xi^*) + \alpha/2 \|x^* - \zeta^*\|.$$

- Du fait que ξ^* est un autre minimum local, alors on a

$$f(x^*) = f(\zeta^*) \ \text{ et donc } \ \|x^* - \zeta^*\| \leq 0 \ \Rightarrow \ x^* = \zeta^*. \qquad \square$$

L'unicité de la solution de (P) peut être garantie par la stricte convexité de f. Cependant, d'autres conditions peuvent être imposées sur S pour assurer l'unicité du minimum. Commençons par donner une définition.

Définition 1.1

On dit que S est stictement convexe si pour tout $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$ et tout $\lambda \in]0, 1[$, le point $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ est un point de l'intérieur de S.

Exemple 1.3 :

- La boule $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| \leqslant \rho\}$ est strictement convexe.
- Par contre le parallélipéde $S = \{x \in \mathbb{R}^n, a \leq x \leq b\}$ n'est pas strictement convexe.

Nous avons aussi une propriété qui relie la stricte convexité de f et la stricte convexité de $S = \{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \leqslant \alpha\}$.

Proposition 1.1

Si f est une fonction strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$, alors l'ensemble $S_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \leq \alpha\}$ est strictement convexe pour tout α.

Théorème 1.5

Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Soit S un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ strictement convexe. Si $\|\nabla f(x)\| \geqslant \varepsilon > 0$ pour tout $x \in S$, alors le minimum de $f(x)$ sur S est unique.

Exemple 1.4 :

1 $x^* = \underset{a \leq x \leq b}{\operatorname{argmin}}(c, x)$, où (c, x) est convexe et $[a, b]$ est convexe donc C.N.

$$(\nabla f(x^*), x - x^*) \geqslant 0, \ \forall\, x \in [a, b]$$

- ✓ Or $\nabla f(x^*) = c$, alors

$$(c, x - x^*) \geqslant 0, \ \forall\, x \in [a, b],$$
$$c_i (x_i - x_i^*) \geqslant 0, \ \forall\, i \in \{1, \dots, n\}, \forall\, x_i \in [a_i, b_i]$$

- ✓ si $c_i > 0$ alors $x_i^* = a_i$
- ✓ si $c_i < 0$ alors $x_i^* = b_i$
- ✓ si $c_i = 0$ abord $x_i^* = \lambda \in [a_i, b_i]$.
- ✓ Alors une solution est :

$$x_i^* = \begin{cases} a_i & \text{si } c_i > 0 \\ b_i & \text{si } c_i < 0 \\ \lambda, & a_i \leqslant \lambda \leqslant b_i, \quad \text{si } c_i = 0. \end{cases}$$

2 $x^* = \underset{\|x\| \leq \rho}{\operatorname{argmin}}(c, x)$ avec $c \neq 0$. La solution ici est donnée par $x^* = -\rho \frac{c}{\|c\|}$.

- ✓ En effet

$$|(c, x)| \leqslant \|c\|\|x\| \leqslant \rho\|c\|, \forall\, x \ \text{ tel que } \ \|x\| \leqslant \rho$$

donc $(c, x) \geqslant -\rho\|c\|$.

- ✓ Si on trouve un point x^* tel que $(c, x^*) = -\rho\|c\|$ et de norme plus petit que ρ, alors il sera une solution.
- ✓ Or $(c, x^*) = -\rho\|c\| \ \Rightarrow \ (c, x^*) = \left(-\rho\frac{c}{\|c\|}, c\right)$ et donc il suffit de prendre

$$x^* = -\rho\frac{c}{\|c\|}.$$

✓ De plus c'est l'unique solution de ce problème car $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq \rho\}$ est strictement convexe et la fonction $x \longrightarrow (c, x)$ est convexe aussi avec

$$\|\nabla f(x)\| = \|c\| > 0, \text{ (pour } c \neq 0).$$

1.2 Méthodes numériques de base

Les méthodes que nous allons décrire sont des méthodes similaires à celles déjà étudiées dans le cadre d'optimisation sans contraintes.

• 1.2.1 - Méthode du gradient projeté

Cette méthode est une généralisation directe de la méthode de gradient. Puisque, en général, les itérés sont en dehors de l'ensemble S, il est possible d'ajouter l'opération de projection sur S. Nous aboutissons à la méthode :

$$x^{k+1} = P_S\left(x^k - \gamma \nabla f\left(x^k\right)\right)$$

où P_S est l'opérateur de projection sur S. Donnons quelques exemples de projections !

Exemple 1.5 :

1. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n; x \geqslant 0\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on définit la projection sur S par
$$P_S(x) = x_+, \quad \text{où } x_+ \stackrel{\text{def.}}{=} \left(\sup\left(x_i, 0\right)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}.$$
Dans ce cas, la méthode du gradient projeté prend la forme
$$x^{k+1} = \left(x^k - \gamma \nabla f\left(x^k\right)\right)_+$$

2. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n; a \leq x \leq b\}$. Considérons la notation suivante :
$$\text{si } \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ on pose : } (\lambda)_\alpha^\beta = \begin{cases} \lambda & \text{si} \quad \alpha \leq \lambda \leq \beta \\ \beta & \text{si} \quad \lambda > \beta \\ \alpha & \text{si} \quad \lambda < \alpha \end{cases}$$
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on définit la projection sur S par
$$P_S(x) = (x)_a^b \stackrel{\text{def.}}{=} \left((x_i)_{a_i}^{b_i}\right)_{1 \leq i \leq n},$$
et la méthode du gradient projeté s'écrit
$$x^{k+1} = \left(x^k - \gamma \nabla f\left(x^k\right)\right)_a^b$$

3. Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq \rho\}$, alors on avait défini en (3.1) la projection $P_S(x)$. La méthode du gradient projeté s'écrit donc
$$x^{k+1} = \begin{cases} x^k - \gamma \nabla f\left(x^k\right), & \text{si } \left\|x^k - \nabla f\left(x^k\right)\right\| \leq \rho, \\ \rho \dfrac{x^k - \gamma \nabla f\left(x^k\right)}{\left\|x^k - \gamma \nabla f\left(x^k\right)\right\|}, & \text{si } \left\|x^k - \nabla f\left(x^k\right)\right\| > \rho. \end{cases}$$

• 1.2.2 - La méthode de Newton

Pour construire la méthode de Newton pour le problème (P), on peut utiliser la même idée d'approximation quadratique de $f(x)$ comme dans le cas d'optimisation sans contraintes. La seule différence est qu'il est nécessaire de trouver l'approximation du minimum sur S au lieu de tout l'espace $\mathbb{R}^n$. Ces arguments mènent à la méthode

$$x^{k+1} = \underset{x \in S}{\operatorname{argmin}} f_k(x)$$

où $f_k(x) = f\left(x^k\right) + \left(\nabla f\left(x^k\right), x - x^k\right) + (1/2)\left(H\left(x^k\right)\left(x - x^k\right), x - x^k\right).$

• 1.2.3 - La méthode du gradient conjugué : cas quadratique

On considère une fonction quadratique $f(x)$. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n ; Cx = 0\}$ où C est une matrice (m, n) de rang m $(m \leq n)$. Si $m = n$, alors $S = \{0\}$. On a la projection

$$P_S(x) = \left(I - C^\top \left(CC^\top\right)^{-1} C\right) x.$$

Dans ces conditions, la méthode du gradient conjugué s'écrit :

Algorithme : L'algorithme gradient conjugué s'écrit :

1. Étant donné $x^0 \in S$ et $d^0 = -P_S\left(\nabla f\left(x^0\right)\right)$.
2. Déterminer à l'étape k :
   - $\alpha_k = \operatorname{argmin} f\left(x^k + \alpha d^k\right)$
   - $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$
   - $d^{k+1} = -P_S\left(\nabla f\left(x^{k+1}\right)\right) + \beta_{k+1} d^k$
   - $\beta_{k+1} = \frac{\left\|P_S\left(\nabla f\left(x^{k+1}\right)\right)\right\|^2}{\left\|P_S\left(\nabla f\left(x^k\right)\right)\right\|^2}$

Note :

- On montre que si $f(x)$ est quadratique, $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$, et si $(Ax, x) \geqslant \alpha\|x\|^2$, $\alpha > 0$, pour tout $x \in S$, alors la méthode du gradient conjugué (qu'on vient de décrire) converge au plus en $(n - m)$ itérations.
- Remarquons aussi que si $m = 0$ (ce qui entraine que $C = 0$), alors $S = \mathbb{R}^n$ et on obtient le même résultat de convergence que dans le cas d'optimisation sans contraintes puisque A est en particulier définie positive.

2 Contraintes d'égalité

Nous nous intéressons ici au problème

$$(P)\ \begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \\ g_i(x)=0,\ i=1,\ldots,m \end{cases} \tag{3.3}$$

où f et g_i sont des fonctions assez régulières. C'est un cas particulier du problème général de la programmation mathématique. Nous étudierons ce problème en détail puisque les ideés qui se dégageront de cette étude, seront utilisables dans le cas général.

2.1 Conditions nécessaires du 1^{er} et du $2^{\text{ième}}$ ordre

Soit $S=\{x\in\mathbb{R}^n;\ g_i(x)=0, i=1,\ldots,m\}$. Les points $x\in S$ sont dits admissibles. Le point x^* est appelé minimum (local) pour le problème (P), s'il est admissible et si

$$f\left(x^*\right)\leqslant f(x),$$

pour tout x admissible voisin de x^*.

Théorème 2.1

Condition nécessaire du 1^{er} ordre

Soit x^* un minimum du problème (P). Supposons que $f(x), g_i(x)$ sont de classe C^1 dans un voisinage de x^*. Alors, il existe $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ des nombres réels non tous nuls, tels que

$$\lambda_0\nabla f\left(x^*\right)+\sum_{i=1}^m\lambda_i\nabla g_i\left(x^*\right)=0 \tag{3.4}$$

Note : Soit $g=\begin{pmatrix} g_1\\ \vdots\\ g_m\end{pmatrix}$ où $g_i:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}, i=1,\ldots,m$. Le jacobien de g est la matrice notée ∇g de type (m,n) définie par

$$\nabla g(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}\\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\nabla g_1^\top\\ \vdots\\ \nabla g_m^\top\end{bmatrix}$$

Alors, la condition (3.4) du Théorème 2.1 s'écrit aussi comme suit

$$\lambda_0\nabla f\left(x^*\right)+\nabla g\left(x^*\right)^\top\lambda=0,\ \text{ où le vecteur }\ \lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Définition 2.1

Un point x^* est dit régulier si $f(x), g_i(x)$ sont de classe C^1 dans un voisinage de x^* et $\nabla g_i\left(x^*\right), i=1, \ldots, m$, sont linéairement indépendants.

Théorème 2.2

La règle des multiplicateurs de Lagrange

Si x^* est un minimum régulier du problème (P), alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tels que

$$\nabla f\left(x^*\right)+\nabla g\left(x^*\right)^{\top} \lambda=0, \text{ où } \lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m\end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ dans (3.6) sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

- Le Théorème 2.2 est une conséquence du Théorème 2.1.

Preuve :

En effet, supposons que $\lambda_0=0$ alors à partir de (3.4) on a

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i\left(x^*\right)=0,$$

avec au moins un des coefficients λ_i non nul, ceci contredit le fait que $\nabla g_i\left(x^*\right)$ sont linéairement indépendants. Alors, $\lambda_0 \neq 0$ et donc on peut diviser (3.5) par λ_0 et ceci donne (3.6). $\square$

- Dans le Théorème 2.2 il est nécessaire que le point x^* soit régulier pour avoir la formule (3.6).

Exemple 2.1 : En effet, considérons le problème (P) dans $\mathbb{R}^2$ avec les fonctionnelles

$$f(x, y)=y, \; g_1(x, y)=(x-1)^2+y^2-1 \text{ et } g_2(x, y)=(x+1)^2+y^2-1.$$

- Dans ce cas, l'ensemble admissible est donné par

$$S=\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \, g_i(x, y)=0, i=1,2\right\}=\{(0,0)\}$$

et donc la seule solution de ce problème est $\left(x^*, y^*\right)=(0,0)$.

