Calcul Intégral (MATH 1173) - Chapitre 1.2: Les nombres complexes

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

- Les nombres complexes
- La forme polaire
- Les exponentielles complexes
- Exercices suggérés

- Nous commençerons ce chapitre par:
  - définir les nombres complexe,
  - et présenter quelques unes de leurs propriétés.
- Nous présenterons une autre façon de les représenter: la **forme polaire**.
- Et nous terminerons par explorer:
  - la fonction exponentiel d'un nombre complexe,
  - où la **formule d'Euler** sera présentée.

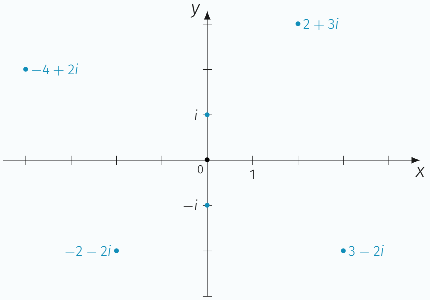
Les nombres complexes

Définition

- On appelle **nombre complexe**, un nombre z qui s'écrit sous la forme

$$z = a + ib$$

où i est un symbole qui vérifie la propriété $i^2 = -1$, et $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.



- Le nombre complexe $z = a + ib$ peut aussi être représenté par le couple (a, b) et marqué comme un point du plan.

Exemple 1.1:

- ▷ Le nombre complexe $i = 0 + 1 \cdot i$ est le point de coordonnées $(0, 1)$.

- Le nombre réel a est appelé la **partie réelle** du nombre complexe $z = a + ib$.
- Alors que Le nombre réel b est appelé la **partie imaginaire** du nombre complexe $z = a + ib$.

Exemple 1.2:

- ▷ La partie réelle du nombre complexe $4 - 3i$ est 4 et la partie imaginaire -3.

- Deux nombres complexes $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$ sont dits **égaux** si

$$\begin{cases} a = c \quad (\text{parties réelles égales}), \\ b = d \quad (\text{parties imaginaires égales}). \end{cases}$$

- L'axe $0x$ est appelé l'**axe réel** et celui $0y$ est appelé l'**axe imaginaire**.

- La somme (ou la différence) de deux nombres complexes est le nombre complexe dont:
  - la partie réelle est la somme (ou la différence) des parties réelles de ces nombres,
  - et la partie imaginaire est la somme (ou la différence) des parties imaginaires de ces nombres.

$$\begin{cases} (a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \\ \\ (a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i \end{cases}$$

Exemple 1.3:

▷ Par exemple,

$$(1-i)+(4+7i)=(1+4)+(-1+7)i=5+6i$$

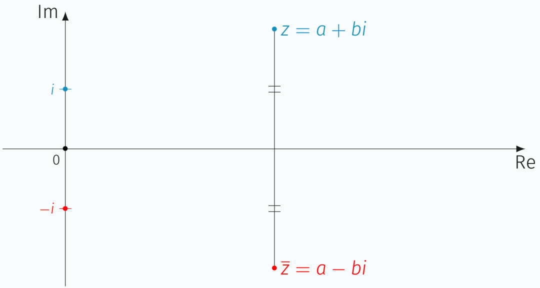
- Le produit des deux nombres complexes $(a+bi)$ et $(c+di)$ est déterminé par la formule

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Exemple 1.4: $(-1+3i)(2-5i) = 13+11i$

Définition

On appelle **complexe conjugué** du nombre complexe $z = a+bi$, le nombre complexe noté $\overline{z}$, et défini par $\overline{z} = a - bi$.



- Pour effectuer la division de deux nombres complexes, on multiplie numérateur et dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur.

Exemple 1.5:

▷ Exprimez le nombre $\frac{-1+3i}{2+5i}$ sous la forme $a+bi$.

