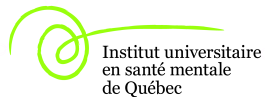




Chapitre 2 : Approximation de racines d'équations non linéaires

Ibrahima Dione (Université Laval)

14 février 2017



① Méthode de la bisection

- 1.2 Principe et algorithme de la méthode
- 1.3 Analyse de convergence de la méthode

② Méthodes des points fixes

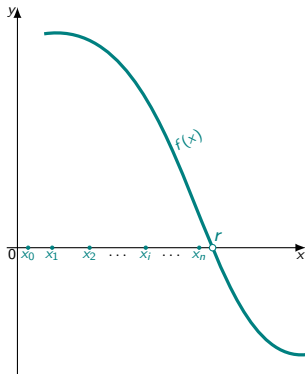
- 2.2 Principe, interprétation et algorithme de la méthode
- 2.3 Analyse de convergence de la méthode

③ Méthode de Newton

- 3.2 Principe, interprétation et algorithme de la méthode
- 3.3 Analyse de convergence de la méthode et le cas d'une racine multiple

④ Méthode de la sécante

- 4.2 Interprétation et algorithme de la méthode
- 4.3 Analyse de convergence de la méthode



On étudie ici, un des problèmes de calcul scientifique le plus rencontré qui est de **construire une suite approximative de la solution (ou racine)** de la fonction $f(x)$ à défaut de la déterminer.

On dit que r est une racine de $f(x)$ si $f(r) = 0$.

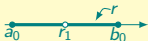
Si $f(x)$ est une fonction polynômiale de degré 1, 2, 3 et 4, il existe un procédé classique de déterminer sa racine. Ce qui n'est pas possible pour des degrés plus élevés (a fortiori pour une fonction non polynômiale). Mais, on peut localiser les solutions et le cas échéant générer, par **une méthode itérative**, des valeurs numériques approximatives $x_i, i = 0, 1, \dots, n$. Parmi celle-ci, on a **la méthode de la bisection et les méthodes de points fixe (de Newton et de la sécante)**.

Principe et algorithme de la méthode de la bisection

Méthode : Si la fonction continue $f(x)$ possède un changement de signe dans l'intervalle $[a_0, b_0]$, c'est à dire si $f(x)$ vérifie $f(a_0) * f(b_0) < 0$, alors elle admet une racine $r \in [a_0, b_0]$. Déterminer par la méthode de la bisection une suite approximatives r_n de la racine r , repose sur la démarche suivante :

a) Calculer le point médian $r_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ de l'intervalle $[a_0, b_0]$ et évaluer $f(r_1)$.

- S'il se produit par hasard que $f(r_1) = 0$, alors la racine est trouvée, c'est à dire $r = r_1$: c'est fini !
- Sinon, c'est à dire si $f(r_1) \neq 0$, on a un des deux cas suivants



- * soit $f(r_1) \times f(a_0) < 0$, on a $r \in [a_0, r_1] = [a_1, b_1]$,
- * ou $f(r_1) \times f(a_0) > 0$, on a $r \in [r_1, b_0] = [a_1, b_1]$.

$r \in [a_1, b_1]$ où $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$ et une erreur absolue $|r - r_1| \leq (b_1 - a_1)$

b) De toute évidence, en répétant ce processus avec le nouvel intervalle à chaque fois, on génère ainsi une séquence d'intervalles $\{[a_n, b_n] : n \geq 1\}$ et de point milieu $\{r_n : n \geq 1\}$ telles que

$$r \in [a_n, b_n], \text{ avec une approximation de la racine } r_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}), \quad (1.1)$$

$$\text{avec une longueur } b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \text{ et une erreur absolue } |r - r_n| \leq (b_n - a_n)$$

c) On arrête ce processus, lorsque la longueur de l'intervalle $[a_n, b_n]$ est relativement faible par rapport à r_n .

Algorithme 1.1: Algorithme ^a de la bisection

- 1 Étant donné un intervalle $[a_0, b_0]$ pour lequel $f(x)$ possède un changement de signe
- 2 Étant donné le critère d'arrêt ε_a et le nombre maximal d'itérations N
- 3 Poser

$$r_n = \frac{1}{2} (a_0 + b_0)$$

- 4 Si $\frac{|b_0 - a_0|}{2|r_n|} < \varepsilon_a$
 - * convergence atteinte
 - * écrire la racine r_n
 - * écrire $f(r_n)$
 - * arrêt
- 5 Écrire $a_0, b_0, r_n, f(a_0), f(b_0)$ et $f(r_n)$
- 6 Si $f(a_0) \times f(r_n) < 0$, alors $b_0 = r_n$
- 7 Si $f(a_0) \times f(r_n) > 0$, alors $a_0 = r_n$
- 8 Si le nombre maximal d'itérations N est atteint :
 - * convergence non atteinte en N itérations
 - * arrêt
- 9 Retour à l'étape 3

a. André Fortin : *Analyse numérique pour ingénieurs*, Presses Internationales Polytechnique, Montréal (QC) 2016.

Remarque(s) :

- La quantité décrite au point 4 de cette algorithmne, en l'occurrence,

$$\frac{|b_0 - a_0|}{2|r_n|}, \quad (1.2)$$

est une approximation de l'erreur relative. En effet, à chaque étape de cette division à moitié d'intervalle, la racine recherchée est soit dans $[a_0, r_n]$ ou dans $[r_n, b_0]$, qui sont tous deux de longueur $\frac{(b_0 - a_0)}{2}$ qui est une borne supérieure de l'erreur absolue.

- Dans l'algorithme, il faut prendre garde au cas où la racine recherchée est zéro. Il y aura risque de division par 0 au cours de l'évaluation de l'erreur (1.2).
- Il est utile d'introduire un critère d'arrêt sur la valeur de $f(x)$, qui doit tendre vers 0.

