UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Calcul Différentiel (MATH 1073) - Chap. 1: Fonctions et Modèles

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

- Ce chapitre est une introduction des fonctions comme objects de base au calcul différentiel.
- Nous examinerons:
  - Leur représentation graphique;
  - des façons de les transformer et de les composer;
- Nous insisterons sur les diverses représentations des fonctions:
  - Par une expression analytique;
  - par un tableau de valeurs;
  - par une courbe;
  - ou par une description verbale.

Sommaire

- Nous passerons en revue les types de fonctions et leur rôle comme modèle aux phénomènes issus de la réalité.

- Nous aborderons également l'utilisation des calculatrices (graphiques) ou des logiciels de dessin (sur ordinateurs).

- Nous verrons que la paramétrisation est la meilleur méthode d'obtenir le tracé de certaines courbes.

Quatre Manières de Présenter une Fonction

Situations

Il y a fonction dès qu'une quantité dépend d'une autre:

A L'aire A d'un cercle dépend du rayon r de ce cercle par la règle

$$A = \pi r^2$$

À chaque valeur positive de r est associée une valeur de A. On dit que A est une **fonction** de r.

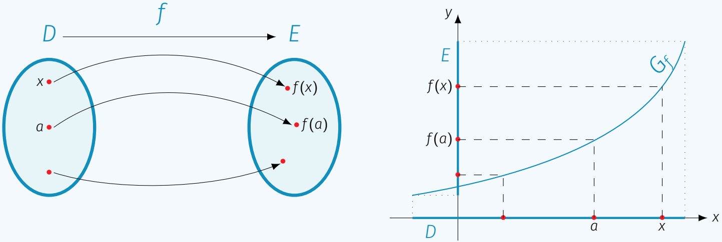
B Ce tableau donne une estimation de la population mondiale $P(t)$ à t.

Population $P(t)$ en millions	1 650	1 750	1 860	2 070	2 300	2 560	3 040	3 710	4 450	5 280	6 080
Année (t)	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000

À chaque valeur de la variable t correspond une valeur de P. On dit que P est une **fonction** de t.

Définition

- Une **fonction** f est une **règle** qui assigne à chaque élément x d'un ensemble D **exactement un élément**, noté $f(x)$, d'un ensemble E.



- L'ensemble D est appelé le **domaine de définition** de la fonction.

- L'ensemble de toutes les valeurs $f(x)$ possibles lorsque x parcourt le domaine de définition s'appelle l'**ensemble image**.

- **Variable indépendante**: C'est une variable qui peut prendre une valeur quelconque du *domaine de définition* de la fonction f.

- **Variable dépendante**: C'est une variable qui prend une valeur de l'*ensemble image* de f.

Exemple 1.1: Par exemple pour la situation A ci-dessus, c'est r qui est la variable indépendante et A est la variable dépendante.

- **Graphique**: C'est l'ensemble des couples d'entrée-sortie de la fonction

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

Exemple 1.2:

- Dessinez la courbe représentative de chaque fonction et déterminez le domaine de définition et l'ensemble image.

  - $f(x) = 2x - 1$
  - $g(x) = x^2$

- Calculer le quotient de différences suivant

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \text{où} \quad f(x) = 2x^2 - 5x + 1 \quad \text{et} \quad h \neq 0.$$

Exemple 1.3: Cherchez le domaine de définition de chaque fonction:

- $f(x) = \sqrt{x+2}$
- $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

Verbalement Présenter une fonction verbalement, c'est la décrire avec des mots.

Exemple 1.4:

- La règle utilisée par la poste pour déterminer le coût d'affranchissement $C(p)$ d'une lettre:
  - 83 centimes pour la première unité de poids (fixée ici à 20g).
  - 17 centimes de plus par unité (ou fraction d'unité) supplémentaire.
- On peut ainsi présenter la fonction $C(p)$, par le tableau des valeurs

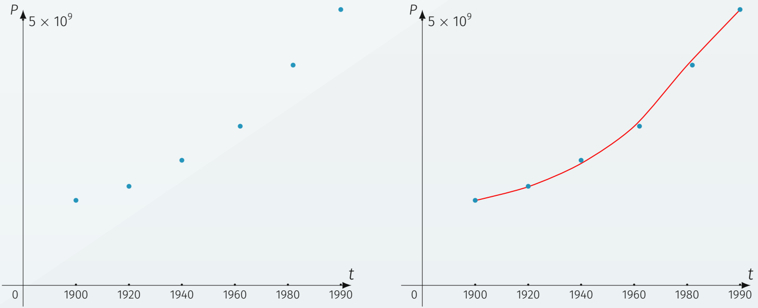
Coût $C(p)$ (en \$)	$0,83$	$1,00$	$1,17$	$1,34$	$1,51$	$\cdots$	$2,87$
Poids (p)	$0 < p \leq 1$	$1 < p \leq 2$	$2 < p \leq 3$	$3 < p \leq 4$	$4 < p \leq 5$	$\cdots$	$12 < p \leq 13$

Numériquement Présenter une fonction numériquement, c'est la présenter par un tableau de valeurs.

Exemple 1.5:

- ▷ La population mondiale $P(t)$ au temps t, décrite à la situation B, est un cas de description numérique d'une fonction.

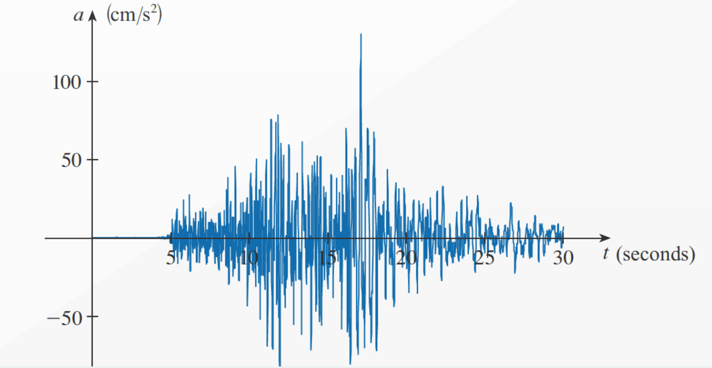
- ▷ En reportant les points sur le plan cartésien, nous obtenons



Visuellement Présenter une fonction visuellement, c'est la montrer par son graphique.

