UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Arithmétique (MATH 1413) - Chapitre 4: La division

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

- ✓ Nous passons maintenant à la dernière des quatre opérations arithmètiques: **la division** [1].
- ✓ Nous serons ainsi amenés à étudier la relation de divisibilité entre naturels.
- ✓ Les lois $A_0 - A_5, M_0 - M_6$ et $S_1 - S_3$ étant solidement ancrées, nous nous rapprochons ainsi du style d'écriture coutumier en mathématiques.

Le problème de la division

- Nous avons défini au chapitre précédent le *problème de la soustraction* comme étant en quelque sorte une «*addition déguisée*»:

$$a + ? = b.$$

- De façon analogue, nous voulons maintenant introduire le problème «inverse» du problème de la multiplication: **le problème de la division**.

- Le problème de la division est défini comme suit: étant donné deux naturels a et b, identifier un nombre qui, multiplié par a, donne b

$$a \times ? = b. \tag{1}$$

Note: La division apparaît donc comme une **multiplication déguisée**.

Exemple 1.1:

- ✓ Ainsi le problème de division $3\times ? = 24$ a pour solution 8.
- ✓ Par contre le problème $3\times ? = 25$ n'a pas de solution naturelle:

> **Note:** $\mathbb{N}$ n'est donc pas fermé pour la division.

- ✓ Lorsque $a = 0$, le problème (1) pose deux situations indésirables:
  - ⋆ lorsque $b \neq 0$, il est **impossible** de trouver un naturel x tel que $0 \times x = b$ (car 0 est absorbant);
  - ⋆ lorsque $b = 0$, l'équation $0 \times x = 0$ souffre alors d'**indétermination**, car étant satisfaite par n'importe quel élément $x \in \mathbb{N}$.

- ✓ C'est pourquoi nous adoptons la convention suivante.

> **Note:** Le problème de division $a \times ? = b$ n'est défini que pour $a \neq 0$.

- ✓ Cette restriction est habituellement traduite dans le langage scolaire par le slogan

ON NE DIVISE PAS PAR ZÉRO!

- ✓ Remarquons par ailleurs que pour $a \neq 0$, le problème de la division $a \times ? = 0$ est bien défini et a pour solution 0.

Définition

Nous désignons par $b \div a$ la solution (**unique !**) du problème de division $a \times ? = b$, lorsqu'elle existe, et nous l'appelons le **quotient** de b par a.

Attention à l'ordre des nombres en cause!

- ✓ On a donc, par définition même de la division,

$$a \times (b \div a) = b. \tag{2}$$

- ✓ Nous appelons cette égalité l'**égalité caractéristique du quotient**.

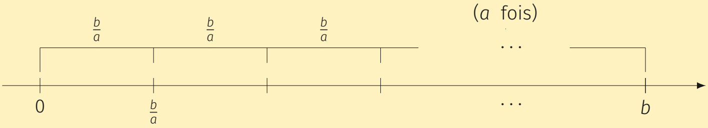
- ✓ Une autre notation couramment utilisée pour représenter le quotient de b par a est l'écriture fractionnaire $\frac{b}{a}$:

$$a \times \left(\frac{b}{a}\right) = b. \tag{3}$$

Note: Nous préférons l'écriture $b \div a$ qui a le mérite de traiter l'opération binaire $\div$ sur le même pied que $+$, $\times$ ou $-$.

Note:

- Le quotient $b \div 0$ n'est jamais défini (peu importe que $b = 0$ ou $b \neq 0$).
- Par ailleurs pour a non nul, on a $0 \div a = 0$.
- En notation fractionnaire: $\frac{5}{0}$ et $\frac{0}{0}$ n'existent pas, tandis que $\frac{0}{5} = 0$.
- Le quotient $b \div a$ correspond à la longueur d'un segment qui, pris a fois (c'est-à-dire additionné a fois avec lui-même), donne b



Définition

Etant donné deux nombres naturels a et b, la **division** de b par a pris dans cette ordre est le nombre naturel solution de l'équation $a \times ? = b$.

- Ce nouveau nombre est désigné par la notation $b \div a$ (qui se lit «*b divisé par a*») ou encore par $\frac{b}{a}$ (qui se lit «*b sur a*»).
- On l'appelle aussi le **quotient de b par a** (ou encore le *quotient de b et a* pris dans cet ordre).
- Les nombres b et a s'appellent respectivement le **dividende** et le **diviseur** de la division de b par a.

✓ Qu'en est-il de l'opération de division ($\div$) en ce qui concerne les propriétés arithmétiques de base?

