UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Algèbre et Relations (MATH 2413) - Chapitre 1: Polynômes

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

Sommaire

- Éffectuer des opérations et résoudre des problèmes d'expressions algébriques telles que les polynômes et les fractions rationnelles.
- À travers plusieurs sections dont chacune décrit un objectif bien visé:

1. Reconnaître un polynôme, décrire ses caractéristiques et l'évaluer.
2. Éffectuer des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division sur des polynômes.
3. Reconnaître un modèle de polynôme et le décomposer en facteurs en utilisant la méthode appropriée.

Polynômes

Définition

- Une **constante** est une quantité qui a une valeur fixe.
- Un **paramètre** est une constante qui a une valeur inconnue, appartenant à un ensemble donné.
- Une **variable** est une quantité qui peut prendre n'importe quelle valeur d'un ensemble donné.

▷ On utilise souvent les premières lettres de l'alphabet $(a, b, c, \cdots)$ pour représenter les paramètres.

▷ Les dernières lettres de l'alphabet (x, y, z) sont utilisées pour désigner les variables.

Exemple 1.1:

- Si x représente l'âge d'un étudiant, x est une variable qui peut prendre n'importe quelle valeur dans l'ensemble $\{16, 17, 18, \cdots\}$.
- Si Étienne a 18 ans, son âge est une constante ayant la valeur 18.
- Si l'inscription à un centre sportif comporte des coûts fixes et un tarif horaire de 5$, on peut représenter le coût annuel par $a + 5h$:
    - a est le paramètre représentant les coûts fixes. Sa valeur est inconnue, mais ne varie pas;
    - 5 est la constante représentant le tarif horaire. Sa valeur est connue et fixe;

- h est la variable représentant le nombre d'heures d'activités sportives. Sa valeur est inconnue et peut être différente pour chaque abonné.

Définition

- Un **monôme** est une expression algébrique formée du produit d'une constante et de variables, chaque variable étant affectée d'un **exposant entier positif ou nul**. La constante est le **coefficient** du monôme.

- Deux monômes sont **semblables** s'ils sont formés des mêmes variables, chacune affectée du même exposant.

Exemple 1.2:

- ▷ $3x^2y^5z$, x et $\frac{2x^2y^4}{5}$ sont trois monômes, le dernier pouvant s'écrire $\frac{2}{5}x^2y^4$.
- ▷ -27 et $\sqrt{5}$ sont des monômes constants. On considère que toutes les variables sont affectées de l'exposant 0. Par exemple, $-27 = -27x^0$.
- ▷ $5x^{\frac{1}{2}}y^8z^{-3}$ n'est pas un monôme, car les exposants de x et de z ne sont pas des entiers positifs ou nuls.
- ▷ $5xy + 2x^2z^4$ n'est pas un monôme, car c'est une somme d'expressions algébriques.
- ▷ $8xy^3z^2$ et $-3xy^3z^2$ sont des monômes semblables, mais $8xy^3z^2$ et $8xy^3z$ ne le sont pas, car l'exposant de la variable z est différent.

Définition

- Un **polynôme** est une expression algébrique formée d'une somme de monômes.
- Chaque monôme est appelé **terme** du polynôme. Un polynôme à deux termes est appelé **binôme**. Un polynôme à trois termes est appelé **trinôme**.

Exemple 1.3:

- ▷ $2x^5 - \frac{4}{3}x^4 + x^3 - 14$ est un polynôme à une variable comportant quatre termes.
- ▷ $x^4 - y$ est un binôme à deux variables.

- ▷ $ax^2 + bx + c$ est un trinôme à une variable, si a, b et c sont des constantes.

- ▷ $\frac{x^2-3x+11}{3x^4-1}$ n'est pas un polynôme ; c'est une fraction algébrique formée du quotient de deux polynômes.

- ▷ $\sqrt{x^3 - 5x^2 + 7}$ n'est pas un polynôme; c'est la racine carrée d'un polynôme.

- ▷ $2x^3 - x^{-1} + 4$ n'est pas un polynôme, car dans le deuxième terme, l'exposant de la variable est négatif.

Définition

Un terme d'un polynôme qui ne contient pas de variable est appelé **terme constant**.

Note: Bien que la multiplication soit commutative, l'usage veut que, dans chaque terme d'un polynôme, le coefficient précède la partie variable.

Exemple 1.4:

- Dans le polynôme $12x^7 + \frac{8}{3}xy - 15$, 12 et $\frac{8}{3}$ sont les coefficients des deux premiers termes du polynôme et le terme constant est -15.

- Si z est la variable, le terme constant du polynôme $2az^2 - \pi z$ est 0, car on peut écrire ce polynôme sous la forme $2az^2 - \pi z + 0$.
  $2a$ et $-\pi$ sont les coefficients respectifs de z^2 et de z.

Définition

Deux polynômes sont **égaux** si tous leurs monômes sont semblables deux à deux et si les coefficients des monômes semblables sont égaux.