- Cependant, le point (x^*, y^*) n'est pas un point régulier car

$$\nabla g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix}, \nabla g_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x+1) \\ 2y \end{pmatrix},$$

  et les deux vecteurs $\nabla g_1(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla g_2(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas linéairement indépendants.

- Et s'il existe λ_1, λ_2 tels que

$$\nabla f(x^*, y^*) + \lambda_1 \nabla g_1(x^*, y^*) + \lambda_2 \nabla g_2(x^*, y^*) = 0,$$

  cela implique en particulier que $1 + \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 0 = 0 \Rightarrow 1 = 0$ ce qui est absurde.

Théorème 2.3

Condition nécessaire du $2^{\text{ième}}$ ordre

Soit x^* un minimum régulier du problème (P). Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les multiplicateurs de Lagrange. Supposons que $f(x)$ et $g_i(x), i = 1, \ldots, m$, sont de classe C^2 au voisinage de x^*. Alors la matrice

$$L(x^*) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) + \lambda_1 \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) + \cdots + \lambda_m \frac{\partial^2 g_m}{\partial x_i \partial x_j}(x^*)\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

est semi-définie positive sur le plan tangent $M(x^*) = \{y \in \mathbb{R}^n, \ \nabla g(x^*) y = 0\}$, c'est-à-dire $(L(x^*) y, y) \geqslant 0, \ \forall\, y \in M(x^*)$.

Dans la définition de $M(x^*)$, $\nabla g(x^*) y = 0$ est équivalent à dire

$$(\nabla g_i(x^*), \ y) = 0, \ \forall\, i = 1, \ldots, m.$$

Note : On notera $L(x^*)$ par

$$L(x^*) = F(x^*) + \lambda_1 G_1(x^*) + \cdots + \lambda_m G_m(x^*)$$

où $F(x^*)$ est le Hessian de $f(x)$ au point x^* et $G_i(x^*)$ est le Hessian de $g_i(x)$ au point x^* pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$.

2.2 Condition suffisante du $2^{\text{ième}}$ ordre

Théorème 2.4

Soil x^* un point régulier tel que $g_i(x^*) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)^\top \lambda = 0.$$

Si $L(x^*) = F(x^*) + \lambda_1 G_1(x^*) + \cdots + \lambda_m G_m(x^*)$ est une matrice définie positive sur le plan tangent $M(x^*)$, alors x^* est un minimum de f sous les contraintes $g_i(x^*) = 0, i = 1, \ldots, m$.

Définition 2.2

Un point x^* pour lequel les conditions du Théorème 2.4 sont vérifiées est dit point non singulier.

Note :

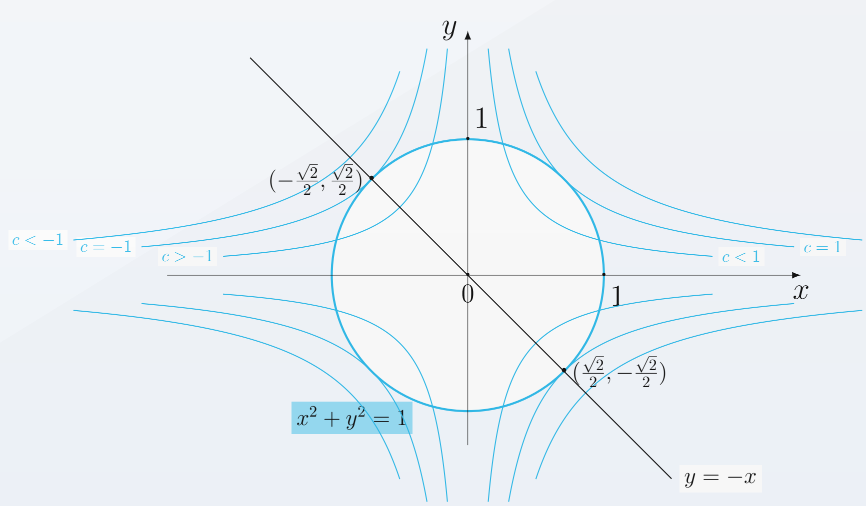
- Un minimum non singulier est unique.
- Pour un minimum régulier, les multiplicateurs de Lagrange sont déterminés de manière unique.

Exemple 2.2 :

- Considérons le problème de minimisation suivant

$$\min_{g(x,y)=0} f(x,y), \quad \text{où} \quad f(x,y) = 2xy \quad \text{et} \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$

  - Résolvons le problème géométriquement.
    - ✓ Les courbes de niveau $f(x,y) = c$ sont des hyperboles d'équations $y = \frac{c}{2x}$.



Les solutions sont les points sur les courbes de niveau ayant la plus petite valeur de c et qui sont sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

- ✓ Gaphiquement, on voit que les solutions sont les points qui sont en même temps sur la courbe de niveau $2xy = -1$ $(c = -1)$ et sur le cercle.
- ✓ Alors, on obtient analytiquement le système d'équations suivant

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = -1 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2 = 0 \Rightarrow y = -x$$

- ✓ D'où $2xy = -2x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = 1/2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}/2$. Donc $\min\limits_{g(x,y)=0} f(x,y) = -1$ et il y'a deux points qui réalisent le minimum :

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

- Maintenant, vérifions les conditions d'optimalité.
  - ✓ Les gradients de la fonction à minimiser f et de la fonction contrainte g :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x \end{pmatrix}, \ \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

  - ✓ Condition nécessaire du 1^{ier} ordre : $\nabla f(x^*, y^*) + \lambda \nabla g(x^*, y^*) = 0$

$$\begin{pmatrix} 2y^* \\ 2x^* \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x^* \\ 2y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i.e. } \begin{cases} y^* + \lambda x^* = 0 \\ x^* + \lambda y^* = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne les points suivants, peu importe que λ soit $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

  - ✓ Condition nécessaire du $2^{\text{ième}}$ ordre : $(L(x^*, y^*)\xi, \xi) \geqslant 0, \ \forall\, \xi \in M(x^*, y^*)$

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \ G(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$L(x^*, y^*) = F(x^*, y^*) + \lambda G(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ où on a pris } \lambda = 1.$$

$$M(x^*, y^*) = \left\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2; \left(\nabla g(x^*, y^*), \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}.$$

Prenons par exemple, $(x^*, y^*) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Alors

$$\nabla g\left(x^*, y^*\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\nabla g\left(x^*, y^*\right), \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = -\sqrt{2}(\xi - \eta),$$

et dans ce cas $M\left(x^*, y^*\right) = \{(\xi, \xi), \xi \in \mathbb{R}\}$.
Nous obtenons le même résultat pour le point $(x^*, y^*) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

✓ Par suite, $L\left(x^*, y^*\right)$ est définie positive sur $M\left(x^*, y^*\right)$ car on obtient

$$(\xi, \xi)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} = (\xi, \xi) \cdot \begin{pmatrix} 4\xi \\ 4\xi \end{pmatrix} = 8\xi^2 > 0$$

pour $\xi \neq 0$.

- Considérons le problème de minimisation suivant

$$\min_{g(x,y)=0} f(x, y), \text{ où } f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ et } g(x, y) = x + y - 1.$$

✓ On a les gradients suivants :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \; \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

✓ Condition nécessaire du 1ier ordre : $\nabla f\left(x^*, y^*\right) + \lambda \nabla g\left(x^*, y^*\right) = 0$

$$\begin{pmatrix} 2x^* \\ 2y^* \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i.e. } \begin{cases} 2x^* + \lambda = 0 \\ 2y^* + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow x^* = y^*$$

Et comme $g\left(x^*, y^*\right) = 0$ alors $(x^*, y^*) = (1/2,\, 1/2)$ et $\lambda = -2x^* = -1$.

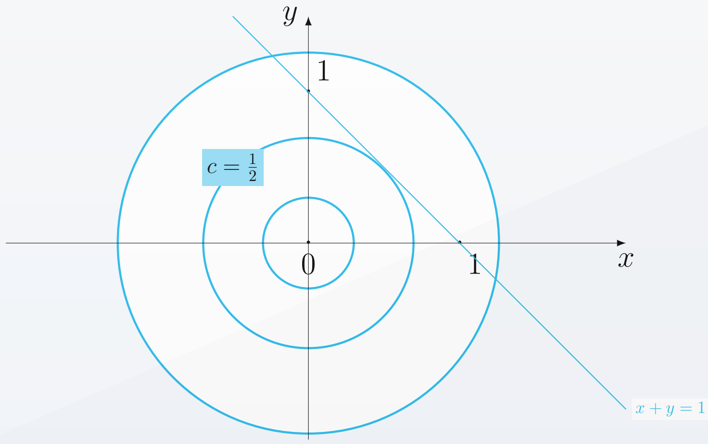
✓ Condition nécessaire du 2ième ordre : $\left(L\left(x^*, y^*\right)\xi, \xi\right) \geqslant 0, \; \forall\, \xi \in M\left(x^*, y^*\right)$

$$F\left(x^*, y^*\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } G\left(x^*, y^*\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ alors } M\left(x^*, y^*\right) = \mathbb{R}^2.$$

Et donc, $L\left(x^*, y^*\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est définie positive.

✓ Donc, le problème admet une solution unique qui est $(1/2, 1/2)$ et le multiplicateur de Lagrange est $\lambda = -1$.

✓ Encore une fois, on peut résoudre ce problème géométriquement. Les courbes de niveau $f(x, y) = c$ sont les cercles d'équations $x^2 + y^2 = c$ (bien sûr $c \geqslant 0$).



Le minimum est atteint au point où la courbe de niveau $x^2+y^2 = c$ est tangente à la droite $x+y = 1$. Ce point est $(1/2, 1/2)$ et la valeur minimale est $c = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1/2$.

2.3 Formule du Min-Max

Soit $\mathscr{L}(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction.

Définition 2.3

Point-selle

On dit qu'un point $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est un point-selle de $\mathscr{L}(\cdot,\cdot)$ si le point x^* minimise la fonction

$$\mathscr{L}(\cdot, \lambda^*) : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \mathscr{L}(x, \lambda^*)$$

et si le point λ^* maximise la fonction

$$\mathscr{L}(x^*, \cdot) : \lambda \in \mathbb{R}^m \longmapsto \mathscr{L}^*(x^*, \lambda)$$

c'est-à-dire, si on a

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}^m} \mathscr{L}(x^*, \lambda) = \mathscr{L}(x^*, \lambda^*) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \mathscr{L}(x, \lambda^*)\,.$$

Proposition 2.1

min-max

Si $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est un point-selle de $\mathscr{L}(\cdot,\cdot)$, alors

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}^m} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \mathscr{L}(x, \lambda) = \mathscr{L}(x^*, \lambda^*) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{\lambda\in\mathbb{R}^m} \mathscr{L}(x, \lambda).$$

Preuve :

- Tout d'abord, par définition du point-selle (x^*, λ^*), nous avons les inéquations

$$\mathscr{L}(x^*, \lambda) \leqslant \mathscr{L}(x^*, \lambda^*) \leqslant \mathscr{L}(x, \lambda^*), \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^m.$$

- Posons $F(x) = \max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \mathscr{L}(x, \lambda)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. On veut montrer que $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) = \mathscr{L}(x^*, \lambda^*)$:
  - ✓ On a
  $$\mathscr{L}(x^*, \lambda^*) \leqslant \mathscr{L}(x, \lambda^*) \leq \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \mathscr{L}(x, \lambda) = F(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$
  Donc, on a $\mathscr{L}(x^*, \lambda^*) \leq \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} F(x)$.
  - ✓ D'autre part, par définition du point-selle, on a
  $$F(x^*) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \mathscr{L}(x^*, \lambda) = \mathscr{L}(x^*, \lambda^*)$$
  - ✓ Alors,
  $$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) \leqslant F(x^*) = \mathscr{L}(x^*, \lambda^*)$$
  Donc, on a $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) \leqslant \mathscr{L}(x^*, \lambda^*)$.
  On obtient ainsi le résultat $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \mathscr{L}(x, \lambda) = \mathscr{L}(x^*, \lambda^*)$.
- Maintenant, posons $G(\lambda) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \mathscr{L}(x, \lambda)$. On veut montrer que $\max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}^m} G(\lambda) = \mathscr{L}(x^*, \lambda^*)$:
  - ✓ On a
  $$G(\lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathscr{L}(x, \lambda) \leqslant \mathscr{L}(x^*, \lambda) \leqslant \mathscr{L}(x^*, \lambda^*), \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^m.$$
  Donc, on obtient $\max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}^m} G(\lambda) \leqslant \mathscr{L}(x^*, \lambda^*)$.
  - ✓ D'autre part, d'après la définition de point-selle, on a
  $$\mathscr{L}(x^*, \lambda^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathscr{L}(x, \lambda^*) = G(\lambda^*)$$
  - ✓ Alors
  $$\mathscr{L}(x^*, \lambda^*) = G(\lambda^*) \leq \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} G(\lambda)$$
  Donc, on obtient $\mathscr{L}(x^*, \lambda^*) \leqslant \max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}^m} G(\lambda)$.
  Ainsi, on obtient donc le résultat $\max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \mathscr{L}(x, \lambda) = \mathscr{L}(x^*, \lambda^*)$. □

Maintenant, nous allons montrer le lien entre le point-selle et la solution d'un problème d'optimisation avec contraintes.

