

SÉRIE 8 - Suites, séries, calcul dans \mathbb{R}^n **Exercice 1**

Calculez dz/dt ou dw/dt à l'aide de la Règle de dérivation des fonctions composées.

$$z = \text{Arctg}(y/x), \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{-t}$$

Exercice 2

Calculez $\partial z/\partial s$ et $\partial z/\partial t$ à l'aide de la Règle de dérivation des fonctions composées.

$$z = \text{tg}(u/v), \quad u = 2s + 3t, \quad v = 3s - 2t$$

Exercice 3

Calculer l'expression de $\partial z/\partial x$ et de $\partial z/\partial y$ à partir de l'équation

$$xyz = \cos(x + y + z)$$

Exercice 4

On suppose que toutes les fonctions données ont des dérivées partielles secondes continues. Démontrez que toute fonction de la forme

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

est une solution de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[Suggestion : Poser $u = x + at, v = x - at$.]

Exercice 5

Calculez la dérivée de f au point donné dans la direction indiquée par l'angle θ .

$$f(x, y) = x \sin(xy), \quad (2, 0), \quad \theta = \pi/3$$

Exercice 6

Cherchez tous les points en lesquels la direction de la variation la plus rapide de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ est $\vec{i} + \vec{j}$.

Exercice 7

Dans une certaine région de l'espace, le potentiel électrique V est donné par $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

- a. À quelle vitesse varie le potentiel en $P(3, 4, 5)$ dans la direction du vecteur $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$?
- b. Dans quelle direction V varie-t-il le plus vite?
- c. Quel est le taux maximum de variation de V en P ?

Exercice 8

Démontrez que l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ au point (x_0, y_0, z_0) peut être écrite sous la forme

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

Exercice 9

Démontrez que l'ellipsoïde $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ sont tangents l'un à l'autre au point $(1, 1, 2)$. (Cela signifie que le plan tangent en ce point est commun.)