MATH 2013 - Chapitre 4.2: Les dérivées des fonctions de plusieurs variables

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

La règle de dérivation en chaîne

La règle de dérivation en chaîne

▷ Rappelons la règle de dérivation en chaîne pour une composition de fonctions d'une seule variable:

- Si $y = f(x)$ et $x = g(t)$, où f et g sont des fonctions différentiables, alors y est indirectement une fonction différentiable de t et

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

▷ La règle de dérivation en chaîne pour les fonctions de plusieurs variables s'énonce de plusieurs façons:

1. Si $z = f(x, y)$ est une fonction différentiable de x et y, où $x = g(t)$ et $y = h(t)$ sont deux fonctions différentiables de t, alors z est une fonction différentiable de t et

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

- On appelle aussi cette expression la **dérivée totale** de f par rapport à t.

- Comme on écrit souvent $\partial z/\partial x$ au lieu de $\partial f/\partial x$, on peut réécrire la règle de dérivation en chaîne sous la forme suivante:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Exemple 1.1: Soit $z = x^2y + 3xy^4$ avec $x = \sin 2t$ et $y = \cos t$. Calculons dz/dt lorsque $t = 0$.

Réponse:

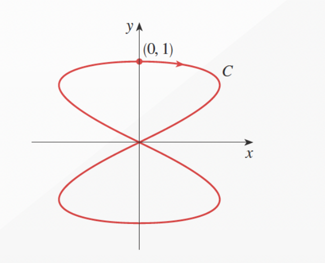
- La règle de dérivation en chaîne donne

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= \left(2xy + 3y^4\right)(2\cos 2t) + \left(x^2 + 12xy^3\right)(-\sin t)\\ &= \left(2\sin 2t\cos t + 3\cos^4 t\right)(2\cos 2t) - \left(\sin^2 2t + 12\sin 2t\cos^3 t\right)(\sin t).\end{aligned}$$

- Il n'est pas toujours nécessaire de remplacer les expressions de x et de y par des expressions en t pour calculer dz/dt.

- Lorsque $t = 0$, on a $x = \sin 0 = 0$ et $y = \cos 0 = 1$. Par conséquent,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0+3)(2\cos 0) + (0+0)(-\sin 0) = 6.$$



La courbe $x = \sin(2t),\ y = \cos(t)$.

- En $t = 0$, $(x, y) = (0, 1)$ et $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = 6$ est le taux d'accroissement au point $(0, 1)$ de la courbe C.

▷ Considérons maintenant la situation suivante: $z = f(x, y)$, où x et y sont des fonctions de deux variables s et t, soit $x = g(s, t)$ et $y = h(s, t)$.

▷ Dans ce cas, z est indirectement une fonction de s et de t

$$z = f\left(g(s, t), h(s, t)\right)$$

et on veut trouver $\partial z/\partial s$ et $\partial z/\partial t$.

2. Si $z = f(x, y)$ est une fonction différentiable de x et de y, où $x = g(s, t)$ et $y = h(s, t)$ sont deux fonctions différentiables de s et t, alors z est une fonction différentiable de s et de t, et

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Exemple 1.2: Soit $z = e^x \sin y$ avec $x = st^2$ et $y = s^2 t$. Trouvons $\partial z/\partial s$ et $\partial z/\partial t$.

Réponse:

- L'application du cas 2 de la règle de dérivation en chaîne donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= (e^x \sin y)\left(t^2\right) + (e^x \cos y)(2st) \\ &= t^2 e^{st^2} \sin\left(s^2 t\right) + 2ste^{st^2} \cos\left(s^2 t\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\ &= (e^x \sin y)(2st) + (e^x \cos y)\left(s^2\right) \\ &= 2ste^{st^2} \sin\left(s^2 t\right) + s^2 e^{st^2} \cos\left(s^2 t\right).\end{aligned}$$

▷ On considère la situation générale où une variable dépendante u est une fonction de n variables intermédiaires $x_1, \dots, x_n$, chacune étant une fonction de m variables indépendantes $t_1, \dots, t_m$.

