

Résolution numérique des équations différentielles

Sommaire

1 • Introduction	PAGE 1
2 • Méthode d'Euler	PAGE 2
3 • Méthodes de Taylor	PAGE 4
4 • Méthodes de Runge-Kutta	PAGE 6
4.1 - Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2	6
4.2 - Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4	7
5 • Systèmes d'équations différentielles	PAGE 10
5.1 - La méthode d'Euler explicite	10
5.2 - La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4	11
6 • Équations d'ordre supérieur	PAGE 12

1 Introduction

La tâche dans ce chapitre consiste à déterminer une approximation de la fonction $y(t)$, qui vérifie le système suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (7.1)$$

- La variable indépendante t représente très souvent (mais pas toujours) **le temps**.
- La variable dépendante est notée y et dépend bien sûr de t .
- La fonction f est pour le moment une fonction quelconque de deux variables et suffisamment différentiable.
- La condition $y(t_0) = y_0$ est **la condition initiale**, c'est à dire l'état de la solution au moment où l'on commence à s'y intéresser.

Définition 1.1

L'équation (7.1) est appelée **équation différentielle d'ordre 1**, car seule la dérivée d'ordre 1 de la variable dépendante $y(t)$ est présente. Si des dérivées de $y(t)$ d'ordre 2 apparaissaient dans l'équation (7.1), on aurait une équation différentielle d'ordre 2, et ainsi de suite.

Il arrive, par des méthodes bien connues (voir le cours de Mathématiques de l'ingénieur 1), qu'on obtienne la solution analytique $y(t)$, tel que le montre l'exemple suivant :

Exemple 1

Soit l'équation différentielle du premier ordre

$$\begin{cases} y'(t) = t \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (7.2)$$

En intégrant de chaque côté, on obtient

$$\int y'(t) dt = \int t dt$$

Ce qui donne la solution analytique suivante $y(t) = \frac{t^2}{2} + C$, où C est une constante.

Cette dernière expression est **la solution générale de l'équation différentielle** en ce sens qu'elle satisfait $y'(t) = t$, quelle que soit la constante C .

En imposant la condition initiale de l'équation, à savoir $y(0) = 1$, **la solution particulière** est alors $y(t) = \frac{t^2}{2} + 1$.

On l'appelle ainsi (**solution particulière**) car elle vérifie à la fois l'équation différentielle et la condition initiale.

Par contre dans ce chapitre, on utilisera des méthodes numériques dans la résolution de cette équation différentielle. Ces outils numériques de résolution ne permettent pas d'obtenir une solution pour toutes les valeurs de la variable

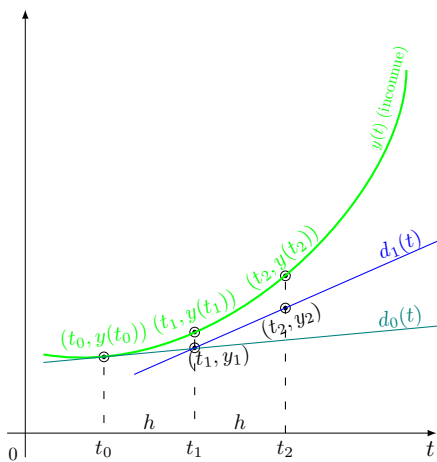
indépendante t , mais plutôt une approximation de la solution analytique seulement à certaines valeurs de t notées t_i et distancées d'une valeur $h_i = t_{i+1} - t_i$. Dans la plupart des méthodes présentées, cette distance est constante pour tout i et est notée h . On appelle h , le pas de temps.

Remarque(s) :

- On note $y(t_i)$ la solution analytique de l'équation différentielle (7.1) en $t = t_i$.
- Alors que y_i représente la solution approximative en $t = t_i$ obtenue à l'aide d'une méthode numérique.

Les diverses méthodes de résolution proposées ici sont d'autant plus précises qu'elles sont d'ordre élevé. Nous amorçons l'exposé par des méthodes relativement simples ayant une interprétation géométrique. Elles nous conduiront progressivement à des méthodes plus complexes telles les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4, qui permettent d'obtenir des résultats d'une grande précision.

2 Méthode d'Euler



Méthode d'Euler explicite

QUESTION : À partir de l'équation différentielle (7.1) (avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$), comment obtenir une approximation de $y(t_1)$ en $t = t_1 = t_0 + h$?

