APPROCHE GENERALE POUR LA VALORISATION DES TITRES CONTINGENTS

Ibrahima Dione (Ph.D.) & Van Son Lai (Ph.D., CFA)

Simulations Stochastiques et Applications en Finance

- Définitions
- Modèle Binomial de Cox, Ross, Rubinstein
- Modèle de Black-Scholes-Merton
- Dérivation de la Formule de Black-Scholes (Risque Neutralisé)

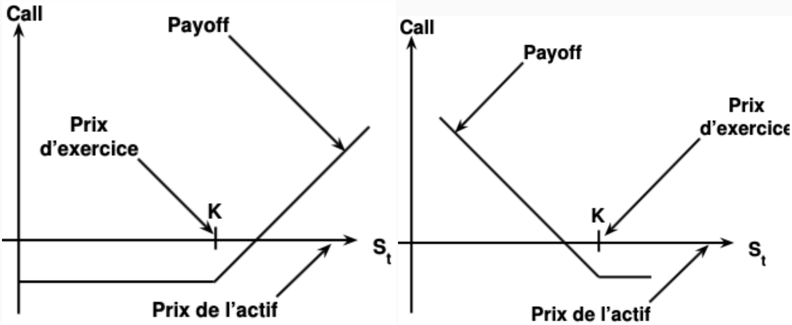
Définitions

- Une option est un actif financier ou réel qui donne le droit à son détenteur d'acheter ou de vendre un autre actif (appelé sous-jacent) à une date donnée (maturité) ou sur une période donnée, et à un prix prédéterminé (prix d'exercice).

- Une option d'achat (call) permet à son détenteur d'acheter l'actif sous-jacent au prix d'exercice avant ou à la date de maturité tandis qu'une option de vente (put) permet à son détenteur de vendre l'actif sous-jacent au prix d'exercice avant ou à la date de maturité.

- L'option est dite européenne si elle ne peut être exercée qu'à la date de maturité seulement et non avant. L'option est dite américaine si elle peut être exercée à n'importe quel moment avant sa date d'échéance, ou à sa date de maturité.

- En plus de ces options relativement simples, ils existent des options complexes communément appelées options exotiques. Cette classe comprend les options dites asiatiques, par exemple, dont les payoffs dépendent de la trajectoire du sous-jacent.



Option d’achat ou call (à gauche) et Option de vente ou put (à droite).

Modèle Binomial de Cox, Ross, Rubinstein

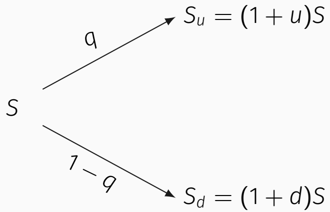
- Le modèle binomial de Cox, Ross, Rubinstein permet au lecteur de comprendre les concepts de risque neutre ou plutôt risque neutralisé.

- Dans le bon état, le prix de l'actif augmente à un taux u avec probabilité q et dans le mauvais état, il diminue à un taux d avec probabilité $(1 - q)$.

- Le prix de l'actif aujourd'hui est S.

- L'action ne paye pas de dividende.

- Le taux d'intérêt r est positif et constant, et $d < r < u$.



Prix d’une Option d’Achat (call)

- On considère une option d’achat sur l’actif S, de prix d’exercice K et dont le prix est C. À la fin de la période, les paiements possibles de l’option suivant le bon état et le mauvais état sont respectivement

$$
\begin{tikzcd}
 & C_u = \max\left(0, (1+u)S - K\right) \\
C \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\
 & C_d = \max\left(0, (1+d)S - K\right)
\end{tikzcd}
$$

- Nous allons montrer qu’il est possible de reproduire ces paiements futurs sur l’option à l’aide d’une combinaison adéquate d’obligations sans risque et de l’actif sous-jacent.

- Pour ce faire, considérons le portefeuille suivant formé de Δ nombres d’actions et d’un montant B d’obligations sans risque:

$$\begin{tikzcd}
 & \Delta(1+u)S+(1+r)B \\
\Delta S+B \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\
 & \Delta(1+d)S+(1+r)B
\end{tikzcd}$$

- Pour reproduire le call, il faut que

$$\begin{aligned} \Delta(1+u)S+(1+r)B &= C_u \\ \Delta(1+d)S+(1+r)B &= C_d \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} (1+u)S & 1+r \\ (1+d)S & 1+r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_u \\ C_d \end{pmatrix} \tag{1}$$

- On obtient la solution suivante

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} \quad \text{et} \quad B = \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)} \tag{2}$$

- Le prix de l'option devient

$$C = \Delta S + B = \frac{pC_u + (1-p)\,C_d}{1+r}, \quad \text{où} \quad p = \frac{r-d}{u-d} \tag{3}$$

Remarque(s) :

1. La probabilité de l'investisseur q n'apparait pas dans la formule (3). Ce qui est légitime car c'est une probabilité propre à chaque investisseur, alors que le prix de l'option est défini par le marché et est indépendant de l'attitude face au risque des acteurs.

2. Les paramètres p et $1 - p$ sont assimilable à des probabilités. De plus, ils sont définis indépendamment de l'investisseur et sont qualifiés de *probabilités risque neutres*.

3. Le paramètre p doit être interprété comme la probabilité d'une hausse dans un univers risque-neutre, de sorte que $1 - p$ est la probabilité d'une baisse dans ce même univers. p est la valeur que q doit avoir à l'équilibre si les investisseurs sont neutres au risque.