Exemple 1

La fonction $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ possède une racine dans l'intervalle $[1, 2]$, car elle est continue et vérifie

$$f(1) \times f(2) = -4, 0 \times 3, 0 = -12, 0 < 0$$

- On calcule le milieu de l'intervalle $r_1 := \frac{(1+2)}{2} = 1, 5$ et on évalue $f(r_1) = f(1, 5) = -1, 875$. Donc $f(r_1) \neq 0$ et

$$f(r_1) \times f(2) = -1, 875 \times 3, 0 < 0 = -5, 625$$

Alors le nouveau intervalle est $[1, 5, 2]$ car il possède un changement de signe, contrairement à l'intervalle $[1, 1, 5]$.

- Ainsi encore, le point milieu est $r_2 = \frac{(1,5+2)}{2} = \frac{7}{4} = 1, 75$. Puisque $f(1, 75) = 0, 17187$, on prendra l'intervalle $[1, 5, 1, 75]$ et ainsi de suite. Le tableau suivant résume les résultats

Méthode de la bisection appliquée à la fonction $f(x) \equiv x^3 + x^2 - 3x - 3$						
a_0	b_0	r_n	$f(a_0)$	$f(b_0)$	$f(r_n)$	Erreur absolue
1, 0	2, 0	1, 5	-4, 0	3, 0	-1, 875	0, 5
1, 5	2, 0	1, 75	-1, 875	3, 0	0, 171 87	0, 25
1, 5	1, 75	1, 625	-1, 875	0, 171 87	-0, 943 35	0, 125
1, 625	1, 75	1, 687 5	-0, 943 35	0, 171 87	-0, 409 42	0, 062 5
1, 687 5	1, 75	1, 718 75	-0, 409 42	0, 171 87	-0, 124 78	0, 031 25

Remarque(s) : On peut déterminer à l'avance le nombre d'itérations n nécessaire pour obtenir une certaine erreur absolue Δr donnée sur la racine r . Il faut constater que si $L = b_0 - a_0$ est la longueur de l'intervalle de départ, après la première itération cet nouvel intervalle est de longueur $\frac{L}{2}$ et après la $n^{\text{ième}}$ itérations la longueur de l'intervalle devient $\frac{L}{2^n}$. Ainsi pour connaître la valeur de n nécessaire pour avoir

$$\frac{L}{2^n} < \Delta r,$$

il suffit de résoudre cette inéquation en fonction de n et de trouver la condition que

$$n > \frac{\ln\left(\frac{L}{\Delta r}\right)}{\ln(2)}. \quad (1.3)$$

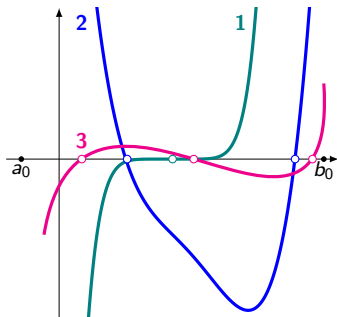
Note: On doit prendre pour valeur de n le plus petit entier vérifiant (1.3).

On a aussi tout intérêt à bien cerner la racine recherchée et à prendre, dès le départ, un intervalle de longueur aussi petite que possible

Exemple 2

À faire en classe !

Analyse de convergence de la méthode de la bisection



- 1 Il existe des cas où la méthode de la bisection ne fonctionne pas. La première situation critique est celle où la fonction $f(x)$ est tangente à l'axe des x et ne présente donc pas de changement de signe.
- 2 Il y a aussi celle où deux racines (ou un nombre pair de racines) sont présentes dans l'intervalle de départ ; en ce cas, il n'y a toujours pas de changement de signe.
- 3 Enfin, si l'intervalle de départ contient un nombre impair de racines, $f(x)$ change de signe, mais l'algorithme peut avoir des difficultés à choisir parmi ces racines.

Remarque(s) : Une façon d'éviter ces écueils est d'illustrer graphiquement la fonction $f(x)$ dans l'intervalle d'intérêt.

Principe de la méthode des points fixes

La méthode des points fixes (dite encore des approximations successives) est la méthode itérative la plus importante dans l'approximation de la racine r de l'équation

$$f(x) = 0. \quad (2.1)$$

Son application n'utilise pas directement l'équation (2.1), mais une équation de la forme

$$g(x) = x, \quad (2.2)$$

où la fonction $g(x)$ est construite à partir de la fonction $f(x)$. Le plus souvent, il va exister différentes façons de transformer l'équation (2.1) sous la forme de l'équation (2.2).

Exemple 3

À partir de la fonction du second degré $f(x) := x^2 - 2x - 3$, vérifiant l'équation

$$f(x) = 0,$$

déterminer trois différentes formes de la fonction $g(x)$.

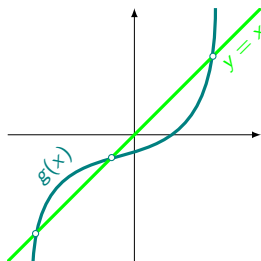
Note: On prendra garde de ne pas confondre les fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

Définition 2.1

Un point x^* , invariant par rapport à la fonction réelle $g(x)$, c'est à dire qui vérifie

$$x^* = g(x^*),$$

est appelé **un point fixe** de la fonction $g(x)$.

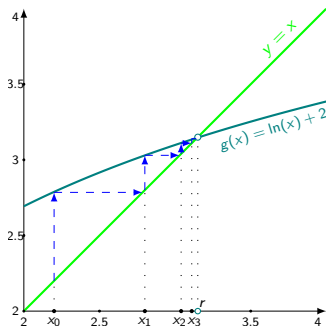


Un point fixe de la fonction $g(x)$ est un point où cette fonction intersecte l'équation $y = x$, appelée la première bissectrice.

