INTRODUCTION AUX PROCESSUS ALEATOIRES

Ibrahima Dione (Ph.D.) & Van Son Lai (Ph.D., CFA)

Simulations Stochastiques et Applications en Finance

- Caractérisation
- Notion de Continuité, Dérivabilité et Intégrabilité
- Exemples de Processus Aléatoires

Caractérisation

- Un processus aléatoire est une fonction du temps, la valeur X à l'instant t est une variable aléatoire. Pour la caractériser statistiquement, nous devons connaître sa fonction de densité de probabilité $f_X(x,t)$.

- La moyenne du processus $\{X(t), t \geq 0\}$ est définie par

$$m_X(t) = E\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x,t)dx \tag{1}$$

- Cette moyenne étant une fonction du temps, la variance est

$$\sigma_X^2(t) = E\left[\left(X(t) - m_X(t)\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_X(t)\right)^2 f_X(x,t)dx \tag{2}$$

> **Note:** Physiquement $m_X(t)$ représente la variation moyenne du processus et $\sigma_X^2(t)$ mesure la fluctuation du processus autour de sa trajectoire moyenne $m_X(t)$.

- Nous pouvons caractériser deux variables aléatoires $X_1 = X(t_1)$ et $X_2 = X(t_2)$ si nous connaissons leur densité conjointe $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2, t_1, t_2)$

- Les densités marginales s'obtiennent par l'intégrale suivante

$$f_{X_i}(x_i, t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_i, X_j}(x_i, x_j, t_i, t_j) dx_j, \quad \text{avec} \quad i, j \in \{1, 2\} \tag{3}$$

- La fonction d'autocorrélation du processus X est définie par

$$R_{X_1 X_2}(t_1, t_2) := E[X_1 X_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X_1, X_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \tag{4}$$

- La fonction d'autocovariance du processus X est donnée par

$$C_{X_1 X_2}(t_1, t_2) := E[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))] \tag{5}$$

- Considérant n instants quelconques $t_1, t_2, \cdots, t_n$, nous pouvons associer la densité conjointe $f_{X_1, X_2, \cdots, X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n, t_1, t_2, \cdots, t_n)$.

Note: Le processus est dit parfaitement caractérisé si, pour tout n quelconque et pour tout ensemble $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ quelconque, la densité conjointe d'ordre n est parfaitement définie.

- Un processus X est stationnaire (stricte stationnarité) si sa fonction de densité de tout ordre $f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n, t_1, t_2, \cdots, t_n)$ est indépendante de l'origine du temps.

- Un processus X est stationnaire (dans le sens large) si on a

$$\begin{cases} f_X(x,t) = f_X(x) \\ f_{X_1,X_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_{X_1,X_2}(x_1, x_2, t_2 - t_1) \end{cases}$$

Note: Pour un processus stationnaire X, sa moyenne $m_X(t)$ est une constante et sa fonction d'autocorrélation vérifie

$$R_{X_1,X_2}(t_1, t_2) = R_{X_1,X_2}(t_2 - t_1)$$

Notion de Continuité, Dérivabilité et Intégrabilité

Définition

Le processus aléatoire $X = \{X(t), t \geq 0\}$ à variance finie converge en moyenne quadratique au point t_0 si

$$E\left[(X(t) - X(t_0))^2\right] \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0$$

Si X est continue en moyenne quadratique pour tout $t_0 \in [a, b]$, on dit que X est continue en moyenne quadratique sur cet intervalle.

- La continuité en moyenne quadratique est caractérisée par ce théorème:

Théorème

X est dit continue en moyenne quadratique sur l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si $R_{X_1X_2}(t_1, t_2)$ est continue sur la diagonale $a \leq t1 = t2 \leq b$.

