MATH 2413 - Chapitre 4: Suites et Séries

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

- Définitions et notations d’une suite
- Convergence et divergence d’une suite
- Suites bornées et suites monotones
- Définition d’une série

A Étudier la convergence ou divergence de suites en évaluant leur limite.

B Éffectuer la somme infinie des termes de ces suites, appelés «séries».

C Déterminer, à l'aide de différents critères, la convergence ou la divergence de séries.

Définitions et notations d’une suite

- Nous avons étudié Jusqu'ici des fonctions définies de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
- Ici, ce chapitre portera sur des fonctions de E dans $\mathbb{R}$, où $E \subseteq \mathbb{N}$.

Définition

1 Une **suite** est une fonction dont:

- ⋆ le domaine de définition est un ensemble E, où $E \subseteq \mathbb{N}$,
- ⋆ et dont l'image est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1: Déterminons le domaine et l'image des suites suivantes.

- $f(n) = \frac{2}{3^n}$, où $n \geq 4$. Puisque $n \in \mathbb{N}$ et que $n \geq 4$, nous avons

  $$dom(f) = \{4, 5, 6, \cdots, n, \cdots\} \text{ et } ima(f) = \left\{\frac{2}{3^4}, \frac{2}{3^5}, \frac{2}{3^6}, \cdots, \frac{2}{3^n}, \cdots\right\}$$

  Nous pouvons définir la suite précédente par la notation $\left\{\frac{2}{3^n}\right\}_{n\geq 4}$.

- $\{(-1)^n(2n+1)\}_{n\geq 0}$. Dans ce cas, $f(n) = (-1)^n(2n+1)$, où $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

  $$dom(f) = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

  $$ima(f) = \{1, -3, 5, -7, \cdots, (-1)^n(2n+1), \cdots\}$$

Note: Par convention, lorsque la valeur initiale du domaine de la suite n'est pas donnée, cette valeur initiale est 1.

Exemple 1.2: Déterminons le domaine et l'image de la suite $\left\{\frac{3}{n}\right\}$.

$$dom(f) = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$$
$$ima(f) = \left\{3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{3}{n}, \cdots\right\}$$

2 De façon générale, nous notons $\{a_n\}$, où $n \in \mathbb{N}^{\star}$, la suite dont les termes sont a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$, où

a_1 correspond au **premier terme** de la suite,

a_2 correspond au **deuxième terme** de la suite,

$\vdots$

a_n correspond au n^e **terme** de la suite

et a_n est appelé **terme général** de la suite; nous écrivons

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

Exemple 1.3: Déterminons les cinq premiers termes de la suite $\{n!\}$.

En posant $n = 1$, nous trouvons $a_1 = 1! = 1$;

en posant $n = 2$, nous trouvons $a_2 = 2! = 2$;

en posant $n = 3$, nous trouvons $a_3 = 3! = 6$;

en posant $n = 4$, nous trouvons $a_4 = 4! = 24$;

en posant $n = 5$, nous trouvons $a_5 = 5! = 120$;

d'où $\{n!\} = \{1, 2, 6, 24, 120, \cdots, n!, \cdots\}$.

$$\{n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

$$\{2^n\} = \{2, 4, 8, 16, 32, \cdots\}$$

$$\{2n\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$$

$$\{3^n\} = \{3, 9, 27, 81, 243, \cdots\}$$

$$\{2n+1\} = \{3, 5, 7, 9, 11, \cdots\}$$

$$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \cdots\}$$

$$\{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, 25, \cdots\}$$

$$\{(-1)^{n+1}\} = \{1, -1, 1, -1, 1, \cdots\}$$

$$\{n^3\} = \{1, 8, 27, 64, 125, \cdots\}$$

$$\{n!\} = \{1, 2, 6, 24, 120, \cdots\}$$

Exemple 1.4:

- ▷ Déterminons le terme général de la suite $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \cdots\right\}$.

  - ⋆ Le numérateur de chaque terme, soit $1, 2, 3, 4, \cdots$, correspond aux termes de la suite $\{n\}$;

  - ⋆ le dénominateur de chaque terme soit $2, 5, 10, 17, \cdots$, est égal à $1^2+1, 2^2+1, 3^2+1, 4^2+1, \cdots$, et correspond aux termes de la suite $\{n^2+1\}$. D'où $\boxed{a_n = \frac{n}{n^2+1}}$.

