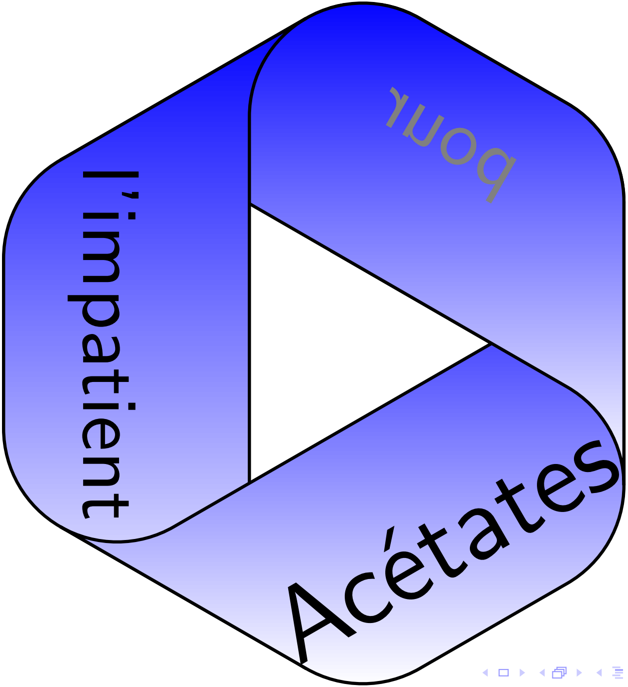
MAT 1910
Mathématiques de l'ingénieur II :
Les intégrales doubles en coordonnées polaires

Dione Ibrahima

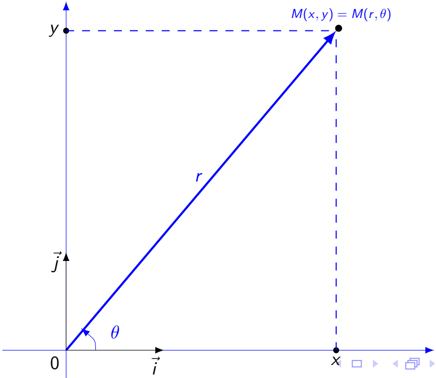
Chapitre II: Intégrales doubles


Acétates
pour
l'impatient

Définition de coordonnées polaires

- Défintion : Soit $M(x,y)$ un point du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$, où x et y désignent ses coordonnées cartésiennes. Ce point peut aussi être caractérisé par sa distance à l'origine notée ici $r = OM$, et l'angle défini par les droites (Ox) et (OM) noté θ (voir figure). Et (r,θ) est relié aux coordonnées $(x,y) \neq (0,0)$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\,\cos\theta \\ \\ y = r\,\sin\theta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \\ \theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{array}\right. \tag{1}$$

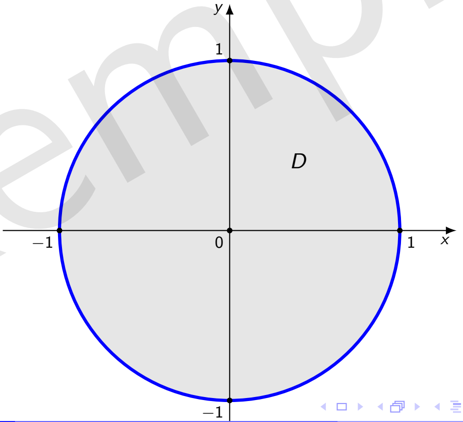


Définition

On appelle coordonnées polaires d'un point $M(x, y) \neq O(0, 0)$ du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le couple (r, θ), défini par le changement de variables en (1).

- Exemples :
  (a) On considère le domaine suivant défini en coordonnées cartésiennes :

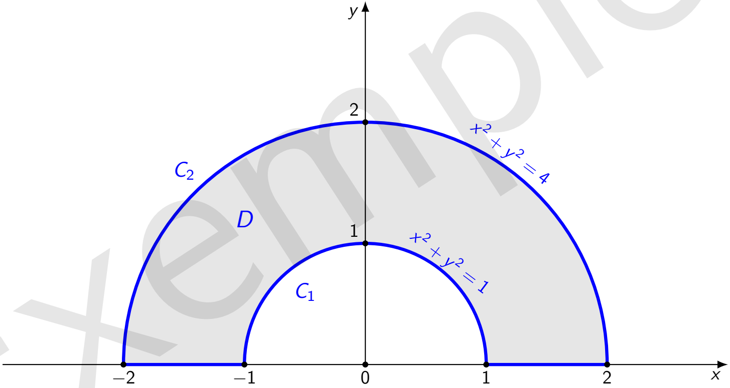
$$D := \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}. \tag{2}$$



En coordonnées polaires on a le même domaine qui est donné par :

$$D := \Big\{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\Big\}. \tag{3}$$

(b) On considère un domaine D délimité par l'axe Ox et les cercles C_1 et C_2 d'équations respectives $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 4$.