Définition 2.4

Considérons toujours le même problème de minimisation (P) suivant

$$(P)\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \\ g_i(x)=0,\ i=1,\ldots,m. \end{cases}$$

La fonction de Lagrange associée au problème (P), est par définition la fonction

$$\mathscr{L}(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x).$$

Théorème 2.5

(x^*,λ^*) est un point-selle pour $\mathscr{L}(x,\lambda)$ si et seulement si

1. $\mathscr{L}(x^*,\lambda^*)=\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\mathscr{L}(x,\lambda^*)$.
2. $g_i(x^*)=0,\ \forall\, i\in\{1,\ldots,m\}$.

Preuve :

- Condition nécessaire
  - ✓ D'après la définition du point-selle, on a automatiquement 1.
  - ✓ D'autre part

$$\mathscr{L}(x^*,\lambda^*)\geqslant\mathscr{L}(x^*,\lambda),\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}^m.$$

Donc,

$$f(x^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* g_i(x^*)\geqslant f(x^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x^*)$$

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i-\lambda_i^*)\,g_i(x^*)\leq 0,\ \forall\ (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}\in\mathbb{R}^m. \tag{3.7}$$

  - ✓ Alors forcément $g_i(x^*)=0,\ \forall\, i\in\{1,\ldots,m\}$.
  - ✓ En effet, supposons qu'il existe $k\in\{1,\ldots,m\}$ tel que $g_k(x^*)\neq 0$. Alors, en choisissant $(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_{k-1}^*,\lambda_k,\lambda_{k+1}^*,\ldots,\lambda_m^*)$, où λ_k est quelconque dans $\mathbb{R}$, on obtient à partir de (3.7) ceci

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i-\lambda_i^*)\,g_i(x^*)=(\lambda_k-\lambda_k^*)\,g_k(x^*)$$
$$\leq 0,\ \forall\ \lambda_k\in\mathbb{R}.$$

Or suivant le signe de $g_k(x^*)$, on peut trouver λ_k tel que $(\lambda_k-\lambda_k^*)\,g_k(x^*)>0$. Ce qui sera contradictoire.

- Condition suffisante
  - ✓ D'après 2, on a

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}\left(x^*, \lambda^*\right) = f\left(x^*\right) \\
\text{et } &\mathscr{L}\left(x^*, \lambda\right) = f\left(x^*\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i\left(x^*\right) = f\left(x^*\right) = \mathscr{L}\left(x^*, \lambda^*\right) \\
\text{i.e.} \quad &\max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \mathscr{L}^*\left(x^*, \lambda\right) = \mathscr{L}\left(x^*, \lambda^*\right).
\end{aligned}
$$

  - ✓ Cette dernière relation et celle en 1 entraînent que le point (x^*, λ^*) est un point-selle pour $\mathscr{L}(x, \lambda)$. □

Corollaire 2.1

Si (x^*, λ^*) est un point-selle de $\mathscr{L}(x, \lambda)$ alors x^* est un optimum global de (P).

Preuve :

- (x^*, λ^*) point-selle de $\mathscr{L}(x, \lambda)$ entraine que les conditions 1 et 2 du **Théorème 2.5** sont réalisées.
- Alors, ces conditions nous donnent

$$
\begin{aligned}
&f\left(x^*\right) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i\left(x^*\right)}_{=0} \leq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \\
\text{i.e.} \quad &f\left(x^*\right) \leqslant f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

- En particulier

$$
f\left(x^*\right) \leqslant f(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \ \text{ tel que } \ g_i(x) = 0, \ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}.
$$
□

Note :

- Connaissant λ^*, le problème de minimisation avec contraintes se ramène donc au problème de minimisation sans contraintes

$$
(P^*) \quad \mathscr{L}\left(x^*, \lambda^*\right) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathscr{L}\left(x, \lambda^*\right).
$$

- Comment trouver un tel $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$? Si l'on se rappelle que

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(x^*, \lambda^*\right) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathscr{L}\left(x, \lambda^*\right) &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \mathscr{L}(x, \lambda) \\
&= \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathscr{L}(x, \lambda)
\end{aligned}
$$

alors on est naturellement conduit à chercher λ^* comme solution du problème de maximisation

$$(D) \begin{cases} G(\lambda^*) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} G(\lambda) \\ \text{avec } G(\lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathscr{L}(x, \lambda) \end{cases}$$

- On appelle (D) le problème dual du problème (P), qui de ce point de vue, devient le problème primal.
- Le problème dual apparait donc à nouveau comme un problème d'optimisation sans contraintes.

Exemple 2.3 : Cas où f est une fonction quadratique et $g_i, i = 1, \ldots, m$ des fonctions affines. Soit

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle_n + \langle b, x\rangle_n + c$$

où A est une matrice d'ordre n, symétrique et définie positive. Soit g_i définie par

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j - d_i, \; i = 1, \ldots, m,$$

Vectoriellement, les fonctions affines g_i peuvent s'écrire

$$g(x) = Bx - d, \quad \text{où} \quad B = [b_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \quad \text{et} \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}.$$

On cherche à résoudre le problème

$$(P) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ Bx = d \end{cases}$$

- On définit d'abord la fonction $\mathscr{L}(x, \lambda)$ par

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle_n + \langle b, x\rangle_n + c + \langle Bx - d, \lambda\rangle_m, \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}^m.$$

$\mathscr{L}(x, \lambda)$ s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(x, \lambda) &= \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle_n + \langle b, x\rangle_n + \langle Bx, \lambda\rangle_m - \langle d, \lambda\rangle_m + c \\ &= \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle_n + \langle b, x\rangle_n + \left\langle B^\top \lambda, x\right\rangle_n - \langle d, \lambda\rangle_m + c \end{aligned}$$

- Calculons $G(\lambda) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \mathscr{L}(x,\lambda)$. Soit x_λ le minimum, alors

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}(x_\lambda,\lambda) = 0, \text{ c'est-à-dire } Ax_\lambda + b + B^\top\lambda = 0. \tag{3.8}$$

Et c'est bien le minimum uniqne pour chaque λ car le Hessien $\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial x^2}(x,\lambda) = A$ qui est définie positive.

- D'où, la fonction duale s'écrit

$$\begin{aligned}
G(\lambda) &= \min_{x\in\mathbb{R}^n} \mathscr{L}(x,\lambda) = \mathscr{L}(x_\lambda,\lambda) \\
&= \frac{1}{2}\langle Ax_\lambda, x_\lambda\rangle_n + \left\langle b + B^\top\lambda, x_\lambda\right\rangle_n - \langle d,\lambda\rangle_m + c \\
&= \frac{1}{2}\left\langle -b - B^\top\lambda, -A^{-1}\left(b+B^\top\lambda\right)\right\rangle_n + \left\langle b + B^\top\lambda, -A^{-1}\left(b+B^\top\lambda\right)\right\rangle_n \\
&- \langle d,\lambda\rangle_m + c \\
&= -\frac{1}{2}\left\langle b + B^\top\lambda, +A^{-1}\left(b+B^\top\lambda\right)\right\rangle_n - \langle d,\lambda\rangle_m + c \\
&= -\frac{1}{2}\left\langle b, A^{-1}b\right\rangle_n - \frac{1}{2}\left\langle b, A^{-1}B^\top\lambda\right\rangle_n \\
&- \frac{1}{2}\left\langle B^\top\lambda, A^{-1}b\right\rangle_n - \frac{1}{2}\left\langle B^\top\lambda, A^{-1}B^\top\lambda\right\rangle_n - \langle d,\lambda\rangle_m + c \\
&= -\frac{1}{2}\left\langle BA^{-1}B^\top\lambda, \lambda\right\rangle_m - \left\langle BA^{-1}b + d, \lambda\right\rangle_m - \frac{1}{2}\left\langle b, A^{-1}b\right\rangle_n + c
\end{aligned}$$

- Le point λ^* qui réalise le maximum de $G(\lambda)$ sur $\mathbb{R}^n$ vérifie nécessairement

$$\nabla G(\lambda^*) = 0, \text{ i.e, } -BA^{-1}B^\top\lambda^* - BA^{-1}b - d = 0.$$

Si $M = BA^{-1}B^\top$ et si B est de rang m, alors

$$\lambda^* = -M^{-1}\left(BA^{-1}b + d\right) \tag{3.9}$$

Et c'est bien l'unique solution car le Hessien de G est

$$\nabla^2 G(\lambda) = -BA^{-1}B^\top = -M$$

qui est définie négative car A^{-1} est définie positive et B est de rang m.

- Connaissant λ^*, on peut alors résoudre le problème (P^*) : $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \mathscr{L}(x,\lambda^*)$ qui aura comme solution la solution x^* du problème (P). Cette solution est donnée par (3.8) pour $\lambda = \lambda^*$, i.e,

$$x^* = x_{\lambda^*} = -A^{-1}\left(b + B^\top\lambda^*\right).$$

Exemple 2.4 : Considérons l'exemple suivant : $\min_{x \in S} \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x)$,

avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $S = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0 \right\}$.

- Par rapport à l'exemple précédent, on a $B = (1, 1)$, $d = 0$ et la fonctionnelle

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 + \lambda (x_1 + x_2)$$

- D'après (3.9), on a

$$\begin{aligned} \lambda^* &= -M^{-1} \left(BA^{-1} b + d \right) \\ M = BA^{-1} B^\top &= (1, 1) \left[\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}(1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \\ BA^{-1} b &= (1, 1) \left[\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}(1, 1) \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Alors $\lambda^* = (-3/2)(-2/3) = 1$ et la fonctionnelle $\mathscr{L}(x_1, \lambda^*)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(x_1, \lambda^*) &= x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_1 + x_2 \\ &= x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - x_1 + x_2 \end{aligned}$$

- A partir de (3.8), on a

$$\begin{aligned} x^* = x_{\lambda^*} &= -A^{-1} \left(b + B^\top \lambda^* \right) \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2+1 \\ 0+1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note : A partir de (3.8) et (3.9), on peut montrer que

$$P_S(x_0) = \left(I - B^\top \left(BB^\top \right)^{-1} B \right) x_0,$$

où $S = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ Bx = 0\}$ avec B une matrice (m, n) de rang m.

