UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Algèbre et Relations

MATH 2413

Ibrahima Dione - Mohamed Farhloul

Automne 2023

Table des matières

3 Fonctions et Relations 93

4 Suites et Séries 146

Chapitre 1

Polynômes

Sommaire

L'objectif du chapitre est d'effectuer des opérations et résoudre des problèmes faisant appel à des expressions algébriques telles que les polynômes et les fractions rationnelles. Nous l'aborderons à travers plusieurs sections dont chacune décrit un objectif d'apprentissage bien visé :

- ⋆ À la section 1, le but sera de reconnaître un polynôme, décrire ses caractéristiques et de l'évaluer.
- ⋆ La section 2 aura pour objectif d'effectuer des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division sur des polynômes.
- ⋆ La section 3 permettra de reconnaître un modèle de polynôme et le décomposer en facteurs en utilisant la méthode appropriée.
- ⋆ La section 4 abordera la recherche des zéros d'un polynôme par factorisation ou à l'aide de la formule quadratique.

- ⋆ La section 5 permettra de reconnaître une fraction rationnelle, de trouver une fraction équivalente, de simplifier une fraction et de trouver le dénominateur commun à deux ou plusieurs fractions.
- ⋆ Et finalement, la section 6 effectuera des opérations élémentaires sur des fractions rationnelles.

Les notions abordées ici sont largement étudiées dans la référence [5], qui a servi à la mise en oeuvre de ce chapitre.

1 Les polynômes

Définition 1.1

- ⋆ Une **constante** est une quantité qui a une valeur fixe.
- ⋆ Un **paramètre** est une constante qui a une valeur inconnue, appartenant à un ensemble donné. On utilise souvent les premières lettres de l'alphabet $(a, b, c, \cdots)$ pour représenter les paramètres.
- ⋆ Une **variable** est une quantité qui peut prendre n'importe quelle valeur d'un ensemble donné. Les dernières lettres de l'alphabet (x, y, z) sont utilisées pour désigner les variables.

L'ensemble de référence pour les constantes, paramètres et variables est l'ensemble des nombres réels, sauf si le contexte oblige à le restreindre. Les propriétés des opérations (commutativité, associativité, distributivité, restrictions et priorité) effectuées sur ces quantités seront donc les mêmes que pour les nombres réels.

Exemple 1.1 :

- ▷ Si x représente l'âge d'un étudiant, x est une variable qui peut prendre n'importe quelle valeur dans l'ensemble $\{16, 17, 18, \cdots\}$
- ▷ Si Étienne a 18 ans, son âge est une constante ayant la valeur 18.
- ▷ Si l'inscription à un centre sportif comporte des coûts fixes et un tarif horaire de $5\$$, on peut représenter le coût annuel par $a + 5h$, où :
  - ▷ a est le paramètre représentant les coûts fixes. Sa valeur est inconnue, mais ne varie pas ;
  - ▷ 5 est la constante représentant le tarif horaire. Sa valeur est connue et fixe ;
  - ▷ h est la variable représentant le nombre d'heures d'activités sportives. Sa valeur est inconnue et peut être différente pour chaque abonné.

Définition 1.2

- ⋆ Un **monôme** est une expression algébrique formée du produit d'une constante et de variables, chaque variable étant affectée d'un **exposant entier positif ou nul**. La constante est le **coefficient** du monôme.
- ⋆ Deux monômes sont **semblables** s'ils sont formés des mêmes variables, chacune affectée du même exposant.

Exemple 1.2 :

- ▷ $3x^2y^5z$, x et $\frac{2x^2y^4}{5}$ sont trois monômes, le dernier pouvant s'écrire $\frac{2}{5}x^2y^4$.
- ▷ -27 et $\sqrt{5}$ sont des monômes constants. On considère que toutes les variables sont affectées de l'exposant 0. Par exemple, $-27 = -27x^0$.
- ▷ $5x^{\frac{1}{2}}y^8z^{-3}$ n'est pas un monôme, car les exposants de x et de z ne sont pas des entiers positifs ou nuls.
- ▷ $5xy + 2x^2z^4$ n'est pas un monôme, car c'est une somme d'expressions algébriques.
- ▷ $8xy^3z^2$ et $-3xy^3z^2$ sont des monômes semblables, mais $8xy^3z^2$ et $8xy^3z$ ne le sont pas, car l'exposant de la variable z est différent.

Définition 1.3

- ⋆ Un **polynôme** est une expression algébrique formée d'une somme de monômes.
- ⋆ Chaque monôme est appelé **terme** du polynôme. Un polynôme à deux termes est appelé **binôme**. Un polynôme à trois termes est appelé **trinôme**.

Exemple 1.3 :

- ▷ $2x^5 - \frac{4}{3}x^4 + x^3 - 14$ est un polynôme à une variable comportant quatre termes.
- ▷ $x^4 - y$ est un binôme à deux variables.
- ▷ $ax^2 + bx + c$ est un trinôme à une variable, si a, b et c sont des constantes.
- ▷ $\frac{x^2-3x+11}{3x^4-1}$ n'est pas un polynôme ; c'est une fraction algébrique formée du quotient de deux polynômes.
- ▷ $\sqrt{x^3 - 5x^2 + 7}$ n'est pas un polynôme ; c'est la racine carrée d'un polynôme.
- ▷ $2x^3 - x^{-1} + 4$ n'est pas un polynôme, car dans le deuxième terme, l'exposant de la variable est négatif.

Définition 1.4

Un terme d'un polynôme qui ne contient pas de variable est appelé **terme constant**.

Note : Bien que la multiplication soit commutative, l'usage veut que, dans chaque terme, le coefficient précède la partie variable.

Exemple 1.4 :

- ▷ Dans le polynôme $12x^7 + \frac{8}{3}xy - 15$, 12 et $\frac{8}{3}$ sont les coefficients des deux premiers termes du polynôme et le terme constant est -15.
- ▷ Si z est la variable, le terme constant du polynôme $2az^2 - \pi z$ est 0, car on peut écrire ce polynôme sous la forme $2az^2 - \pi z + 0$.
  $2a$ et $-\pi$ sont les coefficients respectifs de z^2 et de z.

Définition 1.5

Deux polynômes sont **égaux** si tous leurs monômes sont semblables deux à deux et si les coefficients des monômes semblables sont égaux.

Exemple 1.5 :

- ▷ Le polynôme $ax^2 + 2x + 6$ est égal à $5x^2 + 2x - 3b$ pour toute valeur de x si et seulement si $a = 5$ et $b = -2$.
- ▷ $5x^2 + 2x + 6$ n'est pas égal à $5x^2 + x - 3b$, car même si $b = -2$, les coefficients de x sont différents $(2 \neq 1)$.

Définition 1.6

- ⋆ Le **degré d'un terme** est la somme des exposants qui affectent ses variables.
- ⋆ Le **degré d'un terme constant** non nul est 0.
- ⋆ Le **degré du polynôme nul** 0 n'est pas défini.
- ⋆ Le **degré d'un polynôme** est le plus grand des degrés de ses termes.

Exemple 1.6 :

- ▷ $17x^2yz^8$ est un monôme de degré 11, car $2+1+8 = 11$ est la somme des exposants des variables x, y et z qui le composent. On dit aussi parfois que c'est un monôme du second degré en x, du premier degré en y et du huitième degré en z.
- ▷ Les degrés des termes du polynôme $9 - 5xy + 7x^3 - x^6$ sont respectivement $0, 2, 3$ et 6. C'est donc un polynôme de degré 6.
- ▷ Le monôme nul 0 n'a aucun degré, car 0 pourrait aussi bien représenter $0x^0$, $0x^1$, $0x^2$, etc.

Note : L'ordre des termes d'un polynôme importe peu mais, par souci esthétique et par commodité, on place habituellement les termes d'un polynôme à une variable dans l'ordre décroissant des degrés. On écrira par exemple

$$x^6 + 3x^4 - 5x^2 - 12x + 24$$

plutôt que

$$3x^4 + x^6 + 24 - 12x - 5x^2$$

On en arrive ainsi à la définition générique d'un polynôme, qui est particulièrement utilisée dans les cours de calcul différentiel.

Définition 1.7

Un polynôme P d'une variable x et de degré n quelconque peut être décrit sous la forme générale suivante :

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

où $a_n \neq 0$ et a_k est le coefficient du terme de degré k avec $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$.

Exemple 1.7 : Soit le polynôme

$$-x^4 + 3x^3 - 5x + 8$$

Sous sa forme générale, ce polynôme peut être décrit par

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

où on a alors $a_4 = -1, a_3 = 3, a_2 = 0, a_1 = -5$ et $a_0 = 8$.

Les variables d'un polynôme peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle, mais selon le contexte du problème, on se limitera aux seules valeurs plausibles (entiers naturels pour un nombre d'objets, réels non négatifs pour le temps, etc.). L'ensemble des valeurs admissibles est appelé «domaine de définition» ou simplement **domaine**.

Pour des valeurs données de ses variables, on peut **évaluer** un polynôme, c'est-à-dire remplacer chaque variable par sa valeur.

Exemple 1.8 :

- ▷ Soit le polynôme $x^4 - 5z^2 + 6yz$. Ses trois variables peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. Pour évaluer le polynôme $x^4 - 5z^2 + 6yz$ si $x = 0$, $y = -2$, et $z = 10$, on remplace chaque variable par la valeur indiquée. On obtient alors :

$$x^4 - 5z^2 + 6yz = 0^4 - 5(10)^2 + 6(-2)(10) = 0 - 500 - 120 = -620$$

Le polynôme $x^4 - 5z^2 + 6yz$ vaut donc -620 pour les valeurs données.

- Le profit mensuel réalisé par un fabricant de sacs à dos est donné par le polynôme

$$9x - 0,002x^2 \text{ \$}$$

où x représente le nombre de sacs à dos vendus. À cause du contexte, le domaine de ce polynôme est $\mathbb{N}$.
Si le fabricant vend 500 sacs à dos en un mois, on peut calculer son profit en évaluant le polynôme pour $x = 500$.

$$9(500) - 0,002(500)^2 = 4000$$

Le profit sera donc de 4000\$.

Note : Si deux polynômes sont égaux, leur évaluation donnera le même résultat pour une même valeur de la variable.

2 Les opérations sur les polynômes

Les propriétés des exposants pour les opérations effectuées avec des expressions algébriques sont identiques à celles connues pour les nombres réels. Nous les rappelons dans le tableau ci-dessous.

Propriété 2.1 *Si m et n sont des entiers positifs, alors on a les propriétés suivantes :*

$x^m x^n = x^{m+n}$	$(x^m)^n = x^{mn}$
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ *si* $x \neq 0$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ *si* $x \neq 0$
$(xy)^m = x^m y^m$	$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$ *si* $y \neq 0$
$x^0 = 1$ *si* $x \neq 0$	

On peut effectuer, sur des polynômes, les mêmes opérations élémentaires que sur les nombres réels.

Note : (La somme de polynômes)
Pour additionner deux polynômes, on additionne les coefficients de leurs **termes**

semblables, c'est-à-dire les termes qui ont les mêmes variables affectées des mêmes exposants.

Exemple 2.1 :

- ▷ $3x + 12x + (-17x) = (3 + 12 - 17)x = -2x$
- ▷ $x^2 + x + y$ reste sous cette forme, puisqu'il n'y a pas de termes semblables.
- ▷ Calculons la somme des polynômes

  $$3x^2y - 4xy^2 + 6xy - 7x + 15 \text{ et } x^3 - 5xy^2 + xy + 4x + 3y - 2$$

  L'opération est facilitée si on dispose les polynômes l'un au-dessus de l'autre en alignant les termes semblables. Pour les termes absents de l'un ou l'autre des deux polynômes, il peut être utile d'ajouter un terme semblable avec un coefficient 0.

  $$\begin{array}{ccccccccccccccc}
   & 0x^3 & + & 3x^2y & - & 4xy^2 & + & 6xy & - & 7x & + & 0y & + & 15 \\
  + & & & & & & & & & & & & & \\
   & x^3 & + & 0x^2y & - & 5xy^2 & + & xy & + & 4x & + & 3y & - & 2 \\
  \hline
   & x^3 & + & 3x^2y & - & 9xy^2 & + & 7xy & - & 3x & + & 3y & + & 13
  \end{array}$$

Définition 2.1

L'opposé d'un polynôme P est le polynôme $-P$ qu'on obtient en multipliant chacun des coefficients de P par -1.

Exemple 2.2 :

- ▷ L'opposé du polynôme $3x^2 - 5x + 7$ est $-1(3x^2 - 5x + 7) = -3x^2 + 5x - 7$

Note : (La différence de polynômes)

- ⋆ Pour soustraire un polynôme Q d'un polynôme P (c'est-à-dire pour effectuer l'opération $P - Q$), on additionne à P l'opposé de Q.
- ⋆ Tout comme dans ℝ, la soustraction de polynômes n'est pas commutative :

  $$P - Q \neq Q - P$$

  Il est donc très important de bien lire l'énoncé pour savoir quel polynôme il faut soustraire.

Exemple 2.3 :

- ▷ Soustrayons $x^3 - 4x + 6$ de $3x^2 - 5x + 1$.
  On obtient l'opposé de $x^3 - 4x + 6$ en multipliant chacun des termes par -1. L'opposé de $x^3 - 4x + 6$ est $-x^3 + 4x - 6$

$$\begin{aligned}(3x^2 - 5x + 1) - (x^3 - 4x + 6) &= (3x^2 - 5x + 1) + (-x^3 + 4x - 6)\\ &= 3x^2 - 5x + 1 - x^3 + 4x - 6\\ &= -x^3 + 3x^2 - x - 5\end{aligned}$$

On pourrait aussi disposer les polynômes l'un au-dessus de l'autre, en alignant les termes semblables. Il ne faut alors pas oublier de **soustraire** les termes semblables.

$$\begin{array}{ccccccccc} & 0x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 1 \\ - & (x^3 & + & 0x^2 & - & 4x & + & 6) \\ \hline & -x^3 & + & 3x^2 & - & x & - & 5 \end{array}$$

Note : (L'utilisation des parenthèses)

- ⋆ On peut supprimer des parenthèses précédées du signe $(+)$ sans modifier la valeur de l'expression entre parenthèses.
- ⋆ On peut supprimer des parenthèses précédées du signe $(-)$ en remplaçant l'expression entre parenthèses par son opposé (c'est-à-dire en multipliant **tous** ses coefficients par -1).
- ⋆ Pour simplifier une expression contenant plusieurs parenthèses, on supprime d'abord les parenthèses situées le plus à l'intérieur.

Exemple 2.4 :

- ▷
$$(x^2 + 3x + 1) + (y^3 - 4y) = x^2 + 3x + 1 + y^3 - 4y$$
- ▷
$$-(2x^5 + 4x^3 - x + 6) - (y^4 + 2y^2 - 3y) = -2x^5 - 4x^3 + x - 6 - y^4 - 2y^2 + 3y$$
- ▷ Simplifions l'expression ci-dessous en supprimant les parenthèses. On supprime

d'abord celles qui sont situées le plus à l'intérieur.

$$\begin{aligned}
(3x-(2x+2y-(x+1)))&-(x+y-(2x-3))\\
&=(3x-(2x+2y-x-1))-(x+y-2x+3)\\
&=(3x-(x+2y-1))-(-x+y+3)\\
&=(3x-x-2y+1)+x-y-3\\
&=(2x-2y+1)+x-y-3\\
&=2x-2y+1+x-y-3\\
&=3x-3y-2
\end{aligned}$$

Le même principe s'applique à l'introduction de parenthèses.

$$\begin{aligned}
x+y+a+b&=(x+y)+(a+b)\\
&=(x+y)-(-a-b)\\
x+y+a-b&=(x+y)+(a-b)\\
&=(x+y)-(-a+b)\\
x+y-a+b&=(x+y)+(-a+b)\\
&=(x+y)-(a-b)\\
x+y-a-b&=(x+y)+(-a-b)\\
&=(x+y)-(a+b)
\end{aligned}$$

Note : (Le produit de monômes)
Pour multiplier deux monômes, on multiplie d'abord les coefficients, puis on multiplie les puissances d'une même variable en additionnant les exposants.

Exemple 2.5 :

▷ $(2x^2y)(3xy^3z)=(2\times 3)(x^2x)(yy^3)(z)=6x^{2+1}y^{1+3}z=6x^3y^4z$.
On a d'abord utilisé la commutativité de la multiplication pour regrouper les coefficients et les variables semblables. On a ensuite appliqué la propriété $x^mx^n=x^{m+n}$.

Note : (Le produit de polynômes)
Pour multiplier deux polynômes, on multiplie chaque terme du premier par chaque terme du second.

On utilise ici la distributivité de la multiplication sur l'addition : $a(b+c)=ab+ac$

Exemple 2.6 :

- Effectuons le produit de $-3ax$ et de $(x^2 - 4a^2x + 1)$

$$-3ax(x^2 - 4a^2x + 1) = -3ax^3 + 12a^3x^2 - 3ax$$

- Effectuons le produit de $(x^2 - xy + y^2)$ et de $(x + 2y)$.
  - On utilise ici la distributivité de la multiplication sur l'addition :

$$\begin{aligned}(x^2 - xy + y^2)(x + 2y) &= x^2(x + 2y) - xy(x + 2y) + y^2(x + 2y)\\ &= x^3 + 2x^2y - x^2y - 2xy^2 + xy^2 + 2y^3\\ &= x^3 + x^2y - xy^2 + 2y^3\end{aligned}$$

  - On pourrait aussi présenter l'opération comme suit :

$$\begin{array}{cccccccc} & & & x^2 & - & xy & + & y^2\\ \times & & & & & x & + & 2y\\ \hline & & & 2x^2y & - & 2xy^2 & + & 2y^3\\ + & x^3 & - & x^2y & + & xy^2 & & \\ \hline & x^3 & + & x^2y & - & xy^2 & + & 2y^3\end{array}$$

- Pour élever un polynôme à une puissance n (où n est un entier positif), il suffit de multiplier le polynôme n fois par lui-même.

$$\begin{aligned}(2x - 5)^2 &= (2x - 5)(2x - 5)\\ &= 4x^2 - 10x - 10x + 25\\ &= 4x^2 - 20x + 25\end{aligned}$$

Lorsqu'on additionne, qu'on soustrait ou qu'on multiplie deux polynômes, on obtient toujours un polynôme.

Note : (Le quotient de monômes)

Pour diviser deux monômes, on divise d'abord les coefficients, puis on divise les puissances d'une même variable en soustrayant les exposants.

Pour que le résultat de la division soit un monôme, il faut que l'exposant de chaque variable du numérateur soit supérieur ou égal à l'exposant de la même variable dans le dénominateur.

Exemple 2.7 :

- ▷ $\frac{12x^8y^2z^3}{8x^5yz^3} = \frac{12}{8} \times \frac{x^8}{x^5} \times \frac{y^2}{y} \times \frac{z^3}{z^3} = \frac{3}{2}x^{8-5}y^{2-1}z^{3-3} = \frac{3}{2}x^3y^1z^0 = \frac{3}{2}x^3y$. Le résultat est un monôme.
- ▷ $\frac{6x^5y}{2x^2y^3} = 3x^3y^{-2}$. Le résultat n'est pas un monôme car l'exposant de y est négatif.

Note : (La division d'un polynôme par un monôme)

Pour diviser un polynôme par un monôme, on divise chaque terme du polynôme par ce monôme.

Pour que le résultat de la division soit un polynôme, il faut que, dans chaque terme du numérateur, l'exposant de chaque variable soit supérieur ou égal à l'exposant de la même variable dans le dénominateur.

Exemple 2.8 :

- ▷ $\frac{6x^4-3x^3+2x^2}{2x^2} = \frac{6x^4}{2x^2} - \frac{3x^3}{2x^2} + \frac{2x^2}{2x^2} = 3x^2 - \frac{3}{2}x + 1$
  Le résultat de cette division est un polynôme, car le degré de la variable du dénominateur est inférieur ou égal au degré de cette même variable dans chacun des termes du numérateur.
- ▷ $\frac{5y^4-7y}{y^3} = \frac{5y^4}{y^3} - \frac{7y}{y^3} = 5y - 7y^{-2}$ ou $5y - \frac{7}{y^2}$.
  Le résultat de cette division n'est pas un polynôme, car le degré de la variable du dénominateur est supérieur au degré de cette même variable dans l'un des termes du numérateur.

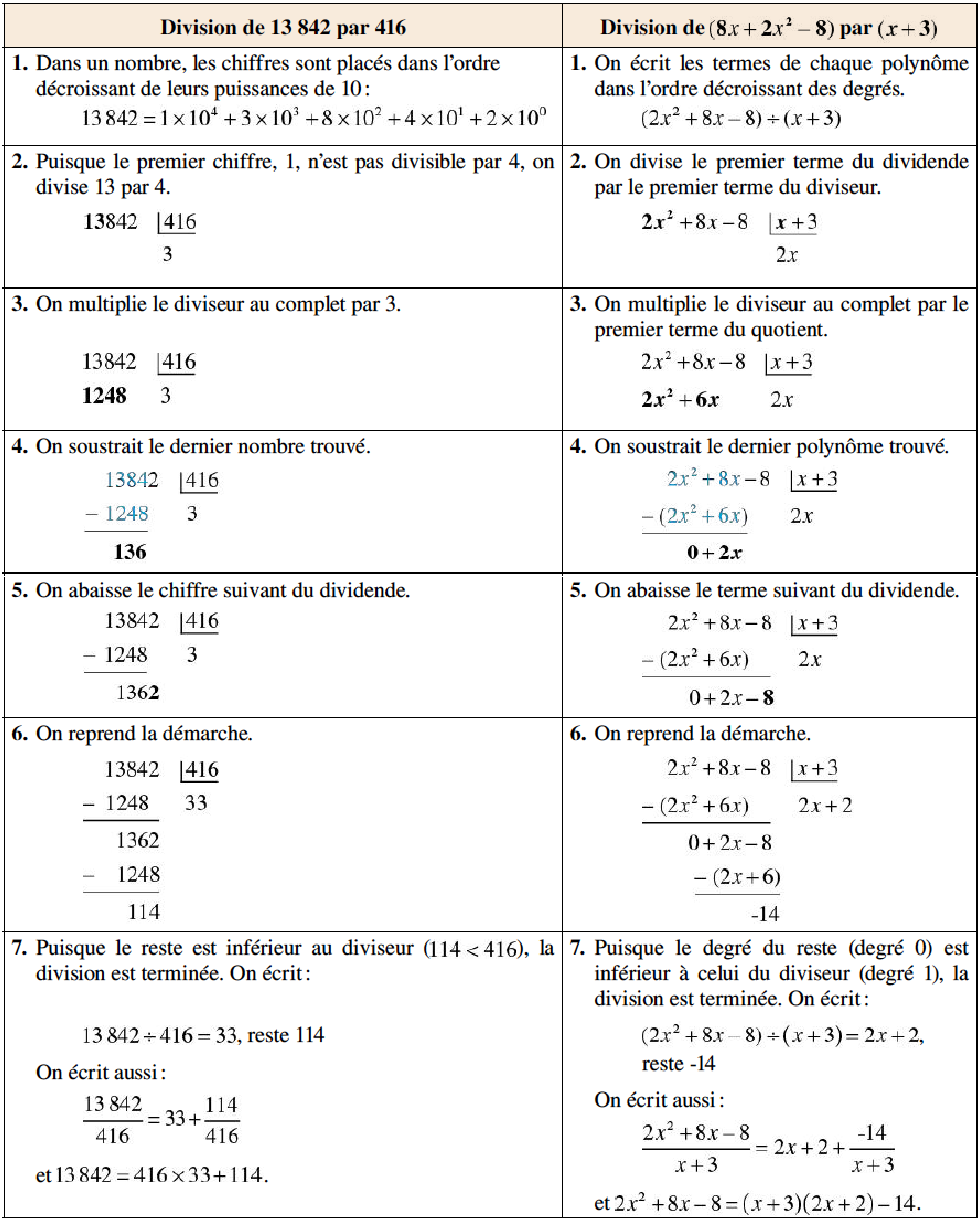
Note : (Le quotient de polynômes)

- ⋆ Pour diviser un polynôme P par un polynôme S, tels que le degré de P est supérieur au degré de S, on cherche un polynôme Q et un polynôme R tels que :

$$P = SQ + R$$

  où R est soit le polynôme nul (c'est à dire $R = 0$), soir égale à un polynôme de degré inférieur à celui de S.
- ⋆ Si $R = 0$, on dit que P est divisible par S (ou S est un facteur de P).
- ⋆ Si $R \neq 0$, on dit que $\frac{P}{S} = Q$ reste R (ou $\frac{P}{S} = Q + \frac{R}{S}$).
- ⋆ P est le **dividende**, S est le **diviseur**, Q est le **quotient** et R est le **reste**.

FIGURE 1.1 – **La division de deux polynômes s'effectue sensiblement de la même façon que la division de deux entiers, en cherchant un quotient et, éventuellement, un reste.**

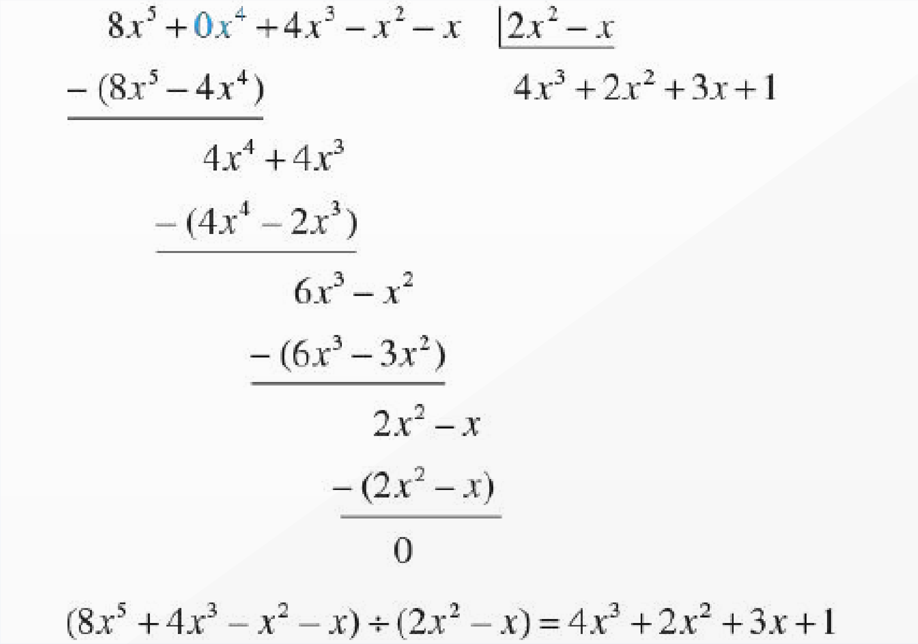


Division de 13 842 par 416	**Division de $(8x+2x^2-8)$ par $(x+3)$**
1. Dans un nombre, les chiffres sont placés dans l'ordre décroissant de leurs puissances de 10 : $13\,842 = 1\times10^4+3\times10^3+8\times10^2+4\times10^1+2\times10^0$	**1.** On écrit les termes de chaque polynôme dans l'ordre décroissant des degrés. $(2x^2+8x-8)\div(x+3)$
2. Puisque le premier chiffre, 1, n'est pas divisible par 4, on divise 13 par 4. $\begin{array}{rl} \mathbf{13}842 & \rvert\,\underline{\mathbf{4}16} \\ & \;\;3 \end{array}$	**2.** On divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur. $\begin{array}{rl} \mathbf{2x^2}+8x-8 & \rvert\,\underline{\mathbf{x}+3} \\ & \;\;2x \end{array}$
3. On multiplie le diviseur au complet par 3. $\begin{array}{rl} 13842 & \rvert\,\underline{416} \\ \mathbf{1248} & \;\;3 \end{array}$	**3.** On multiplie le diviseur au complet par le premier terme du quotient. $\begin{array}{rl} 2x^2+8x-8 & \rvert\,\underline{x+3} \\ \mathbf{2x^2+6x} & \;\;2x \end{array}$
4. On soustrait le dernier nombre trouvé. $\begin{array}{rl} 13842 & \rvert\,\underline{416} \\ \underline{-\ 1248} & \;\;3 \\ \mathbf{136} & \end{array}$	**4.** On soustrait le dernier polynôme trouvé. $\begin{array}{rl} 2x^2+8x-8 & \rvert\,\underline{x+3} \\ \underline{-\ (2x^2+6x)} & \;\;2x \\ \mathbf{0+2x} & \end{array}$
5. On abaisse le chiffre suivant du dividende. $\begin{array}{rl} 13842 & \rvert\,\underline{416} \\ \underline{-\ 1248} & \;\;3 \\ 136\mathbf{2} & \end{array}$	**5.** On abaisse le terme suivant du dividende. $\begin{array}{rl} 2x^2+8x-8 & \rvert\,\underline{x+3} \\ \underline{-\ (2x^2+6x)} & \;\;2x \\ 0+2x\mathbf{-8} & \end{array}$
6. On reprend la démarche. $\begin{array}{rl} 13842 & \rvert\,\underline{416} \\ \underline{-\ 1248} & \;\;33 \\ 1362 & \\ \underline{-\ \ 1248} & \\ 114 & \end{array}$	**6.** On reprend la démarche. $\begin{array}{rl} 2x^2+8x-8 & \rvert\,\underline{x+3} \\ \underline{-\ (2x^2+6x)} & \;\;2x+2 \\ 0+2x-8 & \\ \underline{-\ (2x+6)} & \\ -14 & \end{array}$
7. Puisque le reste est inférieur au diviseur $(114<416)$, la division est terminée. On écrit : $13\,842\div416=33$, reste 114 On écrit aussi : $\dfrac{13\,842}{416}=33+\dfrac{114}{416}$ et $13\,842=416\times33+114$.	**7.** Puisque le degré du reste (degré 0) est inférieur à celui du diviseur (degré 1), la division est terminée. On écrit : $(2x^2+8x-8)\div(x+3)=2x+2$, reste -14 On écrit aussi : $\dfrac{2x^2+8x-8}{x+3}=2x+2+\dfrac{-14}{x+3}$ et $2x^2+8x-8=(x+3)(2x+2)-14$.

Exemple 2.9 :

- Divisons $(4x^3 + 8x^5 - x^2 - x)$ par $(2x^2 - x)$.

  On ordonne d'abord les termes de chacun des polynômes en ordre décroissant de leur degré. Comme le dividende ne comporte pas de terme en x^4, on inscrit $0x^4$.



$$\begin{array}{l|l}
8x^5 + 0x^4 + 4x^3 - x^2 - x & 2x^2 - x \\
\hline
-(8x^5 - 4x^4) & 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \\
\quad 4x^4 + 4x^3 & \\
\quad -(4x^4 - 2x^3) & \\
\qquad 6x^3 - x^2 & \\
\qquad -(6x^3 - 3x^2) & \\
\qquad\quad 2x^2 - x & \\
\qquad\quad -(2x^2 - x) & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$(8x^5 + 4x^3 - x^2 - x) \div (2x^2 - x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

Ainsi, $8x^5 + 4x^3 - x^2 - x = (2x^2 - x)(4x^3 + 2x^2 + 3x + 1)$.

Puisque le reste égale 0, on dit que $(8x^5 + 4x^3 - x^2 - x)$ est divisible par $(2x^2 - x)$ ou que $(2x^2 - x)$ est un facteur de $(8x^5 + 4x^3 - x^2 - x)$.

Note : (L'ordre de priorité des opérations)

L'ordre de priorité des opérations pour les polynômes est le même que dans $\mathbb{R}$.

- ⋆ Effectuer les opérations à l'intérieur des parenthèses.
- ⋆ Évaluer les puissances (exposants).
- ⋆ Effectuer les multiplications et les divisions de gauche à droite.
- ⋆ Effectuer les additions et les soustractions de gauche à droite.

Exemple 2.10 :

- ▷ Évaluons l'expression $3(x+2)^2-(2x-5)(3x+1)-(x-x(x^3-x))$.

$$\begin{aligned}3(x+2)^2-(2x-5)(3x+1)-(x-x(x^3-x))\\&=3(x+2)^2-(2x-5)(3x+1)-(x-x^4+x^2)\\&=3(x^2+4x+4)-(2x-5)(3x+1)-(x-x^4+x^2)\\&=3x^2+12x+12-(6x^2-13x-5)-(x-x^4+x^2)\\&=3x^2+12x+12-6x^2+13x+5-x+x^4-x^2\\&=x^4-4x^2+24x+17\end{aligned}$$

3 La factorisation des polynômes

Définition 3.1

- ⋆ Un **facteur** est un élément d'un produit. Si P, Q et S sont des polynômes et si $P=QS$, Q et S sont des facteurs de P.
- ⋆ La **factorisation** d'un polynôme (ou sa **décomposition en facteurs**) consiste à l'exprimer sous la forme d'un **produit** de polynômes de degré inférieur.

Exemple 3.1 :

- ▷ x^2 est un facteur de $3x^2y^3$, car $3x^2y^3=x^2(3y^3)$
- ▷ $(x+2)$ et $(x-5)$ sont des facteurs de $(x^2-3x-10)$, car $x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$.

Il faut apprendre à reconnaître le modèle d'un polynôme et à utiliser la méthode de factorisation appropriée. On doit toutefois savoir que la factorisation d'un polynôme n'est pas toujours possible.

On peut toujours vérifier l'exactitude d'une décomposition en facteurs en effectuant la multiplication, dont le résultat doit être égal à l'expression initiale. Par exemple, on peut vérifier que $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ en calculant le produit.

• 3.1 - La mise en évidence

Lorsque tous les termes d'un polynôme contiennent au moins un facteur commun, on utilise la méthode de la **mise en évidence simple**. On cherche alors le PGCD de ces termes et on utilise la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition pour «mettre en évidence» ce facteur commun.

Note : (La mise en évidence simple)

$$\begin{aligned} ax + ay &= a(x) + a(y) \\ &= a(x+y) \end{aligned}$$

Exemple 3.2 :

- ▷ Décomposons en facteurs le polynôme $15ax^3 - 6a^2x^2 + 9ax$.
  Le plus grand facteur commun aux trois termes est le PGCD de $15ax^3$, $-6a^2x^2$ et $9ax$, soit $3ax$.
  On divise chaque terme par ce facteur et on utilise ensuite la propriété de distributivité pour mettre en évidence le facteur $3ax$.

$$\begin{aligned} 15ax^3 - 6a^2x^2 + 9ax &= 3ax\left(\frac{15ax^3}{3ax} - \frac{6a^2x^2}{3ax} + \frac{9ax}{3ax}\right) \\ &= 3ax(5x^2 - 2ax + 3) \end{aligned}$$

  On vérifie la solution en multipliant $3ax$ par $(5x^2 - 2ax + 3)$ pour retrouver le polynôme initial $15ax^3 - 6a^2x^2 + 9ax$.
  $3ax$ et $(5x^2 - 2ax + 3)$ sont des facteurs de $15ax^3 - 6a^2x^2 + 9ax$

- ▷ Factorisons le polynôme $(x+y)(x-y) - 2(x-y)$.
  Le facteur commun aux deux termes est $(x-y)$, qu'on met en évidence.

$$\begin{aligned} (x+y)(x-y) - 2(x-y) &= (x-y)\left(\frac{(x+y)(x-y)}{x-y} - \frac{2(x-y)}{x-y}\right) \\ &= (x-y)((x+y) - 2) \\ &= (x-y)(x+y-2) \end{aligned}$$

On utilise la méthode de la **mise en évidence double** lorsqu'il n'existe pas de facteur commun à tous les termes, mais que les termes, une fois regroupés par deux (ou par trois, par quatre, etc.), contiennent un facteur commun à chaque groupe de termes. Après les avoir regroupés, on effectue des mises en évidence successives, une première dans chacun des groupes et, si possible, une seconde pour obtenir le produit recherché.

Note : (La mise en évidence double)

$$\begin{aligned} ax + ay + bx + by &= (ax + ay) + (bx + by) \\ &= a(x + y) + b(x + y) \\ &= (x + y)(a + b) \end{aligned}$$

Exemple 3.3 :

- ▷ On ne peut pas factoriser le polynôme $2x^2 + 4x - 5ax - 10a$ par une mise en évidence simple, puisqu'il n'existe pas de facteur commun à tous les termes. En regroupant les termes deux par deux, on trouve ici un facteur commun aux deux termes de chaque parenthèse.

  $$2x^2 + 4x - 5ax - 10a = (2x^2 + 4x) - (5ax + 10a)$$

  $2x$ est un facteur commun aux deux premiers termes et $5a$, aux deux derniers. Pour chaque groupe de termes, on effectue une première mise en évidence du facteur commun.

  $$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 5ax - 10a &= (2x^2 + 4x) - (5ax + 10a) \\ &= 2x(x + 2) - 5a(x + 2) \end{aligned}$$

  Un nouveau facteur commun, $(x + 2)$, apparaît dans chacun des groupes. On effectue la seconde mise en évidence.

  $$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 5ax - 10a &= 2x(x + 2) - 5a(x + 2) \\ &= (x + 2)(2x - 5a) \end{aligned}$$

  En multipliant $(x + 2)$ par $(2x - 5a)$, on retrouvera le polynôme initial.

- ▷ Soit le polynôme $ax + bx - a - b$.
  En regroupant les termes, on obtient :

  $$ax + bx - a - b = (ax + bx) - (a + b)$$

  ax et bx ont un facteur commun, x. En apparence, a et b n'ont aucun facteur commun mais, en fait, tous les nombres en ont un, soit l'élément neutre 1, qu'on

utilise au besoin.
On peut donc effectuer une première mise en évidence.

$$\begin{aligned} ax + bx - a - b &= (ax + bx) - (a + b) \\ &= x(a + b) - 1(a + b) \end{aligned}$$

On peut ensuite mettre en évidence le facteur $(a + b)$.

$$ax + bx - a - b = (a + b)(x - 1)$$

En multipliant $(a + b)$ par $(x - 1)$, on retrouvera le polynôme initial.

Attention !

Il ne faut pas oublier que lorsqu'on introduit des parenthèses après un signe $(-)$, les signes de tous les termes de l'expression de la parenthèse sont modifiés.

Après les mises en évidence de la première étape, il n'est pas toujours possible de trouver un facteur (autre que 1) commun à tous les termes obtenus.
Dans ce cas, on essaie d'abord de regrouper les termes autrement.
Si aucun regroupement ne permet une mise en évidence double, on devra utiliser une autre méthode de factorisation.

Exemple 3.4 :

▷ Soit le polynôme $2x^3 + y^2 + 2x^2y + xy$.
Si on regroupe les termes dans l'ordre où ils sont présentés, on obtient :

$$(2x^3 + y^2) + (2x^2y + xy) = 1(2x^3 + y^2) + xy(2x + 1)$$

Après cette première étape, on ne trouve plus de facteur commun pour effectuer une deuxième mise en évidence.
Par contre, les deux autres regroupements possibles permettent une double mise en évidence.

$$\begin{aligned} (2x^3 + 2x^2y) + (xy + y^2) &= 2x^2(x + y) + y(x + y) = (x + y)(2x^2 + y) \\ (2x^3 + xy) + (2x^2y + y^2) &= x(2x^2 + y) + y(2x^2 + y) = (2x^2 + y)(x + y) \end{aligned}$$

Ces deux résultats sont identiques puisque le produit est commutatif.

▷ Soit le polynôme $x^4 + 3x^2 - 2x - 6$.
Si on regroupe les termes dans l'ordre où ils sont présentés, on obtient :

$$x^4 + 3x^2 - 2x - 6 = (x^4 + 3x^2) - (2x + 6) = x^2(x^2 + 3) - 2(x + 3)$$

Il n'y a plus de facteur commun pour effectuer une deuxième mise en évidence. On peut vérifier que les deux autres regroupements possibles ne permettent pas non plus d'effectuer une double mise en évidence.

• 3.2 - La factorisation des polynômes du second degré

Nous verrons dans cette section des méthodes permettant de factoriser certains polynômes du second degré à une variable. La forme générale d'un polynôme du second degré à une variable est $ax^2 + bx + c$.

Considérons d'abord le cas où $a = 1$. Si on peut factoriser ce polynôme sous la forme

$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= (x+u)(x+v) \\ &= x^2 + ux + vx + uv = x^2 + (u+v)x + uv \end{aligned}$$

on peut alors identifier les coéfficients $b = u + v$ et $c = uv$.

Note : (Le trinôme de la forme $x^2 + bx + c$)

Pour décomposer un trinôme de la forme $x^2 + bx + c$, il faut chercher deux nombres u et v dont la somme est b et le produit, c. On obtient alors :

$$x^2 + bx + c = (x+u)(x+v), \text{ où } u + v = b \text{ et } uv = c$$

Exemple 3.5 :

▷ Factorisons $x^2 - 5x - 66$.

Il faut trouver deux nombres u et v dont la somme $u + v = -5$ et dont le produit $uv = -66$. Puisque le produit est négatif, les deux nombres sont de signes contraires. Puisque leur somme est négative, c'est celui qui a la plus grande valeur absolue qui est négatif. Après quelques essais, on trouve les deux nombres cherchés : -11 et 6.
En effet, $-11 + 6 = -5$ et $(-11)(6) = -66$.
Ainsi, $x^2 - 5x - 66 = (x - 11)(x + 6)$.
On justifiera cette méthode en effectuant la multiplication.

$$(x-11)(x+6) = x^2 + \underbrace{6x - 11x}_{-5x} + \underbrace{(-11)(6)}_{-66}$$

Cette méthode est surtout utile pour factoriser x^2+bx+c si b, c, u et v sont des entiers. Même si elle est valide pour des valeurs non entières, elle n'est pas très pratique. Il se peut aussi que la factorisation du trinôme soit impossible.

Une variante de la méthode précédente permet de factoriser certains polynômes $ax^2 + bx + c$, où $a \neq 1$.

Note : (Le trinôme général $ax^2 + bx + c$, où $a \neq 1$)
On peut factoriser certains trinômes de la forme $ax^2 + bx + c$ en respectant les étapes suivantes :

1. On cherche deux nombres dont la somme est b et le produit, ac.
2. On remplace b par la somme de ces deux nombres.
3. On effectue une double mise en évidence.

Exemple 3.6 :

▷ Factorisons $6x^2 + 7x - 3$.

1. On cherche deux nombres dont la somme est $b = 7$ et dont le produit est $ac = (6)(-3)$. Ces deux nombres sont 9 et -2.
   En effet, $9 + (-2) = 7$ et $(9)(-2) = -18$.
2. On remplace $b = 7$ par $(9 - 2)$ dans le polynôme.

$$6x^2 + 7x - 3 = 6x^2 + (9 - 2)x - 3$$

3. On effectue une double mise en évidence.

$$\begin{aligned} 6x^2 + 9x - 2x - 3 &= (6x^2 + 9x) - (2x + 3) \\ &= 3x(2x + 3) - 1(2x + 3) \\ &= (2x + 3)(3x - 1) \end{aligned}$$

On vérifie l'exactitude de la factorisation en effectuant la multiplication.

$$(2x + 3)(3x - 1) = 6x^2 + 7x - 3$$

En élevant au carré le binôme $x + a$, on obtient :

$$\begin{aligned} (x + a)^2 &= (x + a)(x + a) \\ &= x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2 \end{aligned}$$

En observant le lien entre l'expression initiale et le résultat, on remarque que le résultat est la somme de trois termes :

- x^2, le carré du premier terme du binôme ;
- $2ax$, le double produit des deux termes du binôme ;
- a^2, le carré du second terme du binôme.

Un polynôme de cette forme est appelé **trinôme carré parfait**. C'est un cas particulier du trinôme général.

Note : (Le trinôme carré parfait)

Lorsqu'on reconnaît un trinôme carré parfait, on peut donc le factoriser en un carré d'un binôme.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Exemple 3.7 :

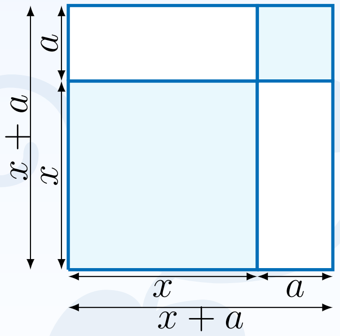
- $4x^2 + 20x + 25$ est un trinôme carré parfait, car :
  - $4x^2$ est le carré de $2x$;
  - 25 est le carré de 5 ;
  - $20x$ est le double produit de $2x$ et de 5 : $20x = 2(2x)(5)$.

  On obtient donc $4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2$.
  On peut vérifier l'exactitude de cette décomposition en effectuant la multiplication $(2x + 5)(2x + 5)$.
- On aurait obtenu le même résultat en utilisant la méthode du trinôme général.
  Si $4x^2 + 20x + 25 = ax^2 + bx + c$, on peut poser $a = 4$, $b = 20$ et $c = 25$.
  On cherche deux nombres u et v dont le produit est $ac = 100$ et la somme, $b = 20$.
  Ce sont $u = 10$ et $v = 10$.

$$\begin{aligned}4x^2 + 20x + 25 &= 4x^2 + 10x + 10x + 25\\ &= (4x^2 + 10x) + (10x + 25)\\ &= 2x(2x + 5) + 5(2x + 5)\\ &= (2x + 5)(2x + 5) = (2x + 5)^2\end{aligned}$$

Attention !

Il ne faut pas confondre $(x + a)^2$ et $x^2 + a^2$. La figure ci-dessous présente $(x + a)^2$ comme l'aire d'un carré de côté $(x + a)$.



On constate facilement que l'aire $(x+a)^2$ est la somme des aires des deux carrés bleus et des deux rectangles blancs. On reconnaît alors la forme $x^2+2ax+a^2$. On voit bien que x^2+a^2 n'est l'aire que de la partie bleue.

Propriété 3.1 (La somme de deux carrés)

Une somme de deux carrés x^2+a^2 n'est pas décomposable en facteurs du premier degré.

Exemple 3.8 :

▷ Soit le polynôme x^2+16, qui est la somme de deux carrés.
On peut l'écrire sous la forme $x^2+0x+16$.
Pour le factoriser, il faudrait trouver deux nombres dont le produit est 16 et dont la somme est 0, ce qui est impossible. En effet, si la somme est 0, soit les deux nombres valent 0 et leur produit est 0, soit les deux nombres sont de signes contraires et leur produit est alors négatif.
La factorisation est donc impossible.

En multipliant la somme de deux termes par la différence des deux mêmes termes, on obtient toujours la différence de leurs carrés.

$$\begin{aligned}(x+a)(x-a) &= x^2+ax-ax-a^2\\ &= x^2-a^2\end{aligned}$$

Note : (La différence de deux carrés)
Lorsqu'on reconnaît une différence de deux carrés, on peut la factoriser comme suit :

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$$

Exemple 3.9 :

▷ Factorisons le polynôme x^2-81.

Il s'agit d'une différence de carrés, puisque $x^2 - 81 = x^2 - 9^2$.
Ainsi, $x^2 - 81 = (x+9)(x-9)$.
On aurait aussi pu utiliser la méthode du trinôme général avec $x^2 - 0x - 81$, en cherchant deux nombres dont le produit est -81 et la somme, 0. Ce sont bien -9 et 9.

- ▷ $9a^4x^2 - 121c^6 = (3a^2x)^2 - (11c^3)^2 = (3a^2x + 11c^3)(3a^2x - 11c^3)$.
  En effectuant la multiplication, on retrouvera le polynôme initial.
- ▷ On peut aussi utiliser cette méthode lorsque la constante n'est pas un carré parfait. En effet, tout nombre réel positif a peut s'exprimer comme le carré de sa racine carrée, $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$.
  Ainsi, on peut factoriser le polynôme $x^2 - 17$ comme une différence de carrés :

$$x^2 - \left(\sqrt{17}\right)^2 = (x + \sqrt{17})(x - \sqrt{17})$$

• 3.3 - La méthode de complétion du carré

Les méthodes présentées précédemment pour factoriser un trinôme général ax^2+bx+c ou sa forme simplifiée $x^2 + bx + c$ avec $a = 1$ sont utiles si on peut trouver facilement deux nombres dont la somme est b et le produit, ac. Dans bien des cas, cela s'avère très ardu, voire impossible. La méthode de «complétion du carré», que nous présentons à l'aide d'un exemple, permet de savoir si un trinôme du second degré peut être factorisé et, si c'est le cas, de trouver les deux facteurs.

Exemple 3.10 :

- ▷ Soit le polynôme $3x^2 + 14x - 5$.

1. On effectue la mise en évidence du coefficient $a = 3$ pour obtenir un trinôme de la forme ax^2+bx+c, où b et c sont des nombres réels, mais pas nécessairement des entiers.

$$3x^2 + 14x - 5 = 3\left(x^2 + \frac{14}{3}x - \frac{5}{3}\right)$$

2. On cherche ensuite un trinôme carré parfait $x^2 + 2ux + u^2$ dont les deux premiers termes sont x^2 et $\frac{14}{3}x$.
   Si $2ux = \frac{14}{3}x$, alors $u = \frac{7}{3}$ et $u^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2$.
   Ainsi, $x^2 + 2ux + u^2 = x^2 + 2\left(\frac{7}{3}\right)x + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{14}{3}x + \frac{49}{9}$.
   Puisque $x^2 + 2ux + u^2 = (x+u)^2$, on a $x^2 + \frac{14}{3}x + \frac{49}{9} = \left(x + \frac{7}{3}\right)^2$.