- ▷ Déterminons le terme général de la suite $\left\{\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{-1}{16}, \cdots\right\}$.

  - ⋆ Le numérateur prend successivement les valeurs 1 et -1, et correspond aux termes de la suite $\{(-1)^{n+1}\}$;

  - ⋆ le dénominateur de chaque terme, soit $2, 4, 8, 16, 32, \cdots$, est égal à $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \cdots$, et correspond aux termes de la suite $\{2^n\}$. D'où $\boxed{a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}}$.

3 Une suite est définie par **récurrence** lorsque:

- ⋆ la valeur du premier terme est donnée
- ⋆ et que le terme général est défini en fonction du terme précédent (ou des termes précédents).

Exemple 1.5:

▷ Déterminons les cinq premiers termes de la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_1 = 5 \text{ et } a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}, \text{ si } n \geq 2$$

Pour trouver a_2, a_3, a_4, a_5, il faut utiliser l'égalité $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$, où $n = 2, 3, 4$ et 5. L'égalité précédente se traduit de la façon suivante:

$$\text{chaque terme } = 1 + \frac{1}{\text{terme précédent}}, \text{ pour } n \geq 2. \text{ Ainsi,}$$

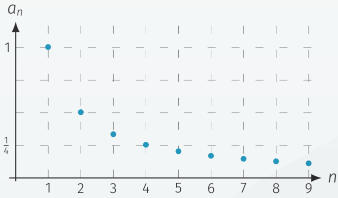
- $$a_2 = 1 + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{5}, \quad (\text{car } a_1 = 5)$$
$$= \frac{6}{5}$$
- $$a_3 = 1 + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{6}{5}\right)}, \quad \left(\text{car } a_2 = \frac{6}{5}\right)$$
$$= \frac{11}{6}$$
- $$a_4 = 1 + \frac{1}{a_3} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{11}{6}\right)}, \quad \left(\text{car } a_3 = \frac{11}{6}\right)$$
$$= \frac{17}{11}$$
- $$a_5 = 1 + \frac{1}{a_4} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{17}{11}\right)}, \quad \left(\text{car } a_4 = \frac{17}{11}\right)$$
$$= \frac{28}{17}$$

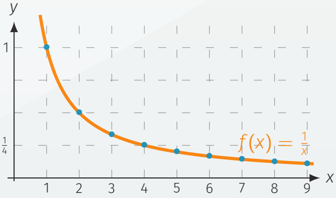
d'où $\{a_n\} = \left\{5, \frac{6}{5}, \frac{11}{6}, \frac{17}{11}, \frac{28}{17}, \cdots\right\}$.

- 1re façon: dans le plan cartésien, en situant les points (n, a_n);
- 2^{e} façon: sur la droite réelle, en situant les valeurs $a_1, a_2, a_3, \cdots$

Exemple 1.6:

▷ Représentons la suite $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ et la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1, +\infty[$.





▷ Représentons graphiquement sur la droite réelle la suite $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Convergence et divergence d’une suite

Définition

1. Une suite $\{a_n\}$ **converge** vers le nombre L si

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L, \text{ où } L \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, nous disons que la suite est **convergente**.

2. Une suite $\{a_n\}$ **diverge** si

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty, \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} a_n \text{ n'existe pas.}$$

Dans ce cas, nous disons que la suite est **divergente**.

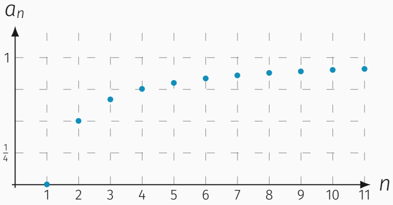
▷ $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$

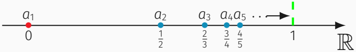
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n} \text{ est une indétermination de la forme } \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Levons l'indétermination:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) && \text{(car } n\neq 0\text{)} \\
&= 1 && \text{(car } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0\text{)}
\end{aligned}$$

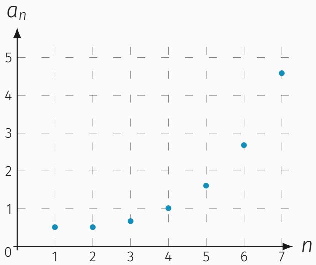
D'où la suite $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ converge vers 1.