Exemple 1.5:

- ▷ Le polynôme $ax^2 + 2x + 6$ est égal à $5x^2 + 2x - 3b$ pour toute valeur de x si et seulement si $a = 5$ et $b = -2$.

- ▷ $5x^2 + 2x + 6$ n'est pas égal à $5x^2 + x - 3b$, car même si $b = -2$, les coefficients de x sont différents ($2 \neq 1$).

Définition

- Le **degré d'un terme** est la somme des exposants qui affectent ses variables.
- Le **degré d'un terme constant** non nul est 0.
- Le **degré du polynôme nul** 0 n'est pas défini.
- Le **degré d'un polynôme** est le plus grand des degrés de ses termes.

Exemple 1.6:

- $17x^2yz^8$ est un monôme de degré 11, car $2+1+8=11$ est la somme des exposants des variables x, y et z qui le composent.
- Les degrés des termes du polynôme $9-5xy+7x^3-x^6$ sont respectivement $0, 2, 3$ et 6. C'est donc un polynôme de degré 6.
- Le monôme nul 0 n'a aucun degré, car 0 pourrait aussi bien représenter $0x^0$, $0x^1$, $0x^2$, etc.

Note: L'ordre des termes d'un polynôme importe peu mais, par souci esthétique et par commodité, on place habituellement les termes d'un polynôme à une variable dans l'ordre décroissant des degrés. On écrira

$$x^6+3x^4-5x^2-12x+24$$

plutôt que

$$3x^4+x^6+24-12x-5x^2$$

Définition

Un polynôme P d'une variable x et de degré n quelconque peut être décrit sous la forme générale suivante:

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

où $a_n \neq 0$ et a_k est le coefficient du terme de degré k avec $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$.

Exemple 1.7: Soit le polynôme

$$-x^4 + 3x^3 - 5x + 8$$

Sous sa forme générale, ce polynôme peut être décrit par

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

où on a alors $a_4 = -1, a_3 = 3, a_2 = 0, a_1 = -5$ et $a_0 = 8$.

- Les variables d’un polynôme peuvent prendre n’importe quelle valeur réelle.

- Mais selon le contexte du problème, on se limitera aux seules valeurs plausibles:

    - Entiers naturels pour un nombre d’objets.

    - Réels non négatifs pour le temps.

- L’ensemble des valeurs admissibles est appelé «domaine de définition» ou simplement **domaine**.

- Pour des valeurs données de ses variables, on peut **évaluer** un polynôme, c’est-à-dire remplacer chaque variable par sa valeur.

Exemple 1.8:

- Soit le polynôme $x^4 - 5z^2 + 6yz$. Ses trois variables x, y et z peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle.

> **Question :** Évaluer ce polynôme aux valeurs $x = 0$, $y = -2$, et $z = 10$.
> **Réponse :** Ce polynôme vaut -620 pour les valeurs données.

- Le profit mensuel réalisé par un fabricant de sacs à dos est donné par le polynôme $9x - 0,002x^2$ \$, où x représente le nombre de sacs à dos vendus. À cause du contexte, le domaine du polynôme est $\mathbb{N}$.

> **Question :** Si le fabricant vend 500 sacs à dos en un mois, calculer son profit.
> **Réponse :** Le profit sera donc de 4000\$.

Note: Si deux polynômes sont égaux, leur évaluation donnera le même résultat pour une même valeur de la variable.

Les opérations sur les polynômes

- Les propriétés des exposants pour les opérations effectuées avec des expressions algébriques sont identiques à celles connues pour les nombres réels.

- Nous les rappelons dans le tableau ci-dessous.

Propriété Si m et n sont des entiers positifs, alors on a les propriétés:

$x^m x^n = x^{m+n}$	$(x^m)^n = x^{mn}$
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ si $x \neq 0$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ si $x \neq 0$
$(xy)^m = x^m y^m$	$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$ si $y \neq 0$
$x^0 = 1$ si $x \neq 0$	

- On peut effectuer, sur des polynômes, les mêmes opérations élémentaires que sur les nombres réels.

La somme de polynômes

Pour additionner deux polynômes, on additionne les coefficients de leurs **termes semblables**, c'est-à-dire les termes qui ont les mêmes variables affectées des mêmes exposants.

Exemple 2.1:

- $3x + 12x + (-17x) = (3 + 12 - 17)x = -2x$
- $x^2 + x + y$ reste sous cette forme, puisqu'il n'y a pas de termes semblables.

▷ Calculons la somme des polynômes

$$3x^2y - 4xy^2 + 6xy - 7x + 15 \text{ et } x^3 - 5xy^2 + xy + 4x + 3y - 2$$

L'opération est facilitée si on dispose les polynômes l'un au-dessus de l'autre en alignant les termes semblables. Pour les termes absents de l'un ou l'autre des deux polynômes, il peut être utile d'ajouter un terme semblable avec un coefficient 0.

$$\begin{array}{r|ccccccccccccccc}
 & 0x^3 & + & 3x^2y & - & 4xy^2 & + & 6xy & - & 7x & + & 0y & + & 15 \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
 & x^3 & + & 0x^2y & - & 5xy^2 & + & xy & + & 4x & + & 3y & - & 2 \\
\hline
 & x^3 & + & 3x^2y & - & 9xy^2 & + & 7xy & - & 3x & + & 3y & + & 13
\end{array}$$

Définition **L'opposé d'un polynôme** P est le polynôme $-P$ qu'on obtient en multipliant chacun des coefficients de P par -1.

