UNIVERSITÉ DE MONCTON
CAMPUS DE MONCTON

Devoir 1 - Optimisation (MATH 3163)

À remettre le lundi 29 janvier 2024

À 13h30

Professeur : Ibrahima Dione

Nom(s) personne étudiante : ______________________________

Numéro personne étudiante : ______________________________

Le devoir est composé de **4 questions**, pour un total de 25 points.

- Ceci est un devoir à livres ouverts et les notes du cours sont permises.
- Répondez aux questions dans l'espace fourni.
- Imprimez le devoir en recto et utilisez le verso des feuilles si nécessaire.
- Ne sera pas accepté, tout travail rendu sur un format outre que celui-ci.

Question I

1. Soit $f(x) = \|x\|$, où $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$. Montrer que la matrice Hessienne $H(x)$ de f est donnée par

$$H(x) = \frac{1}{\|x\|} I - \frac{1}{\|x\|^3} x x^T, \; x \neq 0,$$

où I désigne la matrice identité d'order n.

2. Soit $f(x) = (c^T x)^2$, où c est un vecteur de colonne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la matrice Hessienne $H(x)$ de f est donnée par

$$H(x) = 2\, c\, c^T.$$

Question II

En utilisant la propriété des valeurs propres, vérifier si la matrice suivante est définie positive ou semi-définie positive

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question III

Considérons la forme quadratique suivante

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2.$$

1. Écrire f sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x$$

où A est une matrice carrée d'ordre 2 et $b \in \mathbb{R}^2$ (déterminer A et b).

2. Calculer la matrice Hessienne $H(x)$ de f.

3. $H(x)$ est-elle définie positive ?

4. La fonction f est-elle strictement convexe ? (justifiez votre réponse).

Question IV

Soit A une matrice symétrique d'ordre n, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$$

est strictement convexe si et seulement si A est définie positive.