4. La valeur de l'option dépend seulement de la valeur de l'actif sous-jacent et des paramètres de marché, mais elle ne dépend pas explicitement aux autres facteurs comme le portefeuille de marché.

- Par induction, on peut généraliser le modèle à n périodes, on a

$$C = \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \max\left\{0, (1+u)^i (1+d)^{n-i} S - K\right\}}{(1+r)^n} \tag{4}$$

- L'expression $\max(\cdot)$ peut être éliminée en trouvant le plus petit entier a tel que

$$a \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S(1+d)^n}\right)}{\ln\left(\frac{1+u}{1+d}\right)} \tag{5}$$

- On obtient

$$C = \frac{\sum_{i=a}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \left((1+u)^i (1+d)^{n-i} S - K\right)}{(1+r)^n} \tag{6}$$

Modèle de Black-Scholes-Merton

▷ Soit S un actif dont le processus du prix suit un mouvement brownien géométrique

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{7}$$

Note: Dans cette équation différentielle stochastique, μ représente le rendement espéré instantané de l'actif, σ la volatilité instantanée de ses rendements, et W est un processus de Wiener standard.

▷ Le prix du titre contingent sur le sous-jacent S à la date t est noté par $F(S(t), t)$. La maturité du contrat est notée T. Si le titre est

- ⋆ un call, on a: $F(t, S) = \max(0, S_t - K)$
- ⋆ un put, on a: $F(t, S) = \max(0, K - S_t)$

▷ L'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton, représentant l'équation fondamentale d'évaluation des titres contingents avec la condition terminale $F(S(T), T)$, est donnée par

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F(t,S)}{\partial S^2} + rS\frac{\partial F(t,S)}{\partial S} + \frac{\partial F(t,S)}{\partial t} - rF = 0 \tag{8}$$

- Soit une option sur l'actif sous-jacent S de prix d'exercice K et de maturité T. Le prix du call européen est donnée

$$C(0,S) = S_0 N(d_1) - Ke^{-r(T-0)} N(d_2) \tag{9}$$

- Le prix du put européen est donnée par

$$P(0,S) = Ke^{-r(T-0)} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \tag{10}$$

où

$$d_1 = \frac{\ln\left(S_0/K\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma\right)(T-0)}{\sigma\sqrt{T-0}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-0} \tag{11}$$

- La parité put-call des options européennes est donnée par l'égalité

$$C(0,S) + D(0,S) + Ke^{-r(T-0)} = P(0,S) + S_0 \tag{12}$$

où D est le montant de dividende payé par l'actif sous-jacent.

- Le ratio de couverture DELTA (noté Δ) mesure la variation du prix de l'option à un changement du prix de l'actif sous-jacent. Pour l'option call ou put européen, le DELTA est donné par

$$\Delta = \frac{\partial C(t,S)}{\partial S} = N(d_1) > 0, \quad \Delta = \frac{\partial P(t,S)}{\partial S} = N(d_1) - 1 \qquad (13)$$

- Le coefficient VEGA mesure la sensibilité du prix de l'option à la variation de la volatilité des rendements du sous-jacent. Pour l'option call ou put européen, le VEGA est

$$\nu = \frac{\partial C(0,S)}{\partial \sigma} = S_t\sqrt{T-0}N'(d_1) \qquad (14)$$

- Le coefficient GAMMA mesure la sensibilité du DELTA de l'option au prix de l'actif ou encore la dérivée seconde du prix de l'option par rapport au prix de l'actif sous-jacent. Pour l'option call ou put européen, le VEGA est donné par

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C(0,S)}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S_t\sigma\sqrt{T-0}} \qquad (15)$$

Dérivation de la Formule de Black-Scholes (Risque Neutralisé)

- Sous la probabilité risque neutre, le prix de l'actif est donné par

$$S_T \equiv S(t, W_T) = S_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \widetilde{W}_T\right] \tag{16}$$

Note: Sous le principe risque neutralisé, le prix de l'option euro. est

$$C = E^Q[e^{-rT} \max(0, S(T) - K)]$$

$E^Q[\cdot]$ est l'opérateur espérance sous la probabilité risque neutre Q.

- On détermine le prix de l'option en calculant l'intégrale suivante

$$C(0, S) = e^{-rT} \int_K^{\infty} (S(T) - K) f_{S(T)}(s) ds \tag{17}$$

$$= e^{-rT} \int_{d_2^\star}^{\infty} \left(S_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}x\right] - K\right) f_X(x) dx \tag{18}$$

ou X suit une loi normale $N(0, 1)$ avec $d_2^\star = \frac{\ln(K/S_0) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma\right)(T-0)}{\sigma\sqrt{T-0}}$

- Ce prix devient finalement $C(0, S) = S_0 N(d_1) - Ke^{-r(T-0)} N(d_2)$.
- Pour lectures complémentaires: [5, 2, 1, 3, 4]

[1] H. J. C.
Options, futures and other derivatives.
Prentice Hall, 6th edition, 2018.

[2] R. S. R. M. Cox, J. C.
Option pricing : a simplified approach.
Journal of Financial Economics, pages 229–263, 1979.

[3] R. C. Merton.
Continuous-time finance.
Blackwell Publishers, 1992.

[4] S. Neftci.
An introduction to the mathematics of financial derivatives.
Academic Press, 2000.

[5] B. T.
Arbitrage theory in continuous time.
Oxford University Press, 1999.