- On détermine, à partir du point (t_0, y_0) , la direction (ou pente) à la quelle on va avancer en choisissant celle-ci

$$y'(t_0) = f(t_0, y(t_0)) = f(t_0, y_0)$$

- On suit donc la droite $d_0(t)$, passant par (t_0, y_0) et ayant comme pente $f(t_0, y_0)$, définie analytiquement par

$$d_0(t) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0)$$

- On prend ainsi $d_0(t_1)$ comme étant une approximation de la solution analytique $y(t_1)$:

$$y(t_1) \simeq y_1 = d_0(t_1) = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0) = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

- On refait l'analyse précédente à partir du point (t_1, y_1) pour approximer $y(t_2)$ (et ainsi de suite ...)

$$y(t_2) \simeq y_2 = d_1(t_2) = y_1 + hf(t_1, y_1)$$

Remarque(s) :

Note : On constate que l'erreur commise à la première itération est réintroduite dans les calculs de la deuxième.

Une propriété importante des méthodes numériques de résolution des équations différentielles est mise en évidence : L'erreur introduite à la première itération a des répercussions sur les calculs de la deuxième itération, ce qui signifie que les erreurs se propagent d'une itération à l'autre. Il en résulte de façon générale que l'erreur $|y(t_n) - y_n|$ augmente légèrement avec n .

Algorithme 2.1: Méthode d'Euler explicite :

1. Étant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N
2. Pour $0 \leq n \leq N$:
 - * $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$
 - * $t_{n+1} = t_n + h$
 - * Écrire t_{n+1} et y_{n+1}
3. Arrêt

Exemple 2

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + t + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (7.3)$$

On a donc $t_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $f(t; y) = -y + t + 1$.

Pour un pas de temps fixe $h = 0,1$, on peut donc utiliser la méthode d'Euler explicite et obtenir successivement des approximations de $y(0,1), y(0,2), y(0,3), \dots$, qu'on va noter y_1, y_2, y_3, \dots .

- Le premier pas de temps produit

$$y_1 = y_0 + hf(t_0; y_0) = 1 + 0,1f(0; 1) = 1 + 0,1(-1 + 0 + 1) = 1$$

- Le deuxième pas de temps fonctionne de manière similaire

$$y_2 = y_1 + hf(t_1; y_1) = 1 + 0,1f(0,1; 1) = 1 + 0,1(-1 + 0,1 + 1) = 1,01$$

- Par le troisième pas, on parvient ensuite à

$$y_3 = y_2 + hf(t_2; y_2) = 1,01 + 0,1f(0,2; 1,01) = 1,01 + 0,1(-1,01 + 0,2 + 1) = 1,029$$

Le tableau suivant rassemble les résultats des dix premiers pas de temps. La solution analytique de cette équation différentielle est $y(t) = e^{-t} + t$, ce qui permet de comparer les solutions numérique et analytique et de constater la croissance de l'erreur $|y(t_i) - y_i|$.

Méthode d'Euler explicite $y'(t) = -y(t) + t + 1$			
t_i	Valeur exacte $y(t_i)$	Valeur approximative y_i	Erreur absolue $ y(t_i) - y_i $
0,0	1,000000	1,000000	0,000000
0,1	1,004837	1,000000	0,004837
0,2	1,018731	1,010000	0,008731
0,3	1,040818	1,029000	0,011818
0,4	1,070302	1,056100	0,014220
0,5	1,106531	1,090490	0,016041
0,6	1,148812	1,131441	0,017371
0,7	1,196585	1,178297	0,018288
0,8	1,249329	1,230467	0,018862
0,9	1,306570	1,287420	0,019150
1,0	1,367879	1,348678	0,019201

Définition 2.1

- Une méthode de résolution d'équations différentielles est dite à un pas si elle est de la forme :

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n) \quad (7.4)$$

où ϕ est une fonction quelconque. Une telle relation est appelée **équation aux différences**. La méthode est à un pas si, pour obtenir la solution en $t = t_{n+1}$, on doit utiliser la solution numérique au temps t_n seulement.

La méthode d'Euler explicite est bien sûr une méthode à un pas où $\phi(t, y) = f(t, y)$.

Note: On désigne **méthodes à pas multiples** les méthodes qui exigent également la solution numérique aux temps $t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3}, \dots$.

- On dira qu'un schéma à un pas converge à l'ordre p si

$$\max_{1 \leq n \leq N} |y(t_n) - y_n| = \mathcal{O}(h^p) \quad (7.5)$$

où N est le nombre total de pas de temps.

- L'erreur de troncature locale au point $t = t_n$ est définie par

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \phi(t_n, y(t_n)) \quad (7.6)$$

Note: L'erreur de troncature locale mesure la précision avec laquelle la solution analytique vérifie l'équation aux différences (7.4).

3 Méthodes de Taylor

Le développement de Taylor permet une généralisation de la méthode d'Euler en procurant une approximation d'ordre plus élevé. Nous nous limitons cependant à la méthode de Taylor du second ordre.

