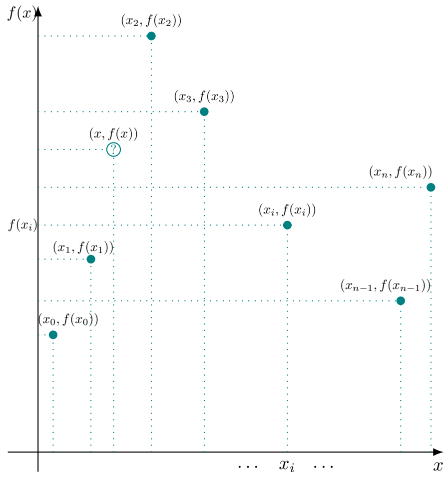
Chapitre 5

Interpolation polynomiale

Sommaire



Le problème ici est, à partir d'une fonction $f(x)$ connue seulement en $(n+1)$ points de la forme $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, 2, \cdots, n$, de construire une approximation de celle-ci par une fonction simple de type polynomial p_n et de degré inférieur ou égal à n telle que

$$p_n(x_i) = f(x_i), \; i = 0, 1, 2, \cdots, n. \tag{5.1}$$

Remarque(s) : Les points x_i sont appelés *abscisses ou noeuds d'interpolation* tandis que les couples $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ sont *les points de collocation* ou *points d'interpolation* et peuvent provenir de données expérimentales.

Question: Si l'on ne connaît que les points de collocation $(x_i, f(x_i))$ d'une fonction, comment construire l'approximation $p_n(x)$ de $f(x)$ pour une valeur de x différente des x_i ?

C'est à cette question qu'on essaiera de répondre sur chacun des points suivants, mais il convient d'abord de rappeler certains résultats cruciaux relatifs aux polynômes.

1 Rappel

Proposition 1.1

Un polynôme de degré n à coefficients réels de forme générale

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n, \; a_n \neq 0 \tag{5.2}$$

possède, tenant compte des multiplicités, très exactement n racines qui peuvent être réelles ou complexes conjuguées.

Note: On rappelle de plus que r est une racine du polynôme $p_n(x)$ si on a $p_n(r) = 0$.

Corollaire 1.1

Par $(n+1)$ points de collocation d'abscisses distinctes $(x_i, f(x_i)), \; i = 0, 1, 2, \cdots, n$, on ne peut faire correspondre qu'un et un seul polynôme de degré n.

Définition 1.1

L'unique polynôme de degré n passant par les points $(x_i, f(x_i)), \; i = 0, 1, 2, \cdots, n$, est appelé l'interpolant de $f(x)$ de degré n aux abscisses (noeuds) $x_0, x_1, \cdots, x_n$.

Remarque(s) : Rien n'oblige à ce que le coefficient a_n de l'interpolant soit différent de 0. L'interpolant passant par les $n+1$ points d'interpolation peut donc être de degré inférieur à n.

Note: Si on choisit par exemple 10 points sur une droite, l'interpolant sera quand même de degré 1.

2 Matrice de Vandermonde

L'interpolation par la méthode de Vandermonde consiste à déterminer les inconnues a_i du polynôme (5.2) en vérifiant directement les $(n+1)$ équations de collocation

$$p_n(x_i) = f(x_i), \text{ pour } i = 0, 1, 2, \cdots, n. \tag{5.3}$$

C'est à dire, on va déterminer les coefficients $a_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n$, qui sont solution du système linéaire suivant

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_2^n = f(x_2) \\ \qquad\vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases} \tag{5.4}$$

Le système linéaire (5.4) est de $(n+1)$ équations en $(n+1)$ inconnues et s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Remarque(s) : La matrice du système linéaire (5.5) porte le nom de *matrice de Vandermonde*. On peut montrer que le conditionnement de cette matrice augmente fortement avec la taille $(n+1)$ du système.

Note: En résumé, déterminer le polynôme d'interpolation $p_n(x)$ défini par les condition en (5.3), revient à résoudre le système linéaire (5.5). Ce qui fait que cette méthode est donc rarement utilisée.

Exemple 1

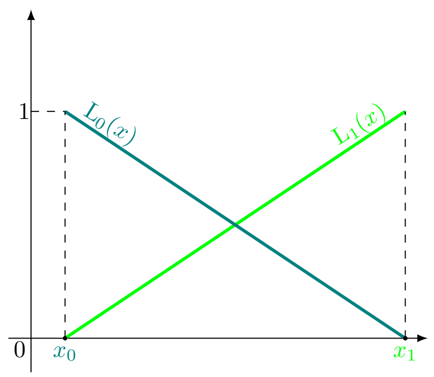
On doit calculer le polynôme passant par les points $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 9)$ et $(3, 28)$. Étant donné ces 4 points, le polynôme recherché est tout au plus de degré 3. Ses coefficients a_i sont solution de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 28 \end{bmatrix}$$

dont la solution (obtenue par décomposition LU) est $[1\ 0\ 0\ 1]^t$. Le polynôme recherché est donc $p_3(x) = 1 + x^3$.

3 Interpolation de Lagrange

L'interpolation de Lagrange est une autre façon de construire un polynôme d'interpolation $p_n(x)$ de degré n passant par les $(n+1)$ points de collocation $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. Le procédé de construction s'appuie sur des polynômes particulièrs appelés *polynômes de Lagrange* qui sont la base de la méthode d'interpolation. Afin d'illustrer la construction de ces polynômes de Lagrange, on va suivre une démarche progressive qui consiste à construire ceux de degré 1, de degré 2, avant de la généraliser pour un polynôme de degré n.