3. On réécrit le polynôme initial en utilisant ce trinôme carré parfait.

$$\begin{aligned}3x^2+14x-5&=3\left(x^2+\frac{14}{3}x-\frac{5}{3}\right)\\&=3\left(x^2+\frac{14}{3}x+\frac{49}{9}-\frac{49}{9}-\frac{5}{3}\right)\end{aligned}$$

   L'addition et la soustraction du même terme constant peuvent paraître artificielles (les mathématiciens appellent d'ailleurs ce type d'opération un «artifice de calcul»), mais cela permet de faire apparaître le carré parfait sans modifier le polynôme initial.

$$\begin{aligned}3x^2+14x-5&=3\left(x^2+\frac{14}{3}x+\frac{49}{9}-\frac{49}{9}-\frac{5}{3}\right)\\&=3\left[\left(x^2+\frac{14}{3}x+\frac{49}{9}\right)-\frac{49}{9}-\frac{5}{3}\right]\\&=3\left[\left(x^2+\frac{14}{3}x+\frac{49}{9}\right)-\frac{64}{9}\right]\\&=3\left[\left(x+\frac{7}{3}\right)^2-\frac{64}{9}\right]\end{aligned}$$

4. On transforme l'expression entre crochets en une différence de carrés, sachant que tout nombre réel positif est égal au carré de sa racine carrée.
   Ainsi, $\frac{64}{9}=\left(\sqrt{\frac{64}{9}}\right)^2=\left(\frac{8}{3}\right)^2$.

$$\begin{aligned}3x^2+14x-5&=3\left[\left(x+\frac{7}{3}\right)^2-\frac{64}{9}\right]\\&=3\left[\left(x+\frac{7}{3}\right)^2-\left(\frac{8}{3}\right)^2\right]\end{aligned}$$

   On peut alors factoriser la différence de carrés.

$$\begin{aligned}3x^2+14x-5&=3\left(x+\frac{7}{3}+\frac{8}{3}\right)\left(x+\frac{7}{3}-\frac{8}{3}\right)\\&=3(x+5)\left(x-\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

   Cette expression en un produit de trois facteurs est tout à fait acceptable. On peut toutefois la simplifier encore.

$$\begin{aligned}3x^2+14x-5&=3(x+5)\left(x-\frac{1}{3}\right)\\&=(x+5)(3)\left(x-\frac{1}{3}\right)\\&=(x+5)(3x-1)\end{aligned}$$

On vérifie l'exactitude de la factorisation en effectuant la multiplication.

$$(x+5)(3x-1) = 3x^2 - x + 15x - 5 = 3x^2 + 14x - 5$$

Nous avons choisi cet exemple parce que la factorisation est aussi possible par la méthode du trinôme général, ce qui nous permet de vérifier qu'on aurait obtenu le même résultat en cherchant deux nombres dont le produit est $ac = -15$ et dont la somme est $b = 14$. Ces deux nombres sont 15 et -1.

$$\begin{aligned}3x^2 + 14x - 5 &= 3x^2 + 15x - x - 5\\ &= (3x^2 + 15x) - (x+5)\\ &= 3x(x+5) - (x+5)\\ &= (x+5)(3x-1)\end{aligned}$$

▷ Soit le polynôme $2x^2 + 16x + 11$.
On ne trouve pas facilement deux nombres dont le produit est 22 et la somme, 16. La méthode de complétion du carré s'impose.

$$\begin{aligned}2x^2 + 16x + 11 &= 2\left(x^2 + 8x + \frac{11}{2}\right)\\ &= 2\left(x^2 + 8x + 16 - 16 + \frac{11}{2}\right)\\ &= 2\left[\left(x^2 + 8x + 16\right) - \frac{21}{2}\right]\\ &= 2\left[(x+4)^2 - \left(\sqrt{\frac{21}{2}}\right)^2\right]\\ &= 2\left(x + 4 + \sqrt{\frac{21}{2}}\right)\left(x + 4 - \sqrt{\frac{21}{2}}\right)\end{aligned}$$

On vérifie que le produit donne bien $2x^2 + 16x + 11$.

Note : (La complétion du carré)
Pour factoriser un polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$:

1. On effectue la mise en évidence du coefficient a du terme du second degré, pour obtenir

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

2. On cherche un trinôme carré parfait $x^2 + 2ux + u^2$ dont les deux premiers termes

sont x^2 et $\frac{b}{a}x$.

3. On réécrit le polynôme initial en utilisant ce carré parfait.
4. On transforme si possible la nouvelle expression en une différence de carrés, qu'on factorise. S'il s'agit d'une somme de carrés, le trinôme du second degré ne peut être factorisé.

• 3.4 - La factorisation de différents modèles de polynômes

Il n'existe pas de méthode infaillible pour factoriser les polynômes de degré supérieur à 2 ou les polynômes à plusieurs variables. Plusieurs polynômes peuvent toutefois être factorisés au moins partiellement à l'aide de variantes des méthodes vues précédemment.

Note : (La somme ou la différence de deux cubes)
Dans le cas des polynômes de degré 3, on distingue deux modèles particuliers qu'on peut toujours factoriser.

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$
$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

Exemple 3.11 :

▷ Décomposons le polynôme $x^3 - 27$.
C'est une différence de cubes, car $x^3 - 27 = x^3 - 3^3$. On obtient donc

$$\begin{aligned} x^3 - 27 &= x^3 - 3^3 \\ &= (x-3)(x^2 + 3x + 3^2) = (x-3)(x^2 + 3x + 9) \end{aligned}$$

En effectuant la multiplication, on retrouvera le polynôme initial.
On peut aussi obtenir le second facteur en effectuant la division $\frac{x^3-27}{x-3}$.

▷ $8x^3 + 125a^6$ est une somme de cubes, car $8x^3 + 125a^6 = (2x)^3 + (5a^2)^3$. Ainsi

$$\begin{aligned} 8x^3 + 125a^6 &= (2x)^3 + (5a^2)^3 \\ &= (2x + 5a^2)((2x)^2 - (2x)(5a^2) + (5a^2)^2) \\ &= (2x + 5a^2)(4x^2 - 10a^2x + 25a^4) \end{aligned}$$

L'habileté à factoriser des polynômes s'acquiert par la pratique. Il s'agit souvent d'effectuer une mise en évidence pour découvrir un autre polynôme dont on reconnaît le modèle. Il faut parfois utiliser successivement deux méthodes avant d'obtenir une factorisation complète. Pour faciliter la décomposition, il faut aussi, dans certains cas, déplacer les termes.

Exemple 3.12 :

- Factorisons le polynôme $3x^3 - 12x$.
  Même si ce polynôme ne correspond à aucun modèle connu, on peut d'abord effectuer une mise en évidence simple.
  $$3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4)$$
  Le facteur de droite est une différence de carrés qu'on peut encore décomposer.
  $$3x^3 - 12x = 3x(x + 2)(x - 2)$$
- $x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$
  (x^2+1) est une somme de carrés de degré 2, qui n'est pas décomposable en facteurs du premier degré.
  Cet exemple montre qu'une somme de carrés de degré supérieur à 2, comme c'est le cas de x^4+x^2, peut parfois être factorisée. On ne pourra toutefois jamais obtenir des facteurs qui sont tous du premier degré.
- Factorisons le polynôme $x^2 + 6xy + 9y^2 - 25$.
  Il n'existe aucun facteur commun à tous les termes. Le regroupement des termes deux par deux ne permet pas une mise en évidence double.
  On remarque cependant que les trois premiers termes constituent un trinôme carré parfait.
  On peut donc les regrouper ainsi :
  $$\begin{aligned} x^2 + 6xy + 9y^2 - 25 &= (x^2 + 6xy + 9y^2) - 25 \\ &= (x + 3y)^2 - 25 \end{aligned}$$
  Il faut toutefois poursuivre, puisque le résultat **n'est pas un produit de facteurs**. Il s'agit d'une différence de carrés.
  $$\begin{aligned} x^2 + 6xy + 9y^2 - 25 &= (x + 3y)^2 - 5^2 \\ &= (x + 3y + 5)(x + 3y - 5) \end{aligned}$$
- Soit le polynôme $x^4 - 17x^2 + 16$.
  En posant $y = x^2$, on obtient $x^4 - 17x^2 + 16 = (x^2)^2 - 17x^2 + 16 = y^2 - 17y + 16$.
  Ce type de substitution est appelé **changement de variable**.
  On reconnaît alors un trinôme du second degré qu'on peut factoriser en cherchant deux nombres dont le produit est 16 et dont la somme est -17. Ce sont -1 et -16. Ainsi, $y^2 - 17y + 16 = (y - 1)(y - 16)$.
  Comme $y = x^2$, $(y - 1)(y - 16) = (x^2 - 1)(x^2 - 16)$.
  Il est encore possible de factoriser les deux différences de carrés et on obtient :
  $$x^4 - 17x^2 + 16 = (x + 1)(x - 1)(x + 4)(x - 4)$$

Note : (Les méthodes de factorisation des polynômes)
Afin de faciliter la résolution des exercices, nous résumons les méthodes de factorisation des polynômes dans l'encadré ci-dessous.

- ⋆ Simple mise en évidence : $ax + ay = a(x + y)$.
- ⋆ Double mise en évidence : $ax+ay+bx+by = a(x+y)+b(x+y) = (x+y)(a+b)$.
- ⋆ Trinôme général avec $a = 1$: $x^2 + bx + c = (x + u)(x + v)$, où $u + v = b$ et $uv = c$.
- ⋆ Trinôme général de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 1$ (voir la technique détaillée ci-dessus).
- ⋆ Trinôme carré parfait : $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ et $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$.
- ⋆ Somme de carrés : $x^2 + a^2$ ne se factorise pas en facteurs du premier degré.
- ⋆ Différence de carrés : $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$.
- ⋆ Complétion du carré (voir la technique détaillée ci-dessus).
- ⋆ Somme de cubes : $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$.
- ⋆ Différence de cubes : $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.

4 Les zéros d'un polynôme

Que ce soit pour résoudre une équation, pour trouver un domaine ou pour tracer le graphique d'une fonction, il sera souvent utile de connaître les valeurs qui annulent un polynôme, c'est-à-dire celles pour lesquelles le polynôme est égal à 0.

• 4.1 - La recherche des zéros par factorisation

Définition 4.1

Un **zéro** (ou **racine**) d'un polynôme est un nombre réel tel que le polynôme vaut 0 si la variable prend cette valeur.

Pour trouver les zéros d'un polynôme, on fera appel à sa factorisation et à la règle du produit nul.

Propriété 4.1 (La règle du produit nul)
Le produit de deux ou plusieurs facteurs est égal à 0 si et seulement si au moins un de ces facteurs est égal à 0.

$$AB = 0 \iff (A = 0 \;\; ou \;\; B = 0)$$
$$A_1A_2 \cdots A_n = 0 \iff (A_1 = 0 \;\; ou \;\; A_2 = 0 \;\; ou \;\; \cdots A_n = 0)$$

Théorème 4.1 (Le théorème de factorisation)

a est un zéro d'un polynôme en x si et seulement si $(x-a)$ est un facteur du polynôme.

Exemple 4.1 :

- ▷ 5 est un zéro du polynôme $x^2+2x-35$, car $5^2+(2)(5)-35=25+10-35=0$.
  Par contre, 3 n'est pas un zéro, puisque $3^2+(2)(3)-35=9+6-35=-20$.
- ▷ Cherchons les zéros du polynôme x^3+5x^2-14x.
  On doit trouver les valeurs de x pour lesquelles $x^3+5x^2-14x=0$.
  On factorise d'abord le polynôme.

  $$\begin{aligned} x^3+5x^2-14x &= x(x^2+5x-14) \\ &= x(x+7)(x-2) \end{aligned}$$

  D'après la règle du produit nul :

  $$\begin{aligned} x^3+5x^2-14x=0 &\Leftrightarrow x(x+7)(x-2)=0 \\ &\Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x+7=0 \text{ ou } x-2=0) \end{aligned}$$

  Il reste à résoudre ces trois équations du premier degré pour trouver que les trois zéros sont $x=0$, $x=-7$ et $x=2$.
- ▷ Soit le polynôme $P=x^3-27$.
  Si $x=3$, $P=3^3-27=27-27=0$. Le nombre 3 est donc un zéro de P.
  D'après le théorème de factorisation, $(x-3)$ est alors un facteur de P. C'est donc dire que P est divisible par $(x-3)$.
  En effectuant la division $(x^3-27)\div(x-3)$, on obtient x^2+3x+9.
  Ainsi, $(x^3-27)=(x-3)(x^2+3x+9)$, ce qui correspond bien à la règle de factorisation d'une différence de cubes.
- ▷ Sachant que -2, $\frac{5}{2}$ et -4 sont les zéros d'un polynôme P de degré 3, cherchons ce polynôme.
  D'après le théorème de factorisation, $(x+2)$, $(x-\frac{5}{2})$ et $(x+4)$ sont des facteurs de P. P est donc divisible par $(x+2)(x-\frac{5}{2})(x+4)$.
  Puisque P est de degré 3, il ne peut y avoir d'autre facteur contenant la variable x. Le polynôme $(x+2)(x-\frac{5}{2})(x+4)=x^3+\frac{7}{2}x^2-7x-20$ est donc une solution.
  Toutefois, tout polynôme de la forme $c\left(x^3+\frac{7}{2}x^2-7x-20\right)$, où c est une constante non nulle, est une solution possible.
  Pour tout $c\neq 0$, le polynôme est de degré 3 et ses zéros sont -2, $\frac{5}{2}$ et -4. Par exemple, $2\left(x^3+\frac{7}{2}x^2-7x-20\right)=2x^3+7x^2-14x-40$ est aussi une solution.
- ▷ Dans l'exemple précédent, si nous ajoutions comme condition que le terme constant de P doit être 10, il faudrait alors choisir la valeur de c telle que le terme constant

de $c\left(x^3+\frac{7}{2}x^2-7x-20\right)$ soit 10.

$$c\left(x^3+\frac{7}{2}x^2-7x-20\right)=cx^3+\frac{7}{2}cx^2-7cx-20c$$

Le terme constant est $-20c$ et on aura $-20c=10$ si $c=\frac{-1}{2}$. Le polynôme cherché serait alors $\frac{-1}{2}\left(x^3+\frac{7}{2}x^2-7x-20\right)=\frac{-1}{2}x^3-\frac{7}{4}x^2+\frac{7}{2}x+10$.

- ▷ Sachant que 0 et -2 sont des zéros du polynôme $P=x^4+2x3-9x^2-18x$, cherchons ses autres zéros.
  D'après le théorème de factorisation, $(x-0)$ et $(x+2)$ sont des facteurs de P. Ainsi, $P=x(x+2)Q$, où Q est un polynôme de degré 2.
  On peut trouver Q en divisant P par $x(x+2)$. Cette division vous est laissée en exercice. On obtient

$$Q=\frac{P}{x(x+2)}=\frac{x^4+2x^3-9x^2-18x}{x^2+2x}=x^2-9=(x+3)(x-3).$$

  Ainsi, $P=x(x+2)(x+3)(x-3)$et ses quatre zéros sont 0, -2, -3 et 3.
- ▷ Le polynôme x^2+100 étant une somme de carrés de degré 2, on sait qu'il est impossible de le factoriser.
  D'après le théorème de factorisation, ce polynôme ne possède aucun zéro. S'il avait un zéro, il existerait un nombre réel a tel que $a^2+100=0$. Il faudrait donc que $a^2=-100$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$, puisqu'un carré ne peut être négatif.

• 4.2 - La recherche des zéros à l'aide de la formule quadratique

La méthode de complétion du carré est mise en profit pour vérifier si le polynôme du second degré ax^2+bx+c possède des zéros et les trouver, s'il y a lieu.

Théorème 4.2 (Les zéros d'un polynôme du second degré)

Selon la valeur de b^2-4ac *qu'on appelle discriminant, les zéros du polynôme* ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ *sont donnés par :*

1. *Si* $\mathbf{b^2-4ac>0}$, *le polynôme* ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ *possède* **deux zéros** *:*

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \textit{ et } z_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

   On obtient ainsi la factorisation suivante du polynôme $ax^2+bx+c=a(x-z_1)(x-z_2)$.

2. *Si* $\mathbf{b^2-4ac=0}$, *le polynôme* ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ *possède* **un seul zéro** *:*

$$z_1=\frac{-b}{2a}$$

On obtient alors la factorisation suivante du polynôme $ax^2 + bx + c = a(x - z_1)^2$.

3. *Si* $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$, *le polynôme* $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *ne possède* **aucun zéro**. *On ne peut pas factoriser le polynôme* $ax^2 + bx + c$.

Exemple 4.2 :

- Soit le polynôme $3x^2 + x - 7$, où $a = 3$, $b = 1$ et $c = -7$.

  $$b^2 - 4ac = 1^2 - 4(3)(-7) = 1 + 84 = 85$$

  Puisque $b^2 - 4ac > 0$, le polynôme possède deux zéros, donnés par

  $$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{85}}{6} \approx -1,70 \text{ et } z_2 = \frac{-1 + \sqrt{85}}{6} \approx 1,37$$
  $$3x^2 + x - 7 = 3\left(x - \frac{-1 - \sqrt{85}}{6}\right)\left(x - \frac{-1 + \sqrt{85}}{6}\right)$$

- Soit le polynôme $-20x^2 + 9x - 1$, où $a = -20$, $b = 9$ et $c = -1$.

  $$b^2 - 4ac = 9^2 - 4(-20)(-1) = 81 - 80 = 1$$

  Puisque $b^2 - 4ac > 0$, le polynôme possède deux zéros, donnés par

  $$z_1 = \frac{-9 - \sqrt{1}}{-40} = \frac{-9 - 1}{-40} = \frac{-10}{-40} = \frac{1}{4} \text{ et } z_2 = \frac{-9 + \sqrt{1}}{-40} = \frac{-9 + 1}{-40} = \frac{-8}{-40} = \frac{1}{5}$$
  $$\begin{aligned} -20x^2 + 9x - 1 &= -20\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) \\ &= -(4)(5)\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) \\ &= -(4)\left(x - \frac{1}{4}\right)(5)\left(x - \frac{1}{5}\right) \\ &= -(4x - 1)(5x - 1) \end{aligned}$$

  On peut aussi exprimer ce produit sous la forme $(-4x + 1)(5x - 1)$ ou $(4x - 1)(-5x + 1)$ en multipliant l'un ou l'autre des facteurs par -1.
  On aurait pu trouver le même résultat par factorisation du trinôme $-20x^2 + 9x - 1$ en cherchant deux nombres dont le produit est $ac = 20$ et la somme, $b = 9$. Ces deux nombres sont 4 et 5.

  $$-20x^2 + 9x - 1 = (-5x + 1)(4x - 1)$$

  On peut alors déduire que les zéros sont les valeurs de x telles que $-5x + 1 = 0$ ou $4x - 1 = 0$, c'est-à-dire $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{4}$

- ▷ Soit le polynôme $2x^2 - x + 5$.

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(5) = 1 - 40 = -39$$

Puisque $b^2 - 4ac < 0$, le polynôme ne possède aucun zéro et ne peut être factorisé.

- ▷ Soit le polynôme $4x^2 + 12x + 9$.

$$b^2 - 4ac = 12^2 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0$$

Puisque $b^2 - 4ac = 0$, le polynôme possède un seul zéro, donné par $z_1 = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2}$.

$$4x^2 + 12x + 9 = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 2^2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \left[2\left(x + \frac{3}{2}\right)\right]^2 = (2x+3)^2$$

On aurait obtenu le même résultat en utilisant la méthode de factorisation d'un trinôme carré parfait.

5 Les fractions rationnelles

Plusieurs quantités sont décrites comme des rapports, des proportions, des pourcentages. On les exprime à l'aide de fractions. Les fractions algébriques sont celles dont le numérateur et le dénominateur sont des expressions algébriques. Nous nous limiterons dans ce chapitre aux fractions rationnelles, celles dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes.

• 5.1 - Les caractéristiques des fractions rationnelles

Définition 5.1

On appelle **fraction rationnelle** toute expression de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont des polynômes et $Q \neq 0$.

Exemple 5.1 :

- ▷ $\frac{3x^2-5x+3}{2x+7}$ est une fraction rationnelle, car son numérateur et son dénominateur sont des polynômes.
- ▷ $\frac{8x^5-17x+6}{\sqrt{x-2}}$ n'est pas une fraction rationnelle, car son dénominateur n'est pas un polynôme. C'est tout de même une fraction algébrique.

Puisqu'une fraction rationnelle est un quotient de polynômes, il faut s'assurer qu'il n'y a pas de division par 0, c'est-à-dire que les variables ne prennent pas des valeurs qui rendraient le dénominateur nul.

La factorisation de polynômes, la règle du produit nul et les méthodes de résolution d'équations seront souvent utiles pour trouver les valeurs qui annulent le dénominateur d'une fraction rationnelle.

Définition 5.2

Le **domaine** d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est l'ensemble de toutes les valeurs réelles telles que le dénominateur Q est différent de 0.

Exemple 5.2 :

- ▷ Cherchons le domaine de la fraction rationnelle $\frac{x-5}{3x-1}$.
  Puisqu'on ne peut pas diviser par 0, le dénominateur ne doit pas être nul. Le domaine est donc l'ensemble des valeurs de x telles que $3x-1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \frac{1}{3}$. Ainsi, le domaine de la fraction $\frac{x-5}{3x-1}$ est $\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{1}{3}\right\}$.
- ▷ Cherchons le domaine de la fraction rationnelle $\frac{x^2-9}{x^2-4}$.
  Il faut exclure de $\mathbb{R}$ les valeurs qui annulent le dénominateur, soit les zéros du polynôme x^2-4.

  $$\begin{gathered} x^2-4=0 \text{ si } (x+2)(x-2)=0 \\ x+2=0 \text{ ou } x-2=0 \\ x=-2 \text{ ou } x=2 \end{gathered}$$

  Puisque le dénominateur ne doit pas être nul, il faut que $x^2-4 \neq 0$, et donc que $x \neq -2$ et $x \neq 2$. Ainsi, le domaine de la fraction $\frac{x^2-9}{x^2-4}$ est $\mathbb{R} \backslash \{-2, 2\}$.
- ▷ Cherchons le domaine de la fraction $\frac{x^2-9}{x^2-x+4}$.
  En utilisant la formule quadratique pour trouver les zéros du dénominateur x^2-x+4, on calcule d'abord $b^2-4ac=(-1)^2-4(1)(4)=-15$.
  Puisque $b^2-4ac<0$, le polynôme x^2-x+4 n'a aucun zéro et le dénominateur ne sera jamais nul. Le domaine de la fraction $\frac{x^2-9}{x^2-x+4}$ est $\mathbb{R}$.
- ▷ La fraction $\frac{2}{x-y}$ comporte deux variables.
  Son dénominateur sera différent de 0 si $x-y \neq 0$ ou $x \neq y$. Le domaine de cette fraction est donc l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \neq y$.

Propriété 5.1 *Les zéros d'une fraction rationnelle* $\frac{P}{Q}$ *sont les valeurs du domaine qui annulent le numérateur.*

Exemple 5.3 :

- ▷ Soit la fraction rationnelle $\frac{x^2+4x+3}{x^2-1}$. En factorisant le numérateur et le dénominateur, on obtient

  $$\frac{x^2+4x+3}{x^2-1}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x-1)}$$

Ainsi, le domaine de la fraction rationnelle est $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ (-1 **et** 1 **étant les racines du dénominateur**).
Les valeurs qui annulent le numérateur sont -1 et -3.Puisque -1 n'appartient pas au domaine, ce n'est pas un zéro de la fraction. Son seul zéro est -3.

• 5.2 - Les fractions équivalentes

Définition 5.3

Deux fractions rationnelles sont dites **équivalentes** si, pour **tout nombre réel** appartenant à l'intersection des deux domaines, les deux fractions ont la même valeur numérique lorsqu'on remplace leur variable par ce nombre.

Attention !

Il suffit d'une seule valeur de x, commune aux deux domaines et telle que les deux fractions n'ont pas la même valeur numérique, pour affirmer que deux fractions rationnelles ne sont pas équivalentes. C'est ce qu'on appelle un contre-exemple.

Exemple 5.4 :

▷ Soit les fractions $\frac{x+2}{x-3}$ et $\frac{x^2-4}{x^2+6}$.
Leurs domaines respectifs sont $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et $\mathbb{R}$.
Choisissons un nombre appartenant aux deux domaines, par exemple 4, et remplaçons la variable x par 4 dans chacune des fractions.
Si $x = 4$, on obtient $\frac{x+2}{x-3} = \frac{4+2}{4-3} = 6$ pour la première fraction et $\frac{x^2-4}{x^2+6} = \frac{16-4}{16+6} = \frac{6}{11}$ pour la seconde. Puisque $6 \neq \frac{6}{11}$, on constate que si on remplace x par 4, les deux fractions n'ont pas la même valeur numérique. On a donc trouvé un contre-exemple à l'équivalence de ces fractions.
C'est suffisant pour affirmer que les fractions $\frac{x+2}{x-3}$ et $\frac{x^2-4}{x^2+6}$ ne sont pas équivalentes.

Attention !

Un seul exemple ne suffit pas pour affirmer que deux fractions sont équivalentes. Même si deux fractions possèdent la même valeur numérique pour une valeur de x, rien ne garantit qu'il en sera ainsi pour **toutes** les valeurs communes aux deux domaines.

Exemple 5.5 :

▷ Soit les fractions $\frac{x+1}{x-2}$ et $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.
Leurs domaines respectifs sont $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et $\mathbb{R}\backslash\{1, 2\}$.

Si $x = 0$, elles valent toutes deux $\frac{-1}{2}$.
Si $x = 3$, elles valent toutes deux 4.
Si $x = -5$, elles valent toutes deux $\frac{4}{7}$.
Toutefois, **ce n'est pas suffisant** pour affirmer qu'elles sont équivalentes.
Puisque le domaine d'une fraction rationnelle est un ensemble infini, on ne peut pas donner successivement à x toutes les valeurs de cet ensemble.
Après avoir constaté que les deux fractions ont la même valeur numérique pour quelques valeurs de x, on pourrait croire qu'elles sont équivalentes. Il faut toutefois le vérifier au moyen d'une des deux règles suivantes.

Méthode : (La première règle d'équivalence de fractions)
Deux fractions rationnelles $\frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ sont **équivalentes** pour les valeurs communes à leurs deux domaines si et seulement si $PS = QR$.

Exemple 5.6 :

▷ Vérifions si les fractions $\frac{x+1}{x-2}$ et $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ de l'exemple précédent sont équivalentes.
Leurs domaines respectifs sont $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et $\mathbb{R}\backslash\{1, 2\}$.
D'après la règle précédente, les deux fractions sont équivalentes si le produit du numérateur de la première et du dénominateur de la seconde, soit $(x + 1)(x^2 - 3x + 2)$, est égal au produit du dénominateur de la première et du numérateur de la seconde, c'est-à-dire $(x - 2)(x^2 - 1)$.

$$\begin{aligned}(x+1)(x^2-3x+2) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ (x-2)(x^2-1) &= x^3 - 2x^2 - x + 2\end{aligned}$$

Puisque les deux produits sont identiques, les fractions sont équivalentes pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1, 2\}$ soit pour toutes les valeurs communes à leurs deux domaines.

Méthode : (La deuxième règle d'équivalence de fractions)
Deux fractions rationnelles sont **équivalentes** pour les valeurs communes à leurs deux domaines si et seulement si on obtient la seconde à partir de la première (ou inversement) en **multipliant** ou en **divisant** le numérateur et le dénominateur de celle ci par un **même** facteur non nul.

Exemple 5.7 :

▷ Vérifions si les fractions $\frac{x+1}{x-2}$ et $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ sont équivalentes, en utilisant la deuxième règle d'équivalence de fractions.

On factorise le numérateur et le dénominateur de la deuxième fraction.

$$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$$

Le facteur $(x-1)$ est commun au numérateur et au dénominateur. Le domaine de la fraction étant $\mathbb{R}\backslash\{1,2\}$, on sait que $x-1\neq 0$ et on peut alors effectuer la division.
En divisant le numérateur et le dénominateur par le facteur commun, on obtient :

$$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\frac{x+1}{x-2}$$

soit la première fraction présentée dans l'énoncé du problème. Les deux fractions sont donc équivalentes pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{1,2\}$.

Les deux méthodes conduisent au même résultat. On choisit l'une ou l'autre selon qu'il est facile ou non d'effectuer la décomposition en facteurs.

Attention !

Il est important de préciser les valeurs pour lesquelles les fractions sont équivalentes. En effet, si $x=1$, la première fraction vaut -2, alors que la seconde n'est pas définie. Elles ne sont donc pas équivalentes pour $x=1$.

• 5.3 - La simplification de fractions rationnelles

La simplification d'une fraction rationnelle consiste à chercher une fraction équivalente dont le numérateur et le dénominateur n'ont plus de diviseur commun. Nous venons de voir qu'il est possible d'obtenir une fraction équivalente à une autre en multipliant ou en divisant le numérateur et le dénominateur de celle-ci par un même facteur. Si on veut **simplifier** une fraction, il faut évidemment **diviser** plutôt que multiplier.

Puisque la division est l'opération inverse de la multiplication, il faut d'abord exprimer le numérateur et le dénominateur sous la forme de produits de facteurs, puis les diviser par les facteurs communs.

Note : (La simplification d'une fraction rationnelle)

Pour simplifier une fraction rationnelle :

1. Décomposer en facteurs son numérateur et son dénominateur.
2. Trouver son domaine.
3. Déterminer les facteurs **communs** au numérateur et au dénominateur.
4. **Diviser** le numérateur et le dénominateur par ces facteurs communs.

Le produit des facteurs communs forme le plus grand commun diviseur (PGCD) du numérateur et du dénominateur. C'est donc par leur PGCD qu'on les divise.

La fraction initiale et sa version simplifiée seront équivalentes sur le domaine de la fraction initiale, d'où l'importance de déterminer ce domaine.

Attention !

- ▷ Une simplification est une **division** du numérateur et du dénominateur par un même **facteur**. On ne peut donc simplifier que les éléments d'un **produit**.
- ▷ On peut, par exemple, simplifier $\frac{ab}{ac}$ en divisant le numérateur et le dénominateur par a (si $a \neq 0$). On obtient alors $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$.
- ▷ On ne peut toutefois pas simplifier $\frac{a+b}{a+c}$ en divisant le numérateur et le dénominateur par a, puisque a n'est pas un facteur, mais un terme du numérateur et du dénominateur.

Exemple 5.8 :

- ▷ Soit la fraction $\frac{6x^3-10x^2-4x}{18x^4+78x^3+24x^2}$.

  En décomposant en facteurs son numérateur et son dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{6x^3 - 10x^2 - 4x}{18x^4 + 78x^3 + 24x^2} &= \frac{2x(3x^2 - 5x - 2)}{6x^2(3x^2 + 13x + 4)} \\ &= \frac{2x(x-2)(3x+1)}{6x^2(x+4)(3x+1)}\end{aligned}$$

  Le domaine de cette fraction rationnelle est donc $\mathbb{R}\backslash\left\{-4, \frac{-1}{3}, 0\right\}$. Les facteurs communs au numérateur et au dénominateur sont 2, x et $(3x+1)$. En divisant le numérateur et le dénominateur de la fraction par ces facteurs communs, on obtient :

$$\frac{2x(x-2)(3x+1)}{6x^2(x+4)(3x+1)} = \frac{x-2}{3x(x+4)}$$

  Cette dernière fraction est équivalente à la première, à la condition que x soit différent de -4, $\frac{-1}{3}$ et 0, soit pour $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-4, \frac{-1}{3}, 0\right\}$

- ▷ Simplifions la fraction rationnelle $\frac{x^2+3x-10}{4-x^2}$.

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{4 - x^2} = \frac{(x+5)(x-2)}{(2+x)(2-x)}$$

  Son domaine est $\mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$. Le facteur $(x-2)$ du numérateur et le facteur $(2-x)$ du dénominateur ne sont pas égaux. Cependant, $(2-x)$ est l'opposé de $(x-2)$, puisque $2 - x = -x + 2 = -1(x - 2)$. On peut réécrire la fraction sous la forme $\frac{(x+5)(x-2)}{(2+x)(-1)(x-2)}$. En simplifiant le facteur commun , on obtient :

$$\frac{(x+5)(x-2)}{(2+x)(-1)(x-2)} = \frac{x+5}{(2+x)(-1)} = \frac{x+5}{(-2-x)}$$

Donc, $\frac{x^2+3x-10}{4-x^2} = \frac{x+5}{(-2-x)}$ si $x \neq -2$ et $x \neq 2$.
La fraction $\frac{x+5}{(-2-x)}$ peut aussi s'exprimer sous la forme $\frac{-x-5}{(2+x)}$ si on multiplie son numérateur et son dénominateur par -1.
On pourrait également écrire $\frac{-(x+5)}{(2+x)}$ ou $\frac{(x+5)}{-(2+x)}$ ou $-\frac{(x+5)}{(2+x)}$ ou $-\left(\frac{x+5}{2+x}\right)$.

Attention !

- ▷ Le trait de fraction joue le même rôle que des parenthèses. Le signe $(-)$ devant une fraction indique qu'il faut multiplier la fraction par -1.
- ▷ On peut donc multiplier le numérateur **ou** le dénominateur par -1. Tout comme

$$-\frac{2}{5} = -\left(\frac{2}{5}\right) = (-1)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{-2}{5} = \frac{2}{-5}$$

les expressions suivantes sont égales :

$$-\frac{x-3}{x+4} = -\left(\frac{x-3}{x+4}\right) = (-1)\left(\frac{x-3}{x+4}\right) = \frac{-x+3}{x+4} = \frac{x-3}{-x-4}$$

La simplification d'expressions rationnelles est souvent une étape incontournable avant la résolution d'équations ou d'inéquations. Il est donc essentiel de bien maîtriser cette notion.

L'exemple qui suit présente un type de fraction qu'on rencontre souvent dans les cours de calcul différentiel.

Exemple 5.9 :

- ▷ Simplifions la fraction $\frac{8(2x+3)^3(x-5)^2-2(2x+3)^4(x-5)}{(x-5)^4}$.
Son domaine est $\mathbb{R}\backslash\{5\}$. Il faut effectuer la mise en évidence des facteurs communs

aux deux termes du numérateur avant de simplifier la fraction.

$$\begin{aligned}\frac{8(2x+3)^3(x-5)^2-2(2x+3)^4(x-5)}{(x-5)^4} &= \frac{2(2x+3)^3(x-5)[4(x-5)-(2x+3)]}{(x-5)^4}\\ &= \frac{2(2x+3)^3(x-5)(4x-20-2x-3)}{(x-5)^4}\\ &= \frac{2(2x+3)^3(x-5)(2x-23)}{(x-5)^4}\\ &= \frac{2(2x+3)^3(2x-23)}{(x-5)^3}\end{aligned}$$

On a pu diviser le numérateur et le dénominateur par $(x-5)$, car le domaine est $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ ce qui nous assure que $x-5\neq 0$.

5.4 - Le dénominateur commun à deux fractions rationnelles

Note : (Le plus petit dénominateur commun)
La recherche d'un dénominateur commun à deux ou plusieurs fractions rationnelles est basée sur les mêmes principes que ceux que vous avez appris pour les fractions numériques. Pour trouver le plus petit dénominateur commun à deux ou plusieurs fractions :

1. On factorise chacun des dénominateurs.
2. On cherche le plus petit commun multiple (PPCM) de ces dénominateurs : c'est le produit de tous les facteurs, communs ou non, chacun d'eux étant affecté du plus grand exposant qui figure dans l'un ou l'autre des dénominateurs.

Exemple 5.10 :

▷ Soit les fractions $\frac{x^2-5}{9x^2-36}$ et $\frac{2}{15(x^2+4x+4)(x-3)}$.
Factorisons leurs dénominateurs.

$$9x^2-36 = 9(x^2-4) = (3^2)(x+2)(x-2)$$
$$15(x^2+4x+4)(x-3) = (3)(5)(x+2)^2(x-3)$$

Leur PPCM est donc $(3^2)(5)(x+2)^2(x-2)(x-3) = 45(x+2)^2(x-2)(x-3)$.
C'est le plus petit dénominateur commun aux deux fractions.

Après avoir trouvé le plus petit dénominateur commun à plusieurs fractions, on peut trouver les fractions équivalentes qui ont toutes le même dénominateur. Cela sera utile pour comparer des fractions rationnelles, effectuer des additions ou des soustractions, ou encore résoudre des équations contenant de telles fractions.

Méthode : (L'expression de plusieurs fractions avec un dénominateur commun)

Pour ramener deux ou plusieurs fractions au même dénominateur :

1. On cherche le plus petit dénominateur commun à ces fractions.
2. Pour chacune des fractions, on trouve la fraction équivalente ayant ce dénominateur commun.

Exemple 5.11 :

▷ Soit les fractions $\frac{x+1}{6x^4-96x^2}$ et $\frac{2x-3}{20x^2+20x-240}$, qu'on veut ramener au même dénominateur. On factorise d'abord le dénominateur de chacune des fractions pour trouver le plus petit dénominateur commun.

$$\begin{aligned} 6x^4 - 96x^2 &= 6x^2(x^2-16) = (2)(3)(x^2)(x+4)(x-4) \\ 20x^2+20x-240 &= 20(x^2+x-12) = (2^2)(5)(x+4)(x-3) \end{aligned}$$

La factorisation permet de savoir que les domaines des deux fractions sont respectivement $\mathbb{R}\backslash\{-4,0,4\}$ et $\mathbb{R}\backslash\{-4,3\}$.
Le plus petit dénominateur commun aux deux fractions est le PPCM de leurs deux dénominateurs, soit $(2^2)(3)(5)(x^2)(x+4)(x-4)(x-3) = 60x^2(x+4)(x-4)(x-3)$.
Pour trouver la fraction équivalente, on divise d'abord ce dénominateur commun par le dénominateur de la fraction initiale, puis on multiplie son numérateur et son dénominateur par le quotient trouvé.

$$\frac{60x^2(x+4)(x-4)(x-3)}{6x^2(x+4)(x-4)} = 10(x-3)$$

$$\frac{x+1}{6x^4-96x^2} = \frac{x+1}{6x^2(x+4)(x-4)} \times \frac{10(x-3)}{10(x-3)} = \frac{10(x+1)(x-3)}{60x^2(x+4)(x-4)(x-3)}$$

On fait de même avec la seconde fraction.

$$\frac{60x^2(x+4)(x-4)(x-3)}{20(x+4)(x-3)} = 3x^2(x-4)$$

$$\frac{2x-3}{20x^2+20x-240} = \frac{2x-3}{20(x+4)(x-3)} \times \frac{3x^2(x-4)}{3x^2(x-4)} = \frac{3x^2(2x-3)(x-4)}{60x^2(x+4)(x-4)(x-3)}$$

Les deux fractions ainsi obtenues ont un même dénominateur et sont respectivement équivalentes aux deux fractions initiales pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-4,0,3,4\}$.

6 Les opérations sur les fractions rationnelles

Note : (Les opérations sur les fractions rationnelles)
On effectue les opérations sur les fractions rationnelles de la même façon que sur les fractions numériques, en respectant les règles des opérations sur les polynômes.

- ⋆ Pour **additionner** ou **soustraire** deux fractions rationnelles, on les ramène au même dénominateur, ce qui permet ensuite d'additionner ou de soustraire les numérateurs, puis de simplifier, si possible.
- ⋆ Pour **multiplier** deux fractions rationnelles, on multiplie leurs numérateurs entre eux et leurs dénominateurs entre eux.
- ⋆ Pour **diviser** deux fractions rationnelles, on multiplie la première par l'inverse de la seconde.

Méthode : (Le domaine du résultat d'opérations sur des fractions)
Le domaine du résultat d'une opération sur des fractions rationnelles est **inclus** dans l'intersection des domaines de chacune des fractions.

- ▷ Dans le cas de l'**addition**, de la **soustraction** ou de la **multiplication**, le domaine est **égal** à l'intersection des domaines.
- ▷ Dans le cas de la **division**, on doit aussi **exclure les zéros du diviseur**.

La forme privilégiée pour la présentation du résultat d'une opération sur des fractions rationnelles est la forme factorisée et simplifiée. Toutefois, si le numérateur ne se factorise pas facilement, on le laisse sous forme de somme, la plus simple possible. On n'effectue surtout pas les produits dans les polynômes déjà factorisés.

Exemple 6.1 :

- ▷ Effectuons l'addition $\frac{x-1}{3x^2-6x}+\frac{x+3}{x^2-x-2}$.

$$\frac{x-1}{3x^2-6x}+\frac{x+3}{x^2-x-2}=\frac{x-1}{3x(x-2)}+\frac{x+3}{(x+1)(x-2)}$$

Les domaines des deux fractions sont respectivement $\mathbb{R}\backslash\{0,2\}$ et $\mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$.
Le plus petit dénominateur commun aux deux fractions est le PPCM de $3x(x-2)$

et de $(x+1)(x-2)$, soit $3x(x+1)(x-2)$.

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{3x^2-6x}+\frac{x+3}{x^2-x-2} &= \frac{(x-1)(x+1)}{3x(x-2)(x+1)}+\frac{3x(x+3)}{3x(x+1)(x-2)}\\ &= \frac{(x-1)(x+1)+3x(x+3)}{3x(x+1)(x-2)}\\ &= \frac{x^2-1+3x^2+9x}{3x(x+1)(x-2)}\\ &= \frac{4x^2+9x-1}{3x(x+1)(x-2)}\end{aligned}$$

Le domaine de la somme est $\mathbb{R}\backslash\{0,2\}\cap\mathbb{R}\backslash\{-1,2\}=\mathbb{R}\backslash\{-1,0,2\}$.

- ▷ Soustrayons $\frac{x+1}{5x+10}$ de $\frac{x}{x^2-4}$. Il s'agit donc de calculer $\frac{x}{x^2-4}-\frac{x+1}{5x+10}$.
Les domaines des deux fractions de la soustraction sont respectivement $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$ et $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-4}-\frac{x+1}{5x+10} &= \frac{x}{(x+2)(x-2)}-\frac{x+1}{5(x+2)}\\ &= \frac{5x}{5(x+2)(x-2)}-\frac{(x+1)(x-2)}{5(x+2)(x-2)}\\ &= \frac{5x-(x+1)(x-2)}{5(x+2)(x-2)}\\ &= \frac{5x-(x^2-x-2)}{5(x+2)(x-2)}\\ &= \frac{5x-x^2+x+2}{5(x+2)(x-2)}\\ &= \frac{-x^2+6x+2}{5(x+2)(x-2)}\end{aligned}$$

Le domaine de la différence est $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}\cap\mathbb{R}\backslash\{-2\}=\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$.

- ▷ Effectuons la multiplication de $\frac{x^2+2x}{x^2+x-20}$ par $\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x-10}$.
Puisque $x^2+x-20=(x+5)(x-4)$ et $x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$, les

domaines respectifs des deux fractions sont $\mathbb{R}\backslash\{-5,4\}$ et $\mathbb{R}\backslash\{-2,5\}$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x}{x^2+x-20}\times\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x-10} &= \frac{(x^2+2x)(x^2-7x+12)}{(x^2+x-20)(x^2-3x-10)}\\ &= \frac{x(x+2)(x-3)(x-4)}{(x+5)(x-4)(x+2)(x-5)}\\ &= \frac{x(x-3)}{(x+5)(x-5)}\end{aligned}$$

Le domaine du produit est $\mathbb{R}\backslash\{-5,4\}\cap\mathbb{R}\backslash\{-2,5\}=\mathbb{R}\backslash\{-5,-2,4,5\}$. C'est ce qui permet de simplifier les facteurs $(x+2)$ et $(x-4)$ en ayant l'assurance de ne pas faire une division par 0.

Le domaine du produit est $\mathbb{R}\backslash\{-5,-2,4,5\}$, même si les facteurs $(x+2)$ et $(x-4)$ n'apparaissent pas au dénominateur de la réponse.

- ▷ Divisons $\frac{x^2+x}{x+3}$ par $\frac{x}{x^2+4x+3}$.

Le domaine du dividende $\frac{x^2+x}{x+3}$ est $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$, le domaine du diviseur $\frac{x}{x^2+4x+3}$ est $\mathbb{R}\backslash\{-3,-1\}$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x}{x+3}\div\frac{x}{x^2+4x+3} &= \frac{x^2+x}{x+3}\times\frac{x^2+4x+3}{x}\\ &= \frac{(x^2+x)(x^2+4x+3)}{x(x+3)}\\ &= \frac{x(x+1)(x+1)(x+3)}{x(x+3)}\\ &= (x+1)^2\end{aligned}$$

L'intersection des domaines des deux fractions est $\mathbb{R}\backslash\{-3,-1\}$.

Il importe toutefois d'ajouter une condition : pour que le diviseur $\frac{x}{x^2+4x+3}$ ne soit pas nul, il faut que son numérateur soit différent de 0, c'est-à-dire que $x\neq 0$. Ainsi, le domaine du quotient est $\mathbb{R}\backslash\{-3,-1,0\}$.

Attention !

Il est essentiel de considérer les domaines de chacune des fractions initiales pour trouver le domaine du résultat d'une opération.
En effet, si une valeur de la variable n'est pas admissible au début

d'un problème, elle ne deviendra pas admissible à la fin, même si une simplification a fait «disparaître» un facteur de la réponse.

Nous illustrons ce principe à l'aide de deux exemples simples, qui montrent bien la nécessité de poser les conditions nécessaires.

Exemple 6.2 :

- ▷ Les deux fractions $\frac{x}{x+2}$ et $\frac{2}{x+2}$ ont chacune $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ comme domaine.
  En effectuant l'addition des fractions et en simplifiant, on obtient :

$$\frac{x}{x+2}+\frac{2}{x+2}=\frac{x+2}{x+2}=1$$

Même si la réponse est 1, on ne peut affirmer que le domaine de la somme est $\mathbb{R}$, puisque la simplification qui a conduit à ce résultat n'est possible que si on n'effectue pas une division par 0, c'est-à-dire si $x \neq -2$.

Le domaine de la somme $\frac{x}{x+2}+\frac{2}{x+2}$ est $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

- ▷ Soit les fractions $\frac{x}{x-3}$ et $\frac{x}{x-5}$, dont les domaines respectifs sont $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et $\mathbb{R}\backslash\{5\}$.
  En effectuant la division de $\frac{x}{x-3}$ par $\frac{x}{x-5}$ et en simplifiant, on obtient :

$$\frac{x}{x-3}\div\frac{x}{x-5}=\frac{x}{x-3}\times\frac{x-5}{x}=\frac{x(x-5)}{x(x-3)}=\frac{x-5}{x-3}$$

Si on ne considérait que la réponse pour trouver le domaine du quotient, on aurait $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, **ce qui est faux**.
En effet, les valeurs $x=3$ et $x=5$ sont déjà exclues depuis le début. De plus, comme on ne peut pas faire une division par 0, le diviseur $\frac{x}{x-5}$ ne peut être nul. Il faut donc ajouter la condition $x \neq 0$.
Le domaine du quotient est donc $\mathbb{R}\backslash\{0,3,5\}$.

Méthode : (L'ordre de priorité des opérations)
Lorsqu'on effectue une suite d'opérations sur des fractions rationnelles, on doit toujours respecter l'ordre de priorité des opérations, qui est le même que dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6.3 :

- ▷ Simplifions l'expression $\frac{x-3}{x+1}+\frac{1}{x-2}\div\frac{x}{x^2-4}$.
  Pour respecter l'ordre de priorité des opérations, il faut d'abord effectuer la division

de $\frac{1}{x-2}$ par $\frac{x}{x^2-4}$, puis additionner le résultat à $\frac{x-3}{x+1}$.

$$\begin{aligned}
\frac{x-3}{x+1} + \frac{1}{x-2} \div \frac{x}{x^2-4} &= \frac{x-3}{x+1} + \frac{1}{x-2} \times \frac{x^2-4}{x} \\
&= \frac{x-3}{x+1} + \frac{x^2-4}{x(x-2)} \\
&= \frac{x-3}{x+1} + \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} \\
&= \frac{x-3}{x+1} + \frac{(x+2)}{x} \\
&= \frac{x(x-3)}{x(x+1)} + \frac{(x+1)(x+2)}{x(x+1)} \\
&= \frac{x(x-3)+(x+1)(x+2)}{x(x+1)} \\
&= \frac{x^2-3x+x^2+3x+2}{x(x+1)} \\
&= \frac{2x^2+2}{x(x+1)}
\end{aligned}$$

Les domaines des trois fractions initiales sont respectivement $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$. Il faut ajouter la condition $x \neq 0$ puisqu'on divise par $\frac{x}{x^2-4}$, qui ne doit pas valoir 0. Le domaine du résultat est donc $\mathbb{R}\backslash\{-2,-1,0,2\}$.

Chapitre 2

Systèmes d'Équations Linéaires et Matrices

Sommaire

La résolution de systèmes d'équations linéaires est utilisée dans plusieurs domaines tels que les mathématiques, les sciences, l'économie, etc. Dans ce chapitre, nous étudierons différentes méthodes de résolution de système d'équations linéaires. Nous aborderons spécialement les méthodes élémentaires et la méthode de Gauss-Jordan. Cette dernière faisant appel à une représentation matricielle du système linéaire, nous aborderons à la première partie de ce chapitre les matrices et leurs opérations.

Les matrices sont des tableaux contenant des éléments disposés en lignes et en colonnes. Ces représentations sont fréquemment utilisées dans des domaines comme l'administration, les sciences de la nature, les sciences humaines, etc. Nous définirons d'abord trois opérations élémentaires sur les matrices : l'addition de matrices, la multiplication d'une matrice par un scalaire et la multiplication de matrices.

Toutes ces notions sont largement étudiées dans [2], qui a servi à la mise en oeuvre de ce chapitre.

1 Matrices

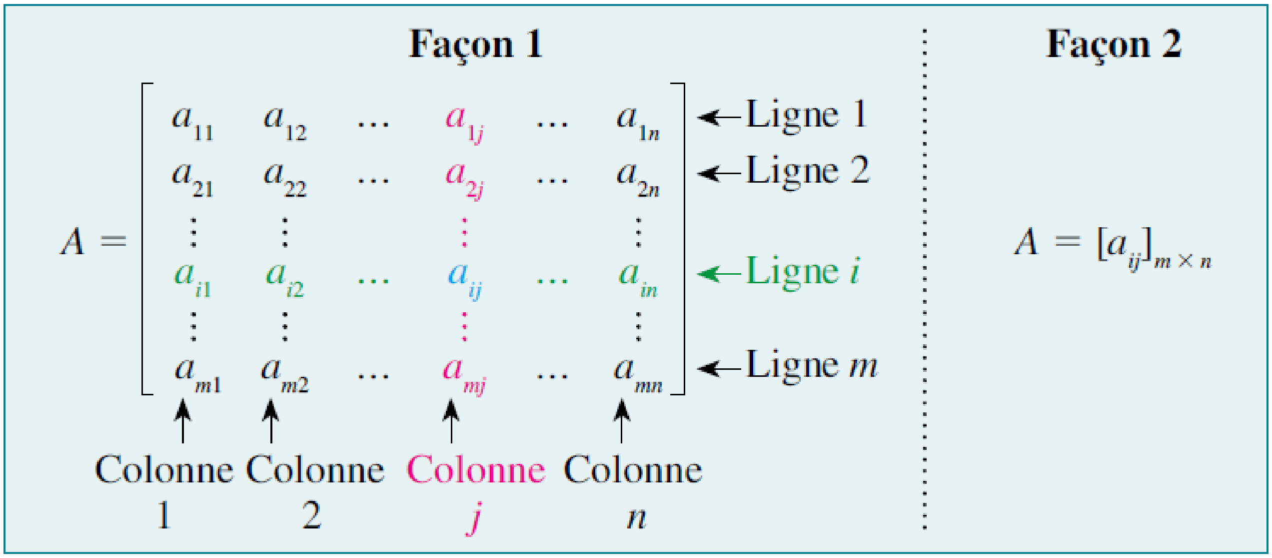
1.1 - Définition de matrices

Définition 1.1

Une **matrice de dimension** m **par** n, ou de format m par n, est un tableau rectangulaire ordonné d'éléments disposés sur m lignes et n colonnes.