La construction de cette méthode repose sur les étapes suivantes : On cherche à partir de $t = t_n$, une approximation au temps $t_{n+1} = t_n + h$ de la solution $y(t_{n+1})$ en

- Effectuant le développement de Taylor de $y(t)$ autour de t_n

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + y'(t_n)h + \frac{y''(t_n)h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$$

- Se servant de l'équation différentielle (7.1), pour obtenir

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + f(t_n, y(t_n))h + \frac{f'(t_n, y(t_n))h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$$

- Effectuant la règle de dérivation en chaîne de la fonction $f(t, y(t))$ en tenant en compte l'équation (7.1)

$$f'(t, y(t)) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} f(t, y(t))$$

pour obtenir la formule suivante qui sera la base de la méthode de Taylor

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + f(t_n, y(t_n))h + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right) + \mathcal{O}(h^3) \quad (7.7)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 3, on en arrive à poser

$$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + f(t_n, y(t_n))h + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right) \quad (7.8)$$

Algorithme 3.1: Méthode de Taylor d'ordre 2 :

1. Étant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N
2. Pour $0 \leq n \leq N$:
 - * $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n) \right)$
 - * $t_{n+1} = t_n + h$
 - * Écrire t_{n+1} et y_{n+1}
3. Arrêt

Remarque(s) : Suivant la notation (7.4), on a ici $\phi(t, y(t)) = f(t, y(t)) + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} f(t, y(t)) \right)$. En vertu de la relation (7.7) et de la définition de l'erreur de troncature locale (7.6), on montre que $\tau_{n+1}(h) = \mathcal{O}(h^2)$. L'erreur de troncature locale de la méthode de Taylor est d'ordre 2 et la méthode converge à l'ordre 2 ($p = 2$ dans la relation (7.5)).

Exemple 3

Soit l'équation différentielle déjà résolue par la méthode d'Euler :

$$y'(t) = -y(t) + t + 1$$

et la condition initiale $y(0) = 1$. Dans ce cas, on a la fonction $f(t, y) = -y + t + 1$ et sachant qu'il nous faut les dérivées partielles de f alors

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1$$

L'algorithme devient

$$y_{n+1} = y_n + h(-y_n + t_n + 1) + \frac{h^2}{2}(1 + (-1)(-y_n + t_n + 1))$$

- La première itération de la méthode de Taylor d'ordre 2 donne (avec $h = 0,1$)

$$y_1 = 1 + 0,1(-1 + 0 + 1) + \frac{(0,1)^2}{2}(1 + (-1)(-1 + 0 + 1)) = 1,005$$

- Une deuxième itération fournit l'approximation

$$\begin{aligned} y_2 &= 1,005 + 0,1(-1,005 + 0,1 + 1) + \frac{(0,1)^2}{2}(1 + (-1)(-1,005 + 0,1 + 1)) \\ &= 1,019025 \end{aligned}$$

Les résultats sont compilés dans le tableau qui suit

Méthode de Taylor $y'(t) = -y(t) + t + 1$			
t_i	Valeur exacte $y(t_i)$	Valeur approximative y_i	Erreur absolue $ y(t_i) - y_i $
0,0	1,000000	1,000000	0,000000
0,1	1,004837	1,005000	0,000163
0,2	1,018731	1,019025	0,000294
0,3	1,040818	1,041218	0,000400
0,4	1,070302	1,070802	0,000482
0,5	1,106531	1,107075	0,000544
0,6	1,148812	1,149404	0,000592
0,7	1,196585	1,197210	0,000625
0,8	1,249329	1,249975	0,000646
0,9	1,306570	1,307228	0,000658
1,0	1,367879	1,368541	0,000662

On remarque que l'erreur est plus petite avec la méthode de Taylor d'ordre 2 qu'avec la méthode d'Euler explicite. Comme on le verra plus loin, cet avantage des méthodes d'ordre plus élevé vaut pour l'ensemble des méthodes de résolution d'équations différentielles.

Remarque(s) : Bien que d'ordre 2, la méthode de Taylor exige d'évaluer les dérivées de la fonction $f(t, y(t))$, nécessitant ainsi de calculs supplémentaires. Pour cette raison, cette méthode est difficile à utiliser. Il existe cependant un moyen de contourner cette difficulté en développant les méthodes de Runge-Kutta.

4 Méthodes de Runge-Kutta

Il serait avantageux de disposer de méthodes d'ordre de plus en plus élevé tout en évitant les désavantages des méthodes de Taylor, qui nécessitent l'évaluation des dérivées partielles de la fonction $f(t, y)$. Une voie est tracée par les méthodes de Runge-Kutta, qui sont calquées sur les méthodes de Taylor du même ordre.