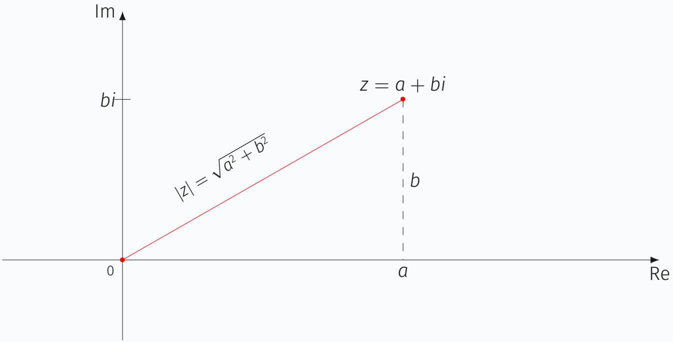
$$\frac{-1+3i}{2+5i} = \frac{-1+3i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{13+11i}{2^2+5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$$

Propriétés des conjugués

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \overline{w} \qquad \overline{z \times w} = \bar{z} \times \overline{w} \qquad \begin{aligned} \overline{z^n} &= \bar{z}^n \\ &= \underbrace{\bar{z} \times \bar{z} \cdots \times \bar{z}}_{n \text{ fois}} \end{aligned}$$

- Le **module**, ou **valeur absolu**, $|z|$ d'un nombre complexe $z = a + bi$ est la distance de son image à l'origine:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



- Nous avons aussi l'identité suivante:

$$\begin{aligned} z \times \bar{z} &= |z|^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

- Comme $i^2 = -1$, on peut penser que i est une racine carrée de -1.
- Mais on a aussi $(-i)^2 = i^2 = -1$, d'où $-i$ est également une racine carrée de -1.

- Ainsi, on dit que i est la **principale racine carrée** de -1 et on écrit

$$i = \sqrt{-1}$$

- De ce fait, pour un nombre positif quelconque c, on a la convention

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}i$$

Formule des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $\Delta < 0$

- Désormais, avec la convention $i = \sqrt{-1}$, la formule des racines d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ reste valable, même lorsque $b^2 - 4ac < 0$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

  deviennent ainsi les nombres complexes

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

- Les solutions de l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$ sont des nombres complexes conjugués l'un de l'autre (si $b^2 - 4ac < 0$).

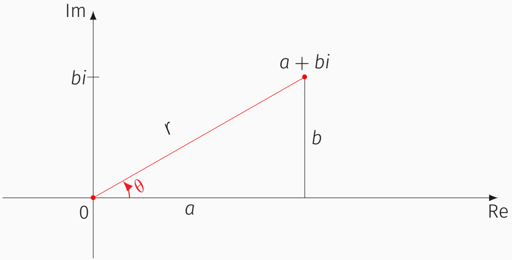
Note: Les coefficients a, b et c de l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$ sont des nombres réels.

Exemple 1.6:

- Quelles sont les racines de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

La forme polaire

▷ Le complexe $z = a + bi$ est le point de coordonnées cartésiennes (a, b).



▷ Ainsi, sa représetation en coordonnées polaires est (r, θ) où

$$a = r\cos\theta \quad \text{et} \quad b = r\sin\theta$$

Définition

- Tout nombre complexe $z = a + bi$ peut s'écrire sous la forme

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \text{où} \quad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad tg\ \theta = \frac{b}{a}$$

- L'angle θ est appelé l'**argument** de z et on écrit $\theta = Arg\ z$.

Note: Notez que $Arg\ z$ n'est pas unique; deux arguments quelconques de z diffèrent d'un multiple entier de 2π.

Exemple 2.1:

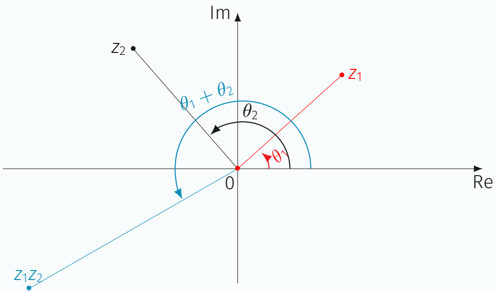
▷ Écritez chacun des nombres suivants sous forme polaire.

- $z = 1 + i$
- $w = \sqrt{3} - i.$

▷ Soient les complexes $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

- Grâce aux formules d'addition du sinus et du cosinus, nous avons:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$



Note: Pour multiplier deux nombres complexes, on multiplie les modules et on additionne les arguments.

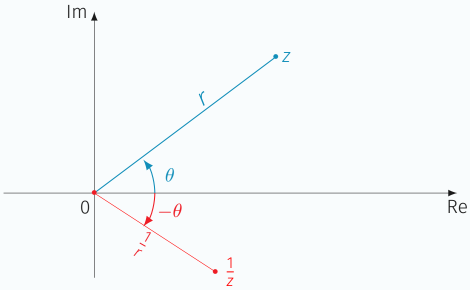
- Grâce aux formules de soustraction du sinus et du cosinus, on a:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right], \quad z_2 \neq 0.$$

> **Note:** Pour diviser deux nombres complexes, on divise les modules et on soustrait les arguments.