Note : À moins d'avis contraire, les éléments d'une matrice sont des **nombres réels**.

Une matrice A de dimension m par n peut être représentée de l'une ou l'autre des façons suivantes.

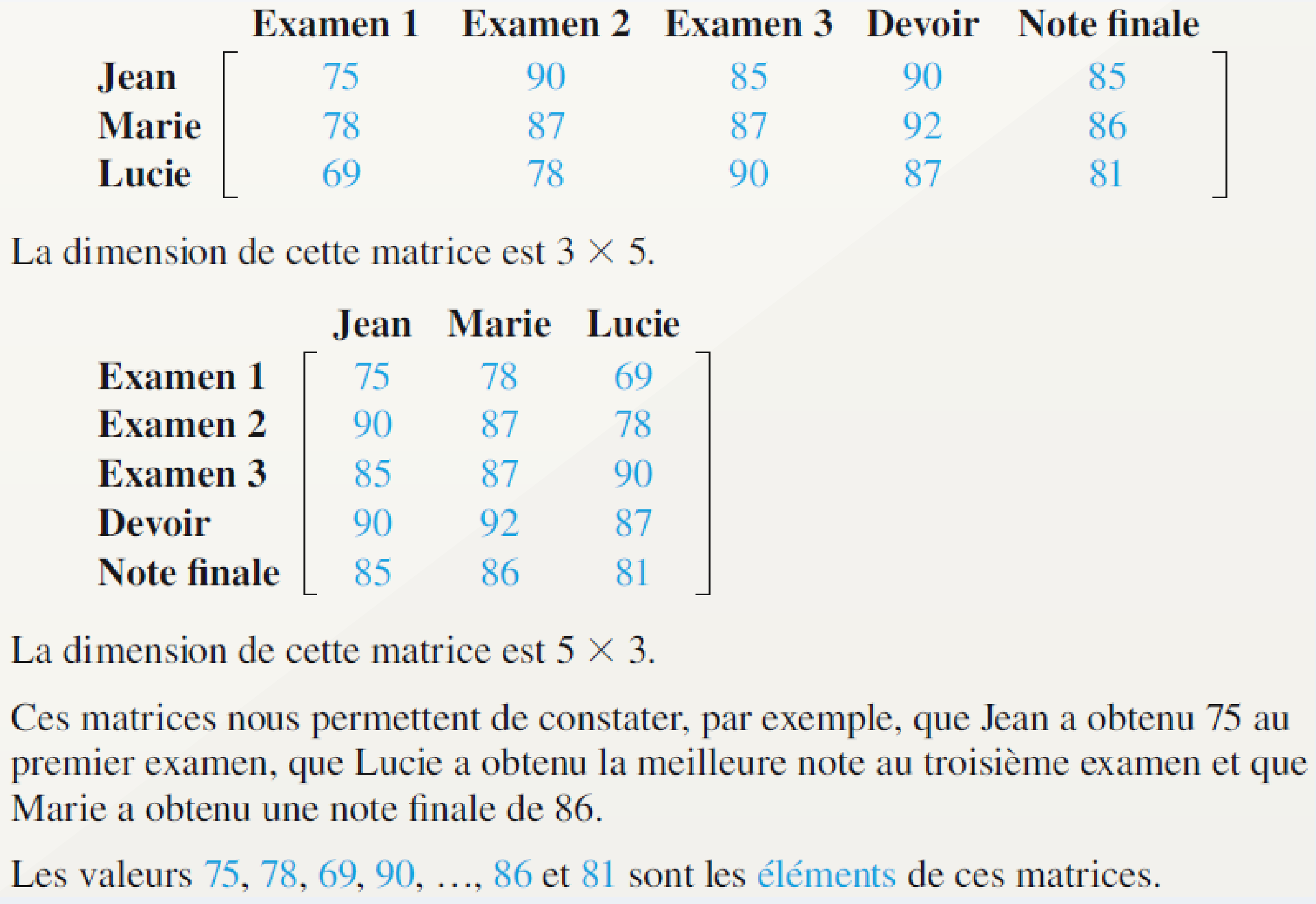


Note :

- Dans ce tableau, $a_{ij}(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ représentent les **éléments** (ou **entrées**) de la matrice A.
- De façon particulière, les indices i et j donnent la position des éléments de la matrice ; ainsi a_{ij} est l'élément situé sur la $i - ime$ ligne et la $j - ime$ colonne.
- Les nombres entiers positifs m et n représentent respectivement le nombre de lignes et le nombre de colonnes de la matrice (**le nombre de lignes précède toujours le nombre de colonnes**).
- Nous pouvons également noter la matrice A précédente de l'une des façons suivantes.

$$A_{m\times n} \quad : \quad A_{mn} \quad : \quad [a_{ij}]_{mn}$$

Exemple 1.1 : Représentons à l'aide de matrices légendées les résultats que Jean, Marie et Lucie ont obtenus à leur cours de mathématiques.



$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & \textbf{Examen 1} & \textbf{Examen 2} & \textbf{Examen 3} & \textbf{Devoir} & \textbf{Note finale} \\
\textbf{Jean} & 75 & 90 & 85 & 90 & 85 \\
\textbf{Marie} & 78 & 87 & 87 & 92 & 86 \\
\textbf{Lucie} & 69 & 78 & 90 & 87 & 81
\end{array}$$

La dimension de cette matrice est 3 × 5.

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & \textbf{Jean} & \textbf{Marie} & \textbf{Lucie} \\
\textbf{Examen 1} & 75 & 78 & 69 \\
\textbf{Examen 2} & 90 & 87 & 78 \\
\textbf{Examen 3} & 85 & 87 & 90 \\
\textbf{Devoir} & 90 & 92 & 87 \\
\textbf{Note finale} & 85 & 86 & 81
\end{array}$$

La dimension de cette matrice est 5 × 3.

Ces matrices nous permettent de constater, par exemple, que Jean a obtenu 75 au premier examen, que Lucie a obtenu la meilleure note au troisième examen et que Marie a obtenu une note finale de 86.

Les valeurs 75, 78, 69, 90, …, 86 et 81 sont les éléments de ces matrices.

Exemple 1.2 : Soit la matrice A suivante : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & 1 \\ 9 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

- ▷ La dimension de A est 3×4.
- ▷ L'élément a_{23} est -2.
- ▷ 6 est l'élément a_{32}.

1.2 - Matrices particulières

Définition 1.2

Une matrice $A_{m\times n}$ est une **matrice nulle**, si $a_{ij} = 0$, $\forall\ i$ et j. Cette matrice nulle est notée $O_{m\times n}$, O_{mn} ou O.

Note : Ainsi, **une matrice nulle est une matrice dont tous les éléments sont égaux à zéro**. Donc, $O_{m\times n} = [O]_{m\times n}$.

Exemple 1.3 :

▷ Écrivons explicitement les matrices $O_{3\times 2}$, $O_{2\times 4}$ et $O_{1\times 3}$.

$$O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad O_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Définition 1.3

- Une **matrice ligne** est une matrice de dimension $1 \times n$.
- Une **matrice colonne** est une matrice de dimension $m \times 1$.

Exemple 1.4 :

▷ $L_{1\times 5} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & \pi & \sqrt{5} & \sin(30°) \end{bmatrix}$ est une matrice ligne de dimension 1×5.

▷ $C_{3\times 1} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 10 \\ \sin(30°) \end{bmatrix}$ est une matrice colonne de dimension 3×1.

Définition 1.4

- Une **matrice carrée d'ordre** n, notée $A_{n\times n}$, est une matrice contenant n lignes et n colonnes.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Les éléments $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{(n-1)(n-1)}$ et a_{nn} forment la **diagonale principale** de la matrice carrée $A_{n\times n}$.
- Les éléments $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \cdots, a_{2(n-1)}$ et a_{1n} forment la **diagonale secondaire**

ou la **deuxième diagonale** de la matrice carrée $A_{n\times n}$.

Exemple 1.5 : Soit la matrice A suivante : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

- ▷ La matrice A est une matrice carrée d'ordre 4.
- ▷ Les éléments $1, 6, 11$ et 16 forment la diagonale principale.
- ▷ Les éléments $13, 10, 7$ et 4 forment la diagonale secondaire.

Définition 1.5

Soit A, une matrice.

- A est une **matrice triangulaire supérieure** si A est carrée et si $a_{ij} = 0, \forall\ i > j$, c'est-à-dire que tous les éléments situés au-dessous de la diagonale principale sont nuls.

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

- A est une **matrice triangulaire inférieure** si A est carrée et si $a_{ij} = 0, \forall\ i < j$, c'est-à-dire que tous les éléments situés au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

- A est une **matrice diagonale** si A est carrée et si $a_{ij} = 0, \forall\ i \neq j$, c'est-à-dire que tous les éléments qui ne sont pas situés sur la diagonale principale sont nuls.

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

- A est une **matrice scalaire** si A est carrée et si
  $$a_{ij} = \begin{cases} k \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$
  c'est-à-dire que tous les éléments situés sur la diagonale principale sont égaux et que tous les autres éléments sont nuls.
  $$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Note :

- Une matrice diagonale est une matrice carrée qui est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.
- Une matrice scalaire est une matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux.

Exemple 1.6 :

a) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & \text{-}3 & 0 \\ 0 & \text{-}9 & 14 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, alors A est une matrice triangulaire supérieure.

b) Si $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \text{-}9 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$, alors B est une matrice triangulaire inférieure.

c) Si $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, alors C est une matrice diagonale.

d) Si $E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, alors E est une matrice scalaire.

Définition 1.6

Une matrice carrée A d'ordre n est la **matrice identité** d'ordre n si
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Cette matrice est notée $I_{n\times n}$ ou I_n ou I.

Ainsi, une matrice identité est une matrice scalaire dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1 et tous les autres éléments sont nuls.

Exemple 1.7 : Écrivons explicitement les matrices $I_{3\times3}$ et I_4.

$$I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

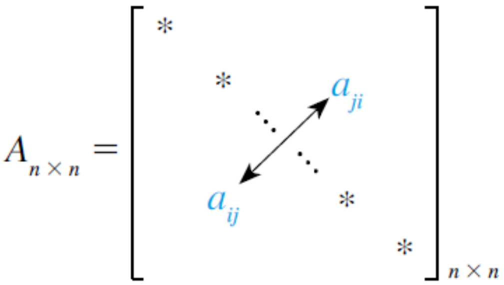
Définition 1.7

Soit A, une matrice.

- A est une **matrice symétrique** si A est carrée et si $a_{ij} = a_{ji}, \forall\ i$ et j.
- A est une **matrice antisymétrique** si A est carrée et si $a_{ij} = -a_{ji}, \forall\ i$ et j.

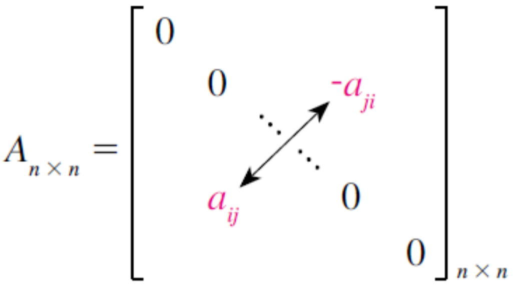
Ainsi,

dans une matrice symétrique, les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux.



$a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\ i$ et j

dans une matrice antisymétrique, les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont opposés. De plus, tous les éléments de la diagonale principale sont nuls.



$a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall\ i$ et j

Exemple 1.8 : Soit les matrices A et B suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

A est une matrice symétrique,
car A est carrée et $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall$ i et j.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 & -2 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

B est une matrice antisymétrique,
car B est carrée et $b_{ij} = -b_{ji}$, $\forall$ i et j.

Exemple 1.9 : La matrice légendée M suivante, indiquant la distance en kilomètres entre certaines villes du Québec, est une matrice symétrique.

$$\begin{array}{l} \\ \textbf{Gatineau} \\ \textbf{Matane} \\ \textbf{Rimouski} \\ \textbf{Sherbrooke} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \textbf{Gatineau} & \textbf{Matane} & \textbf{Rimouski} & \textbf{Sherbrooke} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 828 & 736 & 347 \\ 828 & 0 & 93 & 620 \\ 736 & 93 & 0 & 527 \\ 347 & 620 & 527 & 0 \end{array}\right] \end{array} = M$$

2 Opérations sur les matrices

2.1 - Égalité de deux matrices

Définition 2.1

Les matrices $A_{m\times n}$ et $B_{p\times q}$ sont égales, c'est-à-dire $A_{m\times n} = B_{p\times q}$, si et seulement si

- $m = p$ et $n = q$;
- $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall$ i et j.

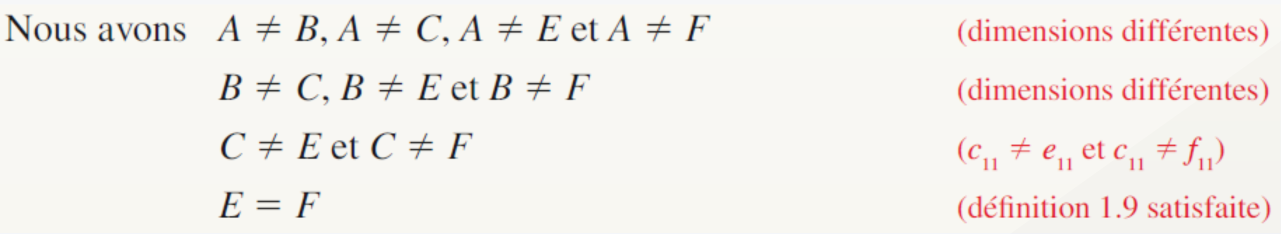
Note : Ainsi, deux matrices sont égales si

- elles ont la même dimension, c'est-à-dire qu'elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes ;
- les éléments qui sont à la même position sont égaux.

Exemple 2.1 :

▷ Soit les matrices $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ et

$$F = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & \sin(30^\circ) \\ \ln(1) & \sqrt{\sqrt{81} + 16} \end{bmatrix}$$



Nous avons $A \neq B, A \neq C, A \neq E$ et $A \neq F$ (dimensions différentes)

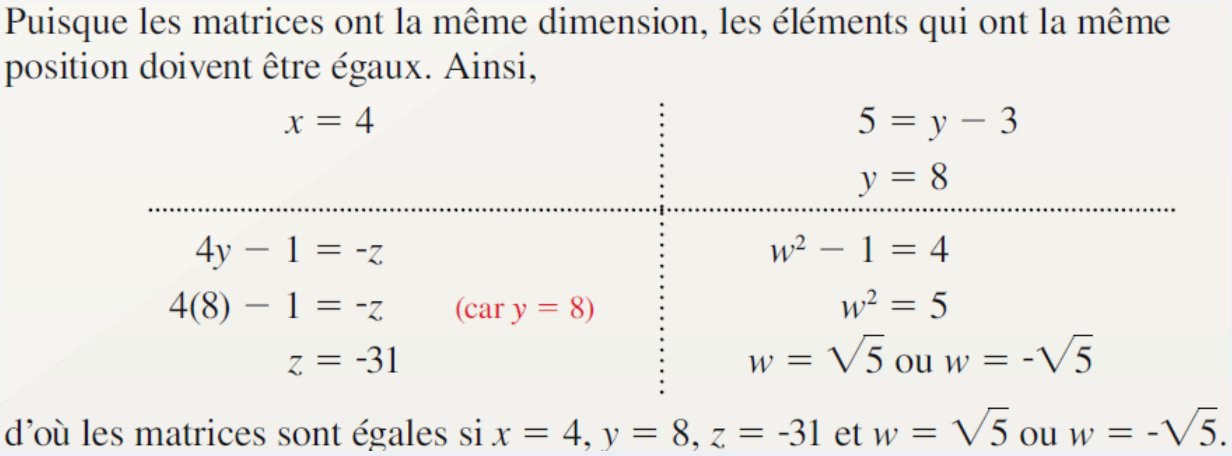
$B \neq C, B \neq E$ et $B \neq F$ (dimensions différentes)

$C \neq E$ et $C \neq F$ ($c_{11} \neq e_{11}$ et $c_{11} \neq f_{11}$)

$E = F$ (définition 1.9 satisfaite)

- ▷ Déterminons la valeur des éléments x, y, z et w tels que

$$\begin{bmatrix} x & 5 \\ 4y-1 & w^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & y-3 \\ -z & 4 \end{bmatrix}$$



Puisque les matrices ont la même dimension, les éléments qui ont la même position doivent être égaux. Ainsi,

$$x = 4$$

$$5 = y - 3$$
$$y = 8$$

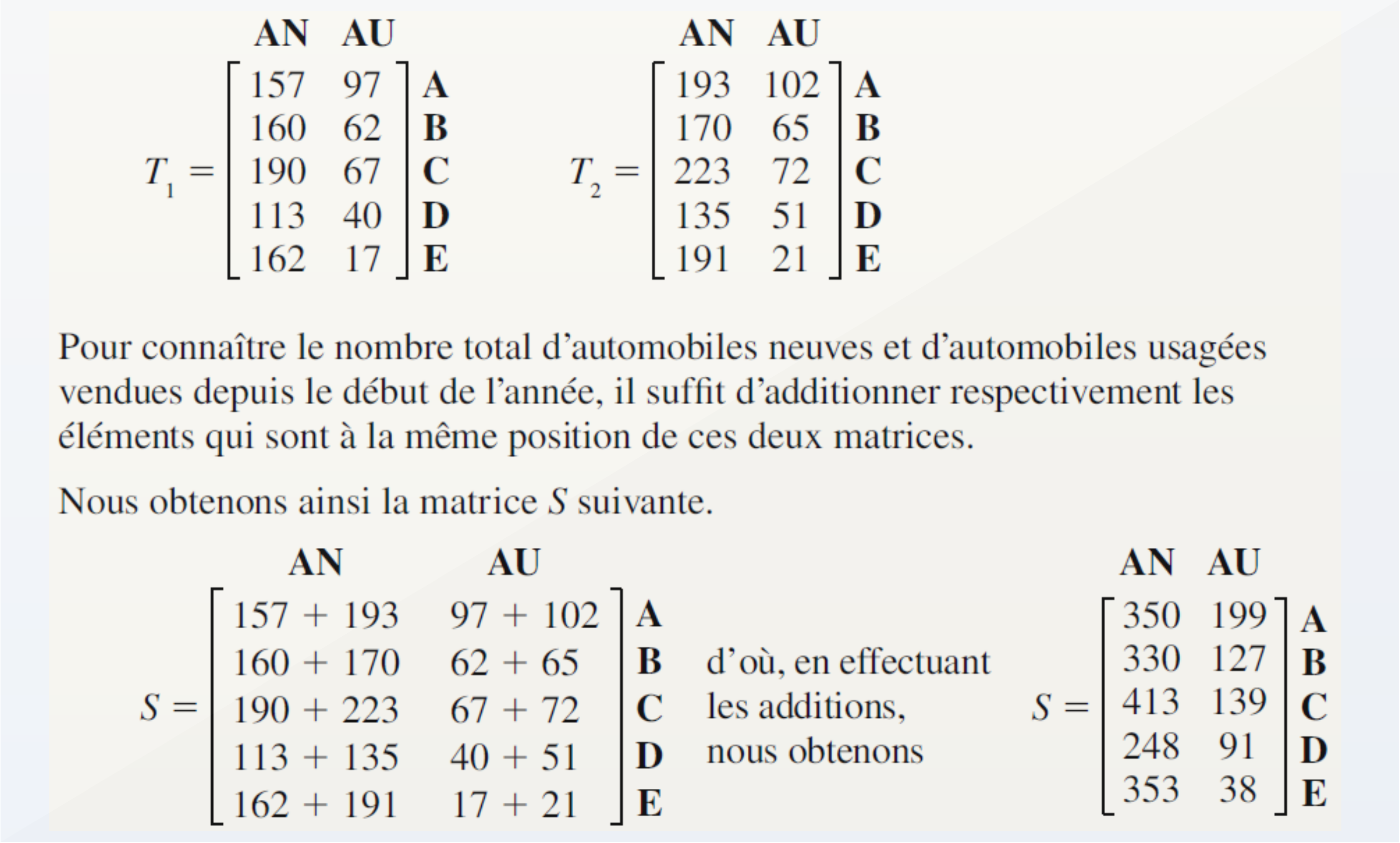
$$4y - 1 = -z$$
$$4(8) - 1 = -z \quad \text{(car } y = 8\text{)}$$
$$z = -31$$

$$w^2 - 1 = 4$$
$$w^2 = 5$$
$$w = \sqrt{5} \text{ ou } w = -\sqrt{5}$$

d'où les matrices sont égales si $x = 4$, $y = 8$, $z = -31$ et $w = \sqrt{5}$ ou $w = -\sqrt{5}$.

2.2 - Addition de matrices

Exemple 2.2 : Soit les matrices T_1 et T_2 représentant le nombre d'automobiles neuves (AN) et d'automobiles usagées (AU) vendues dans une région au cours du premier et du deuxième trimestre d'une année, par les concessionnaires A, B, C, D et E.



$$T_1 = \begin{array}{c c} \textbf{AN} & \textbf{AU} \\ \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc} 157 & 97 \\ 160 & 62 \\ 190 & 67 \\ 113 & 40 \\ 162 & 17 \end{array}\right]\begin{array}{c} \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \\ \textbf{E} \end{array} \qquad T_2 = \begin{array}{c c} \textbf{AN} & \textbf{AU} \\ \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc} 193 & 102 \\ 170 & 65 \\ 223 & 72 \\ 135 & 51 \\ 191 & 21 \end{array}\right]\begin{array}{c} \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \\ \textbf{E} \end{array}$$

Pour connaître le nombre total d'automobiles neuves et d'automobiles usagées vendues depuis le début de l'année, il suffit d'additionner respectivement les éléments qui sont à la même position de ces deux matrices.

Nous obtenons ainsi la matrice S suivante.

$$S = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cc} 157+193 & 97+102 \\ 160+170 & 62+65 \\ 190+223 & 67+72 \\ 113+135 & 40+51 \\ 162+191 & 17+21 \end{array}\right]\begin{array}{c} \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \\ \textbf{E} \end{array}$$

(colonnes **AN**, **AU**) d'où, en effectuant les additions, nous obtenons

$$S = \left[\begin{array}{cc} 350 & 199 \\ 330 & 127 \\ 413 & 139 \\ 248 & 91 \\ 353 & 38 \end{array}\right]\begin{array}{c} \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \\ \textbf{E} \end{array}$$

Définition 2.2

Soit $A_{m\times n}$ et $B_{m\times n}$ deux matrices de même dimension. La **somme** $A+B$ de ces deux matrices est la matrice $S_{m\times n} = [s_{ij}]_{m\times n}$, où

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall\ i \text{ et } j.$$

Note : Ainsi, pour obtenir la somme de deux matrices de même dimension, il suffit d'additionner respectivement les éléments qui sont à la même position de ces deux matrices.

On ne peut pas additionner deux matrices de dimensions différentes.

Soit A et B, deux matrices de dimension $m \times n$. Nous pouvons expliciter la somme de ces matrices de deux façons différentes.

Façon 1

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mj}+b_{mj} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1j} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2j} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{i1} & s_{i2} & \cdots & s_{ij} & \cdots & s_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mj} & \cdots & s_{mn} \end{bmatrix}, \text{ où } s_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ \forall\ i \text{ et } j$$

$$=S$$

Façon 2

$$A+B=[a_{ij}]_{mn}+[b_{ij}]_{mn}$$

$$=[a_{ij}+b_{ij}]_{mn}$$

$$=[s_{ij}]_{mn}, \text{ où } s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

$$=S$$

Exemple 2.3 : Soit les matrices $A=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ et $O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Calculons, si c'est possible, les sommes suivantes.

$$\text{a)}\ A+B=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 4 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 5\\ 7 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+3 & 1+5\\ 4+7 & 8+(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 11 & 6\end{bmatrix}$$

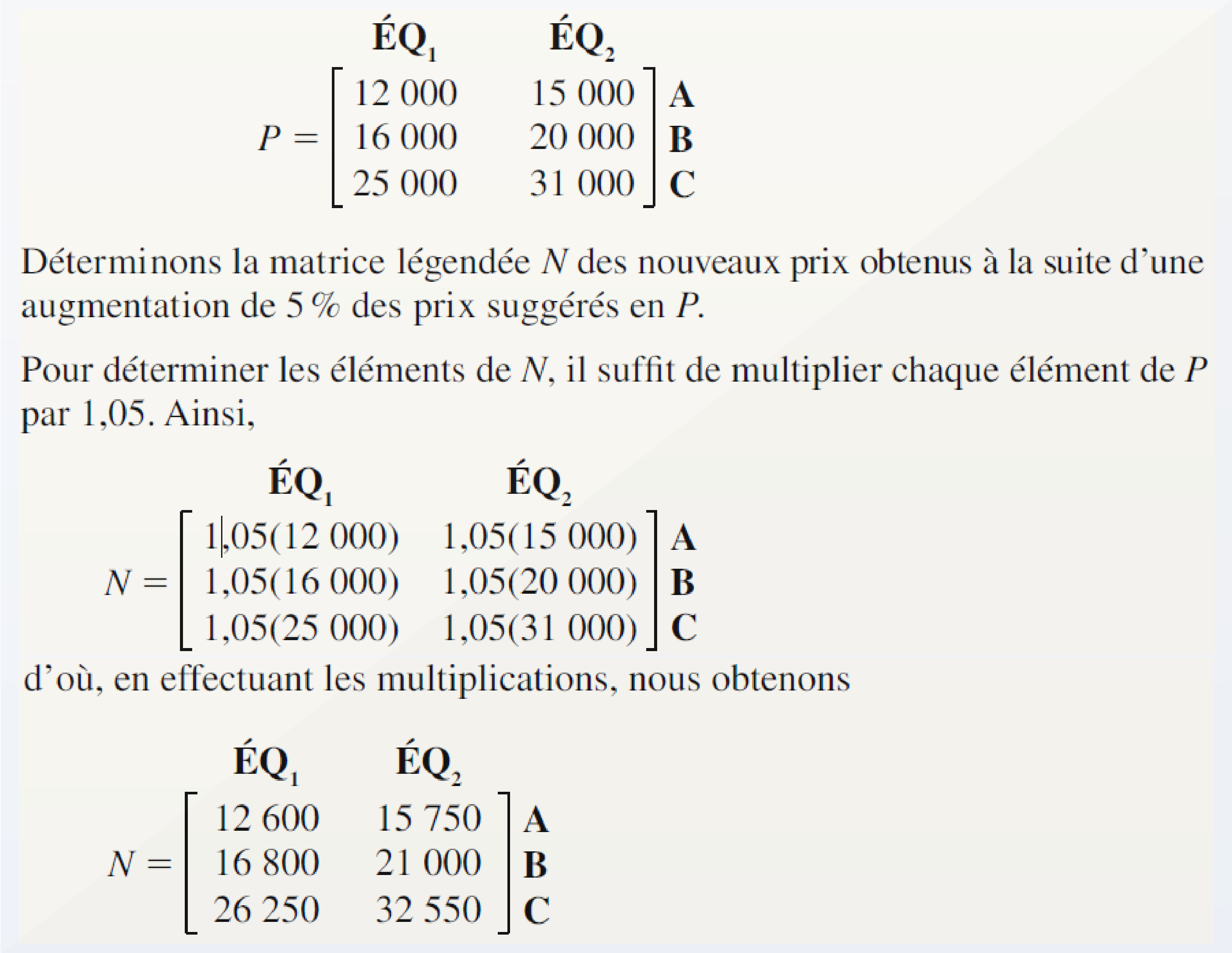
$$\text{b)}\ A+A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 4 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 4 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+(-3) & 1+1\\ 4+4 & 8+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 2\\ 8 & 16\end{bmatrix}$$

$$\text{c)}\ C+O=\begin{bmatrix}1 & -4\\ -7 & 8\\ 3 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0 & -4+0\\ -7+0 & 8+0\\ 3+0 & 5+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -4\\ -7 & 8\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

d) $A+C$ n'est pas définie, car A et C ne sont pas de même dimension.

2.3 - Multiplication d'une matrice par un scalaire

Exemple 2.4 : La matrice P ci-dessous représente le prix de trois types de voitures, A, B et C, selon leur équipement, Q_1 et Q_2.



$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc|c} \textbf{ÉQ}_1 & \textbf{ÉQ}_2 & \\ \hline 12\,000 & 15\,000 & \textbf{A} \\ 16\,000 & 20\,000 & \textbf{B} \\ 25\,000 & 31\,000 & \textbf{C} \end{array}$$

Déterminons la matrice légendée N des nouveaux prix obtenus à la suite d'une augmentation de 5 % des prix suggérés en P.

Pour déterminer les éléments de N, il suffit de multiplier chaque élément de P par 1,05. Ainsi,

$$N = \begin{array}{cc|c} \textbf{ÉQ}_1 & \textbf{ÉQ}_2 & \\ \hline 1{,}05(12\,000) & 1{,}05(15\,000) & \textbf{A} \\ 1{,}05(16\,000) & 1{,}05(20\,000) & \textbf{B} \\ 1{,}05(25\,000) & 1{,}05(31\,000) & \textbf{C} \end{array}$$

d'où, en effectuant les multiplications, nous obtenons

$$N = \begin{array}{cc|c} \textbf{ÉQ}_1 & \textbf{ÉQ}_2 & \\ \hline 12\,600 & 15\,750 & \textbf{A} \\ 16\,800 & 21\,000 & \textbf{B} \\ 26\,250 & 32\,550 & \textbf{C} \end{array}$$

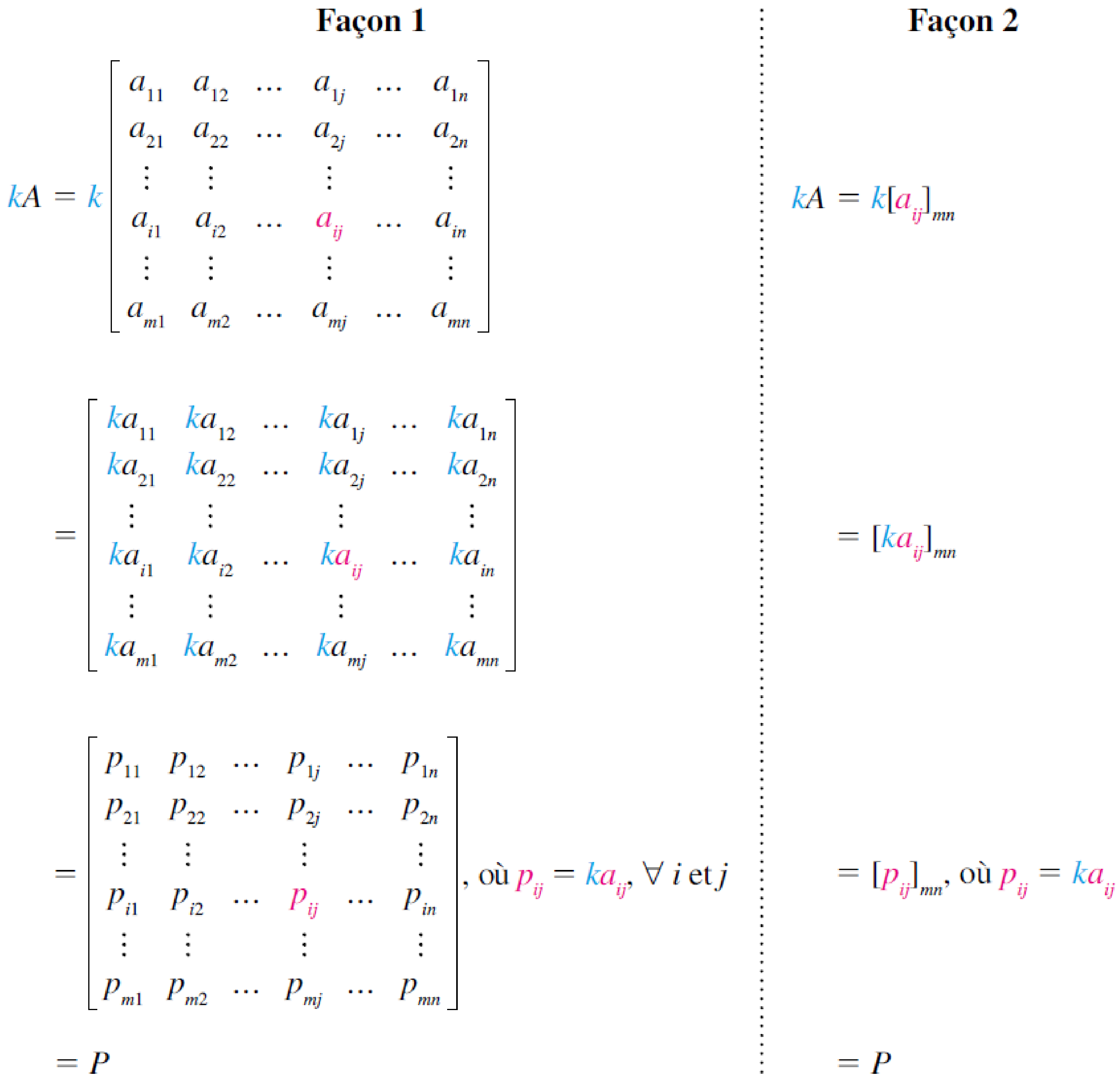
Définition 2.3

Soit $A_{m\times n}$ une matrice, et $k \in \mathbb{R}$. **Le produit kA de la matrice A par le scalaire k** est la matrice

$$P_{m\times n} = [p_{ij}]_{m\times n}, \text{ où } p_{ij} = ka_{ij}, \forall\, i \text{ et } j.$$

Note : Ainsi, pour obtenir le produit d'une matrice par un scalaire, ou multiplie chaque élément de la matrice par ce scalaire.

Soit A, une matrice $m \times n$, et $k \in \mathbb{R}$. Nous pouvons expliciter le produit de la matrice A par ce scalaire k de deux façons différentes.



Façon 1

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{ij} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mj} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mj} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix}, \text{ où } p_{ij} = ka_{ij}, \ \forall\, i \text{ et } j$$

$$= P$$

Façon 2

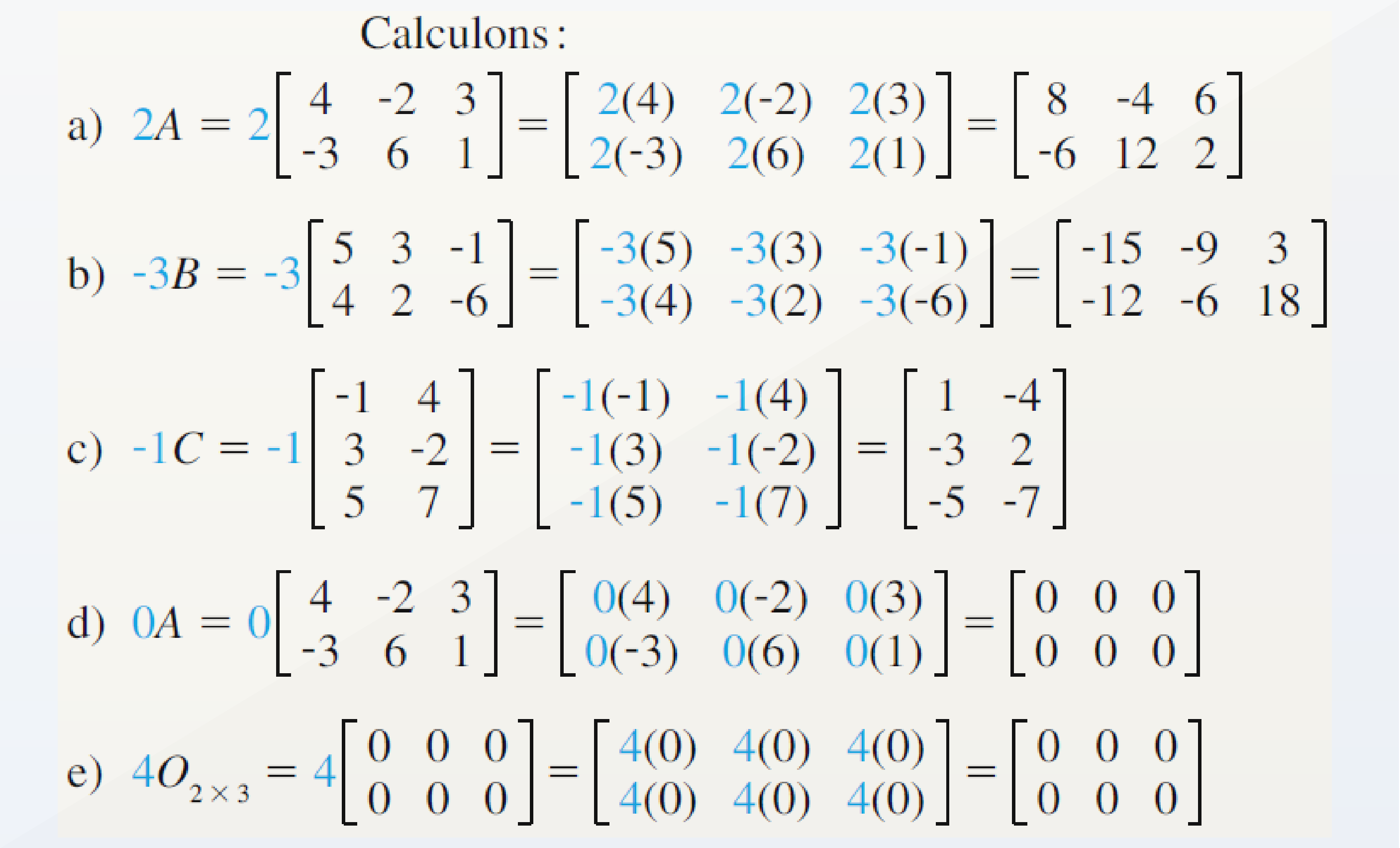
$$kA = k[a_{ij}]_{mn}$$

$$= [ka_{ij}]_{mn}$$

$$= [p_{ij}]_{mn}, \text{ où } p_{ij} = ka_{ij}$$

$$= P$$

Exemple 2.5 : Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.



Calculons :

a) $2A = 2\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(4) & 2(-2) & 2(3) \\ 2(-3) & 2(6) & 2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 6 \\ -6 & 12 & 2 \end{bmatrix}$

b) $-3B = -3\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(5) & -3(3) & -3(-1) \\ -3(4) & -3(2) & -3(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -9 & 3 \\ -12 & -6 & 18 \end{bmatrix}$

c) $-1C = -1\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1(-1) & -1(4) \\ -1(3) & -1(-2) \\ -1(5) & -1(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$

d) $0A = 0\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0(4) & 0(-2) & 0(3) \\ 0(-3) & 0(6) & 0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $4O_{2\times 3} = 4\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(0) & 4(0) & 4(0) \\ 4(0) & 4(0) & 4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Définition 2.4

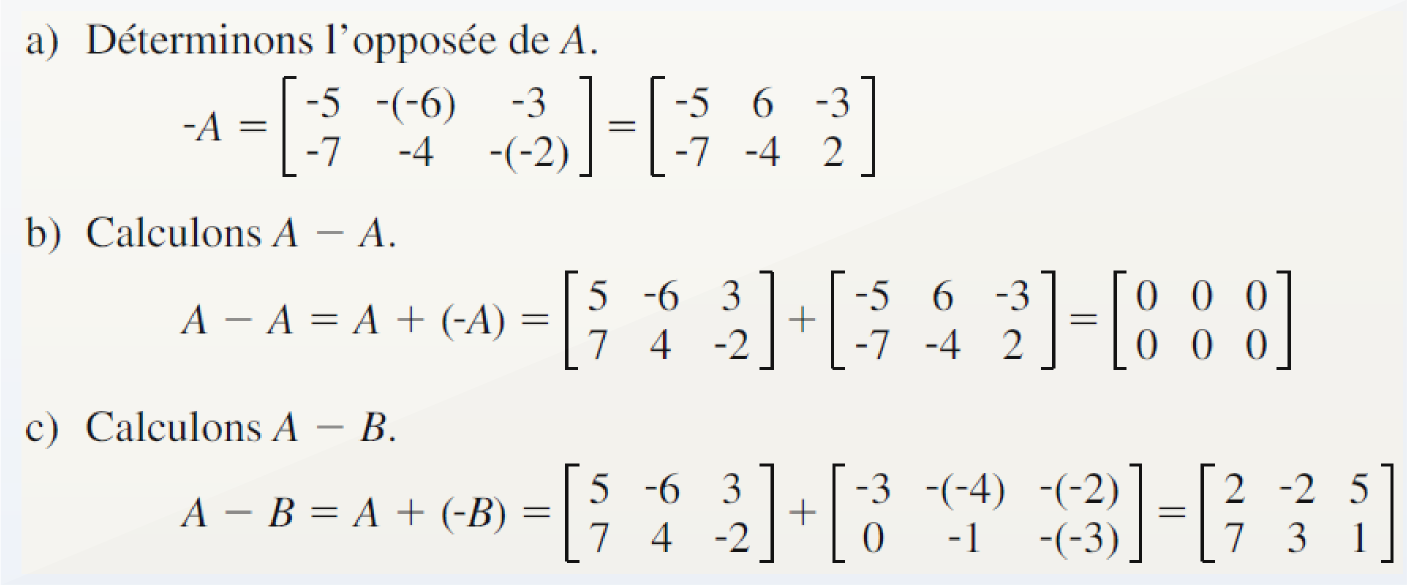
La matrice $B_{m\times n}$ est la **matrice opposée** de la matrice $A_{m\times n}$ lorsque

$$b_{ij} = -a_{ij}, \forall\ i \text{ et } j.$$

Nous notons la matrice opposée de A par $-A$, où $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.

Note : Ainsi, nous avons $-A = -1A$ pour toute matrice A. De plus, la différence $A - B$ est obtenue en effectuant $A + (-B)$.

Exemple 2.6 : Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$



a) Déterminons l'opposée de A.

$$-A = \begin{bmatrix} -5 & -(-6) & -3 \\ -7 & -4 & -(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 & -3 \\ -7 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Calculons $A - A$.

$$A - A = A + (-A) = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 7 & 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 6 & -3 \\ -7 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Calculons $A - B$.

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 7 & 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -(-4) & -(-2) \\ 0 & -1 & -(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 - Multiplication de matrices

Définition 2.5

Soit $A_{m\times p}$ et $B_{p\times n}$, deux matrices dont les éléments sont des nombres réels. Le **produit AB des matrices** A et B est la matrice $C_{m\times n} = [c_{ij}]_{m\times n}$, où

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}, \forall\ i \text{ et } j, \text{ c'est à dire}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Note : Ainsi, chaque élément c_{ij} de la matrice C est la somme du produit des éléments de la i-ième ligne de A, c'est-à-dire $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \cdots, a_{ip}$, par les éléments respectifs de la j-ième colonne de B, c'est-à-dire $b_{1j}, b_{2j}, b_{3j}, \cdots, b_{pj}$.

Ainsi, si A est une matrice de dimension $m \times p$, et B, une matrice de dimension $p \times n$, alors AB est une matrice de dimension $m \times n$ que nous pouvons expliciter de deux façons différentes.

Façon 1

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= C,$$

où, $\forall$ i et j, $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$

Façon 2

$$AB = [a_{ij}]_{m \times p} [b_{ij}]_{p \times n}$$

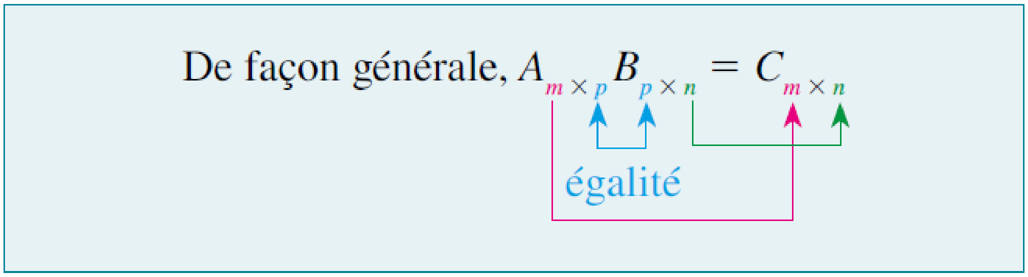
$$= [c_{ij}]_{m \times n}$$

$$= C,$$

où, $\forall$ i et j, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

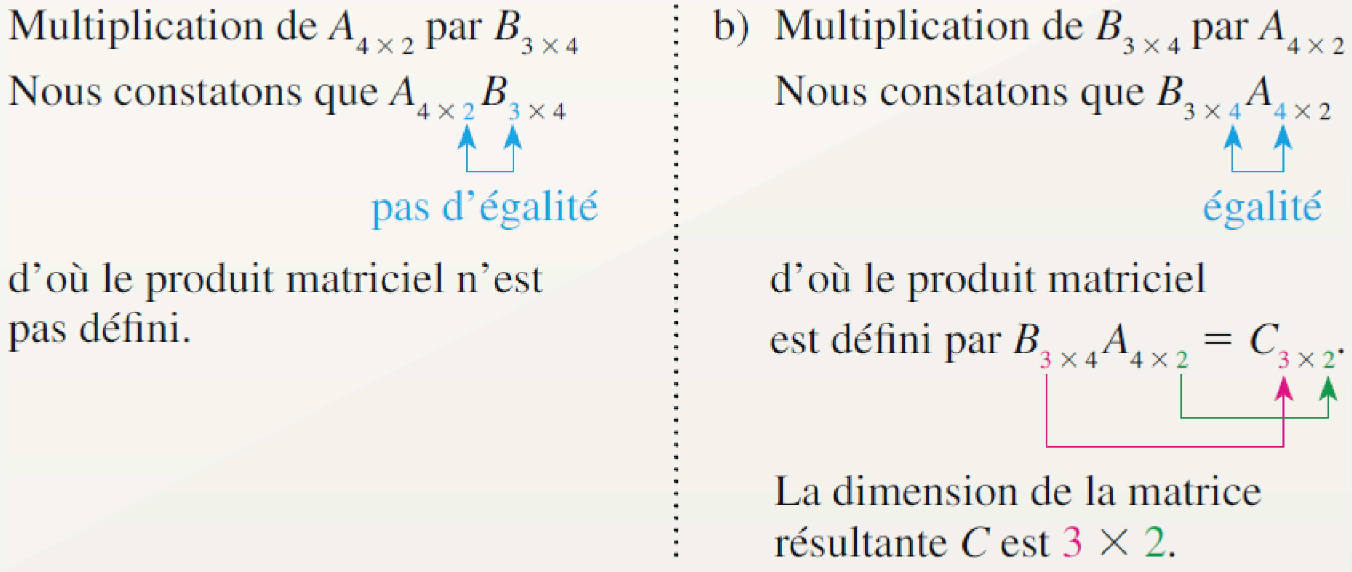
Note :

- Le produit matriciel AB de deux matrices est défini seulement lorsque le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B. Nous pouvons alors écrire $AB = C$.
- Le nombre de lignes de C égale le nombre de lignes de A.
- Le nombre de colonnes de C égale le nombre de colonnes de B.



De façon générale, $A_{m \times p} B_{p \times n} = C_{m \times n}$

Exemple 2.7 : Soit les matrices $A_{4\times 2}$ et $B_{3\times 4}$. Déterminons si les multiplications suivantes sont possibles et, s'il y a lieu, la dimension de la matrice résultante.



Multiplication de $A_{4\times 2}$ par $B_{3\times 4}$

Nous constatons que $A_{4\times 2}B_{3\times 4}$

pas d'égalité

d'où le produit matriciel n'est pas défini.

b) Multiplication de $B_{3\times 4}$ par $A_{4\times 2}$

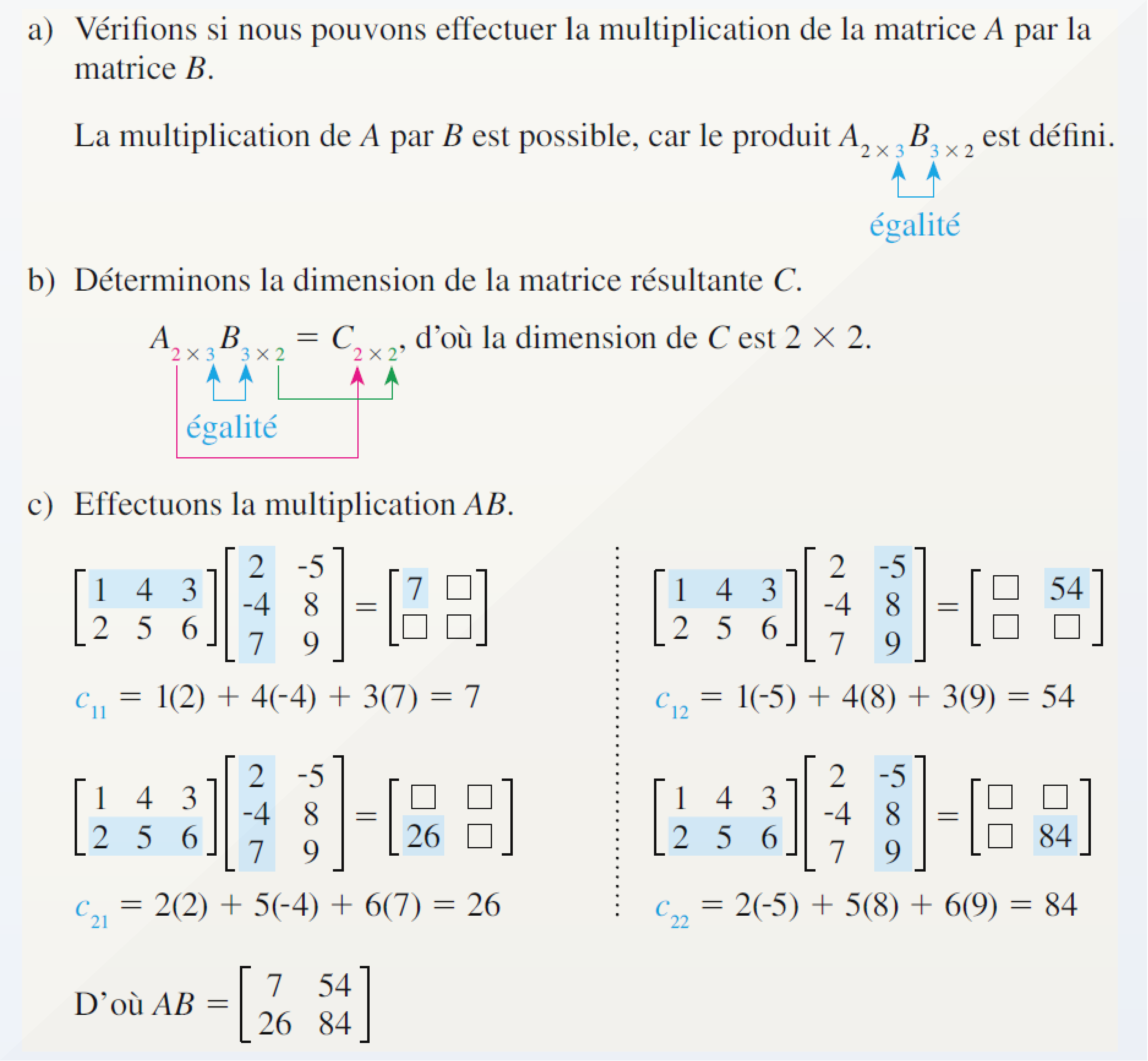
Nous constatons que $B_{3\times 4}A_{4\times 2}$

égalité

d'où le produit matriciel est défini par $B_{3\times 4}A_{4\times 2} = C_{3\times 2}$.