Exemple 2.2:
L'opposé du polynôme $3x^2 - 5x + 7$ est $-1(3x^2 - 5x + 7) = -3x^2 + 5x - 7$

La différence de polynômes

- Pour soustraire un polynôme Q d'un polynôme P (c'est-à-dire pour effectuer l'opération $P - Q$), on additionne à P l'opposé de Q.

- Tout comme dans $\mathbb{R}$, la soustraction de polynômes n'est pas commutative:
$$P - Q \neq Q - P$$

Il est donc très important de bien lire l'énoncé pour savoir quel polynôme il faut soustraire.

Exemple 2.3:

▷ Soustrayons $x^3 - 4x + 6$ de $3x^2 - 5x + 1$.

- On obtient l'opposé de $x^3 - 4x + 6$ en multipliant chacun des termes par -1. L'opposé de $x^3 - 4x + 6$ est $-x^3 + 4x - 6$

$$\begin{aligned}(3x^2 - 5x + 1) - (x^3 - 4x + 6) &= (3x^2 - 5x + 1) + (-x^3 + 4x - 6)\\ &= 3x^2 - 5x + 1 - x^3 + 4x - 6\\ &= -x^3 + 3x^2 - x - 5\end{aligned}$$

- On pourrait aussi disposer les polynômes l'un au-dessus de l'autre, en alignant les termes semblables. Il ne faut alors pas oublier de **soustraire** les termes semblables.

$$\begin{array}{ccccccccc} & 0x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 1 \\ - & (x^3 & + & 0x^2 & - & 4x & + & 6) \\ \hline & -x^3 & + & 3x^2 & - & x & - & 5 \end{array}$$

L’utilisation des parenthèses

- On peut supprimer des parenthèses précédées du signe $(+)$ sans modifier la valeur de l’expression entre parenthèses.
- On peut supprimer des parenthèses précédées du signe $(-)$ en remplaçant l’expression entre parenthèses par son opposé (c’est-à-dire en multipliant **tous** ses coefficients par -1).
- Pour simplifier une expression contenant plusieurs parenthèses, on supprime d’abord les parenthèses situées le plus à l’intérieur.

Exemple 2.4:

- $$(x^2+3x+1)+(y^3-4y)=x^2+3x+1+y^3-4y$$

- $$-(2x^5+4x^3-x+6)-(y^4+2y^2-3y)=-2x^5-4x^3+x-6-y^4-2y^2+3y$$

- Simplifions l'expression ci-dessous en supprimant les parenthèses. On supprime d'abord celles qui sont situées le plus à l'intérieur.

$$\begin{aligned}
(3x-(2x+2y-(x+1)))-(x+y-(2x-3)) \\
&= (3x-(2x+2y-x-1))-(x+y-2x+3) \\
&= (3x-(x+2y-1))-(-x+y+3) \\
&= (3x-x-2y+1)+x-y-3 \\
&= (2x-2y+1)+x-y-3 \\
&= 2x-2y+1+x-y-3 \\
&= 3x-3y-2
\end{aligned}$$

- Le même principe s'applique à l'introduction de parenthèses.

$$x+y+a+b=(x+y)+(a+b)=(x+y)-(-a-b)$$

$$x+y+a-b=(x+y)+(a-b)=(x+y)-(-a+b)$$

$$x+y-a+b=(x+y)+(-a+b)=(x+y)-(a-b)$$

$$x+y-a-b=(x+y)+(-a-b)=(x+y)-(a+b)$$

Le produit de monômes Pour multiplier deux monômes:

- On multiplie d'abord les coefficients.
- Puis, on multiplie les puissances d'une même variable en additionnant les exposants.

Exemple 2.5: Multipliez les monômes $(2x^2y)$ et $(3xy^3z)$.

- D'abors, on utilise la commutativité de la multiplication pour regrouper les coefficients et les variables semblables:

$$(2x^2y)(3xy^3z) = (2 \times 3)(x^2x)(yy^3)(z)$$

- Ensuite, nous appliquons la propriété $x^m x^n = x^{m+n}$ pour additionner les exposants:

$$(2 \times 3)(x^2x)(yy^3)(z) = 6x^3y^4z$$

Le produit de polynômes

Pour multiplier deux polynômes, on multiplie chaque terme du premier par chaque terme du second.

On utilise ici la distributivité de la multiplication sur l'addition:

$$a(b+c) = ab + ac$$

Exemple 2.6:

- Effectuer le produit de $-3ax$ et de $(x^2 - 4a^2x + 1)$.

