UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Hiver 2025

SÉRIE 2 - Algèbre linéaire (MATH 2673)

Exercice 1

Soient u, v et w trois vecteurs linéairement indépendants. Montrez que le système suivant est linéairement indépendant :

$$S = \{u + v + 2\,w,\ u + 2\,v - w,\ u + 3\,v + w\}\,.$$

Exercice 2

Soit P_n l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n en la variable t. Soit c une constante réelle quelconque. Montrez que $B = \{1, t - c, (t - c)^2, ..., (t - c)^n\}$ est une base de P_n.

Exercice 3

Soit $M_n(K)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans un corps K. Soit W le sous-ensemble de $M_n(K)$ formé des matrices triangulaires inférieures.

a Montrez que W est un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$.

b Déterminez une base de W et sa dimension.

Exercice 4

Soit V l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrez que V n'est pas de dimension finie.

Exercice 5

Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$u_1 = (1, 2, -1, 3),\ u_2 = (2, 4, 1, 5) \text{ et } u_3 = (3, 6, 3, 7).$$

a Déterminez une base de W et sa dimension.

b Complétez la base trouvée en a) pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6

Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\mathrm{W} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \middle| \, x_1 - x_3 = 0 \text{ et } x_2 + x_4 = 0\right\}.$$

a Trouvez une base de W et déterminez $\dim \mathrm{W}$.

b Complétez la base trouvée en a) pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.