La dimension de la matrice résultante C est 3×2.

Exemple 2.8 : Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$.



a) Vérifions si nous pouvons effectuer la multiplication de la matrice A par la matrice B.

La multiplication de A par B est possible, car le produit $A_{2\times 3}B_{3\times 2}$ est défini.

égalité

b) Déterminons la dimension de la matrice résultante C.

$A_{2\times 3}B_{3\times 2} = C_{2\times 2}$, d'où la dimension de C est 2×2.

égalité

c) Effectuons la multiplication AB.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$c_{11} = 1(2) + 4(-4) + 3(7) = 7$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & 54 \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$c_{12} = 1(-5) + 4(8) + 3(9) = 54$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ 26 & \square \end{bmatrix}$$

$c_{21} = 2(2) + 5(-4) + 6(7) = 26$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & 84 \end{bmatrix}$$

$c_{22} = 2(-5) + 5(8) + 6(9) = 84$

D'où $AB = \begin{bmatrix} 7 & 54 \\ 26 & 84 \end{bmatrix}$

Attention !

De façon générale, la multiplication de matrices n'est pas commutative, c'est-à-dire que $AB \neq BA$.

Exemple 2.9 : Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$. Calculons AB et BA.

a) $$A_{1\times 3}B_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1)+5(0)+(-1)(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$$

égalité

d'où $AB = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$

b) $$B_{3\times 1}A_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3) & 1(5) & 1(-1) \\ 0(3) & 0(5) & 0(-1) \\ -6(3) & -6(5) & -6(-1) \end{bmatrix}$$

égalité

d'où $BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18 & -30 & 6 \end{bmatrix}$

Théorème 2.1 *Si A est une matrice de dimension $m \times n$, alors*

$$I_{m\times m}A_{m\times n} = A_{m\times n} \ \textit{et}\ A_{m\times n}I_{n\times n} = A_{m\times n}$$

Exemple 2.10 : Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Calculons IA et AI, en choisissant la matrice identité I de façon adéquate.

$$I_{2\times 2}A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

égalité

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

d'où $IA = A$

$$A_{2\times 3}I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

égalité

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

d'où $AI = A$

Note : De plus, si A est une matrice carrée d'ordre n, alors $IA = AI = A$, où I est d'ordre n.

Exemple 2.11 : Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Calculons AB et AC.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 20 & 16 \end{bmatrix}$$
$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 20 & 16 \end{bmatrix}$$

Note : L'exemple précédent nous permet de constater que $AB = AC$, même si $B \neq C$; par conséquent, **lorsque $AB = AC$, on ne peut pas conclure que $B = C$.**

Exemple 2.12 : Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -2 & -12 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$. Calculons AB.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -12 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{2\times 2}$$

Note : L'exemple précédent nous permet de constater que $AB = O$, même si $A \neq O$ et $B \neq O$; par conséquent, **lorsque $AB = O$, on ne peut pas conclure que $A = O$ ou que $B = O$.**

• 2.5 - Propriétés de l'addition et la multiplication de matrices

Les propriétés relatives à l'addition de matrices et à la multiplication d'une matrice par un scalaire qui sont énoncées ici s'appliquent à des matrices dont les éléments sont des nombres réels.

Propriétés de l'addition de matrices et de la multiplication d'une matrice par un scalaire

Si $\mathscr{M}_{m\times n}$ est l'ensemble des matrices de dimension $m \times n$ dont les éléments sont des nombres réels, alors $\forall\ A, B$ et $C \in \mathscr{M}_{m\times n}$ et $\forall\ r$ et $s \in \mathbb{R}$, nous avons les propriétés suivantes :

- **Propriété 1.**

  $(A + B) \in \mathscr{M}_{m\times n}$ (fermeture pour l'addition de matrices)

- **Propriété 2.**

$A + B = B + A$ (commutativité de l'addition de matrices)

- **Propriété 3.**

$A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité de l'addition de matrices)

- **Propriété 4.**

$A + O = A$ (il existe un **élément neutre** pour l'addition de matrices, noté O, où $O \in \mathscr{M}_{m\times n}$)

- **Propriété 5.**

$A + (-A) = O$ (il existe un **élément opposé** pour l'addition de matrices, noté $-A$, où $-A \in \mathscr{M}_{m\times n}$)

- **Propriété 6.**

$rA \in \mathscr{M}_{m\times n}$ (fermeture pour la multiplication d'une matrice par un scalaire)

- **Propriété 7.**

$(r + s)A = rA + sA$ (pseudo-distributivité de la multiplication d'une matrice sur l'addition de scalaires)

- **Propriété 8.**

$r(A + B) = rA + rB$ (pseudo-distributivité de la multiplication par un scalaire sur l'addition de matrices)

- **Propriété 9.**

$r(sA) = (rs)A$ (pseudo-associativité de la multiplication d'une matrice par un scalaire)

- **Propriété 10.**

$1A = A$ (1 est le pseudo-élément neutre pour la multiplication d'une matrice par un scalaire)

Énonçons maintenant des propriétés relatives à la multiplication de matrices dont les éléments sont des nombres réels.

Propriétés de la multiplication de matrices

Si A, B et C sont trois matrices de dimensions compatibles et dont les éléments sont des nombres réels, nous avons alors les propriétés suivantes :

- **Propriété 1.**

  $(AB)C = A(BC)$ (associativité de la multiplication de matrices)

- **Propriété 2.**

  $A(B + C) = AB + AC$ (distributivité à gauche de la multiplication de matrices sur l'addition de matrices)

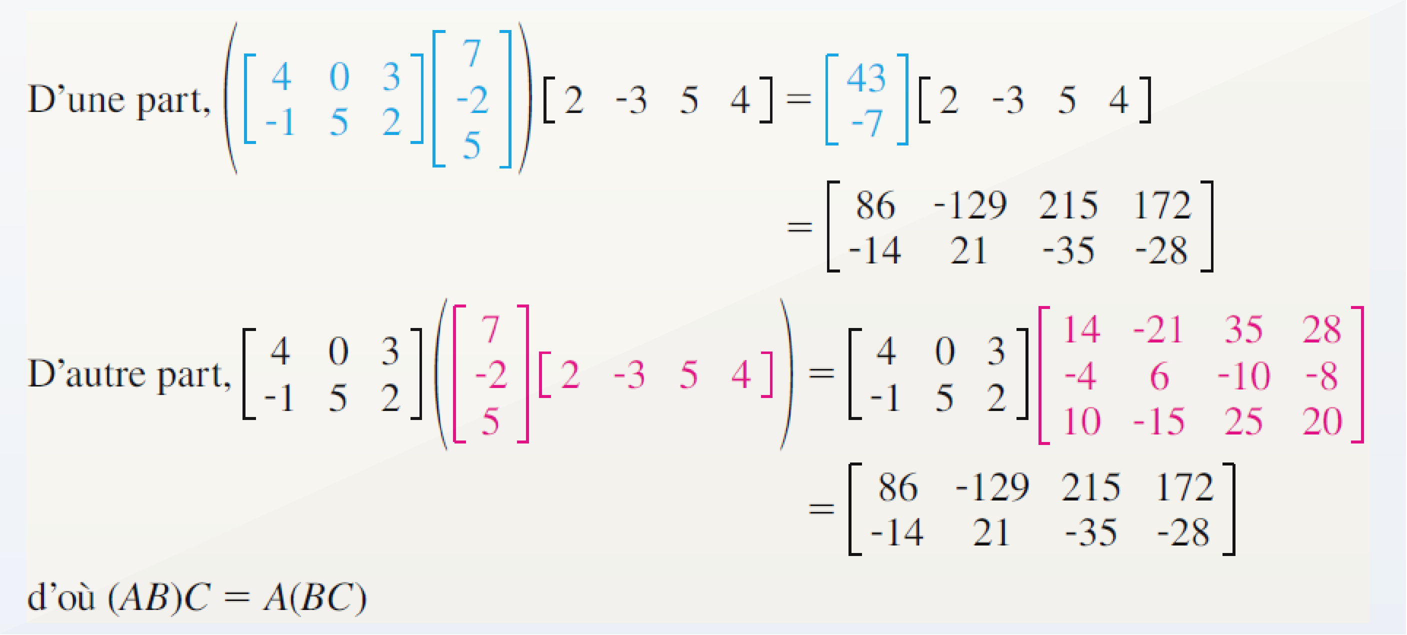
- **Propriété 3.**

  $(A + B)C = AC + BC$ (distributivité à droite de la multiplication de matrices sur l'addition de matrices)

- **Propriété 4.**

  $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, où $k \in \mathbb{R}$ (pseudo-associativité de la multiplication d'un scalaire par une matrice)

Exemple 2.13 : Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$. Vérifions que $(AB)C = A(BC)$.



D'une part,

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 86 & -129 & 215 & 172 \\ -14 & 21 & -35 & -28 \end{bmatrix}$$

D'autre part,

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 & -21 & 35 & 28 \\ -4 & 6 & -10 & -8 \\ 10 & -15 & 25 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 86 & -129 & 215 & 172 \\ -14 & 21 & -35 & -28 \end{bmatrix}$$

d'où $(AB)C = A(BC)$

Définition 2.6

Pour une matrice carrée A, $A^k = \underbrace{AAA\cdots A}_{k \text{ fois}}$, où $k \in 1, 2, 3, \cdots$.

Note : De la définition précédente, nous avons les propriétés suivantes. Si A est une matrice carrée d'ordre n, et si r et $s \in \mathbb{N}$, alors

- $A^r A^s = A^{r+s}$
- $A^0 = I_n$, si $A \neq O_{n\times n}$
- $(A^r)^s = A^{rs}$

Exemple 2.14 : Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Calculons A^3.

$$\begin{aligned}
A^3 &= (AA)A \\
&= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -16 & 25 \\ -75 & 34 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

b) Calculons A^4.

$$\begin{aligned}
A^4 &= A^{3+1} \\
&= A^3A \\
&= \begin{bmatrix} -16 & 25 \\ -75 & 34 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -107 & 84 \\ -252 & 61 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Définition 2.7

Soit $A_{n\times n}$, une matrice carrée. La matrice A est **inversible** s'il existe une matrice $B_{n\times n}$ telle que

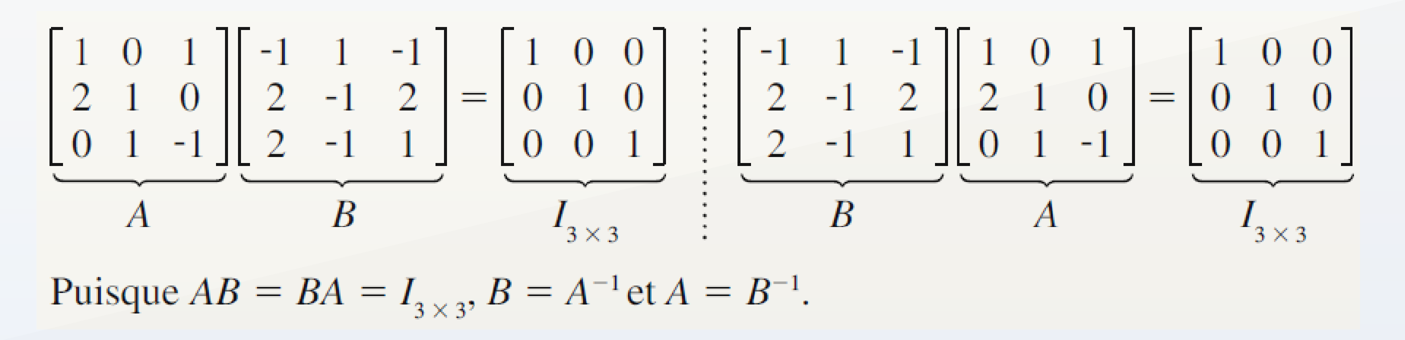
$$A_{n\times n}B_{n\times n} = B_{n\times n}A_{n\times n} = I_{n\times n}$$

Dans ce cas, la matrice B est appelée **inverse** de A et la matrice A est appelée **inverse** de B. On les note respectivement

$$B = A^{-1} \text{ et } A = B^{-1}$$

Théorème 2.2 *Si A est une matrice carrée inversible, alors l'inverse de A est unique.*

Exemple 2.15 : Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculons AB et BA.



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_{3\times 3}} \quad \vdots \quad \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_{3\times 3}}$$

Puisque $AB = BA = I_{3\times 3}$, $B = A^{-1}$ et $A = B^{-1}$.

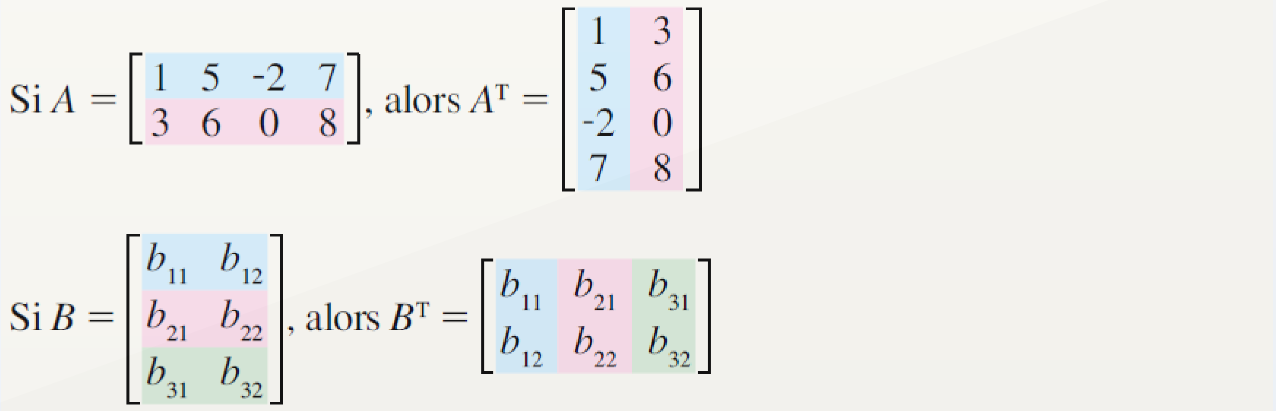
Définition 2.8

Soit une matrice $A_{m\times n}$. La **matrice transposée** de A, notée A^T, est la matrice de dimension $n \times m$ telle que

$$A^T_{n\times m} = [a_{ji}]_{n\times m}$$

Note : Ainsi, la première ligne de A devient la première colonne de A^T, la deuxième ligne de A devient la deuxième colonne de A^T, etc.

Exemple 2.16 : Déterminons la transposée des matrices A et B suivantes.



$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \text{ alors } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \\ -2 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}, \text{ alors } B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{bmatrix}$$

Puisque dans une matrice symétrique, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\ i$ et j, et que dans une matrice antisymétrique, $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall\ i$ et j, nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 2.3

- *Une matrice carrée A est symétrique si et seulement si $A^T = A$.*
- *Une matrice carrée A est antisymétrique si et seulement si $A^T = -A$.*

Énonçons maintenant des propriétés relatives à la transposée d'une matrice.

Propriétés de la transposée d'une matrice

Si A et B sont deux matrices de dimensions compatibles, et si $k \in \mathbb{R}$, nous avons alors les propriétés suivantes.

- **Propriété 1.**

$$\boxed{\left(A^T\right)^T = A}$$

- **Propriété 2.**

$$\boxed{\left(A^T + B^T\right) = A^T + B^T}$$

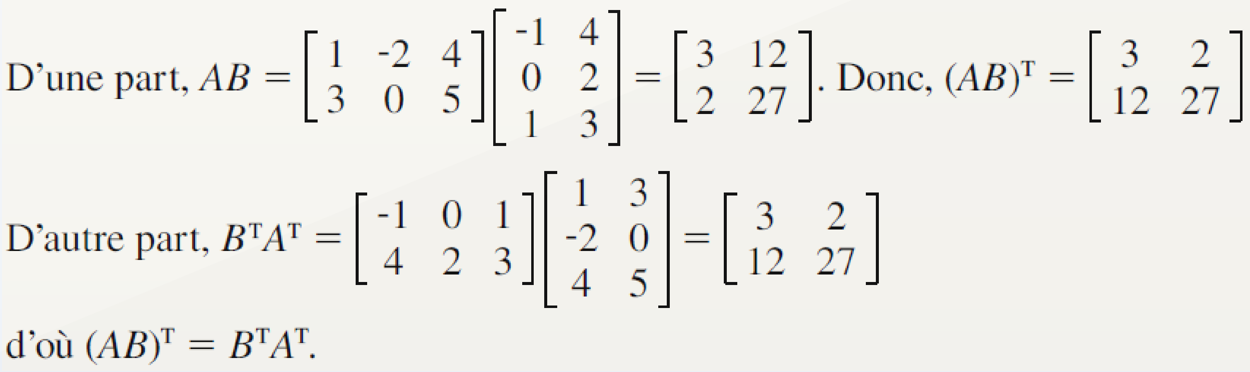
- **Propriété 3.**

$$\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$$

- **Propriété 4.**

$$\boxed{(kA)^T = kA^T}$$

Exemple 2.17 : Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Vérifions la propriété 3.



D'une part, $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 27 \end{bmatrix}$. Donc, $(AB)^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 12 & 27 \end{bmatrix}$

D'autre part, $B^T A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 12 & 27 \end{bmatrix}$

d'où $(AB)^T = B^T A^T$.

3 Résolution de systèmes d'équations linéaires

• 3.1 - Résolution par des méthodes élémentaires

- ### 3.1.1 - Systèmes d'équations linéaires

Définition 3.1

- Une **équation linéaire** à n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une équation de premier degré qui peut être exprimée sous la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

  où $a_1, a_2, \cdots, a_n$, les coefficients des variables, et b sont des constantes réelles.

- **Un système de** m **équations linéaires à** n **variables** $x_1, x_2, \cdots, x_n$, noté S, est constitué de m équations linéaires de la forme

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

  où a_{ij}, les coefficients des variables, et b_i sont des constantes réelles, $i \in \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ et $j \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Note :

- Nous pouvons exprimer le système (S) précédent sous la forme de l'équation matricielle $AX = B$ suivante, en s'assurant que la position de chaque variable est la même dans toutes les équations du système.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice des Coefficients}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matrice} \\ \text{des} \\ \text{Variables}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matrice} \\ \text{des} \\ \text{Constantes}}}$$

- En tenant compte seulement des coefficients et des constantes dans le système précédent, nous pouvons écrire la matrice suivante

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

  appelée **matrice augmentée** du système (S).

Exemple 3.1 :

- ▷ Exemples d'une équation linéaire :
  - ⋆ à une variable : $3x = 5$.
  - ⋆ à deux variables : $-\frac{1}{2}x_1 + 7x_2 = 5$.
- ▷ Soit le système de 2 équations linéaires à 2 variables, noté (S), suivant :

$$(S)\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 = 2 \\ 2x_1 - 8x_2 = -1 \end{cases}$$

Nous pouvons écrire le système (S) sous la forme matricielle $AX = B$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B}$$

- ▷ Soit le système de 2 équations linéaires à 3 variables suivant :

$$\begin{cases} x - y - z = 4 \\ 4x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

La forme matricielle $AX = B$ de ce système s'écrit comme suit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B}$$

- ▷ Soit le système de 3 équations linéaires à 3 variables, noté (S), suivant :

$$(S)\begin{cases} x + 3y - 2z & = & 5 \\ x + 5y - 8z & = & 9 \\ 2x + 4y + 5z & = & 12 \end{cases}$$

La forme matricielle $AX = B$ de ce système s'écrit alors

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -8 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}}_{B}$$

▷ Le système (S) suivant est un système d'équations linéaires de quatre équations à trois variables : x, y et z.

$$(S)\begin{cases} 3x-4y+2z &= 10 \\ 2x+2y-z &= 2 \\ 5x-3y+4z &= 23 \\ x+5y-8z &= -25 \end{cases}$$

Sous la forme matricielle $AX = B$, ce système s'écrit alors

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -8 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 23 \\ -25 \end{bmatrix}}_{B}$$

Définition 3.2

- Une **solution** d'un système d'équations linéaires de la forme

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

  est une suite de nombres $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n$ telle que, si nous remplaçons x_1 par s_1, x_2 par s_2, x_3 par s_3, $\cdots$, x_n par s_n dans chacune des équations du système (S), nous obtenons une égalité vraie entre les deux membres.
- L'**ensemble-solution** d'un système d'équations, noté E.-S., est l'ensemble de toutes les solutions du système.

Exemple 3.2 :

▷ Vérifions que $(2, 1, 4)$ est une solution du système d'équations linéaires (S) suivant.

$$(S)\begin{cases} 3x-4y+2z = 10 \\ 2x+2y-z = 2 \\ 5x-3y+4z = 23 \\ x+5y-8z = -25 \end{cases}$$

Pour vérifier si $(2, 1, 4)$ est une solution de (S), il suffit de remplacer x par 2, y

par 1 et z par 4 dans chaque équation et de vérifier si nous obtenons une égalité vraie entre les deux membres.

$$\begin{array}{rrcl} \text{Ainsi, dans l'équation (1) :} & 3(2)-4(1)+2(4) & = & 10 \\ \text{dans l'équation (2) :} & 2(2)+2(1)-(4) & = & 2 \\ \text{dans l'équation (3) :} & 5(2)-3(1)+4(4) & = & 23 \\ \text{dans l'équation (4) :} & (2)+5(1)-8(4) & = & -25 \end{array}$$

d'où $(2, 1, 4)$ est une solution de (S).

Note : Il peut arriver qu'un système d'équations linéaires ait plus d'une solution ou qu'il n'en ait aucune.

Exemple 3.3 : Soit les systèmes d'équations linéaires S_1 et S_2 suivants.

$$(S_1)\begin{cases} x-y-z=4 \\ 4x+y-2z=-1 \end{cases}$$

$$(S_2)\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y+z=-2 \end{cases}$$

▷ Nous pouvons vérifier que (3, -5, 4) et (0, -3, -1) sont des solutions du système S_1. Ce système a donc plus d'une solution.

De fait, ce système a une infinité de solutions.

▷ Le système S_2 n'a aucune solution, car $(x+y+z)$ ne peut pas être égal à 4 et à -2 simultanément.

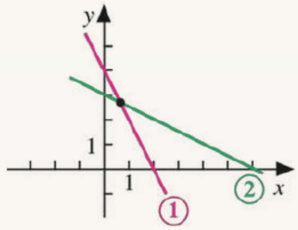
Définition 3.3

Un système d'équations linéaires est dit

- **compatible** (**cohérent** ou **non contradictoire**) lorsqu'il a au moins une solution ;
- **incompatible** (**incohérent** ou **contradictoire**) lorsqu'il n'a aucune solution. Nous écrivons alors E.-S.= $\emptyset$.

Exemple 3.4 : Représentons graphiquement les droites définies dans chacun des systèmes S_1, S_2 et S_3 suivants et, à l'aide de chaque représentation graphique, déterminons si les systèmes sont compatibles ou incompatibles.

$$S_1 \begin{cases} 2x + y = 4 & ① \\ x + 2y = 6 & ② \end{cases}$$

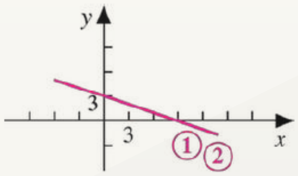


Puisque les droites ne sont pas parallèles, elles ont un seul point d'intersection.

Le système a donc une solution unique.

D'où le système est compatible.

$$S_2 \begin{cases} x + 3y = 9 & ① \\ 2x + 6y = 18 & ② \end{cases}$$

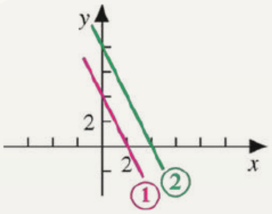


Puisque les droites sont parallèles confondues, elles ont une infinité de points d'intersection.

Le système a donc une infinité de solutions.

D'où le système est compatible.

$$S_3 \begin{cases} 2x + y = 4 & ① \\ 2x + y = 8 & ② \end{cases}$$



Puisque les droites sont parallèles distinctes, elles n'ont pas de point d'intersection.

Le système n'a donc aucune solution.

D'où le système est incompatible.

De façon générale, tout système d'équations linéaires de m équations à n inconnues peut

- avoir une solution unique ; (système compatible)
- avoir une infinité de solutions ; (système compatible)
- n'avoir aucune solution. (système incompatible)

Exercice 3.1 :

1. Écrire le système d'équations linéaires suivant sous forme matricielle

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ 3x_1 + 4x_2 & = & 6 \end{cases}$$

2. Écrire le système d'équations linéaires suivant sous forme matricielle

$$\begin{cases} 2x + 7y + z & = & -4 \\ -x + 3z & = & -5 \\ 5x + 4y + 8z & = & 9 \end{cases}$$

Nous allons maintenant résoudre des systèmes d'équations linéaires à l'aide de deux méthodes élémentaires.

• 3.1.2 - Méthode de substitution

Méthode : Cette méthode consiste à isoler une des variables dans une des équations et à substituer cette valeur dans les autres équations.

Exemple 3.5 : Résolvons le système (S) suivant par la méthode de substitution.

$$(S)\begin{cases} 3x+4y+z=7 \\ -2x+y-z=6 \\ x-y+2z=-3 \end{cases}$$

▷ **Étape 1 : Isoler une des variables dans une des équations**

Choisissons une variable facile à isoler, par exemple la variable z dans l'équation (1). De l'équation, nous obtenons $z=7-3x-4y$.

▷ **Étape 2 : Substituer cette valeur dans les autres équations**

- ⋆ De l'équation (2) , nous obtenons

$$\begin{aligned} -2x+y-(7-3x-4y)&=6 \\ x+5y&=13 \qquad (2.1) \end{aligned}$$

- ⋆ De l'équation (3) , nous obtenons

$$\begin{aligned} x-y+2(7-3x-4y)&=-3 \\ -5x-9y&=-17 \qquad (2.2) \end{aligned}$$

- ⋆ Nous obtenons ainsi un nouveau système d'équations (S_1), donné par les équations (2.1) et (2.2) et contenant seulement deux variables.

$$(S_1)\begin{cases} x+5y=13 \\ -5x-9y=-17 \end{cases}$$

▷ **Étape 3 : Reprendre, au besoin, les étapes 1 et 2 avec les nouvelles équations du système (S_1)**

Ainsi, en isolant x dans la première équation de (S_1), nous obtenons $x=13-5y$. En substituant cette valeur dans la deuxième équation de (S_1), nous obtenons

$$\begin{aligned} -5(13-5y)-9y&=-17 \\ 16y&=48 \\ y&=3 \end{aligned}$$

▷ **Étape 4 : Trouver la valeur des autres variables**

- ⋆ Trouvons la valeur de x en remplaçant y par 3 dans l'équation $x = 13 - 5y$ obtenue à l'étape 3.
  Nous obtenons alors $x = 13 - 5(3) = -2$.
- ⋆ Trouvons la valeur de z en remplaçant y par 3 et x par -2 dans l'équation $z = 7 - 3x - 4y$ obtenue à l'étape 1.
  Nous obtenons alors $z = 7 - 3(-2) - 4(3) = 1$, d'où E.-S. $= \{(-2, 3, 1)\}$.

▷ Il suffit de remplacer x par -2, y par 3 et z par 1 dans les équations de (S) pour vérifier l'égalité entre les deux membres de chaque équation du système.

3.1.3 - Systèmes équivalents d'équations linéaires

Définition 3.4

Deux systèmes d'équations linéaires S_1 et S_2 à n variables sont des **systèmes équivalents** si les deux systèmes ont le même ensemble-solution. Cette équivalence est notée $S_1 \sim S_2$.

Les quatre opérations élémentaires suivantes permettent de transformer un système d'équations linéaires en un système équivalent, c'est-à-dire en un système ayant le même ensemble-solution.

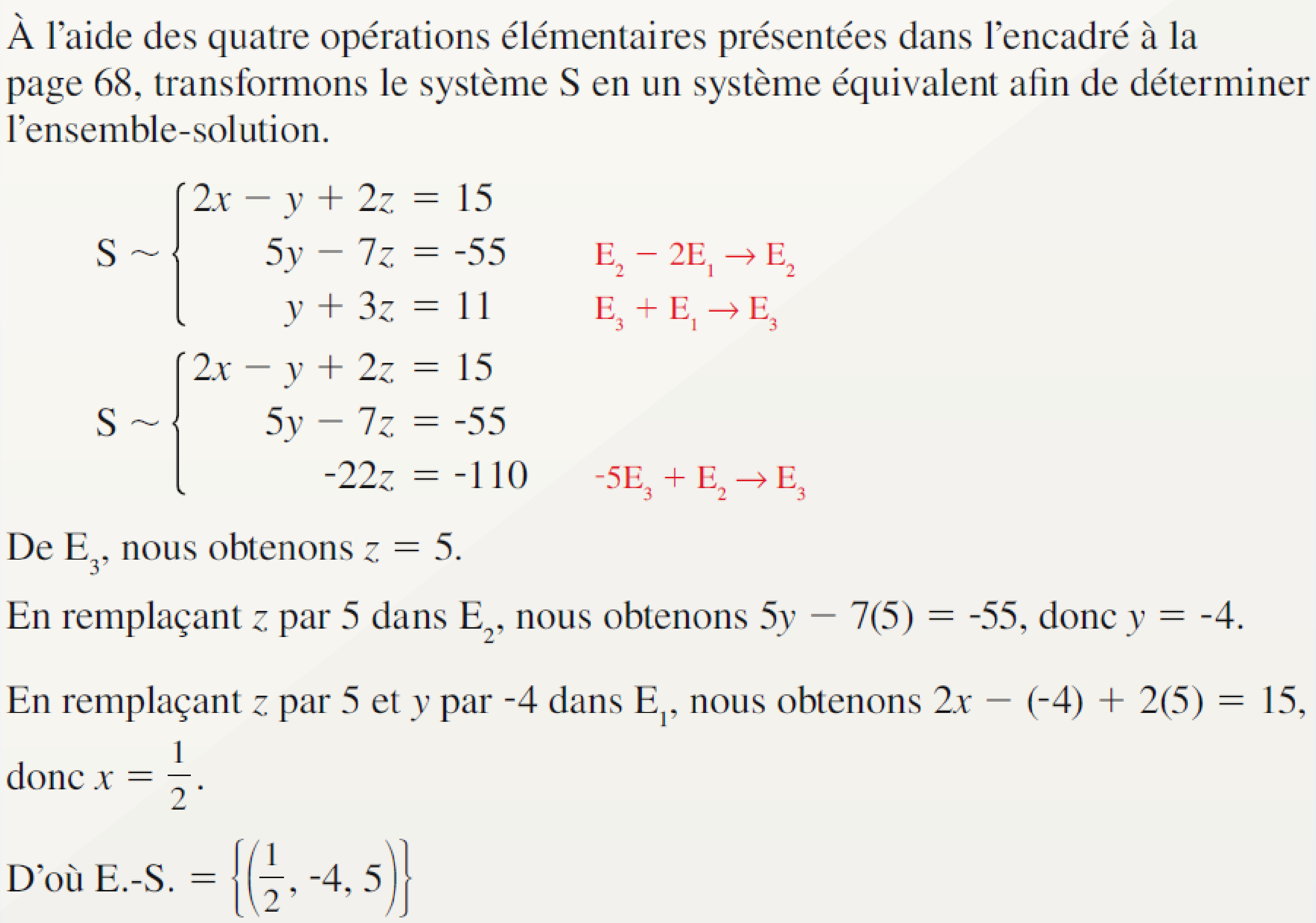
1. **Permuter** des équations $(E_i \leftrightarrow E_j)$, c'est-à-dire $(E_i \rightarrow E_j)$ et $(E_j \rightarrow E_i)$.
2. **Multiplier** les deux membres d'une équation par k, où $k \in \mathbb{R}$ et $k \neq 0$ $(kE_i \rightarrow E_i)$.
3. **Additionner**, membre à membre, à une équation une autre équation dont les deux membres ont été multipliés par k, où $k \in \mathbb{R}$ $(E_i + kE_j \rightarrow E_i)$.
4. **Additionner**, membre à membre, à une équation dont les deux membres ont été multipliés par k_1, où $k_1 \in \mathbb{R}$ et $k_1 \neq 0$, une autre équation dont les deux membres ont été multipliés par k_2, où $k_2 \in \mathbb{R}$ $(k_1E_i + k_2E_j \rightarrow E_i)$.

Note : Effectuer l'opération $4)$ est équivalent à effectuer les opérations $2)$ et $3)$ précédentes simultanément sur les équations E_i et E_j.

Exemple 3.6 : Soit le système

$$(S)\begin{cases} 2x - y + 2z = 15 \\ 4x + 3y - 3z = -25 \\ -2x + 2y + z = -4 \end{cases}$$

À l'aide des quatre opérations élémentaires présentées dans l'encadré précédent, transformons le système (S) en un système équivalent afin de déterminer l'ensemble-solution.



À l'aide des quatre opérations élémentaires présentées dans l'encadré à la page 68, transformons le système S en un système équivalent afin de déterminer l'ensemble-solution.

$$\mathrm{S} \sim \begin{cases} 2x - y + 2z = 15 & \\ \quad 5y - 7z = -55 & E_2 - 2E_1 \to E_2 \\ \quad\ y + 3z = 11 & E_3 + E_1 \to E_3 \end{cases}$$

$$\mathrm{S} \sim \begin{cases} 2x - y + 2z = 15 & \\ \quad 5y - 7z = -55 & \\ \quad\ -22z = -110 & -5E_3 + E_2 \to E_3 \end{cases}$$

De E_3, nous obtenons $z = 5$.

En remplaçant z par 5 dans E_2, nous obtenons $5y - 7(5) = -55$, donc $y = -4$.

En remplaçant z par 5 et y par -4 dans E_1, nous obtenons $2x - (-4) + 2(5) = 15$, donc $x = \frac{1}{2}$.

D'où E.-S. $= \left\{\left(\frac{1}{2}, -4, 5\right)\right\}$

Étudions maintenant les effets sur la matrice augmentée des opérations élémentaires effectuées sur (S).

Les quatre opérations élémentaires suivantes, analogues aux opérations élémentaires sur les équations (voir ci-dessus), permettent de transformer une matrice augmentée correspondant à un système d'équations (S) en une matrice augmentée équivalente correspondant à un système d'équations équivalent à (S).

1. **Permuter** des lignes $(L_i \leftrightarrow L_j)$, c'est-à-dire $(L_i \to L_j)$ et $(L_j \to L_i)$.
2. **Multiplier** une ligne par k, où $k \in \mathbb{R}$ et $k \neq 0$ $(kL_i \to L_i)$.
3. **Additionner** un multiple k, où $k \in \mathbb{R}$, d'une ligne à une autre ligne $(L_i + kL_j \to L_i)$.
4. **Additionner** à une ligne multipliée par k_1, où $k_1 \in \mathbb{R}$ et $k_1 \neq 0$, une autre ligne multipliée par k_2, où $k_2 \in \mathbb{R}$ $(k_1L_i + k_2L_j \to L_i)$.

Note :

- Effectuer l'opération $4)$ est équivalent à effectuer les opérations $2)$ et $3)$ précédentes simultanément sur les lignes L_i et L_j.
- Nous utilisons le symbole $\sim$ pour indiquer que deux matrices augmentées sont équivalentes.

Exemple 3.7 : Pour résoudre le système (S) précédent à l'aide de matrices, transformons d'abord le système sous la forme de l'équation matricielle $AX = B$ suivante

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -25 \\ -4 \end{bmatrix}$$

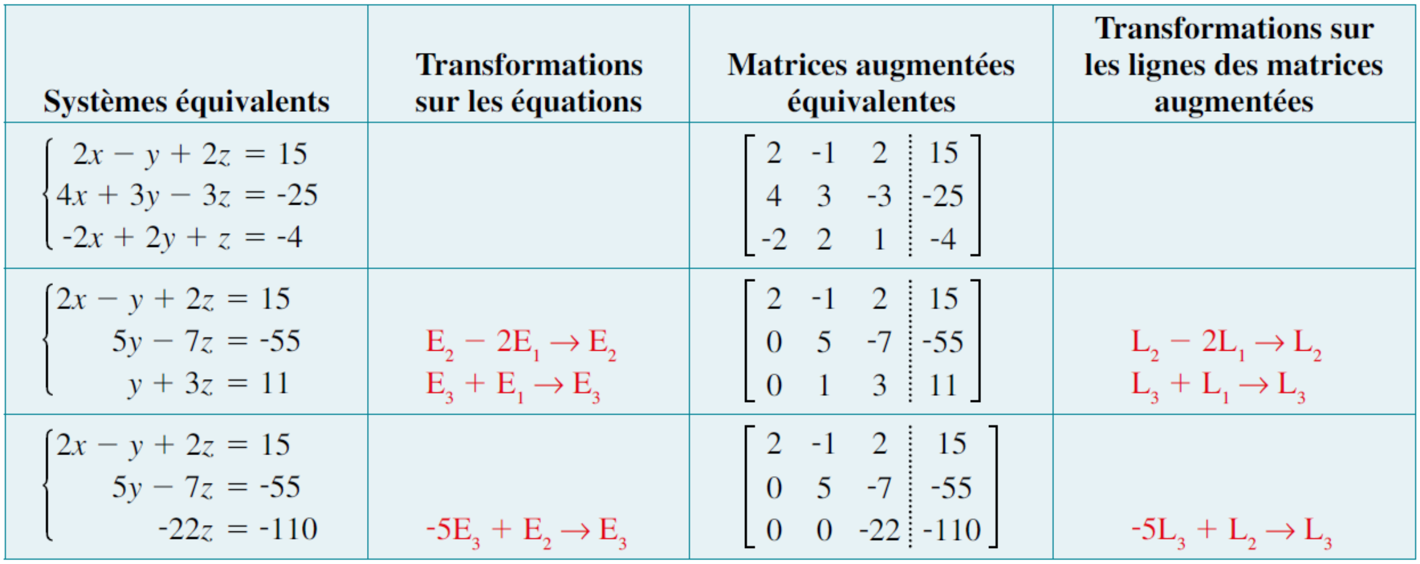
En tenant compte seulement des coefficients et des constantes dans le système précédent, nous pouvons écrire la matrice augmentée suivante

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 3 & -3 & -25 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right] \tag{2.3}$$

En effectuant les opérations élémentaires adéquates sur la matrice augmentée (2.3), on aboutit à la matrice augmentée équivalente suivante

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 3 & -3 & -25 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 0 & 5 & -7 & -55 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 + L_1 \to L_3 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 0 & 5 & -7 & -55 \\ 0 & 0 & -22 & -110 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} \\ \\ -5L_3 + L_2 \to L_3 \end{array} \end{aligned}$$

FIGURE 2.1 – **Les effects des opérations élémentaires effectuées sur le système (S), sont identiques à ceux faits sur la matrice augmentée correspondante.**



Systèmes équivalents	Transformations sur les équations	Matrices augmentées équivalentes	Transformations sur les lignes des matrices augmentées
$\begin{cases} 2x - y + 2z = 15 \\ 4x + 3y - 3z = -25 \\ -2x + 2y + z = -4 \end{cases}$		$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 3 & -3 & -25 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right]$	
$\begin{cases} 2x - y + 2z = 15 \\ 5y - 7z = -55 \\ y + 3z = 11 \end{cases}$	$E_2 - 2E_1 \to E_2$ $E_3 + E_1 \to E_3$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 0 & 5 & -7 & -55 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right]$	$L_2 - 2L_1 \to L_2$ $L_3 + L_1 \to L_3$
$\begin{cases} 2x - y + 2z = 15 \\ 5y - 7z = -55 \\ -22z = -110 \end{cases}$	$-5E_3 + E_2 \to E_3$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 0 & 5 & -7 & -55 \\ 0 & 0 & -22 & -110 \end{array}\right]$	$-5L_3 + L_2 \to L_3$

• 3.1.4 - Méthode d'élimination

Méthode :

- Cette méthode, appelée aussi **méthode d'addition** ou **méthode de réduction**, consiste à faire en sorte que les coefficients d'une des variables, dans deux équations, soient des nombres opposés.
- cela peut être obtenu en multipliant chaque membre d'une équation par un nombre approprié et chaque membre de l'autre équation par un autre nombre approprié.
- En additionnant membre à membre les équations obtenues, la variable choisie sera éliminée.

Exemple 3.8 : Résolvons le système (S) suivant par la méthode d'élimination.

$$(S)\begin{cases} x - 2y + 4z = -6 & \text{notée } E_1 \\ 5x + 3y - z = 25 & \text{notée } E_2 \\ 3x - 4y + 2z = 4 & \text{notée } E_3 \end{cases}$$

▷ Étape 1 : Éliminer une variable pour obtenir un système à deux variables

- ⋆ Pour éliminer x, effectuons les opérations suivantes.
- ⋆ En effectuant $E_2 - 5E_1$, nous obtenons $13y - 21z = 55$, notée E_4.
- ⋆ En effectuant $E_3 - 3E_1$, nous obtenons $2y - 10z = 22$, notée E_5.

▷ **Étape 2 : Éliminer une variable dans le système obtenu à l'étape 1**

- ⋆ En effectuant $2E_4 - 13E_5$, nous obtenons

$$\begin{aligned} 88z &= -176 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

▷ **Étape 3 : Trouver la valeur des autres variables**

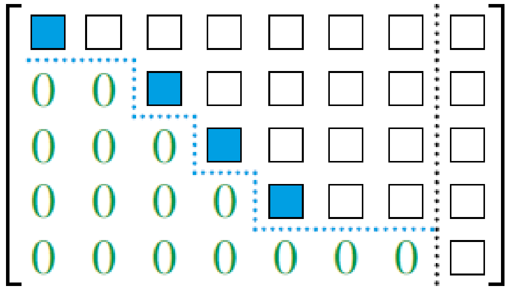
- ⋆ En remplaçant z par -2 dans l'équation E_4 ou E_5, nous obtenons $y = 1$.
- ⋆ En remplaçant z par -2 et y par 1 dans l'équation E_1, E_2 ou E_3, nous obtenons $x = 4$. D'où E.-S. $= \{(4, 1, -2)\}$.

▷ Nous pouvons vérifier que $x = 4$, $y = 1$ et $z = -2$ est une solution du système (S) de l'exemple 1 précédent.

• 3.2 - Résolution par la méthode de Gauss-Jordan

À l'aide des opérations élémentaires sur les lignes, nous voulons transformer la matrice augmentée correspondant à un système d'équations en une matrice augmentée équivalente où le nombre de zéros précédant la première entrée non nulle de chaque ligne augmente de ligne en ligne, jusqu'à n'avoir possiblement que des lignes de zéros.

Voici une forme possible de la dernière matrice augmentée que nous voulons obtenir, où les éléments □ sont différents de zéro et les éléments □ sont des nombres réels.

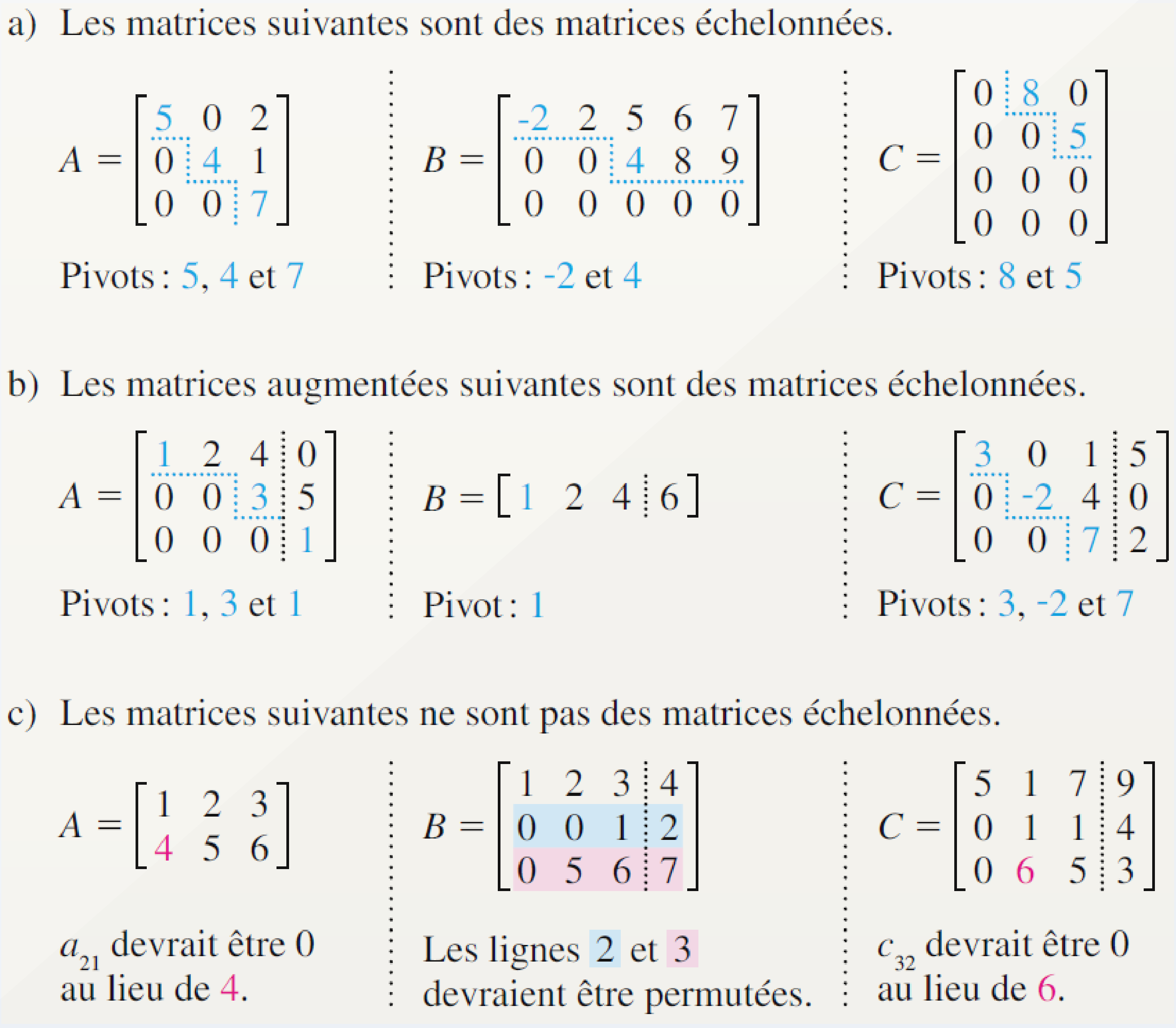


Cette matrice augmentée nous permettra de trouver l'ensemble-solution du système initial. Une telle matrice augmentée est appelée matrice augmentée échelonnée.

Définition 3.5

- Une matrice est appelée **matrice échelonnée** si le nombre de zéros précédant la première entrée non nulle de chaque ligne augmente de ligne en ligne jusqu'à n'avoir possiblement que des lignes de zéros.
- Dans une matrice échelonnée, le premier élément non nul d'une ligne s'appelle le **pivot** de cette ligne.

Exemple 3.9 :



a) Les matrices suivantes sont des matrices échelonnées.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Pivots : 5, 4 et 7

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivots : -2 et 4

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivots : 8 et 5

b) Les matrices augmentées suivantes sont des matrices échelonnées.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Pivots : 1, 3 et 1

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

Pivot : 1

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{array}\right]$$

Pivots : 3, -2 et 7

c) Les matrices suivantes ne sont pas des matrices échelonnées.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

a_{21} devrait être 0 au lieu de 4.

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right]$$

Les lignes 2 et 3 devraient être permutées.

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

c_{32} devrait être 0 au lieu de 6.

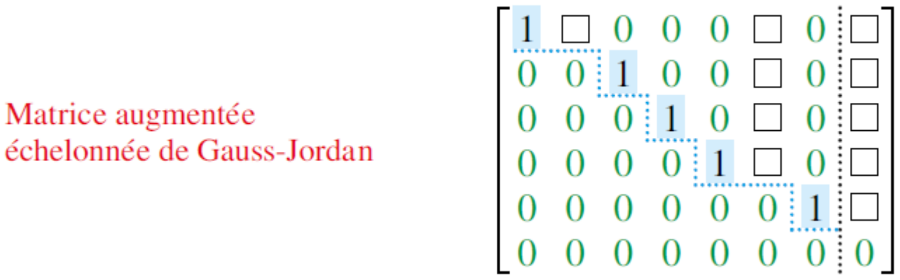
Définition 3.6

Une matrice échelonnée est appelée **matrice échelonnée de Gauss-Jordan**, également appelée **matrice échelonnée réduite**, si elle possède les propriétés suivantes.

Propriété 1. Le premier élément non nul de chaque ligne de la matrice est 1.

Propriété 2. Cet élément 1 doit être le seul élément non nul de la colonne où il se trouve.