- Effectuer le produit de $(x^2 - xy + y^2)$ et de $(x + 2y)$.

- Effectuer l'opération $(2x - 5)^2$.

Pour élever un polynôme à une puissance n (où n est un entier positif), il suffit de multiplier le polynôme n fois par lui-même.

Le quotient de monômes Pour diviser deux monômes:

- On divise d'abord les coefficients.
- Puis, on divise les puissances d'une même variable en soustrayant les exposants.

Pour que le résultat de la division soit un monôme, il faut que l'exposant de chaque variable du numérateur soit supérieur ou égal à l'exposant de la même variable dans le dénominateur.

Exemple 2.7:

- Effectuez la division des monômes $12x^8y^2z^3$ et $8x^5yz^3$:

$$\frac{12x^8y^2z^3}{8x^5yz^3} = \frac{12}{8} \times \frac{x^8}{x^5} \times \frac{y^2}{y} \times \frac{z^3}{z^3}$$
$$= \frac{3}{2}x^{8-5}y^{2-1}z^{3-3}$$
$$= \frac{3}{2}x^3y^1z^0 = \frac{3}{2}x^3y.$$

Le résultat est un monôme.

- Effectuez la division des monômes $6x^5y$ et $2x^2y^3$:

$$\frac{6x^5y}{2x^2y^3} = 3x^3y^{-2}$$

Le résultat n'est pas un monôme car l'exposant de y est négatif.

La division d'un polynôme par un monôme

Pour diviser un polynôme par un monôme, on divise chaque terme du polynôme par ce monôme.

Pour que le résultat de la division soit un polynôme, il faut que, dans chaque terme du numérateur, l'exposant de chaque variable soit supérieur ou égal à l'exposant de la même variable dans le dénominateur.

Exemple 2.8:

- Divisez le polynôme $6x^4 - 3x^3 + 2x^2$ par le monôme $2x^2$:

$$\frac{6x^4 - 3x^3 + 2x^2}{2x^2} = \frac{6x^4}{2x^2} - \frac{3x^3}{2x^2} + \frac{2x^2}{2x^2}$$
$$= 3x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

Le résultat de cette division est un polynôme, car le degré de la variable du dénominateur est inférieur ou égal au degré de cette même variable dans chacun des termes du numérateur.

- Divisez le polynôme $5y^4 - 7y$ par le monôme y^3:

$$\frac{5y^4 - 7y}{y^3} = \frac{5y^4}{y^3} - \frac{7y}{y^3}$$
$$= 5y - 7y^{-2} \quad (\text{ou} \;\; 5y - \frac{7}{y^2})$$

Le résultat de cette division n’est pas un polynôme, car le degré de la variable du dénominateur est supérieur au degré de cette même variable dans l’un des termes du numérateur.

Le quotient de polynômes

La division de deux polynômes s'effectue sensiblement de la même façon que la division de deux entiers, en cherchant un quotient et, éventuellement, un reste.

Division de 13 842 par 416	**Division de $(8x+2x^2-8)$ par $(x+3)$**
1. Dans un nombre, les chiffres sont placés dans l'ordre décroissant de leurs puissances de 10 : $13\,842 = 1\times10^4+3\times10^3+8\times10^2+4\times10^1+2\times10^0$	**1.** On écrit les termes de chaque polynôme dans l'ordre décroissant des degrés. $(2x^2+8x-8)\div(x+3)$
2. Puisque le premier chiffre, 1, n'est pas divisible par 4, on divise 13 par 4. $\begin{array}{l\|l} \mathbf{13}842 & \underline{416} \\ & 3 \end{array}$	**2.** On divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur. $\begin{array}{l\|l} \mathbf{2x^2}+8x-8 & \underline{\mathbf{x}+3} \\ & 2x \end{array}$
3. On multiplie le diviseur au complet par 3. $\begin{array}{l\|l} 13842 & \underline{416} \\ \mathbf{1248} & 3 \end{array}$	**3.** On multiplie le diviseur au complet par le premier terme du quotient. $\begin{array}{l\|l} 2x^2+8x-8 & \underline{x+3} \\ \mathbf{2x^2+6x} & 2x \end{array}$
4. On soustrait le dernier nombre trouvé. $\begin{array}{r\|l} 13842 & \underline{416} \\ \underline{-\ 1248} & 3 \\ \mathbf{136} & \end{array}$	**4.** On soustrait le dernier polynôme trouvé. $\begin{array}{r\|l} 2x^2+8x-8 & \underline{x+3} \\ \underline{-\ (2x^2+6x)} & 2x \\ \mathbf{0+2x} & \end{array}$