Polynômes de Lagrange de degré 1 :
$L_0(x)$ et $L_1(x)$

QUESTION: Étant donné deux points de collocation $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$, comment construire les deux polynômes de Lagrange $L_0(x)$ et $L_1(x)$ de degré 1, vérifiant les conditions suivantes qui sont la base de leur construction ?

$$\begin{cases} L_0(x_0) = 1 \\ L_0(x_1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1(x_0) = 0 \\ L_1(x_1) = 1 \end{cases}$$

- Construction de $L_0(x)$: Sachant que le polynôme $L_0(x)$ doit s'annuler en $x = x_1$, alors on imagine automatiquement qu'il est de la forme $(x - x_1)$. Sauf que cette forme vaut $(x_0 - x_1)$ en $x = x_0$, et pour s'assurer d'une valeur 1 en $x = x_0$, il suffit de diviser ce terme par $(x_0 - x_1)$ pour obtenir

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$$

- Construction de $L_1(x)$: Un raisonnement similaire donne le polynôme $L_1(x)$ sous la forme

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

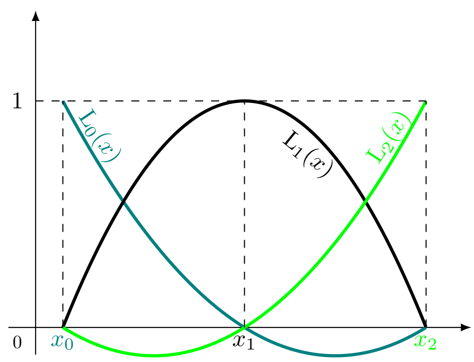
Note: Le polynôme d'interpolation de Lagrange $p_1(x)$ de degré 1, passant par les deux points de collocation $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$, est défini par la formule

$$p_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) \tag{5.6}$$

Exemple 2

Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 1, passant par les points $(2, 3)$ et $(5, -6)$, est l'équation de droite

$$p_1(x) = 3\underbrace{\frac{(x-5)}{(2-5)}}_{L_0(x)} + (-6)\underbrace{\frac{(x-2)}{(5-2)}}_{L_1(x)} = -(x-5) - 2(x-2) = -3x + 9$$



Polynômes de Lagrange de degré 2 :
$L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$

QUESTION: Avec les trois points de collocation $(x_i, f(x_i)), i = 1, 2, 3$, comment construire les trois polynômes de Lagrange $L_i(x)$ de degré 2, vérifiant des conditions similaires au cas précédent

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 & \forall\, i = 1, 2, 3 \\ L_i(x_j) = 0 & \forall\, i \neq j \end{cases}$$

- Construction de $L_0(x)$: La fonction $L_0(x)$ s'annule cette fois en $x = x_1$ et en $x = x_2$, alors on pense tout de suite à une fonction de la forme $(x - x_1)(x - x_2)$. Mais celle-ci vaut $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$ en $x = x_0$, et pour satisfaire la condition $L_0(x_0) = 1$, il suffit alors de diviser la fonction par cette valeur et de prendre

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

- Construction de $L_1(x)$ et $L_2(x)$: Un raisonnement similaire donne les polynômes $L_1(x)$ et $L_2(x)$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \quad \text{et} \quad L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Note: Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 2 noté $p_2(x)$, passant par les trois points de collocation $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, est donc construit par la somme suivante

$$p_2(x) = f(x_0)\mathrm{L}_0(x) + f(x_1)\mathrm{L}_1(x) + f(x_2)\mathrm{L}_2(x) \tag{5.7}$$

Exemple 3

La parabole passant par les points $(1, 2), (3, 7), (4, -1)$ est donnée par le polynôme

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (2)\underbrace{\frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)}}_{\mathrm{L}_0(x)} + (7)\underbrace{\frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)}}_{\mathrm{L}_1(x)} + (-1)\underbrace{\frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)}}_{\mathrm{L}_2(x)} \\ &= \frac{(x-3)(x-4)}{3} - \frac{7(x-1)(x-4)}{2} - \frac{(x-1)(x-3)}{3} \end{aligned}$$

On analyse le cas général de la même façon. La fonction $L_0(x)$ doit s'annuler en $x = x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$. Il faut donc introduire la fonction $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)$ qui vaut $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\cdots(x_0 - x_n)$ en $x = x_0$. On a alors, après division, la première fonction de Lagrange définie par

$$\mathrm{L}_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\cdots(x_0 - x_n)} \tag{5.8}$$

Remarque(s) : On remarque qu'il y a n facteurs de la forme $(x - x_i)$ dans l'expression (5.8) et qu'il s'agit bien d'un polynôme de degré n.

La fonction de Lagrange $\mathrm{L}_1(x)$ est construite de la même façon et est définie par

$$\mathrm{L}_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)} \tag{5.9}$$

Remarque(s) : L'absence remarquée du terme $(x - x_1)$ dans l'expression (5.9), nous laisse aisément voir qu'il y a n facteurs de la forme $(x - x_i)$ et qu'il s'agit bien d'un polynôme de degré n.

L'expression générale du polynôme de Lagrange $L_i(x)$ est donnée par

$$\mathrm{L}_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \tag{5.10}$$

Remarque(s) : Dans l'expression (5.10), seul le facteur $(x - x_i)$ est absent. $\mathrm{L}_i(x)$ est donc un polynôme de degré n qui vaut 1 en $x = x_i$ et qui s'annule à tous les autres points de collocation.

Théorème 3.1

Étant donné les $(n + 1)$ points d'interpolation $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \cdots, n$, l'unique polynôme d'interpolation de degré n passant par tous ces points peut s'écrire

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathrm{L}_i(x), \tag{5.11}$$

où les $(n + 1)$ polynômes de Lagrange $L_i(x)$ sont définies par la relation (5.10).