- En particulier, si $z_1 = 1$ (e.i. $\theta_1 = 0$) et $z_2 = z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, on a:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left[\cos(\theta) - i\sin(\theta)\right], \quad z \neq 0.$$



Exemple 2.2:

- Effectuez le produit des nombres complexes $1+i$ et $\sqrt{3}-i$ en passant par la forme polaire.

Formule de Moivre Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et si n est un entier positif

$$z^n = \left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right).$$

Exemple 2.3: Calculez $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$.

Définition

Une racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe z est un nombre complexe w tel que

$$w^n = z.$$

Les racines d'un nombre complexe

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et n un entier positif. Alors z a n racines $n^{\text{ième}}$ distinctes

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right],$$

où $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

Note:

- Toutes ces racines $n^{\text{ième}}$ ont le même module $|w_k| = r^{\frac{1}{n}}$.
- Les racines $n^{\text{ième}}$ se trouvent toutes sur le même cercle de rayon $r^{\frac{1}{n}}$.
- Toutes ces racines $n^{\text{ième}}$ sont régulièrement espacées autour de ce cercle car les arguments de ces n racines diffèrent de $2\pi/n$.

Exemple 2.4: Déterminez les 6 racines sixièmes de $z = -8$ et marquez-les dans le plan.

Les exponentielles complexes

- L'objectif ici est de donner un sens à e^z où $z = x + iy$ est un complexe.
- Remarquant que $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, où e^x est l'exponentielle de la variable réelle x,
- La **formule d'Euler** permet de déterminer e^{iy}, où y est aussi un réel.

Définition

L'exponentielle complexe e^{iy}, où y est un réel, est donnée par la **formule d'Euler** suivante:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

Note: Grâce à la **formule d'Euler**, nous avons ainsi le résultat suivant

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Exemple 3.1: Calculez

- $e^{i\pi}$
- $e^{-1+i\pi/2}$

Note: Par la formule d'Euler, nous démontrons celle de Moivre par

$$\left[r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\right]^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

Exercices suggérés

Exercices suggérés

1. Soient $z = 1 + \sqrt{3}i$ et $w = \sqrt{3} - i$ deux nombres complexes.
   - ⋆ Calculez $|z|$.
   - ⋆ Calculez $\frac{z}{w}$.
   - ⋆ Calculez z^{50}.
   - ⋆ Calculez $\frac{1}{w^{100}}$.
2. Écrivez sous forme polaire le nombre complexe $z = (1 - \sqrt{3}i)^{60}$ et calculez $Arg(z)$.
3. Déterminez les quatre racines quatrièmes du nombre complexe $z = -\sqrt{3} + i$.
4. Écrivez sous forme polaire le nombre complexe $z = \frac{(-1+i)^7}{(\sqrt{3}-i)^4}$.

5. Calculez les racines cubiques de $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.

6. Calculez $(-1+i)^{20}$ en utilisant la formule de Moivre.

7. Trouvez toutes les solutions de l'équation $z^3 = 1 - i$.

8. Écrivez sous la forme $a + bi$ les nombres complexes suivants :

   ⋆ $\sqrt{-2}\sqrt{8}\sqrt{-25}$.

   ⋆ $\frac{(3+2i)(2-i)}{1-4i}$.

9. Soient $z = -3 + 3i$ et $w = \sqrt{3} + i$ deux nombres complexes.

   ⋆ Écrivez z et w sous la forme polaire $re^{i\theta}$.

   ⋆ Trouvez la forme polaire $re^{i\theta}$ de $\frac{z}{\bar{z}w}$.

10. Déterminez toutes les solutions des équations suivantes:

- ⋆ $x^4 = 1$.
- ⋆ $4x^2 + 9 = 0$.
- ⋆ $z^2 + z + 2 = 0$.
- ⋆ $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)
- Disponibilités:
  - Mercredi 9H00 - 12H00, MRR B-214
  - Jeudi 13:00 - 16:00, MRR B-214
- Manuel du cours:
  J. Stewart. *Analyse concepts et contextes*. Volume 1, Fonctions d'une variable, DeBoeck Université 3^{e} édition.