Preuve :
En effet ;

$$P_S(x_0) = \underset{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ Bx=0}}{\operatorname{argmin}} \|x - x_0\|^2$$

- On introduit la fonctionnelle

$$\begin{aligned} f(x) &= \|x - x_0\|^2 = (x - x_0, x - x_0) \\ &= (x, x) - 2(x, x_0) + \|x_0\|^2 \end{aligned}$$

où $A = 2I, b = -2x_0, c = \|x_0\|^2$ et $d = 0$.

- Alors, à partir de (3.9), on a

$$\begin{aligned} \lambda^* &= -M^{-1}\left(BA^{-1}b + d\right) \\ &= -2\left(BB^\top\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}B(-2x_0)\right) = 2\left(BB^\top\right)^{-1}Bx_0 \end{aligned}$$

- Et à partir de (3.8), nous avons

$$\begin{aligned} Ax^* &= Ax_{\lambda^*} = -b - B^\top\lambda^* \\ 2x^* &= 2x_0 - B^\top\left(2\left(BB^\top\right)^{-1}Bx_0\right) \\ &= 2\left(x_0 - B^\top\left(BB^\top\right)^{-1}Bx_0\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$P_S(x_0) = x^* = \left(I - B^T\left(BB^T\right)^{-1}B\right)x_0. \qquad \square$$

2.4 Méthodes numériques

• 2.4.1 - Méthode de linéarisation

✓ Dans cette méthode, la fonction objectif et les contraintes sont linéarisées à chaque itération. Rappelons tout d'abord la méthode du gradient dans le cas d'optimisation sans contraintes $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} F(x)$. Les itérations de la méthode du gradient s'écrivent

$$x^{k+1} = x^k - \gamma\nabla F\left(x^k\right), \ \gamma > 0.$$

Cette méthode peut être écrite sous la forme

$$x^{k+1} = \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}}\left(\frac{1}{2\gamma}\left\|x - x^k\right\|^2 + \left(\nabla F\left(x^k\right), x - x^k\right)\right).$$

✓ Alors, pour le problème avec contraintes

$$(P)\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \\ g_i(x) = 0, \ i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

on utilise la même idée après avoir linéarisée les contraintes, c'est-à-dire, en les écrivant comme suit

$$g_i(x) \simeq g_i\left(x^k\right) + \left(\nabla g_i\left(x^k\right), \left(x - x^k\right)\right), \; i = 1, \ldots, m.$$

Ainsi, on cherche x^{k+1} le point qui minimise la fonction

$$\begin{cases} x^{k+1} = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \left(\dfrac{1}{2\gamma} \left\| x - x^k \right\|^2 + \left(\nabla f\left(x^k\right), x - x^k\right) \right) \\ \text{sous les contraintes :} \\ g_i\left(x^k\right) + \left(\nabla g_i\left(x^k\right), x - x^k\right) = 0, \; \forall\, i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

✓ Soit la fonction de Lagrange associée à ce problème

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = \frac{1}{2\gamma} \left\| x - x^k \right\|^2 + \left(\nabla f\left(x^k\right), x - x^k\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(g_i\left(x^k\right) + \left(\nabla g_i\left(x^k\right), x - x^k\right)\right).$$

Les conditions d'optimalité du point-selle nous donnent

$$\mathscr{L}_x\left(x^{k+1}, \lambda^{k+1}\right) = 0 \tag{3.10}$$

$$\mathscr{L}_\lambda\left(x^{k+1}, \lambda^{k+1}\right) = 0 \tag{3.11}$$

Appliquant respectivement les conditions (3.10) et (3.11) à la fonctionnelle $\mathscr{L}(x, \lambda)$, on a

$$\frac{1}{\gamma}\left(x^{k+1} - x^k\right) + \nabla f\left(x^k\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{k+1} \nabla g_i\left(x^k\right) = 0$$

$$g_i\left(x^k\right) + \left(\nabla g_i\left(x^k\right),\; x^{k+1} - x^k\right) = 0, \; i = 1, \ldots, m, \; i.e.,$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}\left(x^{k+1} - x^k\right) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{k+1} \nabla g_i\left(x^k\right) = -\nabla f\left(x^k\right), \; \gamma > 0, \\ \left(\nabla g_i\left(x^k\right), x^{k+1} - x^k\right) = -g_i\left(x^k\right), \; i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{3.12}$$

C'est la méthode de linéarisation qui consiste à résoudre un système linéaire de $(n+m)$ équations à $(n+m)$ inconnues $\left(x^{k+1}, \lambda^{k+1}\right)$.

Exemple 2.5 : Reprenons l'exemple

$$\min_{x+y=1} \left(x^2 + y^2\right)$$

- En posant $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x + y - 1$, on a les gradients

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \ \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Alors, on a à partir de la linéairisation (3.12) le système suivant

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} + \lambda_{k+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2x_k \\ 2y_k \end{pmatrix} \\ \qquad x_{k+1} - x_k + y_{k+1} - y_k = -(x_k + y_k - 1) \end{cases}$$

- C'est-à-dire

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}x_{k+1} + \lambda_{k+1} = \left(\dfrac{1}{\gamma} - 2\right)x_k \\ \dfrac{1}{\gamma}y_{k+1} + \lambda_{k+1} = \left(\dfrac{1}{\gamma} - 2\right)y_k \\ \ x_{k+1} + y_{k+1} = 1 \end{cases}$$

• 2.4.2 - Méthodes Duales

La méthode de linéarisation ne contient pas explicitement le lagrangien. Les méthodes que nous allons décrire ici sont des méthodes qui utilisent explicitement les propriétés du lagrangien. Reprenons le problème sous contraintes suivant

$$(P)\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \\ g_i(x) = 0, \ i = 1,\dots,m, \end{cases}$$

où la fonction de Lagrange associée au problème (P) est donnée par

$$\mathscr{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x).$$

Méthode d'Uzawa Rappelons que le point-selle (x^*,λ^*) de $\mathscr{L}(\cdot,\cdot)$ est défini par

$$\mathscr{L}(x^*,\lambda^*) = \min_{x\in\mathbb{R}^n}\mathscr{L}(x,\lambda^*)$$
$$\mathscr{L}(x^*,\lambda^*) = \max_{\lambda\in\mathbb{R}^m}\mathscr{L}(x^*,\lambda)$$

La méthode d'Uzawa consiste à faire les étapes suivantes :

✓ Étant donné λ^k, on cherche x^k tel que

$$\mathscr{L}\left(x^k,\lambda^k\right) = \min_{x\in\mathbb{R}^n}\mathscr{L}\left(x,\lambda^k\right).$$

✓ Après avoir déterminer x^k, on applique la méthode du gradient au problème

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}^m} \mathscr{L}\left(x^k,\lambda\right), \text{ c'est-à-dire } \lambda^{k+1} = \lambda^k + \gamma \mathscr{L}_\lambda\left(x^k,\lambda^k\right), \ \gamma > 0.$$

Comme

$$\mathscr{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \text{ alors } \mathscr{L}_\lambda\left(x^k,\lambda^k\right) = \begin{pmatrix} g_1\left(x^k\right) \\ \vdots \\ g_m\left(x^k\right) \end{pmatrix} = g\left(x^k\right).$$

Algorithme : L'algorithme d'Uzawa s'écrit alors :

1. Étant donné λ^0.
2. Déterminer x^k par :

$$\mathscr{L}\left(x^k,\lambda^k\right) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \mathscr{L}\left(x,\lambda^k\right)$$

3. Calculer λ^{k+1} par : $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \gamma g\left(x^k\right), \ \gamma > 0.$

Méthode d'Arrow-Hurwicz On repart toujours du point-selle (x^*,λ^*) de $\mathscr{L}(\cdot,\cdot)$

$$\mathscr{L}\left(x^*,\lambda^*\right) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \mathscr{L}\left(x,\lambda^*\right)$$
$$\mathscr{L}\left(x^*,\lambda^*\right) = \max_{\lambda\in\mathbb{R}^m} \mathscr{L}\left(x^*,\lambda\right)$$

Cette fois-ci, on applique la méthode du gradient aux deux problèmes suivants :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \mathscr{L}\left(x,\lambda^k\right) \text{ et } \max_{\lambda\in\mathbb{R}^m} \mathscr{L}\left(x^k,\lambda\right),$$

lorsque $\left(x^k,\lambda^k\right)$ est donné. Ceci nous amène à l'algorithme d'Arrow-Hurwicz.

Algorithme : L'algorithme d'Arrow-Hurwicz s'écrit comme suit :

1. Étant donné (x^0,λ^0).
2. Déterminer (x^{k+1},λ^{k+1}) par :

$$x^{k+1} = x^k - \gamma\left(\nabla f\left(x^k\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \nabla g_i\left(x^k\right)\right)$$
$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \gamma g\left(x^k\right), \gamma > 0$$

Exemple 2.6 : Reprenons encore une fois l'exemple $\min\limits_{x+y=1} x^2 + y^2$. On a,

$$\mathscr{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Méthode d'Uzawa

- ✓ On a $\mathscr{L}\left(x^k, y^k, \lambda^k\right) = \min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \mathscr{L}\left(x, y, \lambda^k\right)$.
- ✓ Alors,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_x\left(x^k, y^k, \lambda^k\right) = 0 &\Rightarrow 2x^k + \lambda^k = 0 \\ \mathscr{L}_y\left(x^k, y^k, \lambda^k\right) = 0 &\Rightarrow 2y^k + \lambda^k = 0 \end{aligned}$$

- ✓ L'algorithme d'Uzawa appliqué au problème de minimisation s'écrit : λ^0 donné

$$\begin{cases} 2x^k + \lambda^k = 0 \\ 2y^k + \lambda^k = 0 \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k + \gamma\left(x^k + y^k - 1\right), \ \gamma > 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

- ✓ Pour cet exemple, l'algorithme (3.13) se ramène à des itérations sur λ seulement. En effet, $x^k = -\frac{\lambda^k}{2}$ et $y^k = -\frac{\lambda^k}{2}$, alors

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \gamma\left(-\lambda^k - 1\right), \ \text{i.e. } \lambda^{k+1} = (1-\gamma)\lambda^k - \gamma$$

Méthode d'Arrow - Hurwicz

- ✓ Étant donné (x^0, λ^0)
- ✓ Calculer

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} 2x^k + \lambda^k \\ 2y^k + \lambda^k \end{pmatrix}$$
$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \gamma\left(x^k + y^k - 1\right)$$

- ✓ C'est-à-dire plus simplement

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= (1-2\gamma)x^k - \gamma\lambda^k \\ y^{k+1} &= (1-2\gamma)y^k - \gamma\lambda^k \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \gamma\left(x^k + y^k - 1\right) \end{aligned}$$

- **2.4.3 - Méthode de Newton**

Les conditions d'optimalité du point-selle de la fonction de Lagrange $\mathscr{L}(x, \lambda)$ sont

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\ \qquad\qquad g_i(x) = 0, \ i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{3.14}$$

Le système (3.14) est un système non-linéaire de $(n+m)$ inconnues (x, λ). La méthode de Newton consiste, à partir d'un point $\left(x^k, \lambda^k\right)$:

✓ À linéariser (3.14) au voisinage de $\left(x^k, \lambda^k\right)$;

✓ Et à définir $\left(x^{k+1}, \lambda^{k+1}\right)$ comme la solution du problème linéarisé :

$$\begin{cases} \nabla f\left(x^k\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \nabla g_i\left(x^k\right) + \left(\nabla^2 f\left(x^k\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \nabla^2 g_i\left(x^k\right)\right)\left(x^{k+1} - x^k\right) \\ \qquad\qquad + \sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_i^{k+1} - \lambda_i^k\right) \nabla g_i\left(x^k\right) = 0 \\ \qquad\qquad g_i\left(x^k\right) + \left(\nabla g_i\left(x^k\right), \left(x^{k+1} - x^k\right)\right) = 0, \ i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{3.15}$$

✓ En remplaçant les termes de (3.15) par les dérivées correspondantes du Lagrangien

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x),$$

on peut réécrire le système (3.15) sous la forme suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial x^2}\left(x^k, \lambda^k\right) & \nabla g_1\left(x^k\right) \ldots \nabla g_m\left(x^k\right) \\ \hline \nabla g_1^{\top}\left(x^k\right) & \\ \vdots & 0 \\ g_m^{\top}\left(x^k\right) & \end{array}\right] \begin{bmatrix} x^{k+1} - x^k \\ \lambda^{k+1} - \lambda^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}\left(x^k, \lambda^k\right) \\ -g\left(x^k\right) \end{bmatrix}$$

- **2.4.4 - Méthode de pénalisation**

Pour pénaliser le problème sous contraintes suivant

$$(P) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ g_i(x) = 0, \ i = 1, \ldots, m, \end{cases}$$

✓ On pénalise la fonction objectif $f(x)$ par le terme de «pénalisation» $\frac{r}{2}\|g(x)\|^2$.