- **La division n'a pas d'élément neutre**: On a bien $a \div 1 = a$, mais à l'inverse le quotient $1 \div a$ n'existe pas dans $\mathbb{N}$ (sauf pour $a = 1$).

- **La division n'est pas commutative**: Soit les nombres naturels a et b tels $a \neq b$, alors $a \div b \neq b \div a$.

Exemple 1.2:

✓ $4 \div 2 = 2$, alors que $2 \div 4 = 0.5 \notin \mathbb{N}$ donc n'existe pas dans $\mathbb{N}$.

✓ $15 \div 5 = 3$, mais $5 \div 15$ n'existe pas dans $\mathbb{N}$.

■ La division n'est pas associative: En effet, de façon générale, $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$, même lorsque toutes les divisions en cause sont possibles.

Exemple 1.3:

- ✓ Par exemple $(8 \div 4) \div 2 \neq 8 \div (4 \div 2)$.
- ✓ Remarquez qu'il y a néanmoins certains valeurs particulières des variables a, b et c pour lesquelles on a égalité dans l'expression précédente.
- ✓ Sauriez-vous en identifier? En voici un $(4 \div 2) \div 1 = 4 \div (2 \div 1)$.

La division n'est pas distributive sur l'addition ou sur la soustraction.

Exemple 1.4: Par exemple:

- ✓ $12 \div (4+2) \neq 12 \div 4 + 12 \div 2$
- ✓ $12 \div (4-2) \neq 12 \div 4 - 12 \div 2$

Division exacte

Division exacte

✓ Nous nous intéressons dans cette section à des situations où le problème de la division a une solution.

Définition

Considèrons deux nombres naturels a et b, avec $a \neq 0$, tels que le problème de division $a \times ? = b$ a une solution dans $\mathbb{N}$.

- Nous disons alors que a **divise** b, et nous écrivons $a \mid b$.
- Au cas contraire, c'est-à-dire si a **ne divise pas** b, nous écrivons $a \nmid b$.

Note:

- On a donc l'équivalence

$$a \mid b \quad \Longleftrightarrow \quad \text{il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } a \times k = b \,(\text{ ou encore } k \times a = b).$$

- C'est-à-dire $a \mid b$ équivaut à dire que le quotient $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$.

- ✓ Outre a **divise** b, les expressions suivantes sont aussi employées:
  - ⋆ a est un **diviseur** de b, ou a est un **facteur** de b,
  - ⋆ b est un **multiple** de a, ou b est **divisible** par a, ou encore b se **divise** (sous-entendu **exactement**) par a.
- ✓ Cette notion de multiple nous permet de reformuler la définition d'un **nombre pair**.

Définition

- Le naturel n est **pair** si, et seulement si, il est un multiple de 2. Sinon, il est **impair**.
- Autrement dit, les nombres pairs sont tous les nombres de la forme $x = 2k$, pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

✓ Lorsque k balaie tout $\mathbb{N}$, on trouve les valeurs suivantes de x:

$$0 = 2 \times 0, \quad 2 = 2 \times 1, \qquad 4 = 2 \times 2, \quad 6 = 2 \times 3,$$
$$8 = 2 \times 4, \quad 10 = 2 \times 5, \qquad 12 = 2 \times 6, \quad 14 = 2 \times 7.$$

✓ **Les autres naturels $y \in \mathbb{N}$ tels que $2 \nmid y$ sont donc impairs.**

✓ **Ils sont de la forme $y = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$.**

✓ Lorsque k prend des valeurs consécutives dans $\mathbb{N}$, on obtient:

$$1 = 2 \times 0 + 1, \quad 3 = 2 \times 1 + 1, \qquad 5 = 2 \times 2 + 1, \quad 7 = 2 \times 3 + 1,$$
$$9 = 2 \times 4 + 1, \quad 11 = 2 \times 5 + 1, \qquad 13 = 2 \times 6 + 1, \quad 15 = 2 \times 7 + 1.$$

- ✓ La notion «a **divise** b» met en évidence le fait que b peut s'écrire comme un produit de la forme

$$b = a \times (\text{quelque chose})$$

- ✓ Chercher à traduire ainsi un nombre comme un produit de facteurs, c'est chercher à le **factoriser**.

- ✓ Par exemple:
  - ⋆ $360 = 18 \times 20$,
  - ⋆ ou $360 = 30 \times 12$,
  - ⋆ ou encore $360 = 3 \times 3 \times 4 \times 10$.

Définition

Une factorisation du naturel n est un produit de deux ou plusieurs nombres qui est égal à n.

Division euclidienne

Division euclidienne

- ✓ Le problème de la division $a \times ? = b$, lorsque $a, b \in \mathbb{N}^\star$, présente deux scénarios:
  - ⋆ ou bien ce problème a une solution naturelle:

    C'est-à-dire, il est de la forme $b = a \times k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^\star$.