5. On abaisse le chiffre suivant du dividende. $\begin{array}{r\|l} 13842 & 416 \\ -\ 1248 & 3 \\ \hline 136\mathbf{2} & \end{array}$	**5.** On abaisse le terme suivant du dividende. $\begin{array}{r\|l} 2x^2+8x-8 & x+3 \\ -(2x^2+6x) & 2x \\ \hline 0+2x-\mathbf{8} & \end{array}$
6. On reprend la démarche. $\begin{array}{r\|l} 13842 & 416 \\ -\ 1248 & 33 \\ \hline 1362 & \\ -\ 1248 & \\ \hline 114 & \end{array}$	**6.** On reprend la démarche. $\begin{array}{r\|l} 2x^2+8x-8 & x+3 \\ -(2x^2+6x) & 2x+2 \\ \hline 0+2x-8 & \\ -(2x+6) & \\ \hline -14 & \end{array}$
7. Puisque le reste est inférieur au diviseur ($114 < 416$), la division est terminée. On écrit : $13\,842 \div 416 = 33$, reste 114 On écrit aussi : $\dfrac{13\,842}{416} = 33 + \dfrac{114}{416}$ et $13\,842 = 416 \times 33 + 114$.	**7.** Puisque le degré du reste (degré 0) est inférieur à celui du diviseur (degré 1), la division est terminée. On écrit : $(2x^2+8x-8) \div (x+3) = 2x+2$, reste -14 On écrit aussi : $\dfrac{2x^2+8x-8}{x+3} = 2x+2+\dfrac{-14}{x+3}$ et $2x^2+8x-8 = (x+3)(2x+2) - 14$.

Le quotient de polynômes

- Pour diviser un polynôme P par un polynôme S, tels que le degré de P est supérieur au degré de S, on cherche un polynôme Q et un polynôme R tels que:

$$P = SQ + R$$

  où R est soit le polynôme nul (c'est à dire $R = 0$), soit égale à un polynôme de degré inférieur à celui de S.

- Si $R = 0$, on dit que P **est divisible** par S (ou S est un facteur de P).

- Si $R \neq 0$, on dit que $\frac{P}{S} = Q$ reste R (ou $\frac{P}{S} = Q + \frac{R}{S}$).

- P est le **dividende**, S est le **diviseur**, Q est le **quotient** et R est le **reste**.

Exemple 2.9:

- Diviser $(4x^3 + 8x^5 - x^2 - x)$ par $(2x^2 - x)$.

L’ordre de priorité des opérations

L’ordre de priorité des opérations pour les polynômes est le même que dans $\mathbb{R}$.

- Effectuer les opérations à l’intérieur des parenthèses.
- Évaluer les puissances (exposants).
- Effectuer les multiplications et les divisions de gauche à droite.
- Effectuer les additions et les soustractions de gauche à droite.

Exemple 2.10:

- Évaluer l'expression $3(x+2)^2-(2x-5)(3x+1)-(x-x(x^3-x))$.

La factorisation des polynômes

Définition

Un **facteur** est un élément d'un produit. Si P, Q et S sont des polynômes et si $P = QS$, Q et S sont des facteurs de P.

Exemple 3.1:

- x^2 est un facteur de $3x^2y^3$, car $3x^2y^3 = x^2(3y^3)$
- $(x+2)$ et $(x-5)$ sont des facteurs de $(x^2-3x-10)$, car $x^2-3x-10 = (x+2)(x-5)$.

Définition

La **factorisation** d'un polynôme (ou sa **décomposition en facteurs**) consiste à l'exprimer sous la forme d'un **produit** de polynômes de degré inférieur.

- Il faut apprendre à reconnaître le modèle d'un polynôme et à utiliser la méthode de factorisation appropriée.

- On doit toutefois savoir que la factorisation d'un polynôme n'est pas toujours possible.

Truc Pratique :

- On peut toujours vérifier l'exactitude d'une décomposition en facteurs en effectuant la multiplication, dont le résultat doit être égal à l'expression initiale.

- Par exemple, on peut vérifier que $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ en calculant le produit.

- Lorsque tous les termes d'un polynôme contiennent au moins un facteur commun, on utilise la méthode de la **mise en évidence simple**.

- On cherche alors le PGCD de ces termes et on utilise la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition pour «mettre en évidence» ce facteur commun.

La mise en évidence simple

$$ax + ay = a(x) + a(y)$$

$$= a(x + y)$$

Exemple 3.2:

- Décomposer en facteurs le polynôme $15ax^3 - 6a^2x^2 + 9ax$.

- Factoriser le polynôme $(x+y)(x-y) - 2(x-y)$.

- On utilise la méthode de la **mise en évidence double** lorsqu'il n'existe pas de facteur commun à tous les termes, mais que les termes, une fois regroupés par deux (ou par trois, par quatre, etc.), contiennent un facteur commun à chaque groupe de termes.

- Après les avoir regroupés, on effectue des mises en évidence successives, une première dans chacun des groupes et, si possible, une seconde pour obtenir le produit recherché.

La mise en évidence double

$$
\begin{aligned}
ax + ay + bx + by &= (ax + ay) + (bx + by) \\
&= a(x + y) + b(x + y) \\
&= (x + y)(a + b)
\end{aligned}
$$

Exemple 3.3:

- En utilisant la méthode de la mise en évidence double, factoriser le polynôme $2x^2 + 4x - 5ax - 10a$.

