UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Suites, séries, calcul dans $\mathbb{R}^n$ (MATH 2013) - Chapitre 2.2: Les séries de Taylor

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

- Les séries de Taylor et de MacLaurin
- Applications des polynômes de Taylor

Les séries de Taylor et de MacLaurin

- À la section précédente, nous avons trouvé des représentations en séries entières pour une certaine classe restreinte de fonctions [1].
- Dans cette section, nous étudions des problèmes plus généraux en répondant aux questions suivantes:
  - Quelles fonctions possèdent des représentations en séries entières?
  - Comment trouver de telles représentations?

- Soit f une fonction quelconque représentable par une série entière:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \ |x-a| < R. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

- On veut déterminer quels doivent être les coefficients c_n en termes de f.

- On remarque d'abord qu'en posant $x = a$ dans l'équation (1), tous les termes au-delà du premier sont nuls, et donc que

$$f(a) = c_0$$

- Selon le Chap2-1, on peut dériver la série de l'équation (1) terme à terme:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots, \ |x-a| < R. \qquad (2)$$

- ▷ La substitution $x = a$ dans l'équation (2) donne

$$f'(a) = c_1.$$

- ▷ En dérivant les deux membres de l'équation (2), on trouve

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots, \quad |x-a| < R. \tag{3}$$

- ▷ En posant de nouveau $x = a$ dans l'équation (3), on obtient

$$f''(a) = 2c_2.$$

- ▷ On répète ce processus encore une fois. La dérivation de la série de l'équation (3) donne

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x-a)^2 + \cdots, \quad |x-a| < R \tag{4}$$

- ▷ et la substitution $x = a$ dans l'équation (4) donne

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3.$$

- Si on continue à dériver et à substituer $x = a$, on obtient

$$f^{(n)}(a) = 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n c_n = n! c_n.$$

- La résolution de cette équation pour le n-ième coefficient c_n donne

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

- Cette formule reste valide même pour $n = 0$ si on adopte les conventions $0! = 1$ et $f^{(0)} = f$. On a donc démontré le théorème suivant.

Théorème

- Si f possède une représentation en série entière en a, c'est-à-dire si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad |x-a| < R, \tag{5}$$

alors ses coefficients sont donnés par la formule

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{6}$$

▷ En remplaçant c_n par la formule (6) dans la série (5) du théorème, on voit que si f possède un développement en série entière en a:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (7) \\
&= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots .
\end{aligned}
$$

Note: La série de l'équation (7) est appelée **série de Taylor de la fonction f en a** (ou **autour de a** ou **centrée en a**).

▷ Pour le cas particulier $a = 0$, la série de Taylor devient:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots . \tag{8}$$

Note: Ce cas survient si fréquemment qu'on lui a donné le nom particulier de **série de MacLaurin**.

Remarque : On a montré que si f peut être représentée sous la forme d'une série entière autour de a, alors f est égale à la somme de sa série de Taylor pour certaines valeurs de x. Cependant, il existe des fonctions qui ne sont pas égales à la somme de leur série de Taylor.

Exemple 1.1: Déterminons la série de MacLaurin de la fonction $f(x) = e^x$ et son rayon de convergence.

- Si $f(x) = e^x$ alors $f^{(n)}(x) = e^x$, il s'ensuit que $f^{(n)}(0) = 1$ pour tout n.

- Par conséquent, la série de Taylor de f en 0 (c'est-à-dire la série de MacLaurin) est
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

- Pour trouver le rayon de convergence, on pose $a_n = x^n/n!$. Alors,
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1, \text{ lorsque } n \to \infty$$

- La série converge pour tout x et son rayon de convergence $R = \infty$.

Si e^x possède un développement en série entière en 0, alors
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

▷ Dans quelles circonstances la fonction f, si elle possede des dérivées de tous les ordres (n) en a, est-elle égale à la somme de sa série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \ ?$$

▷ Il faut que f soit égale la limite de la suite des sommes partielles $T_n(x)$:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Définition

T_n est un polynôme de degré n, appelé **polynôme de Taylor de degré n de la fonction f en a**. Dans le cas où $a = 0$, ce polynôme de Taylor s'écrit