Définition

On dit que le processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dérivable en moyenne quadratique au point t_0 s'il existe un processus $\{Y(t), t \geq 0\}$ tel que

$$\lim_{t \to t_0} E\left[\left(\frac{X(t) - X(t_0)}{t - t_0} - Y(t_0)\right)^2\right] = 0$$

Si X est dérivable en moyenne quadratique pour tout $t \in [a, b]$, on dit que X est dérivable en moyenne quadratique et cette dérivabilité en moyenne quadratique est caractérisée par le théorème suivant.

- La dérivabilité en moyenne quadratique est caractérisée par:

Théorème

X est dérivable en moyenne quadratique sur l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si la dérivée de $R_{X_1X_2}(t_1, t_2)$ par rapport à t_1 et t_2, c'est à dire

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_{X_1,X_2}(t_1, t_2), \tag{6}$$

existe et est continue sur la diagonale $a \leq t1 = t2 \leq b$.

Définition

Soit l'intervalle $[a, b]$ subdivisé en n sous-intervalles de longueur $\Delta = \frac{b-a}{n}$. On dit que le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ est intégrable en moyenne quadratique sur $[a, b]$, s'il existe une variable aléatoire Y telle que

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} X(k\Delta + a) \times \Delta - Y\right)^2\right] = 0$$

▷ L'intégrabilité en moyenne quadratique est caractérisée par le théorème:

Théorème

$\{X(t), t \geq 0\}$ est intégrable en moyenne quadratique sur l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si l'intégrale double

$$\int_a^b \int_a^b R_{X_1X_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \tag{7}$$

converge.

Exemples de Processus Aléatoires

- Un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit gaussien si la densité de probabilité d'ordre n est gaussienne. C'est à dire, lorsqu'elle est donnée par

$$f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n, t_1, t_2, \cdots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Lambda|^{\frac{1}{2}}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x} - \underline{m}\right)^T \Lambda^{-1}\left(\underline{x} - \underline{m}\right)\right] \tag{8}$$

où $\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $\underline{m} = (m_X(t_1), \cdots, m_X(t_n))^T$ et $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ où

$$\Lambda_{ij} := C_{XX}(t_i, t_j) = E\left[(X(t_i) - m_X(t_i))(X(t_j) - m_X(t_j))\right]$$

- Pour un processus gaussien, si on connaît sa trajectoire moyenne $m_X(t)$ et sa fonction d'autocorrélation $R_{XX}(t, t')$, on peut en déduire la densité d'ordre n quelconque car

$$\Lambda_{ij} = R_{XX}(t_i, t_j) - m_X(t_i)m_X(t_j)$$

- Un processus gaussien est parfaitement caractérisé par sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation.

- Subdivisons la demi-droite $[0, \infty[$ en sous intervalles de taille Δt, on a

$$\begin{cases} X(t) = X(k\Delta t), \ \forall\, t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t[\\ X(0) = 0 \end{cases}$$

- On définit le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ par $X((k+1)\Delta t) = X(k\Delta t) + J_k$, où

$$\begin{cases} P\left(J_k = \delta\right) = \frac{1}{2} \\ P\left(J_k = -\delta\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Note: Le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ ainsi défini est appelé marche aléatoire.

- Le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ est de moyenne nulle et de variance

$$\sigma_X^2(t) = m(t)\delta^2 \ \text{ avec } Var(J_k) = \delta^2 \tag{9}$$

- Le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ ainsi défini est tel que, pour tous $t_1 \leq t_2 \leq t_3$, $X(t_3) - X(t_2)$ est indépendant de $X(t_2) - X(t_1)$.

- Les processus aléatoires ayant cette propriété sont qualifiés de processus à accroissements indépendants.

Définition

$\{W(t), t \geq 0\}$ est un processus de Wiener standard si

- $W(0) = 0$
- $\{W(t), t \geq 0\}$ est à accroissements indépendants, c'est-à-dire pour $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, $W(t_4) - W(t_3)$ et $W(t_2) - W(t_1)$ sont indépendants.
- La variable $Z = W(t) - W(t_0)$ est gaussienne de moyenne nulle et de variance $\sigma_Z^2 = t - t_0, \; t_0 \leq t$.