Par l'exemple précédent, on peut transformer une équation $f(x) = 0$ en un problème équivalent de la forme $x = g(x)$. Donc un point fixe de $g(x)$, est également une racine de la fonction $f(x) = x - g(x)$ (la recherche d'un point fixe est similaire à la recherche d'une racine).

L'équation $x = g(x)$ est la base du schéma itérative de points fixes pour approximer une racine de $f(x)$. Ce schéma sera défini, à partir d'une valeur initiale x_0 , par la formule $x_{n+1} = g(x_n)$.

Interprétation de la méthode des points fixes

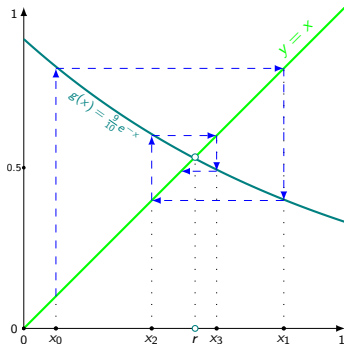


Les courbes $y = x$ et $g(x) = \ln(x) + 2$, où $2 \leq x \leq 4$, sont représentées ici et les points fixes sont bien entendu à l'intersection de ces deux courbes. On a une pente qui vérifie $0 < g'(r) < 1$.

À partir de la valeur initiale x_0 , on se rend sur la courbe $y = g(x)$ au point $(x_0, g(x_0))$ et, de là, sur la droite $y = x$ au point $(g(x_0), g(x_0))$, qui est en fait (x_1, x_1) .

On recommence le même processus à partir de x_1 pour se rendre à $(x_1, g(x_1))$ et, de là, sur la droite $y = x$ au point $(g(x_1), g(x_1)) = (x_2, x_2)$.

On répète ce trajet jusqu'à la convergence (ou la divergence) de l'algorithme



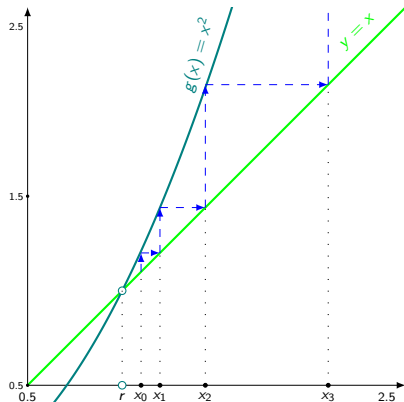
Cette figure présente la courbe $g(x) = \frac{9}{10}e^{-x}$, où $0 \leq x \leq 1$.

Pour identifier le(s) point(s) fixe(s) de cette fonction, on représente également la première bissectrice $y = x$. La pente est donnée par $g'(x) = -\frac{9}{10}e^{-x}$ et vérifie $-1 < g'(x) < 0$ pour $0 \leq x \leq 1$ et en particulier en la racine r .

À partir de la valeur initiale x_0 , on se rend sur la courbe $y = g(x)$ au point $(x_0, g(x_0))$ et, de là, sur la droite $y = x$ au point $(g(x_0), g(x_0))$, qui est en fait (x_1, x_1) .

On répète ce trajet avec x_1 jusqu'à la convergence (ou la divergence).

Remarque(s) : On voit immédiatement la différence de comportement entre les cas convergents $0 < g'(r) < 1$ et $-1 < g'(r) < 0$. Bien que les itérations oscillent de part et d'autre de la racine lorsque la pente est négative, la convergence n'en est pas moins assurée.



Par contre, on a ici la fonction $g(x) = x^2$ représentée sur $0.5 < x < 2.5$. La pente, définie par $g'(x) = 2x$, vérifie $g'(r) > 1$.

On remarque que pour une pente supérieure à 1, les itérations s'éloignent de la racine recherchée.

On a un résultat similaire dans le cas où $g'(r) < -1$; les itérations s'éloigneraient de la racine en oscillant de part et d'autre de la racine.

Il existe un algorithme très simple permettant de déterminer des points fixes. Il suffit en effet, à partir d'une valeur estimée initiale x_0 , d'effectuer les itérations de la façon suivante

$$\begin{cases} \text{Étant donnée } x_0 \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases} \quad (2.3)$$

Algorithme 2.1: Algorithme des points fixes^a :

- ① Étant donné ε_a , un critère d'arrêt
- ② Étant donné N , le nombre maximal d'itérations
- ③ Étant donné x_0 , une valeur estimée initiale du point fixe
- ④ Effectuer $x_{n+1} = g(x_n)$
- ⑤ Si $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \varepsilon_a$:
 - * convergence atteinte
 - * écrire la solution x_{n+1}
 - * arrêt
- ⑥ Si le nombre maximal d'itérations N est atteint :
 - * convergence non atteinte en N itérations
 - * arrêt
- ⑦ Retour à l'étape 4

a. André Fortin : *Analyse numérique pour ingénieurs*, Presses Internationales Polytechnique, Québec (2016).

Exemple 4

Appliquer l'algorithme des points fixes à chacune des fonctions $g_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, obtenues dans l'exemple précédent (dont il n'est pas nécessaire de recourir aux méthodes numériques pour résoudre ce problème car les deux racines de l'équation $f(x) = 0$ sont connues $r_1 = 3$ et $r_2 = -1$).

- Partant de l'estimation initiale $x_0 = 4$, on obtient pour $g_1(x)$:

$$x_1 = g_1(4) = \sqrt{2 \times 4 + 3} = 3,3166248$$

$$x_2 = g_1(3,3166248) = \sqrt{2 \times 3,3166248 + 3} = 3,1037477$$

... ..

$$x_{10} = g_1(3,0000470) = \sqrt{2 \times 3,0000470 + 3} = 3,0000157$$

L'algorithme semble donc converger vers la racine $r_1 = 3$.