Exemple 1.6:

- L'accélération verticale $a(\cdot)$ du sol, mésurée par un séismographe durant un tremblement de terre, est présentée par le praphique



Algébriquement Présenter une fonction algébriquement, c'est la définir par une formule explicite.

Exemple 1.7:

- L'aire du cercle comme fonction du rayon, décrite à la situation A, est un cas de définition algébriquement d'une fonction

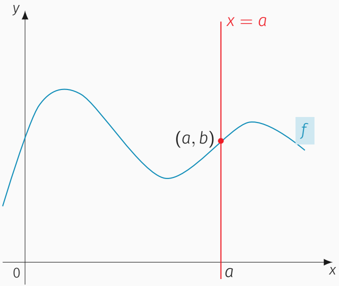
$$A(r) = \pi r^2$$

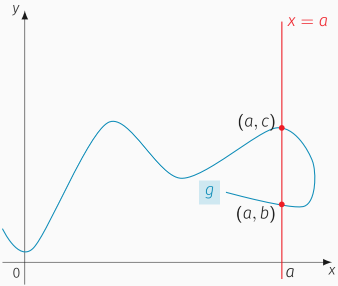
- Le domaine de définition de la fonction $A()$ est

$$\{r \mid r > 0\}$$

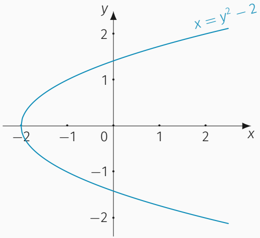
Test de la Droite Verticale

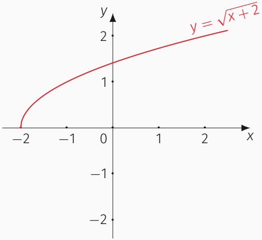
Une courbe du plan $0xy$ est la représentation graphique d'une fonction si et seulement si aucune droite verticale ne la coupe plus d'une fois.

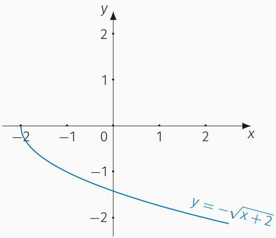




- Une courbe interceptée par une droite verticale $x = a$ en deux points (a, b) et (a, c) ou plus, ne peut être la représentation d'une fonction.







Pas le graphique d'une fonction!

Est le graphique d'une fonction!

Est le graphique d'une fonction!

Les fonctions des exemples suivants sont définies par différentes formules selon les parties de leur domaine de définition.

Exemple 1.8: Une fonction f est définie par

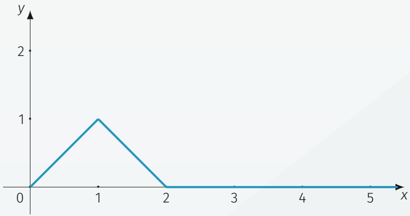
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calculez $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ et représentez la fonction praphiquement.

Exemple 1.9: Tracez le praphique de la fonction valeur absolue

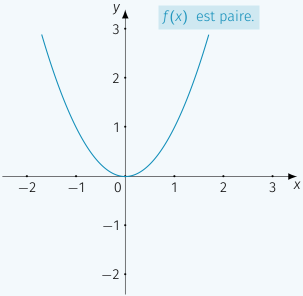
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple 1.10: Établissez une formule pour la fonction f dont le graphique est dessiné à la figure ci-dessous

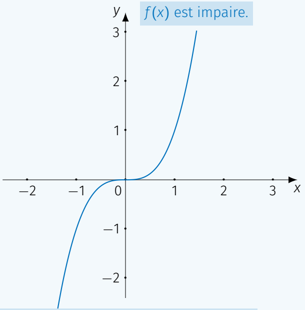


Symétries

- Une fonction f qui satisfait $f(x) = f(-x)$ pour toutes les valeurs de x de son domaine de définition est dite **paire**.



Symétrique par rapport à l'axe 0y



Symétrique par rapport à l'origine

- Une fonction f qui satisfait $f(x) = -f(-x)$ pour toutes les valeurs de x de son domaine de définition est dite **impaire**.

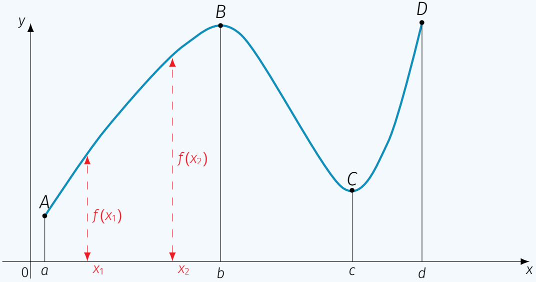
Exemple 1.11: Examinez si les fonctions que voici sont paires, impaires ou aucun des deux.

- $f(x) = x^5 + x$
- $g(x) = 1 - x^4$
- $h(x) = 2x - x^2$

Strictement Croissantes et Décroissantes

- La fonction f est dite **strictement croissante** sur l'intervalle I si

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ pour } x_1 < x_2 \text{ dans } I$$



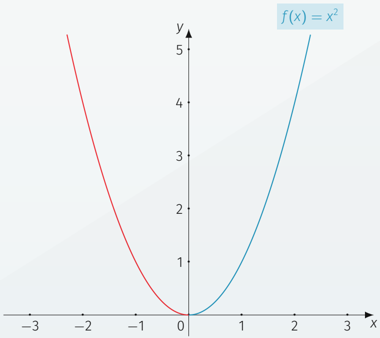
- La fonction f est **strictement décroissante** sur l'intervalle I si

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ pour } x_1 < x_2 \text{ dans } I$$

Note: L'élément important dans cette définition est que l'inégalité $f(x_1) < f(x_2)$ doit être satisfaite pour toute paire de points x_1 et x_2 de I qui sont tels que $x_1 < x_2$.

Exemple 1.12: La fonction $f(x) = x^2$ est:

- Strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.



- Strictement croissante sur l'intervalle $[0, -\infty[$.

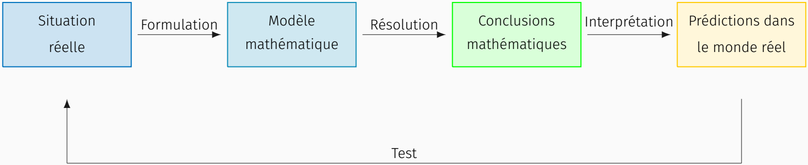
Modèles Mathématiques: Fonctions Essentielles

- Un **modèle mathématique** est une description mathématique d'un phénomène issu du monde réel.