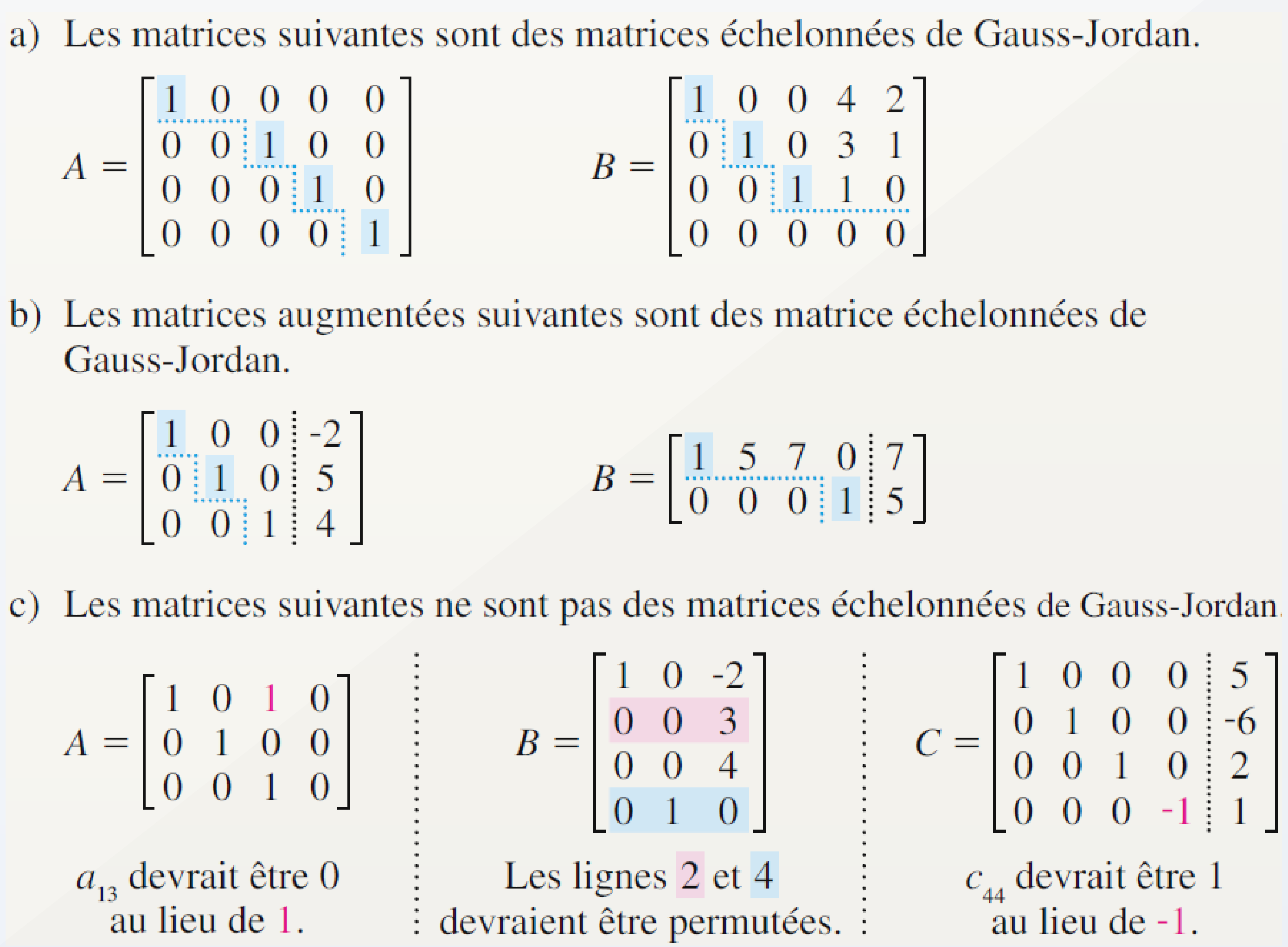
Voici une forme possible de matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan, où le pivot de chaque ligne est 1 et où les éléments ☐ sont des nombres réels.



Matrice augmentée
échelonnée de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccccccc:c} 1 & \square & 0 & 0 & 0 & \square & 0 & \square \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \square & 0 & \square \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \square & 0 & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \square & 0 & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Exemple 3.10 :



a) Les matrices suivantes sont des matrices échelonnées de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Les matrices augmentées suivantes sont des matrice échelonnées de Gauss-Jordan.

$$A = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

c) Les matrices suivantes ne sont pas des matrices échelonnées de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

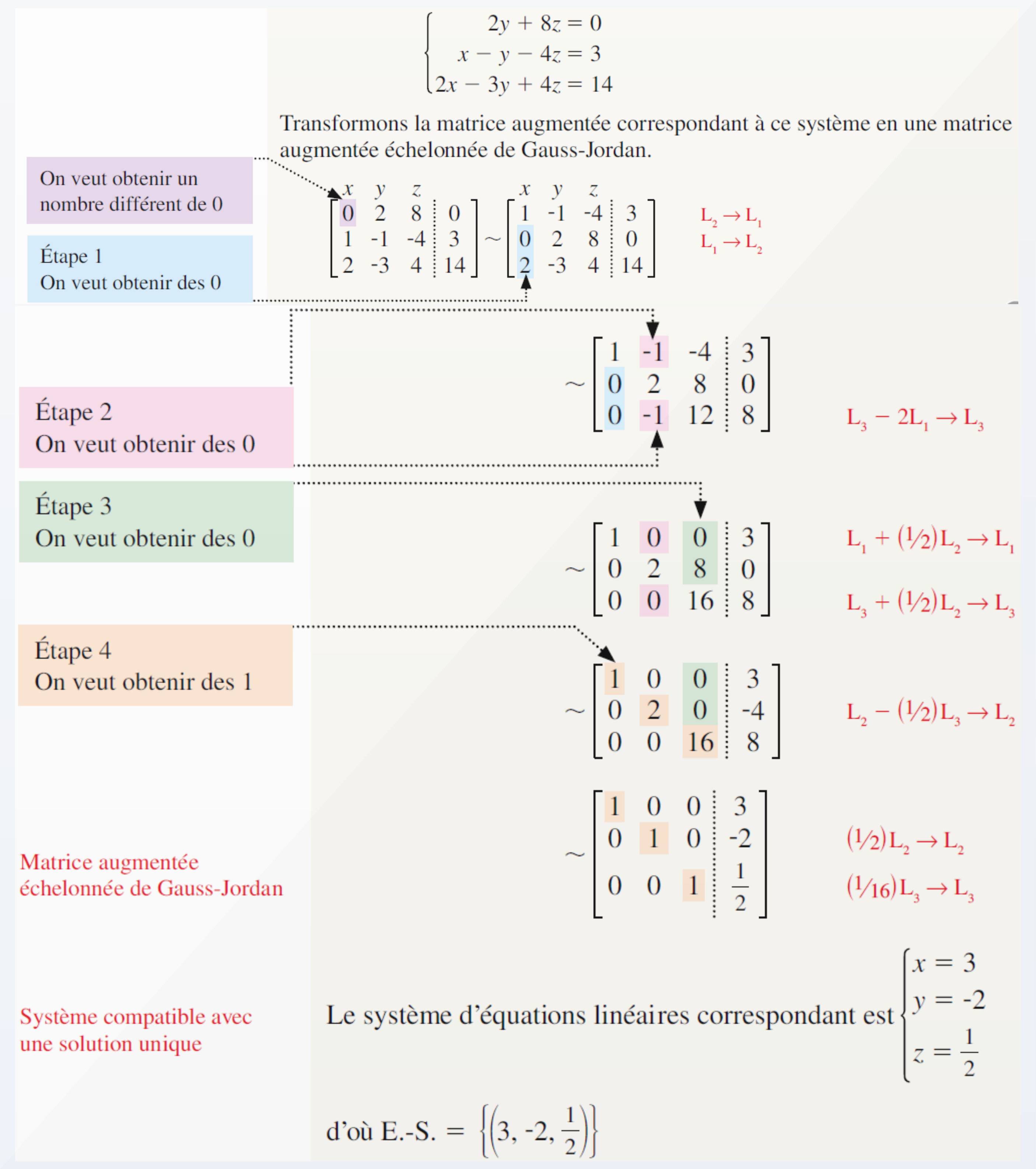
a_{13} devrait être 0
au lieu de 1.

Les lignes 2 et 4
devraient être permutées.

c_{44} devrait être 1
au lieu de -1.

La méthode de Gauss-Jordan pour résoudre un système d'équations linéaires consiste à transformer la matrice augmentée correspondant au système d'équations linéaires en une matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan.

Exemple 3.11 : Résolvons le système suivant par la méthode de Gauss-Jordan.



$$\begin{cases} 2y + 8z = 0 \\ x - y - 4z = 3 \\ 2x - 3y + 4z = 14 \end{cases}$$

Transformons la matrice augmentée correspondant à ce système en une matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan.

On veut obtenir un nombre différent de 0

Étape 1
On veut obtenir des 0

$$\left[\begin{array}{ccc:c} x & y & z & \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} x & y & z & \\ 1 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 14 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \to L_1 \\ L_1 \to L_2 \end{array}$$

Étape 2
On veut obtenir des 0

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 12 & 8 \end{array}\right] \quad L_3 - 2L_1 \to L_3$$

Étape 3
On veut obtenir des 0

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_1 + (1/2)L_2 \to L_1 \\ L_3 + (1/2)L_2 \to L_3 \end{array}$$

Étape 4
On veut obtenir des 1

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \end{array}\right] \quad L_2 - (1/2)L_3 \to L_2$$

Matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (1/2)L_2 \to L_2 \\ (1/16)L_3 \to L_3 \end{array}$$

Système compatible avec une solution unique

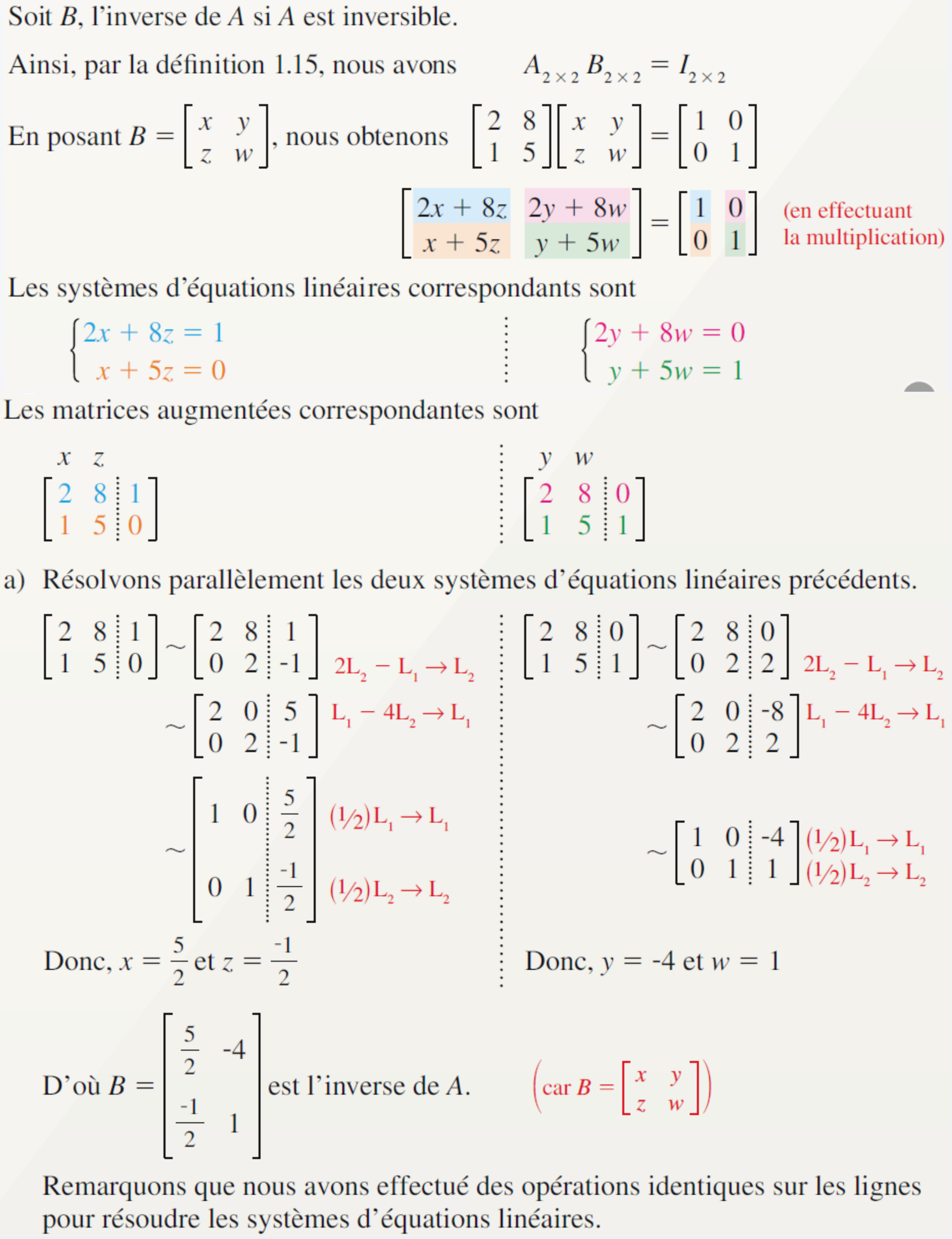
Le système d'équations linéaires correspondant est $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

d'où E.-S. $= \left\{\left(3, -2, \frac{1}{2}\right)\right\}$

• 3.3 - Inversion de matrices carrées par la méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan, utilisée pour résoudre un système d'équations linéaires, peut être adaptée pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée si cette matrice est inversible.

Exemple 3.12 : Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. Déterminons l'inverse de A, si A est inversible.



Soit B, l'inverse de A si A est inversible.

Ainsi, par la définition 1.15, nous avons $\quad A_{2\times 2}B_{2\times 2} = I_{2\times 2}$

En posant $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, nous obtenons $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2x + 8z & 2y + 8w \\ x + 5z & y + 5w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(en effectuant la multiplication)}$$

Les systèmes d'équations linéaires correspondants sont

$$\begin{cases} 2x + 8z = 1 \\ x + 5z = 0 \end{cases} \qquad \vdots \qquad \begin{cases} 2y + 8w = 0 \\ y + 5w = 1 \end{cases}$$

Les matrices augmentées correspondantes sont

$$\begin{array}{cc|c} x & z & \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{array} \qquad \vdots \qquad \begin{array}{cc|c} y & w & \\ 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{array}$$

a) Résolvons parallèlement les deux systèmes d'équations linéaires précédents.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \; 2L_2 - L_1 \rightarrow L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \; L_1 - 4L_2 \rightarrow L_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right] \; \begin{array}{l} (1/2)L_1 \rightarrow L_1 \\ (1/2)L_2 \rightarrow L_2 \end{array}$$

Donc, $x = \frac{5}{2}$ et $z = \frac{-1}{2}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \; 2L_2 - L_1 \rightarrow L_2$$

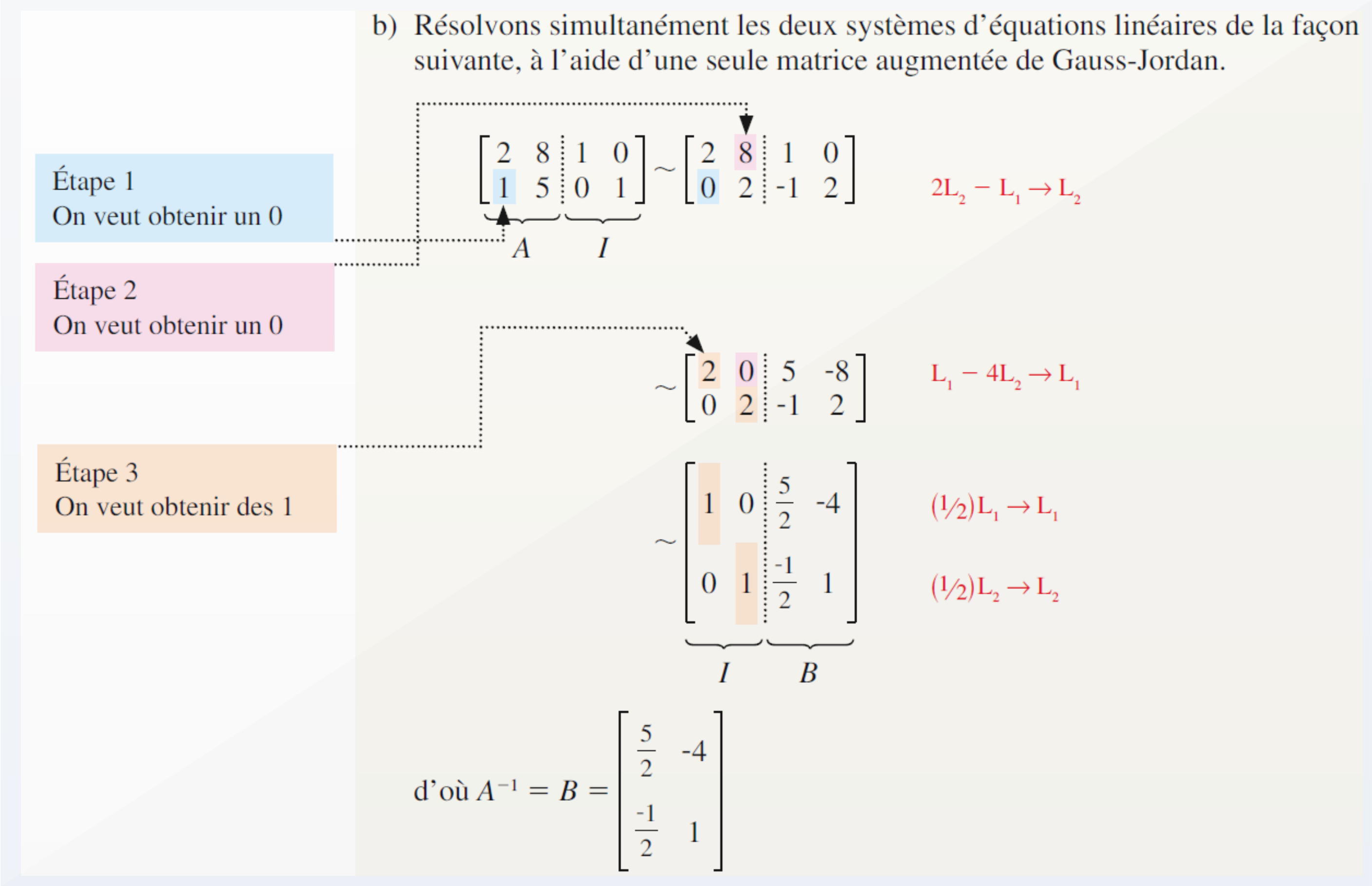
$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \; L_1 - 4L_2 \rightarrow L_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \; \begin{array}{l} (1/2)L_1 \rightarrow L_1 \\ (1/2)L_2 \rightarrow L_2 \end{array}$$

Donc, $y = -4$ et $w = 1$

D'où $B = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -4 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ est l'inverse de A. $\quad \left(\text{car } B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right)$

Remarquons que nous avons effectué des opérations identiques sur les lignes pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.



b) Résolvons simultanément les deux systèmes d'équations linéaires de la façon suivante, à l'aide d'une seule matrice augmentée de Gauss-Jordan.

Étape 1
On veut obtenir un 0

$$\left[\underbrace{\begin{matrix}2&8\\1&5\end{matrix}}_{A}\middle|\underbrace{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}_{I}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc}2&8&1&0\\0&2&-1&2\end{array}\right] \qquad 2L_2 - L_1 \to L_2$$

Étape 2
On veut obtenir un 0

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc}2&0&5&-8\\0&2&-1&2\end{array}\right] \qquad L_1 - 4L_2 \to L_1$$

Étape 3
On veut obtenir des 1

$$\sim \left[\underbrace{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}_{I}\middle|\underbrace{\begin{matrix}\frac{5}{2}&-4\\\frac{-1}{2}&1\end{matrix}}_{B}\right] \qquad \begin{matrix}(1/2)L_1 \to L_1\\(1/2)L_2 \to L_2\end{matrix}$$

d'où $A^{-1} = B = \begin{bmatrix}\frac{5}{2}&-4\\\frac{-1}{2}&1\end{bmatrix}$

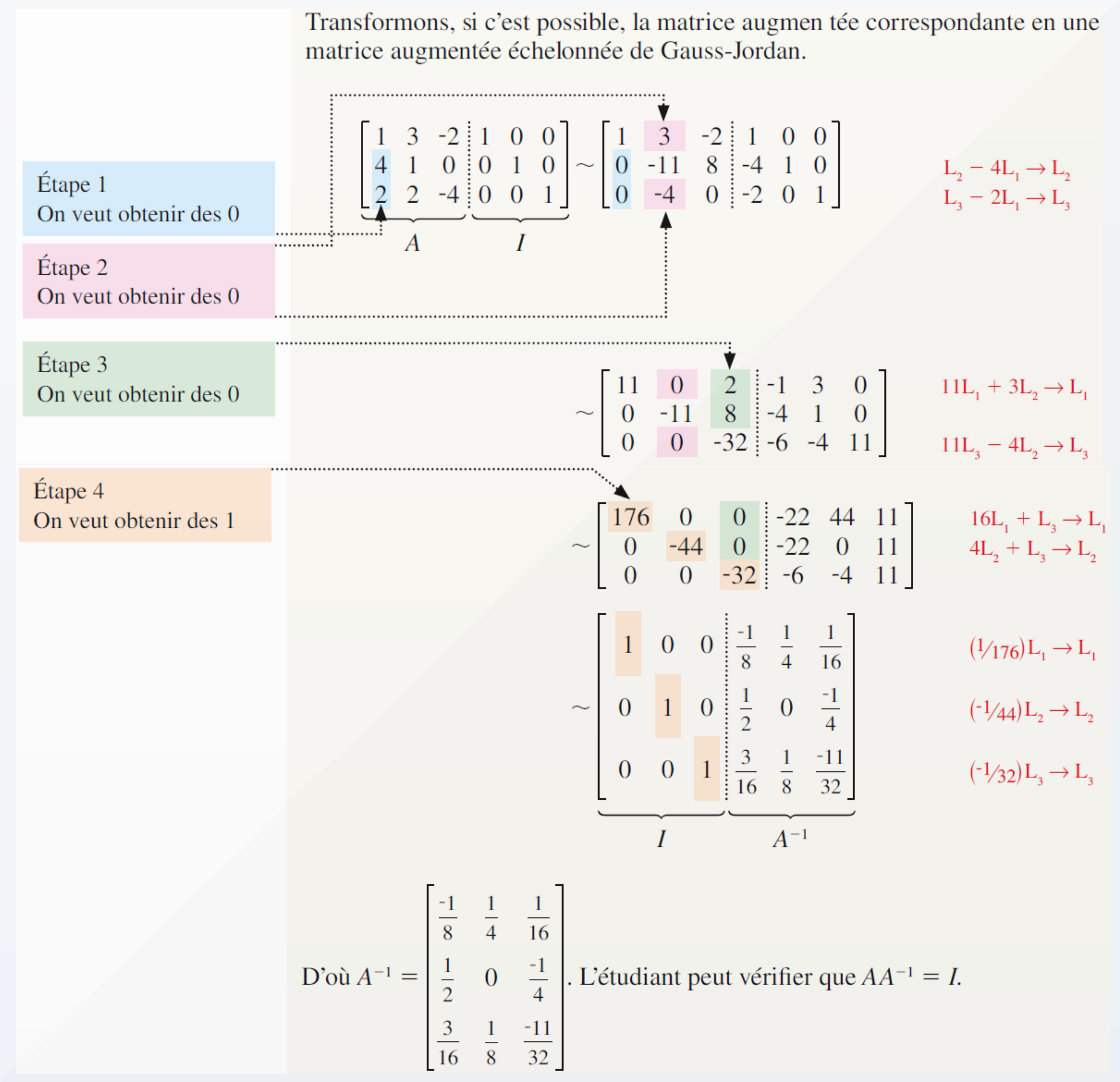
Méthode de Gauss-Jordan pour trouver l'inverse d'une matrice carrée

La méthode de Gauss-Jordan pour trouver l'inverse d'une matrice carrée A, lorsque cette matrice est inversible, consiste à écrire une matrice augmentée de la forme $[A|I]$ et de la transformer, si c'est possible, à l'aide des opérations élémentaires, de manière à obtenir une nouvelle matrice augmentée équivalente de la forme $[I|B]$, c'est-à-dire

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&1&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}&0&0&\cdots&1\end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&\cdots&0&b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\0&1&\cdots&0&b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{array}\right]$$

où $B = A^{-1}$.

Exemple 3.13 : Soit $A = \begin{bmatrix}1&3&-2\\4&1&0\\2&2&-4\end{bmatrix}$. Déterminer A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan, si A est inversible.



Transformons, si c'est possible, la matrice augmentée correspondante en une matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan.

Étape 1
On veut obtenir des 0

Étape 2
On veut obtenir des 0

$$\left[\underbrace{\begin{matrix}1&3&-2\\4&1&0\\2&2&-4\end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{I}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-2&1&0&0\\0&-11&8&-4&1&0\\0&-4&0&-2&0&1\end{array}\right] \quad \begin{matrix}L_2 - 4L_1 \to L_2\\ L_3 - 2L_1 \to L_3\end{matrix}$$

Étape 3
On veut obtenir des 0

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}11&0&2&-1&3&0\\0&-11&8&-4&1&0\\0&0&-32&-6&-4&11\end{array}\right] \quad \begin{matrix}11L_1 + 3L_2 \to L_1\\ \\ 11L_3 - 4L_2 \to L_3\end{matrix}$$

Étape 4
On veut obtenir des 1

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}176&0&0&-22&44&11\\0&-44&0&-22&0&11\\0&0&-32&-6&-4&11\end{array}\right] \quad \begin{matrix}16L_1 + L_3 \to L_1\\ 4L_2 + L_3 \to L_2\\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{I}\ \middle|\ \underbrace{\begin{matrix}\frac{-1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{16}\\ \frac{1}{2}&0&\frac{-1}{4}\\ \frac{3}{16}&\frac{1}{8}&\frac{-11}{32}\end{matrix}}_{A^{-1}}\right] \quad \begin{matrix}(1/176)L_1 \to L_1\\ (-1/44)L_2 \to L_2\\ (-1/32)L_3 \to L_3\end{matrix}$$

D'où $A^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{-1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{16}\\ \frac{1}{2}&0&\frac{-1}{4}\\ \frac{3}{16}&\frac{1}{8}&\frac{-11}{32}\end{bmatrix}$. L'étudiant peut vérifier que $AA^{-1} = I$.

Exercice 3.2 : Soit $A = \begin{bmatrix}1&3&4\\2&5&-3\\1&4&15\end{bmatrix}$. Déterminer A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan, si A est inversible.

Chapitre 3

Fonctions et Relations

Sommaire

On utilise fréquemment le terme «fonction» dans le langage courant. On dit, par exemple, que la durée d'un vol transatlantique est fonction de la distance parcourue ou que l'espérance de vie est fonction du pays de résidence. Le mot «fonction» suggère l'idée de dépendance, de relation, d'association.

Dans le langage mathématique, une fonction est une relation particulière qui, à chaque élément de la première colonne d'une liste, associe au plus un élément de la seconde colonne. Et l'objectif de ce chapitre est d'étudier les caractéristiques générales des fonctions, à travers plusieurs sections dont chacune décrit un objectif d'apprentissage bien visé :

- ⋆ À la section 1, le but sera de définir et de reconnaître les relations d'égalité ou d'inclusion entre deux ensembles, avant d'effectuer des opérations d'union, d'intersection et de différence sur ceux-ci.
- ⋆ La section 2 aura pour objectif de définir les notions de relation et de fonction à l'aide d'une règle de correspondance, et de reconnaître une fonction parmi des relations. Elle introduira ensuite la notion de domaine et de graphe d'une fonction où seront aborderées la représentation graphique d'une fonction, les notions de fonction injective, surjective et bijective.
- ⋆ La section 3 permettra de trouver les points d'intersection du graphique d'une fonction avec les axes et de déterminer les intervalles sur lesquels une fonction est positive, négative ou nulle. Elle investiguera aussi les notions de croissance et de décroissance d'une fonction, avant d'aborder celles de maximums et minimums absolus ou relatifs.
- ⋆ La section 4 effectuera des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication ou de division sur des fonctions réelles, avant d'effectuer la composition de fonctions.
- ⋆ La section 5 abordera différents types de fonction.

Les notions abordées ici sont largement étudiées dans [4, 5], qui ont servi à la mise en oeuvre de ce chapitre.

1 Notions de base de la théorie des ensembles

• 1.1 - Définir des ensembles

Définition 1.1

Un **ensemble** est une collection d'éléments. On écrit $a \in A$ pour indiquer que a est un élément de l'ensemble A et $a \notin A$ si a n'appartient pas à l'ensemble.

Exemple 1.1 :

- ▷ Les **nombres naturels** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls.
- ▷ Les **nombres entiers** $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ est l'ensemble de tous les entiers, qu'ils soient positifs, négatifs ou nuls.
- ▷ Les **nombres rationnels** $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'exprimer

sous la forme d'un quotient de deux entiers, soit sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers et $b \neq 0$.

- ▷ On a aussi les ensembles suivants

$$\{0, 1\}, \quad \{\text{rouge}, \text{noir}\}.$$

Définition 1.2

Un **ensemble** est une collection d'éléments qui vérifient une propriété.

Exemple 1.2 :

$$\{x \in \mathbb{R}, |x - 2| < 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C}, z^5 = 1\}, \quad \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1].$$

• 1.2 - Les relations entre deux ensembles

Définition 1.3

Deux ensembles A et B sont **égaux** s'ils ont exactement les mêmes éléments. On écrit alors $A = B$. L'égalité de A et B s'écrit mathématiquement

$$\forall x : (x \in A) \iff (x \in B).$$

Exemple 1.3 :

- ▷ Si $A = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ et $B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2\}$, alors $A = B$.
- ▷ $A = \{5, 10\}$ et $B = \{0, 5, 10\}$ ne sont pas égaux, puisqu'ils n'ont pas exactement les mêmes éléments.
- ▷ $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$. L'ordre dans lequel on inscrit les éléments n'a pas d'importance.
- ▷ $\{1, 2, 1, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$. La répétition d'un élément ne modifie pas un ensemble.
- ▷ $[-12, 27] = \{x \in \mathbb{R} \mid -12 \leq x \leq 27\}$
- ▷ $]5, 11[\neq [6, 10]$, puisque tous les nombres réels compris strictement entre 5 et 6 de même que ceux qui sont compris strictement entre 10 et 11 appartiennent au premier ensemble, mais pas au second.

Définition 1.4

Un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B si tous les éléments de A sont aussi des éléments de B. L'inclusion de A dans B s'écrit mathématiquement

$$\forall x : (x \in A) \implies (x \in B).$$

On dit aussi que A est un **sous-ensemble** de B ou une **partie** de B et on écrit $A \subseteq B$. Si A n'est pas inclus dans B, on écrit $A \nsubseteq B$.

La relation entre l'égalité de deux ensembles et l'inclusion

$$A = B \text{ si et seulement si } A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A.$$

Si $A \subseteq B$ et $A \neq B$, on parle alors d'inclusion stricte et on peut écrire $A \subset B$.

Exemple 1.4 :

- ▷ Si $A = \{2, 8, 13\}$, $B = \{1, 2, 5, 8, 13\}$ et $C = \{2, 5, 8\}$, alors $A \subseteq B$, $A \nsubseteq C$, $B \nsubseteq A$, $B \nsubseteq C$, $C \nsubseteq A$ et $C \subseteq B$.
- ▷ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, puisque tous les entiers naturels sont des nombres réels. Par contre, $\mathbb{R} \nsubseteq \mathbb{N}$, puisqu'il existe une infinité de nombres réels qui ne sont pas des entiers naturels.
- ▷ $]-99, 0[\subseteq [-99, 0]$
- ▷ Un ensemble E est toujours inclus dans lui-même. On peut ainsi écrire $E \subseteq E$.

Attention !

- ▷ Il ne faut pas confondre le signe d'appartenance $\in$, qui représente une relation entre un élément et un ensemble, et le signe d'inclusion $(\subseteq)$, qui indique une relation entre deux ensembles.

  Exemple 1.5 : Si $A = [2, 8]$, il est correct d'écrire $5 \in A$ (l'élément 5 appartient à l'ensemble A) ou $\{5\} \subseteq A$ (le premier ensemble est inclus dans le second), mais les expressions $5 \subseteq A$ ou $\{5\} \in A$ n'ont ici aucun sens.

- ▷ Il est toutefois possible qu'un ensemble soit un élément d'un autre ensemble.

  Exemple 1.6 : $B = \{\{0, 1, 2\}, \{5\}\}$ a comme éléments les deux ensembles $\{0, 1, 2\}$ et $\{5\}$. Dans ce cas, $\{5\} \in B$, mais $\{5\} \nsubseteq B$.

Note : Un ensemble est **vide** s'il ne contient aucun élément. On représente un ensemble vide par $\{\ \}$ ou par $\varnothing$.

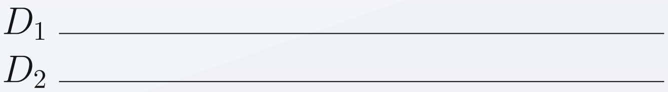
Attention !

On ne peut pas désigner l'ensemble vide par $\{\varnothing\}$. En effet, l'ensemble $\{\varnothing\}$ contient un élément qui est l'ensemble vide. Une boîte qui contient une boîte vide n'est pas vide !

L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble. Ainsi, $\varnothing \subseteq A$, quel que soit l'ensemble A. En particulier, $\varnothing \subseteq \varnothing$.

Exemple 1.7 :

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x$ est un entier impair divisible par $2\} = \{\ \} = \varnothing$.
- L'ensemble des points d'intersection de deux droites parallèles distinctes est vide.



$$\{(x, y) \mid (x, y) \text{ est un point d'intersection de } D_1 \text{ et } D_2\} = \varnothing$$

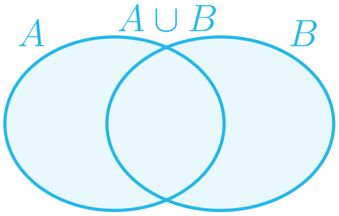
- $\varnothing \subseteq \mathbb{N}$, mais $\varnothing \notin \mathbb{N}$, puisque $\varnothing$ est un ensemble et que les éléments de $\mathbb{N}$ sont tous des nombres.

• 1.3 - Les opérations sur les ensembles

Les ensembles n'étant pas des nombres, on ne peut effectuer avec eux les opérations élémentaires d'addition, de soustraction, de multiplication ou de division. Il existe toutefois des opérations propres aux ensembles, décrites ci-après.

Définition 1.5

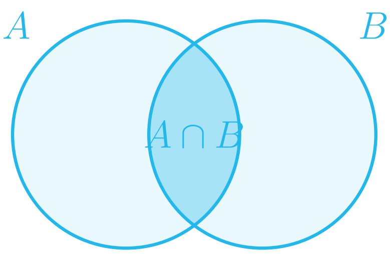
L'**union** (ou **réunion**) de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B.



$$A \cup B = \Big\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\Big\}$$

Définition 1.6

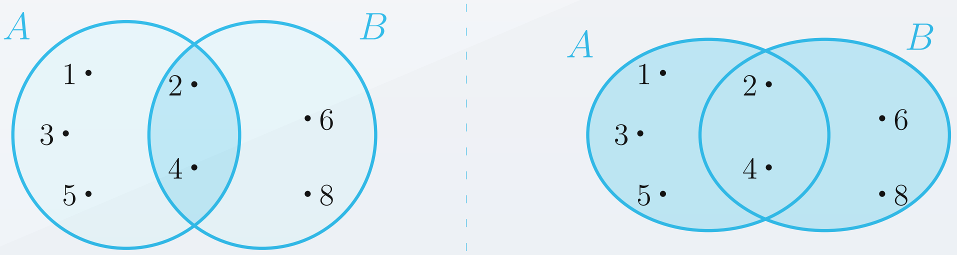
L'**intersection** de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.



$$A \cap B = \left\{ x \mid x \in A \text{ et } x \in B \right\}$$

Exemple 1.8 :

▷ Soit les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

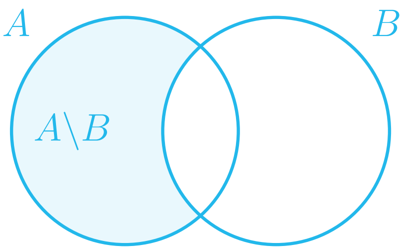


$A \cap B = \{2, 4\}$ $\quad$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

Note : Si A et B n'ont aucun élément commun, $A \cap B = \emptyset$ et A et B sont dits **disjoints**.

Définition 1.7

La **différence** de deux ensembles A et B, notée $A \backslash B$, est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.



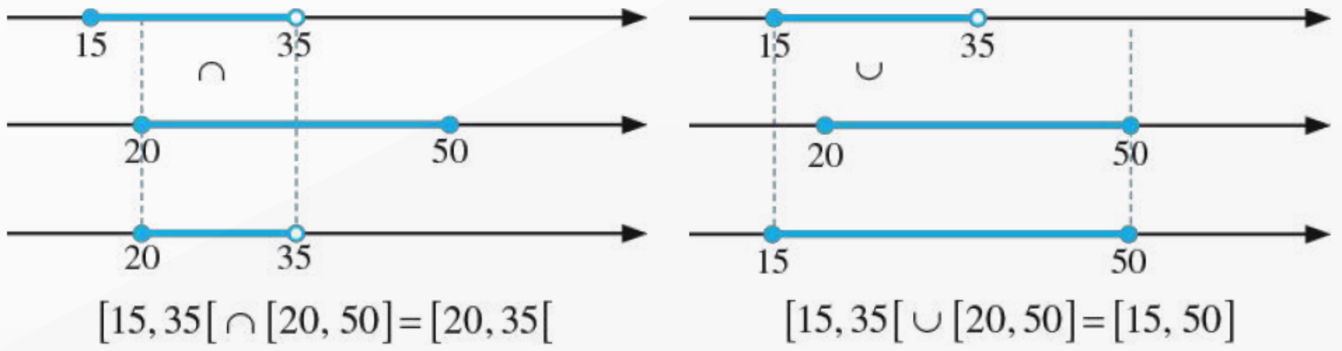
$$A \backslash B = \left\{ x \mid x \in A \text{ et } x \notin B \right\}$$

Exemple 1.9 :

- ▷ Soit les ensembles $A = \{10, 20, 30\}$, $B = \{10, 15, 20, 25\}$ et $C = \{20, 25, 30\}$.

$$\begin{aligned}(A \cup B) \backslash (B \cap C) &= \{10, 15, 20, 25, 30\} \backslash \{20, 25\} \\ &= \{10, 15, 30\}\end{aligned}$$

- ▷ Soit les intervalles $[15, 35[$ et $[20, 50]$



$[15,35[\cap [20,50] = [20,35[$ $\quad$ $[15,35[\cup [20,50] = [15,50]$

Pour vous rappeler que c'est l'union $A \cup B$ qui correspond à la définition «$x \in A$ ou $x \in B$», pensez simplement à associer le u de union au u de ou.

Définition 1.8

L'**ensemble des parties** de A, noté $\mathscr{P}(A)$, est l'ensemble des combinaisons possibles d'éléments de A.

Exemple 1.10 :

- ▷ Si $A = \{1, 2, 3\}$, on a $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

• 1.4 - Produit cartésien

Définition 1.9

Soient A et B deux ensembles. Le **produit cartésien**, noté $A \times B$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in A$ et $y \in B$.

$$A \times B = \{(x, y) \,|\, x \in A, y \in B\}$$

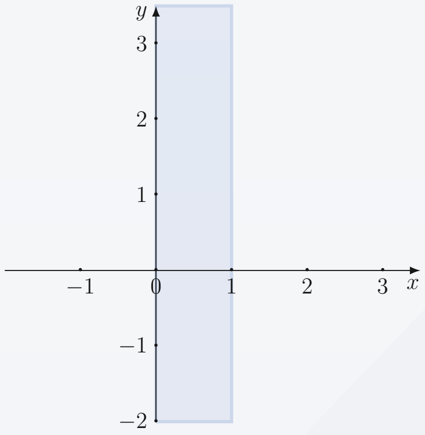
Exemple 1.11 :

- ▷ Nous connaissons le produit cartésien

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

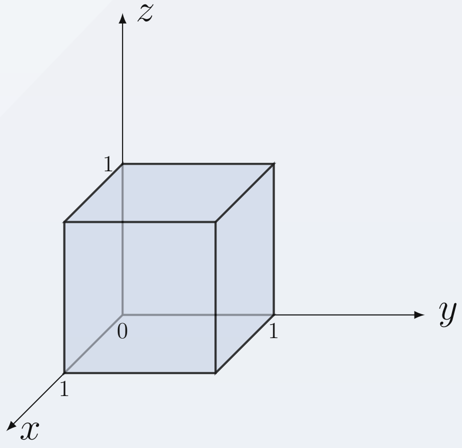
- ▷ Un autre exemple de produit cartésien est

$$[0,1] \times \mathbb{R} = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$$



- ▷ Et en trois dimensions, nous avons aussi le produit cartésien

$$[0,1] \times [0,1] \times [0,1] = \{(x,y,z) \,|\, 0 \leq x,y,z \leq 1\}$$



- ▷ Si $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{4,5\}$, alors on a le produit cartésien

$$A \times B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$

Définition 1.10

Deux couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont **égaux** si leurs premières composantes sont égales et si leurs secondes composantes sont égales.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2$$

Deux couples qui ne sont pas égaux sont dits **distincts**.

2 Concepts de relation et de fonction

2.1 - Définition d'une relation

Définition 2.1

Soit $A \times B$ le produit cartésien de deux ensembles quelconques A et B. Un élément (x, y) de $A \times B$ vérifie une **relation** $\mathscr{R}$, s'il possède une propriété donnée $\mathcal{P}$ entre x et y ; on écrit alors

$$x\mathscr{R}y$$

Exemple 2.1 :

▷ Reprenons l'exemple de $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{4, 5\}$ et définissons la relation $\mathscr{R}$ suivante pour $(x, y) \in A \times B$:

$$x\mathscr{R}y \text{ si } x \text{ divise } y.$$

Par exemple $(1, 4)$, $(2, 4)$ vérifient cette relation. Par contre $(3, 4)$ ne la verifie pas.

Définition 2.2

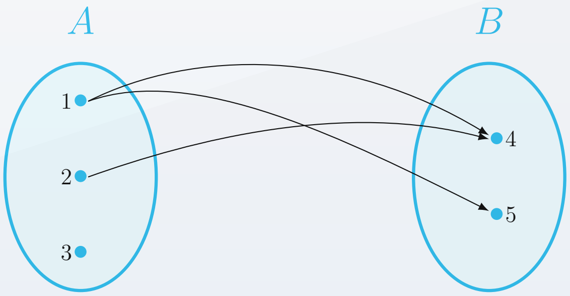
L'ensemble des couples $(x, y) \in A \times B$ vérifiant la relation $\mathscr{R}$ est appelé le **graphe** de $\mathscr{R}$. On le note $\mathcal{G}_{\mathscr{R}}$ et on écrit

$$\mathcal{G}_{\mathscr{R}} = \{(x, y) \in A \times B \,|\, x\mathscr{R}y\}$$

Note : $\mathcal{G}_{\mathscr{R}}$ est un sous-ensemble (ou une partie) de $A \times B$: $\mathcal{G}_{\mathscr{R}} \subseteq A \times B$.

Exemple 2.2 :

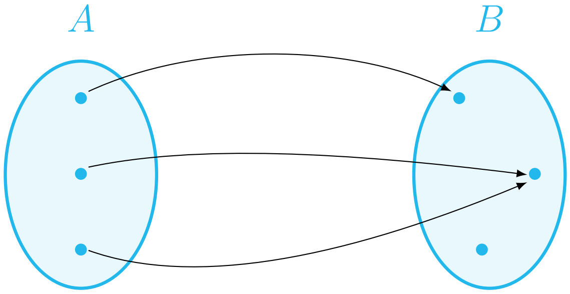
▷ Pour la relation précédente, son graphe est donné par $\mathcal{G}_{\mathscr{R}} = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4)\}$.



• 2.2 - Définition d'une fonction

Définition 2.3

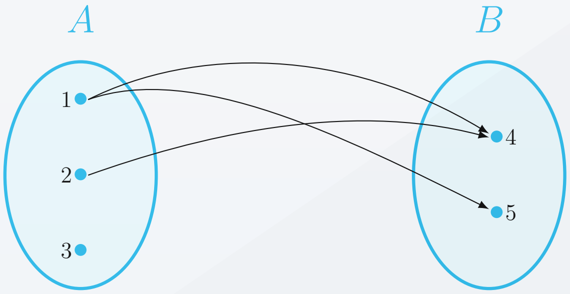
Une relation $\mathscr{R}$ définie sur $A \times B$ est dite une **application** (ou une **fonction**) de A dans B si pour tout $x \in A$, il existe un **seul** $y \in B$ tel que $x\mathscr{R}y$.



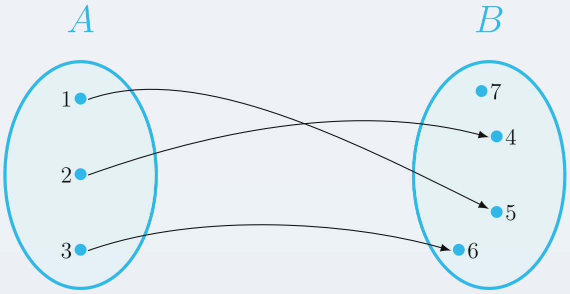
Note : En d'autres termes, une **application** (ou une **fonction**) de A dans B est une **règle** qui à tout élément de A correspond un élément **unique** de B.

Exemple 2.3 :

- ▷ La relation de l'exemple précédent n'est pas une application de A dans B car 3 n'est pas en relation avec un élément de B ou 1 est en relation avec deux éléments de B.



- ▷ Par contre, la relation suivante est bien une application de A dans B.



Note : On note généralement une application de A dans B par f et on écrit

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

- x est la **variable indépendante**.
- y est la **variable dépendante** : c'est l'**image** de x par la fonction f.
- A est l'**ensemble de départ** de la fonction f.
- B est l'**ensemble d'arrivée** de la fonction f.

Définition 2.4

Si $f : A \longrightarrow B$ est une application où A et B sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, alors f est appelé une **fonction réelle** d'une **variable réelle**. Dans ce cas, on écrit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

On décrit la relation entre y et x par une équation de la forme $y = f(x)$ (lire «y égale f de x»). C'est la **règle de correspondance** de la fonction qui indique comment **évaluer** la fonction pour une valeur de x donnée, c'est-à-dire comment calculer la valeur de y correspondant à cette valeur de x.

Attention !

La notation $f(x)$ est spécifique aux fonctions. Les parenthèses n'indiquent pas ici une multiplication, mais plutôt le fait qu'on évalue la fonction f pour une valeur de x.

Pour évaluer l'image d'un nombre réel par une fonction f, on remplace chaque x par ce nombre dans la règle de correspondance de f.

Exemple 2.4 :

▷ Soit la relation qui, à chaque nombre réel, associe son carré. C'est une fonction, puisque chaque nombre réel possède un seul carré. On peut exprimer cette fonction par une règle de correspondance de la forme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = x^2 \text{ ou bien } f(x) = x^2 \end{aligned}$$

Pour chaque nombre réel x, la fonction f calcule son carré, ici appelé y ou $f(x)$.

Évaluons la fonction pour quelques valeurs de x.

Valeur de x	$y = f(x) = x^2$	Valeur de y (image de x par la fonction f)
$x = 5$	$y = f(5) = 5^2$	$y = 25$
$x = -8$	$y = f(-8) = (-8)^2$	$y = 64$
$x = a + 1$	$y = f(a+1) = (a+1)^2$	$y = a^2 + 2a + 1$

x est la variable indépendante, car on peut choisir sa valeur selon ce que l'on cherche. y est la variable dépendante, car sa valeur dépend de celle qu'on a choisie pour x.

- ▷ La relation qui, à chaque nombre réel, associe deux fois sa valeur plus un est aussi une fonction. On peut l'exprimer par la règle de correspondance de la forme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = 2x + 1 \text{ ou bien } f(x) = 2x + 1 \end{aligned}$$

- ▷ La relation qui, à chaque nombre réel, associe sa valeur absolue est également une fonction. On peut l'exprimer par la règle de correspondance de la forme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = |x| \text{ ou bien } f(x) = |x| \end{aligned}$$

- ▷ Soit $f(x) = \frac{3x^2-5x+1}{4-x}$ la règle de correspondance d'une fonction réelle. On a :
  - $f(7) = \frac{3(7)^2-5(7)+1}{4-7} = \frac{113}{-3} = \frac{-113}{3}$
  - $f(4) = \frac{3(4)^2-5(4)+1}{4-4}$ non défini, puisqu'on ne peut pas diviser par 0.
  - $f(c) = \frac{3(c)^2-5(c)+1}{4-c}$ à la condition que $c \neq 4$

Attention !

On peut désigner une fonction, sa variable indépendante et sa variable dépendante à l'aide d'autres symboles que f, x et y.
Les règles de correspondance ci-dessous désignent toutes la même

fonction qui, à chaque nombre réel, associe la somme de son carré et de son triple :

$$\begin{aligned} y = f(x) &= x^2 + 3x \\ z = g(u) &= u^2 + 3u \\ N = p(t) &= t^2 + 3t \end{aligned}$$

On **n'obtient pas une fonction différente** en modifiant le nom de la fonction (f, g ou p), le nom de la variable dépendante (y, z ou N) ou le nom de la variable indépendante (x, u ou t) puisque, dans tous les cas, la règle est la même : on additionne le carré et le triple de chaque nombre réel.

$$\begin{aligned} &\text{Si } x = 2, \text{ alors } y = f(2) = 2^2 + 3(2) = 10 \\ &\text{Si } u = 2, \text{ alors } z = g(2) = 2^2 + 3(2) = 10 \\ &\text{Si } t = 2, \text{ alors } N = p(2) = 2^2 + 3(2) = 10 \end{aligned}$$

• 2.3 - Le domaine d'une fonction

Définition 2.5

Le **domaine** d'une fonction réelle f décrite par la règle de correspondance $y = f(x)$ est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'expression est définie.

Le domaine d'une fonction f est désigné par $dom(f)$.

$$dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$$

Note : La recherche du domaine d'une fonction algébrique

Pour déterminer le domaine d'une fonction algébrique, on cherche les valeurs de sa variable indépendante telles :

- qu'aucun dénominateur n'est nul ;
- que les expressions sous une racine paire (racine carrée, quatrième, sixième, etc.) sont positives ou nulles.

Exemple 2.5 :

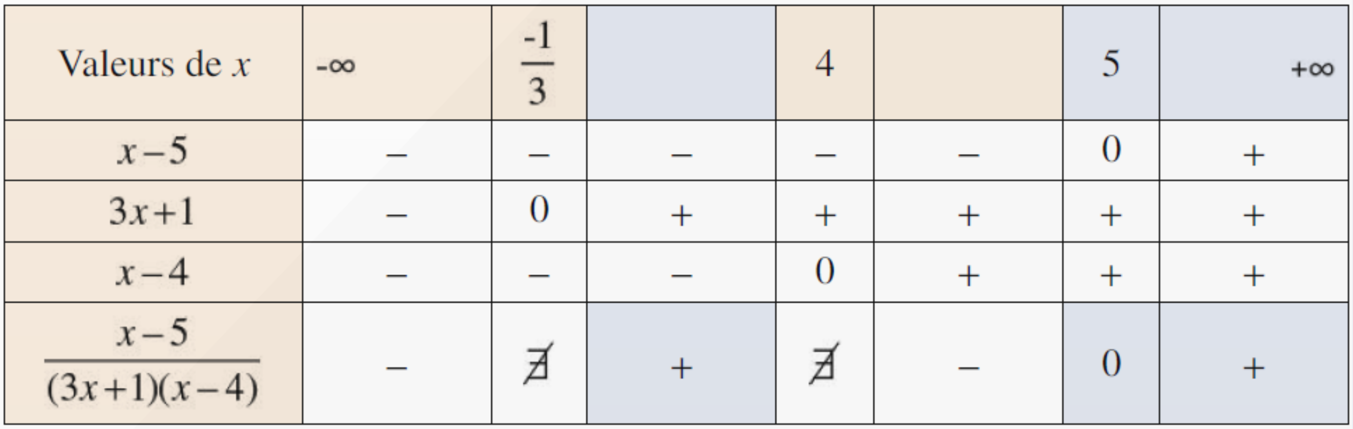
▷ Soit $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 6$. $dom(f) = \mathbb{R}$, puisque la fonction est définie par un polynôme :

il n'y a aucun dénominateur ni radical, donc aucune restriction.

- Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x-2} + 3$. La fonction est définie à la condition que $x - 2 \geq 0$, soit si $x \geq 2$. Ainsi, $dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = [2, +\infty[$.
- Soit la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{x-5}{3x^2-11x-4}}$. Cette fonction est définie à la condition que $\frac{x-5}{3x^2-11x-4} \geq 0$, car l'expression sous le radical doit être positive ou nulle.
  On utilisera un tableau de signes (voir le chapitre ..., page ....) pour résoudre l'inéquation , qu'on obtient en factorisant le dénominateur de la fraction.
  Les valeurs critiques sont les zéros de chacun des facteurs du numérateur et du dénominateur.

$$x - 5 = 0 \text{ si } x = 5$$
$$3x + 1 = 0 \text{ si } x = -\frac{1}{3}$$
$$x - 4 = 0 \text{ si } x = 4$$

On place ces valeurs sur la première ligne du tableau et on remplit ses cases.



Valeurs de x	-∞	$\frac{-1}{3}$		4		5	+∞
$x-5$	−	−	−	−	−	0	+
$3x+1$	−	0	+	+	+	+	+
$x-4$	−	−	−	0	+	+	+
$\frac{x-5}{(3x+1)(x-4)}$	−	∄	+	∄	−	0	+

Le domaine cherché est l'ensemble des valeurs de x telles que la fraction $\frac{x-5}{3x^2-11x-4}$ est positive ou nulle. Ainsi, $dom(f) =]-\frac{1}{3}, 4[\cup[5, +\infty[$.

Le contexte d'un problème peut exiger la restriction du domaine d'une fonction.

Exemple 2.6 :

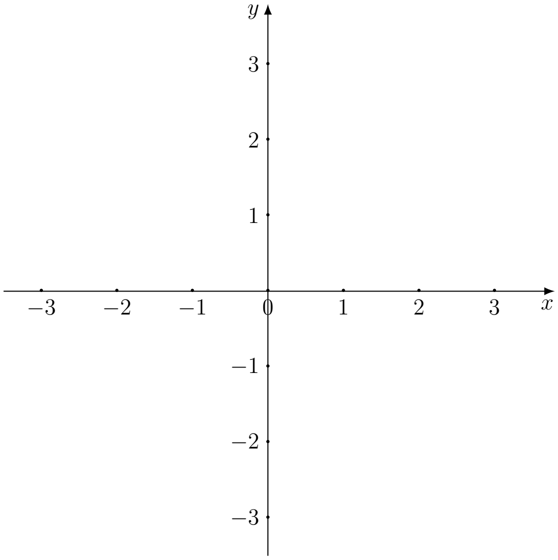
- Soit la fonction $A(r) = \pi r^2$. Le domaine naturel de cette fonction est $dom(A) = \mathbb{R}$.
- La même fonction peut représenter l'aire d'un cercle de rayon r. Dans ce cas, le domaine contextuel est $dom(f) = [0, +\infty]$, car la mesure du rayon d'un cercle ne peut pas être négative et rien n'indique une limite supérieure.

- ▷ Il se peut aussi que l'énoncé du problème nous amène à restreindre encore plus le domaine. Si on cherche l'aire d'un cercle dessiné sur une feuille carrée de 20 cm de côté, le rayon du cercle ne peut être supérieur à 10 cm et on aura alors $dom(f) = [0, 10]$.

• 2.4 - La représentation graphique d'une fonction

Définition 2.6

Le **plan cartésien** est une surface plane définie par l'intersection de deux droites numériques perpendiculaires. Il permet entre autres de repérer des points dans le plan et de représenter une relation entre deux variables.

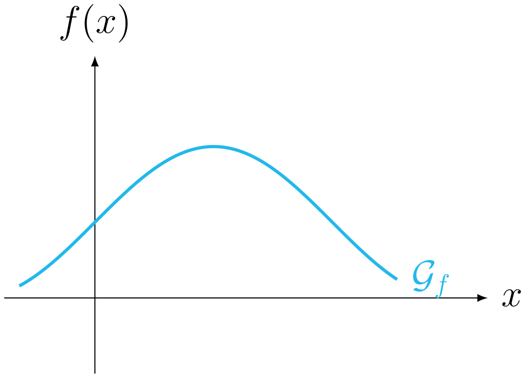


- L'**axe des abscisses** (les x) qui est horizontal et l'**axe des ordonnées** (les y) qui est vertical. Chacun des deux axes perpendiculaires est une droite réelle, c'est-à-dire une droite orientée (représentée par une flèche dont la pointe indique le sens croissant), graduée selon une échelle linéaire (la distance entre deux graduations consécutives est constante et représente toujours un même nombre, appelé l'**échelle** de l'axe).
- Les deux axes se coupent au point $(0, 0)$, appelé l'**origine** du plan cartésien.
- Sur chacun des axes, on indique l'échelle et le nom de la variable (variable indépendante sur l'axe horizontal et variable dépendante sur l'axe vertical).

Définition 2.7

Le **graphe** d'une fonction f est l'ensemble des couples (x, y) tels que $y = f(x)$. Le graphe de L'application f est donné par

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\}$$



- L'ensemble des premières composantes (les valeurs de x) des couples du graphe correspond à $dom(f)$, le **domaine** de f.
- **L'ensemble image** de f, noté $ima(f)$, est l'ensemble des secondes composantes (les valeurs de y).

À chaque couple (x, y) du graphe d'une fonction, on peut associer un point (x, y) du plan cartésien, x étant son **abscisse** et y (l'image de x), son **ordonnée**.

Couple $=$ (Valeur de l'axe horizontal, Valeur de l'axe vertical) $= (x, y)$

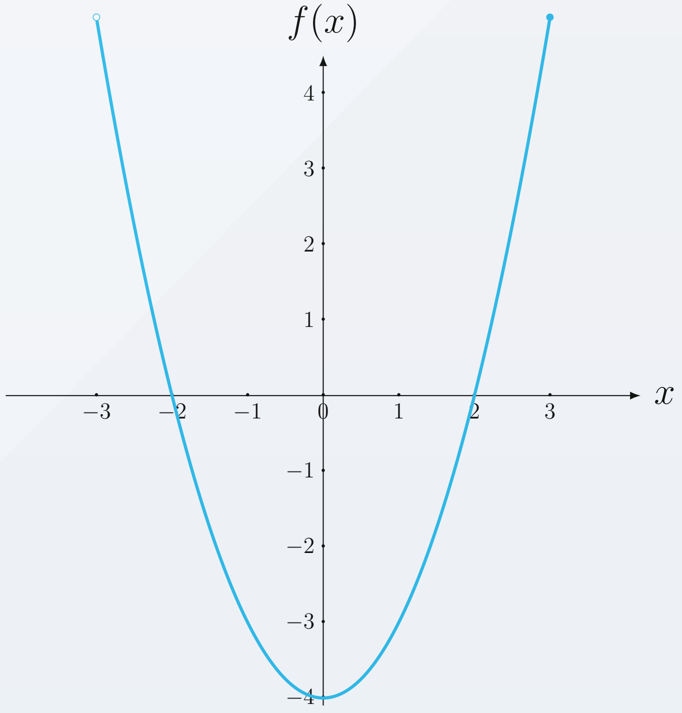
L'ensemble des points correspondant à tous les couples du graphe d'une fonction f constitue le **graphique cartésien** ou **graphique** de la fonction.

Exemple 2.7 :

▷ Soit la fonction $f(x) = x^2 - 4$, où $dom(f) =]-3, 3]$.
Chaque couple de son graphe est de la forme $(x, y) = (x, f(x)) = (x, x^2 - 4)$.
Le graphique cartésien de f est l'ensemble des points dont l'ordonnée est égale au résultat de la soustraction de 4 du carré de l'abscisse.
Le tableau de valeurs ci-dessous donne quelques exemples de points du graphique.

x	-3	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = x^2 - 4$	$\nexists$	0	-3	$\frac{-15}{4}$	-4	$\frac{-15}{4}$	-3	0	5
(x, y)		(-2, 0)	(-1, -3)	$\left(\frac{-1}{2}, \frac{-15}{4}\right)$	(0, -4)	$\left(\frac{1}{2}, \frac{-15}{4}\right)$	(1, -3)	(2, 0)	(3, 5)

On obtient une esquisse du graphique en plaçant ces points dans le plan cartésien et en les reliant de façon approximative. On constate que $f(-a) = f(a)$ pour tout $a \in dom(f)$. Ainsi, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x.

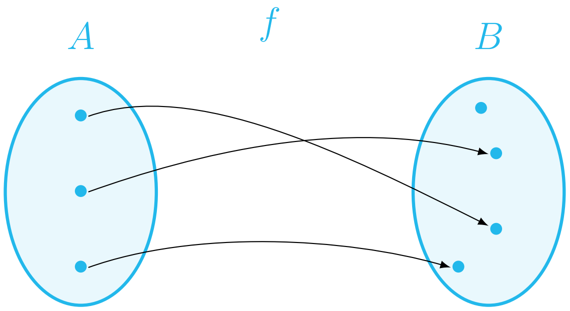


Puisque $dom(f) =]-3, 3]$, un intervalle ouvert à gauche et fermé à droite, on place un point vide en $(-3, 5)$ et un point plein en $(3, 5)$.

Définition 2.8

Une fonction f est **injective** de A dans B, si elle associe chaque $y \in B$ à au plus un $x \in A$.

$$\forall\, x, x' \in A,\ (f(x) = f(x') \implies x = x')$$



De façon équivalente, on dit que f est injective si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- deux valeurs distinctes de x n'ont jamais la même image par f ;

$$\forall\, x, x' \in A,\ (x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'))$$

- les secondes composantes des couples du graphe de f sont toutes différentes.

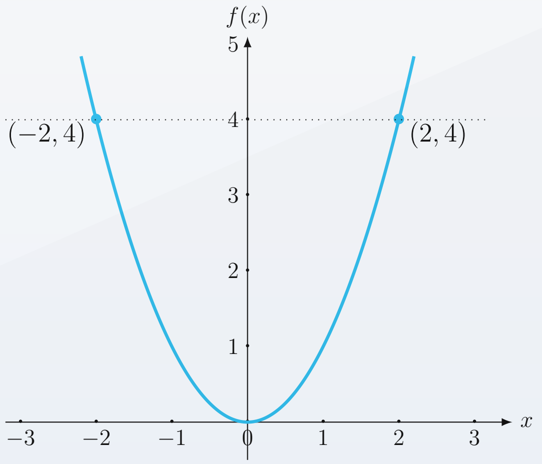
Note : On peut reconnaître le graphique d'une fonction injective au fait que deux points distincts n'ont jamais la même **ordonnée**.

Le test de la droite horizontale

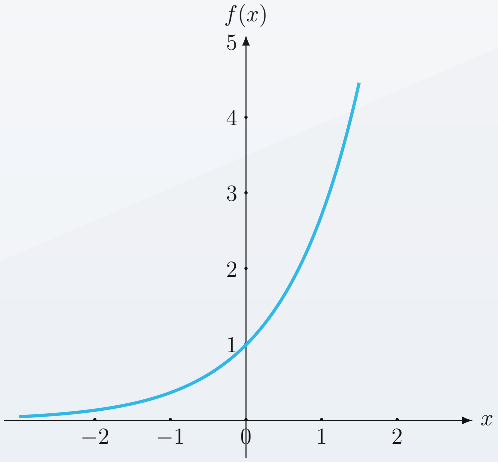
Une fonction est injective si une droite horizontale ne coupe jamais son graphique cartésien en plus d'un point.

Exemple 2.8 :

▷ La fonction f représentée par le graphique ci-contre n'est pas injective.



▷ La fonction f représentée par le graphique ci-contre est injective, puisqu'une droite horizontale ne coupera jamais la courbe en plus d'un point.



Le graphique d'une fonction permet aussi de trouver son domaine et son ensemble image.

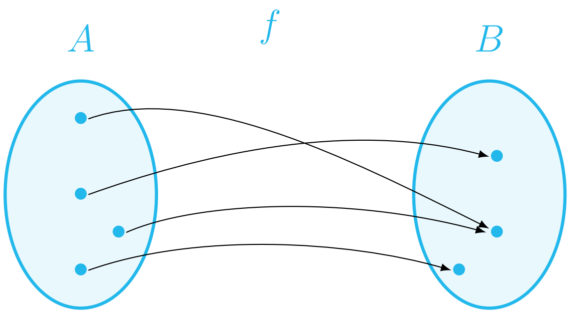
Note : La recherche du domaine et de l'ensemble image à l'aide du graphique

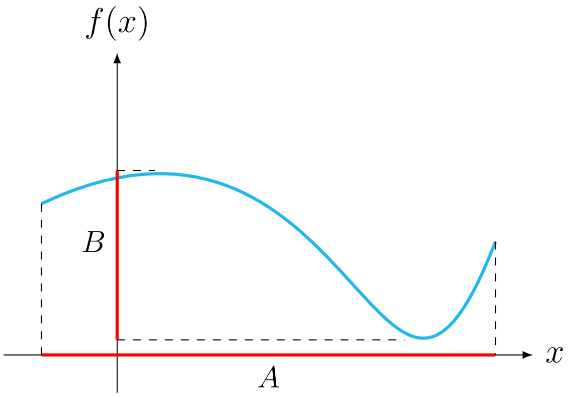
- Le **domaine** d'une fonction est l'ensemble des **abscisses** des points de son graphique. Pour trouver le domaine, on projette verticalement tous les points du graphique sur l'axe horizontal.
- L'**ensemble image** d'une fonction est l'ensemble des **ordonnées** des points de son graphique. Pour trouver l'ensemble image, il suffit de projeter horizontalement tous les points du graphique sur l'axe vertical.

Définition 2.9

Une fonction f est **surjective** de A dans B, si elle associe chaque $y \in B$ à au moins un $x \in A$.

$$\forall\, y \in B, \exists\, x \in A \text{ tel que } y = f(x)$$





Exemple 2.9 :

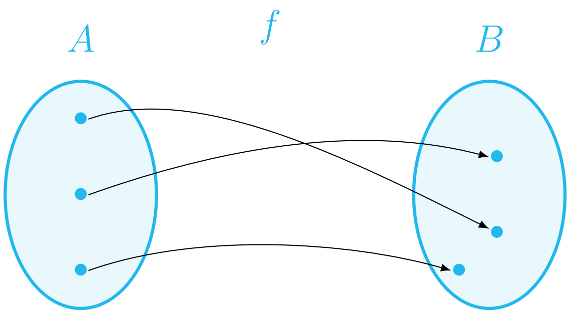
- ▷ Voir les notes de cours de Mohamed.
- ▷ Voir les notes de cours de Mohamed.

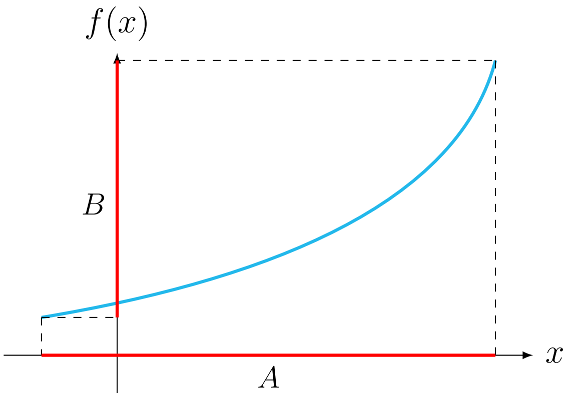
Définition 2.10

Une fonction f est **bijection** de A dans B, si elle est à la fois injective et surjective. C'est à dire pour tout $y \in B$, il **existe un unique** $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$\forall y \in B, \exists!\, x \in A \text{ tel que } y = f(x)$$

L'existence du x vient de la surjectivité et l'unicité de l'injectivité.





Exemple 2.10 :

- ▷ Voir les notes de cours de Mohamed.

▷ Voir les notes de cours de Mohamed.

3 Propriétés de fonction

3.1 - Les points d'intersection d'un graphique avec les axes

Définition 3.1

Un **zéro** d'une fonction f est une valeur de x telle que $f(x) = 0$.

$$z \text{ est le zéro de la fonction } f \iff z \in dom(f) \text{ et } f(z) = 0$$

Pour trouver les zéros d'une fonction f, il suffit de trouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$ qui appartiennent au domaine de f, en utilisant les méthodes appropriées au modèle d'équation.

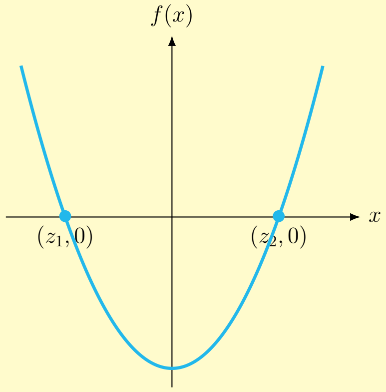
Exemple 3.1 :

▷ Soit la fonction $f(x) = x^2 + 8x - 33$, dont le domaine est $\mathbb{R}$. On peut trouver les zéros de la fonction f en résolvant l'équation $x^2 + 8x - 33 = 0$.
C'est une équation quadratique qu'on peut résoudre par factorisation.

$$\begin{aligned} x^2 + 8x - 33 &= 0 \\ (x + 11)(x - 3) &= 0 && \text{(factorisation d'un trinôme } ax^2 + bx + c\text{)} \\ x + 11 = 0 \text{ ou } x - 3 &= 0 && \text{(règle du produit nul)} \\ x = -11 \text{ ou } x &= 3 \end{aligned}$$

-11 et 3 appartiennent au domaine de la fonction. Ce sont ses deux zéros.

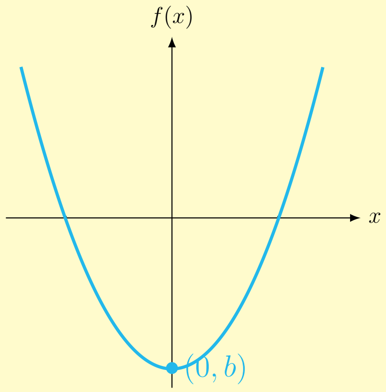
Note : Dans le plan cartésien, tout point situé sur l'axe des x est de la forme $(z, 0)$. Si ce point appartient au graphique d'une fonction f, il est de la forme $(z, f(z))$ et on a alors $f(z) = 0$. Ainsi, z est un zéro de la fonction.



Les points d'intersection du graphique avec l'axe horizontal

- Les points d'intersection du graphique d'une fonction f avec l'axe horizontal sont tous les points du graphique de la forme $(z, 0)$, où z est un zéro de la fonction. L'abscisse z d'un tel point est aussi appelée **abscisse à l'origine**.
- Le nombre de points d'intersection du graphique avec l'axe horizontal est égal au nombre de zéros de la fonction. Si la fonction n'a aucun zéro, son graphique ne coupe pas l'axe horizontal.

Note : Dans le plan cartésien, tout point situé sur l'axe des y est de la forme $(0, b)$. Si un tel point appartient au graphique d'une fonction f, il est de la forme $(0, f(0))$ et on a alors $f(0) = b$.



Le point d'intersection du graphique avec l'axe vertical

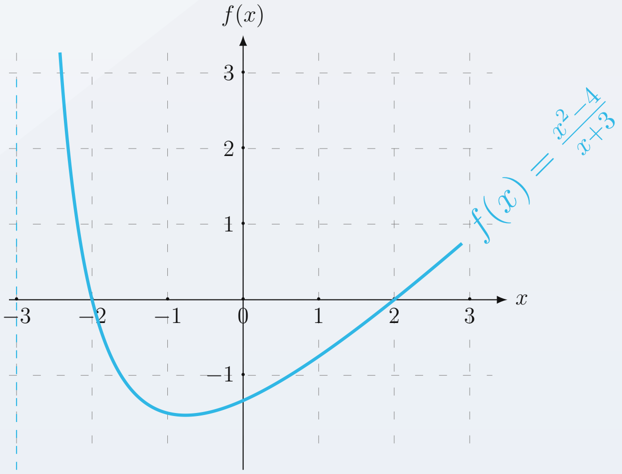
- Si $0 \in dom(f)$, le graphique de la fonction f coupe l'axe vertical au point $(0, b)$, où $b = f(0)$. L'ordonnée b d'un tel point est appelée **ordonnée à l'origine**.
- Ce point d'intersection est unique, car le nombre 0 ne peut avoir qu'une seule image par la fonction f.
- Si $0 \notin dom(f)$, le graphique ne coupe pas l'axe vertical.

Exemple 3.2 :

▷ Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2-4}{x+3}$, dont le domaine est $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$. Cherchons d'abord les zéros de la fonction en résolvant l'équation $f(x) = 0$, ce qui revient à trouver les zéros du numérateur de la fraction.

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ (x+2)(x-2) &= 0 && \text{(factorisation d'une différence de carrés)} \\ x+2 = 0 \text{ ou } x-2 &= 0 && \text{(règle du produit nul)} \\ x = -2 \text{ ou } x &= 2 \end{aligned}$$

Ces deux valeurs appartiennent au domaine de la fonction. Le graphique de f coupe donc l'axe des x aux points $(-2, 0)$ et $(2, 0)$.
Le graphique ci-dessous représente une portion de la courbe de f.
Pour trouver l'ordonnée à l'origine, on calcule $f(0) = \frac{0^2-4}{0+3} = \frac{-4}{3}$. Ainsi, le graphique de f coupe l'axe des y au point $\left(0, \frac{-4}{3}\right)$.



3.2 - Le signe d'une fonction

Dans plusieurs situations, il est utile de connaître les valeurs de x dont l'image $y = f(x)$ est positive ou négative. Par exemple, si une fonction représente le revenu net d'une entreprise, le signe de chaque valeur de y indique s'il s'agit d'un profit ou d'une perte.

Faire l'**étude du signe** d'une fonction consiste à trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x) < 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) > 0$.

L'étude du signe d'une fonction à l'aide de son graphique

Une fonction est :

- **négative** sur les intervalles où son graphique est situé **au-dessous de l'axe des** x.
- **nulle** aux abscisses des points situés **sur l'axe des** x, c'est-à-dire les zéros.
- **positive** sur les intervalles où son graphique est situé **au-dessus de l'axe des**

x.

Les seuls points où le graphique peut traverser l'axe des x sont ceux qui correspondent aux zéros de la fonction. La fonction peut aussi changer de signe de part et d'autre d'une valeur de x (appartenant ou non au domaine) lorsqu'il y a une **discontinuité**, une interruption dans la ligne du graphique, par exemple un «trou» ou un «saut». Les zéros et les discontinuités sont des **valeurs critiques** de la fonction.

Attention !

Les valeurs critiques sont les seuls endroits où la fonction **peut** changer de signe. Toutefois, le signe de la fonction n'est pas toujours différent de part et d'autre d'une valeur critique.

Note : La présentation de l'étude du signe dans un tableau

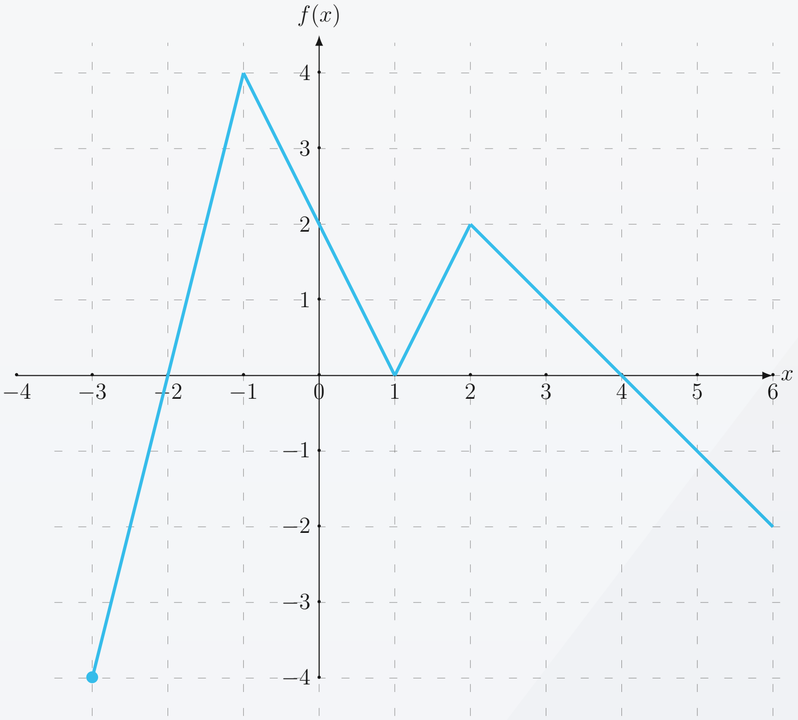
- Sur la première ligne, on inscrit les extrémités du domaine (ou le symbole de l'infini avec son signe) et les valeurs critiques de la fonction.
- Sur la deuxième ligne, on inscrit 0 pour un zéro et $\nexists$ pour les valeurs n'appartenant pas au domaine, puis le signe de la fonction sur chaque intervalle inclus dans le domaine, selon que le graphique est au-dessus ou au-dessous de l'axe des x.

Exemple 3.3 :

▷ Soit la fonction f représentée par le graphique ci-dessous, avec $dom(f) = [-3, +\infty[$.

Il n'y a aucune discontinuité, alors les seuls endroits où la fonction pourrait changer de signe sont ses zéros.

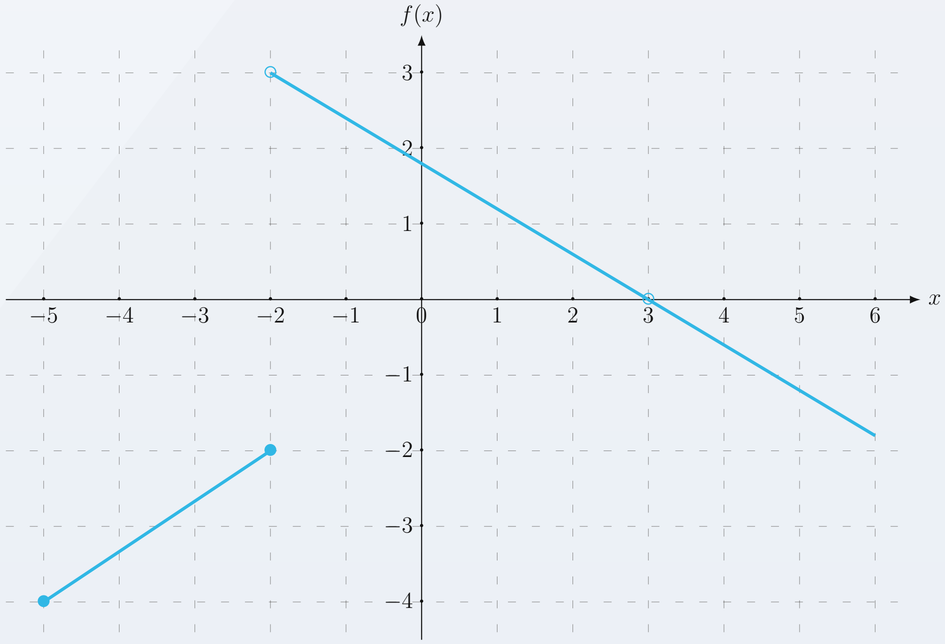
$$f(x) < 0 \text{ si } x \in [-3, -2[\cup]4, +\infty[$$
$$f(x) = 0 \text{ si } x \in \{-2, 1, 4\}$$
$$f(x) > 0 \text{ si } x \in]-2, 1[\cup]1, 4[$$



Dans le cas présent, la fonction change de signe en passant par les zéros $x = -2$ et $x = 4$, mais elle reste positive avant et après le zéro $x = 1$.

Valeur de x	-3		-2		1		4	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

▷ Soit la fonction f représentée par le graphique ci-contre, avec $dom(f) = [-5, 3[\cup[3, +\infty[$.



La fonction n'a aucun zéro, mais elle comporte deux discontinuités.

$$f(x) < 0 \text{ si } x \in [-5,-2] \cup]3,+\infty[$$
$$f(x) > 0 \text{ si } x \in]-2,3[$$

Valeur de x	-5		-2		3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\nexists$	$-$

L'étude du signe d'une fonction à l'aide de sa règle de correspondance

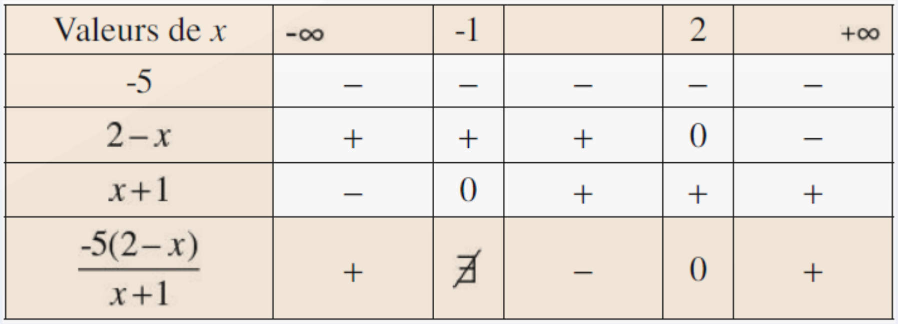
On peut faire l'étude du signe d'une fonction f en déterminant son domaine et en résolvant l'équation $f(x) = 0$ et les inéquations $f(x) < 0$ et $f(x) > 0$.

On choisit les méthodes de résolution de l'équation et des inéquations selon le modèle de fonction, c'est-à-dire selon la forme de l'expression $f(x)$.

L'union des trois ensembles sur lesquels une fonction est respectivement négative, nulle et positive est toujours égale au domaine de la fonction.

Exemple 3.4 :

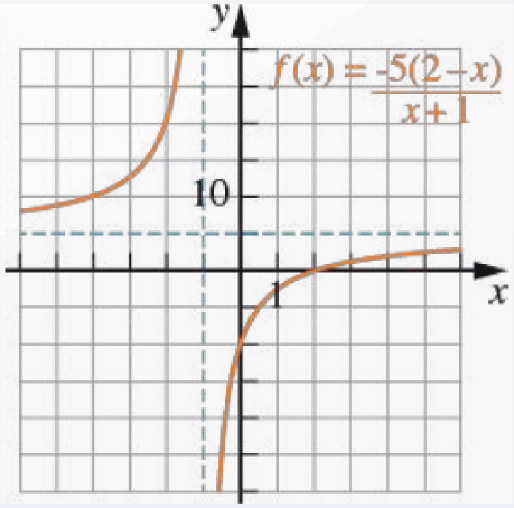
▷ Soit la fonction $f(x) = \frac{-5(2-x)}{x+1}$, où $dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
La fonction est définie par une fraction rationnelle.
Le seul zéro de la fonction est la valeur qui annule le numérateur, soit 2.
On inscrit ce zéro sur la première ligne du tableau, de même que la valeur -1, qui n'appartient pas au domaine. Ce sont les valeurs critiques, soit celles où on pourrait observer un changement de signe.
On construit le tableau en suivant les étapes présentées à l'exemple précédent, sans oublier qu'on ne peut pas diviser par 0.



Valeurs de x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
-5	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-5(2-x)}{x+1}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$$\begin{aligned} f(x) &< 0 \text{ si } x \in]-1, 2[\\ f(x) &= 0 \text{ si } x = 2 \\ f(x) &> 0 \text{ si } x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[\end{aligned}$$

On peut alors esquisser le graphique de la fonction en utilisant ces résultats. Un tableau de valeurs permettra une meilleure précision.

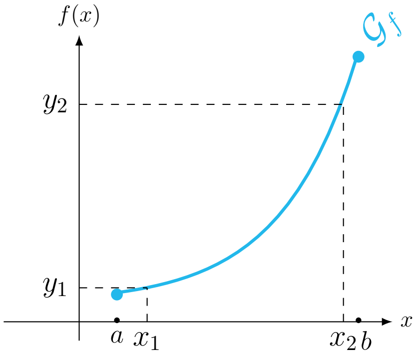


• 3.3 - Croissance, décroissance et extremums d'une fonction

Définition 3.2

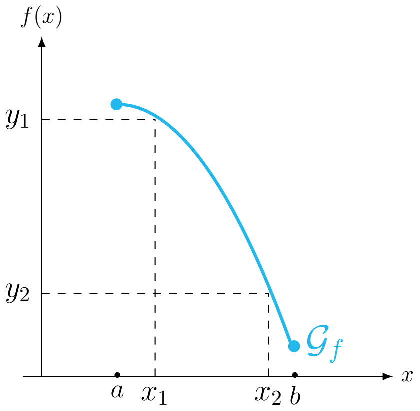
- Une fonction f est **croissante** sur un intervalle $I \subseteq dom(f)$ si, pour toutes les valeurs x_1 et x_2 dans cet intervalle, $x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.

  Dans cet intervalle, les valeurs de y augmentent lorsque celles de x augmentent et le graphique est une courbe ascendante.



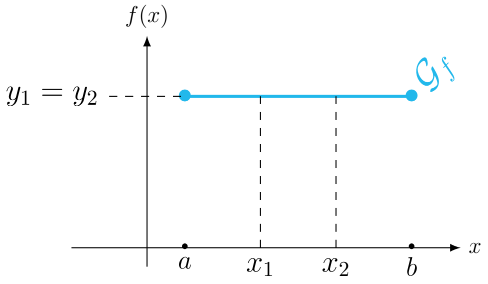
- Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle $I \subseteq dom(f)$ si, pour toutes les valeurs x_1 et x_2 dans cet intervalle, $x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.

Dans cet intervalle, les valeurs de y diminuent lorsque celles de x augmentent et le graphique est une courbe descendante.



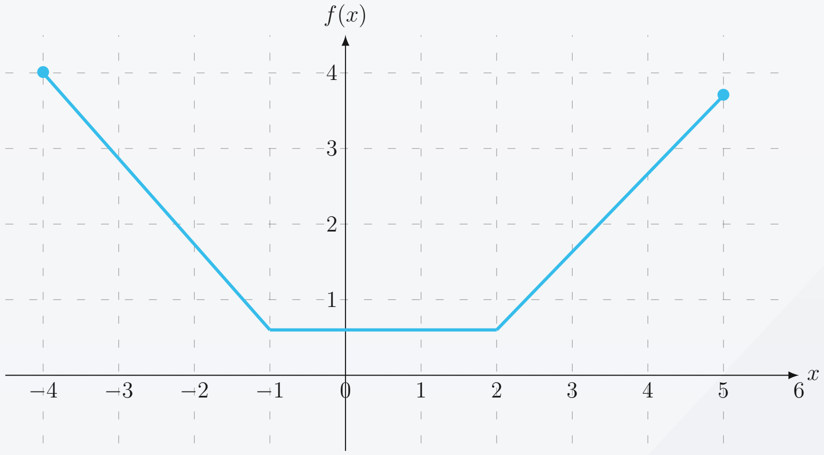
- Une fonction f est **constante** sur un intervalle $I \subseteq dom(f)$ si, pour toutes les valeurs x_1 et x_2 dans cet intervalle, $f(x_1) = f(x_2)$.

Dans cet intervalle, les valeurs de y sont égales pour toutes les valeurs de x et le graphique est une droite horizontale.



Exemple 3.5 :

▷ Soit la fonction f représentée par le graphique ci-contre.



f est décroissante sur $[-4, -1[$.
f est constante sur $[-1, 2]$.
f est croissante sur $[2, 5]$.

▷ Soit la fonction f représentée par le graphique ci-contre.
f est croissante sur $]-\infty, -3]$ et sur $]2, +\infty[$.
Elle est décroissante sur $[-3, -1]$.

Attention !

De façon générale, lorsqu'une fonction est croissante (ou décroissante) sur plusieurs intervalles disjoints, on ne peut pas utiliser le symbole d'union entre ces intervalles. Dans l'exemple précédent, la fonction f est croissante sur $]-\infty, -3]$ et elle est croissante sur

$]2,+\infty]$.
Par contre, elle n'est pas croissante sur l'**ensemble** $]-\infty,-3]\cup]2,+\infty]$, puisqu'on peut trouver dans cet ensemble des valeurs x_1 et x_2 telles que $x_1 \leq x_2$, mais pour lesquelles on n'a pas $f(x_1) \leq f(x_2)$. Par exemple, si $x_1 = -4$ et $x_2 = 3$, alors $f(x_1) = 3$ et $f(x_2) = 2$. On a bien $x_1 \leq x_2$, mais dans ce cas, $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Définition 3.3

- Le **maximum** (ou **maximum absolu**) d'une fonction f, désigné par $\max(f)$, est la plus grande valeur atteinte par $f(x)$.

$$\max(f) \geq f(x) \text{ pour tout } x \in dom(f)$$

- Le **minimum** (ou **minimum absolu**) d'une fonction f, désigné par $\min(f)$, est la plus grande valeur atteinte par $f(x)$.

$$\min(f) \leq f(x) \text{ pour tout } x \in dom(f)$$

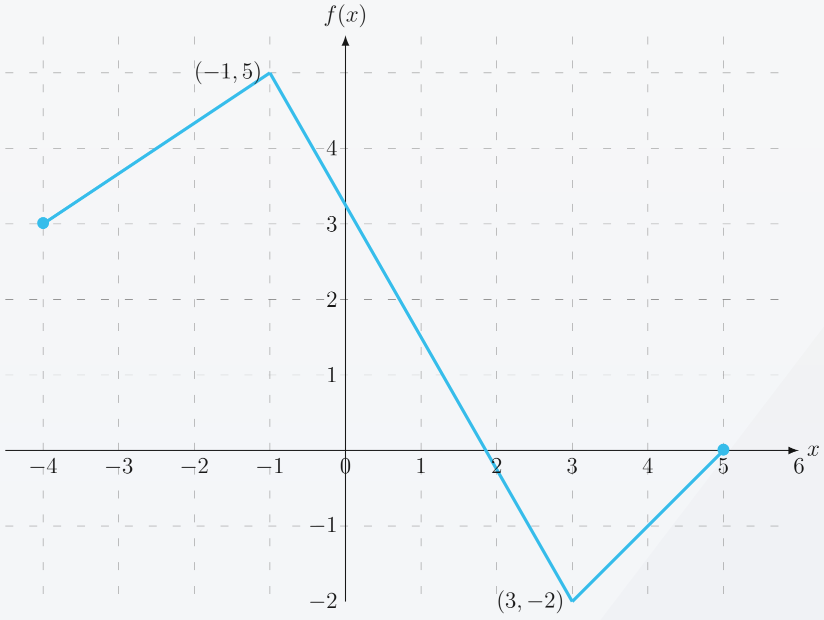
- On appelle **extremum** d'une fonction une valeur qui est soit son maximum, soit son minimum.

Chaque extremum doit être l'ordonnée d'au moins un point du graphique. C'est donc un nombre réel.

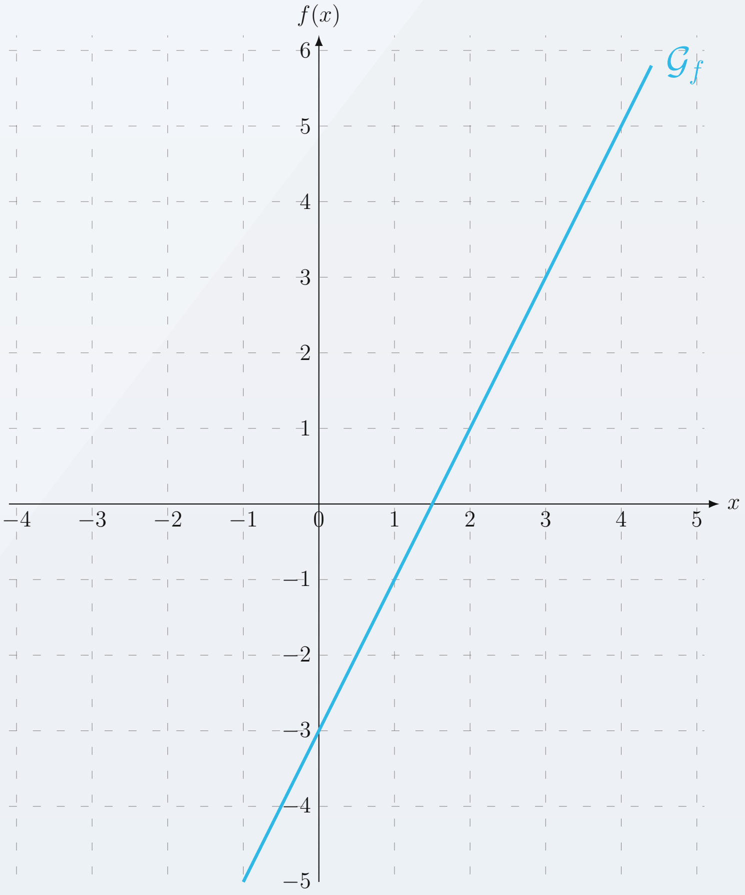
Exemple 3.6 :

▷ Soit la fonction f représentée par le graphique ci-contre. Son domaine est $dom(f) = [-4,5]$.

- ⋆ Son maximum est $\max(f) = 5$. La fonction atteint ce maximum absolu lorsque $x = -1$.
- ⋆ Le maximum est le nombre 5. Le point $(-1,5)$, quant à lui, est le point où la fonction atteint ce maximum, qu'on peut appeler «**point de maximum**».
- ⋆ Son minimum est $\min(f) = -2$. La fonction atteint ce minimum absolu lorsque $x = 3$.
- ⋆ Le minimum est le nombre -2. Le point $(3,-2)$ est le point de minimum. $y = f(x)$ prend toutes les valeurs entre -2 et 5.
- ⋆ Ainsi, $ima(f) = [-2,5]$.



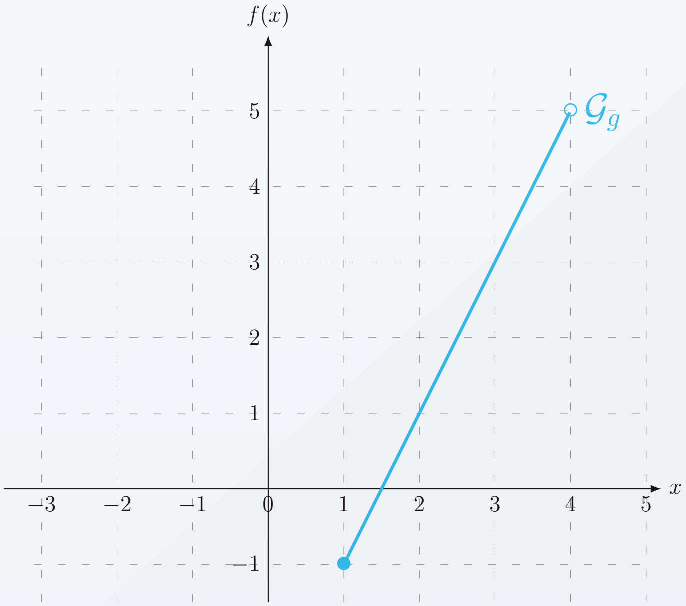
▷ Soit la fonction $f(x) = 2x - 3$ représentée par le graphique ci-contre, où $dom(f) = \mathbb{R}$.



⋆ La fonction n'a ni minimum ni maximum, puisqu'elle est représentée par une droite oblique.

- ⋆ Ainsi, $Ima(f) = \mathbb{R}$.

▷ Soit $g(x) = 2x - 3$, où $dom(g) = [1, 4[$. La fonction g et la fonction f de l'exemple précédent ont la même règle de correspondance, mais leur domaine est différent.



- ⋆ Puisque la fonction g est définie sur un intervalle fermé à gauche et ouvert à droite, on la représente par un segment de la droite précédente.

$$\min(g) = -1, \text{ atteint lorsque } x = 1$$

- ⋆ La fonction g n'a pas de maximum, puisque $g(4)$ n'est pas défini. Il n'existe pas de valeur de $g(x)$ qui soit supérieure ou égale à toutes les autres.

$$ima(g) = [-1, 5[$$

Lorsque le graphique d'une fonction est alternativement croissant et décroissant, il peut présenter un certain nombre de « sommets ». Leur ordonnée est un maximum (ou un minimum) si on se limite à un intervalle autour de l'abscisse de ce sommet. On l'appelle «maximum (ou minimum) relatif».

Définition 3.4

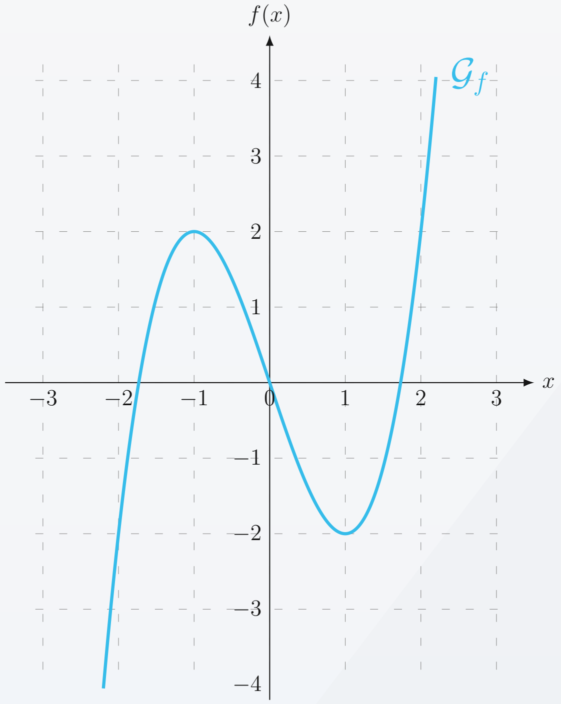
L'ordonnée $f(a)$ d'un point du graphique est un **maximum relatif** (ou **minimum relatif**) si c'est la **plus grande** (ou la **plus petite**) valeur de $y = f(x)$ pour les valeurs de x comprises dans un intervalle ouvert autour de a.

Tout maximum (minimum) absolu est aussi un maximum (minimum) relatif.

Les extrémités fermées d'un graphique sont également des points où on peut observer un extremum relatif.

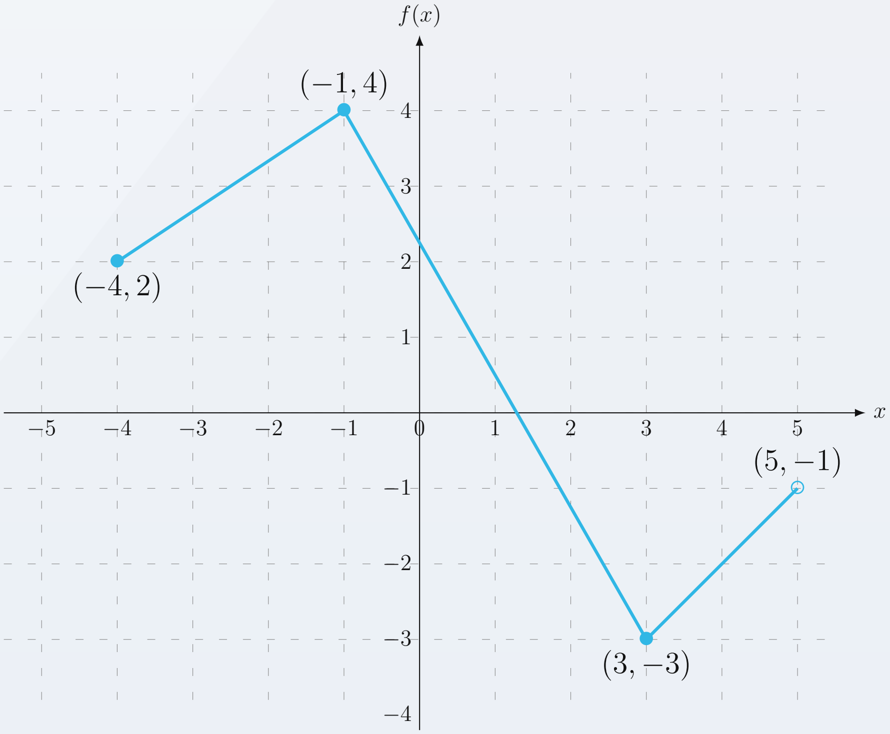
Exemple 3.7 :

- ▷ Soit la fonction f représentée par le graphique ci-dessous.



  - ⋆ Cette fonction n'a ni minimum absolu ni maximum absolu.
  - ⋆ Elle possède toutefois un maximum relatif 2 au point $(-1, 2)$ et un minimum relatif -2 au point $(1, -2)$.

- ▷ Soit la fonction f représentée par le graphique ci-dessous, avec $dom(f) = [-4, 5[$.



Cette fonction possède deux minimums relatifs.

- ⋆ 2 est un minimum relatif, atteint au point $(-4, 2)$, l'extrémité gauche du graphique.
- ⋆ -3 est également un minimum relatif, atteint au point $(3, -3)$. C'est aussi le minimum absolu et on a alors $\min(f) = -3$.
- ⋆ Au point $(-1, 4)$, le maximum relatif 4 est aussi le maximum absolu et alors $\max(f) = 4$.
- ⋆ On n'a pas de maximum relatif au point $(5, -1)$, puisque ce point n'appartient pas au graphique $(5 \notin dom(f))$.

• 3.4 - Le tableau de variation d'une fonction

On peut regrouper tous les renseignements sur le domaine d'une fonction, son signe, ses intervalles de croissance ou de décroissance et ses extremums dans un tableau appelé **tableau de variation** de la fonction.

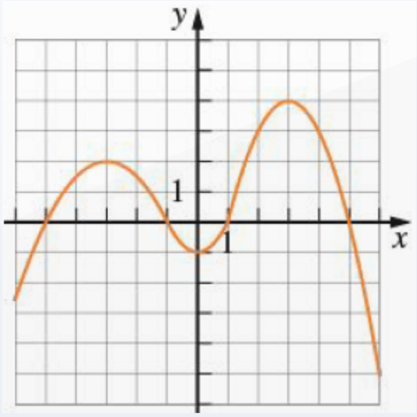
Lorsqu'on obtient ces renseignements à partir d'un graphique, le tableau facilite l'interprétation des valeurs critiques et des extremums de la fonction.

Lorsqu'on obtient ces renseignements à partir de la règle de correspondance de la fonction, le tableau permet de tracer facilement une esquisse du graphique.