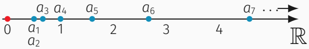




$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}=1}$$

▷ $\left\{\frac{2^n}{4n}\right\}$, c'est-à-dire $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{8}{5}, \frac{8}{3}, \frac{32}{7}, \cdots\right\}$. D'où la suite $\left\{\frac{2^n}{4n}\right\}$ est divergente.





$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{4n} = +\infty}$$

Théorème

Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$, deux suites. Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = M$, où $L \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$, alors:

1 Limite d'une somme (différence) de suites

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \pm \lim_{n\to+\infty} b_n = L \pm M$$

2 Limite du produit d'une suite par une constante

$$\lim_{n\to+\infty}(kb_n) = k \lim_{n\to+\infty} b_n = kM, \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

3 Limite d'un produit de suites

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \to +\infty} a_n \right) \left(\lim_{n \to +\infty} b_n \right) = LM$$

4 Limite d'un quotient de suites

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \left(\lim_{n \to +\infty} a_n \right) / \left(\lim_{n \to +\infty} b_n \right) = \frac{L}{M}, \text{ si } b_n \neq 0 \text{ pour tout } n \geq m,$$

où $m \in \mathbb{N}$, et $M \neq 0$

Exemple 2.1: Soit les suites $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ telles que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 5$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = -4$ et $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$.

▷ $\{a_n b_n\}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) &= \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right)\\ &= 5(-4)\\ &= -20\end{aligned}$$

d'où $a_n b_n$ converge vers -20.

▷ $\left\{\frac{2a_n+c_n}{b_n}\right\}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2a_n+c_n}{b_n}\right) &= 2\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)/\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right)\\ &\quad + \left(\lim_{n\to+\infty} c_n\right)/\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right)\\ &= 2\left(\frac{5}{-4}\right) + \left(\frac{0}{-4}\right)\\ &= \frac{-5}{2}\end{aligned}$$

d'où $\left\{\frac{2a_n+c_n}{b_n}\right\}$ converge vers $\frac{-5}{2}$.

Suites bornées et suites monotones

Définition

Une suite $\{a_n\}$, où $n \in \mathbb{N}$, est

1. **croissante** si $a_n \leq a_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$;
2. **décroissante** si $a_n \geq a_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$;
3. **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Exemple 3.1: Déterminons si la suite $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ est croissante ou décroissante.

- ⋆ Puisque $a_n = \frac{1}{n^2}$, nous avons $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$.
- ⋆ Ainsi $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}$, (car $n^2 < (n+1)^2, \forall\, n \in \mathbb{N}$).
- ⋆ D'où la suite $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ est décroissante.

Définition

La suite $\{a_n\}$, où $n \in \mathbb{N}$, est:

1. **bornée supérieurement** s'il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$, tel que

$$a_n \leq M, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

> Nous dirons que M est un **majorant**. De plus, nous appelons **borne supérieure**, notée B, le plus petit des majorants;

2. **bornée inférieurement** s'il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$, tel que

$$m \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

> Nous dirons que m est un **minorant**. De plus, nous appelons **borne inférieure**, notée b, le plus grand des minorants;

3. **bornée** si elle est bornée supérieurement et inférieurement.

Exemple 3.2: Soit la suite $\left\{\frac{2n+1}{n}\right\}$.

- ▷ Déterminons si la suite est bornée.
  - ⋆ En énumérant les termes de cette suite, nous avons:

$$\left\{3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \dots, \frac{2n+1}{n}, \dots\right\}$$

  - ⋆ Nous avons $2 \leq \frac{2n+1}{n} \leq 3, \forall\, n \geq 1$ $\left(\text{car } \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}\right)$.
  - ⋆ Donc, la suite est bornée supérieurement par 3 et par tout nombre supérieur à 3. Par exemple, $M_1 = 3.5, M_2 = 7$.
  - ⋆ De plus, la suite est bornée inférieurement par 2 et par tout nombre inférieur à 2. Par exemple, $m_1 = 1.25, m_2 = -10$.
  - ⋆ D'où la suite est bornée, car elle est bornée supérieurement et inférieurement.

Définition d’une série

Définition

1 La somme infinie des termes d'une suite $\{a_n\}$ notée $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$, où

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \text{ est appelée } \textbf{série}.$$

Attention !