- Cette description se traduit sous forme d'équations ou de fonctions.

- La construction d'un modèle vise à comprendre le phénomène afin de faire des prédictions.

- Le processus de modélisation peut être illustré comme suit:

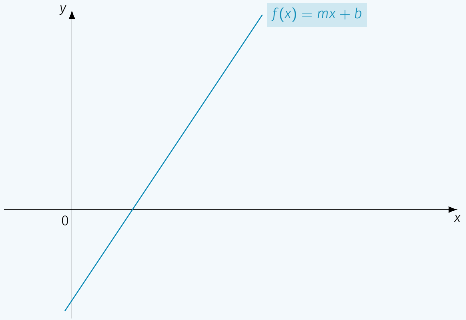


Fonction Affine

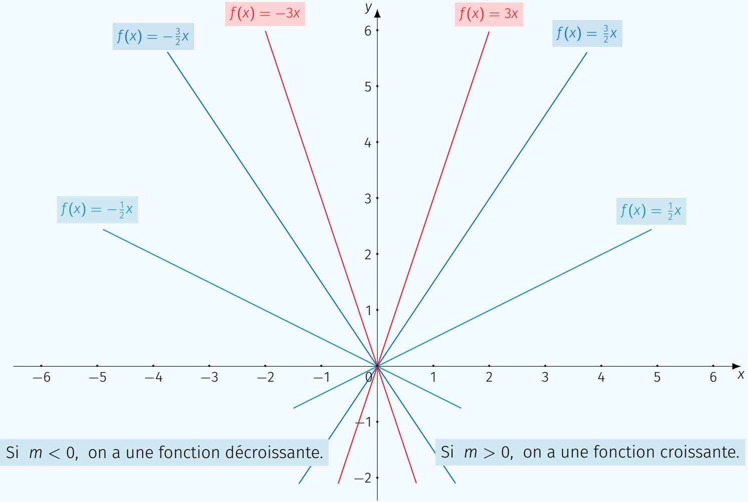
- Une **fonction affine** est une fonction que nous pouvons exprimer sous la forme

$$f(x) = mx + b \quad (\text{ou } y = mx + b), \tag{1}$$

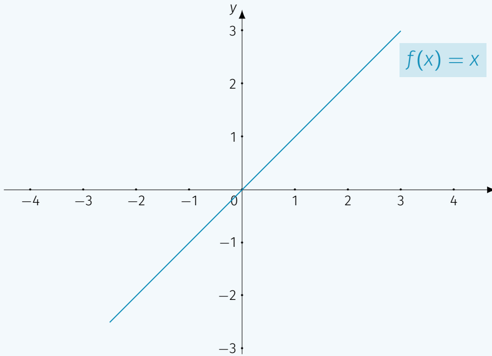
où m est la **pente** de la droite et b est l'**ordonnée à l'origine**.



- Si $b = 0$, alors $f(x) = mx$: cette fonction s'appelle aussi **fonction linéaire**.



- Si $m = 1$ et $b = 0$, alors $f(x) = x$: cette fonction s'appelle aussi **fonction identité**.



Note: Il arrive qu'on dise que y est une **fonction linéaire** de x, en voulant décrire le lien entre y et x qui est de la forme (1). Mais c'est juste un abus de language.

Fonctions Polynomiales

- Une fonction P est un polynôme lorsque

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

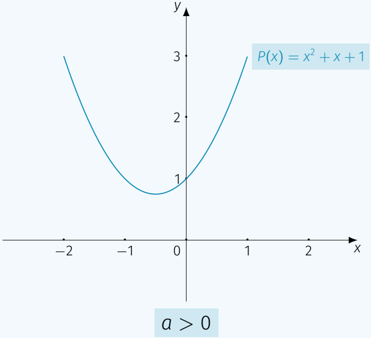
  où n est un entier positif et $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont des constantes, appelées **coefficients** du polynôme.

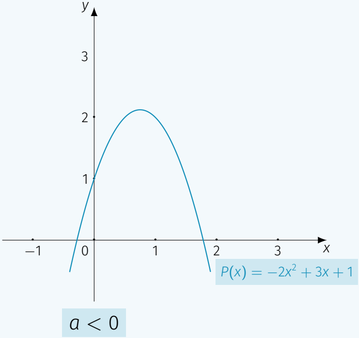
- Le domaine de définition de n'importe quel polynôme est $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

- L'indice n du premier coefficient a_n non nul donne le **degré** du polynôme.

- Un polynôme de degré 1 est de la forme $P(x) = mx + b$ et est appelé une **fonction affine**.

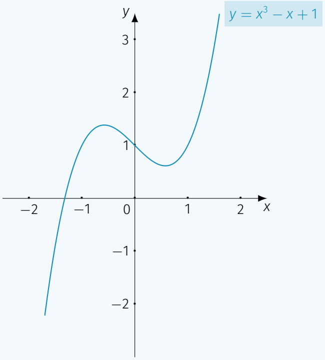
- Un polynôme de degré 2 est de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ et est appelé une **fonction quadratique**.



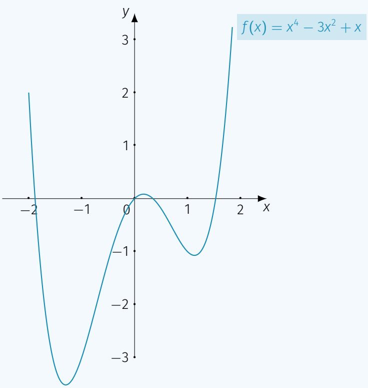


- Un polynôme de degré 3, encore appelé **fonction cubique**, est de la forme

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



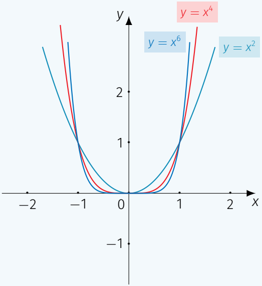
Polynôme de degré 3

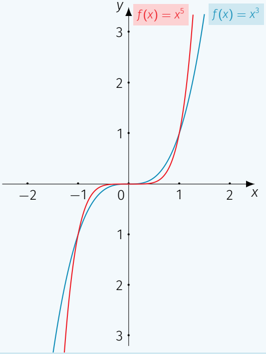


Polynôme de degré 4

- Une fonction de la forme $f(x) = x^a$, où a est une constante, est appelée une **fonction puissance**.

