UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Hiver 2024

Série 3 - Optimisation (MATH 3163)

Question I

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Remplaçons, au voisinage du point courant x^k, la fonction f par son approximation quadratique

$$J(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T H(x^k)(x - x^k)$$

puis pénalisons $J(x)$ par le terme quaratique $(\alpha_k/2)\|x - x^k\|^2$.
Déterminer le point x^{k+1} comme le minimum de

$$J(x) + \frac{\alpha_k}{2}\|x - x^k\|^2$$

(lorsque ce minimum existe).
À quelle méthode numérique aboutissez-vous ?

Question II

On désigne par $(.,.)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ la norme associée. Soit A une matrice carrée d'ordre n, symétrique et définie positive. On désigne par $\|x\|_A = (Ax, x)^{1/2}$ la norme du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ relativement à la matrice A. Étant donnés deux vecteurs x^0 et b dans $\mathbb{R}^n$, on définit deux suites de vecteurs

$$\begin{aligned} r^k &= -(Ax^k + b), \\ x^{k+1} &= x^k + \alpha_k r^k \text{ avec } \alpha_k > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

1. Déterminer α_k pour que $(r^{k+1}, r^k) = 0$.

2. À quelle méthode numérique aboutissez-vous, si vous appliquez l'algorthme (1), avec α_k trouvé en 1), au problème de minimisation suivant

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ avec } f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c.$$

3. On pose $e^k = x^k - x^*$ où x^* désigne la solution du système $Ax^* + b = 0$.

Démontrez que

$$\|e^{k+1}\|_A^2 = \|e^k\|_A^2 - \frac{\|r^k\|^4}{\|r^k\|_A^2}.$$

4. On note par λ_{min} (respectivement λ_{max}) la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A. On note par $\kappa(A) = \dfrac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ le conditionnement de la matrice A.

Montrez que

$$\|e^{k+1}\|_A^2 \leq \frac{\kappa(A) - 1}{\kappa(A)} \|e^k\|_A^2.$$

Conclusion ?

Question III

1. Soit A une matrice réelle de format $m \times n$ avec $m > n$. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $A^T A$ soit définie positive est que A soit de rang plein, autrement dit que $\mathrm{rang}(A) = n$.

2. Soit A une matrice réelle de format $m \times n$ avec $m > n$ et $\mathrm{rang}(A) = n$. On souhaite déterminer la solution approchée au sens des moindres carrés du système $Ax \simeq b$ où $b \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur de seconds membres donné. Autrement dit on souhaite minimiser sans contrainte sur $\mathbb{R}^n$ la fonction $\|Ax - b\|^2$. Montrer que ce problème a pour solution optimale unique :

$$x^* = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b.$$