  - ⋆ ou bien ce problème n'a pas de solution:

    b est forcément **pris en sandwich** entre deux multiples consécutifs de a: on a:

    $$\begin{aligned} &\text{soit } q_1 \times a < b, \quad \text{pour un certain } \ q_1 \in \mathbb{N}^\star, \\ &\text{soit } q_2 \times a > b, \quad \text{pour un certain } \ q_2 \in \mathbb{N}^\star. \end{aligned}$$

- ✓ On peut se poser la question: combien ajouter à $q \times a$ pour égaler b?

$$q \times a + \boxed{?} = b$$

- ✓ On parle ainsi de **division euclidienne**.

Définition

Soit deux nombres naturels a et b tel que $a \neq 0$.

- On appelle **division euclidienne** de b par a, lorsqu'ils existent deux nombres naturels q et r tels que

$$b = q \times a + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < a. \tag{4}$$

- Les nombres b et a s'appellent respectivement le **dividende** et le **diviseur** de la division de b par a;

- tandis que q s'appelle le **quotient euclidien** et r, le **reste**.

Note:

- La condition $r < a$ assure le fait que le nombre q est choisi le *plus grand possible*, tel que le multiple $q \times a$ soit inférieur (ou égal) à b.

- Ainsi, le quotient q et le reste r sont *uniquement déterminés* par (4).

Propriétés de la relation de divisibilité

Propriétés de la relation de divisibilité

- F_1 - Réflexivité de $|$: Pour tout nombre naturel a,

$$a \mid a.$$

Démonstration En effet, comme 1 est neutre multiplicatif, on a $a \times 1 = a$.

- F_2 - Antisymétrie de $|$: Pour tous les nombres naturels a et b, avec $a \neq b$,

$$\text{si } \; a \mid b, \quad \text{alors } \; b \nmid a.$$

Remarque : a diviseur de $b \iff b$ multiple de a.

■ F_3 - Transitivité de $|$: Pour tous les nombres naturels a, b et c,

$$\text{si} \quad a \mid b \quad \text{et} \quad b \mid c, \quad \text{alors} \quad a \mid c.$$

Démonstration

- ⋆ On a par hypothèse des naturels x et y tels que $a \times x = b$ et $b \times y = c$.
- ⋆ La question est de savoir si cela entraîne l'existence d'un $z \in \mathbb{N}$ tel que $a \times z = c$.
- ⋆ Or on tire des expressions précédentes

$$\begin{aligned} c &= b \times y \\ &= (a \times x) \times y && \text{substitution} \\ &= a \times (x \times y) && \text{associativité } \times \end{aligned}$$

ce qui nous donne le z recherché. □

Exemple 4.1:
Ainsi, comme $3 \mid 12$ et $12 \mid 60$, on peut conclure par transitivité que $3 \mid 60$.

F_4 **- Comportement de | par rapport à $+$ et à $-$:** Pour tous les nombres naturels a, b et n,

$$\text{si} \quad n \mid a \quad \text{et} \quad n \mid b, \quad \text{alors} \quad n \mid (a \pm b),$$

à condition que la différence $a - b$ existe dans $\mathbb{N}$.

Exemple 4.2: Soit les nombres $n = 2$, $a = 6$ et $b = 4$. Nous avons $2 \mid 4$ et $2 \mid 6$. Alors $2 \mid (6 - 4)$ et $2 \mid (6 + 4)$.

■ F_5 - Comportement de $|$ par rapport à $\times$: Pour tous les nombres naturels a, b et n,

$$\text{si} \quad n \mid a \quad \text{et} \quad n \mid b, \quad \text{alors} \quad n \mid (a \times b).$$

Exemple 4.3: Soit les nombres $n = 2$, $a = 6$ et $b = 4$. Nous avons $2 \mid 4$ et $2 \mid 6$. Alors $2 \mid (6 \times 4)$.

Remarque : Les énoncés réciproques des propriétés $F4$ et $F5$ sont tous faux.

✓ Lorsque $n \mid (a \pm b)$, ce n'est pas forcément le cas que $n \mid a$ et $n \mid b$.
Ainsi $3 \mid (2 + 7)$, mais $3 \nmid 2$. (À noter qu'on a aussi $3 \nmid 7$.)

✓ Lorsque $n \mid (a \times b)$, ce n'est pas forcément le cas que $n \mid a$ ou $n \mid b$.
Ainsi $6 \mid (9 \times 10)$, mais $6 \nmid 9$ et $6 \nmid 10$.