$a = n$, avec n entier positif

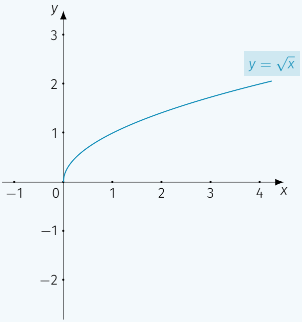




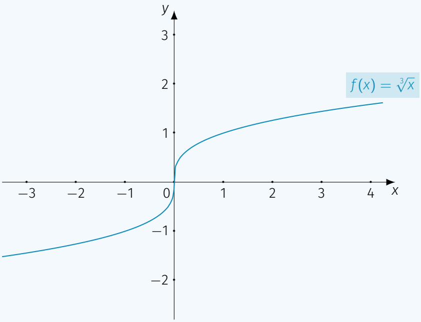
Si n est paire, donc $f(x) = x^n$ est paire.

Si n est impaire, donc $f(x) = x^n$ est impaire.

$a = \frac{1}{n}$, avec n entier positif La fonction $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ est une **fonction racine**.

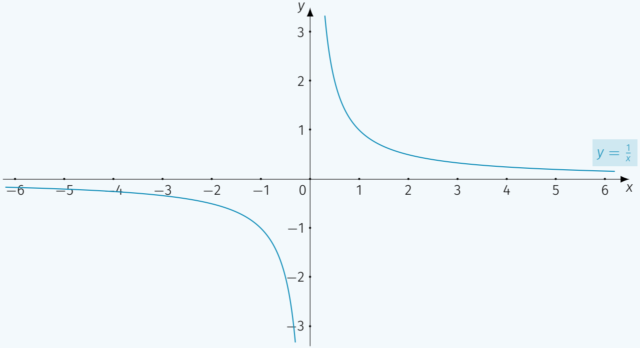


La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$



La fonction racine cubique $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$a = -1$ Le graphique de la **fonction inverse** $f(x) = x^{-1}$ est représenté à la figure ci-dessous.



Cette courbe a pour équation $y = 1/x$ ou $xy = 1$ et est une hyperbole équilatérale dont les axes de coordonnées sont les asymptotes.

Les fonctions Rationnelles

- Une **fonction rationnelle** f est un rapport de deux fonctions

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont des polynômes.

- Le domaine de définition comprend toutes les valeurs de x qui n'annulent pas $Q(x)$.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$$

Exemple 2.1: La fonction $f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$ est une fonction rationnelle dont le domaine de définition est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\}$.

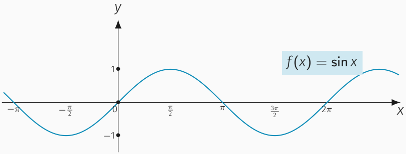
Les Fonctions Algébriques

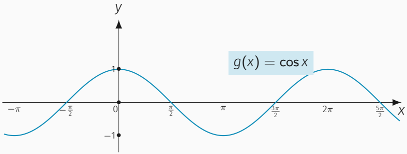
- Une fonction est dite **algébrique** si la formule qui la définit ne comporte que des opérations algébriques (addition, soustraction, multiplication, division et radicaux) sur des polynômes.
- Il est évident que toute fonction rationnelle est une fonction algébrique.

Exemple 2.2: Voici deux exemples de fonctions algébriques:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x+\sqrt{x}} + (x-2)\sqrt[3]{x+1}$$

- En analyse, le radian sert toujours d'unité de mesure pour les angles.
- Par exemple, si nous parlons de la fonction $f(x) = \sin x$, la mesure de l'angle x est en radian.





Propriétés des Fonction Sinus et Cosinus

- Le domaine de définition des fonctions sinus et cosinus est $]-\infty, +\infty[$. Et leur ensemble image est l'intervale $[-1, 1]$.

- Il s'en suit que, quel que soit x, on a les inégalités:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \qquad -1 \leq \cos x \leq 1$$

  ou en termes de valeur absolue, on a les inégalités:

$$|\sin x| \leq 1 \qquad |\cos x| \leq 1$$

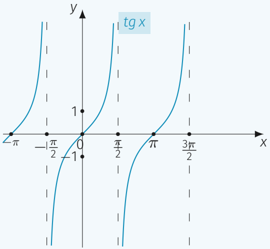
- Les fonction sinus et cosinus sont périodique, de période 2π.

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

Propriétés de la Fonction Tangente

- La fonction tangente est liée aux fonctions sinus et cosinus par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$



- La fonction tangente n'est pas définie lorsque $\cos(x) = 0$, c'est à dire $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \cdots$. Son ensemble image est $]-\infty, +\infty[$.

- La fonction tangente est aussi périodique, mais de période π

$$\tan(x+\pi) = \tan(x), \text{ quel que soit } x$$

Les Fonctions Exponentielles

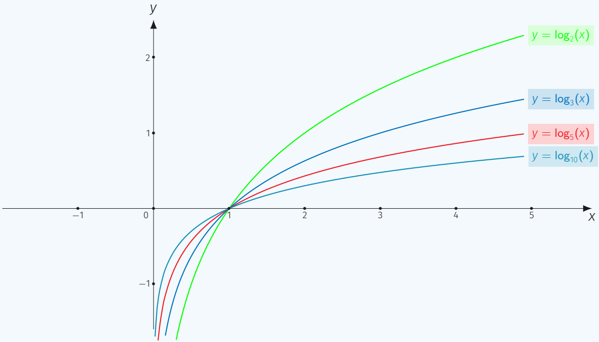
- Sont appelées **fonctions exponentielles** les fonctions de la forme $f(x) = a^x$, où la base a est une constante strictement positive.

- Dans les deux cas, leur domaine de définition est $]-\infty, +\infty[$ et l'ensemble image, $]0, +\infty[$.

- Ces fonction sont utilisées pour modéliser des phénomènes naturels comme la croissance d'une population ($a > 0$) et la désintégration radioactive ($a < 0$).

Les Fonctions Logarithmes

- Telles sont les fonctions $f(x) = \log_a x$, où la base a est une constante strictement positive.



- Elles sont les fonctions réciproques de fonctions exponentielles.

- Toutes ces quatre fonctions ont le même domaine de définition, $]0, +\infty[$, le même ensemble image, $]-\infty, +\infty[$.

Exemple 2.3: Classez les fonctions suivantes selon un des stypes de fonctions que nous avons cités.