4.1 - Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2

On a vu que le développement de la méthode de Taylor passe par la relation (7.7) :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + f(t_n, y(t_n))h + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right) + \mathcal{O}(h^3) \quad (7.9)$$

Le but est de remplacer cette dernière relation par une expression équivalente possédant le même ordre de précision $\mathcal{O}(h^3)$ et ayant la forme

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + a_1 h f(t_n, y(t_n)) + a_2 h f(t_n + a_3 h, y(t_n) + a_4 h) \quad (7.10)$$

où l'on doit déterminer les paramètres a_1, a_2, a_3 et a_4 de telle sorte que les expressions (7.9) et (7.10) aient toutes deux une erreur en $\mathcal{O}(h^3)$.

Remarque(s) : On ne trouve par ailleurs aucune dérivée partielle dans l'expression (7.10).

En recourant au développement de Taylor en deux variables, ces paramètres vérifient ainsi le système non linéaire de 3 équations comprenant 4 inconnues suivant

$$\begin{cases} 1 = (a_1 + a_2) \\ \frac{1}{2} = a_2 a_3 \\ \frac{f(t_n, y(t_n))}{2} = a_2 a_4 \end{cases} \quad (7.11)$$

La sous-détermination de ce système nous offre une marge de manoeuvre qui favorise la mise au point de plusieurs variantes de la méthode de Runge-Kutta :

4.1.1 - Méthode d'Euler modifiée

En choisissant les valeurs $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$ et $a_4 = f(t_n, y(t_n))$ dans l'équation (7.10), on obtient alors l'algorithme suivant dit de Méthode d'Euler modifiée

Algorithme 4.1: Méthode d'Euler modifiée :

1. Étant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N
2. Pour $0 \leq n \leq N$:
 - * $\hat{y} = y_n + h f(t_n, y_n)$
 - * $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_n + h, \hat{y}))$
 - * $t_{n+1} = t_n + h$
 - * Écrire t_{n+1} et y_{n+1}
3. Arrêt

Remarque(s) : Pour faciliter les calculs, l'évaluation de y_{n+1} a été scindée en deux étapes. La variable temporaire \hat{y} correspond tout simplement à une itération de la méthode d'Euler explicite. On fait ainsi une prédiction \hat{y} de la solution en t_{n+1} qui est corrigée (et améliorée) à la deuxième étape de l'algorithme. On parle alors d'une **méthode de prédiction-correction**.

Exemple 4

Soit l'équation différentielle $y'(t) = -y(t) + t + 1$ avec la condition initiale $y(0) = 1$. En choisissant le pas $h = 0,1$

- Premier pas de temps : La méthode d'Euler explicite donne la prédiction \hat{y} de la solution

$$\hat{y} = 1 + 0,1(-1 + 0 + 1) = 1$$

La deuxième étape donne la correction suivante

$$y_1 = 1 + 0,05((-1 + 0 + 1) + (-1 + 0,1 + 1)) = 1,005$$

- Deuxième pas de temps : De même, la première étape de la deuxième itération donne

$$\hat{y} = 1,005 + 0,1(-1,005 + 0,1 + 1) = 1,0145$$

Et la correction conduit à son tour à

$$y_2 = 1,005 + 0,05((-1,005 + 0,1 + 1) + (-1,0145 + 0,2 + 1)) = 1,019025$$

On retrouve ainsi les mêmes résultats qu'avec la méthode de Taylor d'ordre 2. Cette similitude est exceptionnelle et est due au fait que les dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à 2 de la fonction $f(t, y)$ sont nulles. On peut montrer dans ce cas particulier que les méthodes de Taylor et d'Euler modifiée sont parfaitement équivalentes. **Ce n'est pas toujours le cas.**

Une autre méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 qui est très utilisée est la **méthode du point milieu**, qui correspond au choix suivant des coefficients a_i .

• 4.1.2 - Méthode du point milieu

En remplaçant les valeurs des coefficients $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{1}{2}$ et $a_4 = \frac{f(t_n, y(t_n))}{2}$ dans l'équation (7.10), on obtient l'algorithme de la Méthode du point milieu suivant.

Algorithme 4.2: Méthode du point milieu :

1. Étant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N
2. Pour $0 \leq n \leq N$:
 - * $k_1 = hf(t_n, y_n)$
 - * $y_{n+1} = y_n + h \left(f \left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2} \right) \right)$
 - * $t_{n+1} = t_n + h$
 - * Écrire t_{n+1} et y_{n+1}
3. Arrêt

Remarque(s) :

- L'algorithme précédent illustre bien pourquoi cette méthode est dite du point milieu. On remarque en effet que la fonction $f(t, y)$ est évaluée au point milieu de l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$.
- Les méthodes d'Euler modifiée et du point milieu étant du même ordre de troncature locale, leur précision est semblable. D'autres choix sont possibles pour les coefficients a_i , mais nous nous limitons aux deux précédents.

