UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Calcul Différentiel (MATH 1073) - Chapitre 2: Limites et Dérivées

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

- L’idée de limite est la base du calcul différentiel (et même intégral).
- Ainsi, nous commencerons ce chapitre par l’examen des limites et de leurs propriétés.
- Le type de limite employé pour déterminer des tangentes et des vitesses introduira la notion de dérivée.
- Nous verrons également comment interpréter des dérivées comme taux de variation.
- Et nous apprendrons comment la dérivée d’une fonction nous renseigne sur la fonction elle-même.

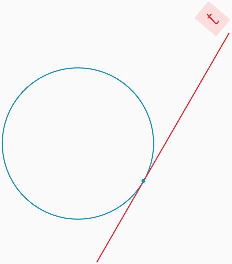
Les problèmes de tangente et de vitesse

- Nous verrons ici, comment des limites surviennent lorsque nous cherchons la tangente à une courbe ou la vitesse d'un objet.

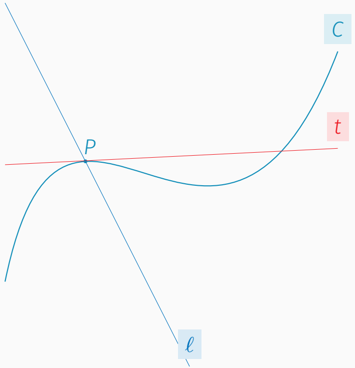
Définition

- Le mot tangente vient du latin tangens, qui signifie «toucher». Donc, une tangente à une courbe est une droite qui touche la courbe.

- Nous pouvons simplement suivre Euclide et dire qu'une tangente à un cercle est une droite qui coupe celui-ci une et une seule fois.



▷ Cependant, cette définition ne convient pas pour toutes les courbes:



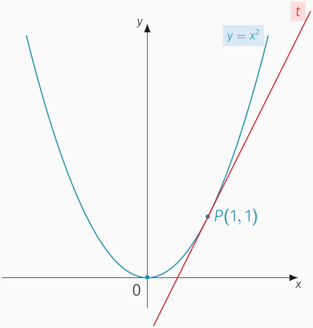
▷ Les droites ℓ et t passent par le point P de la courbe C:

⋆ La droite ℓ ne coupe C qu'une seule fois mais ne ressemble pas à l'idée que nous avons d'une tangente.

⋆ La droite t, pour sa part, ressemble à une tangente, mais elle coupe C deux fois.

Exemple de la tangente au point $P(1,1)$ à la parabole $y = x^2$

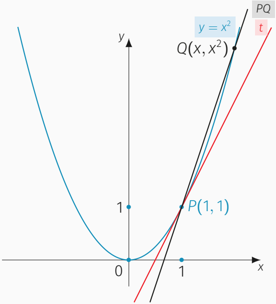
- Pour ne pas rester dans le vague, étudions le problème de la tangente t au point $P(1,1)$ à la parabole $y = x^2$.
- Nous pourrons obtenir l'équation de la tangente (une droite), dès que nous aurons déterminé sa pente m.
- Nous ne connaisons qu'un seul point de t : il en faut deux pour avoir m.



▷ En choisissant le point $Q(x, x^2)$ sur la parabole ($x \neq 1$), on peut calculer la pente m_{PQ} de la droite PQ:

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

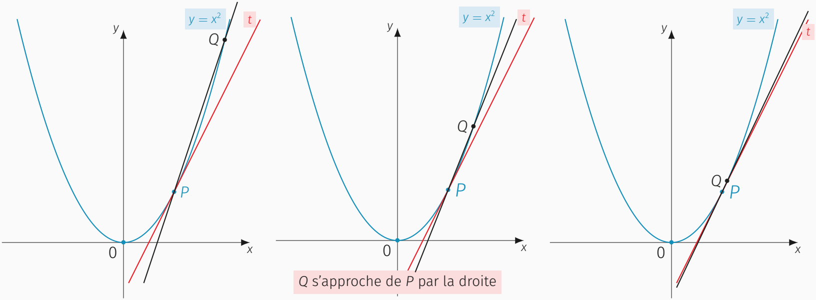


x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

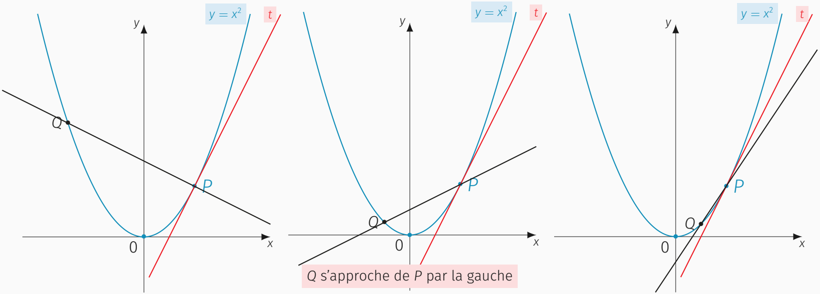
▷ Plus Q est proche de P (e.i. x est proche de 1), plus m_{PQ} est proche de 2.

▷ La pente m de la tangente serait égale à 2 car étant la limite de m_{PQ}:

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = m = 2.$$



Q s'approche de P par la droite



Q s'approche de P par la gauche

Supposons qu'une balle soit lâchée du faîte de la tour Eiffel, à 300 m au dessus du niveau du sol. Quelle est la vitesse de la balle 5 sec. plus tard?

- Galilée: La distance parcourue par un corps qui tombe librement, est proportionnelle au carré du temps

$$s(t) = 4.9t^2$$

- Il est difficile de déterminer la vitesse après 5 secondes car il s'agit d'envisager un seul instant ($t = 5$).