- $f(x) = 5^x$
- $g(x) = x^5$
- $h(x) = \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$
- $u(t) = 1 - t + 5t^4$

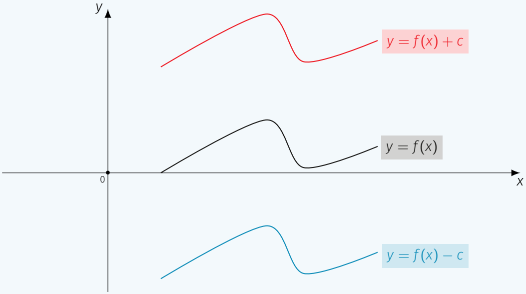
De Nouvelles Fonctions avec des Anciennes

- S’appyer sur les fonctions précedentes, pour en définir d’autres par:
  - Translation;
  - Compression et étirement;
  - Réflexion.
- Assembler deux fonctions par arithmétiques classiques et par composition.

A Soit $f(x)$ une fonction et c une constante telle que $c > 0$.

Déplacements Verticaux

- Pour obtenir le graphique de $y = f(x) + c$, déplacez le graphique de $y = f(x)$ de c unités vers le haut.



- Pour obtenir le graphique de $y = f(x) - c$, déplacez le graphique de $y = f(x)$ de c unités vers le bas.

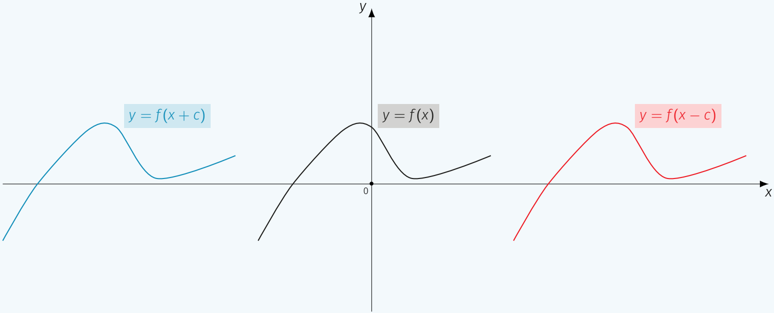
Exemple 3.1: Étant donné la représentation graphique de $f(x) = \sqrt{x}$, appliquez la transformation adéquate pour obtenir le graphique de

- $y = \sqrt{x} - 2$

- $y = \sqrt{x} + 2$

Déplacements Horizontaux

- Pour obtenir le graphique de $y = f(x - c)$, déplacez le graphique de $y = f(x)$ de c unités vers la droite.



- Pour obtenir le graphique de $y = f(x + c)$, déplacez le graphique de $y = f(x)$ de c unités vers la gauche.

Exemple 3.2: Étant donné la représentation graphique de $f(x) = \sqrt{x}$, appliquez la transformation adéquate pour obtenir le graphique de

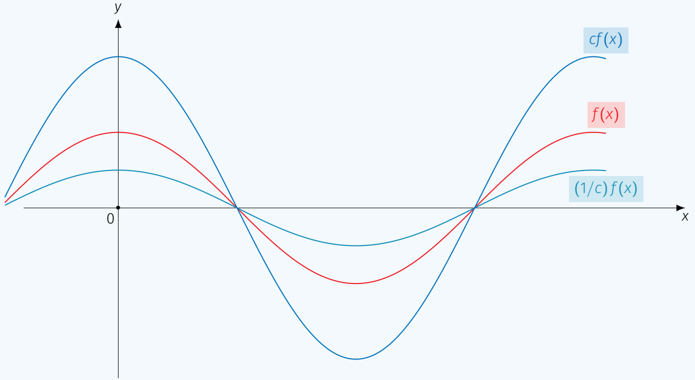
- $y = \sqrt{x-2}$

- $y = \sqrt{x+2}$

B Soit $f(x)$ une fonction et c une constante vérifiant $c > 1$.

Étirements et Réflexions Verticaux

- Pour obtenir le graphique de $y = cf(x)$, étirez verticalement le graphique de $y = f(x)$ d'un facteur c.



- Pour obtenir le graphique de $y = (1/c)f(x)$, comprimez verticalement le graphique de $y = f(x)$ d'un facteur c.

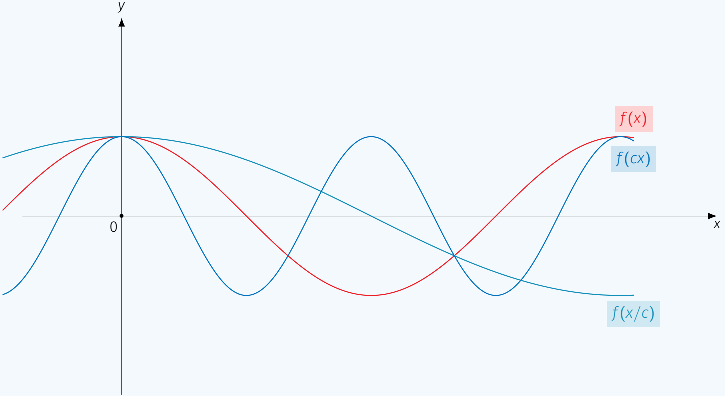
Exemple 3.3: Étant donné la représentation graphique de $f(x) = \sqrt{x}$, appliquez la transformation adéquate pour obtenir le graphique de

- $y = 2\sqrt{x}$

- $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

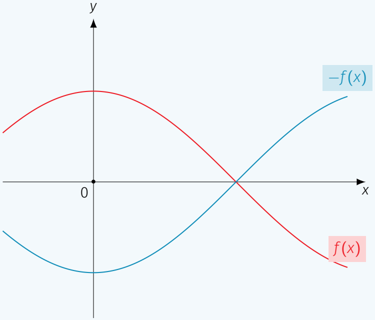
Étirements et Réflexions Horizontaux

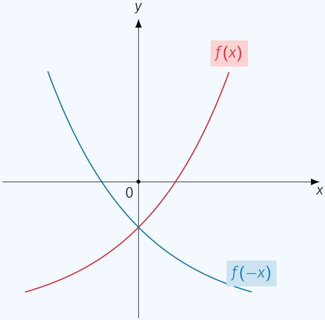
- Pour obtenir le graphique de $y = f(cx)$, comprimez horizontalement le graphique de $y = f(x)$ d'un facteur c.