Exemple 4

Reprenons les points $(0, 1), (1, 2), (2, 9)$ et $(3, 28)$, pour lesquels nous avons obtenu le polynôme $p_3(x) = x^3 + 1$ à l'aide de la matrice de Vandermonde. L'interpolation de Lagrange donne dans ce cas

$$p_3(x) = (1)\underbrace{\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}}_{L_0(x)} + (2)\underbrace{\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}}_{L_1(x)} + (9)\underbrace{\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}}_{L_2(x)} + (28)\underbrace{\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}}_{L_3(x)}$$

C'est à dire

$$p_3(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6} + x(x-2)(x-3) - (9)\frac{x(x-1)(x-3)}{2} + (14)\frac{x(x-1)(x-2)}{3} \tag{5.12}$$

qui est l'expression du polynôme de degré 3 passant par les 4 points donnés. L'expression (5.12) n'est autre que $p_3(x) = x^3 + 1$. Il n'y a qu'à en faire le développement de (5.12) pour s'en assurer.

Note: Cela n'est pas surprenant, puisque l'on sait qu'il n'existe qu'un seul polynôme de degré 3 passant par 4 points donnés. L'interpolation de Lagrange ne fait qu'exprimer le même polynôme différemment

Enfin, le polynôme calculé permet d'obtenir une approximation de la fonction inconnue $f(x)$ partout dans l'intervalle contenant les points de collocation, c'est-à-dire $[0\ 3]$. Ainsi, on a

$$f(2,5) \simeq p_3(2,5) = 16,625$$

avec une précision qui sera discutée plus loin lorsque nous aborderons la question de l'erreur d'interpolation

Remarque(s) : La méthode d'interpolation de Lagrange présente un inconvénient majeur : elle n'est pas récursive. En effet, si l'on souhaite passer d'un polynôme de degré n à un polynôme de degré $(n+1)$ (en ajoutant un point de collocation), on doit reprendre pratiquement tout le processus à zéro. C'est en revanche ce que permet la méthode d'interpolation de Newton.

4 Polynôme de Newton

Lorsqu'on écrit l'expression générale d'un polynôme de degré 1, on pense immédiatement à la forme $p_1(x) = a + bx$ où a et b sont des coefficients connus. Il existe cependant d'autres formes plus appropriées, si l'on veut construire un tel polynôme passant par les deux points de collocation $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ et vérifiant les conditions

$$p_1(x_0) = f(x_0), \quad p_1(x_1) = f(x_1) \tag{5.13}$$

La forme suivante s'avère convenable

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \tag{5.14}$$

car les coefficients a_0 et a_1 se déterminent de façon automatique. En effet, Le deuxième terme de la forme (5.14) s'annulant en $x = x_0$, alors la première condition en (5.13) permet de vérifier facilement que

$$p_1(x_0) = a_0 = f(x_0) \tag{5.15}$$

Grâce à la deuxième condition en (5.13) où on doit s'assurer que $p_1(x_1) = f(x_1)$ et celle en (5.15), on a

$$p_1(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

Ce qui permet d'isoler le coefficient a_1 pour obtenir la relation suivante

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{5.16}$$

Note: L'unique polynôme de degré 1, passant par les deux points de collocation $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$, s'écrire selon le procédé d'*interpolation de Newton* précédent sous la forme

$$p_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0). \tag{5.17}$$

Définition 4.1

On définit **la première différence divisée** de la fonction $f(x)$ aux points de collocation $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ par

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{5.18}$$

Note: Plus génériquement, **les premières différences divisées** de la fonction $f(x)$ sont données par

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}. \tag{5.19}$$

Pour un polynôme de degré 2, l'expression générale à laquelle on pense immédiatement est celle de la forme suivante

$$p_2(x) = a + bx + cx^2$$

où a, b et c sont des coefficients connus. Alors que pour construire une polynôme de degré deux passant par les trois points de collocation $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, c'est à dire vérifiant

$$p_2(x_0) = f(x_0), \quad p_2(x_1) = f(x_1), \quad p_2(x_2) = f(x_2) \tag{5.20}$$

la forme la plus appropriée est la suivante

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Les termes de ce polynôme s'annulent donc en $x = x_0$, sauf le premier coefficient a_0 qui est

$$a_0 = f(x_0) \tag{5.21}$$

En $x = x_1$, seul le dernier terme de ce polynôme s'annule. Et en utilisant la deuxième condition en (5.20) on a

$$a_1 = f[x_0, x_1] \tag{5.22}$$

Finallement, en évaluant ce polynôme en x_2 et tenant compte de la troisième condition en (5.20), on a

$$p_2(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$

En isolant le coefficient a_2 dans l'expression précédente, on obtient ainsi

$$a_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]\right) \tag{5.23}$$

Note: L'unique polynôme de degré 2, passant par les trois points de collocation $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, s'écrire selon le procédé d'*interpolation de Newton* précédent sous la forme

$$p_2(x) = \underbrace{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)}_{p_1(x)} + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \tag{5.24}$$

Remarque(s) : On remarque de plus que ce polynôme de degré 2 s'obtient simplement par l'ajout d'un terme de degré 2 au polynôme $p_1(x)$ déjà calculé. En raison de cette propriété, cette méthode est dite *récursive*.