3. Si u est une fonction différentiable de n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, et si chaque x_j est une fonction différentiable des m variables $t_1, t_2, \dots,$ t_m, alors u est une fonction différentiable de $t_1, t_2, \dots, t_m$ et

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

pour chaque $i = 1, 2, \dots, m$.

Exemple 1.3: Soit $u = x^4 y + y^2 z^3$ avec $x = rse^t, y = rs^2 e^{-t}$ et $z = r^2 s \sin t$. Calculons la valeur de $\partial u / \partial s$ lorsque $r = 2,\ s = 1$ et $t = 0$.

Réponse:

- L'application du cas 3 de la règle de dérivation en chaîne donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ &= \left(4x^3y\right)\left(re^t\right) + \left(x^4 + 2yz^3\right)\left(2rse^{-t}\right) + \left(3y^2z^2\right)\left(r^2 \sin t\right)\end{aligned}$$

- Lorsque $r = 2, s = 1$ et $t = 0$, on a $x = 2, y = 2$ et $z = 0$. Donc,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192.$$

Exemple 1.4: Soit $g(s,t) = f\left(s^2 - t^2, t^2 - s^2\right)$. Si $f(x,y)$ est différentiable, montrons que g satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

Réponse:

- On pose $x = s^2 - t^2$ et $y = t^2 - s^2$, et alors $g(s,t) = f(x,y)$. La règle d'enchaînement donne

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t)$$

- Ainsi,

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

La dérivation implicite

- On peut utiliser la règle de dérivation en chaîne pour décrire plus précisément le processus de dérivation implicite.
- On suppose qu'une équation de la forme $F(x, y) = 0$ définit y implicitement comme une fonction différentiable de x;
- c'est-à-dire que $y = f(x)$ et $F(x, f(x)) = 0$ pour tout x appartenant au domaine de f.
- Si F est différentiable, on peut appliquer la règle 1 de dérivation en chaine par rapport à x sur les deux membres de l'équation $F(x, y) = 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

- En isolant dy/dx à partir de l'équation (1) et tenant compte que $dx/dx = 1$ de sorte que si $\partial F/\partial y \neq 0$, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{2}$$

Exemple 1.5: Trouvons y' au point $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ si $x^3 + y^3 = 6xy$.

Réponse:

- On écrit l'équation donnée sous la forme

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0.$$

- L'équation (2) donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}.$$

- Au point donné, on a

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4/3, y=8/3} = -\frac{(4/3)^2 - 2(8/3)}{(8/3)^2 - 2(4/3)} = \frac{4}{5}.$$

- On suppose maintenant que z est donnée implicitement comme une fonction $z = f(x, y)$ par une équation de la forme $F(x, y, z) = 0$.

- Par conséquent, $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pour tout (x, y) appartenant au domaine de f.

- Si F et f sont différentiables, la règle de dérivation en chaine permet de dériver l'équation $F(x, y, z) = 0$ comme suit:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

- Toutefois,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \text{ et } \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0.$$

- Cette équation devient donc

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

- Si $\partial F/\partial z \neq 0$, on obtient la formule de $\partial z/\partial x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{3}$$

- La formule pour $\partial z/\partial y$ s'obtient de façon semblable

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{4}$$

Exemple 1.6: Trouvons $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Réponse:

- On pose $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Les équations (3) et (4) donnent

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}.$$

Les dérivées directionnelles et le vecteur gradient

Les dérivées directionnelles

- Si $z = f(x, y)$, alors les dérivées partielles f_x et f_y sont définies par

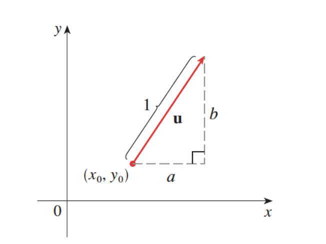
$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{5}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}. \tag{6}$$

- Les dérivées partielles représentent les taux de variation de z dans la direction des x et dans la direction des y.