- Pour obtenir le graphique de $y = f(x/c)$, étirez horizontalement le graphique de $y = f(x)$ d'un facteur c.

- Pour obtenir le graphique de $y = -f(x)$, prenez l'image symétrique du graphique de $y = f(x)$ par rapport à l'axe $0x$.





- Pour obtenir le graphique de $y = f(-x)$, prenez l'image symétrique du graphique de $y = f(x)$ par rapport à l'axe $0y$.

Exemple 3.4: Étant donné la représentation graphique de $f(x) = \sqrt{x}$, appliquez la transformation adéquate pour obtenir le graphique de

- $y = \sqrt{-x}$

- $y = -\sqrt{x}$

Exemple 3.5: Dessinez la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

- Tout comme on associe deux nombres réels par l'addition, la soustraction, la multiplication et la division,

- On peut assembler deux fonctions f et g pour former de nouvelles fonctions.

Fonction somme

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \text{ où } dom(f+g) = dom(f) \cap dom(g)$$

Exemple 3.6: Soit $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ et $g(x) = 3x^2$. On a $dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $dom(g) = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(f+g)(x) = f(x) + g(x) &= \frac{x+2}{x-1} + 3x^2 \\ &= \frac{x+2+3x^2(x-1)}{x-1} = \frac{3x^3 - 3x^2 + x + 2}{x-1}\end{aligned}$$

et donc $dom(f+g) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Fonction différence

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), \text{ où } dom(f-g) = dom(f) \cap dom(g)$$

Exemple 3.7: Soit $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ et $g(x) = 3x^2$. On a $dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $dom(g) = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (f-g)(x) = f(x) - g(x) &= \frac{x+2}{x-1} - 3x^2 \\ &= \frac{x+2-3x^2(x-1)}{x-1} = \frac{-3x^3+3x^2+x+2}{x-1} \end{aligned}$$

et donc $dom(f-g) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Fonction produit

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \text{ où } dom(fg) = dom(f) \cap dom(g)$$

Exemple 3.8: Soit $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ et $g(x) = 3x^2$. On a $dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $dom(g) = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(fg)(x) = (f(x))(g(x)) &= \left(\frac{x+2}{x-1}\right)(3x^2) \\ &= \left(\frac{3x^2(x+2)}{x-1}\right)\end{aligned}$$

et donc $dom(fg) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Fonction quotient

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ où } dom\left(\frac{f}{g}\right) = \Big(dom(f) \cap dom(g)\Big) \backslash \Big\{x \in dom(g) \mid g(x) = 0\Big\}$$

Exemple 3.9: Soit $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ et $g(x) = 3x^2$. On a $dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $dom(g) = \mathbb{R}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x+2}{x-1}}{3x^2}$$
$$= \frac{x+2}{x-1} \times \frac{1}{3x^2} = \frac{x+2}{3x^2(x-1)}$$

et donc $dom\left(\frac{f}{g}\right) = (\mathbb{R}\backslash\{1\}) \backslash \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 = 0\right\} = \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$.

Définition Étant données deux fonctions f et g, la fonction composée $f \circ g$ (appelée aussi la **composée** de f et g) est définie par:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

On peut représenter l'opération de composition par le diagramme

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & g(x) \arrow[r, "f"] & (f \circ g)(x) = f(g(x)) \end{tikzcd}$$

Exemple 3.10: Cherchez les forumles qui définissent les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$, si $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - 3$.

Attention !

L'opération de composition n'est pas commutative, c'est-à-dire que, de façon générale

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Le domaine d'une fonction composée

$$dom(g \circ f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \in dom(f) \text{ et } f(x) \in dom(g)\right\}$$
$$dom(f \circ g) = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \in dom(g) \text{ et } g(x) \in dom(f)\right\}$$

Exemple 3.11: Si $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{2-x}$, définissez chaque fonction et son domaine de définition.

- $f \circ g$
- $g \circ f$
- $f \circ f$
- $g \circ g$

Des Graphiques par Calculatrices et Ordinateurs

À lire

Fonctions Exponentielles

Définition Une **fonction exponentielle** est une fonction de la forme

$$f(x) = a^x \tag{2}$$

où a est une constante strictement positive. La fonction en (2) signifie:

- Quand $x = n$, où n est un **entier strictement positif**, alors

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$$

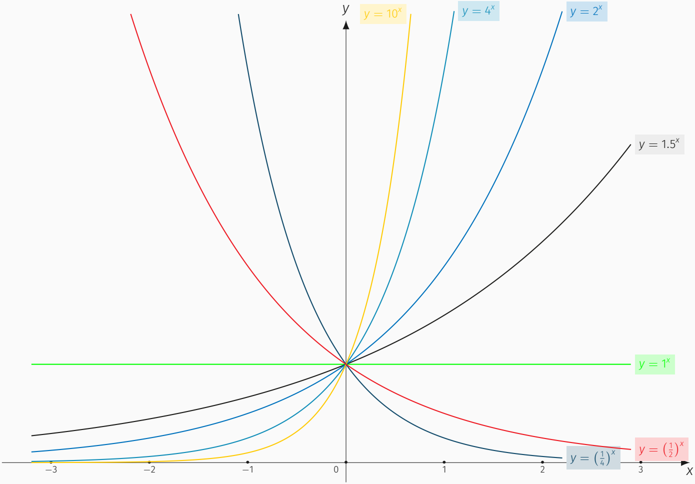
- Quand $x = -n$, où n est un **entier strictement positif**, alors

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Quand $x = 0$, alors $a^0 = 1$.
- Lorsque x est une nombre rationel, $x = \frac{p}{q}$ avec p et q des nombres entiers et $q > 0$, alors

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

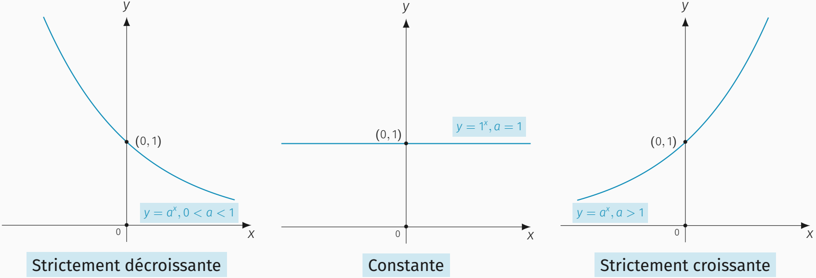
▷ Graphiques des fonctions de la famille $y = a^x$, pour différentes bases a.