Définition 4.2

On définit **la deuxième différence divisée** de la fonction $f(x)$, aux points de collocation $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, par la relation

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \tag{5.25}$$

Note: Plus génériquement, **les deuxièmes différences divisées** de la fonction $f(x)$ sont définies à partir des premières différences divisées par la relation

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \tag{5.26}$$

Pour un polynôme $p_3(x)$ de degré trois, passant par les quatre points de collocation $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ et $(x_3, f(x_3))$, on peut soupçonner à ce stade-ci que le coefficient a_3 est *une troisième différence divisée* de $f(x)$

$$a_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

Note: Et l'unique polynôme de degré 3 s'écrirait

$$p_3(x) = \underbrace{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)}_{p_2(x)} + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \tag{5.27}$$

C'est effectivement le cas et le théorème suivant résume le procédé de construction des polynômes d'interpolation de Newton décrit préalablement.

Théorème 4.1

L'unique polynôme de degré n passant par les $(n+1)$ points de collocation $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n$, peut s'écrire selon le procédé d'interpolation de Newton décrit préalablement comme suit

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}), \tag{5.28}$$

où les coefficients a_i de ce polynôme sont les différences divisées données par la relation

$$a_i = f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_i] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_i] - f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}, \quad i = 1, 2, 3, \cdots, n \tag{5.29}$$

Question: Comment calculer efficacement les coéfficients a_i d'un polynôme de Newton ?

Note: La manière la plus simple consiste à construire une table dite de différences divisées. Si l'on veut construire le polynôme de Newton passant par les points de collocation $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, 3$, il faut déterminer les coéfficients $f[x_0, x_1]$, $f[x_0, x_1, x_2]$ et $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ dont leur représentation sur la table est décrite par :

- Les premières différences divisées découlent de la définition.
- Pour obtenir par exemple $f[x_0, x_1, x_2]$, il suffit de soustraire les 2 termes adjacents $f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]$ et de diviser le résultat par $(x_2 - x_0)$.
- Pour obtenir $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$, on soustrait $f[x_0, x_1, x_2]$ de $f[x_1, x_2, x_3]$ et l'on divise le résultat par $(x_3 - x_0)$

La formule de Newton utilise la diagonale principale de cette table.

Table de différences divisées

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			

Exemple 5

La table de différences divisées pour les points $(0, 1), (1, 2), (2, 9)$ et $(3, 28)$ est

Table de différences divisées

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	1			
		1		
1	2		3	
		7		1
2	9		6	
		19		
3	28			

Suivant la formule de Newton (5.27), avec $x_0 = 0$, le polynôme de collocation est

$$p_3(x) = 1 + 1(x - 0) + 3(x - 0)(x - 1) + 1(x - 0)(x - 1)(x - 2) = x^3 + 1$$

qui est le même polynôme (en vertu de l'unicité) que celui obtenu par la méthode de Lagrange. On remarque de plus que le polynôme $p_2(x)$ suivant passe quant à lui par les trois premiers points de collocation $(0, 1), (1, 2)$ et $(2, 9)$

$$p_2(x) = 1 + 1(x - 0) + 3(x - 0)(x - 1)$$

Note: Si l'on souhaite ajouter un point de collocation et calculer un polynôme de degré 4, il n'est pas nécessaire de tout recommencer.

Par exemple, si l'on veut inclure le point $(5,\ 54)$, on peut compléter la table de différences divisées déjà utilisée.

Table de différences divisées

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
0	1				
		1			
1	2		3		
		7		1	
2	9		6		$-\frac{3}{5}$
		19		-2	
3	28		-2		
		13			
5	54				

Ce polynôme de degré 4 est alors

$$p_4(x) = p_3(x) - \frac{3}{5}(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)$$

qui est tout simplement le polynôme de degré 3 déjà calculé auquel on a ajouté une correction de degré 4.

Exemple 6

Il est bon de remarquer que les points de collocation ne doivent pas forcément être placés par abscisses croissantes (voir Exemple 5.18 du manuel).

5 Erreur d'interpolation

L'interpolation permet, à partir d'un certain nombre de données sur les valeurs d'une fonction, de faire l'approximation de $f(x)$ en tout point x. Toutefois, cette opération entraîne une *erreur d'interpolation* qu'il convient d'analyser. Si un polynôme d'interpolation $p_n(x)$ est une approximation de la fonction $f(x)$ à travers ses points de collocation $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n$, alors on peut exprimer l'erreur d'interpolation $E_n(x)$ de la façon suivante

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x), \text{ ou encore } E_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

Il reste à évaluer cette erreur, qu'on constate immédiatement nulle aux points de collocation :

$$E_n(x_i) = 0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

Théorème 5.1

Soit $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, les abscisses des points de collocation. On suppose que la fonction $f(x)$ est définie dans l'intervalle $[x_0, x_n]$ et qu'elle est $(n+1)$ fois dérivable dans $]x_0, x_n[$. Alors, pour tout x dans l'intervalle $[x_0, x_n]$, il existe $\zeta(x)$ appartenant à l'intervalle $]x_0, x_n[$ tel que

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1}(\zeta(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n). \tag{5.30}$$

Remarque(s) : La relation (5.30) est l'expression analytique de l'erreur d'interpolation et quelques remarques s'impose pour mieux comprendre sa portée.

- On constate immédiatement que $E_n(x_i) = 0$ quel que soit i choisi entre 0 et n. L'erreur d'interpolation est nulle aux points de collocation.
- La fonction a priori inconnue $f(x)$ apparaît par l'entremise de sa dérivée d'ordre $(n+1)$ évaluée au point $\zeta(x)$, également inconnu et qui varie avec x.
- Il existe une similarité entre l'erreur d'interpolation et l'erreur reliée au développement de Taylor. Dans les deux cas, on montre l'existence d'un point $\zeta(x)$ permettant d'évaluer l'erreur, mais que l'on ne peut généralement pas déterminer.
- Puisque le terme d'erreur en un point x fait intervenir des coefficients de la forme $(x - x_i)$, il y a tout intérêt à choisir les points x_i qui sont situés le plus près possible de x. Ce choix est utile lorsqu'un grand nombre de points de collocation sont disponibles et qu'il n'est pas nécessaire de construire un polynôme passant par tous les points. On retient alors seulement les points de collocation les plus près de x de manière à minimiser l'erreur.
- La fonction $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ est un polynôme de degré $(n+1)$ et possède donc les $(n+1)$ racines réelles x_i, pour $i = 0, 1, \cdots, n$. Dans certaines conditions, cette fonction peut osciller avec de fortes amplitudes, d'où le risque de grandes erreurs d'interpolation. Cette propriété fait en sorte qu'il est délicat d'effectuer des interpolations en utilisant des polynômes de degré élevé.

