EVALUATION DES OPTIONS PAR SIMULATIONS MONTE CARLO

Ibrahima Dione (Ph.D.) & Van Son Lai (Ph.D., CFA)

Simulations Stochastiques et Applications en Finance

- Options Vanilles: Put et Call Européens

- Programmation Dynamique des Options Américaines

- Méthodes d’Estimation des Coefficients de Sensitivité

Options Vanilles: Put et Call Européens

- Nous supposons qu'un titre $S(t)$ suit un mouvement brownien géométrique sous la probabilité risque neutre

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{1}$$

où W est le mouvement brownien sous la probabilité de risque neutre.

- À partir de ce processus on simule plusieurs trajectoires et on détermine le prix du call ou du put européen en prenant la valeur moyenne de ces simulations.

- L'erreur de simulation obtenue par simulations simples Monte Carlo est plutôt élevée. En effectuant un grand nombre de simulations ou en utilisant des techniques de réduction de variance, nous pouvons améliorer la précision.

- Nous simulons N trajectoires du processus $S(t)$ défini précédemment.
- Pour chaque $W(t)$ généré, nous utilisons $-W(t)$ pour former un deuxième trajet. On obtient au total $2N$ trajectoires.
- Les prix obtenus par simulations Monte Carlo avec variables antithétiques sont plus précis et l'erreur est plus petite que celle obtenue précédemment.

- En pratique, il est souvent essentiel de prendre en compte le fait que les taux d'intérêt sont stochastiques.
- Nous supposons ainsi que le taux d'intérêt suit le processus suivant

$$dr(t) = \kappa\left(\theta - r(t)\right)dt + \sigma_r r^\gamma(t) dW_r(t) \tag{2}$$

  - Si $\gamma = 0$, on a le modèle de Vasicek.
  - Si $\gamma = 0.5$ on a le modèle de Cox, Ingersoll, Ross.
- Le prix du sous-jacent $S(t)$ suit un mouvement brownien géométrique

$$dS(t) = r(t)S(t)dt + \sigma S(t) dW_S(t) \tag{3}$$

- Il faut donc générer

$$dW = \begin{pmatrix} dW_S \\ dW_r \end{pmatrix} \sim N(0, \Lambda) \text{ où } \Lambda = \begin{pmatrix} \Delta t & \rho_{r,S}\Delta t \\ \rho_{r,S}\Delta t & \Delta t \end{pmatrix} \tag{4}$$

- On calcule L sachant $\Lambda = LL^T$ et simulons $dZ \sim N(0, I_2)$ pour obtenir $dW = LdZ$.
- Nous simulons plusieurs trajectoires et on détermine le prix de l'option.

- Nous supposons que le taux d'intérêt, la volatilité du prix du sous jacent et le prix du sous-jacent sont tous aléatoires. On a alors la dynamique

$$\begin{cases} dS(t) = r(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW_S(t) \\ dr(t) = \kappa\left(\theta - r(t)\right)dt + \sigma_r r^{\gamma}(t)dW_r(t) \\ d\sigma^2(t) = \upsilon\left(\beta - \sigma^2(t)\right)dt + \sigma_\sigma\sigma(t)dW_\sigma(t) \end{cases}$$

- Nous générons $dW = (dW_r, dW_\sigma, dW_S)^T$ à l'aide de la décomposition de Cholesky.

- Nous calculons L sachant $\Lambda = LL^T$ et simulons $dZ \sim N(0, I_3)$ pour obtenir $dW = LdZ$

$$dW = (dW_r, dW_\sigma, dW_S)^T \sim N(0, \Lambda) \ \text{ où } \ \Lambda = \begin{pmatrix} \Delta t & \rho_{r,\sigma}\Delta t & \rho_{r,S}\Delta t \\ \rho_{\sigma,r}\Delta t & \Delta t & \rho_{\sigma,S}\Delta t \\ \rho_{S,r}\Delta t & \rho_{S,\sigma}\Delta t & \Delta t \end{pmatrix}$$

- Nous simulons plusieurs trajectoires et on détermine le prix de l'option.

Programmation Dynamique des Options Américaines

- Cette technique a été élaborée dans le but de calculer les prix des options américaines portant sur n sous-jacents $S = (S_1, S_2, \cdots, S_n)$.

- L'idée fondamentale est de diviser l'espace d'approximation (dimension n) en cellules. Ensuite, on suppose que la fonction de payoff et la stratégie optimale sont constantes sur chaque cellule. Il ne reste qu'à évaluer le prix de l'option sur cet espace partitionné.

- L'option étant écrit sur n sous-jacents, la fonction de payoff est donnée

$$\widetilde{P} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(S, t) \longrightarrow \widetilde{P}(S, T)$$

- Nous discrétisons le temps à l'échéance de l'option selon $\{0, \Delta t, \cdots, T\}$. Si nous avons une partition Q de $\mathbb{R}$ alors on peut construire une partition de $\mathbb{R}^n$ qui sera donnée par

$$Partition_i(t) = \left\{S \in \mathbb{R}^n \mid \widetilde{P}(S, T) \in Q_i(t)\right\}$$

- La partition Q comprend k ensembles. Les intervalles $Q_i(t)$ sont définis

$$Q_i(t) =]A(t)e^{B(t)(i-2)}, A(t)e^{B(t)(i-1)}] \text{ pour } i \in [2, k-1]$$
$$Q_1(t) =]-\infty, A(t)]$$
$$Q_k(t) =]A(t)e^{B(t)(k-2)}, +\infty[$$