• 4.2 - Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

En reprenant le développement de Taylor de la fonction f , mais cette fois jusqu'à l'ordre 5, un raisonnement similaire à celui qui a mené aux méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 aboutit à la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, qui représente un outil d'une grande utilité.

Algorithme 4.3: Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

1. Étant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N
2. Pour $0 \leq n \leq N$:
 - * $k_1 = hf(t_n, y_n)$
 - * $k_2 = hf \left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2} \right)$
 - * $k_3 = hf \left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2} \right)$
 - * $k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)$
 - * $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
 - * $t_{n+1} = t_n + h$
 - * Écrire t_{n+1} et y_{n+1}
3. Arrêt

Remarque(s) : La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est très fréquemment utilisée en raison de sa grande précision qui est mise en évidence dans l'exemple suivant

Exemple 5

Soit de nouveau l'équation différentielle $y'(t) = -y(t) + t + 1$ avec la condition initiale $y(0) = 1$. Il suffit maintenant d'évaluer les différentes constantes k_i .

- À la première itération ($h = 0,1$), on a

$$k_1 = 0,1f(0;1) = 0,1(-1+1) = 0$$

$$k_2 = 0,1f(0+0,05;1+0) = 0,1(-1+1,05) = 0,005$$

$$k_3 = 0,1f(0+0,05;1+0,0025) = 0,1(-1,0025+1,05) = 0,00475$$

$$k_4 = 0,1f(0+0,1;1+0,00475) = 0,1(-1,00475+1,1) = 0,009525$$

ce qui entraîne que $y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0 + 2(0,005) + 2(0,00475) + 0,009525) = 1,0048375$.

- Une deuxième itération produit

$$\begin{aligned} k_1 &= 0,1f(0,1;1,0048375) \\ &= 0,1(-1,0048375 + 0,1 + 1) = 0,00951625 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= 0,1f(0,15;1,009595625) \\ &= 0,1(-1,009595625 + 0,15 + 1) = 0,014040438 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= 0,1f(0,15;1,011857719) \\ &= 0,1(-1,011857719 + 0,15 + 1) = 0,0138142281 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= 0,1f(0,2;1,018651728) \\ &= 0,1(-1,018651728 + 0,2 + 1) = 0,0181348272 \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $y_2 = 1,0048375 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,0187309014$.

Le tableau qui suit compare les solutions numérique et exacte et donne l'erreur absolue

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 $y'(t) = -y(t) + t + 1$			
t_i	Valeur exacte $y(t_i)$	Valeur approximative y_i	Erreur absolue $ y(t_i) - y_i $
0,0	1,0	1,0	0,0
0,1	1,004 837 4180	1,004 837 5000	$0,819 \times 10^{-7}$
0,2	1,018 730 7798	1,018 730 9014	$0,148 \times 10^{-6}$
0,3	1,040 818 2207	1,040 818 4220	$0,210 \times 10^{-6}$
0,4	1,070 320 0460	1,070 320 2889	$0,242 \times 10^{-6}$
0,5	1,106 530 6597	1,106 530 9344	$0,274 \times 10^{-6}$
0,6	1,148 811 6361	1,148 811 9343	$0,298 \times 10^{-6}$
0,7	1,196 585 3034	1,196 585 6186	$0,314 \times 10^{-6}$
0,8	1,249 328 9641	1,249 329 2897	$0,325 \times 10^{-6}$
0,9	1,306 569 6598	1,306 579 9912	$0,331 \times 10^{-6}$
1,0	1,367 879 4412	1,367 879 7744	$0,333 \times 10^{-6}$

- On constate que l'erreur se situe autour de 10^{-6} , ce qui se compare avantageusement avec les erreurs obtenues à l'aide de méthodes d'ordre moins élevé.
- On remarque également une légère croissance de l'erreur au fil des itérations, ce qui indique encore une fois une propagation de l'erreur d'une itération à l'autre.

Remarque(s) :

- On a constaté que plus l'ordre d'une méthode est élevé, plus cette méthode est précise.
- Par contre, plus l'ordre de la méthode est élevé, plus elle est coûteuse en temps de calcul. Par exemple, la méthode d'Euler explicite (d'ordre 1) ne nécessite qu'une seule évaluation de la fonction $f(t, y)$ à chaque pas de temps, alors que la méthode d'Euler modifiée (d'ordre 2) en demande 2 et que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 exige 4 évaluations de la même fonction.

En d'autres termes, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 demande à peu près deux fois plus de calculs que la méthode d'Euler modifiée et quatre fois plus que la méthode d'Euler explicite.

Question: N'est-t-il pas préférable d'utiliser la méthode d'Euler explicite avec un pas de temps 4 fois plus petit ou la méthode d'Euler modifiée d'ordre 2 avec un pas de temps 2 fois plus petit, plutôt que de se servir de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 ?

