UNIVERSITÉ DE MONCTON
CAMPUS DE MONCTON

Suites, séries, calcul dans $\mathbb{R}^n$ (MATH 2013)

Examen final

14 décembre 2023, Durée 3h00

Professeur : Ibrahima Dione

Nom étudiant.e : ______________________________

Numéro étudiant.e : ___________________________

Prenez le temps de lire l'examen au complet avant de commencer, et vérifiez qu'il y en a 9 pages. Il est composé de **7 questions**, pour un total de 35 points.

- Ceci est un examen à livres fermés et aucune note du cours n'est permise.
- L'utilisation de la calculatrice n'est pas permise.
- Répondez aux questions dans l'espace fourni.
- Utilisez le verso des feuilles si nécessaire.

Note : **Montrez vos calculs et justifiez vos réponses.**

Exercice 1 (11 points)

1. Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x,y) = \ln(1-4x^2-y^2)$.

2. Soit la fonction $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z-x^2-y^2}}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Déterminer l'ensemble image de f.

Exercice 2 (4 points)

Trouvez la limite suivante, si elle existe. Sinon, démontrez qu'elle n'existe pas.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Exercice 3 (4 points)

Soit la fonction f définie par $f(x,y) = x\,y\,\mathrm{arctg}(x\,y)$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 4 (4 points)

Soit la fonction f définie par $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

1. Expliquer pourquoi la fonction f est différentiable au point (1, 1).

2. Déterminer ensuite la linéarisation $L(x, y)$ de la fonction f en ce point.

Exercice 5 (4 points)

Soit $u = f(x, y)$ où $x = e^s cos\, t$ et $y = e^s sin\, t$. Montrer que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right].$$

Exercice 6 (4 points)

La pression P, le volume V et la température T d'un gaz confiné sont liés par la loi des gaz parfaits $P\,V = k\,T$ où k est une constante. Si l'erreur dans la mesure de T ne dépasse pas $0,8\%$ et celle de P ne dépasse pas $0,5\%$, estimer à l'aide des différentielles l'erreur maximale, en pourcent, du volume calculé.

Exercice 7 (4 points)

Démontrer que l'équation du plan tangent à la surface donnée par $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ au point (x_0, y_0, z_0) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1\,.$$