Il est souhaitable de pouvoir évaluer l'erreur d'interpolation (5.30), même de façon grossière. Cependant, l'expression analytique de celle-ci ne permet pas toujours une évaluation de la précision de l'approximation. Par contre, la méthode d'interpolation de Newton étudiée antérieurement permet une bonne estimation de ce terme d'erreur. En effet, il suffit d'établir un lien entre les dérivées de la fonction $f(x)$ et les différences divisées. Par le développement de taylor et en considérant les abscisses x_i équidistantes $x_{i+1} - x_i = h$, on remarque

$$f[x_0, x_1] = f'(x_0) + \mathcal{O}(h)$$

C'est à dire que $f[x_0, x_1]$ est une approximation d'ordre 1 de la dérivée de $f(x)$ en $x = x_0$.

De même, on peut montrer qu'à une constante près la $n - ième$ différence divisée de $f(x)$ est une approximation d'ordre 1 de la dérivée $n - ième$ de $f(x)$ en $x = x_0$:

$$f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \mathcal{O}(h) \tag{5.31}$$

En supposant que la dérivée $(n + 1) - ième$ de $f(x)$ varie peu dans l'intervalle $[x_0, x_n]$, on a alors l'approximation

$$f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}] \simeq \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \simeq \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}.$$

Ce qui permet de donner une estimation du terme (5.30) par

$$E_n(x) \simeq f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n), \tag{5.32}$$

ou bien, sachant que c'est une interpolation de Newton qui est utilisée, cela revient à écrire

$$E_n(x) \simeq p_{n+1}(x) - p_n(x). \tag{5.33}$$

Remarque(s) :

- l'approximation (5.32) (ou (5.33)) n'est rien d'autre que le terme nécessaire au calcul du polynôme de degré $(n + 1)$ dans la formule de Newton (5.28).

  Note: En d'autres termes, il est possible d'évaluer l'erreur d'interpolation liée à un polynôme de degré n en calculant le terme suivant dans la formule de Newton.

- L'approximation (5.32) n'est pas toujours d'une grande précision, mais c'est généralement la seule disponible.
- Dans le cas d'une interpolation à l'aide de la formule de Newton, on a ainsi le critère d'arrêt suivant

$$\frac{|p_{n+1}(x) - p_n(x)|}{|p_{n+1}(x)|} < \varepsilon_a,$$

où ε_a est une valeur de tolérance fixée à l'avance.

Exemple 7

Soit une table de la fonction $\sqrt{x}$. Puisqu'on connaît la fonction (ce qui n'est bien sûr pas le cas en pratique), on est donc en mesure d'évaluer l'erreur exacte et de la comparer avec son approximation obtenue à l'aide de la relation (5.32).

Table de différences divisées

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
7	$2,645751$				
		$0,177124$			
9	$3,000000$		$-0,00470299$		
		$0,158312$		$0,000206783$	
11	$3,316625$		$-0,00346229$		$-0,9692 \times 10^{-5}$
		$0,144463$		$0,000129248$	
13	$3,605551$		$-0,00268680$		
		$0,133716$			
15	$3,872983$				

On tente d'obtenir une approximation de $\sqrt{8}$ à l'aide de cette table. En se basant sur un polynôme de degré 1 et en prenant $x_0 = 7$, on obtient facilement

$$p_1(x) = 2,645751 + 0,177124(x - 7)$$

de telle sorte que $p_1(8) = 2,822875$. L'erreur exacte en x = 8 est alors

$$E_1(8) = f(8) - p_1(8) = \sqrt{8} - 2,822875 = 0,005552125$$

Selon l'expression (5.32), on peut estimer cette erreur par le terme suivant dans la formule de Newton, c'est-à-dire

$$E_1(8) \simeq -0,00470299(8-7)(8-9) = 0,00470299$$

On constate donc que l'erreur approximative est assez près de l'erreur exacte. Considérons maintenant le polynôme de degré 2

$$p_2(x) = p_1(x) - 0,00470299(x-7)(x-9)$$

qui prend la valeur $p_2(8) = 2,822875 + 0,00470299 = 2,827577990$, soit une erreur exacte de $0,000849135$. Encore ici, cette erreur peut être approchée à l'aide du terme suivant dans la formule de Newton

$$E_2(8) \simeq 0,000206783(8-7)(8-9)(8-11) = 0,000620349$$

Enfin, en passant au polynôme de degré 3, on trouve

$$p_3(x) = p_2(x) + 0,000206783(x-7)(x-9)(x-11)$$

ce qui entraîne que $p_3(8) = 2,827578301 + 0,000620349 = 2,828198339$. L'erreur exacte est alors $0,000228786$, ce qui est près de la valeur obtenue au moyen de l'équation (5.32)

$$E_3(8) \simeq -0,9692 \times 10^{-5}(8-7)(8-9)(8-11)(8-13) = 0,000145380$$

qui montre que cette approximation possède 4 chiffres significatifs.