- C'est-à-dire les directions des vecteurs unitaires $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$.

- On désire trouver le taux de variation de z en (x_0, y_0) dans la direction d'un vecteur unitaire arbitraire $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ (voir figure).

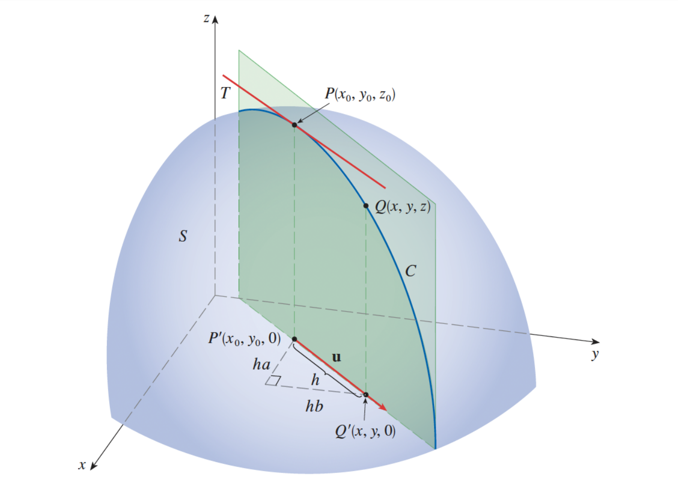


- On considère la surface S d'équation $z = f(x, y)$ (le graphe de f) et on pose $z_0 = f(x_0, y_0)$.

- Ainsi, le point $P(x_0, y_0, z_0)$ appartient à S.

- Le plan vertical qui passe par P dans la direction de $\vec{u}$ coupe S selon la courbe C (voir figure).

- La pente de la droite T tangente à C au point P est le taux de variation de z dans la direction de $\vec{u}$.



▷ Si $Q(x, y, z)$ est un autre point de C et si P', Q' sont les projections de P, Q sur le plan xy, alors le vecteur $\overrightarrow{P'Q'}$ est parallèle à $\vec{u}$, donc

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\vec{u} = ha\vec{i} + hb\vec{j}$$

pour un certain scalaire h.

- ▷ Par conséquent, $x - x_0 = ha$ et $y - y_0 = hb$, ce qui implique que $x = x_0 + ha, y = y_0 + hb$ et

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

- ▷ Si on prend la limite lorsque $h \to 0$, on obtient le taux de variation de z (par rapport à la distance) dans la direction unitaire $\vec{u}$, qui est la dérivée de f dans la direction de $\vec{u}$.

Définition

La **dérivée directionnelle** de f dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ au point (x_0, y_0) est

$$f_{\vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{7}$$

si cette limite existe.

Note:

- En comparant l'équation (7) aux équations (5)-(6):
  - on voit que si $\vec{u} = \vec{i}$, alors $f_{\vec{i}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$
  - et que si $\vec{u} = \vec{j}$, alors $f_{\vec{j}}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$.
- Autrement dit, les dérivées partielles de f par rapport à x et à y sont simplement des cas particuliers de la dérivée directionnelle.

▷ Lorsqu'on calcule la dérivée directionnelle d'une fonction définie par une formule, on utilise généralement le théorème suivant.

Théorème

Si f est une fonction différentiable de x et y, alors f possède une dérivée dans la direction de tout vecteur unitaire $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et

$$f_{\vec{u}}(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b.$$

Démonstration:

▷ Soit la fonction g d'une seule variable h définie par

$$g(h) = f\left(x_0 + ha, y_0 + hb\right).$$

▷ Alors, selon la définition de la dérivée,

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(x_0 + ha, y_0 + hb\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{h} \\ &= f_{\vec{u}}\left(x_0, y_0\right). \end{aligned} \tag{8}$$