- Soit le polynôme $ax + bx - a - b$. En appliquant la mise en évidence double, factoriser ce polynôme.

Attention !

Il ne faut pas oublier que lorsqu'on introduit des parenthèses après un signe $(-)$, les signes de tous les termes de l'expression de la parenthèse sont modifiés.

- Nous verrons dans cette section des méthodes permettant de factoriser certains polynômes du second degré à une variable.

- La forme générale d'un polynôme du second degré à une variable est $ax^2 + bx + c$.

- Considérons d'abord le cas où $a = 1$. Si on peut factoriser ce polynôme

$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= (x+u)(x+v) \\ &= x^2 + ux + vx + uv = x^2 + (u+v)x + uv \end{aligned}$$

on peut alors identifier les coéfficients $b = u + v$ et $c = uv$.

Le trinôme de la forme $x^2 + bx + c$

Pour décomposer un trinôme de la forme x^2+bx+c, il faut chercher deux nombres u et v dont la somme est b et le produit, c. On obtient alors:

$$x^2 + bx + c = (x+u)(x+v), \text{ où } u+v = b \text{ et } uv = c$$

Exemple 3.4:

- ▷ Factoriser $x^2 - 5x - 66$.

- Cette méthode est surtout utile pour factoriser $x^2 + bx + c$ si b, c, u et v sont des entiers.

- Même si elle est valide pour des valeurs non entières, elle n'est pas très pratique. Il se peut aussi que la factorisation du trinôme soit impossible.

- Une variante de la méthode précédente permet de factoriser certains polynômes $ax^2 + bx + c$, où $a \neq 1$.

Le trinôme général $ax^2 + bx + c$, où $a \neq 1$

On peut factoriser certains trinômes de la forme ax^2+bx+c en respectant les étapes suivantes:

1. On cherche deux nombres dont la somme est b et le produit, ac.
2. On remplace b par la somme de ces deux nombres.
3. On effectue une double mise en évidence.

Exemple 3.5:

- Factoriser le trinôme général $6x^2 + 7x - 3$.

- Un cas particulier du trinôme général, est le **trinôme carré parfait**.

Le trinôme carré parfait

Lorsqu'on reconnaît un trinôme carré parfait, on peut donc le factoriser en un carré d'un binôme.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Exemple 3.6:

- $4x^2 + 20x + 25$ est un trinôme carré parfait, car:
  - $4x^2$ est le carré de $2x$;
  - 25 est le carré de 5;
  - $20x$ est le double produit de $2x$ et de 5: $20x = 2(2x)(5)$.

On obtient donc $4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2$. On peut vérifier l'exactitude de cette décomposition en effectuant la multiplication $(2x + 5)(2x + 5)$.

- On aurait obtenu le même résultat en utilisant la méthode du trinôme général. Si $4x^2 + 20x + 25 = ax^2 + bx + c$, on peut poser $a = 4$, $b = 20$ et $c = 25$.

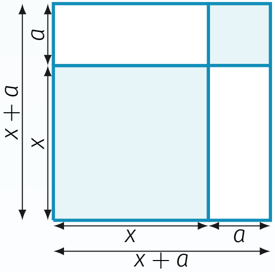
  On cherche deux nombres u et v dont le produit est $ac = 100$ et la somme, $b = 20$. Ce sont $u = 10$ et $v = 10$.

$$\begin{aligned} 4x^2 + 20x + 25 &= 4x^2 + 10x + 10x + 25 \\ &= (4x^2 + 10x) + (10x + 25) \\ &= 2x(2x + 5) + 5(2x + 5) \\ &= (2x + 5)(2x + 5) = (2x + 5)^2 \end{aligned}$$

Attention !

- Il ne faut pas confondre $(x+a)^2$ et x^2+a^2.

- La figure ci-dessous présente $(x+a)^2$ comme l'aire d'un carré de côté $(x+a)$.



- On constate facilement que l'aire $(x+a)^2$ est la somme des aires des deux carrés bleus et des deux rectangles blancs. On reconnaît alors la forme $x^2+2ax+a^2$.

- On voit bien que x^2+a^2 n'est l'aire que de la partie bleue.

Remarque : La somme de deux carrés
Une somme de deux carrés $x^2 + a^2$ n'est pas décomposable en facteurs du premier degré.

- Par contre, une différence de deux carrés $x^2 - a^2$ est toujours décomposable en facteurs du premier degré.

La différence de deux carrés

Lorsqu'on reconnaît une différence de deux carrés, on peut donc la factoriser par.

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

Exemple 3.7:

- Factoriser le polynôme $x^2 - 81$.
- Factoriser le polynôme $9a^4x^2 - 121c^6$.
- Factoriser le polynôme $x^2 - 17$ comme une différence de carrés.

- Il n'existe pas de méthode infaillible pour factoriser les polynômes de degré supérieur à 2 ou les polynômes à plusieurs variables.