Remarque(s) : On remarque par ailleurs dans la table que les premières différences divisées sont négatives et que le signe alterne d'une colonne à une autre. Cela s'explique par la relation (5.31), qui établit un lien entre les différences divisées et les dérivées de la fonction $f(x)$. Dans cet exemple, on a

$$f(x) = \sqrt{x},\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ f''(x) = \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}},\ f'''(x) = \frac{3}{8x^{\frac{5}{2}}}$$

Le signe des dérivées alterne, tout comme le signe des différentes colonnes de la table de différences divisées.

Il nous reste à déterminer l'ordre de convergence des approximations polynomiales précédentes. Si l'on retient le cas où les abscisses sont également distantes, il suffit de poser $s = \frac{x-x_0}{h}$ ou encore $(x - x_0) = sh$ afin de remarquer que $x - x_i = (s-i)h$. Il suffit maintenant de remplacer $x - x_i$ par $(s-i)h$ dans l'expression analytique de l'erreur d'interpolation (5.30) pour avoir une idée sur l'ordre de convergence donné au théorème suivant.

Théorème 5.2

Dans le cas où les abscisses x_i des points de collocation sont équidistantes, l'expression analytique de l'erreur d'interpolation s'écrit

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} s(s-1)(s-2)\cdots(s-n)h^{n+1}, \tag{5.34}$$

pour un certain ζ dans l'intervalle $]x_0, x_n[$.

Remarque(s) :

- On peut dès lors conclure que le polynôme d'interpolation $p_n(x)$ est une approximation d'ordre $(n+1)$ de la fonction $f(x)$.

  Note: si l'on prend des points de collocation situés à une distance $\frac{h}{2}$ les uns des autres, l'erreur d'interpolation est diminuée d'un facteur de 2^{n+1}.

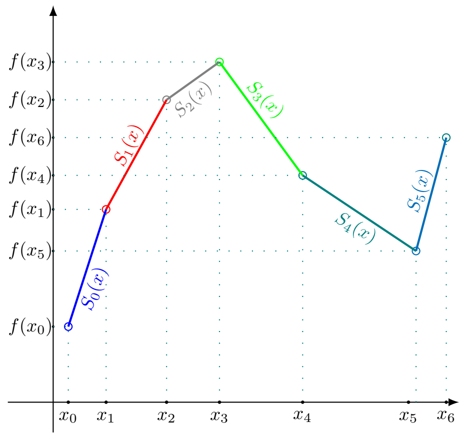
- L'expression analytique de l'erreur d'interpolation demeure la même, quelle que soit la façon dont on calcule le polynôme d'interpolation

Note: Ainsi, l'expression (5.30) est valable si l'on utilise l'interpolation de Lagrange, la matrice de Vandermonde ou toute autre méthode. Cela s'explique par l'unicité de ce polynôme.

- L'approximation de l'erreur exprimée par l'équation (5.32) est également valable quelle que soit la façon dont on calcule le polynôme d'interpolation.

Note: Si l'on utilise une autre méthode que l'interpolation de Newton, il faut calculer la table de différences divisées pour obtenir l'approximation (5.32). Il est donc avantageux d'utiliser la formule de Newton dès le départ.

6 Splines cubiques

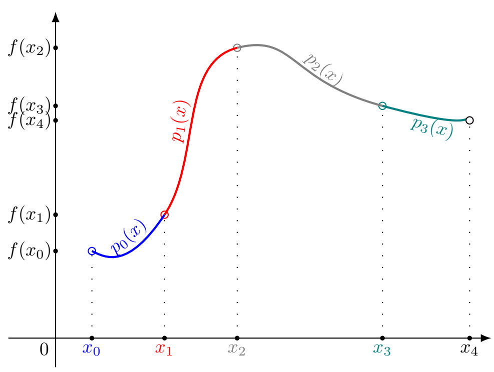


Interpolation linéaire par morceaux

Dans bon nombre d'applications, il est impératif d'obtenir des courbes très régulières passant par un grand nombre de points. Sachant que la régularité d'une fonction se mesure par le biais de ses dérivées, on aurait penser que les polynômes de degré élevé définis préalablement seraient alors adéquats pour interpoler ces points. Mais l'utilisation de ces polynômes est délicate et mène parfois à des oscillations de grandes amplitudes. D'autre part, si l'on utilise des polynômes de faible degré, il en faut plusieurs pour relier tous les points tel que le montre la figure (il faut donc être plus prudent à la jonction des différents segments de courbe).

Note: C'est l'interpolation linéaire par morceaux (ou *splines linéaires*), qui consiste à relier chaque paire de points par un segment de droite (noté S_i sur la figure).

La spline linéaire étant continue mais pas dérivable, on utilisera les splines cubiques qui constituent un compromis entre la régularité de la courbe obtenue et le degré des polynômes utilisés.



Splines cubiques : ($n = 4$) polynômes de degré 3

Méthode : On considère $(n+1)$ points d'interpolation $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, 2, \cdots, n$, par lesquels on souhaite faire passer une courbe. Cette courbe sera qualifiée de splines cubiques si :

- Dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ (de longueur $h_i = x_{i+1} - x_i$), elle est un polynôme de degré 3 de la forme

$$p_i(x) = f_i + f_i'(x - x_i) + \frac{f_i''}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{f_i'''}{3!}(x - x_i)^3 \quad (5.35)$$

pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

- Elle est deux fois différentiable aux points d'intersection $(x_i, f(x_i)), i = 1, 2, \cdots, n-1$ de ces polynômes.

Remarque(s) : L'interpolation par splines cubiques de points $(x_i, f(x_i))$, revient à déterminer les $4n$ coefficients f_i, f_i', f_i'' et f_i''', qui sont respectivement les valeurs de la spline et de ses trois premières dérivées en x_i : $p_i(x_i) = f_i$, $p_i'(x_i) = f_i'$, $p_i''(x_i) = f_i''$ et $p_i'''(x_i) = f_i'''$.