▷ On peut aussi écrire $g(h) = f(x, y)$, où $x = x_0 + ha, y = y_0 + hb$. La règle de dérivation en chaîne donne

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b.$$

▷ Si on pose $h = 0$, alors $x = x_0, y = y_0$ et

$$g'(0) = f_x\left(x_0, y_0\right) a + f_y\left(x_0, y_0\right) b. \tag{9}$$

▷ Si on compare les équations (8) et (9) , on a

$$f_{\vec{u}}\left(x_0, y_0\right) = f_x\left(x_0, y_0\right) a + f_y\left(x_0, y_0\right) b.$$

- Si le vecteur unitaire $\vec{u}$ forme un angle θ avec l'axe des x positifs, on peut écrire $\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ et la formule du théorème devient

$$f_{\vec{u}}(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta. \tag{10}$$

Exemple 2.1: Trouvons la dérivée directionnelle $f_{\vec{u}}(x, y)$ si

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

et si $\vec{u}$ est le vecteur unitaire défini par l'angle $\theta = \pi/6$. Que vaut $f_{\vec{u}}(1, 2)$.

Réponse:

- La formule (10) donne

$$\begin{aligned} f_{\vec{u}}(x, y) &= f_x(x, y) \cos \frac{\pi}{6} + f_y(x, y) \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \left(3x^2 - 3y\right) \frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y\right]. \end{aligned}$$

- On a donc

$$f_{\vec{u}}(1, 2) = \frac{1}{2}\left[3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + (8 - 3\sqrt{3})(2)\right] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}.$$

Remarque : Soit $\vec{u} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ et $\vec{v} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est défini par

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \end{aligned}$$

- On peut écrire la dérivée directionnelle sous la forme du produit scalaire de deux vecteurs:

$$\begin{aligned} f_{\vec{u}}(x, y) &= f_x(x, y) a + f_y(x, y) b \\ &= \left[f_x(x, y) \vec{i} + f_y(x, y) \vec{j} \right] \cdot [a\vec{i} + b\vec{j}] \\ &= \left[f_x(x, y) \vec{i} + f_y(x, y) \vec{j} \right] \cdot \vec{u} \qquad (11) \end{aligned}$$

Définition

- Si f est une fonction de deux variables x et y, alors le **gradient** de f noté ∇f est la fonction vectorielle définie par

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\vec{j} \tag{12}$$

- La dérivée directionnelle $f_{\vec{u}}(x,y)$ s'écrit, d'après (11) et (12), sous la forme

$$f_{\vec{u}}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u} \tag{13}$$

La dérivée de f dans la direction de $\vec{u}$ est la projection scalaire du vecteur gradient sur $\vec{u}$.

Exemple 2.2: Calculons la dérivée de la fonction $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ au point $(2,-1)$ dans la direction du vecteur $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$.

Réponse:

- ▷ On détermine d'abord le vecteur gradient en $(2,-1)$:

$$\nabla f(x,y) = 2xy^3\vec{i} + \left(3x^2y^2 - 4\right)\vec{j}$$
$$\nabla f(2,-1) = -4\vec{i} + 8\vec{j}$$

- ▷ On remarque que $\vec{v}$ n'est pas un vecteur unitaire, mais comme $\|\vec{v}\| = \sqrt{29}$, le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{v}$ est

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\vec{j}$$

- ▷ Selon l'équation (13),

$$\begin{aligned} f_{\vec{u}}(2,-1) &= \nabla f(2,-1)\cdot\vec{u} = (-4\vec{i} + 8\vec{j})\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\vec{j}\right) \\ &= \frac{-4\cdot 2 + 8\cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

- On définit la dérivée directionnelle d'une fonction de trois variables de la même façon que pour les fonctions de deux variables.

- On interprète $f_{\vec{u}}(x, y, z)$ comme étant le taux de variation de la fonction dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$.

Définition

La **dérivée directionnelle** de f dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ en (x_0, y_0, z_0) est

$$f_{\vec{u}}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

si cette limite existe.

