UNIVERSITÉ DE MONCTON
CAMPUS DE MONCTON

Examen Final - Algèbre linéaire (MATH 2673)

26 avril 2023, Durée 180 minutes (3h)

Professeur : Ibrahima Dione

Nom étudiant.e. : ______________________________

Numéro étudiant.e. : __________________________

Prenez le temps de lire l'examen au complet avant de commencer. Lisez attentivement chaque question. Vérifiez qu'il y a 10 pages à votre examen. L'examen est composé de **5 questions**, pour un total de 100 points.

- Ceci est un examen à livres fermés et aucune note du cours n'est permise.
- L'utilisation de tout appareil électronique est interdite.
- Répondez aux questions dans l'espace fourni.
- Utilisez le verso des feuilles si nécessaire.

Question 1 (20 points)

1. Soit $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un opérateur linéaire défini par

$$T_1(u, v) = (u + 2v, 3u + 4v).$$

Déterminez la représentation matricielle de l'opérateur T_1.

2. Soit P_2 l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux en la variable t. Soit l'application linéaire $F : \mathbb{R}^3 \to P_2$ définie par

$$F(x, y, z) = (x - 2y + z)t^2 + (z - x)t + 2y$$

Si B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $C = \{t^2, t, 1\}$ une base de P_2, calculez la représentation matricielle ${}_C[F]_B$ de F.

Exercice 2 (20 points)

Soit V l'espace vectoriel des fonctions réelles à une variable réelle et soit W un sous-espace vectoriel de V dont une base est $B = \{f, g\}$ où $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$. Soit $C = \{h, k\}$ où $h(x) = \sin x + \cos x$ et $k(x) = \cos x - \sin x$.

1. Montrez que C est une base de W.

2. Déterminez la matrice de passage de la base B à la base C.

Exercice 3 (25 points)

Soit l'opérateur linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$T(x, y, z) = (x + 2y, 2x + y, 2x - y + 3z).$$

1. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

2. L'opérateur T est-il diagonalisable ?

Exercice 4 (25 points)

Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (3, -1, 2, -1)$ et $v_2 = (-5, 9, -9, 3)$.

1. Déterminez une base orthogonale de W.

2. Trouvez la projection de $v = (4, 5, -5, 12)$ sur W.

Exercice 5 (10 points)

Soit A une matrice symétrique. Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de A. Soit X un vecteur propre de A associé à λ_1, et Y un vecteur propre de A associé à λ_2. Montrez que les vecteurs X et Y sont orthogonaux.