Question: Comment déterminer le plus efficacement f_i, f_i', f_i'' et f_i''', afin que la méthode reste attrayante ?

Puisque l'on a $(n+1)$ points d'interpolation, il y a n intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ qui résultent en $4n$ coefficients inconnus (f_i, f_i', f_i'' et f_i''', $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$) à déterminer. Pour cela, nous allons exprimer les inconnues f_i, f_i' et f_i''' en fonction des dérivées secondes f_i'', et déterminer ces dernières via un système linéaire tridiagonal de dimension $(n+1)$ qui pourra être facilement résolu.
Pour déterminer donc ces coefficients, on va traduire sous forme d'équations les conditions de régularité que l'on souhaite imposer à la courbe résultante des polynômes de degré 3 définis à la relation (5.35) :

- Notons tout d'abord que f_n'' n'est pas définie au niveau de l'équation (5.35) puisque les indices s'arrêtent à $n-1$. On va donc définir f_n'' comme étant la dérivée seconde de la spline en x_n. On a ainsi l'équation suivante
$$f_n'' = p_{n-1}''(x_n) = f_{n-1}'' + f_{n-1}'''(x_n - x_{n-1}) = f_{n-1}'' + f_{n-1}''' h_{n-1},$$
qui peut aussi s'écrire comme suit
$$f_{n-1}''' = \frac{f_n'' - f_{n-1}''}{h_{n-1}} \tag{5.36}$$
En imposant la continuité des dérivées secondes aux $(n-1)$ noeuds intérieurs $x_{i+1}, i = 0, 1, \cdots, n-2$, on a
$$p_{i+1}''(x_{i+1}) = p_i''(x_{i+1}), \text{ ou encore, } f_{i+1}'' = f_i'' + f_i'''(x_{i+1} - x_i) = f_i'' + f_i''' h_i$$
qui peut également s'écrire, en isolant f_i''', comme suit
$$f_i''' = \frac{f_{i+1}'' - f_i''}{h_i} \tag{5.37}$$

En vertu des équations (5.36) et (5.37), on a la relation suivante qui est vraie pour $i = 0, 1, \cdots, n-1$
$$f_i''' = \frac{f_{i+1}'' - f_i''}{h_i}. \tag{5.38}$$

- À la première extrémité x_i de chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, le polynôme $p_i(x)$ passe au point $(x_i, f(x_i))$. on a

$$f(x_i) = p_i(x_i) = f_i, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \cdots, n-1. \tag{5.39}$$

- À la deuxième extrémité x_{i+1} du même intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on obtient pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$,
$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) = p_i(x_{i+1}) &= f_i + f_i'(x_{i+1} - x_i) + \frac{f_i''}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{f_i'''}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3, \\ &= f(x_i) + f_i' h_i + \frac{f_i''}{2!} h_i^2 + \frac{f_i'''}{3!} h_i^3 \end{aligned}$$

Ce qui génère, tenant compte de l'équation (5.38), les n nouvelles équations
$$f_i' = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{h_i f_i''}{3} - \frac{h_i f_{i+1}''}{6}, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \cdots, n-1. \tag{5.40}$$

- En imposant la continuité de la dérivée première aux $(n-1)$ noeuds intérieurs $x_{i+1}, i = 0, 1, \cdots, n-2$, on a
$$p_{i+1}'(x_{i+1}) = p_i'(x_{i+1}), \text{ ou encore } f_{i+1}' = f_i' + f_i'' h_i + \frac{f_i'''}{2} h_i^2.$$

En utilisant les expressions (5.38) et (5.40), on obtient
$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} f_i'' + 2 f_{i+1}'' + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} f_{i+2}'' = 6 f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}], \text{ pour } i = 0, 1, 2, \cdots, n-2. \tag{5.41}$$

Remarque(s) : On remarque que le terme de droite fait intervenir les deuxièmes différences divisées. Dans le cas où les abscisses sont équidistantes, c'est-à-dire $h_i = h$ quel que soit i, la formule (5.41) devient
$$\frac{1}{2} f_i'' + 2 f_{i+1}'' + \frac{1}{2} f_{i+2}'' = 6 f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}], \text{ pour } i = 0, 1, 2, \cdots, n-2. \tag{5.42}$$
On obtient alors une matrice tridiagonale dont la diagonale principale ne contient que des 2, tandis que les deux autres diagonales sont constituées de coefficients valant $\frac{1}{2}$. *Cette matrice ne dépend donc pas de la valeur de h, qui n'affecte que le terme de droite.*

Remarque(s) : Nous avons également exprimé toutes les inconnues du système en fonction des dérivées secondes f_i'' de la spline et de fait il ne reste que $n+1$ inconnues pour les $n-1$ équations du système (5.41). On doit donc ajouter, de façon plus ou moins arbitraire, deux équations supplémentaires pour compléter le système (5.41) (ou (5.42)) et avoir autant d'équations que d'inconnues :

- Une facon simple de compléter ce système d'équations consiste à imposer aux dérivées secondes des valeurs aux deux extrémités x_0 et x_n soit $p_0''(x_0) = a$ et $p_{n-1}''(x_n) = b$:

$$f_0'' = a, \text{ et } f_n'' = b \tag{5.43}$$

Note: Cela supppose bien entendu que l'on connaît les valeurs a et b de la dérivée seconde aux extrémités de la courbe. Si $a = b = 0$, on qualifie de *spline naturelle* la courbe qui en résulte.