- Reprenons l'exercice avec $g_2(x)$, toujours en partant de $x_0 = 4$

$$x_1 = g_2(4) = \frac{3}{4-2} = 1,5$$

$$x_2 = g_2(1,5) = \frac{3}{1,5-2} = -6,0$$

⋮ ⋮ ⋮

$$x_{10} = g_2(-0,9989841) = \frac{3}{-0,9989841-2} = -1,0003387$$

On remarque, contrairement au cas précédent, que les itérations convergent vers la racine $r_2 = -1$ en ignorant $r_1 = 3$.

Suite-Exemple

- En dernier lieu, essayons l'algorithme avec la fonction $g_3(x)$

$$\begin{aligned}
 x_1 = g_3(4) &= \frac{(4)^2 - 3}{2} = 6,5 \\
 x_2 = g_3(6,5) &= \frac{(6,5)^2 - 3}{2} = 19,625 \\
 x_3 = g_3(19,625) &= \frac{(19,625)^2 - 3}{2} = 191,0703 \\
 x_4 = g_3(191,0703) &= \frac{(191,0703)^2 - 3}{2} = 18252,43 \\
 \vdots &\quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned}$$

Les itérations tendent vers l'infini et aucune des deux solutions possibles ne sera atteinte.

Note: On remarquera par cet exemple que l'algorithme des points fixes, selon le choix de la fonction itérative $g(x)$, converge vers l'une ou l'autre des racines et peut même diverger complètement dans certains cas. Il faut donc une analyse plus fine afin de déterminer dans quelles conditions la méthode des points fixes est convergente.

Analyse de convergence de la méthode des points fixes

Question: Sous quelles conditions l'algorithme des points fixes converge vers la racine r ?

Remarque(s) : La relation suivante est fondamentale pour comprendre la convergence.

$$e_{n+1} = g'(r)e_n + g''(r)\frac{e_n^2}{2!} + g'''(r)\frac{e_n^3}{3!} + \dots \quad (2.4)$$

Si $g'(r) \neq 0$ et on néglige les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en e_n on a

$$e_{n+1} \simeq g'(r)e_n. \quad (2.5)$$

- Ainsi la relation (2.5) montre que l'erreur à l'étape $(n+1)$ est directement proportionnelle à l'erreur à l'étape n . Cette erreur ne pourra donc diminuer que si

$$|g'(r)| < 1. \quad (2.6)$$

- La condition (2.6) est une condition nécessaire de convergence de la méthode.
- Le signe de $g'(r)$ a une influence sur la convergence. En effet, si $-1 < g' < 0$, l'erreur changera de signe à chaque itération en vertu de l'équation (2.5) et les valeurs de x_n oscilleront de part et d'autre de la racine r . La convergence n'en sera pas moins assurée.
- La relation (2.5) donne la vitesse à laquelle l'erreur diminue, car plus $g'(r)$ est petit, plus l'erreur diminue vite et donc plus la convergence est rapide.

Définition 2.2

- Le **taux de convergence** d'une méthode des points fixes est donné par $|g'(r)|$.
- On dira qu'un point fixe r de la fonction $g(x)$ est **attractif** si

$$|g'(r)| < 1,$$

et **répulsif** si

$$|g'(r)| > 1.$$

Le cas où $|g'(r)| = 1$ est indéterminé.

Définition 2.3

On dit qu'une méthode des points fixes **converge à l'ordre p** si :

$$|e_{n+1}| \simeq c|e_n|^p, \quad (2.7)$$

Remarque(s) :

- Si $|g'(r)| < 1$ et $|g'(r)| \neq 0$, grâce à la relation (2.5) on a $|e_{n+1}| \simeq |g'(r)||e_n|$. Ainsi la méthode des points fixes converge à l'ordre 1 qui est également dite **linéaire**.
- Si $|g'(r)| = 0$ et $|g''(r)| \neq 0$, alors par la relation (2.4), l'erreur e_{n+1} est proportionnelle à e_n^2 et on a une convergence d'ordre 2 ou **convergence quadratique**.
- Si $|g'(r)| = |g''(r)| = 0$ et $|g'''(r)| \neq 0$, la convergence est d'ordre 3.

La convergence d'une méthode des points fixes est également assujettie au choix de la valeur initiale x_0 . En effet, un mauvais choix de cette valeur peut résulter en un algorithme divergent même si la condition (2.6) est respectée. Cela nous mène à la définition suivante.

Définition 2.4

Le bassin d'attraction de la racine r pour la méthode des points fixes $x_{n+1} = g(x_n)$ est l'ensemble des valeurs initiales x_0 pour lesquelles x_n tend vers r lorsque n tend vers l'infini.

Exemple 6

Revenons aux trois fonctions $g_i(x)$ de l'exemple précédent. On veut s'assurer que la condition (2.6) se vérifie à l'une ou l'autre des racines $r_1 = 3$ et $r_2 = -1$. On doit d'abord calculer

$$g'_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}, \quad g'_2(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}, \quad g'_3(x) = x,$$

pour comprendre les résultats de l'exemple précédent. Pour la racine $r_1 = 3$, on a les taux

$$g'_1(3) = 0,33333, \quad g'_2(3) = -3, \quad g'_3(3) = 3.$$

Et pour la racine $r_2 = -1$, on a les Taux de convergence suivants

$$g'_1(-1) = 1, \quad g'_2(-1) = -0,33333, \quad g'_3(-1) = -1.$$

Pour l'interprétation des résultats (voir notes de cours ou le manuel du cours) !

Exemple 7

On considère la fonction $f(x) = e^{-x} - x$ et on s'intéresse, par la méthode des points fixes, aux approximations x_n de la racine $r = 0,56714329$ de l'équation $f(x) = 0$. On transforme cette équation au problème de points fixes $x = e^{-x} =: g(x)$. Partant de l'approximation initiale $x_0 = 0$ et en posant $e_n = x_n - r$, l'erreur à l'étape n , on obtient ce tableau.