Diviseurs et multiples

Diviseurs

- ✓ 24 donne lieu aux factorisations suivantes (à deux facteurs)

$$\begin{aligned} 24 &= 1 \times 24 \\ &= 2 \times 12 \\ &= 3 \times 8 \\ &= 4 \times 6 \end{aligned}$$

Les diviseurs de 24 sont donc $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ et 24.

- ✓ Voici ce qu'on obtient avec 36

$$\begin{aligned} 36 &= 1 \times 36 \\ &= 2 \times 18 \\ &= 3 \times 12 \\ &= 4 \times 9 \\ &= 6 \times 6 \end{aligned}$$

Les diviseurs de 36 sont $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18$ et 36.

- ✓ La notation suivante est utile pour évoquer de façon concise tous les diviseurs d'un nombre.

> Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose alors
>
> $$div\ n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un diviseur de } n\}$$

Exemple 5.1:

- ✓ $div\ 24 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.
- ✓ $div\ 36 = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

✓ Analoguement à la notation *div* n, nous introduisons la notation suivante pour désigner l'ensemble de tous les multiples du naturel n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose alors

$$mult\ n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un multiple de } n\}$$

Exemple 5.2:

✓ $mult\ 2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \cdots\}$.

✓ $mult\ 12 = \{12, 24, 36, \cdots\}$.

✓ $mult\ 0 = \{0\}$, puisque 0 est absorbant.

- De façon gènérale, *mult* n est un ensemble infini, car il contient tous les élèments de la forme $n \times k$ pour k balayant $\mathbb{N}^\star$.

PGCD et PPCM

✓ Nous avions, dans un de nos exemples précédents, les diviseurs:

$$div\ 24 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \text{ et } div\ 36 = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}.$$

✓ On note des nombres qui sont à la fois diviseurs de 24 et de 36:

$$div\ 24 \cap div\ 36 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

✓ Et parmi ces diviseurs à la fois de 24 et de 36, il existe un plus grand: 12.

✓ Il est appelé, le **plus grand commun diviseur (PGCD)** de 24 et 36.

Définition

Le **plus grand commun diviseur (PGCD)** de deux nombres naturels a et b, est le nombre naturel noté $d = PGCD(a, b)$ vérifiant:

- $d \mid a$ et $d \mid b$ (d est un **diviseur commun**).
- Pour tout $e \in \mathbb{N}^{\star}$, $e \mid a$ et $e \mid b$, alors $e \leq d$ (d est le **plus grand diviseur commun**).

Note:

- Si l'un des deux nombres d'un $PGCD$ est nul, alors $PGCD(a; 0) = a$.
- Pour tout nombre naturel $a \in \mathbb{N}$, nous avons $PGCD(a, a) = a$.

Définition

Soit deux naturels non nuls a et b tels que $PGCD(a, b) = 1$; on dit alors que a et b sont **premiers entre eux**.

- ✓ Les nombres 3 et 7 sont premiers entre eux.
- ✓ Les nombres 12 et 13 sont premiers entre eux.
- ✓ Les nombres 15 et 44 sont premiers entre eux.
- ✓ Par contre, les nombres 24 et 36 ne sont pas premiers entre eux car $PGCD(24, 36) = 12 \neq 1$.

Plus Petit Commun Multiple (PPCM)

- ✓ Nous avions précédemment les multiples des nombres 2 et 12:

$$\begin{aligned} mult\ 2 &= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, \cdots\} \text{ et} \\ mult\ 12 &= \{12, 24, 36, 48, \cdots\} \end{aligned}$$

- ✓ On note des nombres qui sont à la fois multiples de 2 et de 12:

$$mult\ 2 \cap mult\ 12 = \{12, 24, \cdots\}.$$

- ✓ Et parmi ces multiples à la fois de 2 et de 12, il existe un plus petit: 12.

- ✓ Il est appelé, le **plus petit commun multiple (PPCM)** de 2 et 12.

Définition

Le **plus petit commun multiple (PPCM)** de deux nombres naturels a et b, est le nombre naturel noté $m = PPCM(a, b)$ vérifiant:

- $a \mid m$ et $b \mid m$ (m est un **multiple commun**).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, $a \mid n$ et $b \mid n$, alors $m \leq n$ (m est le **plus petit multiple commun non nul**).

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)
- Disponibilités:
  - Lundi 10H00 - 13H00, MRR B-214
  - Mercredi 10H00 - 13H00, MRR B-214
- Manuels du cours:

[1] B. Hodgson and L. Lessard.
Arithmétique élémentaire (1re et 2^{e} parties).
coop Université Laval, Québec, Canada, 2002.