- Un autre choix possible consiste à imposer que

$$f_0'' - f_1'' = 0, \text{ et } -f_{n-1}'' + f_n'' = 0 \tag{5.44}$$

- On peut aussi imposer les dérivées premières $p_0'(x_0) = a$ et $p_{n-1}'(x_n) = b$ aux deux extrémités (en supposant toujours que nous les connaissions). On doit dans ce cas ajouter au système (5.41) (ou (5.42)) les équations

$$\begin{cases} 2f_0'' + f_1'' = \dfrac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - a) \\ f_{n-1}'' + 2f_n'' = \dfrac{6}{h_{n-1}}(b - f[x_{n-1}, x_n]) \end{cases} \tag{5.45}$$

- Une autre choix intéressante est la condition dite not-a-knot qui consiste à imposer aux noeuds d'interpolation x_1 et x_{n-1}, la continuité de la troisième dérivée $p_0'''(x_1) = p_1'''(x_1)$ ainsi que $p_{n-2}'''(x_{n-1}) = p_{n-1}'''(x_{n-1})$. Ce qui génère les équations suivantes, s'ajoutant au système (5.41) (ou (5.42))

$$\begin{gathered} h_1 f_0'' - (h_0 + h_1) f_1'' + h_0 f_2'' = 0 \\ h_{n-1} f_{n-2}'' - (h_{n-2} + h_{n-1}) f_{n-1}'' + h_{n-2} f_n'' = 0 \end{gathered} \tag{5.46}$$

Exemple 8

Soit une spline cubique passant par les 4 points suivants : $(1,1), (2,9), (4,2), (5,11)$. On trouve toute l'information nécessaire au calcul de cette spline cubique dans la table suivante

Table de différences divisées

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	h_i
0	1	1			1
			8		
1	2	9		$-\frac{23}{6}$	2
			$-\frac{7}{2}$		
2	4	2		$\frac{25}{6}$	1
			9		
3	5	11			

La première équation ($i = 0$) du système (5.41) devient :

$$\left(\frac{1}{3}\right) f_0'' + 2f_1'' + \left(\frac{2}{3}\right) f_2'' = 6\left(-\frac{23}{6}\right)$$

et la deuxième équation ($i = 1$) s'écrit

$$\left(\frac{2}{3}\right) f_1'' + 2f_2'' + \left(\frac{1}{3}\right) f_3'' = 6\left(\frac{25}{6}\right)$$

Pour obtenir la spline naturelle ($f_0'' = f_3'' = 0$), on résout le système

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0'' \\ f_1'' \\ f_2'' \\ f_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -23 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dont la solution est $f_0'' = 0$, $f_1'' = -141/8$, $f_2'' = 147/8$ et $f_3'' = 0$. Pour obtenir l'équation de la spline dans le premier intervalle, on doit utiliser d'abord l'équation (5.35) mais aussi les relations (5.38), (5.39) et (5.40). On obtient

$$\begin{cases} f_0 = 1 \\ f_0' = f[x_0, x_1] - \dfrac{h_0 f_0''}{3} - \dfrac{h_0 f_1''}{6} = 8 - \dfrac{(1)(0)}{3} - \dfrac{(1)(-141/8)}{6} = \dfrac{175}{16} \\ f_0''' = \dfrac{f_1'' - f_0''}{h_0} = -\dfrac{141}{8} \end{cases}$$

Ainsi, le polynôme $p_0(x)$ est donné par

$$p_0(x) = 1 + \frac{175}{16}(x-1) + \frac{0}{2}(x-1)^2 - \frac{47}{16}(x-1)^3$$

Ce polynôme n'est défini que dans l'intervalle $[1, 2]$. On peut par exemple l'évaluer en $x = 1,5$ pour obtenir $6,1015625$. De même, si l'on a besoin de la valeur de la spline en $x = 3$, qui est situé dans le deuxième intervalle (soit $[2, 4]$), on peut obtenir l'équation de la spline dans cet intervalle en posant $i = 1$ dans l'équation (5.35). On a, en tenant compte des équations (5.38), (5.39) et (5.40), le système

$$\begin{cases} f_1 = 9 \\ f_1' = f[x_1, x_2] - \dfrac{h_1 f_1''}{3} - \dfrac{h_1 f_2''}{6} = -\dfrac{7}{2} - \dfrac{(2)(-141/8)}{3} - \dfrac{(2)(147/8)}{6} = \dfrac{17}{8} \\ f_1''' = \dfrac{f_2'' - f_1''}{h_1} = 18 \end{cases}$$

Et on a le polynôme $p_1(x)$, défini par

$$p_1(x) = 9 + \frac{17}{8}(x-2) - \frac{141}{16}(x-2)^2 + 3(x-2)^3$$

La valeur de la spline en $x = 3$ est donc $5,3125$.

Exercices suggérés du manuel !

- Exercices [a] suggérés : 1-8, 10, 12-14, 18, 21-26, 28-30
- Exercices fortement suggérés : 3, 13, 14, 18, 23, 24, 28

a. André Fortin : Analyse numérique pour ingénieurs, Presses Internationales Polytechnique 2016.

À Retenir !

Je dois pouvoir répondre aux questions [a] suivantes :

1. Je peux construire un polynôme d'interpolation par les méthodes de Vandermonde, de Lagrange et de Newton.
2. Je connais le terme d'erreur, comprends son caractère oscillatoire.
3. Je sais comment choisir des points pour construire une interpolation.
4. Je comprends le concept de spline, j'en connais les particularités et sais vérifier toutes ses propriétés (distinguer une spline d'une interpolation cubique par morceaux).
5. Je sais construire une splinecubique naturelle.

a. André Fortin : Analyse numérique pour ingénieurs, Presses internationales Polytechnique, Montréal, Québec (2011).