Ces fonctions passent par le point $(0, 1)$ **car** $a^0 = 1$**,** $\forall\, a \neq 0$.

▷ La fonction exponentielle croît rapidement avec la base a ($\forall\, x > 0$).

▷ Il y a essentiellement 3 types de fonctions exponentielles $y = a^x$:



▷ Le domaine de définition de $y = a^x$ $(a \neq 1)$ est $\mathbb{R}$ et que l'ensemble image est $]0, +\infty[$.

▷ Les courbes représentives de $y = a^x$ et de $y = (1/a^x)$ sont symétriques par rapport à l'axe $0y$.

Note: En pratique, la base a est souvent choisie comme $a = e \approx 2.71828$.

Lois des Exposants

Soit a et b des nombres **strictement positifs** et x et y, des nombres réels quelconques.

1. $a^{x+y} = a^x a^y$

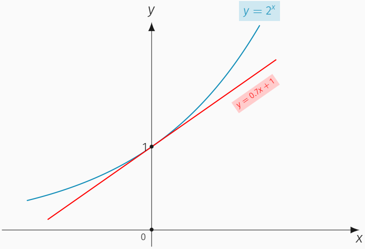
2. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

3. $(a^x)^y = a^{xy}$

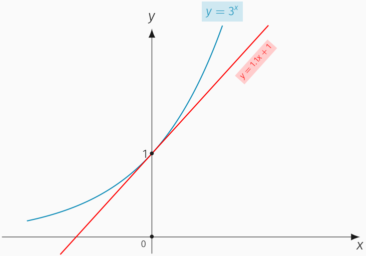
4. $(ab)^x = a^x b^x$

Exemple 5.1: Esquissez le graphique de $y = 3 - 2^x$ et déterminez son domaine de défnition et son ensemble image.

- Le choix de la base a, a quelque chose à voir avec la façon dont la courbe $y = a^x$ traverse l'axe $0y$.



Pente de la tangente au point $(0, 1)$**:** $m \approx 0.7$

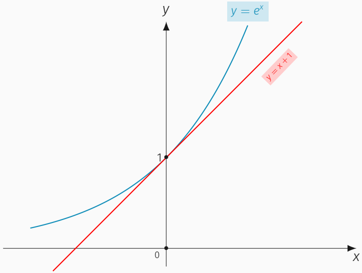


Pente de la tangente au point $(0, 1)$**:** $m \approx 1.1$

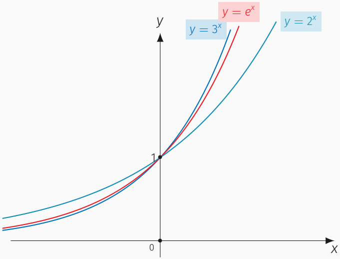
- La façon de traverser $0y$, est caractérisée par la tangente au point $(0, 1)$:
  - La pente au point $(0, 1)$ de la fonction $y = 2^x$ est $m \approx 0.7$;
  - La pente au point $(0, 1)$ de la fonction $y = 3^x$ est $m \approx 1.1$.

- Or, certaines formules de dérivation et d'intégration se simplifient grandement si la base a est telle que la pente de la tangente à $y = a^x$ en $(0, 1)$ est *exactement* égale à 1.

- Une telle base *existe* et est notée e.



Pente de la tangente au point $(0, 1)$: $m = 1$



Le nombre e entre les fonctions 3^x et 2^x

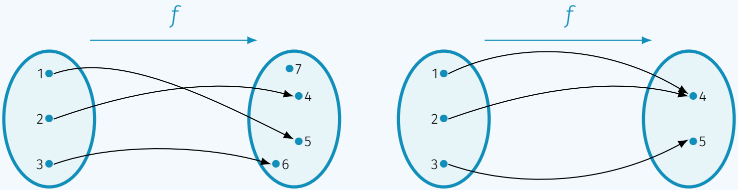
Exemple 5.2: Tracez la courbe représentative de la fonction $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ et déterminez le domaine de définition et la l'ensemble image de cette fonction.

Fonctions Réciproques et les Logarithmes

1 Définition

Une fonction est dite **injective** si elle ne prend jamais deux fois la même valeur; autrement dit

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ dès que } x_1 \neq x_2.$$

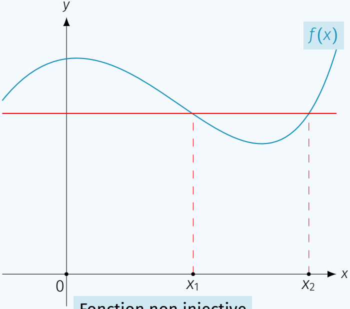


Fonction injective

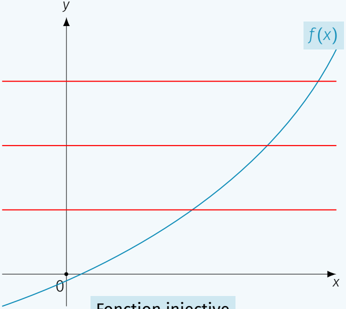
Fonction non injective

2 Test de la Droite Horizontale

Une fonction est injective si et seulement si aucune droite horizontale ne travers son graphique plus d'une fois.



Fonction non injective



Fonction injective

Exemple 6.1: Déterminez si les fonctions suivantes sont injectives:

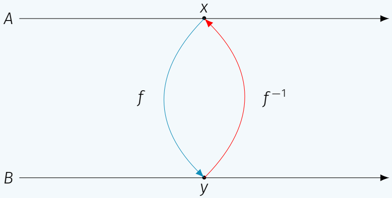
- $f(x) = x^3$
- $g(x) = x^2$

2 Définition

- Soit une fonction injective de domaine de définition A et d'ensemble image B. Alors, sa **fonction réciproque** a B comme domaine de définition et A comme ensemble image et est définie par

$$f^{-1}(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y \tag{3}$$

quel que soit y dans B.



- Domaine de définition de f^{-1} = ensemble image de f.

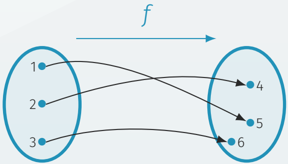
- Ensemble image de f^{-1} = Domaine de définition de f.