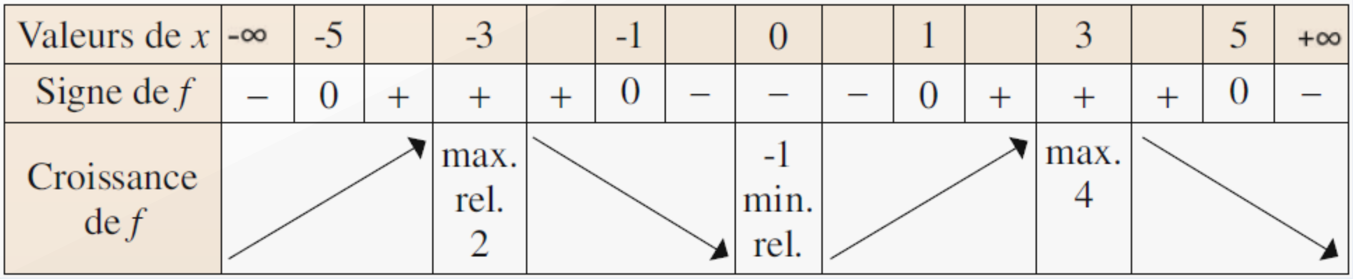
L'algèbre élémentaire ne permet pas toujours de trouver les intervalles de croissance ou de décroissance et les extremums d'une fonction. Le calcul différentiel, qui fait l'objet d'autres cours de niveau collégial, fournit des outils supplémentaires. Le tableau de variation deviendra alors un élément essentiel à l'analyse d'une fonction.

Exemple 3.8 :

▷ Soit la fonction f représentée par le graphique ci-dessous.



1. Sur la première ligne, on inscrit toutes les valeurs pertinentes de x : extrémités du domaine, points où la fonction n'est pas définie, zéros et extremums s'il y a lieu.
2. Sur la deuxième ligne, on inscrit les résultats de l'étude du signe de la fonction.
3. Sur la troisième ligne, on inscrit les résultats de l'analyse de croissance en utilisant des flèches ascendantes pour la croissance et des flèches descendantes pour la décroissance, puis en précisant les extremums.



Valeurs de x	-∞	-5		-3		-1		0		1		3		5	+∞
Signe de f	–	0	+	+	+	0	–	–	–	0	+	+	+	0	–
Croissance de f	↗			max. rel. 2	↘			-1 min. rel.	↗			max. 4	↘		

L'encadré ci-dessous résume les étapes essentielles de l'analyse d'une fonction.

Note : L'analyse d'une fonction

1. Déterminer le domaine de la fonction.
2. Calculer l'ordonnée à l'origine et en déduire le point d'intersection du graphique avec l'axe des y.
3. Trouver les zéros de la fonction et en déduire les points d'intersection du graphique avec l'axe des x.
4. Faire l'étude du signe de la fonction : préciser les intervalles sur lesquels la fonction est positive, négative ou nulle.
5. Faire l'étude de croissance de la fonction : préciser les intervalles sur lesquels la fonction est croissante, décroissante ou constante.
6. Préciser les extremums, absolus ou relatifs, et en déduire l'ensemble image de la fonction.
7. Regrouper toutes les informations précédentes dans un tableau de variation.
8. Tracer une esquisse du graphique.

L'ordre des étapes peut varier selon les éléments dont on dispose. Une première esquisse du graphique, après quelques étapes, peut aider à trouver certaines caractéristiques. D'autres étapes, propres à certaines fonctions particulières, permettront une analyse plus approfondie, comme nous le verrons dans les prochains chapitres.

4 Opérations sur les fonctions

• 4.1 - Les opérations élémentaires sur les fonctions

Chaque image $y = f(x)$ d'un nombre réel x est aussi un nombre réel. On peut donc effectuer des opérations élémentaires sur ces valeurs de y.

Si x appartient au domaine d'une fonction f et au domaine d'une fonction g, alors $f(x)$ et $g(x)$ sont des nombres réels sur lesquels on peut aussi effectuer des opérations.

Exemple 4.1 :

▷ Soit $f(x) = 4x - 1$ et $g(x) = x^2$, avec $dom(f) = \mathbb{R}$ et $dom(g) = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 3 &\in dom(f) \text{ et } f(3) = 4(3) - 1 = 11 \\ 3 &\in dom(g) \text{ et } g(3) = 3^2 = 9 \end{aligned}$$

Pour $x = 3$, on peut effectuer les opérations suivantes.

$$\begin{aligned} f(3) + g(3) &= 11 + 9 = 20 \\ f(3) - g(3) &= 11 - 9 = 2 \\ (f(3))(g(3)) &= (11)(9) = 99 \\ \frac{f(3)}{g(3)} &= \frac{11}{9} \end{aligned}$$

De façon générale :

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= 4x - 1 + x^2 \\ f(x) - g(x) &= 4x - 1 - x^2 \\ (f(x))(g(x)) &= (4x - 1)(x^2) \\ \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{4x-1}{x^2}, \text{ si } x \neq 0 \end{aligned}$$

En évaluant les quatre expressions algébriques précédentes pour $x = 3$, on obtient encore 20, 2, 99 et $\frac{11}{9}$ respectivement.

Le résultat de telles opérations sur les expressions qui constituent les règles de correspondance de deux ou plusieurs fonctions permet, pour chacune des opérations, de définir une nouvelle fonction.

Définition 4.1

Si f et g sont deux fonctions, on obtient de nouvelles fonctions en effectuant des opérations élémentaires sur les expressions qui constituent leurs règles de correspondance.

Fonction somme

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),\ \text{où } dom(f+g) = dom(f)\cap dom(g)$$

Fonction différence

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x),\ \text{où } dom(f-g) = dom(f)\cap dom(g)$$

Fonction produit

$$(fg)(x) = (f(x))(g(x)),\ \text{où } dom(fg) = dom(f)\cap dom(g)$$

Fonction quotient

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ \text{où } dom\left(\frac{f}{g}\right) = \Big(dom(f)\cap dom(g)\Big)\backslash\Big\{x\in dom(g)\,|\,g(x)=0\Big\}$$

Exemple 4.2 :

- ▷ Soit $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ et $g(x) = 3x^2$. On a $dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $dom(g) = \mathbb{R}$
  - ⋆ $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \frac{x+2}{x-1} + 3x^2 = \frac{x+2+3x^2(x-1)}{x-1} = \frac{3x^3-3x^2+x+2}{x-1}$ et donc $dom(f+g) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
  - ⋆ $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \frac{x+2}{x-1} - 3x^2 = \frac{x+2-3x^2(x-1)}{x-1} = \frac{-3x^3+3x^2+x+2}{x-1}$ et donc $dom(f-g) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
  - ⋆ $(fg)(x) = (f(x))(g(x)) = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)(3x^2) = \left(\frac{3x^2(x+2)}{x-1}\right)$ et donc $dom(fg) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
  - ⋆ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x+2}{x-1}}{3x^2} = \frac{x+2}{x-1}\times\frac{1}{3x^2} = \frac{x+2}{3x^2(x-1)}$ et donc $dom\left(\frac{f}{g}\right) = (\mathbb{R}\backslash\{1\})\setminus\{x\in\mathbb{R}\mid 3x^2\neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.
  - ⋆ $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{3x^2}{\frac{x+2}{x-1}} = 3x^2\times\frac{x-1}{x+2} = \frac{3x^2(x-1)}{x+2}$ et donc $dom\left(\frac{g}{f}\right) = (\mathbb{R}\backslash\{1\})\setminus\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{x+2}{x-1}\neq 0\right\} = \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$.

• 4.2 - La composée de fonctions

Une fonction est souvent le résultat de l'application successive de deux ou de plusieurs fonctions plus simples.

Exemple 4.3 :

▷ Soit la fonction $h(x) = (x+3)^4$.
Pour calculer $(x+3)^4$, il faut d'abord ajouter 3 à x, puis élever le résultat à la quatrième puissance, selon l'ordre de priorité des opérations (voir le chapitre 1).

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & x+3 \arrow[r, "g"] & (x+3)^4 \end{tikzcd}$$

On peut décomposer $h(x) = (x+3)^4$ en deux fonctions simples :

- ⋆ $f(x) = x+3$ est la fonction par laquelle on ajoute 3 à un nombre réel ;
- ⋆ $g(x) = x^4$ est la fonction par laquelle on élève un nombre réel à la quatrième puissance.

On peut évaluer $h(2)$ en calculant directement $h(2) = (2+3)^4 = 5^4 = 625$.
On pourrait aussi calculer d'abord $f(2) = 2+3 = 5$, puis $g(5) = 5^4 = 625$.
Ainsi, $h(2) = g(f(2))$.

Définition 4.2

La composée $g \circ f$ (lire «g rond f») de la fonction g et de la fonction f est donnée par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

On peut représenter l'opération de composition par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) \arrow[r, "g"] & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Exemple 4.4 :

▷ Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x+1$.
On trouve l'expression de $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ en remplaçant la variable x par

$f(x)$ dans la règle de correspondance de g.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 3x^2 + 1$$

On peut alors évaluer la fonction $g \circ f$ pour une valeur donnée de x, par exemple $x = 2$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= 3x^2 + 1 \\ (g \circ f)(2) &= 3(2^2) + 1 = 13\end{aligned}$$

On obtient le même résultat en utilisant directement la définition de la composition.

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2^2) = g(4) = 3(4) + 1 = 13$$

Pour trouver l'expression de $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, on remplace la variable x par $g(x)$ dans la règle de correspondance de f.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = (3x + 1)^2$$

Attention !

L'opération de composition n'est pas commutative, c'est-à-dire que, de façon générale

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Pour que $g(f(x))$ existe, il faut que x ait une image par la fonction f et que $f(x)$ ait une image par la fonction g.

Le domaine d'une fonction composée

$$dom(g \circ f) = \Big\{ x \in \mathbb{R} \,|\, x \in dom(f) \text{ et } f(x) \in dom(g) \Big\}$$

Attention !

La règle de correspondance d'une fonction composée ne suffit pas pour déterminer son domaine.

Exemple 4.5 :

▷ Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = x^2$.
$dom(f) = \{x \mid x + 1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$, car on ne peut pas extraire la racine carrée d'un nombre négatif.

$dom(g) = \mathbb{R}$, car il n'y a aucune restriction.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = x+1$$

Même si $x+1$ est défini pour tout nombre réel, le domaine de $g \circ f$ n'est pas $\mathbb{R}$. En effet, pour évaluer $(g \circ f)(x)$, il faut d'abord calculer $f(x)$, qui n'est défini que si $x \geq -1$. Par exemple, $(g \circ f)(-3) = g(f(-3)) = g(\sqrt{-3+1}) = g(\sqrt{-2})$, qui n'est pas défini.
Les valeurs appartenant au domaine de $g \circ f$ doivent respecter les deux conditions :

- ⋆ $x \in dom(f)$, c'est à dire $x \geq -1$.
- ⋆ $f(x) \in dom(g)$, c'est à dire $\sqrt{x+1} \in \mathbb{R}$, ce qui est vrai pour tout $x \geq -1$.

Donc $dom(g \circ f) = \{x \mid x \geq -1\} = [-1, +\infty[$.
Par un raisonnement semblable, on trouverait $dom(f \circ g) = \mathbb{R}$.

▷ Soit $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ et $g(x) = \frac{1}{x-5}$.
$dom(f) = \mathbb{R}\backslash \left\{\frac{1}{3}\right\}$, car le dénominateur doit être différent de 0.
$dom(f) = \mathbb{R}\backslash \{5\}$ pour la même raison.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(\frac{2}{3x-1}) \\ &= \frac{1}{\frac{2}{3x-1} - 5} = \frac{1}{\frac{2-5(3x-1)}{3x-1}} = \frac{1}{\frac{7-15x}{3x-1}} \\ &= \frac{3x-1}{7-15x}\end{aligned}$$

Les valeurs appartenant au domaine de $g \circ f$ doivent respecter les deux conditions :

- ⋆ $x \in dom(f)$, c'est à dire $x \neq \frac{1}{3}$.
- ⋆ $f(x) \in dom(g)$, c'est à dire $f(x) \neq 5$.

On trouve la ou les valeurs à exclure en résolvant l'équation suivante.

$$\begin{aligned}\frac{2}{3x-1} &= 5 \\ (3x-1)\frac{2}{3x-1} &= 5(3x-1) \\ 2 &= 15x - 5 \\ -15x &= -7 \\ x &= \frac{7}{15}, \text{ qu'on doit exclure du domaine.}\end{aligned}$$

donc, $dom(g \circ f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{3} \text{ et } x \neq \frac{7}{15}\right\} = \mathbb{R}\backslash \left\{\frac{1}{3}, \frac{7}{15}\right\}$.

5 Types de fonctions

5.1 - La fonction constante

Définition 5.1

Une **fonction constante** est une fonction dont la règle de correspondance est donnée par :

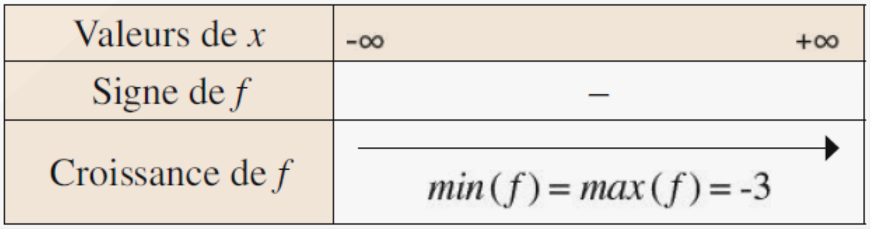
$$y = f(x) = b, \text{ où } b \text{ est une constante réelle.}$$

C'est une fonction polynomiale de degré 0 si $b \neq 0$ ou de degré non défini si $b = 0$.

Exemple 5.1 :

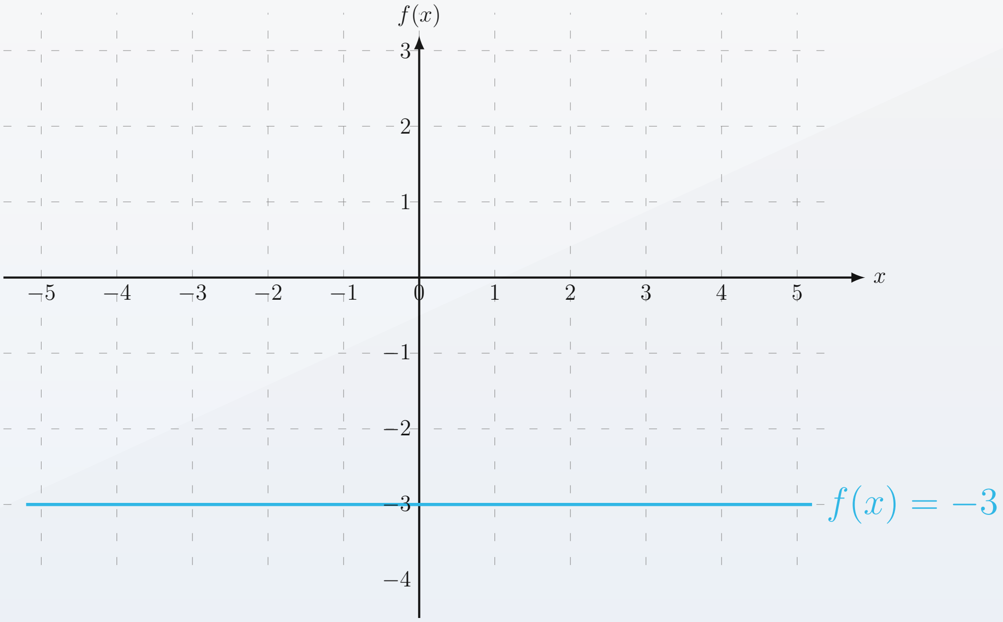
▷ La fonction $f(x) = -3$ est une fonction constante. Faisons-en l'analyse complète.

- ⋆ $dom(f) = \mathbb{R}$
- ⋆ L'ordonnée à l'origine est $f(0) = -3$: le graphique coupe l'axe des y au point $(0, -3)$.
- ⋆ Cette fonction ne possède aucun zéro, puisque l'équation $f(x) = 0$ devient $-3 = 0$, une égalité toujours fausse. Le graphique ne coupe donc pas l'axe des x.
- ⋆ Puisque $f(x) = -3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction est négative sur tout son domaine $\mathbb{R}$.
- ⋆ Puisque y vaut toujours -3, le graphe de la fonction est formé des couples de la forme $(x, -3)$, où $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que son graphique est une droite horizontale. La fonction n'est ni croissante ni décroissante.
- ⋆ $\min(f) = -3$ et $\max(f) = -3$, atteints en tout point. On en déduit que $ima(f) = \{-3\}$
- ⋆ Le tableau de variation est le suivant.



Valeurs de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de f	$-$
Croissance de f	$\longrightarrow$ $min(f) = max(f) = -3$

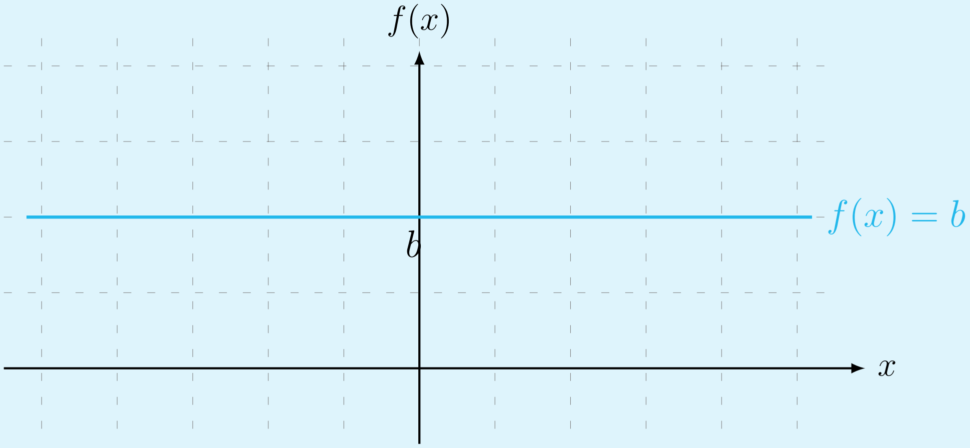
- ⋆ Le graphique de f est la droite horizontale suivante.



Les caractéristiques d'une fonction constante

Une **fonction constante** $f(x) = b$ possède les caractéristiques suivantes :

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- Le graphique cartésien est une droite horizontale dont tous les points sont de la forme (x, b).



- L'ordonnée à l'origine est b : la droite coupe l'axe des y au point $(0, b)$.
- Si $b \neq 0$, la fonction n'a aucun zéro, et son graphique ne coupe pas l'axe des x. Si $b = 0$, tous les nombres réels sont des zéros, et la droite se confond avec l'axe des x.
- La fonction est toujours négative si $b < 0$, toujours nulle si $b = 0$ et toujours positive si $b > 0$.

- La fonction n'est jamais croissante ni décroissante : elle est constante sur tout son domaine.
- $\max(f) = \min(f) = b$
- $ima(f) = \{b\}$

5.2 - La fonction affine

Définition 5.2

Une **fonction affine** est une fonction polynomiale du premier degré dont la règle de correspondance est donnée par :

$$y = f(x) = ax + b, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes réelles et } a \neq 0.$$

Dans le cas où $b = 0$, cette fonction polynomiale du premier degré est appelé une **fonction linéaire** et est donnée par :

$$y = f(x) = ax, \text{ où } a \text{ est une constante réelle et } a \neq 0.$$

Note : Soit une fonction affine $y = f(x) = ax + b$, où $a \neq 0$.

- La constante a est la **pente** de la droite qui représente la fonction.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{variation de } y}{\text{variation de } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ si } x_1 \neq x_2$$

a est aussi appelée le **taux de variation moyen** de y par rapport à x.

- La constante b est l'**ordonnée à l'origine** de la droite qui représente la fonction.

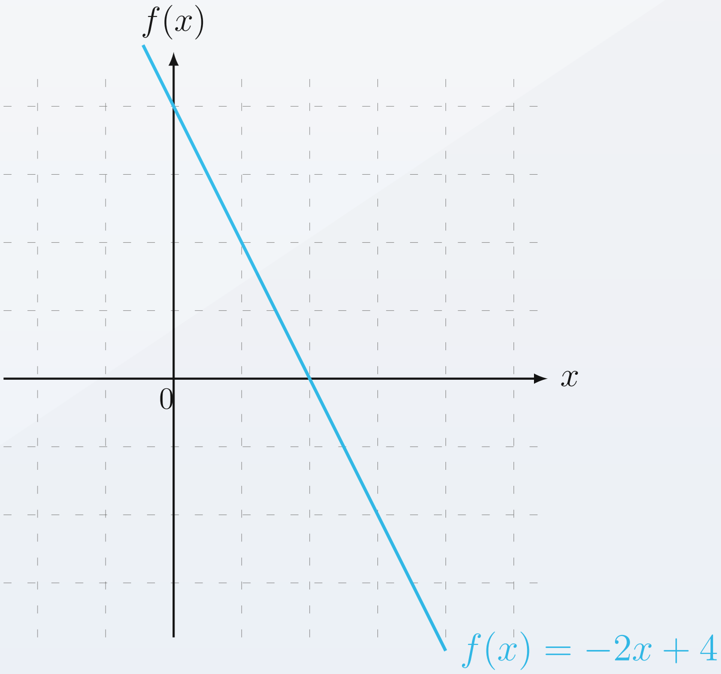
Exemple 5.2 :

▷ Soit la fonction $f(x) = -2x + 4$.

- ⋆ L'ordonnée à l'origine $b = 4$ indique que la droite qui représente cette fonction coupe l'axe des y au point $(0, 4)$.
- ⋆ La pente $a = -2$ signifie que y diminue de 2 lorsque x augmente de 1. Il s'agit d'une variation négative.
- ⋆ Ces valeurs de a et de b permettent de tracer le graphique de la fonction. À partir du point $(0, 4)$, on se déplace de 1 unité vers la droite (l'accroissement

de x) et de 2 unités vers le bas (la diminution correspondante de y). On atteint ainsi le point $(1, 2)$, appartenant lui aussi à la droite.

⋆ La droite $f(x) = -2x + 4$ passe par ces deux points, qui suffisent pour tracer la droite.



L'exemple qui suit illustre l'analyse complète d'une fonction affine.

Exemple 5.3 :

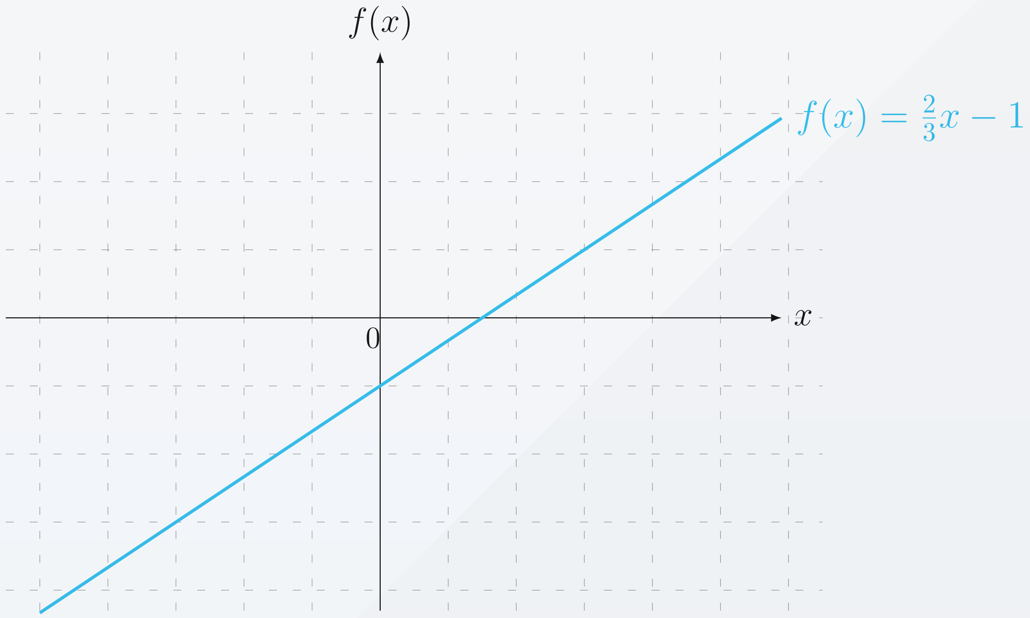
▷ $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$ est une fonction affine, où $a = \frac{2}{3}$ et $b = -1$.

1. $dom(f) = \mathbb{R}$
2. L'ordonnée à l'origine est $f(0) = 2(0) - 1$: le graphique de f coupe l'axe des y au point $(0, -1)$.
3. En résolvant l'équation $f(x) = 0$, on trouve le zéro de la fonction.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x - 1 &= 0 \\ \frac{2}{3}x &= 1 \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

La fonction possède donc un seul zéro, $x = \frac{3}{2}$, et le graphique de f coupe l'axe des x au point $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

À cette étape, puisqu'on sait que le graphique d'une fonction affine est une droite et qu'on en connaît deux points, on peut déjà tracer cette droite, ce qui facilitera la suite de l'analyse.



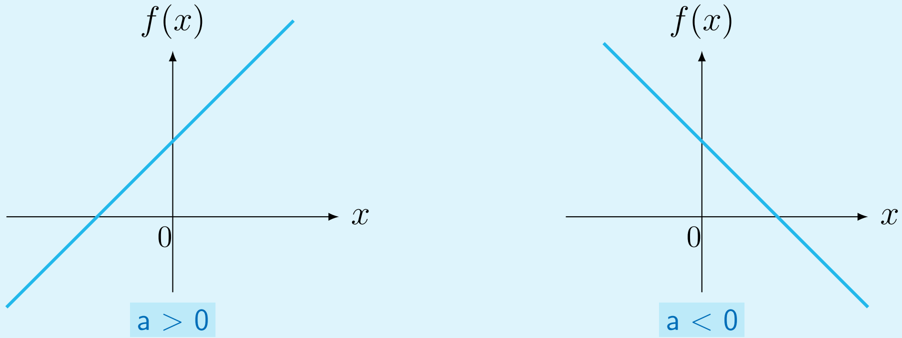
4. $f(x) < 0$ si $\frac{2}{3}x - 1 < 0$, donc $x < \frac{3}{2}$ $f(x) > 0$ si $\frac{2}{3}x - 1 > 0$, donc $x > \frac{3}{2}$
5. La fonction est croissante sur tout son domaine $\mathbb{R}$, puisque la pente de la droite est positive.
6. La fonction f n'a ni minimum ni maximum et $ima(f) = \mathbb{R}$.
7. Le tableau de variation de f est le suivant.

Valeurs de x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de f	$-$	0	$+$
Croissance de f	↗		

Les caractéristiques d'une fonction affine

La **fonction affine** $y = f(x) = ax + b$ (où $a \neq 0$) possède les caractéristiques suivantes :

- $dom(f) = \mathbb{R}$ et $ima(f) = \mathbb{R}$
- La fonction est représentée par une droite oblique de pente a.



- L'ordonnée à l'origine est b : la droite coupe l'axe vertical au point $(0, b)$.
- La fonction possède un seul zéro : $x = \frac{-b}{a}$. La droite coupe l'axe horizontal au point $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$. Ce zéro est aussi appelé «abscisse à l'origine».
- Si $a > 0$, la fonction est négative jusqu'à son zéro, et positive après. C'est l'inverse si $a < 0$.
- Si $a > 0$, la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$; elle est décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 0$.
- La fonction linéaire n'a ni minimum ni maximum.

5.3 - La fonction quadratique

Définition 5.3

Une **fonction quadratique** est une **fonction polynomiale du second degré**. Sa règle de correspondance est de la forme $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des constantes et $a \neq 0$.

Exemple 5.4 :

- ▷ $f(x) = \frac{2}{5} - 4x + 3x^2$ est une fonction polynomiale du second degré. En replaçant ses termes en ordre décroissant de leurs degrés, on obtient $f(x) = 3x^2 - 4x + \frac{2}{5}$, et on a alors $a = 3$ (le coefficient du terme de second degré), $b = -4$ (le coefficient du terme de premier degré) et $c = \frac{2}{5}$ (le terme constant).
- ▷ $f(x) = -12x^2$ est une fonction quadratique, où $a = -12$, $b = 0$ et $c = 0$.
- ▷ $f(x) = \frac{5x^2-7x+8}{6}$ est une fonction quadratique, car on peut l'exprimer sous la forme $f(x) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{4}{3}$. On a alors $a = \frac{5}{6}$, $b = \frac{-7}{6}$ et $c = \frac{4}{3}$.

Attention !

Quel que soit l'ordre dans lequel les termes du polynôme sont écrits, a est le coefficient de x^2, b est le coefficient de x et c est le terme constant.

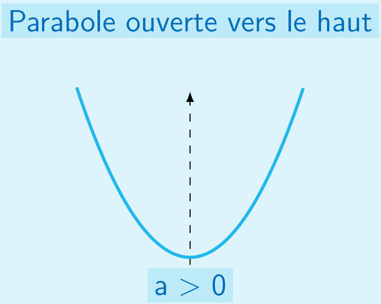
Une fonction quadratique étant définie par un polynôme du second degré, son domaine est toujours $\mathbb{R}$, à moins que le contexte du problème n'oblige à le restreindre.

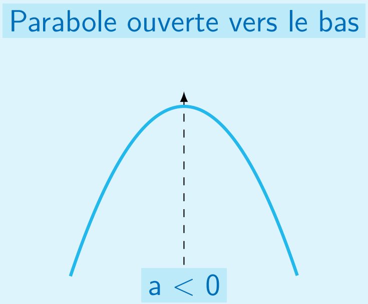
Le domaine d'une fonction quadratique

Le domaine d'une fonction $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ est $\mathbb{R}$.

Le graphique d'une fonction quadratique

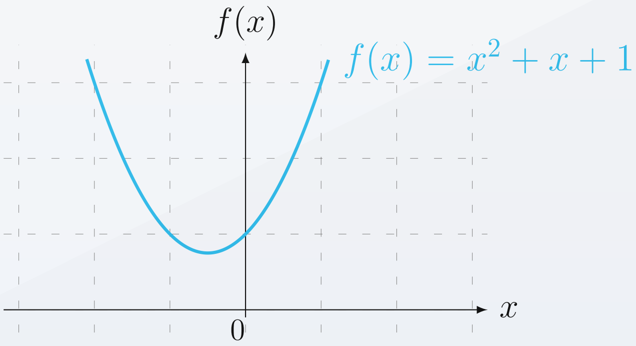
Le graphique d'une fonction quadratique $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole dont les deux branches sont symétriques par rapport à un axe vertical. L'orientation de la parabole dépend du signe de a.



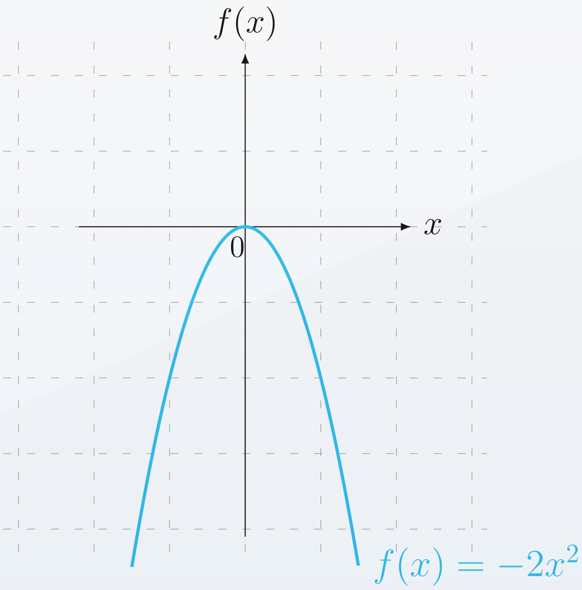


Exemple 5.5 :

- Soit la fonction $f(x) = x^2 + x + 1$, où $dom(f) = \mathbb{R}$. La parabole est ouverte vers le haut, puisque $a = 1$ (donc $a > 0$).



- Soit la fonction $f(x) = -2x^2$, où $dom(f) = \mathbb{R}$. La parabole est ouverte vers le bas, puisque $a = -2$ (donc $a < 0$).



5.4 - La fonction valeur absolue

Définition 5.4

La **fonction valeur absolue** est une fonction de la forme $y = f(x) = |x|$, où :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple 5.6 :

- ▷ $|3| = 3$, car $3 \geq 0$.
- ▷ $|-3| = -(-3)$, car $-3 < 0$.
- ▷ $|0| = 0$.

Le signe d'une valeur absolue
La valeur absolue d'un nombre x est toujours positive ou nulle.

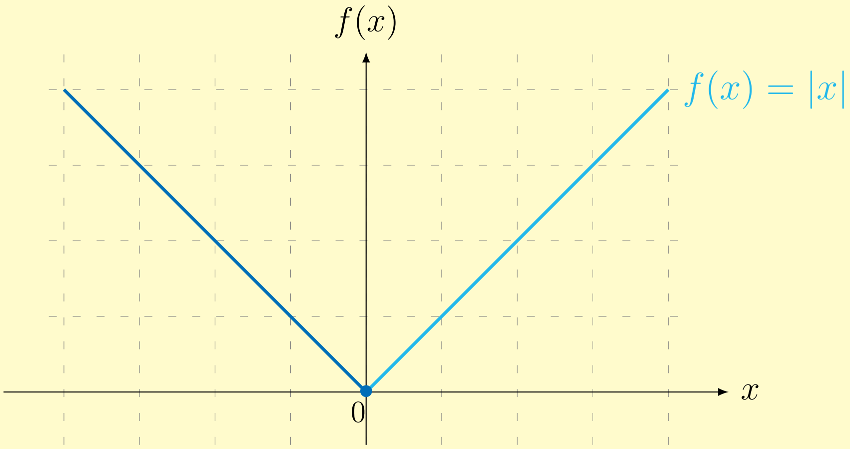
Attention !

Si $x < 0$, $|x| = -x$ n'est pas un nombre négatif. Par exemple, si $x = -5$, alors $|x| = |-5| = -(-5)$, un nombre positif.

Note : Puisque la fonction valeur absolue est définie en deux parties, son graphique est aussi composé de deux parties.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Si $x < 0$, la règle de correspondance de la fonction devient $y = -x$, qu'on représente par une portion de la droite de pente -1 passant par l'origine, tracée sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.
- Si $x \geq 0$, la règle de correspondance devient $y = x$, qu'on représente par une portion de la droite de pente 1 passant par l'origine, tracée sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- On obtient le graphique de $f(x) = |x|$ en juxtaposant les deux parties.



Les caractéristiques de la fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ possède les caractéristiques suivantes :

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- $ima(f) = [0, +\infty[$
- La fonction possède un seul zéro : $x = 0$.
- f est positive sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et nulle si $x = 0$; elle n'est jamais négative.
- f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
- f possède un minimum $\min(f) = 0$, atteint lorsque $x = 0$. Elle n'a pas de maximum.
- Le sommet du graphique est situé au point $(0, 0)$.

• 5.5 - La fonction racine carrée

Définition 5.5

La **fonction racine carrée** est la fonction dont la règle de correspondance est de la forme

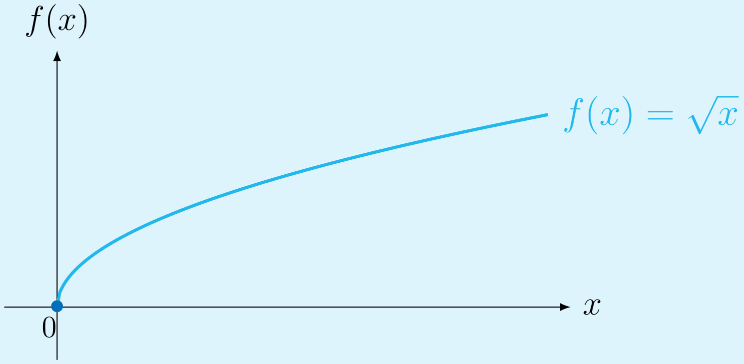
$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

Note : On peut écrire $\sqrt{x}$ sous la forme $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Puisqu'il s'agit d'un exposant fractionnaire, la fonction $y = f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas une fonction polynomiale.

Les caractéristiques de la fonction racine carrée

La fonction racine carrée $y = f(x) = \sqrt{x}$ possède les caractéristiques suivantes :

- $dom(f) = [0, +\infty[$ et $ima(f) = [0, +\infty[$
- La fonction possède un seul zéro : $x = 0$.
- L'ordonnée à l'origine est 0.
- f est croissante sur tout son domaine, soit sur $[0, +\infty[$.



- f possède un minimum $\min(f) = 0$, atteint lorsque $x = 0$.
- La fonction ne possède pas de maximum.
- L'extrémité du graphique est le point $(0, 0)$.
- f est positive sur $]0, +\infty[$ et nulle si $x = 0$; elle n'est jamais négative.

La relation entre la racine carrée et la valeur absolue

$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

• 5.6 - La réciproque d'une fonction

Lorsqu'on connaît l'image y d'une valeur x par une fonction f, on peut s'intéresser à retrouver la valeur de x. Cette démarche de «retour en arrière» est la base de la recherche de la réciproque d'une fonction.

Exemple 5.7 :

▷ J'ai acheté un gigot d'agneau à $17,39\$/kg$ et je dois connaître son poids pour en déterminer le temps de cuisson. J'ai jeté l'emballage qui indiquait le poids. Cependant, j'ai conservé le ticket de caisse, ce qui me permet de savoir que j'ai payé le gigot $24,35\$$.

Le prix du gigot d'agneau est défini par la règle de correspondance suivante :
$P(x) = 17.39x$, où x est le poids du gigot (en kilogrammes), et $P(x)$ son prix (en dollars).
Puisqu'on calcule le prix du gigot en multipliant son poids par 17.39, on peut trouver le poids en effectuant l'opération inverse, c'est-à-dire en divisant le prix par 17.39.
On peut exprimer le poids en kilogrammes d'un gigot de x dollars par la fonction

$$k(x) = \frac{x}{17.39}.$$

Je peux donc calculer $k(24.35) = \frac{24.35}{17.39} \approx 1.4kg$, soit le poids de mon gigot.

La fonction k est appelée la «réciproque» de la fonction P. On peut également la désigner par P^{-1}. C'est la fonction qui permet de «revenir en arrière» : en connaissant l'image par P d'une valeur x, on peut retrouver cette valeur.

Définition 5.6

Soit une fonction f telle que $y = f(x)$. La **réciproque** de f est la relation qui, à chaque élément y, associe (s'il en existe) les valeurs de x dont il est l'image. La réciproque de f est désignée par f^{-1}.

Attention !

Le «-1» de f^{-1} n'est pas un exposant. On ne peut pas interpréter f^{-1} comme $\frac{1}{f}$.

L'évaluation de la réciproque en un point
Pour trouver $f^{-1}(b)$, il faut chercher les valeurs de x pour lesquelles $f(a) = b$, qu'on trouve en résolvant cette dernière équation.

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$$

Exemple 5.8 :

- ▷ Soit $f(x) = 2x+1$. Pour calculer $f^{-1}(7)$, on cherche les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 7$.

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 7 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Ainsi, $f^{-1}(7) = 3$ et cette valeur est unique.
On peut vérifier la solution en calculant $f(3) = 2(3) + 1 = 7$.

- ▷ soit $F(x) = x^2$. Pour calculer $f^{-1}(16)$, on cherche les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 16$.

$$\begin{aligned} x^2 &= 16 \\ x^2 - 16 &= 0 \\ (x+4)(x-4) &= 0 \\ x + 4 = 0 \text{ ou } x - 4 &= 0 \\ x = -4 \text{ ou } x &= 4 \end{aligned}$$

Ainsi, $f^{-1}(16) = -4$ et $f^{-1}(16) = 4$. On a bien $f(-4) = (-4)^2 = 16$ et $f(4) = 4^2 = 16$.

Comme on a pu le voir à l'exemple précédent, la réciproque d'une fonction n'est pas toujours une fonction. En effet, si deux ou plusieurs valeurs de x ont la même image y par la fonction f, alors la relation f^{-1} associera plus d'une valeur à ce y.

La condition pour que la réciproque d'une fonction soit une fonction.
La réciproque f^{-1} de la fonction f est elle aussi une fonction si f est une fonction **injective**.

Note : La règle de correspondance de la réciproque
Pour trouver l'expression de la réciproque f^{-1} d'une fonction f :

1. On remplace x par y et y par x dans l'expression $y = f(x)$.
2. On isole y dans la nouvelle expression.

Exemple 5.9 :

▷ Soit $f(x) = \frac{2x-1}{5+3x}$.

⋆ On remplace x par y et y par x.

$$\begin{aligned} f : y &= \frac{2x-1}{5+3x} && (\text{où } 5+3x \neq 0) \\ f^{-1} : x &= \frac{2y-1}{5+3y} && (\text{où } 5+3y \neq 0) \end{aligned}$$

⋆ On isole y dans cette dernière expression.

$$\begin{aligned} x &= \frac{2y-1}{5+3y} \\ x(5+3y) &= \frac{2y-1}{5+3y}(5+3y) && (\text{multiplier des deux membres par un même nombre}) \\ x(5+3y) &= 2y-1 && (\text{simplifier}) \\ 5x+3xy &= 2y-1 \\ 3xy-2y &= -5x-1 && (\text{reproupement des termes en } y \text{ d'un coté}) \\ y(3x-2) &= -5x-1 && (\text{mise en évidence simple}) \\ y &= \frac{-5x-1}{3x-2} && (\text{division des deux membres par un même nombre}) \end{aligned}$$

On remarque qu'avant d'isoler y il a fallu regrouper d'un côté de l'égalité tous les termes contenant y, ce qui a permis de mettre y en évidence.
On a donc $f^{-1}(x) = \frac{-5x-1}{3x-2}$ ou $f^{-1}(x) = \frac{5x+1}{2-3x}$.
Vérifions par un exemple si les composantes des couples sont bien permutées par la fonction réciproque.
Soit $x = -6$ dans la fonction f.

$$f(-6) = \frac{2(-6)-1}{5+3(-6)} = \frac{-13}{-13} = 1$$

Soit maintenant $x = 1$ dans la fonction f^{-1}.

$$f^{-1}(1) = \frac{5(1)+1}{2-3(1)} = \frac{6}{-1} = -6$$

Le couple $(-6, 1)$ de la fonction f devient $(1, -6)$ pour la fonction f^{-1}.

Chapitre 4

Suites et Séries

Sommaire

Dans ce chapitre, nous étudierons la convergence ou la divergence de suites en évaluant la limite appropriée. Ensuite, nous effectuerons la somme infinie des termes de ces suites, ce que nous appelons «séries». Nous déterminerons, à l'aide de différents critères, la convergence ou la divergence de séries.

Les notions abordées ici sont largement étudiées dans [1], qui a servi à la mise en oeuvre de ce chapitre.

1 Définitions et notations d'une suite

Jusqu'à maintenant, nous avons surtout étudié des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dans cette section, notre étude portera sur les fonctions de E dans $\mathbb{R}$, où $E \subseteq \mathbb{N}$.

1.1 - Définitions et notations

Définition 1.1

Une **suite** est une fonction dont le domaine de définition est un ensemble E, où $E \subseteq \mathbb{N}$, contenant tous les entiers plus grands ou égaux à un entier non négatif m donné et dont l'image est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1 : Déterminons le domaine et l'image des suites suivantes.

- ▷ $f(n) = \frac{2}{3^n}$, où $n \geq 4$.
  Puisque $n \in \mathbb{N}$ et que $n \geq 4$, nous avons
  $$dom(f) = \{4, 5, 6, \cdots, n, \cdots\} \text{ et } ima(f) = \left\{\frac{2}{3^4}, \frac{2}{3^5}, \frac{2}{3^6}, \cdots, \frac{2}{3^n}, \cdots\right\}$$
  Nous pouvons définir la suite précédente en utilisant la notation $\left\{\frac{2}{3^n}\right\}_{n\geq 4}$
- ▷ $\{(-1)^n(2n+1)\}_{n\geq 0}$.
  Dans ce cas, $f(n) = (-1)^n(2n+1)$, où $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,
  $$dom(f) = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\} \text{ et}$$
  $$ima(f) = \{1, -3, 5, -7, \cdots, (-1)^n(2n+1), \cdots\}$$

Note : Par convention, lorsque la valeur initiale du domaine de la suite n'est pas donnée, cette valeur initiale est 1.

Exemple 1.2 : Déterminons le domaine et l'image de la suite $\left\{\frac{3}{n}\right\}$.
Le domaine est $\{1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$ et l'image est $\left\{3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{3}{n}, \cdots\right\}$.

Définition 1.2

De façon générale, nous notons $\{a_n\}$, où $n \in \mathbb{N}^\star$, la suite dont les termes sont a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$, où

a_1 correspond au **premier terme** de la suite,

a_2 correspond au **deuxième terme** de la suite,

$\vdots$

a_n correspond au n^e **terme** de la suite

et a_n est appelé **terme général** de la suite ; nous écrivons

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

Exemple 1.3 : Déterminons les cinq premiers termes de la suite $\{n!\}$.

En posant $n = 1$, nous trouvons $a_1 = 1! = 1$;

en posant $n = 2$, nous trouvons $a_2 = 2! = 2$;

en posant $n = 3$, nous trouvons $a_3 = 3! = 6$;

en posant $n = 4$, nous trouvons $a_4 = 4! = 24$;

en posant $n = 5$, nous trouvons $a_5 = 5! = 120$;

d'où $n! = \{1, 2, 6, 24, 120, \cdots, n!, \cdots\}$.

De façon générale, pour déterminer le terme général d'une suite,

- on peut traiter indépendamment le numérateur et le dénominateur ;
- l'alternance des signes est obtenue par $(-1)^n$ ou $(-1)^{n+1}$;
- il faut transformer certains termes de la suite qui ont été simplifiés.
- Il peut être utile de connaître les premiers termes de certaines suites afin de nous faciliter la tâche lorsque nous aurons à trouver le terme général d'une suite :

$$\begin{aligned} \{n\} &= \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\} & \{2^n\} &= \{2, 4, 8, 16, 32, \cdots\} \\ \{2n\} &= \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\} & \{3^n\} &= \{3, 9, 27, 81, 243, \cdots\} \\ \{2n+1\} &= \{3, 5, 7, 9, 11, \cdots\} & \{(-1)^n\} &= \{-1, 1, -1, 1, -1, \cdots\} \\ \{n^2\} &= \{1, 4, 9, 16, 25, \cdots\} & \{(-1)^{n+1}\} &= \{1, -1, 1, -1, 1, \cdots\} \\ \{n^3\} &= \{1, 8, 27, 64, 125, \cdots\} & \{n!\} &= \{1, 2, 6, 24, 120, \cdots\} \end{aligned}$$

Exemple 1.4 :

▷ Déterminons le terme général de la suite $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \cdots\right\}$.

- ⋆ Le numérateur de chaque terme, soit $1, 2, 3, 4, \cdots$, correspond aux termes de la suite $\{n\}$;
- ⋆ le dénominateur de chaque terme soit $2, 5, 10, 17, \cdots$, est égal à $1^2+1, 2^2+1, 3^2+1, 4^2+1, \cdots$, et correspond aux termes de la suite $\{n^2+1\}$.

D'où $\boxed{a_n = \frac{n}{n^2+1}}$.

▷ Déterminons le terme général de la suite $\left\{\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{-1}{16}, \cdots\right\}$.

- ⋆ Le numérateur prend successivement les valeurs 1 et -1, et correspond aux termes de la suite $\{(-1)^{n+1}\}$;
- ⋆ le dénominateur de chaque terme, soit $2, 4, 8, 16, 32, \cdots$, est égal à $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \cdots$, et correspond aux termes de la suite $\{2^n\}$.

D'où $\boxed{a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}}$.

▷ Déterminons le terme général de la suite $\left\{\frac{8}{10}, \frac{13}{29}, \frac{18}{66}, \frac{23}{127}, \cdots\right\}_{n\geq 2}$.

- ⋆ Le numérateur de chaque terme augmente de 5 à chaque terme, ainsi la forme générale du numérateur est $5n + C$. Puisque, pour $n = 2$, nous avons $5(2)+$

$C = 8$, donc $C = -2$, ainsi le numérateur correspond aux termes de la suite $\{5n - 2\}_{n\geq 2}$;

- ⋆ le dénominateur de chaque terme, soit $10, 29, 66, 127, \cdots$, est égal à $2^3 + 2, 3^3 + 2, 4^3 + 2, 5^3 + 2, \cdots$, et correspond aux termes de la suite $\{n^3 + 2\}_{n\geq 2}$.

D'où $a_n = \frac{5n-2}{n^3+2}, n \geq 2$.

Définition 1.3

Une suite est définie par **récurrence** lorsque la valeur du premier terme ou des premiers termes est donnée et que le terme général est défini en fonction du terme précédent ou des termes précédents.

Exemple 1.5 :

▷ Déterminons les cinq premiers termes de la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_1 = 5 \text{ et } a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}, \text{ si } n \geq 2$$

Pour trouver a_2, a_3, a_4, a_5, il faut utiliser l'égalité $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$, où $n = 2, 3, 4$ et 5. L'égalité précédente se traduit de la façon suivante :

$$\text{chaque terme } = 1 + \frac{1}{\text{terme précédent}}, \text{ pour } n \geq 2. \text{ Ainsi,}$$

- $a_2 = 1 + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{5}$, (car $a_1 = 5$)
  $= \frac{6}{5}$
- $a_3 = 1 + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{6}{5}\right)}$, $\left(\text{car } a_2 = \frac{6}{5}\right)$
  $= \frac{11}{6}$
- $a_4 = 1 + \frac{1}{a_3} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{11}{6}\right)}$, $\left(\text{car } a_3 = \frac{11}{6}\right)$
  $= \frac{17}{11}$
- $a_5 = 1 + \frac{1}{a_4} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{17}{11}\right)}$, $\left(\text{car } a_4 = \frac{17}{11}\right)$
  $= \frac{28}{17}$

d'où $\{a_n\} = \left\{5, \frac{6}{5}, \frac{11}{6}, \frac{17}{11}, \frac{28}{17}, \cdots\right\}$.