- Nous pouvons néanmoins approcher cette **vitesse instantanée** par la **vitesse moyenne** (sur un intervalle de temps $[5,\ 5+h]$):

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}} = \frac{s(5+h)-s(5)}{h} \tag{1}$$

Intervalle de temps	Vitesse moyenne (m/s)
$5 \leq t \leq 5+1$	53.9
$5 \leq t \leq 5+0.1$	49.49
$5 \leq t \leq 5+0.05$	49.245
$5 \leq t \leq 5+0.01$	49.049
$5 \leq t \leq 5+0.001$	49.0049

- En raccourcissant les intervalles de temps ($h \to 0$), la vitesse moyenne devient proche de $49\, m/s$.
- La **vitesse instantanée** à $t = 5$ est, par définition, la valeur limite de ces vitesses moyennes sur des périodes de plus en plus courtes $v = 49\, m/s$.
- Le calcul effectué en (1) est très semblable à celui de la tangente:

Il y a un lien très étroit entre le probléme de la tangente et celui de la vitesse.

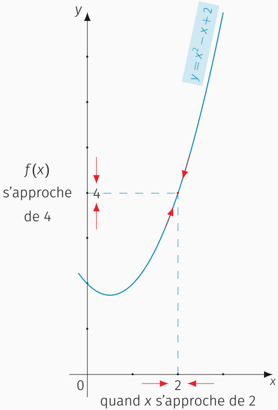
Et dans les deux cas, on fait toujours appelle au **calcul de la limite**!

La limite d’une fonction

Situation

- Nous nous tournons maintenant vers les manières numériques et graphiques de calculer les limites.

- Examinons le comportement de la fonction $f(x) = x^2 - x + 2$, pour des valeurs de x proches de 2.



x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

- Nous voyons, tant au tableau qu'au graphique de f, que lorsque x est proche de 2 (de part et d'autre), les valeurs de $f(x)$ sont proches de 4.

- Et nous pourrons rendre les valeurs de $f(x)$ arbitrairement proches de 4 en choisissant x suffisamment proche de 2.

Note: C'est le sens de l'expression «la limite de $f(x) = x^2 - x + 2$ quand x s'aproche de 2 est 4». Cela s'écrit

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

Définition

Nous disons que **la limite de $f(x)$, quand x tend vers a, est égale à L** et nous écrivons

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

si nous pouvons rendre les valeurs de $f(x)$ arbitrairement proche de L (aussi proche que nous le voulons) en prenant x suffisamment proche de a (à gauche ou à droite), mais non ègal à a.

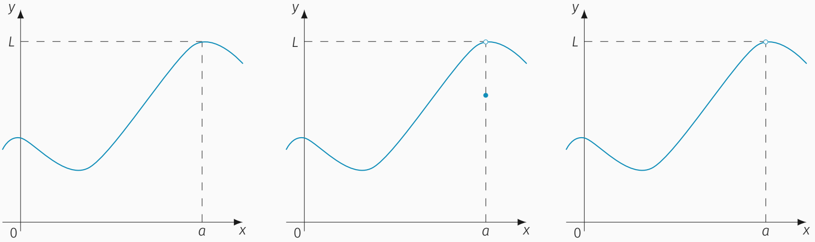
Note: Une autre façon de noter

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{est} \quad f(x) \longrightarrow L \;\text{ quand }\; x \longrightarrow a$$

qui se lit «$f(x)$ tend vers L quand x tend vers a».

- ▷ Dans la limite de $\lim_{x \to a} f(x)$, nous n'envisageons jamais $x = a$.

- ▷ La seule chose qui importe est que f soit définie *tout à coté* de a.



$f(a)$ **est définie et** $f(a) = L$ — $f(a)$ **est définie, mais** $f(a) \neq L$ — $f(a)$ **n'est pas définie**

- ▷ Et pourtant, dans chaque cas, indépendamment de ce qui se passe en a,

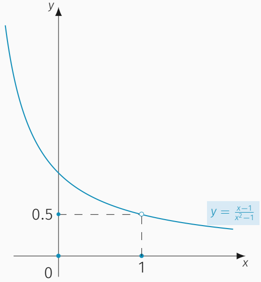
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Exemple 2.1: Conjecturez la valeur de la limite suivante:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$$

- On remarque que $f(x)$ n'est pas définie en $x = 1$.

$x < 1$	$f(x)$
0	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025



$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

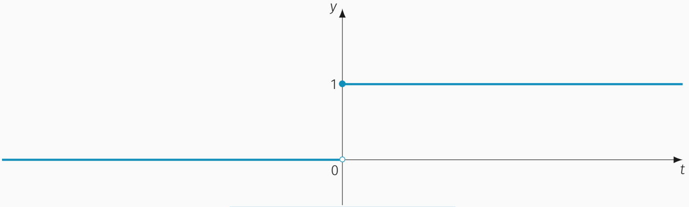
- Ces tableaux montrent les valeurs de $f(x)$ proches de 0.5, pour des valeurs de x proches de 1:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

La fonction de Heaviside H

La fonction de Heaviside H est définie par

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$



La fonction de Heaviside

- Lorsque t s'approche de 0 par la gauche, $H(t)$ s'approche de 0.
- Lorsque t s'approche de 0 par la droite, $H(t)$ s'approche de 1.
- Il n'y a pas un nombre unique duquel $H(t)$ s'approche lorsque t tend vers 0. Par conséquent, $\lim_{t\to 0} H(t)$ n'existe pas .