✓ Et on résout le problème (d'optimisation sans contraintes) suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x, r), \ \text{ où } \varphi(x, r) = f(x) + \frac{r}{2}\|g(x)\|^2 \ \text{ et } r > 0.$$

✓ Lorsque $r \longrightarrow +\infty$, on montre que les contraintes du problème (P) sont satisfaites.

Exemple 2.7 : Considérons le problème de minimisation suivant

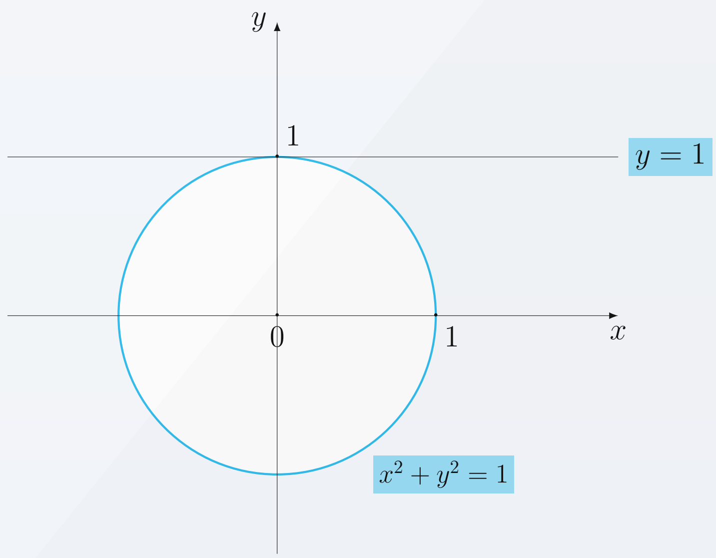
$$\min_{y=1} \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

- Il est tout à fait évident que la solution de ce problème est $(0, 1)$.
- La fonctionnelle pénalisée est définie par

$$\varphi(x, y, r) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{r}{2}(y-1)^2$$

où en voulant déterminer le minimum, on annulle son gradient :

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + r(y-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{r}{1+r} \end{cases}$$



r	y
1	0.5
2	0.67
10	0.91
20	0.95
50	0.98
100	0.99
∞	1

3 Contraintes d'inégalité

3.1 Conditions de Kuhn-Tucker

On s'intéresse maintenant au problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ g_i(x) = 0, \ i = 1, \dots, m, \\ h_i(x) \leqslant 0, \ i = 1, \dots, p, \end{cases} \tag{3.16}$$

où les fonctions f, $g_i, i = 1, \dots, m$ et $h_i, i = 1, \dots, p$ sont de classe C^1.

• 3.1.1 - Conditions nécessaires du 1^{er} ordre

Définition 3.1

Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$ un point admissible, c'est-à-dire, $g_i(x^*) = 0, \ i = 1, \dots,$ m et $h_i(x^*) \leq 0, i = 1, \dots, p$. Soit I^* l'ensemble des contraintes saturées, c'est-à-dire,

$$I^* = \{i \mid h_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, p\}.$$

Alors x^* est dit point régulier si les vecteurs $\nabla g_i(x^*), i = 1, \dots, m$ et $\nabla h_i(x^*), i \in I^*$, sont linéairement indépendants.

Théorème 3.1

Kuhn-Tucker

Soit x^* un minimum du problème (3.16). Si x^* est un point régulier, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ et $\mu \in \mathbb{R}^p$ où $\mu \geqslant 0$, tels que

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i \nabla h_i(x^*) = 0 \\ \mu_i h_i(x^*) = 0, \ i = 1, \dots, p \end{cases}$$

Exemple 3.1 : Considérons le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min \ (x-1)^2 + y - 2 \\ y - x = 1 \\ x + y \leqslant 2 \end{cases}$$

- Définissons et déterminons les gradients associés aux fonctions suivantes

$$f(x, y) = (x-1)^2 + y - 2, \qquad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g(x,y) = y - x - 1, \qquad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h(x,y) = x + y - 2, \qquad \nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Remarquons qu'ici, tout point de $\mathbb{R}^2$ est régulier. En effet :
  - ✓ Soit que la contrainte $h(x,y)$ n'est pas saturée et dans ce cas tout revient à calculer $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est libre.
  - ✓ Soit que la contrainte $h(x,y)$ est saturée et dans ce cas I^* correspond à la contrainte $h(x,y)$ et on a $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui sont linéairement indépendants.
- Les conditions de Kuhn-Tucker disent qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ où $\mu \geqslant 0$ t.q.

$$2(x-1) - \lambda + \mu = 0, \tag{3.17}$$
$$1 + \lambda + \mu = 0, \tag{3.18}$$
$$\mu(x + y - 2) = 0, \tag{3.19}$$

et aussi le point (x,y) doit être admissible, c'est-à-dire,

$$y - x = 1 \text{ et } x + y \leqslant 2. \tag{3.20}$$

- L'équation (3.18) nous donne $\lambda = -1-\mu$, alors d'après (3.17) on obtient $x = \frac{1-2\mu}{2}$.
- D'autre part à partir de (3.20), nous avons $y = 1 + x = \frac{3-2\mu}{2}$.
- Et donc (3.19) devient en remplaçant x et y par leur valeur

$$\mu(u + y - 2) = -2\mu\mu = 0 \ \Rightarrow \ \mu = 0.$$

- Alors $x = 1/2$ et $y = 3/2$, et ces deux valeurs vérifient bien $x + y \leqslant 2$. Donc

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \ \lambda^* = -1 \text{ et } \mu^* = 0.$$

1$^{\text{er}}$ Cas particulier : Le premier cas particulier que nous allons étudier, est le problème

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) = 0, \ i = 1, \dots, m, \\ x \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.21}$$

✓ Ici les contraintes d'inégalités sont définies par les fonctions suivantes

$$h_i(x) = -x_i \; i = 1, \dots, n.$$

✓ Soit x^* un minimum régulier, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^n, \mu \geqslant 0$ tels que

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \nabla h_i(x^*) = 0 \\ \mu_i h_i(x^*) = 0, \; i = 1, \dots, n \end{cases}$$

✓ Sachant que $\nabla h_i(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{ ième composante}}$, alors on obtient

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = \mu \geqslant 0,$$
$$\mu_i h_i(x^*) = 0, \; \text{ c'est-à-dire } \; \mu_i x_i^* = 0.$$

✓ Alors les conditions de Kuhn-Tucker pour le problème (3.21) s'écrivent :

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) \geqslant 0, \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*) \right) x_j^* = 0, \; j = 1, \dots, n, \\ g_i(x^*) = 0, \; i = 1, \dots, m, \\ x^* \geqslant 0. \end{cases}$$

L'intérêt de cette écriture est que la variable μ est éliminée.

Exemple 3.2 : Considérons le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min (x-2)^2 + (y-2)^2 \\ x + 2y = 4 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{cases}$$

- On introduit les fonctions f, g suivantes et leur gradient

$$f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2, \quad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-2) \end{pmatrix}$$

$$g(x,y) = x + 2y - 4, \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Les conditions de Kuhn-Tucker nous donnent : Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$2(x-2)+\lambda \geq 0 \tag{3.22}$$
$$2(y-2)+2\lambda \geqslant 0 \tag{3.23}$$
$$(2(x-2)+\lambda)x = 0 \tag{3.24}$$
$$(2(y-2)+2\lambda)y = 0 \tag{3.25}$$

- Et comme le point (x, y) doit être admissible, alors

$$x+2y-4=0,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \tag{3.26}$$

- L'équation (3.24) implique que $x = 0$ ou $2(x-2)+\lambda = 0$.
- Alors que l'équation (3.25) donne $y = 0$ ou $y-2+\lambda = 0$.
- Nous avons alors à étudier les différents cas suivants :
  - ✓ 1^{er} cas : $x = 0$ et $y = 0$. Impossible d'après (3.26) !
  - ✓ $2^{\text{ième}}$ cas : $x = 0$ et $y-2+\lambda = 0$. Alors d'après (3.26), on a $y = 2$ et donc $\lambda = 0$. Ce qui est impossible d'après (3.22).
  - ✓ $3^{\text{ième}}$ cas : $2(x-2)+\lambda = 0$ et $y = 0$. Alors d'après (3.26), on a $x = 4$ et donc $\lambda = -4$. Ce qui est impossible d'après (3.23).
  - ✓ $4^{\text{ième}}$ cas :

$$\begin{cases} 2(x-2)+\lambda = 0 \\ \quad y-2+\lambda = 0 \end{cases}$$

On a aussi d'après (3.26), $x+2y-4 = 0$. Alors, on a à résoudre le système

$$\begin{cases} 2x-4+\lambda = 0 \\ y-2+\lambda = 0 \\ x+2y-4 = 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations donne $2x-y-2 = 0$, donc on obtient finalement

$$\begin{cases} 2x-y = 2 \\ x+2y = 4 \end{cases}$$

Ce qui fournit la solution $x = 8/5$ et $y = 6/5$ et $\lambda = 2-y = 4/5$.
Le point $(x^*, y^*) = (8/5, 6/5)$ et $\lambda = 4/5$ vérifient bien toutes les équations.

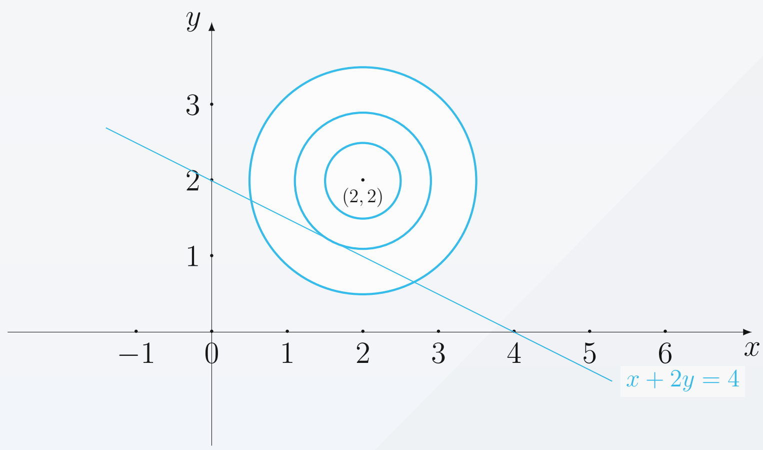
- Vérifions la régularité du point (x^*, y^*). On a $\nabla g\,(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui est libre, donc (x^*, y^*) est un point régulier.

L'exemple qu'on vient de traiter peut être résolu géométriquement.

- Les courbes de niveau de la fonction à minimiser $f(x, y)$ données par

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = c,$$

qui sont des cercles centrés au point $(2, 2)$.