▷ Par conséquent on a $Var[W(t)] = t$ et $m_W(t) = E[W(t)] = 0$.

Note: Comme sa variance augmente avec le temps, la trajectoire du processus s'éloigne donc de l'axe horizontal lorsque t croît.

Propriété(s) : D'autre part, la loi des grands nombres nous permet d'avoir

$$\frac{W(t)}{t} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad t \to \infty \tag{10}$$

- Le processus de Wiener standard a la propriété oscillatoire de Lévy, c'est-à-dire bien que la trajectoire de W soit continue, elle varie de façon irrégulière de sorte qu'elle n'est pas dérivable.

- Ce résultat est dû à $\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t) \approx \sqrt{\Delta t}$.

- Le processus de Wiener standard est une martingale, c'est-à-dire

$$E[W(t_n)|W(t_{n-1}), W(t_{n-2}), \cdots, W(t_1)] = W(t_{n-1}), \; t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

.

- Un pont brownien noté $B_{0,x}^{T,y}(t)$ est un processus obtenu à partir du processus de Wiener standard passant par les points prédéterminés à $t = 0$ et $t = T$. Toutes les réalisations de ce pont vérifient

$$B_{0,x}^{T,y}(0) = x \ \text{ et } \ B_{0,x}^{T,y}(T) = y, \ \forall x, y \tag{11}$$

- Le pont brownien s'exprime comme suit

$$B_{0,x}^{T,y}(t) = x + W(t) - \frac{t}{T}\left(W(T) - y + x\right) \tag{12}$$

- La moyenne du pont brownien est $m_B(t) = x - \frac{t}{T}(x - y)$

- La covariance du pont brownien est

$$\begin{aligned} C_{B,B}(t_1, t_2) &= E\left[\left(B_{0,x}^{T,y}(t_1) - m_B(t_1)\right)\left(B_{0,x}^{T,y}(t_2) - m_B(t_2)\right)\right] \\ &= \min(t_1, t_2) - \frac{t_1 t_2}{T} \end{aligned} \tag{13}$$

- Prenons le pont brownien $B(t) = W(t) - \frac{t}{T}W(T)$, avec $x = 0$ et $y = 0$.

- Sur l'intervalle $[0, T]$, $B(t)$ est développé sous forme de Série de Fourier

$$B(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kw_0 t) + b_k \sin(kw_0 t)) \tag{14}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T B(t)\cos(kw_0 t)dt, \text{ où } a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T B(t)dt \tag{15}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T B(t)\sin(kw_0 t)dt \tag{16}$$

- $B(t)$ est un processus gaussien de moyenne nulle et de fonction d'aucovariance

$$C_{B,B}(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2) - \frac{t_1 t_2}{T} \tag{17}$$

- Ce qui permet de conclure que les a_k et b_k sont des variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle. Pour lectures complémentaires: [1, 8, 2, 3, 4, 5, 6, 7]

[1] A. R. Baxter, M.
Financial calculus : An introduction to derivative pricing.
Cambridge University Press, 1996.

[2] F. Z. Cvitanic, J.
Introduction to the economics and mathematics of financial markets.
MIT Press, 2004.

[3] J. R. Demange, G.
Méthodes mathématiques de la finance.
Economica, 2005.

[4] D. Duffie.
Dynamic asset pricing theory.
Princeton University Press, Third edition, 2001.

[5] B. L. Lamberton, D.
Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.
Ellipse, 1992.

[6] W. B. Malliaris, A.G.
Stochastic methods in economics and finance.
North Holland, 1982.

[7] S. Neftci.
An introduction to the mathematics of financial derivatives.
Academic Press, 2000.

[8] B. T.
Arbitrage theory in continuous time.
Oxford University Press, 1999.