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$

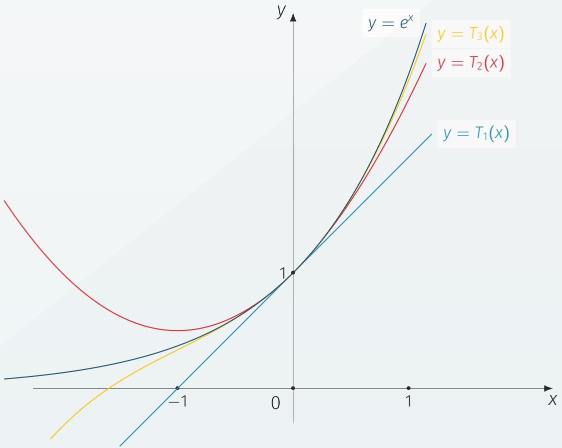
et est appelé **polynôme de Maclaurin de degré n de la fonction f**.

Exemple 1.2: Pour la fonction $f(x) = e^x$ de l'exemple précédent:

- Nous avons les polynômes de MacLaurin de degrés $n = 1, 2$ et 3:

$$T_1(x) = 1 + x, \quad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}, \quad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

.



- En général, $f(x)$ est égale à la somme de sa série de Taylor si

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

- Si on pose $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, de sorte que $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, alors $R_n(x)$ est appelé le reste de la série de Taylor.

Théorème

Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, où T_n est le polynôme de Taylor de degré n de f en a, et si

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

pour $|x-a| < R$, alors la fonction f est égale à la somme de sa série de Taylor sur l'intervalle $|x-a| < R$.

▷ Pour montrer que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pour une fonction particulière f, on utilise habituellement le résultat suivant.

L'inégalité de Taylor

Si $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$ pour $|x-a| \leq d$, alors le reste $R_n(x)$ de la série de Taylor satisfait à l'inégalité

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}, \quad \text{pour } |x-a| \leq d. \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \quad \text{pour tout nombre réel } x. \tag{10}$$

Proof.
Le résultat (10) découle du fait que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout x, et donc $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. □

Exemple 1.3: Démontrons que e^x est égal à la somme de sa série de MacLaurin.

- Si $f(x) = e^x$, alors $f^{(n+1)}(x) = e^x$ pour tout n.
- Si d est n'importe quel nombre positif et si $|x| \leq d$, alors
$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = e^x \leq e^d,$$
car l'exponentielle est une fonction croissante.
- Par conséquent, selon l'inégalité de Taylor avec $a = 0$ et $M = e^d$,
$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1}, \text{ pour } |x| \leq d.$$
- La même constante $M = e^d$ convient pour tout n. Or, selon (10),
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$
- Selon le théorème du sandwich, on a donc $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$.
- Par suite, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pour $|x| \leq d$ et pour tout d.

▷

D'après le théorème précédent, e^x est donc égal à la somme de sa série de MacLaurin:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{pour tout } x. \tag{11}$$

▷ A la place de l'inégalité de Taylor, les formules suivantes peuvent être utilisées pour déterminer le reste $R_n(x)$.

Forme intégrale du reste

Si $f^{(n+1)}$ est continue sur un intervalle I et si $x \in I$, alors Le reste $R_n(x)$ de la série de Taylor est déterminé par

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Cette formule est encore appelée la formule de Cauchy.

Forme de Lagrange du reste

Si $f^{(n+1)}$ est continue sur un intervalle I et si $x \in I$ avec $x \neq a$, alors le reste $R_n(x)$ de la série de Taylor est déterminé par

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Exemple 1.4: Trouvons la série de Taylor de $f(x) = e^x$ en $a = 2$.

- On a $f^{(n)}(2) = e^2$ et donc, en posant $a = 2$ dans la définition (7) d'une série de Taylor, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n.$$

- On peut vérifier, comme à l'exemple 1.1, que le rayon de convergence est $R = \infty$.

- ▷ Comme à l'exemple précédent, on peut montrer que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

- ▷ Et donc, la fonction $f(x) = e^x$ s'écrit comme suit

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n, \quad \text{pour tout } x. \tag{12}$$

- On a trouvé deux développements en série entière de e^x, la série de MacLaurin de l'équation (11) et la série de Taylor de l'équation (12).

- La première est plus appropriée si on s'intéresse aux valeurs de x près de 0 , et la deuxième convient mieux si x est proche de 2 .

Exemple 1.5: Trouvons la série de MacLaurin de $\sin x$ et démontrons qu'elle est égale à $\sin x$ pour tout x.

