

SÉRIE 1 - Algèbre linéaire (MATH 2673)

Exercice 1

Soit V un espace vectoriel sur un corps K et soit W un sous-ensemble non vide de V . Montrez que W est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si

$$\forall u, v \in W, \forall k \in K; k u + v \in W.$$

Exercice 2

Soit V l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit W le sous-ensemble de V formé des fonctions dérivables. Montrez que W est un sous-espace vectoriel de V .

Exercice 3

Soit A une matrice de format $m \times n$ dont les éléments sont des nombres réels. On désigne par le noyau de A l'ensemble suivant :

$$N(A) = \{S \in \mathbb{R}_c^n \mid A S = 0\}$$

où \mathbb{R}_c^n est l'espace des vecteurs colonnes à n composantes. Montrez que $N(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}_c^n .

Exercice 4

Soit $S = \{(2, 3, 4), (5, 8, 1), (1, 1, 11), (7, 11, 5)\}$. S est-il un ensemble générateur de \mathbb{R}^3 ?

Exercice 5

Soit $S_1 = \{(1, 2, 1), (1, 2, 3), (3, 6, 5)\}$ et $S_2 = \{(1, 2, 5), (0, 0, 1)\}$. Montrez que $\text{Vect}(S_1) = \text{Vect}(S_2)$ dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 .

Exercice 6

Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . Le complémentaire $E \setminus F$ de F dans E est-il un sous-espace vectoriel de E ? Justifiez votre réponse.