- Nous aurons les cellules suivantes

$$Partition_1(t) = \left\{ S \in \mathbb{R}^n \,|\, \widetilde{P}(S,T) \leq A(t) \right\}$$
$$Partition_k(t) = \left\{ S \in \mathbb{R}^n \,|\, \widetilde{P}(S,T) > A(t)e^{B(t)(i-2)} \right\}$$
$$Partition_i(t) = \left\{ S \in \mathbb{R}^n \,|\, A(t)e^{B(t)(i-2)} < \widetilde{P}(S,T) \leq A(t)e^{B(t)(i-1)} \right\}, \; i \in [2, k-1]$$

- Nous choisissons $A(t)$ et $B(t)$ de sorte qu'on ait

$$Prob\left(S(t) \in Partition_1(t)\right) \approx 0.1\%$$
$$Prob\left(S(t) \in Partition_k(t)\right) \approx 0.1\%$$

Le choix de $0,1\%$ est quelque peu arbitraire; cela dépendra de la dispersion de nos chemins et du problème étudié.

- Notons $S_1(t), \cdots, S_M(t)$ les M chemins générés par le processus S. Nous définissons ensuite

$$\begin{aligned}
\alpha_i(t) &= Card\left\{m \in [1, M] \mid S^m(t) \in Partition_i(t)\right\} \\
\beta_{i,j}(t) &= Card\Big\{m \in [1, M] \mid S^m(t) \in Partition_i(t), \\
&\qquad S^m(t+\Delta t) \in Partition_j(t+\Delta t)\Big\} \\
\gamma_i(t) &= \sum_{S \in Partition_i(t)} \widetilde{P}(S^m(t), t)
\end{aligned}$$

- La moyenne des paiements sur la cellule $Partition_i(t)$ est $\frac{\gamma_i(t)}{\alpha_i(t)}$.

- La probabilité conditionnelle d'aller dans la cellule $Partition_j(t+\Delta t)$ lorsque nous sommes déjà dans la cellule $Partition_i(t)$ est $\frac{\beta_{i,j}(t)}{\alpha_i(t)}$.

- Algorithme:
  - Au temps T, on calcule $Price(i, T) = \frac{\gamma_i(t)}{\alpha_i(t)}$,
  - Au temps $T - \Delta t$, pour chaque $i \in [1, k]$, on a

$$Price(i, T - \Delta t) = \max \left(\frac{\gamma_i(T - \Delta t)}{\alpha_i(T - \Delta t)}, \sum_{j=1}^{k} Price(j, T) \frac{\beta_{i,j}(T - \Delta t)}{\alpha_i(T - \Delta t)} \right)$$

  - On applique l'étape précédente récursivement pour calculer $Price(i, T - 2\Delta t), \cdots, Price(1, 0)$
  - Puisque nous achetons l'option au temps $-\Delta t$ de sorte que la période de décision d'exercice commence au temps $t = 0$, nous pouvons obtenir le prix final en calculant

$$e^{-r\Delta t} Price(1, 0)$$

Méthodes d’Estimation des Coefficients de Sensitivité

- Nous traiterons ici quelques méthodes utiles pour estimer les coefficients de sensitivité des options. Plusieurs procédures peuvent être utilisées.

- Nous parlerons ici de la méthode de la dérivée trajectorielle et du ratio de vraisemblance.

- Une méthode très simple consiste à approximer la dérivée par
$$\frac{d\widetilde{P}}{dX} \approx \frac{\widetilde{P}(X+\Delta X) - \widetilde{P}(X)}{\Delta X}$$

- Cependant, cette approche présente des inconvénients:

  - Pour avoir des résultats plus précis nous devons prendre un incrément ΔX plus petit. Cependant, un ΔX trop petit conduira à des erreurs d'approximation et donc résultats erronés.
  - Si ΔX est grand, on risque d'avoir une approximation très biaisée.

- C'est pourquoi d'autres techniques ont été développées pour résoudre ces problèmes.

- Introduite par Broadie et Glasserman en 1996, elle est basée sur la structure et la différentiabilité de la fonction du payoff. Notons cette fonction de payoff par f (payoffs actualisés). Le prix P d'une option est $P = E[f]$.

- En supposant que la dérivée d'une espérance est égale à l'espérance de la dérivée, nous avons

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{dE[f]}{d\theta} \approx E\left[\frac{df}{d\theta}\right]$$

- Si la fonction de payoff est continue par rapport à la trajectoire de S alors nous avons égalité dans cette équation.

- Nous débutons par calculer la dérivée df/dθ et ensuite on simule le sous jacent et on calcule l'espérance.

- Cette méthode d'estimation des coefficients de sensibilité repose sur la structure de la fonction de densité. Le prix P d'une option est

$$P = E[f] = \int_0^\infty f(x)g(x)dx$$

où g est la fonction de densité de S et f est la fonction de payoff.

- En supposant que la fonction f ne dépend pas du paramètre θ, on a

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{d\theta} &= \frac{d\int_0^\infty f(x)g(x)dx}{d\theta} \\
&= \int_0^\infty f(x)\frac{dg(x)}{d\theta}dx \\
&= E\left[f(S(T))\frac{d\log(g(x))}{d\theta}|_{S(T)}\right]
\end{aligned}$$

- Si la fonction de densité g est continue, nous pourrons calculer l'estimateur du ratio de vraisemblance de cette manière