- Calculons les premières dérivées de la fonction $f(x) = \sin(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & f(0) &= 0\\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0\\
f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1\\
f^{(4)}(x) &= \sin x & f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

- Comme les dérivées se répètent en un cycle de longueur quatre, on peut écrire la série de MacLaurin sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
&f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots\\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

Remarque : On peut également montrer par récurrence que

$$f^{2n}(0) = 0, \quad \text{et} \quad f^{2n+1}(0) = (-1)^n, \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

▷ Puisque $f^{(n+1)}(x)$ est égal à $\pm \sin x$ ou $\pm \cos x$, on sait que

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq 1, \quad \text{pour tout } x.$$

▷ On peut donc prendre $M = 1$ dans l'inégalité de Taylor (9)

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

▷ Selon l'équation (10) , le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 lorsque $n \to \infty$;

▷ il s'ensuit que $|R_n(x)| \to 0$ d'après le théorème du sandwich.

▷ On a donc $R_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$ et, par conséquent, $\sin x$ est égal à la somme de sa série de MacLaurin, en vertu du théorème précédent.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ pour tout } x \qquad (13)$$

Exemple 1.6: Trouvons la série de MacLaurin de $\cos x$.

- On peut procéder directement comme à l'exemple précédent!

- Mais il est plus facile de dériver la série de MacLaurin de $\sin x$ donnée par l'équation (13) comme suit:

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)\\ &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\end{aligned}$$

- Comme la série de MacLaurin de $\sin x$ converge pour tout x, on sait, grâce au chap 2-1, que la série dérivée représentant $\cos x$ converge elle aussi pour tout x.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{pour tout } x. \qquad (14)$$

Exemple 1.7: Trouvons la série de MacLaurin de $f(x) = (1+x)^k$, où $k \in \mathbb{R}$.

- Calculons les premières dérivées de la fonction $f(x)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^k & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= k(1+x)^{k-1} & f'(0) &= k \\
f''(x) &= k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) &= k(k-1) \\
f'''(x) &= k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k-1)(k-2) \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(n)}(x) &= k(k-1)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} & f^{(n)}(0) &= k(k-1)\cdots(k-n+1)
\end{aligned}$$

- Par conséquent, la série de MacLaurin de $f(x) = (1+x)^k$ est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n.$$

- Cette série est appelée **série binomiale**. Notons a_n son $n^{\text{ième}}$ terme:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{k(k-1)\cdots(k-n+1)x^n}\right| \\
&= \frac{|k-n|}{n+1}|x| = \frac{\left|1-\frac{k}{n}\right|}{1+\frac{1}{n}}|x| \to |x| \text{ lorsque } n \to \infty.
\end{aligned}$$

▷ Donc, la série binomiale converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.

- La notation habituelle des coefficients de la série binomiale est

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}.$$

- Et ces nombres sont appelés coefficients binomiaux.

Théorème de la série binomiale

Si k est un **nombre réel** quelconque et si $|x| < 1$, alors

$$\begin{aligned}(1+x)^k &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n \\ &= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Exemple 1.8: Trouvons la série de MacLaurin de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$$

et son rayon de convergence.

- On écrit $f(x)$ sous une forme adéquate à l'utilisation de la série binomiale:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}.$$

- Dans la série binomiale, on pose $k = -\frac{1}{2}$ et remplace x par $-x/4$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{4-x}} &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^{n} \\
&= \frac{1}{2}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^{2}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^{3}+\cdots\right. \\
&\quad \left.+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^{n}+\cdots\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{8}x+\frac{1\times 3}{2!8^2}x^2+\frac{1\times 3\times 5}{3!8^3}x^3+\cdots+\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{n!8^n}x^n+\cdots\right]
\end{aligned}$$

- Cette série converge si $\left|\frac{-x}{4}\right| < 1$, c'est-à-dire $|x| < 4$. Le rayon de convergence est donc $R = 4$.

Tableau de quelques séries importantes de MacLaurin

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

Exemple 1.9: Déterminer la série de Maclaurin de $\arcsin(x)$.

- Puisque $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, commençons par déterminer la série de Maclaurin de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-1/2}$.

- Pour cela, en utilisant la série du binôme avec $k = -\frac{1}{2}$ et en remplaçant x par $-x^2$, on obtient

$$\left(1-x^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} x^{2n},$$

où $\left|-x^2\right| < 1$, c'est-à-dive $|x| < 1$.