Méthode des points fixes appliquée à la fonction $g(x) \equiv e^{-x}$			
n	x_n	$ e_n $	$\left \frac{e_{n+1}}{e_n} \right $
1	1,000 0000	$0,4328 \times 10^0$	0,4603
2	0,367 8794	$0,1992 \times 10^0$	0,6276
3	0,692 2006	$0,1250 \times 10^0$	0,5331
4	0,500 4735	$0,6667 \times 10^{-1}$	0,5864
5	0,606 2435	$0,3910 \times 10^{-1}$	0,5562
6	0,545 3957	$0,2174 \times 10^{-1}$	0,5733
7	0,579 6123	$0,1246 \times 10^{-1}$	—
⋮	⋮	⋮	⋮
14	0,566 9089	$0,2344 \times 10^{-3}$	0,5670
15	0,567 2762	$0,1329 \times 10^{-3}$	0,5672
⋮	⋮	⋮	⋮
35	0,567 1433	$\simeq 0$	0,5671

Note: Le calcul de la suite $e_n = x_n - r$ requiert bien entendu de connaître la racine r . Mais dans la réalité, cette racine n'est pas toujours accessible.

Question: Peut-t-on cependant éviter d'utiliser la racine dans le calcul de l'erreur e_n ?

À partir de la relation (2.5) on a $\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} \simeq \frac{e_{n+1}}{e_n}$, c'est à dire $\frac{x_{n+2}-r}{x_{n+1}-r} \simeq \frac{x_{n+1}-r}{x_n-r}$. En isolant la racine r , on trouve la formule numériquement instable suivante

$$r \simeq x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}. \quad (2.8)$$

Et partant de là, on peut réécrire le rapport $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ et obtenir la nouvelle formule

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{x_{n+1} - r}{x_n - r} \simeq \frac{x_{n+1} - x_{n+2}}{x_n - x_{n+1}} =: \frac{E_{n+1}}{E_n} \quad (2.9)$$

On a ainsi introduit l'écart successif entre deux itérations dénoté E_n et défini par

$$E_n := x_n - x_{n+1}, \quad (2.10)$$

dont le calcul n'exige pas de connaître la racine r . On peut donc remplacer le rapport $\left| \frac{e_{n+1}}{e_n} \right|$ par celui-ci $\left| \frac{E_{n+1}}{E_n} \right|$ tel que établi à la relation (2.9).

Exemple 8

Reprenons l'exemple précédent en nous basant cette fois sur E_n pour faire l'analyse. On a les mêmes conclusions.

Méthode des points fixes appliquée à la fonction $g(x) \equiv e^{-x}$			
n	x_n	$ E_n $	$\left \frac{E_{n+1}}{E_n} \right $
1	1,000 0000	$0,6321 \times 10^{+0}$	0,5131
2	0,367 8794	$0,3243 \times 10^{+0}$	0,5912
3	0,692 2006	$0,1917 \times 10^{+0}$	0,5517
4	0,500 4735	$0,1058 \times 10^{+0}$	0,5753
5	0,606 2435	$0,6085 \times 10^{-1}$	0,5623
6	0,545 3957	$0,3422 \times 10^{-1}$	0,5698
7	0,579 6123	$0,1950 \times 10^{-1}$	—
⋮	⋮	⋮	⋮
14	0,566 9089	$0,3673 \times 10^{-3}$	0,5672
15	0,567 2762	$0,2083 \times 10^{-3}$	0,5671
⋮	⋮	⋮	⋮
35	0,567 1433	$0,2469 \times 10^{-8}$	0,5671

Note: On pourra se servir de $e_n = x_n - r$ ou de $E_n = x_n - x_{n+1}$ pour effectuer ce type d'analyse. Lorsque la racine r est connue, on préfère l'utilisation de l'erreur e_n à la place de l'écart E_n .

Méthode d'extrapolation d'Aitken

Méthode : Si l'objectif de la méthode des points fixes est de déterminer une approximation de la racine r , peut-t-on considérer la formule (2.8) comme une approximation de celle-ci ? La réponse est oui et on obtient une meilleure approximation du point fixe r connue sous le nom d'**extrapolation d'Aitken**.

Note: La formule d'extrapolation d'Aitken converge quadratiquement (c'est une méthode d'ordre 2).

À partir d'une méthode des points fixes convergeant à l'ordre 1 (car la formule (2.8) est établie dans le cadre où $g'(r) \neq 0$), en posant $n = 0$ on a une première approximation

$$r \simeq x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}, \quad (2.11)$$

à partir de x_0 , x_1 et x_2 . Cela résulte en un algorithme qui accélère grandement la convergence d'une méthode des points fixes. C'est l'**algorithme de Steffenson**.

Algorithme 2.2: Algorithme de Steffenson ^a :

- 1 Étant donné ε_a , un critère d'arrêt
- 2 Étant donné N , le nombre maximal d'itérations
- 3 Étant donné x_0 , une valeur estimée initiale du point fixe
- 4 Effectuer $x_{n+1} = g(x_n)$
 - * $x_1 = g(x_0)$
 - * $x_2 = g(x_1)$
 - * $x_e = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}$
- 5 Si $\frac{|x_e - x_0|}{|x_e|} < \varepsilon_a$:
 - * convergence atteinte
 - * écrire la solution x_e
 - * arrêt
- 6 Si le nombre maximal d'itérations N est atteint :
 - * convergence non atteinte en N itérations
 - * arrêt
- 7 $x_0 = x_e$ Retour à l'étape 4

a. André Fortin : *Analyse numérique pour ingénieurs*, Presses Internationales Polytechnique, Québec 2016.