Limites unilatères

- La fonction $H(t)$ s'approche de 0 quand t tend vers 0 par la gauche et que $H(t)$ s'approche de 1 quand t tend vers 0 par la droite.

- Nous écrivons cela symboliquement de la manière suivante

$$\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0^+} H(t) = 1$$

- Le symbole «$t \to o^-$» est là pour indiquer que seules sont retenues les valeurs de t inférieures à 0.

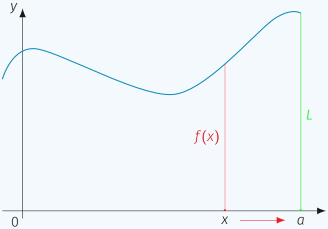
- De même, «$t \to o^+$» signifie que seules sont retenues les valeurs de t supérieures à 0.

Définition

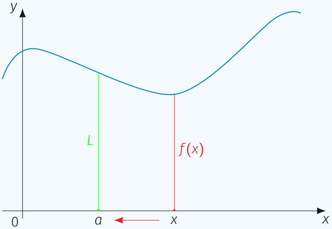
2.1 Nous affirmons que **la limite à gauche de $f(x)$, quand x tend vers a, est égale à** L et nous écrivons

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L,$$

si nous pouvons rendre les valeurs de $f(x)$ arbitrairement proche de L en prenant x suffisamment proche de a et **strictement inférieur** à a.



$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$



$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

2.2 De même, si nous exigeons que x soit supérieur à a, nous arrivons à **la limite à droite de** $f(x)$ **lorsque** x **tend** vers **a est égale à** L et nous écrivons

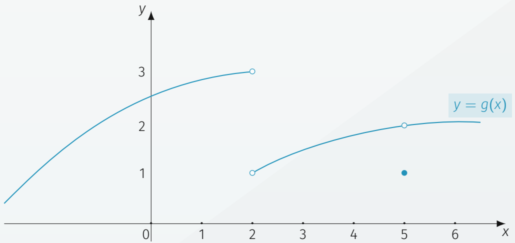
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Note: Le symbole «$x \to a^+$» signifie que nous admettons $x > a$.

3 En comparant les définitions **2.1** et **2.2**, nous avons

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Exemple 2.2: La fonction g est donnée par son graphique ci-dessous. Par la lecture du graphique, dites ce que valent (si elles existent) les limites suivantes:



- $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to 5^-} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to 5^+} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to 5} g(x)$

Calcul des limites par les lois algébriques des limites

Définition

Lois algébriques des limites

Supposons que c est une constante et que les limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} g(x)$$

existent. Alors, nous avons les lois suivantes

1. La limite d'une somme est égale à la somme des limites

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

2. La limite d'une différence est égale à la différence des limites.

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) - g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

3. La limite du produit d'une fonction par une constante est égale au produit de la limite par cette constante

$$\lim_{x \to a} \left[cf(x) \right] = c \lim_{x \to a} f(x)$$

4. La limite d'un produit est égale au produit des limites

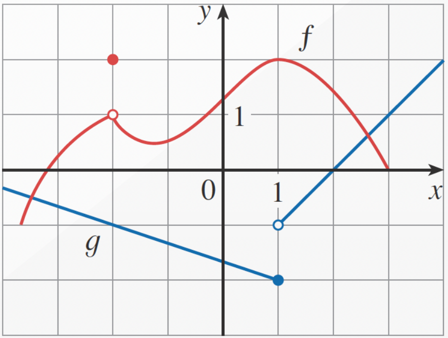
$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \times g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)$$

5. La limite d'un quotient est égale au quotient des limites (à condition que la limite du dénominateur ne soit pas nulle)

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{à consition que } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Exemple 3.1: Grâce aux lois algébriques des limites et au vu des graphiques de f et g présentés à la figure ci-dessous, calculez les limites suivantes si elles existent.

- $\lim\limits_{x\to -2} \left[f(x) + 5g(x)\right]$
- $\lim\limits_{x\to 1} \left[f(x) \times g(x)\right]$
- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$



6. En utilisant de façon répétée la loi du produit dans le cas $g(x) = f(x)$, nous obtenons la **loi de la puissance** suivante

$$\lim_{x\to a} \left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n, \quad \text{où } n \text{ est un entier naturel}$$

7.-8. Pour appliquer ces six lois, nous avons besoin des deux limites particulières

$$\lim_{x\to a} c = c \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} x = a$$

9. Si nous envisageons la loi **6.** dans le cas particulier $f(x) = x$ et appliquons la loi **8.**, nous obtenons la limite particulière

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n \quad \text{où } n \text{ est un nombre entier naturel.}$$

10. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ où n est un entier naturel.

(Dans le cas où n est pair, on suppose $a > 0$.)

11. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ où n est un entier naturel.

(Dans le cas où n est pair, on suppose $\lim_{x\to a} f(x) > 0$.)

Exemple 3.2: Calculez les limites suivantes en justifiant chaque étapes.

- $\lim\limits_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$
- $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

Propriété de la substitution directe

Si f est une fonction polynomiale ou rationelle et a un point de son domaine de définition, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Note:

- Les fonctions qui jouissent de cette dernière propriété sont dites **continues en** a.
- Toutefois, toutes les limites ne s'obtiennent pas par substitution directe (voir l'exemple suivant).

Exemple 3.3: Calculez $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Si $f(x) = g(x)$ lorsque $x \neq a$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$, à condition que ces limites existent.

Exemple 3.4: Calculez $\lim_{x \to 1} g(x)$ pour

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 1, \\ \pi & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Exemple 3.5: Que vaut $\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h}$?

Exemple 3.6: Que vaut $\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$?