• 1.2 - Représentations graphiques

Nous pouvons représenter graphiquement une suite $\{a_n\}$ de deux façons :

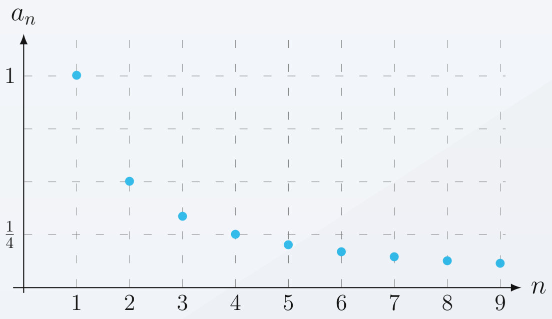
- 1^{re} façon : dans le plan cartésien, en situant les points (n, a_n) ;
- 2^{e} façon : sur la droite réelle, en situant les valeurs a_1, a_2, a_3, $\cdots$

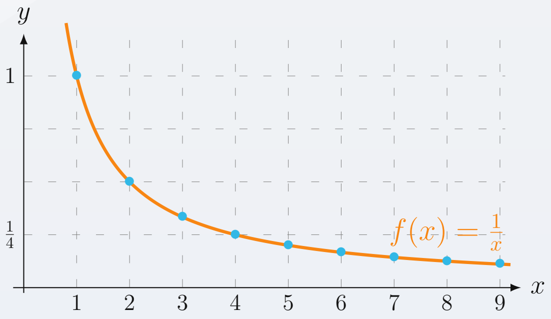
Exemple 1.6 :

▷ Représentons graphiquement dans le plan cartésien la suite $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ainsi que la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, où $x \in [1, +\infty[$.

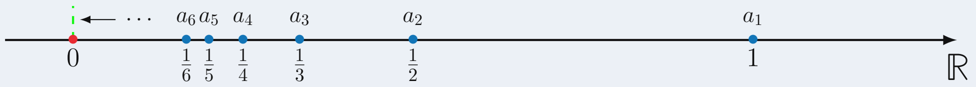
En donnant successivement à n les valeurs $1, 2, 3, \cdots$, nous obtenons les points (n, a_n), c'est à dire $(1, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right), \cdots$

Nous pouvons constater que le graphique de la suite $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ est un sous-ensemble du graphique de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$.





▷ Représentons graphiquement sur la droite réelle la suite $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.



2 Convergence et divergence d'une suite

Définition 2.1

- Une suite $\{a_n\}$ **converge** vers le nombre L si

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L, \text{ où } L \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, nous disons que la suite est **convergente**.

- Une suite $\{a_n\}$ **diverge** si

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty, \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} a_n \text{ n'existe pas.}$$

Dans ce cas, nous disons que la suite est **divergente**.

Exemple 2.1 : Déterminons si les suites suivantes sont convergentes ou divergentes.

- ▷ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$:

  Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ la suite $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ converge vers 0. D'où la suite $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ est convergente.

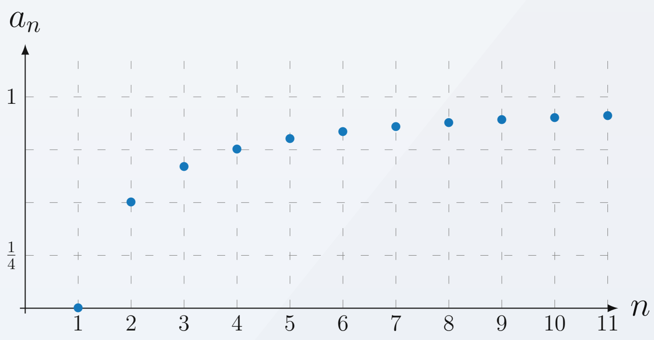
- ▷ $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$

  $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}$ est une indétermination de la forme $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Levons l'indétermination :

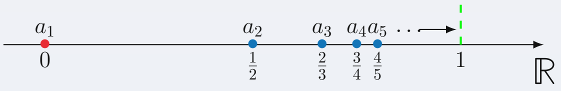
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) && \text{(car } n\neq 0) \\ &= 1 && \text{(car } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0)\end{aligned}$$

D'où la suite $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ converge vers 1.

Représentation graphique
dans le plan cartésien



Représentation graphique
sur la droite réelle

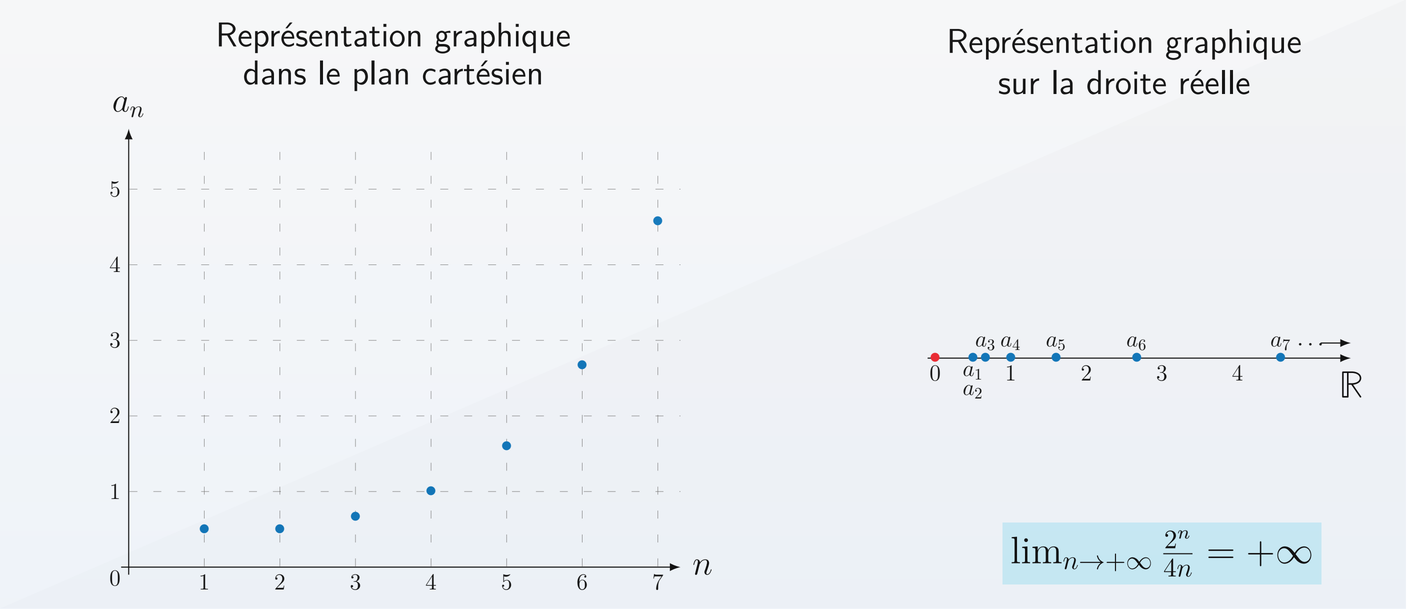


$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}=1}$$

- ▷ $\left\{\frac{2^n}{4n}\right\}$, c'est-à-dire $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1,\frac{8}{5},\frac{8}{3},\frac{32}{7},\cdots\right\}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{4n} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{4x} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln(2)}{4} && \text{(règle de l'hospital)} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

D'où la suite $\left\{\frac{2^n}{4n}\right\}$ est divergente.



Théorème 2.1

Soit $\{a_n\}$ *et* $\{b_n\}$*, deux suites. Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = M,$ *où* $L \in \mathbb{R}$ *et* $M \in \mathbb{R},$ *alors :*

- **Limite d'une somme (différence) de suites**

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \pm \lim_{n\to+\infty} b_n = L \pm M$$

- **Limite du produit d'une suite par une constante**

$$\lim_{n\to+\infty}(kb_n) = k \lim_{n\to+\infty} b_n = kM, \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

- **Limite d'un produit de suites**

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right) = LM$$

- **Limite d'un quotient de suites**

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\left(\lim_{n\to+\infty}a_n\right)/\left(\lim_{n\to+\infty}b_n\right)=\frac{L}{M},\ \textit{si } b_n\neq 0 \textit{ pour tout } n\geq m,$$

où $m\in\mathbb{N}$, *et* $M\neq 0$

Exemple 2.2 : Soit les suites $\{a_n\},\{b_n\}$ et $\{b_n\}$ telles que $\lim_{n\to+\infty}a_n = 5$, $\lim_{n\to+\infty}b_n=-4$ et $\lim_{n\to+\infty}c_n=0$. Déterminons si les suites suivantes convergent ou si elles divergent.

- ▷ $\{a_nb_n\}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(a_nb_n)&=\left(\lim_{n\to+\infty}a_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty}b_n\right)\\&=5(-4)\\&=-20\end{aligned}$$

d'où a_nb_n converge vers -20.

- ▷ $\left\{\frac{2a_n+c_n}{b_n}\right\}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2a_n+c_n}{b_n}\right)&=2\left(\lim_{n\to+\infty}a_n\right)/\left(\lim_{n\to+\infty}b_n\right)+\left(\lim_{n\to+\infty}c_n\right)/\left(\lim_{n\to+\infty}b_n\right)\\&=2\left(\frac{5}{-4}\right)+\left(\frac{0}{-4}\right)\\&=\frac{-5}{2}\end{aligned}$$

d'où $\left\{\frac{2a_n+c_n}{b_n}\right\}$ converge vers $\frac{-5}{2}$.

Théorème 2.2 (Théorème sandwich pour les suites)
Soit $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *et* $\{c_n\}$, *des suites telles que* $a_n\leq c_n\leq b_n$, *pour tout* $n\geq m$, *où* $m\in\mathbb{N}$.

$$\textit{Si }\lim_{n\to+\infty}a_n=L \textit{ et }\lim_{n\to+\infty}b_n=L,\ \textit{alors }\lim_{n\to+\infty}c_n=L$$

Exemple 2.3 : Déterminons si les suites suivantes convergent ou divergent.

- ▷ $\left\{\frac{n+(-1)^n}{n}\right\} = \left\{0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \cdots\right\}$. Soit les suites $\{a_n\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ et $\{b_n\} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\}$.

$$\text{Puisque } \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{n+(-1)^n}{n}}_{c_n} \leq \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{b_n}, \text{ que}$$

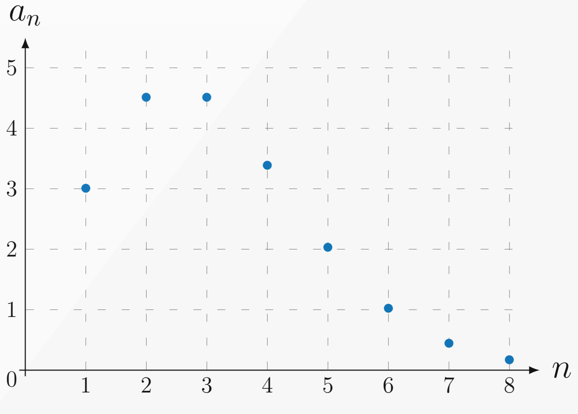
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ et que} \\
\lim_{n\to+\infty} b_n &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \text{ alors} \\
\lim_{n\to+\infty} c_n &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right) = 1
\end{aligned}$$

D'où la suite $\left\{\frac{n+(-1)^n}{n}\right\}$ converge vers 1.

- ▷ $\left\{\frac{3^n}{n!}\right\} = \left\{\frac{3^1}{1!}, \frac{3^2}{2!}, \frac{3^3}{3!}, \frac{3^4}{4!}, \frac{3^5}{5!}, \cdots\right\}$, c'est-à-dire $\left\{3, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \frac{81}{40}, \cdots\right\}$.

En développant $\left\{\frac{3^n}{n!}\right\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{3^n}{n!} &= \frac{3}{n}\left(\frac{3}{n-1}\right)\left(\frac{3}{n-2}\right)\cdots\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)3 \\
&\leq \frac{3}{n}(1)(1)\cdots(1)(1)\left(\frac{3}{2}\right) && \text{(pour } n \geq 4) \\
&\leq \left(\frac{27}{2n}\right)
\end{aligned}$$



Puisque pour $n \geq 4$, on a

$$\underbrace{0}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{3^n}{n!}}_{c_n} \leq \underbrace{\frac{27}{2n}}_{b_n}$$

De plus, $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ vérifient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \\
\lim_{n\to+\infty} b_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{27}{2n} = 0
\end{aligned}$$

Par suite, la suite $\{c_n\}$ vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$$

D'où la suite $\left\{\frac{3^n}{n!}\right\}$ converge vers 0.

3 Suites bornées et suites monotones

Définition 3.1

Une suite $\{a_n\}$, où $n \in \mathbb{N}$, est

- **croissante** si $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- **décroissante** si $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Exemple 3.1 : Déterminons si la suite $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ est croissante ou décroissante.

- ⋆ Puisque $a_n = \frac{1}{n^2}$, nous avons $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$.
- ⋆ Ainsi $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}$, (car $n^2 < (n+1)^2, \forall\, n \in \mathbb{N}$).
- ⋆ D'où la suite $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ est décroissante.

Méthode : Parfois, il est possible d'utiliser la dérivée de la fonction $f(x)$, où $x \in [1, +\infty[$, pour déterminer la croissance ou la décroissance de la suite a_n, où $f(n) = a_n$. Ainsi, dans l'exemple précédent,

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ et } f'(x) = \frac{-2}{x} < 0, \forall\, x \in]1, +\infty[$$

Donc, la fonction $f(x)$ est décroissante, d'où la suite est décroissante.

Définition 3.2

La suite $\{a_n\}$, où $n \in \mathbb{N}$, est :

- **bornée supérieurement** s'il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$, tel que

$$a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Nous dirons que M est un **majorant**. De plus, nous appelons **borne supérieure**, notée B, le plus petit des majorants ;

- **bornée inférieurement** s'il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$, tel que

$$m \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Nous dirons que m est un **minorant**. De plus, nous appelons **borne inférieure**, notée b, le plus grand des minorants ;

- **bornée** si elle est bornée supérieurement et inférieurement.

Exemple 3.2 : Soit la suite $\left\{\frac{2n+1}{n}\right\}$

- ▷ Déterminons si la suite est bornée.
  - ⋆ En énumérant les termes de cette suite, nous avons :

$$\left\{3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{2n+1}{n}, \cdots\right\}$$

  - ⋆ Nous avons $2 \leq \frac{2n+1}{n} \leq 3, \forall\, n \geq 1$ $\left(\text{car } \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}\right)$.
  - ⋆ Donc, la suite est bornée supérieurement par 3 et par tout nombre supérieur à 3. Par exemple, $M_1 = 3, M_2 = 3.5, M_3 = 7$ sont des majorants de la suite.
  - ⋆ De plus, la suite est bornée inférieurement par 2 et par tout nombre inférieur à 2. Par exemple, $m_1 = 2, m_2 = 1.25, m_3 = -10$ sont des minorants de la suite.
  - ⋆ D'où la suite est bornée, car elle est bornée supérieurement et inférieurement.
- ▷ Déterminons la borne supérieure B et la borne inférieure b.
  - ⋆ La suite $\left\{\frac{2n+1}{n}\right\}$ est décroissante $\forall\, n \in \mathbb{N}$, car $\left(2 + \frac{1}{n}\right) > \left(2 + \frac{1}{n+1}\right)$.
  - ⋆ Puisque $a_1 = 3, B = 3$, et puisque $\lim_{n\to+\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$, $b = 2$.
  - ⋆ D'où la borne supérieure B est 3 et la borne inférieure b est 2.

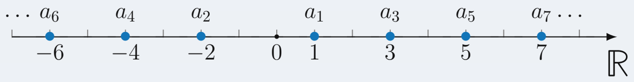
Exemple 3.3 : Déterminons si les suites $\{n+1\}$ et $\{(-1)^{n+1}n\}$ sont bornées.

- ▷ En énumérant les termes de la suite $\{n+1\}$, nous obtenons :

$$\{2, 3, 4, 5, \cdots, n+1, \cdots\}$$

  - ⋆ Nous constatons que $2 \leq (n+1), \forall\, n \geq 1$.
  - ⋆ Donc, la suite est bornée inférieurement (la borne inférieure $b = 2$), mais elle n'est pas bornée supérieurement, car $\lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$.
  - ⋆ D'où la suite est non bornée.
- ▷ En énumérant les termes de la suite $\{(-1)^{n+1}n\}$, nous obtenons :

$$\{1, -2, 3, -4, 5, \cdots, (-1)^{n+1}n, \cdots\}$$



  - ⋆ Pour n pair, $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}n = +\infty$ et

- ⋆ pour n impair, $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}n = +\infty$
- ⋆ donc cette suite n'est bornée ni supérieurement ni inférieurement. D'où la suite est non bornée.

Théorème 3.1 *Si la suite $\{a_n\}$ est monotone et bornée, alors la suite $\{a_n\}$ converge. En particulier :*

- *si la suite $\{a_n\}$ est croissante et bornée supérieurement, alors la suite converge vers la borne supérieure B ;*
- *si la suite $\{a_n\}$ est décroissante et bornée inférieurement, alors la suite converge vers la borne inférieure b.*

Exemple 3.4 :

▷ Déterminons, sans évaluer la limite, si la suite $\left\{\frac{3n}{4n+1}\right\}_{n\geq 2}$ est convergente ou divergente.

- ⋆ Cette suite est croissante, car en considérant la fonction

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x}{4x+1}, \text{ où } x \in [2,+\infty[\\ f'(x) &= \frac{3}{(4x+1)^2}, \forall\, x \in [2,+\infty[. \end{aligned}$$

- ⋆ Cette suite est bornée supérieurement, car

$$\frac{3n}{4n+1} \leq \frac{4n}{4n+1} \leq \frac{4n}{4n} = 1, \forall\, n \in \{2,3,4,5,\cdots\}.$$

- ⋆ D'où cette suite est convergente. (Théo. 3.1)

La valeur 1 est un majorant et non nécessairement la borne supérieure.

▷ Déterminons la borne supérieure B.

$$B = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n}{4n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(3)}{n\left(4+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{\left(4+\frac{1}{n}\right)} = \frac{3}{4}$$

d'où $B = \frac{3}{4}$.

4 Convergence et divergence d'une série

Définition 4.1

La somme infinie des termes d'une suite $\{a_n\}$ notée $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$, où

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$ est appelée **série infinie** (ou **série**).

Attention !

- Dans la définition précédente, chaque a_i est appelé **terme** de la série.
- La somme de ces termes peut être soit finie, soit infinie, ou peut ne pas être définie.
- Il ne faut pas confondre suite et série.
  - ⋆ Une **suite est une énumération de termes**, par exemple

$$\{2^n\} = \{2, 2^2, 2^3, 2^4, \cdots, 2^n, \cdots\}$$

  - ⋆ Tandis qu'une **série est une somme de termes**, par exemple

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n + \cdots$$

Exemple 4.1 : Évaluons, si c'est possible, les sommes suivantes.

▷

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i, \text{ où } \sum_{i=1}^{+\infty} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots$$

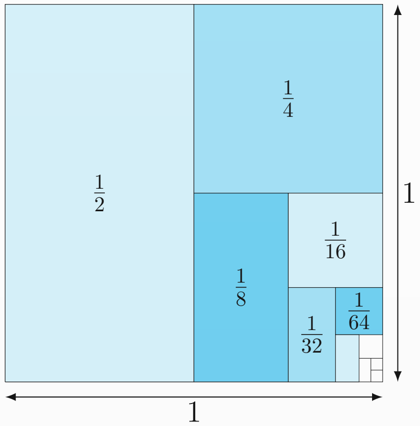
Nous constatons que, en additionnant les termes, nous obtenons $+\infty$, ainsi

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i = +\infty$$

De plus, puisque la somme des termes est infinie, nous dirons que la série est divergente.

▷ Pour la somme suivante :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}, \text{ où } \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$



Nous pouvons considérer la somme des termes comme équivalente à l'aire d'un carré de côté de longueur 1, subdivisé comme dans la représentation ci-contre. L'aire du carré est égale à 1^2, ainsi

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

De plus, puisque la somme des termes est finie, nous dirons que la série est convergente.

▷

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i, \text{ où } \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Nous constatons que, en additionnant les termes, nous obtenons -1 lorsque le nombre de termes additionnés est impair, et 0 lorsque ce nombre de termes est pair. Dans ce cas, la somme n'est pas définie.

De plus, puisque la somme des termes n'est pas définie, nous dirons que la série est divergente.

De façon générale, nous aurons à faire une étude plus approfondie afin de déterminer la convergence ou la divergence d'une série infinie.

Définition 4.2

Soit la série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

- La **somme** S_n des n premiers termes d'une série est appelée **somme partielle** et est définie comme suit :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \text{ c'est à dire } S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- La **somme** S, si elle existe, de la série est définie comme suit :

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n, \text{ c'est à dire } S = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Note : De la définition précédente, nous obtenons

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = \underbrace{a_1}_{S_1} + a_2 \qquad \text{ainsi } S_2 = S_1 + a_2$$

$$S_3 = \underbrace{a_1 + a_2}_{S_2} + a_3 \qquad \text{ainsi } S_3 = S_2 + a_3$$

$$S_4 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{S_3} + a_4 \qquad \text{ainsi } S_4 = S_3 + a_4$$

$$\vdots$$

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n \qquad \text{ainsi } S_n = S_{n-1} + a_n$$

nous avons donc $\boxed{a_n = S_n - S_{n-1}}$.

Cette dernière égalité peut être utilisée pour déterminer les termes a_i d'une série dont nous connaissons S_n.

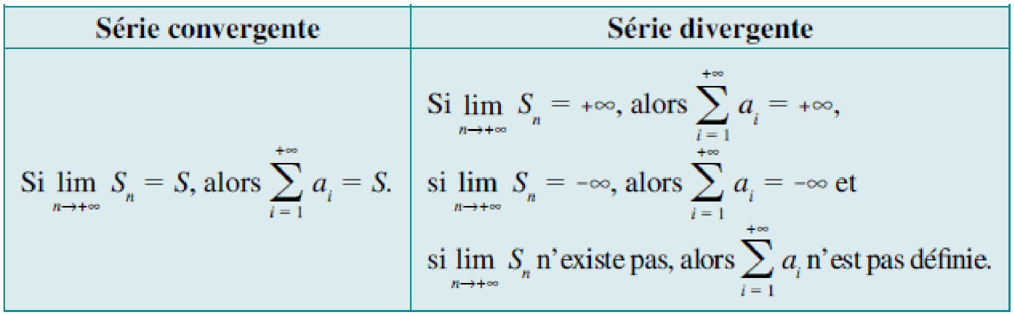
Définition 4.3

1) La série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ **converge** si $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = S$, où $S \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, où S **est la somme de la série**.

   Dans ce cas, nous disons que la série est **convergente**.

2) La série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ **diverge** si $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \pm\infty$ ou si cette limite n'existe pas, c'est-à-dire si $\lim_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$ ou si cette limite n'existe pas.

   Dans ce cas, nous disons que la série est **divergente**.



Série convergente	Série divergente
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, alors $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i = S$.	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, alors $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i = +\infty$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$, alors $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i = -\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ n'existe pas, alors $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ n'est pas définie.

Déterminons maintenant de façon formelle, à l'aide des définitions précédentes, la convergence ou la divergence des séries de l'exemple 1 précédent.

Exemple 4.2 : Déterminons si les séries suivantes convergent ou divergent, en évaluant, si c'est possible, $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

- $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} i$, où $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} i = 1+2+3+\cdots+n+\cdots$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1+2 = 3$$

$$S_3 = 1+2+3 = 6$$

$$\vdots$$

$$S_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{+\infty} i &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} i\\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2} \qquad \left(S_n = \frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

D'où $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} i = +\infty$, ainsi la série est divergente.

- $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$, où $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n} = \frac{2^n+1}{2^n}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{2^i} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+1}{2^n} \qquad \left(S_n = \frac{2^n+1}{2^n}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+1}{2^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln(2)}{2^x\ln(2)} \qquad \text{(RH)}\\ &= 1\end{aligned}$$

D'où $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{2^i} = 1$, ainsi la série est convergente.

Énonçons quelques théorèmes sur la convergence et la divergence de séries.

Théorème 4.1

Si $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ *et* $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i$ *convergent, alors* $\sum_{i=1}^{+\infty}(a_i \pm b_i)$ *converge et* $\sum_{i=1}^{+\infty}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \pm \sum_{i=1}^{+\infty} b_i$.

Théorème 4.2

- *Si* $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ *converge, alors* $\sum_{i=1}^{+\infty} ca_i$ *converge,* $\forall c \in \mathbb{R}$. *De plus,* $\sum_{i=1}^{+\infty} ca_i = c\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$.
- *Si* $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ *diverge, alors* $\sum_{i=1}^{+\infty} ca_i$ *diverge,* $\forall c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. *De plus,* $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \pm\infty$

  et $\begin{cases} c > 0 \text{ alors } \sum_{i=1}^{+\infty} ca_i = \pm\infty \\ c < 0 \text{ alors } \sum_{i=1}^{+\infty} ca_i = \mp\infty \end{cases}$

Nous étudierons maintenant quelques séries importantes.

5 Série arithmétique

Définition 5.1

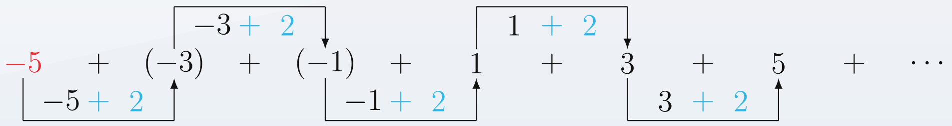
Une série de la forme $\sum_{i=1}^{+\infty}(a + (i-1)d)$, c'est-à-dire $a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a + (n-1)d) + \cdots$, où $a \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$, est appelée **série arithmétique** de premier terme a et de **raison** d.

Note :

- Dans une série arithmétique de premier terme a, chacun des autres termes de la série est obtenu en additionnant au terme précédent la raison d.
- Ainsi, une série arithmétique est entièrement définie par son premier terme et sa raison.

Exemple 5.1 :

▷ La série $-5 - 3 - 1 + 1 + 3 + 5 + \cdots$ est une série arithmétique de premier terme $a = -5$ et de raison $d = 2$, car



$$\begin{aligned}\text{Aunsi, }\; a_1 &= -5\\ a_2 &= -5+2=-3\\ a_3 &= -3+2=(-5+2)+2=-5+2(2)=-1\\ a_4 &= -1+2=(-5+2(2))+2=-5+3(2)=1\\ &\vdots\\ \text{donc }\; a_n &= -5+(n-1)2\end{aligned}$$

Cette série peut s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^{+\infty}(-5+(i-1)2)$

- ▷ Soit la série arithmétique de premier terme $a = 197$ et de raison $d = -3$. Déterminons les premiers termes et le terme général a_n de cette série.

$$\begin{aligned}a_1 &= 197\\ a_2 &= 197+(-3)=194\\ a_3 &= 194+(-3)=(197+(-3))+(-3)=197+2(-3)=191\\ a_4 &= 191+(-3)=(197+2(-3))+(-3)=197+3(-3)=188\\ &\vdots\\ a_n &= 197+(n-1)(-3)\end{aligned}$$

Cette série arithmétique peut s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^{+\infty}(197+(i-1)(-3))$

- ▷ Déterminons le $51e$ terme, noté a_{51}, et le 127^e terme, noté a_{127}, de cette série.
Si $n = 51$, nous obtenons $a_{51} = 197 + (51-1)(-3)$, d'où $a_{51} = 47$;
Si $n = 127$, nous obtenons $a_{127} = 197 + (127-1)(-3)$, d'où $a_{127} = -181$.

Théorème 5.1 *Soit la série arithmétique* $\sum_{i=1}^{+\infty}(a+(i-1)d)$

- *La somme partielle S_n des n premiers termes de la série est donnée par :*

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

- *La série diverge pour tout $d \in \mathbb{R}$ (sauf si $a = 0$ et $d = 0$).*

Exemple 5.2 : Soit la série arithmétique $329 + (329 + d) + (329 + 2d) + \cdots$

- ▷ Évaluons la somme partielle S_n , où $S_n = 329 + 316 + 303 + \cdots + (-113)$.

⋆ Déterminons d'abord la raison d.

$$d = 316 - 329 = -13$$

⋆ Déterminons ensuite le nombre n de termes de la somme à calculer.

$$\begin{aligned} \text{En posant} \qquad a_n &= -113, \text{ nous avons} \\ a + (n-1)d &= -113 \qquad \text{(car } a_n = a + (n-1)d\text{)} \\ 329 + (n-1)(-13) &= -113 \qquad \text{(car } a = 329 \text{ et } d = -13\text{)} \\ n &= 35 \end{aligned}$$

d'où $S_{35} = 35(329) + \frac{35(35-1)}{2}(-13) = 3780$

▷ Calculons S_{70}.

$$S_{70} = 70(329) + \frac{70(69)}{2}(-13) = -8365$$

6 Série géométrique

La série géométrique, autrefois appelée «progression géométrique», est la première série qui se soit imposée dans l'histoire des sciences.

Définition 6.1

Une série de la forme $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} ar^{i-1} \left(\text{ou } \sum\limits_{i=0}^{+\infty} ar^i \right)$, c'est-à-dire $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$, où $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $r \in \mathbb{R}$, est appelée **série géométrique** de premier terme a et de **raison** r.

Note :

- Dans une série géométrique de premier terme a, chacun des autres termes de la série est obtenu en multipliant le terme précédent par la raison r.
- Ainsi, une série géométrique est entièrement définie par son premier terme et sa raison.

Dans le cas particulier où $r = 0$, nous considérons que $ar^0 = a$, même si $r = 0$. Ainsi, nous obtenons

$$a + 0 + 0 + \cdots 1 + 1 \cdots = a.$$

Donc, la série est convergente et $S = a$.

Exemple 6.1 :

- ▷ La série $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \cdots$ est une série géométrique de premier terme $a = 2$ et de raison $r = \frac{1}{3}$, car

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[rr, bend right, "2\left(\frac{1}{3}\right)"'] & + & \frac{2}{3} \arrow[rr, bend left, "\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)"] & + & \frac{2}{9} \arrow[rr, bend right, "\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)"'] & + & \frac{2}{27} \arrow[rr, bend left, "\frac{2}{27}\left(\frac{1}{3}\right)"] & + & \frac{2}{81} & + & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi, } a_1 &= 2 \\
a_2 &= 2\left(\frac{1}{3}\right) \\
a_3 &= 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
a_4 &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^3 \\
&\vdots \\
\text{donc } \ a_n &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Cette série peut s'écrire sous la forme $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$

- ▷ Déterminons les premiers termes et le terme général a_n de la série géométrique dont le premier terme est 4 et la raison est $\frac{-3}{5}$.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 4\\
a_2 &= a_1\left(\frac{-3}{5}\right) = 4\left(\frac{-3}{5}\right)\\
a_3 &= a_2\left(\frac{-3}{5}\right) = 4\left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{-3}{5}\right) = 4\left(\frac{-3}{5}\right)^2\\
a_4 &= a_3\left(\frac{-3}{5}\right) = 4\left(\frac{-3}{5}\right)^2\left(\frac{-3}{5}\right) = 4\left(\frac{-3}{5}\right)^3\\
&\vdots\\
a_n &= 4\left(\frac{-3}{5}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Cette série géométrique peut s'écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} 4\left(\frac{-3}{5}\right)^{i-1}$

Pour déterminer si une série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ est une série géométrique, il suffit :

- De vérifier si le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ de deux termes consécutifs quelconques est constant pour tout n.
- Lorsque le rapport est constant, nous avons

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \text{ où } r \text{ est la raison de la série géométrique.}$$

Exemple 6.2 : Vérifions si les séries suivantes sont des séries géométriques, en déterminant si $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est constant pour tout n, et le cas échéant, trouvons la raison r et le premier terme a.

▷ $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{3^i}{5^{i+1}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}\right)}{\left(\frac{3^n}{5^{n+1}}\right)} = \left(\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}\right)\left(\frac{5^{n+1}}{3^n}\right) = \frac{3}{5}, \text{ pour tout } n.$$

Puisque le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est constant et est égal à $\frac{3}{5}$, cette série est géométrique de raison $r = \frac{3}{5}$ et de premier terme a $a = \frac{3}{25}$, obtenu en posant $i = 1$.

▷ $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^k}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{3^{n+1}}\right)}{\left(\frac{n}{3^n}\right)} = \left(\frac{n+1}{3^{n+1}}\right)\left(\frac{3^n}{n}\right) = \frac{n+1}{3n}$$

Puisque le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ dépend de n, il n'est pas constant ; cette série n'est pas une série géométrique.

Théorème 6.1 *Soit la série géométrique* $\sum_{i=1}^{+\infty} ar^{i-1}$, *où* $r \neq 1$. *La somme partielle* S_n *des* n *premiers termes de la série est donnée par :*

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

Exemple 6.3 : Soit la série géométrique $\sum_{i=1}^{+\infty} 2(3)^{i-1}$.

▷ Évaluons S_{15}, la somme des 15 premiers termes de cette série.

$$S_{15} = 2(3)^0 + 2(3)^1 + 2(3)^2 + \cdots + 2(3)^{14} \quad (\text{Théo. 6.1, où } a = 2(3)^0 = 2,\ r = 3,\ n = 15)$$

Ainsi $S_{15} = \frac{2(1 - 3^{15})}{(1 - 3)}$

d'où $S_{15} = 14348906$

▷ Évaluons S_p, la somme du 10^e terme au 16^e terme inclusivement de cette série.

$$S_{16} = \underbrace{2(3)^0 + 2(3)^1 + 2(3)^2 + \cdots + 2(3)^8}_{S_9} + \underbrace{2(3)^9 + 2(3)^{10} + \cdots + 2(3)^{15}}_{S_p}$$

Ainsi $S_p = S_{16} - S_9 = \frac{2(1-3^{16})}{1-3} = \frac{2(1-3^9)}{1-3}$, d'où $S_p = 43027038$

Théorème 6.2 *La série géométrique* $\sum_{i=1}^{+\infty} ar^{i-1}$

- ▷ *converge si* $|r| < 1$ *et dans ce cas*

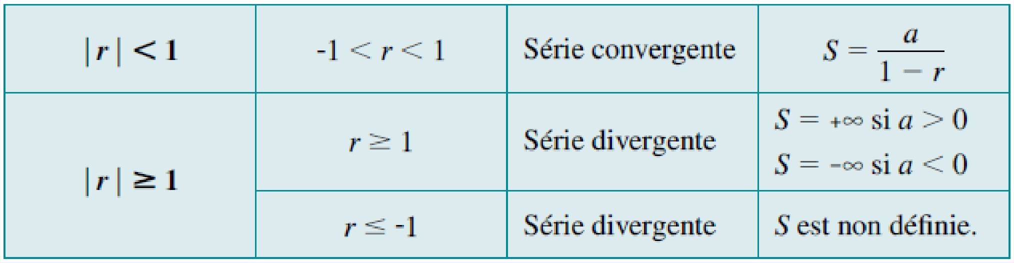
$$\sum_{i=1}^{+\infty} ar^{i-1} = \frac{a}{1-r};$$

- ▷ *diverge si* $|r| > 1$.

Méthode : Ainsi, pour une série géométrique de premier terme a et de raison r, la somme

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

est donnée dans le tableau suivant selon les différentes valeurs de r.



$\lvert r \rvert < 1$	$-1 < r < 1$	Série convergente	$S = \frac{a}{1-r}$
$\lvert r \rvert \geq 1$	$r \geq 1$	Série divergente	$S = +\infty$ si $a > 0$ $S = -\infty$ si $a < 0$
	$r \leq -1$	Série divergente	S est non définie.

Exemple 6.4 :

- ▷ Déterminons si la série géométrique $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$ est convergente ou divergente et calculons, si c'est possible, la somme S de cette série.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{1}{2^n}\right)} = \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{2^n}{1}\right) = \frac{1}{2}, \text{ donc } r = \frac{1}{2}$$

Puisque $r = \frac{1}{2}$, $|r| < 1$, donc cette série est convergente. (Théo. 6.2).

$$\text{D'où } \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 1 \quad \left(\text{car } a = \frac{1}{2} \text{ et } r = \frac{1}{2}\right)$$

- ▷ Calculons la somme S de la série géométrique suivante :

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \frac{80}{81} - \frac{160}{243} + \cdots$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\left(-\frac{10}{3}\right)}{5} = -\frac{10}{3}\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{3}, \text{ donc } r = -\frac{2}{3}$$

Puisque $r = -\frac{2}{3}$, $|r| < 1$, donc cette série est convergente (Théo. 6.2).

$$S = 5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \frac{80}{81} - \frac{160}{243} + \cdots = \frac{5}{\left(1 - \left(\frac{-2}{3}\right)\right)} = 3 \quad \left(\text{car } a = 5 \text{ et } r = \frac{-2}{3}\right)$$

7 Critère du terme général

Théorème 7.1 *Soit une série* $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$, *où* $a_i \in \mathbb{R}$.

▷ *Si* $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ *converge, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

▷ *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, *alors* $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ *diverse.*

Attention !

La condition $(\lim_{n\to+\infty} a_n = 0)$ est nécessaire, mais non suffisante, pour qu'une série converge, ce qui signifie que

- si $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, alors la série diverge ;
- si $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, alors nous ne pouvons rien conclure sur la convergence ou la divergence de la série.

Nous devons alors utiliser un autre critère de convergence.

Exemple 7.1 :

▷ Soit la série $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et nous savons que cette série est divergente.

▷ Soit la série géométrique $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$

Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et nous savons que cette série est convergente, car $r = \frac{1}{2}$.

Chapitre 5

Introduction aux Structures Algébriques

Sommaire

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux structures algébriques. La structure algébrique la plus importante est sans-doute celle de groupe. Lorsque deux opérations sont considérées, la notion d'anneau est importante, tout comme celle de corps.

Les notions abordées ici sont largement étudiées dans [3] (Chapitre 5), qui a servi à la mise en oeuvre de ce chapitre.

1 Introduction

Avant d'introduire la matière qui peut paraître abstrait, débutons avec deux exemples simples : $(\mathbb{Z}, +)$ l'ensemble des entiers avec une opération (addition) et $(\mathbb{Z}, +, \times)$ l'ensemble des entiers avec deux opérations (addition et multiplication).

Exemple 1.1 :

- Que peut-on dire de $(\mathbb{Z}, +)$?
  - C'est l'ensemble des entiers, avec une **loi de composition** binaire interne (une opération : $+$) qui associe à la paire d'éléments a, b leur somme $a + b$ (l'addition).
  - De plus on peut vérifier que l'addition est associative, c'est à dire pour tous éléments a, b et c dans $(\mathbb{Z}, +)$ alors $(a + b) + c = a + (b + c)$.
  - qu'il y a un élément neutre 0 (c'est à dire $0 + a = a + 0$ pour chaque a appartenant à $(\mathbb{Z}, +)$),

- ▷ et pour chaque entier a il y a un inverse additif $(-a)$ tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- ▷ Et finallement l'addition est commutative, c'est à dire pour tous éléments a et b dans $(\mathbb{Z}, +)$ alors $a + b = b + a$.

Note : On dira que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif (ou abélien).

Exemple 1.2 :

- ▷ Que peut-on dire de $(\mathbb{Z}, +, \times)$?
  - ▷ C'est l'ensemble des entiers, avec deux **lois de composition** binaires internes (deux opérations : $+$ et $\times$) qui associent respectivement à la paire d'éléments a, b leur somme $a + b$ (l'addition) et leur produit $a \times b$ (la multiplication).
  - ▷ Comme on a déjà observé, l'addition est associative, commutative, possède un élément neutre et chaque élément possède un inverse additif.
  - ▷ Quant à la multiplication, elle est associative, commutative, elle possède un élément neutre 1 ; c'est à dire $1 \times a = a \times 1 = a$ pour chaque a et la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Note : On dira que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

Définition 1.1

Une structure algébrique dans ce cours sera la donnée de :

- Un ensemble A (par exemple $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \cdots$).
- Une loi interne binaire sur les éléments de A, ou deux lois internes binaires sur les éléments de A (par exemple addition, multiplication, composition, $\cdots$).
- Une liste des propriétés de la loi binaire sur A, ou des deux lois binaires sur A (commutativité, associativité, élément neutre, inverse, distributivité, $\cdots$).

- Les ensembles qui retiendront notre attention sont les ensembles de nombres ou des ensembles dont les éléments se comportent algébriquement comme des nombres (l'ensemble des polynômes à une variable réelle par exemple). On peut aussi s'intéresser à des ensembles un peu plus ésotériques, l'ensemble des symétries du triangle équilatéral par exemple dont les éléments sont des réflexions et des rotations et se comportent comme des fonctions que l'on peut composer (effectuer une à la suite de l'autre).

- Une loi interne binaire $\star$ sur un ensemble A est simplement une opération sur les paires a, b d'éléments de A qui associe à ces éléments le nouvel élément de A noté $a \star b$.
  Les lois internes qui nous intéressent peuvent être simplement l'addition et la multiplication (qui associent à la paire a, b de A respectivement leur somme $a + b$ ou leur produit $a \times b$).
  Dans les ensembles où les opérations se comportent comme des fonctions, la loi utilisée sera la composition et on associera à la paire a, b la composition $a \circ b$. Dans les symétries d'un triangle on pourra composer une rotation a avec une réflexion b, par exemple, et on écrira $a \circ b$ pour noter cette composition (ici $a \circ b$ revient à faire d'abord la réflexion b et ensuite la rotation a).
- Soient $(*, \wedge)$ deux lois binaires internes (on peut dire des opérations) sur les paires d'éléments de A. Soient a, b, c des éléments de A. Les propriétés qui nous intéressent sont les suivantes :
  - **la commutativité** :

    $a * b = b * a$, pour tous a, b dans A,

    $a \wedge b = b \wedge a$ pour tous a, b dans A.
  - **l'associativité** :

    $(a * b) * c = a * (b * c)$ pour tous a, b, c dans A,

    $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ pour tous a, b, c dans A.
  - **la distributivité** de $\wedge$ sur $*$:

    $a \wedge (b * c) = (a \wedge b) * (a \wedge c)$,

    $(b * c) \wedge a = (b \wedge a) * (c \wedge a)$ pour tous a, b, c dans A.
  - l'existence d'un **élément neutre** pour $*$: il existe un élément e dans A tel que pour chaque a dans A on ait

    $$a * e = e * a = a$$
  - l'existence d'un élément neutre pour $\wedge$: il existe un élément n dans A tel que pour chaque a dans A on ait

    $$a \wedge n = n \wedge a = a$$
  - l'existence d'un **élément inverse** $\hat{a}$ pour chaque a dans A tel que ;

    $$a * \hat{a} = \hat{a} * a = e \ \ (e \text{ est l'élément neutre de la loi } *)$$
  - l'existence d'un élément inverse a^{-1} pour chaque a dans A tel que ;

    $$a \wedge a^{-1} = a^{-1} \wedge a = n \ \ (n \text{ est l'élément neutre de la loi } \wedge).$$

2 Groupes, sous-groupes

Définition 2.1

Un groupe $(G, *)$ est un ensemble G muni d'une loi interne binaire $*$ dont :

- la loi $*$ est associative,
- il existe un élément neutre e dans G,
- chaque élément a dans G a un élément inverse $\hat{a}$ dans G.

Définition 2.2

Soit $(G, *)$ un groupe. Si la loi $*$ est commutative, on dira que le groupe est abélien (abélien est synonyme de commutatif).

Exemple 2.1 :

- ▷ $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes abéliens (additifs).
- ▷ (les rationnels positifs, $\times$) et (les réels positifs, $\times$) sont des groupes abéliens (multiplicatifs).
- ▷ Appelons $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à une variable réelle.
  $(\mathbb{R}[x], +)$ est un groupe abélien ($+$ représente l'addition des polynômes).

La notion de sous-groupe est une notion importante très simple. Il s'agit simplement d'un groupe qui est inclus dans un autre groupe.

Définition 2.3

Soit $(A, *)$ un groupe. Si B est un sous-ensemble de A, on dira que $(B, *)$ est un sous-groupe si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. L'opération $*$ est fermée dans B (c'est à dire si $x, y \in B$, alors $x * y \in B$)
2. Si $a \in B$, alors son inverse $\hat{a}$ (pour la loi $*$) est aussi dans B.

Note :

- Notez que les points 1 et 2 entraînent que l'élément neutre pour la loi $*$ est aussi dans B car si a est dans B, son inverse $\hat{a}$ est dans B et $a * \hat{a} = e$ est dans B.
- Si $(A, *)$ est un groupe, dire que B est un sous-groupe de A revient simplement à dire que $B \subset A$ et $(B, *)$ est un groupe.

Exemple 2.2 :

- ▷ Considérons le groupe $(\mathbb{Z}, +)$. Si on considère $2\mathbb{Z}$ l'ensemble de tous les entiers pairs, alors $(2\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
    - ⋆ En effet, $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, la somme des deux nombres pairs est un nombre pair ((1) est vérifié),
    - ⋆ et l'inverse additif d'un nombre pair est un nombre pair ((2) est vérifié).
- ▷ Vous pouvez vérifier facilement que le sous ensemble des entiers impairs de $\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ (ni (1) ni (2) ne sont satisfaits).
- ▷ On observe facilement que si $(A, *)$ est un groupe et que e est son élément neutre pour la loi $*$, alors $(A, *)$ et $(\{e\}, *)$ sont des sous-groupes de $(A, *)$.

Note : Ce sont les **sous-groupes triviaux** de A, et ils existent toujours.

3 Groupes cycliques, isomorphismes

Notation additive : Soit $(A, +)$ un groupe avec élément neutre 0 et élément $(-a)$ inverse de $a \in A$. Pour $a \in A$ et $m \in \mathbb{Z}$, l'élément ma est égal à

- ⋆ $a + a + \cdots + a$ (m fois) si m est positif,
- ⋆ 0 si m est nul,
- ⋆ $(-a) + (-a) + \cdots + (-a)$ ($-m$ fois) si m est négatif.

Définition 3.1

- On dira que le groupe $(A, +)$ est un **groupe cyclique** s'il existe $g \in A$ tel que pour chaque $a \in A$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a = mg$.
- g est appelé un **générateur** du groupe A et on dit que chaque élément du groupe est engendré par g.

Notation multiplicative : Soit $(A, \times)$ un groupe avec élément neutre 1 et élément a^{-1} inverse de $a \in A$. Pour $a \in A$ et $m \in \mathbb{Z}$, l'élément a^m est égal à

- ⋆ $a \times a \times \cdots \times a$ (m fois) si m est positif,
- ⋆ 1 si m est nul,
- ⋆ $a^{-1} \times a^{-1} \times \cdots \times a^{-1}$ ($-m$ fois) si m est négatif.

Définition 3.2

- On dira que le groupe $(A, \times)$ est un **groupe cyclique** s'il existe $g \in A$ tel que pour chaque $a \in A$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a = g^m$.
- g est appelé un **générateur** du groupe A et on dit que chaque élément du groupe est engendré par g.

Exemple 3.1 :

▷ $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique (infini). 1 et -1 sont des générateurs. Il n'y en a pas d'autres.

▷

Théorème 3.1 *Dans un groupe cyclique, tout ensemble engendré par un élément forme un sous-groupe du groupe cyclique. Et ce sous-groupe est lui-même un groupe cyclique. Tous les sous-groupes d'un groupe cyclique sont obtenus de cette façon.*

Les groupes cycliques sont les plus simples, ils permettent d'illustrer la théorie des groupes assez facilement.

Nous introduisons maintenant la notion d'isomorphisme et nous l'appliquons aux groupes cycliques pour nous faciliter la vie. Nous utiliserons les opérations + et × pour simplifier davantage.

Définition 3.3

Deux groupes, $(A, +)$ et $(B, \times)$ sont **isomorphes** s'il existe une fonction $f : A \to B$ qui satisfait aux deux conditions suivantes :

- f est une bijection,
- pour chaque $x, y \in A$, $f(x + y) = f(x) \times f(y)$.

La fonction f est un isomorphisme, on dit qu'il y a un isomorphisme entre les groupes A et B.

4 Anneaux, sous-anneaux

Les anneaux et les corps sont des ensembles dans lesquels il y a deux lois binaires internes (deux opérations). Pour se simplifier la vie, nous utiliserons les opérations + et ×, ce qui est conforme aux exemples avec lesquels on va travailler.

Définition 4.1

Soit $(A, +, \times)$ un ensemble muni de deux lois binaires internes + et ×. On dit que $(A, +, \times)$ est un **anneau** si $(A, +)$ et un groupe commutatif et si la loi × satisfait aux conditions suivantes :

- $\times$ est associative.
- $\times$ est distributive par rapport à $+$.

Note :

- Si la loi $\times$ est commutative, on dit que l'anneau est **commutatif**.
- Si la loi $\times$ a un élément neutre (noté habituellement 1), on dit que l'anneau est **unitaire**.
- Si la loi $\times$ a un élément neutre et si chaque élément non nul a un inverse multiplicatif, l'anneau est appelé un **corps**.

Exemple 4.1 :

- ▷ $(\mathbb{Z}, +, \times)$ l'ensemble des entiers, avec l'addition et la multiplication usuelles, est un anneau commutatif unitaire.
- ▷ $(\mathbb{Q}, +, \times)$ l'ensemble des nombres rationnels, avec l'addition et la multiplication usuelles, est un corps commutatif.
- ▷ $(\mathbb{R}, +, \times)$ l'ensemble des nombres réels, avec l'addition et la multiplication usuelles, est un corps commutatif.
- ▷ $(\mathbb{R}[x], +, \times)$ l'ensemble des polynôme à une variable réelle, avec l'addition et la multiplication des polynômes, est un anneau commutatif unitaire.

Définition 4.2

Si $(A, +, \times)$ est un anneau et $B \subset A$ est un sous-ensemble de A, on dira que $(B, +, \times)$ est un sous-anneau de $(A, +, \times)$ si $(B, +, \times)$ est un anneau.

Exemple 4.2 :

- ▷ Il est évident par exemple que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
- ▷ $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}[x], +, \times)$.
- ▷ Pour m entier, le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ formé de tous les multiples de m (on notera cet ensemble $m\mathbb{Z}$) est un sous-anneau (non unitaire) de $\mathbb{Z}$.

Définition 4.3

Soient $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ deux anneaux. Un **isomorphisme d'anneaux** entre $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ est une fonction $f : A \to B$ qui satisfait à :

- C'est un isomorphisme de groupe entre $(A, +)$ et $(B, +)$.
- Pour toute paire $x, y \in A$, $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$.

Bibliographie :

[1] **G. Charron and P. Parent. Calcul intégral, 5^e édition. Chenelière Éducation, 5800, rue Saint-Denis, bureau 900, Montréal (Québec) H2S 3L5 Canada, 2009.**

[2] **G. Charron and P. Parent. Algèbre linéaire et géométrie vectorielle, 5e édition. Chenelière Éducation, 5800, rue Saint-Denis, bureau 900, Montréal (Québec) H2S 3L5 Canada, 2018.**

[3] **P. Deguire. Nore de cours «MATH 2413 Algèbre et relations». Département de mathématiques et de statistique, Université de Moncton, 2021.**

[4] **M. Farlhoul. Notes de cours. Université de Moncton, Département de mathématiques et de statistique, 18 avenue Antonine-Maillet Moncton (NB) E1A 3E9 Canada, 2019.**

[5] **M. Gingras. Mathématique d'appoint, Mise à niveau TS5, 5e édition. Chenelière Éducation, 5800, rue Saint-Denis, bureau 900, Montréal (Québec) H2S 3L5 Canada, 2015.**