- Chaque a_i est appelé **terme** de la série.
- La somme peut être soit finie, soit infinie, ou peut ne pas être définie.
- Il ne faut pas confondre suite et série.
  - ⋆ Une **suite est une énumération de termes**, exemple

$$\{2^n\} = \{2, 2^2, 2^3, 2^4, \cdots, 2^n, \cdots\}$$

  - ⋆ Une **série est une somme de termes**, exemple

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n + \cdots$$

Exemple 4.1:

- Évaluons, si c'est possible, la somme suivante.

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i, \text{ où } \sum_{i=1}^{+\infty} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots$$

Nous constatons que, en additionnant les termes, nous obtenons $+\infty$, ainsi

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i = +\infty$$

De plus, puisque la somme des termes est infinie, nous dirons que la série est divergente.

Soit la série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

2 La **somme** S_n des n premiers termes d'une série est appelée **somme partielle** et est définie comme suit:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \text{ c'est à dire } S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

3 La **somme** S, si elle existe, de la série est définie comme suit:

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n, \text{ c'est à dire } S = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Note: De la définition précédente, nous obtenons

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = \underbrace{a_1}_{S_1} + a_2 \qquad \text{ainsi } S_2 = S_1 + a_2$$

$$S_3 = \underbrace{a_1 + a_2}_{S_2} + a_3 \qquad \text{ainsi } S_3 = S_2 + a_3$$

$$S_4 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{S_3} + a_4 \qquad \text{ainsi } S_4 = S_3 + a_4$$

$$\vdots$$

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n \qquad \text{ainsi } S_n = S_{n-1} + a_n$$

Nous avons donc $\boxed{a_n = S_n - S_{n-1}}$.

Cette dernière égalité peut être utilisée pour déterminer les termes a_i d'une série dont nous connaissons S_n.

Série convergente	Série divergente
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, alors $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i = S$.	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, alors $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i = +\infty$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$, alors $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i = -\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ n'existe pas, alors $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ n'est pas définie.

Exemple 4.2: Déterminons si la série suivante converge ou diverge, en évaluant, si c'est possible, $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} i$, où $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} i = 1+2+3+\cdots+n+\cdots$

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1+2 = 3$$
$$S_3 = 1+2+3 = 6$$
$$\vdots$$
$$S_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{+\infty} i &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} i\\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} i = +\infty$, ainsi la série est divergente.

Définition

Une série de la forme

$$\sum_{i=1}^{+\infty}(a+(i-1)d) = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+(n-1)d) + \cdots$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$, est appelée **série arithmétique** de premier terme a et de **raison** d.

Exemple 4.3:

- La série $-5-3-1+1+3+5+\cdots$ est une série arithmétique de premier terme $a=-5$ et de raison $d=2$, car

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & -3+2 & & & & 1+2 & & & & & \\
-5 & + & (-3) & + & (-1) & + & 1 & + & 3 & + & 5 & + & \cdots \\
 & -5+2 & & & & -1+2 & & & & 3+2 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Ainsi, }\ a_1 &= -5\\
a_2 &= -5+2=-3\\
a_3 &= -3+2=(-5+2)+2=-5+2(2)=-1\\
a_4 &= -1+2=(-5+2(2))+2=-5+3(2)=1\\
&\vdots\\
\text{donc }\ a_n &= -5+(n-1)2
\end{aligned}
$$

Cette série peut s'écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}(-5+(i-1)2)$

Note:

- Dans une série arithmétique de premier terme a, chacun des autres termes de la série est obtenu en additionnant au terme précédent la raison d.
- Ainsi, une série arithmétique est entièrement définie par son premier terme et sa raison.

Exemple 4.4:

- Soit la série arithmétique de premier terme $a = 197$ et de raison $d = -3$.
  Déterminons les premiers termes et le terme général a_n de la série.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 197 \\
a_2 &= 197 + (-3) = 194 \\
a_3 &= 194 + (-3) = (197 + (-3)) + (-3) = 197 + 2(-3) = 191 \\
a_4 &= 191 + (-3) = (197 + 2(-3)) + (-3) = 197 + 3(-3) = 188 \\
&\vdots \\
a_n &= 197 + (n-1)(-3)
\end{aligned}$$

Cette série arithmétique peut s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^{+\infty}(197 + (i-1)(-3))$

Théorème

Soit la série arithmétique $\sum_{i=1}^{+\infty}(a+(i-1)d)$

- La somme partielle S_n des n premiers termes de cette série est:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}(a+(i-1)d)$$
$$= na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

- La série diverge pour tout $d \in \mathbb{R}$ (sauf si $a = 0$ et $d = 0$).