Exemple 3.7: Montrez que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

Exemple 3.8: Démontrez que $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ n'existe pas.

Théorème

Si $f(x) \leq g(x)$ quand x est voisin de a (sauf peut-être en a) et si les limites de f et g existent pour x tendant vers a, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

3 Théorème du sandwich

Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quand x est voisin de a (sauf peut-être en a) et si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

alors

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Exemple 3.9: Montrez que $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0$.

La continuité

Définition

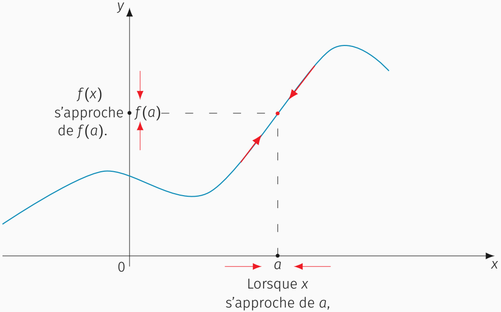
1 Une fonction est **continue en un nombre** a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Cette définition requiert trois choses pour que f soit continue en a:

- $f(a)$ doit être définie (c'est à dire que a appartient au domaine de définition de f);
- $\lim_{x \to a} f(x)$ doit exister;
- $\lim_{x \to a} f(x)$ doit égaler $f(a)$ (c'est à dire $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$).

f est continue en a si $f(x)$ s'approche de $f(a)$ lorsque x s'approche de a.

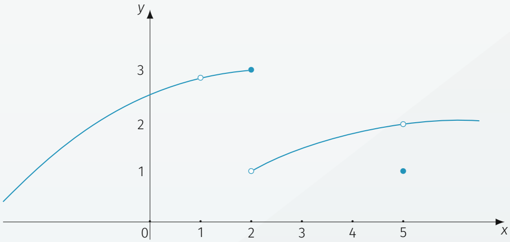


Note:

- On dit que f est **discontinue en** a (ou admet un **point de discontinuité en** a) si f n'est pas continue en a.

- Nous pouvons penser à une fonction continue comme à une fonction dont la courbe ne présente aucune interruption:
  Le graphique peut être tracé sans jamais lever la plume du papier.

Exemple 4.1: À la lecture du graphique de la fonction f présentée à la figure ci-dessous, dites en quels points elle est discontinue et pourquoi.



Exemple 4.2: Où les fonctions suivantes sont-elles discontinues ?

- $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2 Une fonction f est **continue à droite en un point** a si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a),$$

et **continue à gauche en un nombre** a si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Exemple 4.3: La fonction **partie entière de** x, notée $f(x) = [x]$, est continue à droite en chaque valeur entière n de la variable mais discontinue à gauche car

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [x] = n = f(n),$$

tandis que $$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [x] = n - 1 \neq f(n).$$

3 Une fonction f est **continue sur un intervalle** si elle est continue en chaque point de cet intervalle.

3.1 Si f n'est définie que d'un côté de l'extrémité de l'intervalle, il faut comprendre *continue* en l'extrémité comme *continue à droite* ou *continue à gauche*.

Exemple 4.4: Montrez que la fonction $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ est continue sur l'intervalle $[-1, 1]$.

▷ Au lieu d'invoquer les définitions 1, 2 et 3 pour vérifier la continuité d'une fonction, il est souvent plus efficace de faire appel à ce théorème:

Théorème

4 Si f et g sont des fonctions continues en a et si c est une constante, alors les fonctions que voici sont aussi continues en a:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

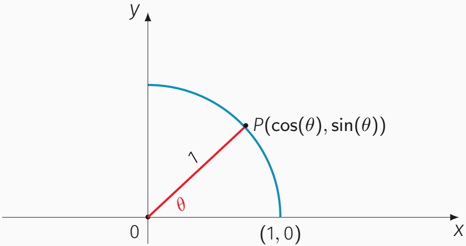
4. $f \times g$ **5.** $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

5 **a.** Toute fonction polynomiale est continue partout; autrement dit, elle est continue sur tout $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

b. Toute fonction rationnelle est continue là où elle est définie; autrement dit, elle est continue sur son domaine de définition.

Exemple 4.5: Calculez $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$.

- Les fonctions sinus et cosinus sont continues.
- En effet, les coordonnées du point P sont $(\cos\theta, \sin\theta)$.



- Lorsque θ tend vers 0, le point P se dirige vers le point $(1, 0)$.

6 Ce qui mène $\cos\theta$ vers 1 et $\sin\theta$ vers 0, et cela s'écrit

$$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1 \quad \lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$$

7 Toutes les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition:

polynomiales	rationnelles
racines	trigonométriques
exponentielles	logarithmes

Exemple 4.6: où la fonction $f(x) = \frac{\ln x + e^x}{x^2 - 1}$ est-elle continue ?

Exemple 4.7: Calculez $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}$.

8 Si f est continue en b et si $\lim_{x\to a} g(x) = b$, alors

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b). \quad \text{On l'écrit encore} \quad \lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

9 Si g est continue en a et f continue en $g(a)$, alors $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ est continue en a.

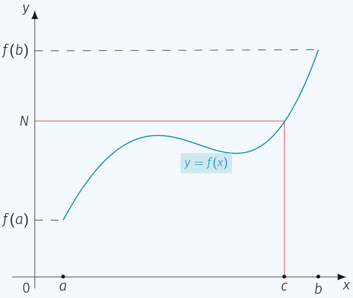
Exemple 4.8: Où les fonctions suivantes sont-elles continues ?

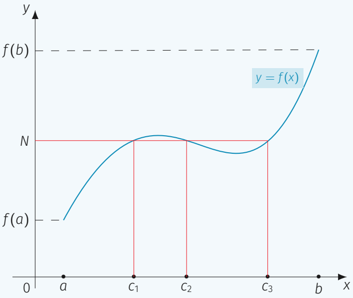
a. $h(x) = \sin x^2$

b. $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

10 Le théorème des valeurs intermédiaires

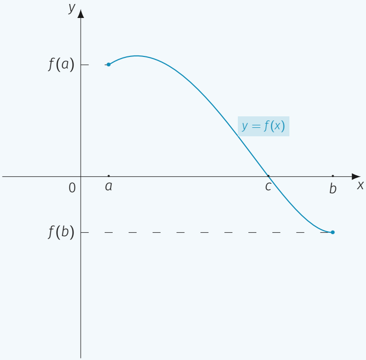
Supposons que f soit **continue** sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et appelons N un nombre strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors, il existe un nombre c dans $]a, b[$ tel que $f(c) = N$.

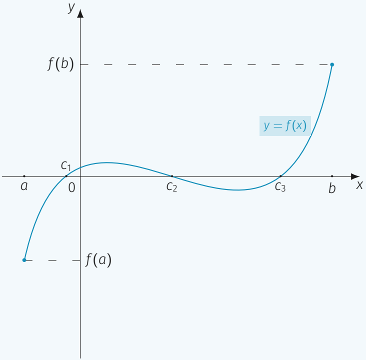




10.1 Existence d'un zéro d'une fonction continue

Si f est une fonction **continue** sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de **signes opposés** (c'est à dire $f(a) \times f(b) < 0$), alors la fonction $f(x)$ s'annule au moins une fois dans l'intervalle ouvert $]a, b[$.





Exemple 4.9: Montrez qu'une racine de l'équation

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

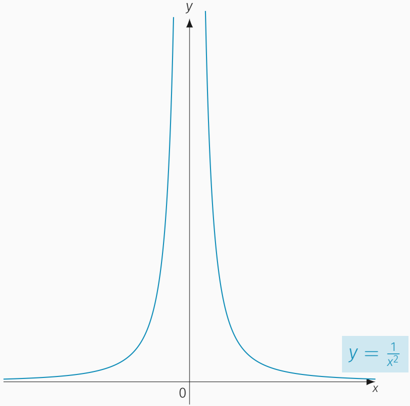
est située entre 1 et 2.

Exemple 4.10: Montrez que $x^3 + x + 1 = 0$ a une racine entre -1 et 1.

Les limites infinies et à l’infini

- Sur la base du tableau des valeurs et au vu du graphique de $y = 1/x^2$, nous pouvons conclure que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ n'existe pas.

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1.0	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10 000
± 0.001	1 000 000



- En effet, les valeurs de $\frac{1}{x^2}$ peuvent être rendues arbitrairement grandes pourvu que x soit suffisamment proche de 0.

▷ Nous traduisons ce type de comportement par l'écriture

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Attention !

Ceci ne signifie nullement que nous considérons $+\infty$ comme un nombre, ni que la limite existe. Cette notation exprime seulement la manière particulière que la limite a de ne pas exister.

Définition

1 Soit une fonction définie de part et d'autre de a, sauf peut-être en a elle même. Alors,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

signifie que les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement grandes à condition de prendre x suffisamment proche de a, mais non égal à a.

2 La droite $x = a$ porte le nom d'**asymptote verticale** à la courbe $y = f(x)$ si l'une au moins des situations suivantes est vérifiée:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Exemple 5.1: Par exemple, l'axe $0y$ est une asymptote verticale à la courbe $y = 1/x^2$ parce que

$$\lim_{x \to 0} (1/x^2) = +\infty.$$

Exemple 5.2: Cherchez $\lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}$ et $\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}$.

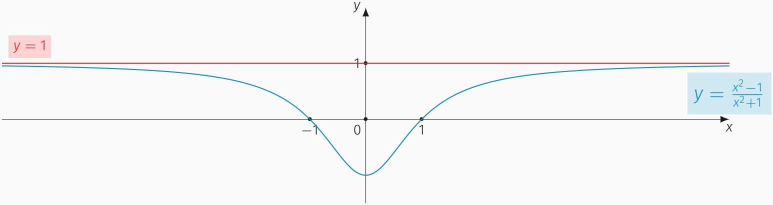
3 Nous connaissons deux autres fonctions qui présentent des asymptotes vericales, ce sont $y=\mathbf{tg}\,x$ et $y=\ln x$. Par exemple

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty.$$

- Ici, nous rendons x arbitrairement grand (positif ou négatif) et regardons ce qui en resulte pour $y = f(x)$.

- Commençons par examiner le comportement de la fonction $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, lorsque x devient grand; c'est à dire

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}$$



Note: Nous pouvons observer que, plus les valeurs de x sont grandes, plus les valeurs correspondantes de $f(x)$ sont proches de 1. Cela s'écrit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L, \text{ où } L = 1.$$

Définition

4 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]a, +\infty[$. Alors

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

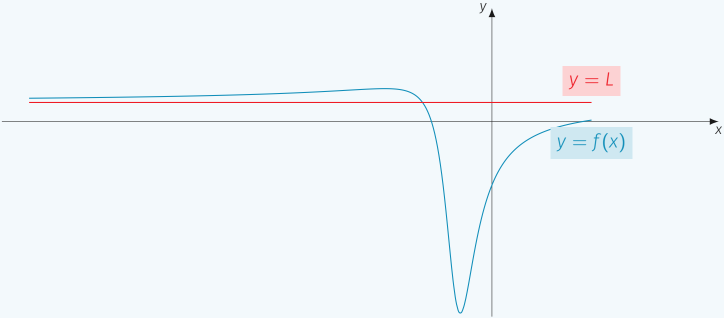
signifie que les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement proches de L à condition de prendre x suffisamment grand.[a]

[a] Une autre notation de la limite $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ est:

$$f(x) \longrightarrow L \quad \text{lorsque} \quad x \longrightarrow \infty.$$

5 La droite $y = L$, porte le nom d'**asymptote horizontale** à la courbe $y = f(x)$ si

$$\text{soit } \lim_{x\to\infty} f(x) = L, \text{ soit } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$



Exemple 5.3: Calculez les limites

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}.$$

6 Si n est un nombre entier strictement positif,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Exemple 5.4: Calculez la limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

Note: Pour calculer la limite à l'infini d'une fonction rationnelle, il est donc utile de diviser le numérateur et le dénominateur par la plus haute puissance de x qui figure au dénominateur.

Exemple 5.5: Calculez la limite

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)$$

Exemple 5.6: Calculez la limite

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$$

Les limites infinies à l'infini La notation

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

sert à indiquer que les valeurs de $f(x)$ deviennent grandes lorsque x devient grand. Des significations analogues sont attachées aux expressions suivantes:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Exemple 5.7: Déterminez $\lim_{x\to\infty}(x^2 - x)$.

Exemple 5.8: Déterminez $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{3-x}$.

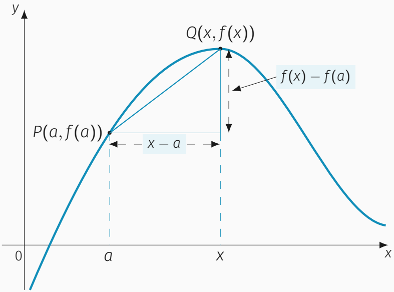
Dérivées et taux de variation

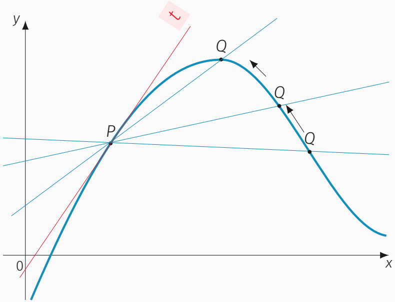
- La détermination de la tangente à une courbe et celle de la vitesse d'un object, font tous les deux intervenir le même type de limite.
- Ce type particulier de limite est appelé *dérivée*!
- Cette limite peut être également interprétée comme un *taux de variation*.

▷ Nous désirons trouver la tangente au point $P(a, f(a))$ d'une courbe C d'équation $y = f(x)$.

▷ Pour cela, nous choisissons un point voisin $Q(x, f(x))$, distint de P, et calculons la pente de la sécante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$





▷ Nous faisons glisser Q le long de C en direction de P (ainsi x **tend vers** a).

- Si m_{PQ} s'approche d'un nombre m, alors nous définissons comme **tangente** t la droite qui passe par P de pente m.

- Ce qui revient à dire que la tangente est la droite qui occupe la position limite de la sécante PQ, lorsque Q s'approche de P.

Définition

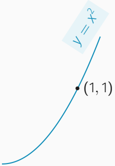
1 La **droite tangente** à la courbe $y = f(x)$ au point $P(a, f(a))$ est la droite qui passe par P et de pente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

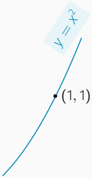
à supposer que cette limite existe.

Exemple 6.1: Établissez une équation de la tangente à la parabole $y = x^2$ au point $P(1, 1)$.

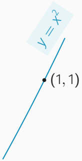
La pente de la tangente en un point, est encore appelée **pente de la courbe** en ce point. Car en zoomant autour du point, la courbe ressemble fort à une ligne droite.



1. Vue rapprochée autour du point $(1, 1)$



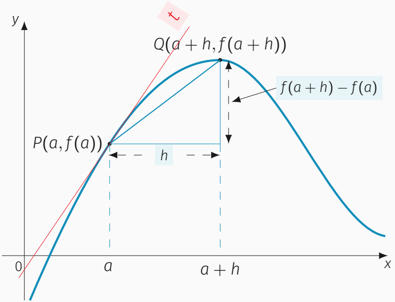
2. Vue rapprochée autour du point $(1, 1)$



3. Vue rapprochée autour du point $(1, 1)$

- En posant $h = x - a$, alors $x = a + h$ et la pente de la sécante PQ s'écrit

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$



2 Lorsque x tend vers a, h s'approche de 0 et l'expression de la pente de la tangente devient:

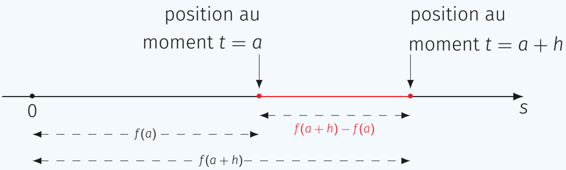
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemple 6.2: Trouvez une équation de la tangente à l'hyperbole $y = 3/x$ au point $(3, 1)$.

- Un object se déplace en ligne droite selon l'équation du mouvement $s = f(t)$.

- s est le déplacement (distance orienté) de l'object depuis le moment choisi comme origine du temps jusqu'au temps t.

- On appelle **fonction position** la fonction f qui décrit le mouvement de l'objet.



- Le changement de position de l'object est donné, durant l'intervalle de temps $t = a$ jusqu'à $t = a + h$, par $f(a+h) - f(a)$.

▷ La vitesse moyenne de l'object sur cet intervalle de temps est calculée

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

3 La **vitesse instantanée** $\nu(a)$ au temps $t = a$, est la limite de la vitesse moyenne

$$\nu(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Note: Le même type de limite intervient pour la pente que pour la vitesse.

4 La **dérivée d'une fonction** f **en un nombre** a, noté $f'(a)$, est

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

pour autant que cette limite existe.

5 Si nous choisissons $x = a + h$, Cette dérivée s'écrit encore

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exemple 6.3: Calculez la dérivée de la fonction $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en $x = a$.

▷ À partir de la définition 4, la pente m est aussi la dérivée $f'(a)$:

Note:

- La tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $P(a, f(a))$ est la droite qui passe par $(a, f(a))$ et dont la pente est égale à $f'(a)$, la dérivée de f en a.
- Nous pouvons écrire une équation de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ comme suit

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Exemple 6.4: Écrivez une équation de la tangente à la barabole $y = x^2 - 8x + 9$ au point $(3, -6)$.

- La variation de la variable x de x_1 à x_2 est appelée **incrément de** x et est

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

- La variation de y qui en resulte à travers la fonction $y = f(x)$ est

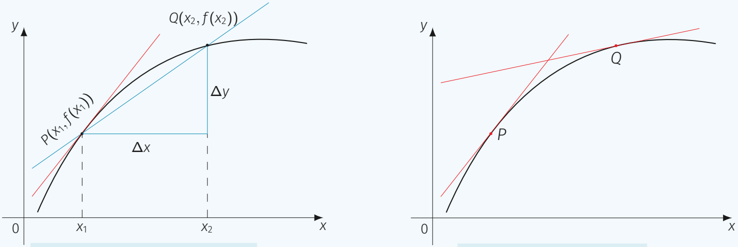
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

- Le **taux moyen de variation de** y **par rapport à** x sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, noté $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, est défini par le quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

6 Le **taux de variation instantané de** y **par rapport à** x en $x = x_1$ est définie par la limite du taux moyen de variation

$$\text{taux de variation instantané} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



taux moyen de variation $= m_{PQ}$
taux de variation instantané = pente tangente en P

Les valeurs de y changent rapidement en P et lentement en Q

Note: La dérivée $f'(a)$ est le **taux de variation instantané** de $y = f(x)$ par rapport à x quand $x = a$.

La dérivée comme fonction

- Jusqu'ici, nous avons étudié la dérivée d'une fonction en un **point fixe** a:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{2}$$

- À partir d'ici, nous considérerons que le nombre a est une variable x.

Définition

2 À tout nombre x pour lequel la limite en (2) existe, est appelée la **dérivée de f en x** et est définie par

$$x \longrightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{3}$$

Note:

- La fonction f' est appelée **fonction dérivée** de f parce qu'elle a été «dérivée» de f par la limite en (3).

- Le domaine de définition de f' est l'ensemble $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$.

Exemple 7.1:

- Cherchez une formule pour f', étant donné que f est définie par $f(x) = x^3 - x$.
- Comparez graphiquement f et f'.

Exemple 7.2: Déterminez la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$. Recherchez son domaine de définition.

Exemple 7.3: Cherchez f' si $f(x) = \frac{1-x}{2+x}$.

D'autres notations

- Sur la base de la notation traditionnelle $y = f(x)$ d'une fonction, nous avons d'autres notations pour désigner la dérivée:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = y' &= \frac{dy}{dx} && \text{(ou bien)} \\
&= \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) && \text{(ou bien)} \\
&= Df(x) = D_x f(x).
\end{aligned}
$$

- Les symboles D et d/dx sont appelés des **opérateurs de dérivation**.

3 **3.1** Une fonction est **dérivable en** a si $f'(a)$ existe.

3.2 Elle est **dérivable sur un intervalle ouvert** $]a, b[$ (ou $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, +\infty[$) si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

Exemple 7.4: Où la fonction $f(x) = |x|$ est-elle dérivable ?

- La continuité et la dérivabilité sont des propriétés souhaitées pour une fonction.

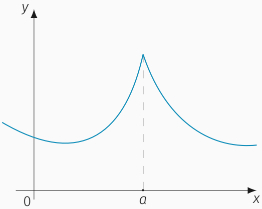
Théorème

Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a.

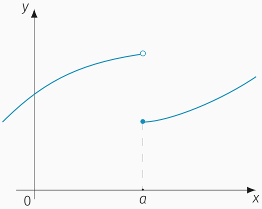
- Dès que la courbe représentative d'une fonction présente des «coins» (**points anguleux**), alors la fonction n'est pas dérivable en ces points.

> **Note:** Lorsqu'on essaie de calculer la dérivée $f'(a)$ en ces points, on trouve que les limites à droite et à gauche diffèrent.

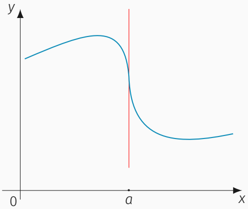
- Si une fonction **n'est pas continue** en a, alors elle n'y est pas dérivable.



Un point anguleux



Un point de discontinuité



Une tangente verticale

- Si la fonction présente une **tangente verticale** en un point a, alors elle n'est pas dérivable en celui-ci.

Note: La fonction est continue en a, mais sa courbe présente une tangente verticale en a et nous avons

$$\lim_{x \to a} \left| f'(x) \right| = \infty$$

- Si f est fonction dérivable, alors sa dérivée f' est aussi une fonction.
- À son tour, la fonction dérivée f' peut aussi être dérivée et on le note f''.