- Si $f(x, y, z)$ est différentiable et si $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, on peut, de façon semblable au théorème précédent, montrer que

$$f_{\vec{u}}(x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c \tag{14}$$

- Le **vecteur gradient**, noté ∇f ou $\mathbf{grad}\, f$, d'une fonction f de trois variables est

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k}$$

ou, en abrégé,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

- On réécrit la formule (14) de la dérivée directionnelle sous la forme

$$f_{\vec{u}}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{u} \tag{15}$$

Exemple 2.3: Soit $f(x,y,z) = x \sin yz$. Trouvons:

a) Le gradient de f;

b) la dérivée de f en $(1,3,0)$ dans la direction de $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Réponse:

a) Le gradient de f est

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z) &= f_x(x,y,z)\vec{i} + f_y(x,y,z)\vec{j} + f_z(x,y,z)\vec{k} \\ &= \sin yz\vec{i} + xz\cos yz\vec{j} + xy\cos yz\vec{k}.\end{aligned}$$

b) ▷ En $(1,3,0)$, on a $\nabla f(1,3,0) = 3\vec{k}$. Le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ est

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}.$$

▷ Par conséquent, selon l'équation (15),

$$\begin{aligned}f_{\vec{u}}(1,3,0) &= \nabla f(1,3,0) \cdot \vec{u} \\ &= 3\vec{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}\right) \\ &= 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

La maximisation de la dérivée directionnelle

- Soit f une fonction de deux ou trois variables, dont on considère toutes les dérivées directionnelles possibles en un point donné.
- Ces dérivées donnent les taux de variation de f dans toutes les directions en ce point.
- On peut alors se poser les questions suivantes:
  - Dans quelle direction la fonction f varie-t-elle le plus rapidement?
  - Quel est le taux de variation maximal?

Le théorème suivant permet de répondre à ces questions.

Théorème

Soit f une fonction différentiable. La dérivée directionnelle $f_{\vec{u}}(\vec{x})$ est maximale lorsque $\vec{u}$ a la même direction et le même sens que le gradient $\nabla f(\vec{x})$. De plus, le taux de variation maximal de f en $\vec{x}$ est $\|\nabla f(\vec{x})\|$.

Démonstration:

- ▷ Puisque $\vec{u}$ est unitaire, l'équation (15) donne

$$f_{\vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u} = \|\nabla f\| \|\vec{u}\| \cos\theta = \|\nabla f\| \cos\theta,$$

  où θ est l'angle entre ∇f et $\vec{u}$.

- ▷ Le maximum de $\cos\theta$ est 1 lorsque $\theta = 0$.

- ▷ Par conséquent, le maximum de $f_{\vec{u}}$ est $\|\nabla f\|$ et ce maximum survient quand $\theta = 0$, c'est-à-dire lorsque $\vec{u}$ a la même direction et le même sens que f.

Exemple 2.4:

a) Soit $f(x, y) = xe^y$. Calculons le taux de variation de f au point $P(2, 0)$ dans la direction de P à $Q\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

b) Dans quelle direction le taux de variation de la fonction f est-il maximal? Quel est le taux de variation maximal?

Réponse:

a) ⋆ On calcule d'abord le vecteur gradient:

$$\nabla f(x, y) = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} = e^y\vec{i} + xe^y\vec{j}$$
$$\nabla f(2, 0) = \vec{i} + 2\vec{j}$$

⋆ Le vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{PQ} = -\frac{3}{2}\vec{i} + 2\vec{j}$ est $\vec{u} = -\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$. Le taux de variation de f dans la direction de P à Q est donc