Exemple 6

On considère l'équation différentielle habituelle

$$y'(t) = -y(t) + t + 1 \quad (y(0) = 1)$$

où on fait recourt à 3 méthodes de résolution :

- La méthode d'Euler explicite avec un pas $h = 0,025$,
- la méthode d'Euler modifiée avec $h = 0,05$
- et la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec $h = 0,1$.

Ces valeurs de h permettent de comparer ces 3 méthodes sur la base de coûts de calculs à peu près équivalents. Le tableau suivant présente les résultats obtenus en $t = 1$ pour ces différents choix. La valeur exacte de la solution est $y(1) = 1,3678794412$.

Comparaison des différentes Méthodes :				
$y'(t) = -y(t) + t + 1$				
Méthode	h	Nombre de pas	Résultat	Erreur
Euler explicite	0,025	40	1,363 232 374 17	$0,464 \times 10^{-2}$
Euler modifié	0,05	20	1,368 038 621 67	$0,159 \times 10^{-3}$
Runge-Kutta	0,1	10	1,367 879 774 41	$0,333 \times 10^{-6}$

Les résultats sont éloquents. Même en prenant un pas de temps quatre fois plus petit, la méthode d'Euler explicite reste très imprécise par rapport à celle de Runge-Kutta d'ordre 4. On peut porter le même jugement sur la méthode d'Euler modifiée.

Note: Il est donc généralement préférable d'utiliser des méthodes d'ordre aussi élevé que possible.

5 Systèmes d'équations différentielles

Les méthodes de résolution d'équations différentielles ordinaires abordées antérieurement sont aussi applicables dans le cas de systèmes d'équations différentielles. Considérons la forme générale d'un système de m équations différentielles avec conditions initiales

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) & (y_1(t_0) = y_{1,0}) \\ y_2'(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) & (y_2(t_0) = y_{2,0}) \\ y_3'(t) = f_3(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) & (y_3(t_0) = y_{3,0}) \\ \vdots \\ y_m'(t) = f_m(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) & (y_m(t_0) = y_{m,0}) \end{cases} \quad (7.12)$$

Vectoriellement, le système (7.12) peut être écrit sous la forme

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases} \quad (7.13)$$

où les vecteurs $\vec{y}'(t)$, $\vec{f}(t, \vec{y}(t))$ et \vec{y}_0 , tous de longueur m , découlent directement de système (7.12)

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ \vdots \\ y_m'(t) \end{pmatrix} \quad \vec{f}(t, \vec{y}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \\ f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \\ f_3(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \\ \vdots \\ f_m(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \end{pmatrix} \quad \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ y_{3,0} \\ \vdots \\ y_{m,0} \end{pmatrix}$$

Remarque(s) :

- On note $y_i(t_n)$, la valeur exacte de la i^e variable dépendante en $t = t_n$ et $y_{i,n}$, son approximation numérique.
- Les m équations du système (7.12) sont **couplées** en ce sens que l'équation différentielle régissant la variable dépendante $y_i(t)$ peut dépendre de toutes les autres variables dépendantes.
- Les m conditions initiales du système (7.12) assurent l'unicité de la solution.

Nous ne présentons que la méthode d'Euler explicite (malgré que sa précision se révèle souvent insuffisante) et celle de Runge-Kutta d'ordre 4.

5.1 - La méthode d'Euler explicite

La forme vectorielle (7.13) permet aux systèmes d'équations de généraliser toutes les méthodes numériques précédentes. En nous inspirant de la méthode d'Euler explicite de la section (2), on part de (t_0, \vec{y}_0) pour obtenir le schéma vectoriel d'Euler explicite suivant

$$\begin{cases} \text{Partant de } (t_0, \vec{y}_0), \\ \vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h\vec{f}(t_n, \vec{y}_n) \end{cases}$$

ou en développant avec $\vec{y}_{n+1} = (y_{1,n+1}, y_{2,n+1}, \dots, y_{m,n+1})$, on a

$$\begin{cases} \text{Partant de } (t_0, \vec{y}_0), \text{ on détermine } \vec{y}_{n+1} \text{ tel que} \\ y_{1,n+1} = y_{1,n} + hf_1(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{m,n}) \\ y_{2,n+1} = y_{2,n} + hf_2(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{m,n}) \\ \vdots \\ y_{m,n+1} = y_{m,n} + hf_m(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{m,n}) \end{cases} \quad (7.14)$$

Exemple 7

Soit le système de deux équations différentielles suivant

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) & (y_1(0) = 2) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) - y_1(t) & (y_2(0) = 1) \end{cases} \quad (7.15)$$

dont la solution analytique est (à vérifier en exercice)

$$y_1(t) = 2e^t - te^t$$

$$y_2(t) = e^t - te^t$$

et les fonctions $f_1(t, y_1(t), y_2(t))$ et $f_2(t, y_1(t), y_2(t))$ sont définies par

$$f_1(t, y_1(t), y_2(t)) = y_2(t)$$

$$f_2(t, y_1(t), y_2(t)) = 2y_2(t) - y_1(t)$$

et la condition initiale $(t_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = (0, 2, 1)$.