- Plusieurs polynômes peuvent toutefois être factorisés au moins partiellement à l'aide de variantes des méthodes vues précédemment.

La somme ou la différence de deux cubes

Dans le cas des polynômes de degré 3, on distingue deux modèles particuliers qu'on peut toujours factoriser.

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$
$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

▷ Il est possible de vérifier les résultats précédents en effectuant:

- ⋆ Les multiplications $(x+a)(x^2-ax+a^2)$ et $(x-a)(x^2+ax+a^2)$.
- ⋆ ou encore les divisions $\frac{x^3+a^3}{(x+a)}$ et $\frac{x^3-a^3}{(x-a)}$.

Exemple 3.8:

- Factoriser le polynôme de degré 3 suivant: $x^3 - 27$.

- En écrivant le polynôme $8x^3 + 125a^6$ comme une somme de termes cubiques, factoriser le.

- L’habileté à factoriser des polynômes s’acquiert par la pratique.
- Il s’agit souvent d’effectuer une mise en évidence pour découvrir un autre polynôme dont on reconnaît le modèle.
- Il faut parfois utiliser successivement deux méthodes avant d’obtenir une factorisation complète.

Exemple 3.9:

- Factoriser le polynôme $3x^3 - 12x$

Les zéros d’un polynôme

- Que ce soit pour résoudre une équation, pour trouver un domaine ou pour tracer le graphique d'une fonction, il sera souvent utile de connaître les valeurs qui annulent un polynôme, c'est-à-dire celles pour lesquelles le polynôme est égal à 0.

Définition Un **zéro** (ou **racine**) d'un polynôme est un nombre réel tel que le polynôme vaut 0 si la variable prend cette valeur.

- Pour trouver les zéros d'un polynôme, on fera appel à sa factorisation et à la règle du produit nul.

Propriété **La règle du produit nul.**
Le produit de deux ou plusieurs facteurs est égal à 0 si et seulement si au moins un de ces facteurs est égal à 0.

$$AB = 0 \iff (A = 0 \text{ ou } B = 0)$$
$$A_1 A_2 \cdots A_n = 0 \iff (A_1 = 0 \text{ ou } A_2 = 0 \text{ ou } \cdots A_n = 0)$$

Théorème **Le théorème de factorisation.**
a est un zéro d'un polynôme en x si et seulement si $(x - a)$ est un facteur du polynôme.

Exemple 4.1:

- Montrer que 5 est un zéro du polynôme $x^2 + 2x - 35$.

- Chercher les zéros du polynôme $x^3 + 5x^2 - 14x$.

- La méthode de complétion du carré est utilisée pour factoriser le polynôme $ax^2 + bx + c$ où ($a \neq 0$).

Théorème **Les zéros d'un polynôme du second degré.**

Il faut distinguer trois cas, selon la valeur du **discriminant** $b^2 - 4ac$.

1. Si $\mathbf{b^2 - 4ac > 0}$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ possède **deux zéros**:

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   On obtient la factorisation suivante
   $ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2)$.

2. Si $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ possède **un seul zéro**:

$$z_1 = \frac{-b}{2a}$$

   On a alors la factorisation suivante $ax^2 + bx + c = a(x - z_1)^2$.

3. Si $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ ne possède **aucun zéro**. On ne peut pas factoriser le polynôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple 4.2:

- Soit le polynôme $3x^2 + x - 7$. Est ce que ce polynôme admet de solutions? Si oui, déterminer la ou les solution(s) existante(s).

- Soit le polynôme $2x^2 - x + 5$. Est ce que ce polynôme admet de solutions? Si oui, déterminer la ou les solution(s) existante(s).

Les fractions rationnelles

- Plusieurs quantités sont décrites comme des rapports, des proportions, des pourcentages. On les exprime à l'aide de fractions.
- Les fractions algébriques sont celles dont le numérateur et le dénominateur sont des expressions algébriques.
- Nous nous limiterons dans ce chapitre aux fractions rationnelles, celles dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes.

Définition

On appelle **fraction rationnelle** toute expression de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont des polynômes et $Q \neq 0$.

Exemple 5.1:

- ▷ $\frac{3x^2-5x+3}{2x+7}$ est une fraction rationnelle, car son numérateur et son dénominateur sont des polynômes.
- ▷ $\frac{8x^5-17x+6}{\sqrt{x-2}}$ n'est pas une fraction rationnelle, car son dénominateur n'est pas un polynôme. C'est tout de même une fraction algébrique.

- ▷ Puisqu'une fraction rationnelle est un quotient de polynômes, il faut s'assurer qu'il n'y a pas de division par 0, c'est-à-dire que les variables ne prennent pas des valeurs qui rendraient le dénominateur nul.
- ▷ La factorisation de polynômes, la règle du produit nul et les méthodes de résolution d'équations seront souvent utiles pour trouver les valeurs qui annulent le dénominateur d'une fraction rationnelle.

Définition

Le **domaine** d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est l'ensemble de toutes les valeurs réelles telles que le dénominateur Q est différent de 0.