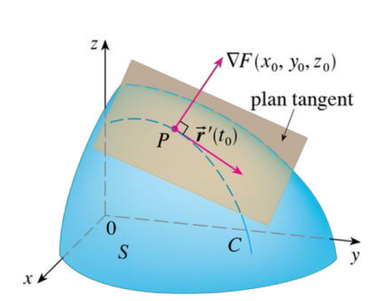
$$f_{\vec{u}}(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot \vec{u} = [\vec{i} + 2\vec{j}] \cdot \left[-\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right]$$
$$= 1\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\left(\frac{4}{5}\right) = 1$$

b) Selon le théorème, f croît le plus rapidement dans la direction du vecteur gradient $\nabla f(2,0) = \vec{i} + 2\vec{j}$. Le taux de variation maximal est

$$\|\nabla f(2,0)\| = \|\vec{i} + 2\vec{j}\| = \sqrt{5}.$$

- Soit une surface S d'équation $F(x, y, z) = k$, c'est-à-dire une surface de niveau d'une fonction F de trois variables, et $P\,(x_0, y_0, z_0)$, un point de S.

- Comme dans le cas de deux variables, on peut montrer que le gradient de F est perpendiculaire à la surface de niveau passant par P.



- Si $\nabla F\,(x_0, y_0, z_0) \neq \overrightarrow{0}$, il est naturel de définir le **plan tangent à la surface de niveau** $F(x, y, z) = k$ en $P\,(x_0, y_0, z_0)$ comme étant le plan passant par P et ayant pour vecteur normal $\nabla F\,(x_0, y_0, z_0)$.

- L'équation de ce plan tangent est donnée sous la forme

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{16}$$

- La direction de la **droite normale** à S en P est donnée par le vecteur gradient $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

- Les équations paramétriques de la droite normale sont données par

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tF_x(x_0, y_0, z_0) \\ y &= y_0 + tF_y(x_0, y_0, z_0) \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z &= z_0 + tF_z(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

- Dans le cas particulier où l'équation de la surface S est de la forme $z = f(x, y)$, on peut réécrire l'équation sous la forme

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

où S est considérée comme la surface de niveau $k = 0$ de F.

- Alors, on obtient

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$$
$$F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0)$$
$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$$

et le plan tangent (16) devient

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Exemple 2.5: Trouvons les équations du plan tangent et de la normale à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

au point $(-2, 1, -3)$.

Réponse:

- Cet ellipsoïde est la surface de niveau $k = 3$ de la fonction

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}.$$

- On a

$$\begin{array}{lll} F_x(x,y,z) = \frac{x}{2} & F_y(x,y,z) = 2y & F_z(x,y,z) = \frac{2z}{9} \\ F_x(-2,1,-3) = -1 & F_y(-2,1,-3) = 2 & F_z(-2,1,-3) = -\frac{2}{3}. \end{array}$$

- L'équation (16) donne l'équation du plan tangent en $(-2, 1, -3)$ sous la forme

$$-1(x+2) + 2(y-1) - \frac{2}{3}(z+3) = 0$$

ou encore $3x - 6y + 2z + 18 = 0$.

▷ Les équations paramétriques de la droite normale sont

$$\begin{aligned} x &= -2 - t \\ y &= 1 + 2t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &= -3 - \frac{2}{3}t \end{aligned}$$

▷ Les propriétés du gradient que nous avons vues ici sont résumées dans cet encadré.

Soit f une fonction différentiable de n variables, et $\vec{x}$ un point de $\mathbb{R}^n$. Alors,

- la dérivée directionnelle de f en $\vec{x}$ est maximale dans la direction du gradient $\nabla f(\vec{x})$;
- le taux de variation maximal de f en $\vec{x}$ est $\|\nabla f(\vec{x})\|$;
- la dérivée directionnelle de f en $\vec{x}$ est nulle dans toute direction perpendiculaire au gradient $\nabla f(\vec{x})$;

- le gradient $\nabla f(\vec{x})$ est perpendiculaire à l'ensemble de niveau de f passant par $\vec{x}$.

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)
- Disponibilités:
  - Lundi 10H00 - 12H00, MRR B-214
  - Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214
  - Jeudi 08H00 - 10H00, MRR B-214
- Manuels du cours: