

RAPPELS DES CALCULS DE PROBABILITÉS

 Ibrahima Dione (Ph.D.) & Van Son Lai (Ph.D., CFA)

 Simulations Stochastiques et Applications en Finance

➤ Expériences Aléatoires et Événements

➤ Algèbre des Événements

➤ Axiome des Probabilités

➤ Probabilités Conditionnelles

➤ Événements Indépendants

Expériences Aléatoires et Événements

- ▷ Une **expérience aléatoire** est une expérience telle qu'on ne peut pas prédire avec exactitude le résultat qui en résulte.
- ▷ Chaque résultat obtenu est appelé **événement simple**.
- ▷ Tous les événements simples sont **exclusifs**.
- ▷ En général, on note l'ensemble de tous les événements simples, **S**.
- ▷ Le nombre des éléments de **S** peut être **fini**, **infini dénombrable** ou **infini non dénombrable**.
- ▷ Un **événement** est tout simplement un sous-ensemble de **S**.
- ▷ Un événement se produit si l'événement simple obtenu fait partie de cet événement.

Exemple:

Considérons l'exemple d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6.

- ▷ L'expérience aléatoire ici est de *Lancer le dé*, car avant le lancer on ne peut dire avec exactitude le résultat obtenu.
- ▷ La face qui se montre peut être 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Chacun de ces résultats est donc un événement simple.
- ▷ Tous ces 6 événements simples sont mutuellement exclusifs et l'ensemble de tous ces événements simples est $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- ▷ On définit l'événement $A = \{ \text{"Faces inférieures ou égales à 4"} \}$. Alors, l'événement A est donné par $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Algèbre des Événements



Définition

Soit S l'univers et soit ζ l'ensemble des événements considérés. ζ est appelé une **algèbre des événements** s'il vérifie les axiomes suivants:

(A1): $S \in \zeta$.

(A2): Pour tout $A \in \zeta$, alors $A^c \in \zeta$.

Note: A^c est l'ensemble des éléments de S qui n'appartiennent pas à A . Il est appelé le **complément** de A dans S .

(A3): Pour tout $A_1, A_2, \dots, A_n \in \zeta$, alors l'union $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \zeta$.

Pour construire une algèbre associée à une expérience aléatoire ayant une infinité d'événements simples, l'axiome A3 sera remplacé par:

(A3'): Pour $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \zeta$, alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \in \zeta$

Axiome des Probabilités



Soit S l'univers associé à une expérience aléatoire donnée sur lequel nous construisons une algèbre des événements ζ .

Définition

La fonction P , qui à chaque événement $A \in \zeta$ on associe la valeur $P(A)$, est appelée probabilité lorsque elle vérifie les axiomes suivantes:

(P1): $P(S) = 1$.

(P2): Pour tout $A \in \zeta$, alors on a: $0 \leq P(A) \leq 1$.

(P3): Pour tout $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \zeta$ tel que $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, alors on a:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Propriété(s) : L'axiome (P3) est appelé σ -additivité des probabilités.

► De ces axiomes, on en déduit $P(\emptyset) = 0$ et $P(A^c) = 1 - P(A)$ pour $A \in \zeta$.

► Soient $A, B \in \zeta$ deux événements, alors on a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilités Conditionnelles



Définition

Soient A et B deux événements quelconques appartenant à la même algèbre. On suppose que l'événement B s'est déjà produit où $P(B) \neq 0$. La probabilité de l'événement A sachant que B s'est réalisé est définie par

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{règle de Bayes})$$

Propriété(s) : Cette probabilité vérifie les axiomes $(P1)$, $(P2)$ et $(P3)$:

- ▷ $P(S|B) = 1$.
- ▷ $0 \leq P(A|B) \leq 1$.
- ▷ $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$.
- ▷ $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B)$, où $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Événements Indépendants



Définition

Deux événements sont considérés comme statistiquement indépendants lorsque la réalisation de l'un deux n'affectera en aucune façon la probabilité d'obtenir l'autre.

- ▷ A et B sont statistiquement indépendants si $P(A|B) = P(A)$.
- ▷ Par la règle de Bayes, si A et B sont des événements indépendants on a

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- ▷ Les différents concepts abordés dans ce chapitre sont fondamentaux dans la théorie des probabilités.
- ▷ Le lecteur pourra se référer au livre: «**Ross, a first course in probability theory, 6e edition, Prentice Hall, 2002**».