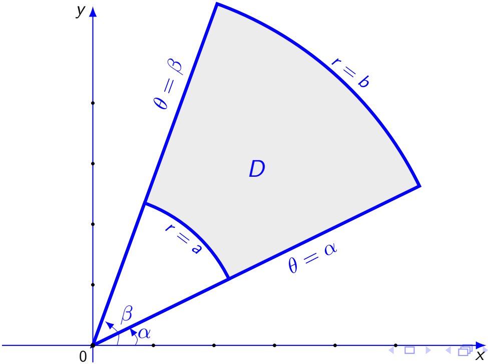


En coordonnées polaires ce domaine est défini comme suit :

$$D := \Big\{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\Big\}. \tag{4}$$

Définition d'intégrales doubles en coordonnées polaires

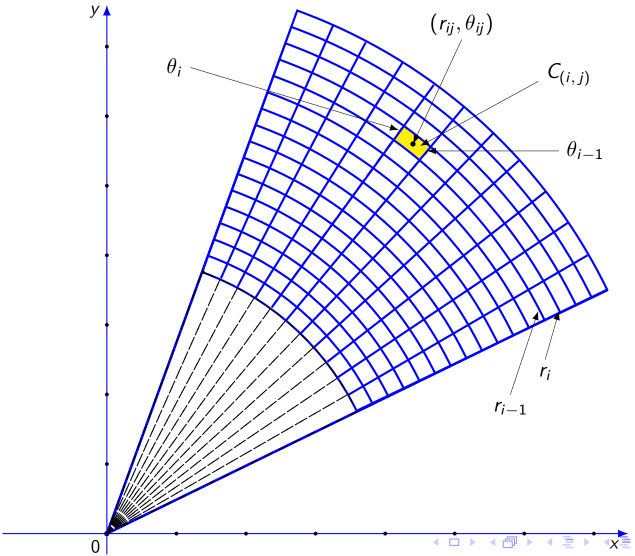
- Définition : Le chapitre précédent a été l'objet de calculs d'intégrales doubles avec des coordonnées cartésiennes. Mais si le domaine est circulaire, ces coordonnées ne sont pas toujours appropriées et l'utilisation des coordonnées polaires s'avère particulièrement bien adapter dans ce cas.
  Domaine circulaire : L'objectif reste donc le mème, c'est à dire pour une fonction $f(x, y)$ de deux variables continue sur un domaine circulaire D, nous voulons calculer le volume algébrique sous le graphe de f et au dessus du cercle ; c'est à dire $\int\int_D f(x, y)dA$, où $D := \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$.



Dans le but de donner une définition, procédons aux étapes suivantes :

(i) On subdivise le domaine D en petits secteurs d'anneaux notés $C_{(i,j)}$:

$$C_{(i,j)} := \Big\{(r,\theta) : r_{i-1} < r < r_i,\ \theta_{j-1} < \theta < \theta_j\Big\}. \tag{5}$$



Ce qui entraine une partition du volume algébrique recherché en secteurs cylindriques (V_{ij}), délimité supérieurement par un morceau du graphe de f.

(ii) On note (r_{ij}, θ_{ij}) le point milieu du secteur d'anneau $C_{(i,j)}$, d'aire $A(C_{(i,j)})$. Ce point milieu et l'aire sont respectivement définis par :

$$r_{ij} := \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i), \; \theta_{ij} := \frac{1}{2}(\theta_{j-i} + \theta_j), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} A(C_{(i,j)}) &:= \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2), \\ &:= \frac{r_i + r_{i-1}}{2}(\theta_j - \theta_{j-1})(r_i - r_{i-1}), \\ &:= r_{ij}\Delta\theta\Delta r. \end{aligned} \tag{7}$$

(iv) On approxime ainsi les secteur cylindriques (V_{ji}) par d'autres, délimités en haut par le plan de hauteur $f(r_{ij}, \theta_{ij})$ et de base le secteur d'anneau $C_{(i,j)}$.

(v) Le volume algébrique total sera approximé par la somme suivante :

$$\begin{aligned} S_{n,m} &:= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A(C_{(i,j)}) f(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\sin\theta_{ij}), \\ &:= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\sin\theta_{ij}) r_{ij}\Delta\theta\Delta r. \end{aligned} \tag{8}$$

Remarque

Le membre de droite de l'égalité (8) n'est rien d'autre qu'une somme de Riemann de la fonction $f(r\cos\theta, r\sin\theta)r$ sur le rectangle $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ du plan des coordonnées polaires (r,θ).

(vi) Le même processus est répété après un raffinement de la partition, c'est à dire une augmentation du nombre de secteurs circulaires $C_{(i,j)}$ tout en diminuant leur taille.