Exemple 9

Reprenons l'exemple précédent de la méthode des points fixes en partant de $x_0 = 0$

$$x_{n+1} = g(x_n) = e^{-x_n}.$$

L'algorithme de Steffenson consiste à faire deux itérations de points fixes, à extrapoler pour obtenir x_e , à faire deux nouvelles itérations de points fixes à partir de x_e , à extrapoler à nouveau et ainsi de suite. À partir de $x_0 = 0$, on a la première approximation

$$x_1 = e^0 = 1, 0$$

$$x_2 = e^{-1} = 0, 3678794.$$

Ainsi la valeur extrapolée est $x_e = 0 - \frac{(1-0)^2}{0,3678794-2(1)+0} = 0, 6126998$. On recommence le processus à partir de x_e en faisant encore deux itérations de points fixes

$$x_1 = e^{-0,6126998} = 0, 5418859$$

$$x_2 = e^{-0,5418859} = 0, 5816503.$$

La valeur extrapolée est $x_e = 0, 6126998 - \frac{(0,5418859-0,6126998)^2}{0,5816503-2(0,5418859)+0,6126998} = 0, 5673509$. En continuant ainsi, on obtient la valeur extrapolée suivante $x_e = 0, 5671433$ et ainsi de suite.

Note: Chaque itération de l'algorithme de Steffenson demande plus de calculs qu'une méthode de point fixe. C'est le prix à payer pour obtenir une convergence quadratique.

Principe de la méthode de Newton

L'objectif reste de définir une *méthode itérative* afin de générer une *suite* $(x_n)_{n \geq 0}$ de *valeurs numériques approximatives* de la racine r de l'équation (linéaire ou non linéaires)

$$f(x) = 0. \quad (3.1)$$

Méthode : L'idée principale de la méthode de Newton repose sur le fait qu'au voisinage de la racine r , la fonction $f(x)$ peut être confondue avec la tangente en x_0 proche de r :

- Cela revient à confondre $f(x)$ avec son développement de Taylor d'ordre 1 autour x_0

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- La racine de l'équation (3.1), peut donc être approchée par la résolution de

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

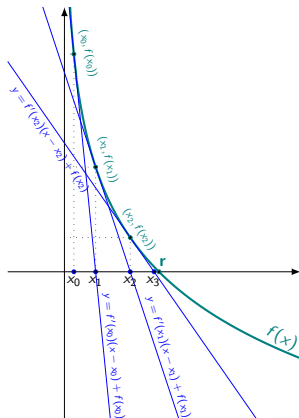
dont la solution, qu'on dénote x_1 , est une première approximation de la racine r :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

- En réitérant le procédé ci-dessus, on construit un schéma algorithmique défini par

$$\begin{cases} \text{À partir d'une valeur initiale } x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{cases} \quad (3.2)$$

Interprétation de la méthode de Newton



- Sur la figure on a la courbe représentative de la fonction $f(x)$, la valeur initiale x_0 et le point $(x_0, f(x_0))$. De plus, on a aussi la droite tangente à la courbe au point x_0 dont l'équation est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- Cette droite coupe l'axe des x en $y = 0$, et génère ainsi une première approximation x_1 de la racine r défini par

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

- On reprend ensuite le même raisonnement à partir du point $(x_1, f(x_1))$ et ainsi de suite.

Algorithme 3.1: Algorithme de la méthode de Newton ^a :

- ① Étant donné ε_a , un critère d'arrêt
- ② Étant donné N , le nombre maximal d'itérations
- ③ Étant donné x_0 , une valeur estimée initiale de la solution
- ④ Effectuer

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- ⑤ Si $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \varepsilon_a$:
 - * convergence atteinte
 - * écrire la solution x_{n+1}
 - * arrêt
- ⑥ Si le nombre maximal d'itérations N est atteint :
 - * convergence non atteinte en N itérations
 - * arrêt
- ⑦ Retour à l'étape 4

a. André Fortin : *Analyse numérique pour ingénieurs*, Presses Internationales Polytechnique, Québec (2016).

Note: La méthode de Newton est un cas particulier de la méthode des points fixes où

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Exemple 10

On cherche à résoudre, par la méthode de Newton, l'équation $f(x) = 0$, où la fonction est définie $f(x) = e^{-x} - x$. Calculant la dérivée $f'(x) = -e^{-x} - 1$, l'algorithme se résume à

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1}. \quad (3.3)$$

À partir de la valeur initiale $x_0 = 0$, on a les résultats de l'algorithme (3.3) dans le tableau ci-dessous.

Méthode de Newton appliquée à la fonction $f(x) \equiv e^{-x} - x$			
n	x_n	$ e_n $	$\left \frac{e_{n+1}}{e_n} \right $
0	0,000 0000	$0,5671 \times 10^{+0}$	$0,1183 \times 10^{+0}$
1	0,500 0000	$0,6714 \times 10^{-1}$	$0,1239 \times 10^{-1}$
2	0,566 3110	$0,8323 \times 10^{-3}$	$0,1501 \times 10^{-3}$
3	0,567 1432	$0,1250 \times 10^{-6}$	$\simeq 0$
4	0,567 1433	$0,4097 \times 10^{-9}$	—

- On remarque que l'erreur absolue $|e_n|$ tend à grands pas vers 0, d'où la convergence très rapide de la méthode.
- On note également que le nombre de chiffres significatifs double à chaque itération. Ce phénomène est caractéristique de la méthode de Newton. La dernière colonne, qui converge vers 0, donne une indication à ce sujet.
- Cette colonne est censée converger vers $|g'(r)|$, qui est donc nul dans ce cas, ce qui semble indiquer que la convergence est au moins quadratique.

Analyse de convergence de la méthode de Newton

La méthode de Newton est un cas particulier de la méthode des points fixes dont l'analyse de convergence a déjà établi que la convergence dépend de $g'(r)$ et l'on a dans ce cas

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}. \quad (3.4)$$

Puisque $f(r) = 0$ car r étant une racine, on a $g'(r) = 0$ et donc une convergence au moins quadratique de la méthode de Newton, en vertu de la relation (2.4).