- La solution est le point tel que la droite $x + 2y = 4$ est tangente au cercle.
- Un vecteur directeur à la droite est $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ et une normale au cercle est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-2) \end{pmatrix}$, alors on obtient la condition d'orthogonalité suivante

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{t} = 0 \ &\Leftrightarrow \ 2(x-2) - (y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ 2x - y = 2 \end{aligned}$$

- Aussi la solution appartient à la droite d'équation $x+2y = 4$. D'où, on a à résoudre

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

- Ce qui donne $x = 8/5$ et $y = 6/5$ et c'est l'unique solution.

$2^{\text{ième}}$ Cas particulier : Le deuxième cas particulier est le problème suivant

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0, \ \ i = 1, \ldots, m \\ x \geqslant 0, \end{cases} \tag{3.27}$$

✓ Si x^* est un minimum régulier, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m, \lambda \geqslant 0, \mu \in \mathbb{R}^n, \mu \geqslant 0$ tels que

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \nabla h_i(x^*) = 0, \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, \ i = 1, \dots, m, \\ \mu_i h_i(x^*) = 0, \ i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

où $h_i(x) = -x_i, \ i = 1, \dots, n$.

✓ Là aussi on peut éliminer μ comme dans le premier cas (au problème (3.21)).

✓ On obtient ainsi les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^m, \ \lambda \geqslant 0, \ g_i(x^*) \leqslant 0, \ i = 1, \dots, m, \ x^* \geqslant 0, \\ \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) \geqslant 0, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*) \right) x_j^* = 0, \ j = 1, \dots, n, \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, \ i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Exemple 3.3 : Considérons le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min \ (x^2 + 3y^2 - 4x - 6y) \\ x + 2y \leq 4 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{cases}$$

- On définit les fonctions et leur gradient comme suit

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4x - 6y, \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 4 \\ 6y - 6 \end{pmatrix}$$

$$g(x, y) = x + 2y - 4, \qquad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- On obtient les conditions suivantes : $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geqslant 0$

$$2x - 4 + \lambda \geqslant 0, \tag{3.28}$$

$$6y - 6 + 2\lambda \geqslant 0, \tag{3.29}$$

$$(2x - 4 + \lambda)x = 0, \tag{3.30}$$

$$(6y - 6 + 2\lambda)y = 0, \tag{3.31}$$

$$\lambda(x + 2y - 4) = 0, \tag{3.32}$$

$$x + 2y \leqslant 4, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0. \tag{3.33}$$

- L'équation (3.32) donne $\lambda = 0$ ou $x + 2y - 4 = 0$.

- Si $\lambda = 0$, alors (3.30) donne $x = 0$ ou $x = 2$:
  - ✓ Si $x = 0$, alors (3.28) n'est pas vérifiée donc $x = 2$.
  - ✓ Dans ce cas (3.31) génère $(y-1)y = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y = 1$.
  - ✓ Si $y = 0$, alors (3.29) n'est pas vérifiée ; donc $y = 1$.

  Le point $(x^*, y^*) = (2, 1)$ et $\lambda = 0$ vérifient toutes les équations.
- Si $\lambda \neq 0$, des calculs similaires montrent qu'il n'y a pas de solution dans ce cas.
- Là encore pour vérifier que le point $(x^*, y^*) = (2, 1)$ est régulier, ça revient à calculer $\nabla g(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui est libre (puisque la seule contrainte saturée est $g(x, y)$).

3.1.2 - Conditions suffisantes du $2^{\text{ième}}$ ordre

Retournons au problème de départ, c'est-à-dire au problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ g_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, m, \\ h_i(x) \leqslant 0, \; i = 1, \ldots, p. \end{cases} \tag{3.34}$$

Introduisons la fonction de Lagrange suivante

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i h_i(x).$$

Théorème 3.2

Soit x^* un point admissible et régulier. On suppose que les fonctions f, g_i, $1 \leq i \leq m$ et $h_i, 1 \leqslant i \leqslant p$ sont de classe C^2 dans un voisinage de x^*. S'il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, $\mu^* \in \mathbb{R}^p$, $\mu^* \geq 0$ tels que

$$\begin{cases} L_x(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \\ \mu_i^* h_i(x^*) = 0, \; 1 \leq i \leq p \end{cases}$$

(où L_x est le gradient de L en x) et si pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $\xi \neq 0$ tel que

$$\begin{array}{ll} (\nabla g_i(x^*), \xi) = 0, & 1 \leqslant i \leq m, \\ (\nabla h_i(x^*), \xi) = 0, & i \in I^*, \; \mu_i^* > 0, \\ (\nabla h_i(x^*), \xi) \geqslant 0, & i \in I^*, \; \mu_i^* = 0, \end{array}$$

on a

$$(L_{xx}(x^*, \lambda^*, \mu^*)\, \xi, \; \xi) > 0,$$

alors x^* est un minimum local pour le problème (3.34).

Note :

- Sous les conditions du **Théorème 3.2**, x^* est localement unique.
- Sous les conditions du **Théorème 3.1**, les réels $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^p$, $\mu \geq 0$ sont déterminés de manière unique.

Exemple 3.4 : Reprenons les exemples précédents.

1. Considérons le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min\ (x-1)^2 + (y-2) \\ y - x = 1 \\ x + y \leq 2 \end{cases} \tag{3.35}$$

✓ On a $(x^*, y^*) = (1/2,\ 3/2)$, $\lambda^* = -1$, $\mu^* = 0$. Soit les fonctions g et h suivantes

$$g(x,y) = y - x - 1,\ \ h(x,y) = x + y - 2.$$

✓ Soit $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ avec $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tel que

$$\left(\nabla g\,(x^*, y^*), \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = 0 \iff -\xi + \eta = 0$$
$$\left(\nabla h\,(x^*, y^*), \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \geqslant 0 \iff \xi + \eta \geqslant 0$$

donc $\eta = \xi$ et $\xi \geqslant 0$.

✓ Et comme $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors il faut considérer les points $\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$ avec $\xi > 0$.

✓ Considérons la fonction de Lagrange suivante

$$L(x, y, \lambda, \mu) = (x-1)^2 + y - 2 + \lambda(y - x - 1) + \mu(x + y - 2)$$
$$\nabla_{(x,y)} L = \begin{pmatrix} 2(x-1) - \lambda + \mu \\ 1 + \lambda + \mu \end{pmatrix}$$
$$\nabla^2_{(x,y)} L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

✓ Alors $(\xi, \xi) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} = 2\xi^2 > 0$, d'où $(1/2, 3/2)$ est une solution, de plus elle est unique.

2. Considérons maintenant le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \\ x + 2y = 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

✓ On a $(x^*, y^*) = (8/5,\ 6/5),\ \lambda^* = 4/5$ et automatiquement $\mu_1^* = \mu_2^* = 0$ (car dans les conditions de Kuhn-Tucker, on doit avoir $\mu_1^* x^* = 0$ et $\mu_2^* y^* = 0$).

✓ On a la fonction de Lagrange suivante

$$L\,(x, y, \lambda, \mu_1, \mu_2) = (x-2)^2 + (y-2)^2 + \lambda(x + 2y - 4) - \mu_1 x - \mu_2 y$$

$$\nabla(x,y)L = \begin{pmatrix} 2(x-2) + \lambda - \mu_1 \\ 2(y-2) + 2\lambda - \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2_{(x,y)}L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

✓ La matrice $\nabla^2_{(x,y)}L$ est définie positive sur $\mathbb{R}^2$.

✓ Donc, en particulier la condition suffisante du $2^{\text{ième}}$ ordre est vérifiée.

✓ D'où $(8/5,\ 6/5)$ est l'unique solution.

3. Finalement, considérons le problème de minimisation

$$\begin{cases} \min\ (x^2 + 3y^2 - 4x - 6y) \\ x + 2y \leqslant 4 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

✓ On définit la fonctionnelle L et on détermine ses dérivées comme suit :

$$L\,(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = x^2 + 3y^2 - 4x - 6y + \mu_1(x + 2y - 4) - \mu_2 x - \mu_3 y$$

$$\nabla(x,y)L = \begin{pmatrix} 2x - 4 + \mu_1 - \mu_2 \\ 6y - 6 + 2\mu_1 - \mu_3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2(x,y)L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

✓ La matrice $\nabla^2(x,y)L$ est définie positive sur $\mathbb{R}^2$.

✓ Et on a la condition suffisante qui est vérifiée.

3.2 Dualité, point-selle

Nous nous intéressons ici au problème

$$(P)\begin{cases} \min\ f(x) \\ g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, les fonctions f et g_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, sont supposées de classe C^1.
Rappelons que les conditions de Kuhn-Tucker pour le problème (P) s'écrivent :

Si x^* est un mimimum régulier de (P), alors il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, $\lambda^* \geqslant 0$ tels que

$$\begin{cases} \nabla f\left(x^*\right) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i\left(x^*\right) = 0, \\ \lambda_i^* g_i\left(x^*\right) = 0,\ i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

de plus x^* est admissible, i.e., $g_i\left(x^*\right) \leq 0$, $1 \leq i \leq m$.

La condition pour que x^* soit un point régulier dans le cas du problème (P) est que x^* soit admissible et que $\nabla g_i\left(x^*\right)$, $i \in I^*$, soient linéairement indépendants, où

$$I^* = \left\{i \mid g_i\left(x^*\right) = 0,\ i = 1, \dots, m\right\}.$$

Définition 3.2

1 La fonction de Lagrange (ou Lagrangien) associée au problème (P) est définie

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x).$$

2 Le problème (P) est appelé problème primal.

Théorème 3.3

Conditions du point-selle :
(x^*, λ^*) avec $\lambda^* \geqslant 0$ est un point-selle du Lagrangien $\mathscr{L}(x, \lambda)$ associé au problème primal (P) si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1 x^* minimise $\mathscr{L}\left(x, \lambda^*\right)$ sur $\mathbb{R}^n$,

2 $g_i\left(x^*\right) \leq 0$, $\quad i = 1, \dots, m$,

3 $\lambda_i^* g_i\left(x^*\right) = 0$, $\quad i = 1, \dots, m$.

Preuve :
Le point (x^*, λ^*) est un point-selle si et seulement si

$$\mathscr{L}\left(x^*, \lambda\right) \leqslant \mathscr{L}\left(x^*, \lambda^*\right) \leqslant \mathscr{L}\left(x, \lambda^*\right),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall\, \lambda \geqslant 0.$$

Condition nécessaire

- ✓ On a

$$\mathscr{L}\left(x^*, \lambda^*\right) \leq \mathscr{L}\left(x, \lambda^*\right), \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \ \text{ alors, on obtient } \boxed{1}.$$

- ✓ Maintenant

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(x^*, \lambda\right) &\leqslant \mathscr{L}^*\left(x^*, \lambda^*\right)\\
f\left(x^*\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i\left(x^*\right) &\leq f\left(x^*\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i\left(x^*\right)\\
\sum_{i=1}^{m} \left(\lambda_i - \lambda_i^*\right) g_i\left(x^*\right) &\leq 0, \ \forall\, \lambda \geqslant 0
\end{aligned}$$

- ✓ Ceci extraînce, forcément, $g_i\left(x^*\right) \leq 0, \forall\ i \in \{1, \ldots, m\}$ car s'il existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $g_k\left(x^*\right) > 0$ alors le choix de

$$\lambda = \left(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_{k-1}^*, \lambda_k, \lambda_{k+1}^*, \ldots, \lambda_n^*\right) \geqslant 0,$$

  nous donne $\left(\lambda_k - \lambda_k^*\right) g_k\left(x^*\right)$, pour tout $\lambda_k \geqslant 0$.
- ✓ Et il suffit de prendre $\lambda_k > \lambda_k^*$ ce qui nous donne $\left(\lambda_k - \lambda_k^*\right) g_k\left(x^*\right) > 0$, ceci est une contradiction. Alors, la condition $\boxed{2}$ est vérifiée.
- ✓ Reste à montrer la condition $\boxed{3}$. A partir de

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\lambda_i - \lambda_i^*\right) g_i\left(x^*\right) \leq 0, \ \forall\, \lambda \geqslant 0$$

  on a en particulier (en prenant $\lambda = 0$),

$$-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i\left(x^*\right) \leq 0 \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i\left(x^*\right) \geqslant 0.$$

  Or $g_i\left(x^*\right) \leq 0$ d'après la condition $\boxed{2}$, donc on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i\left(x^*\right) \leq 0, \text{ car } \ \lambda^* \geqslant 0, \ \text{ d'où}\\
&\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i\left(x^*\right) = 0 \Rightarrow \ \lambda_i^* g_i\left(x^*\right) = 0, \forall\, i \in \{1, \ldots, m\},
\end{aligned}$$

  car tous les termes $\lambda_i^* g_i\left(x^*\right)$ sont de même signe.