- Le premier pas de temps s'écrit tout de simplement, en prenant $h = 0.1$:

$$y_{1,1} = y_{1,0} + hf_1(t_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = 2 + 0.1f_1(0, 2, 1) = 2.1$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + hf_2(t_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = 1 + 0.1f_2(0, 2, 1) = 1.0$$

- Le deuxième pas de temps devient :

$$y_{1,2} = y_{1,1} + hf_1(t_1, y_{1,1}, y_{2,1}) = 2.1 + 0.1f_1(0.1, 2.1, 1) = 2.2$$

$$y_{2,2} = y_{2,1} + hf_2(t_1, y_{1,1}, y_{2,1}) = 1.0 + 0.1f_2(0.1, 2.1, 1) = 0.99$$

et ainsi de suite ...

5.2 - La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

En s'inspirant de la section (4) et de la forme (7.13), on définit la méthode vectorielle de Runge-Kutta d'ordre 4 en partant de (t_0, \vec{y}_0) et des constantes vectorielles $\vec{k}_i, i = 1, 2, 3, 4$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Partant de } (t_0, \vec{y}_0), \\ \text{On détermine } \vec{k}_1 = (k_{i,1})_{1 \leq i \leq m}, \\ \quad k_{i,1} = hf_i(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{m,n}) \\ \text{On détermine } \vec{k}_2 = (k_{i,2})_{1 \leq i \leq m}, \\ \quad k_{i,2} = hf_i(t_n + \frac{h}{2}, y_{1,n} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,n} + \frac{k_{2,1}}{2}, \dots, y_{m,n} + \frac{k_{m,1}}{2}) \\ \text{On détermine } \vec{k}_3 = (k_{i,3})_{1 \leq i \leq m}, \\ \quad k_{i,3} = hf_i(t_n + \frac{h}{2}, y_{1,n} + \frac{k_{1,2}}{2}, y_{2,n} + \frac{k_{2,2}}{2}, \dots, y_{m,n} + \frac{k_{m,2}}{2}) \\ \text{On détermine } \vec{k}_4 = (k_{i,4})_{1 \leq i \leq m}, \\ \quad k_{i,4} = hf_i(t_n + h, y_{1,n} + k_{1,3}, y_{2,n} + k_{2,3}, \dots, y_{m,n} + k_{m,3}) \\ \text{Et finalement, on calcule} \\ \quad y_{i,n+1} = y_{i,n} + \frac{1}{6} (k_{i,1} + 2k_{i,2} + 2k_{i,3} + k_{i,4}) \end{array} \right.$$

Remarque(s) : Il est nécessaire de calculer les m constantes $k_{i,1}$ avant de passer au calcul des constantes $k_{i,2}$ et ainsi de suite.

Exemple 8

Soit le système de deux équations différentielles suivant

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) & (y_1(0) = 2) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) - y_1(t) & (y_2(0) = 1) \end{cases} \quad (7.16)$$

dont la solution analytique est

$$y_1(t) = 2e^t - te^t$$

$$y_2(t) = e^t - te^t$$

et les fonctions $f_1(t, y_1(t), y_2(t))$ et $f_2(t, y_1(t), y_2(t))$ sont données comme suit

$$\begin{aligned} f_1(t, y_1(t), y_2(t)) &= y_2(t) \\ f_2(t, y_1(t), y_2(t)) &= 2y_2(t) - y_1(t) \end{aligned}$$

et la condition initiale $(t_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = (0, 2, 1)$. Si l'on prend par exemple $h = 0.1$, on trouve

$$k_{1,1} = 0.1(f_1(0, 2, 1)) = 0.1$$

$$k_{2,1} = 0.1(f_2(0, 2, 1)) = 0$$

$$k_{1,2} = 0.1(f_1(0.05, 2.05, 1.0)) = 0.1$$

$$k_{2,2} = 0.1(f_2(0.05, 2.05, 1.0)) = -0.005$$

$$k_{1,3} = 0.1(f_1(0.05, 2.05, 0.9975)) = 0.09975$$

$$k_{2,3} = 0.1(f_2(0.05, 2.05, 0.9975)) = -0.0055$$

$$k_{1,4} = 0.1(f_1(0.1, 2.09975, 0.9945)) = 0.09945$$

$$k_{2,4} = 0.1(f_2(0.1, 2.09975, 0.9945)) = -0.011075$$

$$y_{1,1} = y_{1,0} + \frac{1}{6}(0.1 + 2(0.1) + 2(0.09975) + 0.09945) = 2.099825$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{1}{6}(0 + 2(-0.005) + 2(-0.0055) + (-0.011075)) = 0.994651667$$