Remarque(s) : Il faut noter que, dans le cas où $f'(r)$ est également nul, le résultat précédent n'est plus vrai dans la mesure où $g'(r)$ pourra être différent de 0.

Pour s'assurer que la convergence quadratique de la méthode de Newton, on calcule

$$g''(r) = \frac{f''(r)}{f'(r)} \quad (3.5)$$

et $g''(r)$ n'a a priori aucune raison d'être nul (on doit supposer que $f'(r) \neq 0$). On a

$$e_{n+1} \simeq \frac{g''(r)}{2} e_n^2 = \frac{f''(r)}{2f'(r)} e_n^2 \quad (3.6)$$

qui démontre bien la convergence quadratique (si $f'(r) \neq 0$).

Cas des racines multiples

Définition 3.1

Une racine r de la fonction $f(x)$ est dite de multiplicité m si $f(x)$ peut s'écrire

$$f(x) = (x - r)^m h(x) \quad (3.7)$$

et ce, pour une fonction $h(x)$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow r} h(x) = h(r)$ avec $h(r) \neq 0$.

Théorème 3.1

Une racine r est de multiplicité m (où m est un entier) si et seulement si

$$f(r) = f'(r) = f''(r) = \dots = f^{m-1}(r) = 0, \quad f^m(r) \neq 0 \quad (3.8)$$

c'est-à-dire si la fonction de même que ses $(m - 1)$ premières dérivées s'annulent en r (la dérivée d'ordre m ne doit pas s'annuler en r).

Exemple 11

La fonction $f(x) = x \sin(x)$ possède une racine de multiplicité 2 en $x = 0$. En effet

$$f(x) = x \sin(x), \quad f'(x) = \sin(x) + x \cos(x), \quad f''(x) = 2 \cos(x) - x \sin(x)$$

et l'on conclut aisément que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$.

Note: Qu'arrive-t-il si l'on applique la méthode de Newton dans le cas d'une racine multiple ?

Pour répondre à la question, il faut examiner la quantité $g'(r)$ qui permet de déterminer la nature de la convergence (linéaire, quadratique, \dots). On obtient

$$g'(r) = 1 - \frac{1}{m}. \quad (3.9)$$

- On constate que $g'(r) = 0$ seulement si $m = 1$, c'est-à-dire si l'on a une racine simple (de multiplicité 1).

Note: La convergence de la méthode de Newton ne sera donc quadratique que pour les racines simples.

- Si $m \neq 1$, la méthode de Newton converge linéairement avec un taux de convergence de $1 - \frac{1}{m}$.
- On remarque aussi que, plus m est grand, plus la convergence est lente, car $g'(r)$ est de plus en plus près de 1.

Exemple 12

On considère la résolution de la fonction $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$. En partant de la première approximation $x_0 = 0$, on obtient par la méthode de Newton le tableau ci-dessous.

- Malgré la méthode de Newton appliquée, on remarque une convergence (car $|e_n| \rightarrow 0$) lente vers la racine $r = 1$.
- Mais en vérifiant aisément que $f(1) = f'(1) = 0$, on remarque que la racine 1 est de multiplicité 2 ($m = 2$). Cela est confirmé par le rapport $\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|}$ de la quatrième colonne du tableau, qui doit normalement converger vers $1 - \frac{1}{m}$, c'est-à-dire vers 0,5 dans ce cas précis.
- On note enfin que les valeurs de la dernière colonne semblent augmenter sans cesse et tendent vers l'infini. Cela indique une fois de plus que la convergence est linéaire et non quadratique.

Méthode de Newton appliquée à la fonction $f(x) \equiv x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

n	x_n	$ e_n $	$\left \frac{e_{n+1}}{e_n} \right $	$\left \frac{e_{n+1}}{e_n^2} \right $
0	0,000 0000	1,0000	0,5714	0,5714
1	0,428 5714	0,5714	0,5499	0,9625
2	0,685 7143	0,3142	0,5318	1,6926
3	0,832 8654	0,1671	0,5185	3,1017
4	0,913 3299	0,0866	0,5102	5,8864
5	0,955 7833	0,0442	0,5045	11,429
6	0,977 6551	0,0223	—	—

Remarque(s) : Il existe des moyens de récupérer la convergence quadratique dans le cas de racines multiples. Il suffit en effet de transformer le problème en un problème équivalent ayant les mêmes racines, mais de multiplicité 1. Un exemple de choix de fonction est

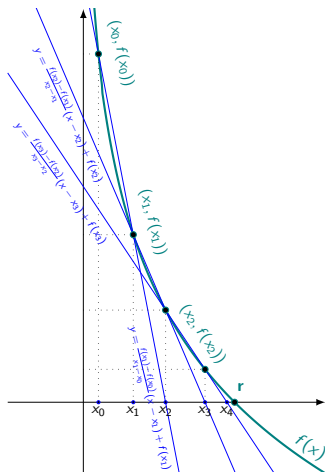
$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

En effet la racine multiple r de la fonction $f(x)$ est ici une racine simple de la fonction $u(x)$, car après calcul on a $u'(r) = \frac{1}{m}$. L'application de l'algorithme de Newton à la fonction $u(x)$ présente un schéma algorithmique défini par

$$\begin{cases} \text{À partir d'une valeur initiale } x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n)}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Note: L'algorithme (3.10) permet de récupérer la convergence quadratique de la méthode de Newton d'une racine multiple, mais il exige de connaître à l'avance la multiplicité m de cette racine recherchée.

Interprétation de la méthode de la sécante



- La méthode de Newton possède de grands avantages, mais elle nécessite le calcul de la dérivée de la fonction $f(x)$ qui dans certain cas, est difficile à évaluer.
- La méthode de la sécante contourne cette difficulté en remplaçant le calcul de la pente $f'(x_n)$ de la droite tangente au point $(x_n, f(x_n))$ de $f(x)$, par l'expression suivante

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}. \quad (4.1)$$

- Cela revient à utiliser la **droite sécante** passant par les points $(x_n, f(x_n))$ et $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ plutôt que la **droite tangente** au point $(x_n, f(x_n))$ telle que utilisée par la méthode de Newton.