Condition suffisante

- ✓ La condition $\boxed{3}$ implique que $\mathscr{L}\left(x^*, \lambda^*\right) \leq \mathscr{L}\left(x, \lambda^*\right), \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
- ✓ Reste à montrer que

$$\mathscr{L}\left(x^*, \lambda\right) \leqslant \mathscr{L}\left(x^*, \lambda^*\right), \ \forall\, \lambda \geqslant 0.$$

✓ On a

$$\mathscr{L}(x^*, \lambda) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^*) \leq f(x^*)$$

car d'après 2, on a $g_i(x^*) \leqslant 0$ et donc $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^*) \leqslant 0$ pour tout $\lambda \geqslant 0$.

✓ D'autre part

$$\mathscr{L}(x^*, \lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) = f(x^*),$$

d'après 3.

✓ D'où

$$\mathscr{L}(x^*, \lambda) \leqslant \mathscr{L}(x^*, \lambda^*), \ \forall \lambda \geqslant 0.$$

□

Théorème 3.4

Si (x^*, λ^*) est un point-selle avec $\lambda^* \geqslant 0$, alors x^* est un minimum global du problème (P).

Preuve :

- D'après le Théorème 3.3, on a $g_i(x^*) \leq 0, \ \forall i, 1 \leq i \leq m$.
- Il reste à montrer que

$$f(x^*) \leqslant f(x), \ \forall x, \ g_i(x) \leqslant 0, \ i = 1, \ldots, m.$$

- On a $\mathscr{L}(x^*, \lambda^*) \leqslant \mathscr{L}(x, \lambda^*), \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ alors

$$f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) \leqslant f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- Mais d'après le Théorème 3.3, on a

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \ \forall i, 1 \leqslant i \leqslant m,$$

alors

$$f(x^*) \leq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Et en particulier

$$f(x^*) \leq f(x), \ \forall x, \ g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m, \ \text{car} \ \lambda^* \geq 0.$$

□

Note : Si les fonctions f et $g_i, i = 1, \ldots, m$, sont convexes et s'il existe un point $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $g_i(\xi^0) < 0,\ i = 1, \ldots, m$, alors les conditions du point-selle (Théorème 3.4) sont des conditions nécessaires et suffisantes.

Résumons la situation :

- Problème primal :

$$\begin{cases} \min\ f(x) \\ g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

- Lagrangien :

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

- Fonction duale :

$$G(\lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^m} \mathscr{L}(x, \lambda)$$

- Problème dual : $\max\limits_{\lambda \in D} G(\lambda)$, où $D = \{\lambda \mid G(\lambda)$ existe, $\lambda \geqslant 0\}$.
- Comme dans le cas d'optimisation avec contraintes égalités, on détermine λ^* t.q.

$$G(\lambda^*) = \max_{\lambda \in D} G(\lambda)$$

puis on détermine x^* par

$$\mathscr{L}(x^*, \lambda^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathscr{L}(x, \lambda^*).$$

Exemple 3.5 : Considérons le problème de minimisation suivant :

$$\min_{x+y \leq -2} (x^2 + 2x + y^2 + y - 1)$$

- On définit et détermine les dérivées du lagrangien

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(x, y, \lambda) &= x^2 + 2x + y^2 + y - 1 + \lambda(x + y + 2) \\ \frac{\partial \mathscr{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} &= 2x + 2 + \lambda = 0 \ \Rightarrow\ x = -\frac{\lambda + 2}{2} \\ \frac{\partial \mathscr{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} &= 2y + 1 + \lambda = 0 \ \Rightarrow\ y = -\frac{\lambda + 1}{2}. \end{aligned}$$

- De plus $\nabla^2_{(x,y)} \mathscr{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est définie positive.
- Donc $\left(-\frac{\lambda+2}{2}, -\frac{\lambda+1}{2}\right)$ est bien le minimum de $\mathscr{L}(x, y, \lambda)$ pour chaque λ.

- La fonction duale et sa dérivée deviennent

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \frac{(\lambda+2)^2}{4} - \lambda - 2 + \frac{(\lambda+1)^2}{4} - \frac{\lambda+1}{2} - 1 + \lambda(-\lambda - 3/2 + 2) \\ &= \frac{\lambda^2}{4} + \lambda + 1 - \lambda - 2 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \lambda^2 + \frac{\lambda}{2} \\ &= -\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda}{2} - \frac{9}{4} \\ G'(\lambda) &= -\lambda + 1/2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2. \end{aligned}$$

- Comme $\lambda^* = 1/2 > 0$, et que $G''(\lambda) = -1 < 0$, alors c'est l'unique solution du problème $\max\limits_{\lambda \geq 0} G(\lambda)$. D'où

$$\begin{aligned} x^* &= -\lambda^*/2 - 1 = -1/4 - 1 = -5/4 \\ y^* &= -\lambda^*/2 - 1/2 = -1/4 - 1/2 = -3/4 \end{aligned}$$

- D'autre part le problème considéré est convexe car $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est définie positive (en particulier elle est semi-définie positive) et $g(x,y)$ est linéaire (donc g est convexe et il existe $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(x^0, y^0) < 0$).
- Donc $(x^*, y^*) = (-5/4, -3/4)$ est une solution du problème en plus c'est l'unique solution globale.

Exemple 3.6 : Programmation quadratique Soit le problème suivant

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \min f(x) \\ Bx \leqslant c \end{cases}$$

où $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x)$ avec $x \in \mathbb{R}^n$, A une matrice d'ordre n symétrique, B est une matrice de type (m, n) avec $m \leqslant n$ et $c \in \mathbb{R}^m$.

- Si A est semi-définie positive alors f est convexe.
- Et comme $g(x) = Bx - c$ est linéaire, alors g est convexe.
- Il suffit alors qu'il existe un point $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $B\xi^0 < c$, pour que les conditions du point-selle soient des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.
- Soit $\mathscr{L}(x, \lambda)$ le Lagrangien associé au problème (P), i.e,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(x, \lambda) &= \frac{1}{2}(Ax, x)_n + (b, x)_n + (Bx - c, \lambda)_m \\ &= \frac{1}{2}(Ax, x)_n + (b, x)_n + \left(B^\top \lambda, x\right)_n - (c, \lambda)_m \end{aligned}$$

- Alors les conditions du point-selle sont :

$$\begin{cases} \nabla_x \mathscr{L}(x^*, \lambda^*) = 0 \\ Bx^* \leqslant c \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \Leftrightarrow \lambda_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^* - c_i \right) = 0, \; 1 \leqslant i \leqslant m \\ \text{et } \lambda^* \geqslant 0, \quad \text{où on a posé } \; B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \end{cases}$$

- Donc

$$\begin{cases} Ax^* + b + B^\top \lambda^* = 0 \\ Bx^* \leqslant c \\ \lambda^* \geqslant 0 \\ (Bx^* - c, \lambda^*)_m = 0 \end{cases}$$

- La dernière équation, $(Bx^* - c, \lambda^*)_m = 0$, est équivalente à $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \; 1 \leq i \leq m$, car

$$(Bx^* - c, \lambda^*)_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*), \; \text{ où } \; g_i(x^*) \leq 0 \; \text{ et } \; \lambda_i^* \geq 0.$$

Conclusion : Si A est semi-définie positive et si le point x^* est régulier, alors x^* est un minimum de (P) si et seulement si $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$, $\lambda^* \geqslant 0$, t.q.

$$\begin{cases} Ax^* + b + B^\top \lambda^* = 0 \\ Bx^* \leq c \\ (Bx^* - c, \lambda^*)_m = 0 \end{cases}$$

- Ecrivons maintenant le problème dual :

$$G(\lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathscr{L}(x, \lambda).$$

- Comme A est semi-définie positive alors une conclusion nécessaire et suffisante est

$$\nabla_x \mathscr{L}(u, \lambda) = 0, \; i.e. \; Ax + b + B^\top \lambda = 0.$$

- De plus si A est définie positive, alors il y'a une solution unique pour chaque λ donné et qui est

$$\boxed{x_\lambda = -A^{-1}\left(B^\top \lambda + b\right)}$$

- Alors, la fonction duale est définie comme suit

$$G(\lambda) = \frac{1}{2}(Ax_\lambda, x_\lambda)_n + (b, x_\lambda)_n + \left(B^\top\lambda, x_\lambda\right)_n - (c, \lambda)_m$$
$$= -\frac{1}{2}\left(BA^{-1}B^\top\lambda, \lambda\right)_m - \left(BA^{-1}b + c, \lambda\right)_m - \frac{1}{2}\left(b, A^{-1}b\right)_n,$$

(voir des calculs similaires effectués précédemment). $G(\lambda)$ existe pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^m$, par conséquent

$$D = \{\lambda \mid G(\lambda) \text{ existe}, \lambda \geqslant 0\} = \{\lambda;\ \lambda \geqslant 0\}.$$

- Donc, on a à résoudre le problème dual suivant pour déterminer λ^* :

$$\boxed{\max_{\lambda \geqslant 0} G(\lambda)}$$

- D'autre part

$$\max_{\lambda \geqslant 0}(G(\lambda)) = -\min_{\lambda \geqslant 0}(-G(\lambda))$$
$$= -\min\left(\frac{1}{2}\left(BA^{-1}B^\top\lambda, \lambda\right)_m + \left(BA^{-1}b + c, \lambda\right)_m\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(b, A^{-1}b\right)_m$$

- Alors, tout revient à résoudre le problème (D)

$$\text{(D)} \quad \min_{\lambda \geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\left(BA^{-1}B^\top\lambda, \lambda\right)_m + \left(BA^{-1}b + c, \lambda\right)_m\right)$$

- Une fois λ^* obtenu, alors on a

$$\boxed{x^* = -A^{-1}\left(B^T\lambda^* + b\right)}$$

Le problime (D) est plus simple à résoudre que le problème initial (P) car la contrainte pour le problème (D) est seulement $\lambda \geqslant 0$.

Exemple 3.7 : On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \min\ (x^2 + 2y^2) \\ 1 - x - y \leq 0 \end{cases}$$

- La fonction $f(x,y)$, la matrice B, le vecteur b et la constante c sont donnés par

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = (-1,-1) \text{ et } c = -1$$

- Alors, on a à résoudre le problème

$$\begin{aligned} &\min_{\lambda \geqslant 0} \left(1/2\left(BA^{-1}B^{\top}\lambda, \lambda\right) + \left(BA^{-1}b + c, \lambda\right)\right) \\ &A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \\ BA^{-1}B^{\top} &= (-1,-1)\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= (-1,-1)\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \end{pmatrix} = 1/2 + 1/4 = 3/4 \end{aligned}$$

- Plus simplement, il nous faut résoudre

$$\min_{\lambda \geqslant 0} \left(\frac{3}{8}\lambda^2 - \lambda\right) = \min_{\lambda \geqslant 0} G(\lambda)$$

$$G'(\lambda) = 3/4\lambda - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 4/3$$

- Comme $\lambda = \frac{4}{3} > 0$ et $G''(\lambda) = \frac{3}{4} > 0$, alors $\lambda^* = \frac{4}{3}$ est l'unique solution de

$$\min_{\lambda \geqslant 0} G(\lambda)$$

- Donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} &= -A^{-1}\left(B^{\top}\lambda^* + b\right) \\ &= -\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} 4/3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4/3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \text{ i.e. } x^* = 2/3 \text{ et } y^* = 1/3 \end{aligned}$$

3.3 Méthodes numériques

Nous nous intéressons, encore une fois, au problème

$$(P) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ g_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

• 3.3.1 - Méthode de linéarisation

✓ Comme dans le cas des contraintes égalités, on linéarise les contraintes au voisinage du point x^k et on minimise la fonction

$$\left(\nabla f\left(x^k\right), x - x^k\right) + \frac{1}{2\gamma}\left\|x - x^k\right\|^2,$$

sous les contraintes linéarisées, pour obtenir le point x^{k+1}.

