MAT 1910
Mathématiques de l'ingénieur II

Dione Ibrahima

Chapitre VI:Intégrales de surface (4)

Théorème de la divergence ou de Gauss

- Définition : Le théorème de Green a été cité antérieurement sous trois formes dont celle-ci :

$$\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot \vec{n}\, ds = \int\int_D div\left(\overrightarrow{\mathbb{F}}(x,y)\right) dxdy\,, \qquad (1)$$

où C est la frontière, orientée positivement, du domaine plan D. Le but ici, est d'établir l'extension de ce théorème à un champ vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ défini sur $\mathbb{R}^3$.

Théorème (de Gauss ou de flux-divergence)

Soit E une région solide simple et soit S la surface frontière de E, orientée positivement (vers l'extérieur). Soit $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ un champ de vecteurs dont les composantes ont des dérivées partielles continues sur une région ouverte de $\mathbb{R}^3$ qui contient E. Alors,

$$\int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{S} = \int\int\int_E div\left(\overrightarrow{\mathbb{F}}\right) dV \qquad (2)$$

Remarque

La relation (2) établit donc, sous les conditions énoncées, que le flux de $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ à travers la surface frontière de E est égal à l'intégrale triple de la divergence de $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ sur E.

- Exemples :

i. Calculer le flux du champ vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{F}}(x,y,z) = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$ sur la sphère unité $x^2+y^2+z^2=1$.

Solution : On calcule d'abord la divergence du champ vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{F}}$:

$$div(\overrightarrow{\mathbb{F}}) = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x).$$

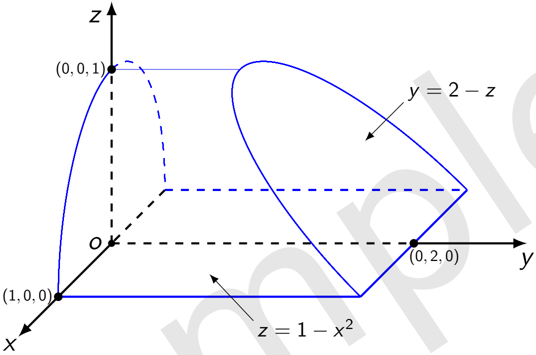
Sachant que la sphère unité noté S délimite la boule unité B, on a :

$$\int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{S} = \int\int\int_B div\left(\overrightarrow{\mathbb{F}}\right) dV = \int\int\int_B 1\, dV = V(B) = \frac{4}{3}\pi(1)^3.$$

ii. Calculer $\displaystyle\int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{S}$, où $\overrightarrow{\mathbb{F}}(x,y,z) = xy\vec{i} + (y^2 + e^{xz^2})\vec{j} + \sin(xy)\vec{k}$ et où S est la surface de la région solide E bornée par le cylindre parabolique $z = 1 - x^2$ et les plans $z = 0$, $y = 0$ et $y + z = 2$.

Solution : Calculer directement l'intégrale de surface ne serait pas chose facile. En effet cette surface se compose de quatre parties et donc il s'agira d'effectuer l'intégrale de surface sur chacune des surfaces composantes de S. De plus, la divergence de $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ est beaucoup plus simple que $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ lui-même :

$$div(\overrightarrow{\mathbb{F}}) = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin(xy)) = 3y.$$



Par conséquent, on change l'intégrale de surface en une intégrale triple, grâce au théorème de Gauss, sachant que l'ensemble E étant décrite comme suit :

$$E = \left\{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z\right\}$$

$$\int\int_S \vec{\mathbb{F}} \cdot d\vec{S} = \int\int\int_E div\left(\vec{\mathbb{F}}\right) dV = \int\int\int_E 3y \, dV = 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-z} y \, dydzdx = \frac{184}{35}.$$

Calcul du flux par le théorème de Gauss

- Méthode : Si S_o est une surface ouverte, c'est-à-dire qui n'est pas le bord d'un domaine de $\mathbb{R}^3$, on peut fermer la surface en ajoutant une autre surface S_1 de sorte que $S = S_o \cup S_1$ soit fermée et orientée positivement.

Méthode (de calcul du flux par le théorème de Gauss)

Si $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ est un champ de vecteurs dont les composantes ont des dérivées partielles continues sur une région ouverte de $\mathbb{R}^3$ qui contient E (le domaine intérieur à S), le flux de $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ à travers S_o se calcule de la manière suivante :

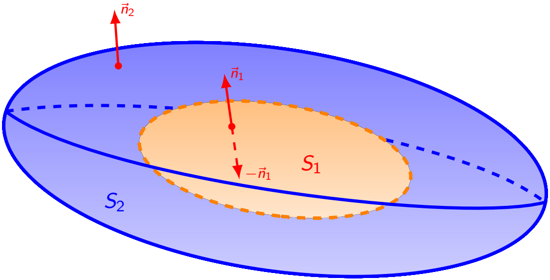
$$\begin{aligned} \int\int_{S_o} \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot \vec{n}\, dS &= \int\int_{S} \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot \vec{n}\, dS - \int\int_{S_1} \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot \vec{n}\, dS \\ &= \int\int\int_{E} div(\overrightarrow{\mathbb{F}})\, dV - \int\int_{S_1} \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot \vec{n}\, dS\,. \end{aligned} \tag{3}$$

- Exemple : Soit $\vec{v}(x, y, z) = (x + z, y - z, z - e^x)$. Calculer le flux de $\vec{v}$ à travers le tronc de paraboloide S défini par $x = y^2 + z^2, x \in [3, 4]$, dans le sens de la normale dont la première composante est positive.

Extension du théorème de Gauss

Bien que le théorème de Gauss ait été cité seulement sur des régions simples, il est également valable sur une réunion finie de régions solides simples. Soit E une région comprise entre les deux surfaces fermées S_1 et S_2, où S_1 (de normale unitaire exterieur $\vec{n}_1$) est entièrement à l'intérieur de S_2 (de normale unitaire exterieur $\vec{n}_2$). L'application du théorème de Gauss conduit à

$$\begin{aligned}
\int\int\int_E div\left(\overrightarrow{\mathbb{F}}\right) dV &= \int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{S} = \int\int_S \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot \vec{n}\, dS \\
&= \int\int_{S_1} \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot (-\vec{n}_1)\, dS + \int\int_{S_2} \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot \vec{n}_2\, dS \\
&= -\int\int_{S_1} \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{S} + \int\int_{S_2} \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{S}. \qquad (4)
\end{aligned}$$



Exercices du Livre Stewart (édition MODULO) à Faire :

- Section 10.5 : Exercices 3, 7, 15, 19, 21, 25.

Références :

- Livre Stewart (édition MODULO), page 450-454 : section 10.5
- Livre Stewart (édition 2), page 967 : section 13.8
- Pour un cours de Maple complet : http ://alamanya.free.fr/