SUITE DE VARIABLES ALEATOIRES

Ibrahima Dione (Ph.D.) & Van Son Lai (Ph.D., CFA)

Simulations Stochastiques et Applications en Finance

- Somme de Variables Aléatoires Indépendantes
- Lois des Grands Nombres
- Théorème de la Limite Centrale
- Convergence d’une Suite de Variables Aléatoires

Somme de Variables Aléatoires Indépendantes

Définition

Une suite de variables aléatoires $\{X_i\}_{(i=1,2,\cdots,\infty)}$ est dite indépendantes identiquement distribuées (i.i.d), si les variables X_i possèdent la même densité de probabilité et un nombre arbitraire de ces variables forme un vecteur aléatoire indépendant.

- Soit S_n la somme des n variables aléatoires $X_{i(i=1,2,\cdots,n)}$ qui sont i.i.d

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1}$$

- Et soit M_n la somme normalisée ou la moyenne arithmétique définie par

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{2}$$

- Ainsi, l'espérance et la variance de la variable S_n sont données par

$$E\left[S_n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = nm_X,\ Var\left[S_n\right] = n\sigma_X^2 \tag{3}$$

- Alors que celles de la variable M_n sont données comme suit

$$E\left[M_n\right] = \frac{1}{n} E\left[S_n\right] = m_X,\ Var\left[M_n\right] = \frac{\sigma_X^2}{n} \tag{4}$$

Lois des Grands Nombres

- Soit la suite $\{X_i\}_{(i=1,2,\cdots,\infty)}$ de variables aléatoires i.i.d et M_n la moyenne arithmétique définie en (2) dont l'espérance et la variance sont finies.

- D'après l'inégalité de Chebychev, on a pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$

$$P\left(|M_n - m_X| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma_X^2}{n\varepsilon^2} \tag{5}$$

Théorème

Lorsque le nombre d'expériences tend vers l'infini ($n \to \infty$), la moyenne empirique M_n converge en probabilité vers l'espérance mathématique m_X

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|M_n - m_X| < \varepsilon\right) = 1 \quad (\text{Loi faible des grands nombres}) \tag{6}$$

Note: Ce résultat nous permet d'estimer l'espérance mathématique en utilisant la moyenne empirique calculée sur un très grand nombre d'expériences.

Exemple:

Souvent on se réfère à l'inégalité de Chebychev pour estimer la précision de l'estimation de l'espérance mathématique par la moyenne arithmétique. En effet, à partir de l'inégalité de Chebychev en (5) où $\varepsilon = r\sigma_X$ on obtient

$$P\left(|M_n - m_X| < r\sigma_X\right) \geq 1 - \frac{1}{nr^2} \tag{7}$$

Note: r est appelée la précision relative et la quantité $\left(1 - \frac{1}{nr^2}\right)$ représente la confiance.

- Comment choisir la taille de notre échantillon n, afin d'atteindre 1% de précision avec 95% de confiance? Il suffit en prenant $r = 1\% = 0.01$, d'égaler la confiance à $95\% = 0.95$; c'est à dire

$$1 - \frac{1}{nr^2} = 1 - \frac{1}{n(0.01)^2} \simeq 0.95$$

- Ce qui fournit une valeur approximative de $n \simeq 200\,000$ qui semble relativement élevé par rapport aux précisions recherchées.

- Ce phénomène est dû au fait que l'inégalité de Chebychev a été établie pour toutes les lois de probabilité, ce qui signifie que cette borne est relativement large.

- Nous allons voir dans la suite une approche qui nous permettra de réduire le nombre de simulations nécessaires.

Théorème

Si $\{X_i\}_{(i=1,2,\cdots,\infty)}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, alors on a

$$P\left(\lim_{n\to\infty} M_n = m_X\right) = 1 \quad \text{(Loi forte des grands nombres)} \tag{8}$$

Théorème de la Limite Centrale

Théorème

Soit une suite $\{X_i\}_{(i=1,2,\cdots,\infty)}$ de variables aléatoires i.i.d, dont la moyenne m_X et la variance σ_X^2 existent. Considérons la variable

$$Z_n = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_X)\right] = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{n}}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) - nm_X\right] \tag{9}$$

où son espérance et sa variance sont données $E[Z_n] = 0$ et $Var[Z_n] = 1$. Lorsque n tend vers l'infini, la variable aléatoire Z_n tend vers une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance unitaire.