- Comme $\binom{\frac{-1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $\binom{\frac{-1}{2}}{0} = 1$, on a:

$$\left(1-x^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{n!} x^{2n}, \text{ et donc}$$

$$\left(1-x^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1)}{n! 2^n} x^{2n},$$

avec la convention que pour $n = 0$, le coefficient est 1.

- Donc, on intégrant terme à terme cette série, on obtient

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n! 2^n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C.$$

- D'autre part, $\arcsin(0) = 0 \Rightarrow c = 0$. Et donc, on obtient

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n! 2^n (2n+1)} x^{2n+1}, \text{ pour tout } |x| < 1,$$

avec la convention que pour $n = 0$, le coefficient devant x est 1,

- ou bien

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{n! 2^n (2n+1)} x^{2n+1}, \ |x| < 1.$$

Applications des polynômes de Taylor

- Les séries entières permettent de calculer des approximations de valeurs de fonctions.

Exemple 2.1:

a. En utilisant la troisième somme partielle de la série de Maclawin de $\ln(1+x)$, calculer une approximation de $\ln(1,1)$.

b. Estimer l'erreur commise en utilisant l'approximation en a.

Réponse:

a. - Rappelons que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \ x \in]-1,1], \ \text{donc}$$

$$\ln(1,1) = \ln(1+0,1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (0,1)^n$$

- En utilisant la 3ième somme partielle de cette série, on obtient l'approximation suivante:

$$\ln(1,1) \approx \sum_{k=1}^{3} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(0,1)^k = 0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3}$$

- et donc $\ln(1,1) \approx 0,0953$.

b.

- Puisque la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(0,1)^n$$

est alternée, on a

$$|\ln(1,1) - 0,0953| = |s - s_3| \leqslant \frac{(0,1)^4}{4} = 0,000025.$$

- Comme $0,000025 < 0,00005 = 0,5 \times 10^{-4}$, l'approximation $\ln(1,1) \approx 0,0953$ est correcte à quatre décimales.

Remarque :

- On pourrait aussi utiliser $R_3(x)$ pour estimer cette erreur.

- En effet, à partir de la forme de Lagrange du reste on a

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4, \text{ où } f(x) = \ln(1+x) \text{ et } z \text{ est situé entre } 0 \text{ et } x.$$

Or $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$, $x = 0,1$, et $0 < z < 0,1$, ainsi on a $\left|f^{(4)}(z)\right| \leqslant 6$.

$$\text{D'où } |R_3(0,1)| \leqslant \frac{6}{4!}(0,1)^4 = \frac{(0,1)^4}{4}.$$

- Les séries entières permettent de calculer l'intégrale de fonctions dont les primitives ne peuvent pas être exprimées en termes de fonctions connues.

Exemple 2.2:

a. Ecrive un développement en série entière de $\int e^{-x^2}dx$.

b. En utilisant la $4^{\text{ième}}$ somme partielle de la série trouvée en a. , calculer une approximation de $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ et estimer l'erreur commise.

Réponse:

a.
- ▷ Signalous qu'on ne peut pas exprimer $\int e^{-x^2}dx$ en termes de fonctions connues.
- ▷ Commençons par déterminer la série de Maclaurin de e^{-x^2}.
- ▷ Pour cela, reprenons la série de Maclaurin de $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et remplaçons x par $-x^2$. On obtient

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!}, \quad \text{et donc } e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

▷ En intégrant cette dernière série, on obtient

$$\int e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int x^{2n} dx, \quad \text{et donc}$$

$$\int e^{-x^2} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

b. ▷

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \Bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

▷ La 4^{ime} somme partielle de cette série donne l'approximation suivante de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216}$$

▷ et donc $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,7475$.

- Pour estimer l'erreur commise $E = \int_0^1 e^{-x^2}dx - 0,7475$, on peut uliser le résultat sur les séries alternées qui nous dit

$$|E| \leqslant a_5 = \frac{1}{5!(11)} = \frac{1}{1320} = 0,0008.$$

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)
- Disponibilités:
  - ⋆ Lundi 10H00 - 12H00, MRR B-214
  - ⋆ Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214
  - ⋆ Jeudi 08H00 - 10H00, MRR B-214
- Manuels du cours:

[1] J. Stewart.
Analyse concepts et contextes. Volume 1, Fonctions d'une variable.
DE BOECK SUP; 3e édition, Rue des Minimes 39, B- 1000 Bruxelles, 2011.