La linéarisation du problème (P) revient alors à résoudre le problème quadratique :

$$\begin{cases} \min \left[\left(\nabla f\left(x^k\right), x - x^k\right) + \frac{1}{2\gamma}\left\|x - x^k\right\|^2\right] \\ \text{sous contraintes :} \\ g_i\left(x^k\right) + \left(\nabla g_i\left(x^k\right), x - x^k\right) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m, \end{cases}$$

où $\gamma > 0$. Ainsi x^{k+1} est déterminé comme la solution de ce dernier problème.

• 3.3.2 - Méthodes Duales

Algorithme d'Uzawa L'algorithme d'Uzawa utilise une méthode de gradient pour résoudre le problème dual.

Algorithme : L'algorithme d'Uzawa de résolution du problème (P) s'écrit ici :

1. Étant donné $\lambda^0 \geq 0$.
2. Déterminer x^k tel que :

$$\mathscr{L}\left(x^k, \lambda^k\right) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathscr{L}\left(x, \lambda^k\right),\ \text{où } \mathscr{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

3. Calculer λ^{k+1} par :

$$\lambda^{k+1} = \underset{\mathbb{R}_+^m}{\mathsf{Proj}}\left(\lambda^k + \gamma g\left(x^k\right)\right),\ \gamma > 0.$$

$$\left(\underset{\mathbb{R}_+^m}{\mathsf{Proj}}(\lambda)\right)_i = \max\left\{\lambda_i, 0\right\},\ 1 \leq i \leq m.$$

Exemple 3.8 :

$$\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \dfrac{1}{2}(Ax,x)+(b,x) \\ Bx \leqslant c \end{cases}$$

où $b \in \mathbb{R}^n$, A est une matrice (n,n) définie positive, B une matrice (m,n) et $c \in \mathbb{R}^m$. Le calcul des différents points de l'algorithme donne :

1. λ^0 donné, $\lambda^0 \geqslant 0$,
2. $Ax^k + b + B^T\lambda^k = 0$,
3. $\lambda^{k+1} = \max\left\{\lambda^k + \gamma\left(Bx^k - c\right), 0\right\}$.

On montre que cette méthode converge lorsque

$$0 < \gamma < 2\,\frac{\lambda_{\min}}{\|B\|^2}.$$

Exemple 3.9 : On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} 5(x+5)^2 + y^2 \\ x+y \leqslant 1 \end{cases} \tag{3.36}$$

- On définit la fonction $f(x,y) = \frac{1}{2}(AX,X) + (b,X) + C$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix},\ C = 125,$$
$$B = (1,1),\ c = 1 \text{ et } \lambda_{\min} = 2$$

- On effectue les calculs suivants :

$$\|B\| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^2, \xi\neq 0} \frac{\|B\xi\|}{\|\xi\|}$$
$$B\xi = (1,1)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_1 + \xi_2 \Rightarrow \|B\xi\| = |\xi_1+\xi_2|$$
$$\frac{\|B\xi\|}{\|\xi\|} = \frac{|\xi_1+\xi_2|}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} \leqslant \sqrt{2} \Rightarrow \sup_{\zeta\in\mathbb{R}^2, \xi\neq 0} \frac{\|B\xi\|}{\|\xi\|} \leqslant \sqrt{2}$$

- Mais pour le point $(1,1) \neq (0,0)$, on constate que

$$\frac{\left\| B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \sqrt{2}, \text{ alors, on obtient } \|B\| = \sqrt{2}.$$

- Alors, on doit prendre $0 < \gamma < 2 \cdot \frac{2}{2} = 2$ pour s'assurer que l'algorithme converge. Prenons alors $\gamma = 1$ et démarrons pour la $1^{\text{ère}}$ itération avec la valeur $\lambda^0 = 1$:

$$AX^0 + b + B^\top \lambda^0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -49 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 10x_0 = -49 \\ 2y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -4.9 \\ y_0 = 0.5 \end{cases}$$

- Or $\lambda^1 = \max\left\{\lambda^0 + \gamma\left(Bx^0 - c\right), 0\right\}$, où

$$\lambda^0 + \gamma\left(Bx^0 - c\right) = 1 + (-4.9 + 0.5 - 1) = 1 - 5.4 < 0.$$

- Alors $\lambda^1 = 0$ et donc pour la $2^{\text{ième}}$ itération, on effectue :

$$AX^1 = -b - B^\top \lambda^1 = -b$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

qui est bien la solution recherchée du problème (3.36).

Méthode d'Arrow-Hurwicz Il s'agit d'utiliser la méthode du gradient pour les deux problèmes

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathscr{L}\left(x, \lambda^k\right) \quad \text{et} \quad \max_{\lambda \geq 0} \mathscr{L}\left(x^k, \lambda\right)$$

Algorithme : L'algorithme d'Arrow-Hurwicz de résolution du problème (P) s'écrit :

1. Étant donné (x^0, λ^0), $\lambda^0 \geq 0$.
2. Déterminer (x^{k+1}, λ^{k+1}) par :

$$x^{k+1} = x^k - \gamma\left(\nabla f\left(x^k\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \nabla g_i\left(x^k\right)\right)$$

$$\lambda^{k+1} = \operatorname*{Proj}_{\mathbb{R}_+^m}\left(\lambda^k + \gamma g\left(x^k\right)\right), \ \gamma > 0$$

- **3.3.3 - Extension de la méthode de Newton : Méthode de Wilson**

✓ Reprenons la méthode de Newton dans le cas des contraintes égalités, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \nabla f\left(x^k\right)+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i^k\nabla g_i\left(x^k\right)+\left(\nabla^2 f\left(x^k\right)+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i^k\nabla^2 g_i\left(x^k\right)\right)\left(x^{k+1}-x^k\right) \\ \qquad +\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\lambda_i^{k+1}-\lambda_i^k\right)\nabla g_i\left(x^k\right)=0 \\ g_i\left(x^k\right)+\left(\nabla g_i\left(x^k\right),\left(x^{k+1}-x^k\right)\right)=0,\ i=1,\cdots,m \end{cases}$$

✓ Ce dermier système s'écrit aussi

$$\begin{cases} \nabla f\left(x^k\right)+\left(\nabla^2 f\left(x^k\right)+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i^k\nabla^2 g_i\left(x^k\right)\right)\left(x^{k+1}-x^k\right)+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i^{k+1}\nabla g_i\left(x^k\right)=0 \\ g_i\left(x^k\right)+\left(\nabla g_i\left(x^k\right),\left(x^{k+1}-x^k\right)\right)=0 \end{cases}$$

✓ On observe alors que x^{k+1} est solution du problème d'optimisation quadratique :

$$(Q)\begin{cases} \min\left\{\frac{1}{2}\left(\left(\nabla^2 f\left(x^k\right)+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i^k\nabla^2 g_i\left(x^k\right)\right)\left(x-x^k\right),\ x-x^k\right)+\left(\nabla f\left(x^k\right),\ x-x^k\right)\right\} \\ \text{Sous les contraintes :} \\ \left(\nabla g_i\left(x^k\right),\ x-x^k\right)+g_i\left(x^k\right)=0,\ i=1,...,m, \end{cases}$$

et que λ^{k+1} n'est autre que le vecteur dual optimal de ce programme quadratique. Au lieu d'utiliser la formule de Newton classique, on peut donc résoudre le problème (Q) à chaque itération pour obtenir x^{k+1} et λ^{k+1} à partir de x^k et λ^k.

✓ Cette extension de la méthode de Newton est due à Wilson. La méthode de Wilson présente l'avantage de se généraliser facilement au cas des contraintes d'inégalités.

✓ Si au lieu de contraintes d'égalités, on a des contraintes d'inigalités du type $g_i(x)\leq 0$, il est facile de montrer qu'il suffit de considérer dans (Q) des contraintes du type :

$$\left(\nabla g_i\left(x^k\right),\ x-x^k\right)+g_i\left(x^k\right)\leq 0.$$

On a alors à résoudre à chaque étape, le programme quadratique : **Méthode de Wilson**

$$\begin{cases} \min\left\{\frac{1}{2}\left(\left(\nabla^2 f\left(x^k\right)+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i^k\nabla^2 g_i\left(x^k\right)\right)\left(x-x^k\right),\ x-x^k\right)+\left(\nabla f\left(x^k\right),\ x-x^k\right)\right\} \\ \text{Sous les contraintes} \\ \left(\nabla g_i\left(x^k\right),\ x-x^k\right)+g_i\left(x^k\right)\leq 0,\ i=1,...,m. \end{cases}$$

- **3.3.4 - Méthode de pénalisation**

✓ La fonction de pénalisation $\varphi_r(x)$ associée au problème (P) est définie par

$$\varphi_r(x) = f(x) + \frac{r}{2}\sum_{i=1}^{m} (g_i(x))^2 u_i(g_i), \quad \text{où} \quad u_i(g_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_i(x) \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } g_i(x) > 0 \end{cases}$$

✓ On cherche ici à résoudre le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_r(x)$$

✓ Pour voir le lien avec le Lagrangien associé au problème (P)

$$\mathscr{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x),$$

on pose $\lambda_i = \frac{r}{2} g_i(x) u_i(g_i)$. Alors, on a $\varphi_r(x) = \mathscr{L}(x,\lambda)$ et on montre (sous certaines conditions) que

$$\lambda_i^* = \lim_{r\to+\infty} r g_i(x) u_i(g_i).$$

Exemple 3.10 : Reprenons l'exemple (déjà traité) suivant :

$$\begin{cases} \min(x^2+2y^2) \\ 1-x-y \leq 0 \end{cases}$$

- Ici, on définit $\varphi_r(x,y)$ comme suit

$$\varphi_r(x,y) = x^2 + 2y^2 + \frac{r}{2}(1-x-y)^2\delta, \quad \text{où} \quad \delta = \begin{cases} 0 & \text{si } 1-x-y \leq 0 \\ 1 & \text{si } 1-x-y > 0 \end{cases}$$

- Si $\delta = 0$, i.e, $1-x-y \leq 0$, alors on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi_r}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial\varphi_r}{\partial y} = 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0, \quad \text{ce qui est impossible}$$

- Donc $\delta = 1$, et on obtient alors

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi_r}{\partial x} = 2x - r(1-x-y) = 0 \\ \frac{\partial\varphi_r}{\partial y} = 4y - r(1-x-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y$$

Par suite, on a

$$\begin{cases} x = \frac{2r}{4+3r} \\ y = \frac{r}{4+3r} \end{cases}$$

et lorsque $r \to +\infty$ on obtient $x^* = 2/3$ et $y^* = 1/3$.

- D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\lambda^* &= \lim_{r\to+\infty} r(1-x-y)\delta \\
&= \lim_{r\to+\infty} r\left(1-\frac{3r}{4+3r}\right) \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{4r}{4+3r} = 4/3
\end{aligned}$$

Bibliographie :

[1] V. Karmanov. Programmation mathématique. Editions Mir, Moscou, 1977.

[2] M. Minoux. Programmation mathématique. Théorie et algorithmes. Lavoisier, Paris, 2008.

[3] B. T. Polyak. Introduction to Optimization. Optimization Software, New York, 1987.