Exemple 5.2:

- Chercher le domaine de la fraction rationnelle $\frac{x-5}{3x-1}$.
- Cherchons le domaine de la fraction rationnelle $\frac{x^2-9}{x^2-4}$.

▷ Cherchons le domaine de la fraction $\frac{x^2-9}{x^2-x+4}$.

Propriété

Les zéros d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ sont les valeurs du domaine qui annulent le numérateur.

Exemple 5.3:

▷ Soit la fraction rationnelle $\frac{x^2+4x+3}{x^2-1}$. En factorisant le numérateur et le dénominateur, on obtient

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2-1} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x-1)}$$

- Ainsi, le domaine de la fraction rationnelle est $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ (-1 **et** 1 **étant les racines du dénominateur**).
- Les valeurs qui annulent le numérateur sont -1 et -3.
- Puisque -1 n'appartient pas au domaine, ce n'est pas un zéro de la fraction.
- Son seul zéro est -3.

Le plus petit dénominateur commun

Pour trouver le plus petit dénominateur commun à deux ou plusieurs fractions:

1. On factorise chacun des dénominateurs.
2. On cherche le plus petit commun multiple (PPCM) de ces dénominateurs : c'est le produit de tous les facteurs, communs ou non, chacun d'eux étant affecté du plus grand exposant qui figure dans l'un ou l'autre des dénominateurs.

Exemple 5.4:

▷ Déterminer le plus petit dénominateur commun aux deux fractions $\frac{x^2-5}{9x^2-36}$ et $\frac{2}{15(x^2+4x+4)(x-3)}$.

L’expression de plusieurs fractions avec un dénominateur commun

Pour ramener deux ou plusieurs fractions au même dénominateur:

1. On cherche le plus petit dénominateur commun à ces fractions.
2. Pour chacune des fractions, on trouve la fraction équivalente ayant ce dénominateur commun.

Exemple 5.5:

- Ramener au même dénominateur les fractions $\frac{x+1}{6x^4-96x^2}$ et $\frac{2x-3}{20x^2+20x-240}$.

Les opérations sur les fractions rationnelles

Les opérations sur les fractions rationnelles

On effectue les opérations sur les fractions rationnelles de la même façon que sur les fractions numériques, en respectant les règles des opérations sur les polynômes.

1. Pour **additionner** ou **soustraire** deux fractions rationnelles, on les ramène au même dénominateur, ce qui permet ensuite d'additionner ou de soustraire les numérateurs, puis de simplifier, si possible.

2. Pour **multiplier** deux fractions rationnelles, on multiplie leurs numérateurs entre eux et leurs dénominateurs entre eux.

3. Pour **diviser** deux fractions rationnelles, on multiplie la première par l'inverse de la seconde.

Truc Pratique : Le domaine du résultat d'opérations sur des fractions

Le domaine du résultat d'une opération sur des fractions rationnelles est **inclus** dans l'intersection des domaines de chacune des fractions.

- Dans le cas de l'**addition**, de la **soustraction** ou de la **multiplication**, le domaine est **égal** à l'intersection des domaines.
- Dans le cas de la **division**, on doit aussi **exclure les zéros du diviseur**.

- La forme privilégiée pour la présentation du résultat d'une opération sur des fractions rationnelles est la forme factorisée et simplifiée.
- Toutefois, si le numérateur ne se factorise pas facilement, on le laisse sous forme de somme, la plus simple possible.
- N'effectuez surtout pas les produits dans les polynômes déjà factorisés.

Exemple 6.1:

- Effectuer l'addition $\frac{x-1}{3x^2-6x}+\frac{x+3}{x^2-x-2}$ et donner le domaine de cette somme.

- Soustraire $\frac{x+1}{5x+10}$ de $\frac{x}{x^2-4}$ et donner le domaine de cette différence.

Attention !

Il est essentiel de considérer les domaines de chacune des fractions initiales pour trouver le domaine du résultat d'une opération.
En effet, si une valeur de la variable n'est pas admissible au début d'un problème, elle ne deviendra pas admissible à la fin, même si une simplification a fait «disparaître» un facteur de la réponse.

- ▷ Nous illustrons ce principe à l'aide de deux exemples simples, qui montrent bien la nécessité de poser les conditions nécessaires.

Exemple 6.2:

- ▷ Les deux fractions $\frac{x}{x+2}$ et $\frac{2}{x+2}$ ont chacune $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ comme domaine. Déterminer le domaine de la somme $\frac{x}{x+2}+\frac{2}{x+2}$.

Attention !

(L'ordre de priorité des opérations)
Lorsqu'on effectue une suite d'opérations sur des fractions rationnelles, on doit toujours respecter l'ordre de priorité des opérations, qui est le même que dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6.3:

- En respectant l'ordre de priorité des opérations, simplifier l'expression $\frac{x-3}{x+1} + \frac{1}{x-2} \div \frac{x}{x^2-4}$.

Questions ou commentaires?
Envoyez-les à ibrahima.dione@umoncton.ca.