Algorithme de la méthode de la sécante

Algorithme 4.1: Algorithme de la méthode de la sécante ^a :

- ❶ Étant donné ε_a , un critère d'arrêt
- ❷ Étant donné N , le nombre maximal d'itérations
- ❸ Étant donné x_0 et x_1 , deux valeurs initiales de la solution
- ❹ Effectuer

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{(f(x_n) - f(x_{n-1}))}$$

- ❺ Si $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \varepsilon_a$:
 - * convergence atteinte
 - * écrire la solution x_{n+1}
 - * arrêt
- ❻ Si le nombre maximal d'itérations N est atteint :
 - * convergence non atteinte en N itérations
 - * arrêt
- ❼ Retour à l'étape 4

a. André Fortin : *Analyse numérique pour ingénieurs*, Presses Internationales Polytechnique, Québec 2016.

Analyse de convergence de la méthode de sécante

Remarque(s) : Plusieurs remarques s'imposent au sujet de cet algorithme :

- La dérivée de $f(x)$ n'apparaît plus dans l'algorithme.
- Il faut fournir au départ 2 valeurs initiales. On l'appelle **un algorithme à deux pas**.
- On choisit les valeurs initiales le plus près possible de la racine recherchée. Il n'est cependant pas nécessaire qu'il y ait un changement de signe dans l'intervalle $[x_0, x_1]$, comme c'est le cas avec la méthode de la bisection.

L'analyse d'erreur de la méthode de la sécante est similaire à celle des points fixes, malgré que ces deux méthodes ne sont pas les mêmes. En effet, une tel analyse permet d'établir

$$e_n \simeq ce_{n-1}^p, \text{ où } p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (4.2)$$

Remarque(s) : L'ordre de convergence de la méthode de la sécante est le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, appelé le nombre d'or. La convergence n'est donc pas quadratique, mais elle est plus que linéaire. On parle alors de **convergence superlinéaire**.

Exemple 13

On cherche à résoudre l'équation suivante que nous avons déjà abordé par d'autres méthodes $e^{-x} - x = 0$. En prenant des deux valeurs initiales $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$, on trouve les itérations présentées sur le tableau ci-dessous.

- La chose la plus importante à remarquer est que le rapport $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ tend vers 0, mais que le rapport $\frac{e_{n+1}}{e_n^2}$ tend vers l'infini, ce qui confirme que l'ordre de convergence se trouve quelque part entre 1 et 2.
- De plus, on remarque que le quotient $\frac{e_{n+1}}{e_n^\alpha}$ avec $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, semble se stabiliser autour de 0, 4.

Méthode de la sécante : $f(x) \equiv e^{-x} - x$

n	x_n	$ e_n $	$\left \frac{e_{n+1}}{e_n} \right $	$\left \frac{e_{n+1}}{e_n^2} \right $	$\left \frac{e_{n+1}}{e_n^\alpha} \right $
0	0,000 0000	$0,5671 \times 10^{+0}$	$0,7632 \times 10^{+0}$	1,0835	1,342
1	1,000 0000	$0,4328 \times 10^{+0}$	$0,1052 \times 10^{+0}$	0,1766	0,243
2	0,612 6998	$0,4555 \times 10^{-1}$	$0,7254 \times 10^{-1}$	0,1766	1,592
3	0,563 8384	$0,3305 \times 10^{-2}$	$0,8190 \times 10^{-2}$	0,2796	2,478
4	0,567 1704	$0,2707 \times 10^{-4}$	$0,6134 \times 10^{-3}$	0,4078	22,66
5	0,567 1433	$0,1660 \times 10^{-7}$	$\simeq 0$	—	—
6	0,567 1433	$\simeq 0$	—	—	—

Exercices suggérés du manuel !

- Exercices ^a suggérés : 1, 4, 5, 7-13, 17-19, 22-26, 29, 30.
- Exercices fortement suggérés : 1, 4, 7, 8b, 13, 17, 19, 24, 30.

a. André Fortin : *Analyse numérique pour ingénieurs*, Presses Internationales Polytechnique

À Retenir !

Je dois pouvoir répondre aux questions^a suivantes :

- ① Je maîtrise la bisection et son terme d'erreur.
- ② Je distingue une racine et un point fixe.
- ③ Je sais construire la fonction $g(x)$ dont le point fixe correspond à la racine de l'équation $f(x) = 0$.
- ④ Je sais caractériser un point fixe (répulsif, \dots) et je comprends ce qu'est un bassin d'attraction.
- ⑤ Je sais établir la convergence ou non d'une méthode de point fixe.
- ⑥ Je comprends et je sais déterminer l'ordre d'une méthode de point fixe.
- ⑦ Je sais utiliser l'extrapolation de Aitken.
- ⑧ Je connais les particularités que constituent les méthodes de :
 - * Steffenson (construction, utilisation et ordre de convergence à connaître)
 - * Newton (utilisation et ordre de la méthode à connaître)
 - * la sécante (utilisation et ordre de la méthode à connaître)
- ⑨ Je saisis la notion de racine multiple et son impact sur la méthode de Newton.
- ⑩ Je comprends que toutes ces méthodes sont sensibles à la position du point de départ x_0 .
- ⑪ Je connais une ou deux méthodes corrigeant la perte d'ordre dans le cas de Newton.
- ⑫ Je sais analyser le comportement d'une méthode en me basant sur un tableau de résultat :
 - * comportement normal ou anomalie imprévue
 - * convergence
 - * ordre

a. André Fortin : *Analyse numérique pour ingénieurs*, Presses Internationales Polytechnique 2016.