Définition

Une série de la forme

$$\sum_{i=1}^{+\infty} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

où $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $r \in \mathbb{R}$, est appelée **série géométrique** de **premier terme** a et de **raison** r.

Note:

- Dans une série géométrique de premier terme a, chacun des autres termes de la série est obtenu en multipliant le terme précédent par la raison r.
- Ainsi, une série géométrique est entièrement définie par son premier terme et sa raison.

Exemple 4.5:

▷ La série $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \cdots$ est une série géométrique de premier terme $a = 2$ et de raison $r = \frac{1}{3}$, car

$$\begin{tikzcd} {\color{red}2} \arrow[rr, bend right, "2\left(\frac{1}{3}\right)"'] & + & \frac{2}{3} \arrow[rr, bend left, "\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)"] & + & \frac{2}{9} \arrow[rr, bend right, "\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)"'] & + & \frac{2}{27} \arrow[rr, bend left, "\frac{2}{27}\left(\frac{1}{3}\right)"] & + & \frac{2}{81} & + & \cdots \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi, } a_1 &= {\color{red}2} \\
a_2 &= 2\left(\frac{1}{3}\right) \\
a_3 &= 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
a_4 &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^3 \\
&\vdots \\
\text{donc } \ a_n &= {\color{red}2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Cette série peut s'écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$

Pour déterminer si une série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ est une série géométrique, il suffit:

- De vérifier si le rapport $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n}}$ de deux termes consécutifs quelconques est constant pour tout n.

- Lorsque le rapport est constant, nous avons

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \text{ où } r \text{ est la raison de la série géométrique.}$$

Exemple 4.6: Vérifions si les séries suivantes sont des séries géométriques, en déterminant si $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est constant pour tout n, et le cas échéant, trouvons la raison r et le premier terme a.

▷ $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{3^i}{5^{i+1}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}\right)}{\left(\frac{3^n}{5^{n+1}}\right)} = \left(\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}\right)\left(\frac{5^{n+1}}{3^n}\right) = \frac{3}{5}, \text{ pour tout } n.$$

Puisque le rapport $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ est constant et est égal à $\dfrac{3}{5}$, cette série est géométrique de raison $r = \dfrac{3}{5}$ et de premier terme a $a = \dfrac{3}{25}$, obtenu en posant $i = 1$.

▷ $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^k}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{3^{n+1}}\right)}{\left(\frac{n}{3^n}\right)} = \left(\frac{n+1}{3^{n+1}}\right)\left(\frac{3^n}{n}\right) = \frac{n+1}{3n}$$

Puisque le rapport $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ dépend de n, il n'est pas constant; cette série n'est pas une série géométrique.

Théorème

Soit la série géométrique $\sum_{i=1}^{+\infty} ar^{i-1}$, où $r \neq 1$. La somme partielle

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} ar^{i-1}$$

des n premiers termes de la série est donnée par la formule:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

Exemple 4.7: Soit la série géométrique $\sum_{i=1}^{+\infty} 2(3)^{i-1}$.

- Évaluons S_{15}, la somme des 15 premiers termes de cette série.

$$S_{15} = 2(3)^0 + 2(3)^1 + 2(3)^2 + \cdots + 2(3)^{14}$$

$$\text{Ainsi } S_{15} = \frac{2(1-3^{15})}{(1-3)}$$

$$\text{d'où } S_{15} = 14348906$$

Théorème

La série géométrique $\sum_{i=1}^{+\infty} ar^{i-1}$

- converge si $|r| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{i=1}^{+\infty} ar^{i-1} = \frac{a}{1-r};$$

- diverge si $|r| > 1$.

Exemple 4.8:

- Déterminons si la série géométrique $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$ est convergente ou divergente et calculons, si c'est possible, la somme S de cette série.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{1}{2^n}\right)} = \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{2^n}{1}\right) = \frac{1}{2}, \text{ donc } r = \frac{1}{2}$$

Puisque $r = \frac{1}{2}$, $|r| < 1$, donc cette série est convergente.

$$\text{D'où } \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 1 \quad \left(\text{car } a = \frac{1}{2} \text{ et } r = \frac{1}{2}\right)$$

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)
- Disponibilités:

1. Lundi 13:00 - 15:00, MRR B-214
2. Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214
3. Jeudi 12:00 - 13:15, MRR B-214