Exemple 6.2:

- Par exemple, la fonction réciproque de $f(x) = x^3$ est $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ parce que, si $y = x^3$, alors

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = \left(x^3\right)^{1/3} = x$$

- Déterminez la fonction réciproque de la fonction f suivante



Attention !

- Ne commettez pas l'erreur de prendre -1 dans f^{-1} comme un exposant:

$$f^{-1}(x) \text{ ne signifie pas } \frac{1}{f(x)}.$$

- Cela n'empêche pas d'écrire $1/f(x)$ sous la forme $[f(x)]^{-1}$.

5 Comment obtenir la fonction réciproque d'une fonction injective f

1. Écrire $y = f(x)$.

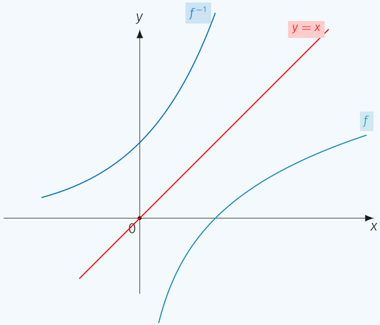
2. Résoudre (si possible) l'équation en x.

3. Échanger x et y afin d'exprimer f^{-1} comme une fonctione de x.

4. L'équation finale est $y = f^{-1}(x)$.

Exemple 6.3: Quelle est la fonction réciproque de $f(x) = x^3 + 2$?

- Le graphique de f^{-1} s'obtient en prenant l'image symétrique par rapport à la droite $y = x$ du graphique de f.



- On a les **équations d'annulation** suivantes

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \text{ pour tout } x \text{ dans } A. \\ f\left(f^{-1}(x)\right) &= x \text{ pour tout } x \text{ dans } B. \end{aligned} \qquad (4)$$

Exemple 6.4: Soit la fonction $f(x) = \sqrt{-1-x}$.

- ▷ Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$ et son ensemble image.
- ▷ Dessinez les graphiques de la fonction $f(x)$ et de sa réciproque dans le même repère.

Exemple 6.5: Déterminez la fonction réciproque de f si:

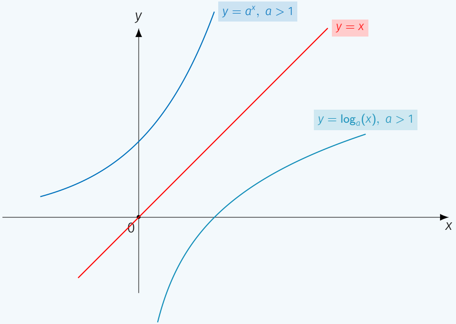
- $f(1) = 5, f(3) = 7, f(8) = -10$
- $f(x) = \frac{1}{x}$

6-7 Fonctions Logarithmes

Dans le cas où $a > 0$ et $a \neq 1$, la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ possède une fonction réciproque f^{-1} appelée **fonction logarithmique de base** a et noté $\log_a$.

- En adoptant l'écriture de la formule (3), nous avons

$$\log_a(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x \tag{5}$$



- Les équations d'annulation (4) appliquées aux fonctions $f(x) = a^x$ et $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ s'écrivent ici

$$\begin{aligned} \log_a(a^x) &= x \quad \text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} \\ a^{\log_a(x)} &= x \quad \text{pour tout } x > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

- Le domaine de définition de la fonction logarithme $\log_a$ est $[0, +\infty[$ et son ensemble image $\mathbb{R}$.

- Son graphique est l'image du graphique de $y = a^x$ par la réflexion d'axe $y = x$.

Note: Ainsi, lorsque $x > 0$, $\log_a(x)$ est l'exposant auquel il faut élever la base a pour obtenir x.

Exemple 6.6: Par exemple, $\log_{10}(0,001) = -3$ parce que $10^{-3} = 0,001$.

Lois des Logarithmes

Si x et y sont des nombres strictement positifs,

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$ (où r est un nombre réel quelconque)

Exemple 6.7: Employez les règles de calculs ci-dessus pour calculer $\log_2(80) - \log_2(5)$.

8-9 Les Logarithmes Naturels

- Le logarithme de la base e s'appelle **logarithme naturel** et reçoit une notation spéciale

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

- En posant $a = e$ et $\log_e = \ln$ dans la formule (5), nous avons

$$\ln(x) = y \quad \iff \quad e^y = x$$

et dans la formule (6), nous obtenons

$$\ln(e^x) = x \quad \text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}$$
$$e^{\ln(x)} = x \quad \text{pour tout } x > 0$$

- Dans le cas particulier $x = 1$, cela donne

$$\ln(e) = 1$$

Exemple 6.8: Calculez x étant donnée l'èquation $\ln(x) = 5$.

Exemple 6.9: Résolvez l'équation $e^{5-3x} = 10$.

Exemple 6.10: Écrivez avec un seul logarithme l'expression $\ln(a)+\frac{1}{2}\ln(b)$.

10 Formule de changement de base

Quel que soit a positif, $(a \neq 1)$,

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Note: La formule 10 rend possible le calcul, avec une calculatrice scientififque qui a la touche $\ln$, de tous les algorithmes, quelle que soit leur base.

Exemple 6.11: Déterminez la valeur de $\log_8(5)$ avec 6 décinmales correctes.

Exercices Suggérés

1. Soient les fonctions $f(x) = \sqrt{-x+5}$ et $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Déterminez la fonction composée $g \circ f$, de même que son domaine de définition.

2. Déterminez le domaine de définition des fonctions suivantes

   - $\star$ $f(x) = \sqrt{2x - 3 + |1 - x|}$
   - $\star$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x}}$
   - $\star$ $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x - 5}}$

3. Calculez $5\log_6(3) + 7\log_6(2) - \log_6(4)$.

4. Résoudre les équations suivantes:

- ⋆ $\ln(3x-10)=2$
- ⋆ $\ln(2x^2)-\ln(x)=1$
- ⋆ $27^{x-2}=3^{x^2}$
- ⋆ $25=5(5)^x(5)^{2x2}$

3. Calculez f^{-1} si

- ⋆ $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$
- ⋆ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

3. Soient les fonctions f et g définies par $f(x)=1-\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{1}{x}$. Déterminez les domaines de f, g, $f\circ g$ et $g\circ f$. Calculez $(f\circ g)(x)$ et $(g\circ f)(x)$.

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)
- Disponibilité:

  Lundi 13:00 - 15:00, MRR B-214

  Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214

  Jeudi 12:00 - 13:15, MRR B-214