Définition

1 La **dérivée seconde** de f, notée f'', est définie comme étant la dérivée de la dérivée de $y = f(x)$

$$f'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Exemple 7.5: Soit $f(x) = x^3 - x$. Cherchez une formule pour $f''(x)$ et interprétez cette fonction.

Note: Une dérivée seconde, est vue comme un taux de variation d'un taux de variation. L'exemple le plus connu est celui de l'**accélération**.

Exemple 7.6:

Soit $s(t)$ la fonction position d'un mobile qui se déplace en ligne droite.

- La première dérivée représente la vitesse $\nu(t)$ du mobile

$$\nu(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

- La taux de variation instantané de la vitesse par rapport au temps est l'**accélération** $a(t)$ du mobile

$$a(t) = \nu'(t) = s''(t) \quad \text{où en encore} \quad a(t) = \frac{d\nu}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

2 **2.1** La **dérivée troisième** f''' est la dérivée de la dérivée seconde f'':

$$f''' = (f'')' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

2.2 La **dérivée** n^{ime} de f est noté $f^{(n)}$ et s'obtient après n dérivations successives de f:

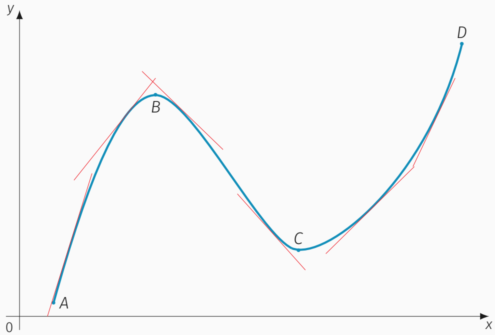
$$y^n = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Exemple 7.7: Quelles sont les dérivées troisième et quatrième de $f(x) = x^3 - x$?

Que dit f' à propos de f?

- La fonction $f'(x)$ est la pente de la courbe $y = f(x)$ au point $(x, f(x))$.

- Il est donc normal que $f'(x)$ fournisse de l'information sur $f(x)$.



- Cette figure montre comment la dérivée de $f'(x)$ informe sur la **tendance** de la fonction $f(x)$.

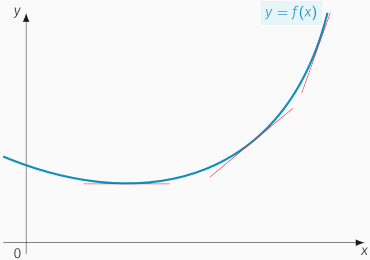
Que dit f' à propos de f?

- Quand $f'(x) > 0$ sur un intervalle, alors f est **strictement croissante** sur cet intervalle.
- Quand $f'(x) < 0$ sur un intervalle, alors f est **strictement décroissante** sur cet intervalle.

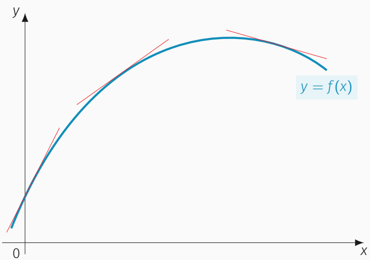
- Voyons comment le signe de $f''(x)$ caractérise l'**allure** du graphique de f.

- Du fait que $f'' = (f')'$, nous savons que quand $f''(x)$ est strictement poitive, alors f' croît.

- C'est à dire, de gauche à droite, les pentes des tangentes à la courbe $y = f(x)$ sont de plus en plus fortes.



$f''(x) > 0$, alors les pentes augmentent et f est convexe.



$f''(x) < 0$, alors les pentes diminuent et f est concave.

- Quand $f''(x) > 0$ sur un intervalle, alors f est **convexe** sur cet intervalle (car f' est croissante).

- Quand $f''(x) < 0$ sur un intervalle, alors f est **concave** sur cet intervalle (car f' est décroissante).

Exercices Suggérés

1. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } 1 < x \leq 1 \\ 1 + x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   - Tracez la courbe représentative de f.
   - Étudiez le comportement de f près de -1, de 0 et de 1.

2. L'équation $s(t) = 1.86t^2$ décrit la distance, en mètres, parcourue en t secondes par un corps en chute libre près de la surface de la planète Mars.
   - Quelle est l'accélération due à la gravitation près de la surface de Mars?
   - Combien de secondes seront nécessaires pour que la vitesse du corps en chute libre atteigne $30m/s$?

3. En utilisant la définition de la dérivée exprimée comme une limite, calculez la dérivée de $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

4. Montrez que l'équation $x - \cos x = 0$ a au moins une racine réelle.

5. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{1 - x}$$

Quelle valeur doit-on donner à $f(1)$ pour rendre f continue en $x = 1$? Justifiez votre réponse.

6. Trouvez une équation de la tangente au graphe de $f(x) = x^3$ au point d'abscisse $x = 1$.

7. Calculez les limites suivantes:

- $\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2}{x}-1}{x^2-2x}$
- $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{2x-3+x^2}$
- $\lim_{x\to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x\to -2} \frac{|x+2|}{x+2}$
- $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x^3-8}$
- $\lim_{x\to 1} \frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3}$

8. Calculez les limites suivantes:

- $\lim_{x\to 0} x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x\to \infty} \frac{5x^3+2x+1}{4x^2+3x+4}$
- $\lim_{x\to 2} \ln\left(\frac{x^2-3x+2}{x-2}\right)$
- $\lim_{x\to -\infty} \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}}$

9. Quelle valeur doit-on donner à la constante k pour que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 2kx & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

soit continue en $x = 3$?

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)
- Disponibilité:

  Lundi 13:00 - 15:00, MRR B-214

  Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214

  Jeudi 12:00 - 13:15, MRR B-214