6 Équations d'ordre supérieur

Définition 6.1

La forme générale d'une équation différentielle d'ordre m avec conditions initiales est définie par le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(m)}(t) = g(t, y(t), y^{(1)}(t), y^{(2)}(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) \\ y(t_0) = c_1 \\ y^{(1)}(t_0) = c_2 \\ y^{(2)}(t_0) = c_3 \\ \vdots \\ y^{(m-2)}(t_0) = c_{m-1} \\ y^{(m-1)}(t_0) = c_m \end{array} \right. \quad (7.17)$$

Note: Ces conditions portent sur la fonction $y(t)$ et ses $(m-1)$ premières dérivées à $t = t_0$.

Exemple 9

- Exemple d'équation différentielle d'ordre 2

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(2)}(t) = -y^{(1)}(t) + (y(t))^2 + t^2 - 5 \\ y(0) = 1 \\ y^{(1)}(0) = 2 \end{array} \right. \quad (7.18)$$

où $g(t, y(t), y^{(1)}(t)) = -y^{(1)}(t) + (y(t))^2 + t^2 - 5$ et $t_0 = 0$.

- Exemple d'équation différentielle d'ordre 3

$$\begin{cases} y^{(3)}(t) = (y^{(2)}(t))^2 + 2y^{(1)}(t) + (y(t))^3 + t^4 + 1 \\ y(1) = 1 \\ y^{(1)}(1) = 0 \\ y^{(2)}(1) = 3 \end{cases} \quad (7.19)$$

où $g(t, y(t), y^{(1)}(t), y^{(2)}(t)) = (y^{(2)}(t))^2 + 2y^{(1)}(t) + (y(t))^3 + t^4 + 1$ et $t_0 = 1$.

Remarque(s) :

- La première dérivée de la variable $y(t)$ est notée $y'(t)$ ou $y^{(1)}(t)$ selon la situation.
- On se doit également de distinguer la dérivée seconde $y^{(2)}(t)$ du carré de la fonction $y(t)$, qui est noté $(y(t))^2$.

Proposition 6.1

L'équation différentielle (7.17) d'ordre m avec les m conditions initiales est équivalente au système de m équations d'ordre 1 suivant

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) & y_1(t_0) = c_1 \\ y_2'(t) = y_3(t) & y_2(t_0) = c_2 \\ \vdots & \\ y_{m-1}'(t) = y_m(t) & y_{m-1}(t_0) = c_{m-1} \\ y_m'(t) = g(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) & y_m(t_0) = c_m \end{cases} \quad (7.20)$$

Exemple 10

Soit l'équation différentielle d'ordre 2

$$\begin{cases} y^{(2)}(t) = -y^{(1)}(t) + (y(t))^2 + t^2 - 5 \\ y(0) = 1 \\ y^{(1)}(0) = 2 \end{cases}$$

La marche à suivre est de poser

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y(t) \\ y_2(t) &= y^{(1)}(t) \end{aligned}$$

pour transformer l'équation différentielle d'ordre 2 en un système de 2 équations différentielles du premier ordre

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) & (y_1(0) = 1) \\ y_2'(t) = -y_2(t) + (y_1(t))^2 + t^2 - 5 & (y_2(0) = 2) \end{cases} \quad (7.21)$$

EXERCICES SUGGÉRÉS DU MANUEL !

- Exercices ^a suggérés : 1-4, 7, 8, 12-14, 18-19, 21.
- Exercices fortement suggérés : 1, 4, 7, 8, 12, 21.

a. André Fortin : Analyse numérique pour ingénieurs, Presses Internationales Polytechnique 2016.

À RETENIR !

Je dois pouvoir répondre aux questions ^a suivantes :

- Je comprends le concept de schéma en temps.
- Je comprends la construction d'un schéma basé sur le dev. de Taylor

3. Je sais distinguer entre les schémas de type Runge-Kutta et ceux basés sur Taylor.
4. Je comprends l'origine du concept de famille de schéma pour Runge-Kutta
5. Je sais appliquer les différents schémas pour une EDO d'ordre 1.
6. Je sais appliquer les schémas sur un système d'EDO d'ordre 1.
7. Je sais transformer une EDO d'ordre supérieur en système d'EDO.

a. André Fortin : Analyse numérique pour ingénieurs, Presses internationales Polytechnique, Montréal, 2011.