Note: En pratique quand n dépasse 30, on pourrait considérer Z_n comme gaussienne.

Convergence d’une Suite de Variables Aléatoires

- Considérons la suite de variables aléatoires définie sur le même espace des épreuves S. Pour une épreuve élémentaire w de S, $\{X_n(w)\}_{n=1,2,\cdots,\infty}$ est une suite numérique déterministe.

Définition

On dit que la suite $\{X_n\}_{n=1,2,\cdots,\infty}$ converge sûrement vers X si pour tout w appartenant à S, la suite $\{X_n(w)\}_{n=1,2,\cdots,\infty}$ converge vers la valeur $X(w)$ quand n tend vers l'infini; c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w) \tag{10}$$

- On peut vérifier cette convergence en utilisant le critère de Cauchy pour tous les éléments w de S.

Il se peut que la suite $\{X_n(w)\}_{n=1,2,\cdots,\infty}$ ne converge que pour des épreuves élémentaires w appartenant à un sous-ensemble A quelconque, c'est-à-dire pour tout $w \in A$ la suite $\{X_n(w)\}_{n=1,2,\cdots,\infty}$ converge vers la valeur $X(w)$.

Définition

On dit que la suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n=1,2,\cdots,\infty}$ converge presque sûrement vers la variable X, si la probabilité $P(A) = 1$.

Note: Dans cette situation, il existe un sous-ensemble pour lequel la suite $\{X_n\}_{n=1,2,\cdots,\infty}$ ne converge pas. Par contre la probabilité de ce sous-ensemble est nulle (donc physiquement non intéressante).

Définition

La suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n=1,2,\cdots,\infty}$ converge en probabilité, s'il existe une variable aléatoire X telle que:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0, \;\; \varepsilon > 0 \tag{11}$$

Ce mode de convergence concerne seulement les moments de second ordre.

Définition

On dit qu'une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n=1,2,\cdots,\infty}$ converge en moyenne quadratique, s'il existe une variable aléatoire X de moment de second ordre fini telle que

$$\lim_{n\to\infty} E\left[|X_n - X|^2\right] = 0 \tag{12}$$

- Ce concept de convergence en moyenne quadratique se généralise à un ordre quelconque.
- Dans le cas du moment de premier ordre, nous disons que la suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n=1,2,\cdots,\infty}$ converge fortement vers X si on a

$$\lim_{n\to\infty} E\left[|X_n - X|\right] = 0 \tag{13}$$

Il arrive qu'on s'intéresse seulement à la distribution des variables aléatoires.

Définition

On dit que la suite $\{X_n\}_{n=1,2,\cdots,\infty}$ converge en fonction de distribution vers une variable aléatoire X lorsque

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \tag{14}$$

Note: Dans cette situation les moments de X_n tendent vers ceux de X.

- Si on s'intéresse à une fonction de X_n, on dit que la suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n=1,2,\cdots,\infty}$ tend faiblement vers X si on a

$$\lim_{n\to\infty} E\left[g(X_n)\right] = E\left[g(x)\right] \tag{15}$$

- Les deux modes de convergence forte et faible sont très importants en simulation Monte Carlo.
- Pour des notes et lectures complémentaires, voir [2, 1, 3].

[1] R. V. Hogg and A. T. Craig.
Introduction to mathematical statistics.
Prentice Hall, 5th edition, 1995.

[2] S. M. Ross.
A first course in probability.
Prentice Hall, 6th edition, 2002.

[3] W. M. Wackerly, D. D. and R. L. Scheaffer.
Mathematical statistics with applications.
Duxbury Press, 5th edition, 1996.