Définition

Au vu de la précédente remarque, on a la définition de l'intégrale double en coordonnées polaires suivante :

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta, \tag{9}$$

$$:= \lim_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\sin\theta_{ij})r_{ij}\Delta\theta\Delta r. \tag{10}$$

Domaine quelconque :

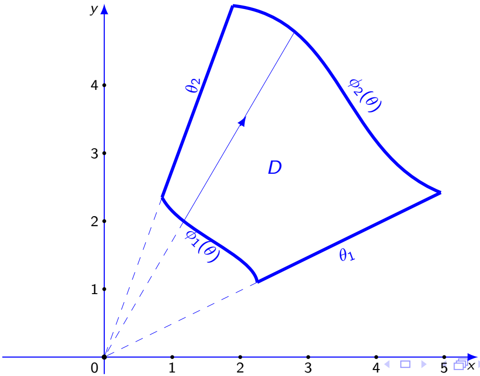
Définition

Soit f une fonction continue sur un domaine polaire D de la forme suivante :

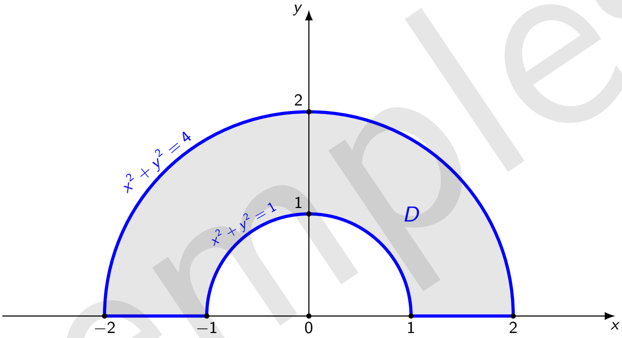
$$D := \Big\{(r,\theta) : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,\ \phi_1(\theta) \leq r \leq \phi_2(\theta)\Big\}.$$

L'intégrale double en coordonnées polaires de la fonction f sur D est définie par :

$$\int\int_D f(x,y)dA \quad := \quad \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \int_{r=\phi_1(\theta)}^{r=\phi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta. \tag{11}$$



- Exemples :
  (a) Calculer $\int\int_D (3x + 4x^2) dA$ où D est la région du demi-plan supérieur comprise entre les cercles d'équations $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 4$.



  (b) Déterminer le volume du solide délimité par le plan $z = 0$ et le paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.
  (c) Calculer l'aire du domaine noté D et défini par :

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2 \right\}. \tag{12}$$

  (d) Calculer $\int\int_D (x^2 + y^2) dA$ où le domaine est donné par :

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \right\}. \tag{13}$$

Applications

- Cacul du moment d'inertie : calculer le moment d'inertie polaire d'un segment circulaire défini en coordonnées polaires par :

$$S := \Big\{(r,\theta) : r \in [a,b], \theta \in [\theta_0, \theta_1]\Big\} \text{ et où } J_0 = \int\int_S (x^2+y^2)dxdy.$$

Solution : On veut calculer le moment d'inertie de formule donnée par :

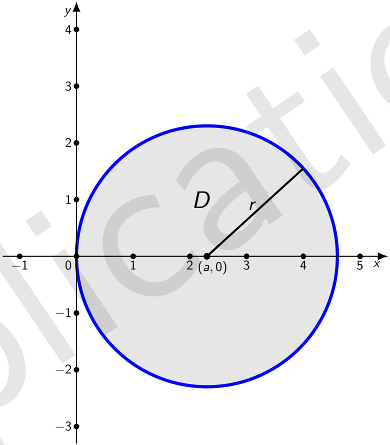
$$J_0 := \int\int_S (x^2+y^2)dxdy$$

Utilisant la relation (9) qui montre ce passage de cartésienne en polaire on a

$$\begin{aligned} J_0 &:= \int\int_S (x^2+y^2)dxdy, \\ &= \int_{r=a}^{r=b} \left(\int_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta_1} (r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)) r d\theta \right) dr, \\ &= \int_{r=a}^{r=b} r^3 \left(\int_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta_1} (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) d\theta \right) dr = (\theta_1 - \theta_2)\frac{b^4-a^4}{4}. \end{aligned}$$

- Calcul d'air et de centre de gravité : Déterminer la position du centre de gravité du disque D, centré en $(a, 0)$ de rayon a. Le matériau dont est constitué le disque est homogène.

  Solution :



Le centre de gravité d'un disque homogène D est par définition donné par :

$$\bar{x} := \frac{1}{A(D)} \int\int_D x dx dy, \quad \bar{y} := \frac{1}{A(D)} \int\int_D y dx dy.$$

Le disque D en coordonnées cartésiennes est défini sous la forme suivante :

$$D := \Big\{(x, y) : (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\Big\}.$$

En coordonnées polaires on a, via le changement $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$,

$$D := \Big\{(r, \theta) : (r\cos(\theta) - a)^2 + (r\sin(\theta))^2 \leq a^2\Big\}.$$

Donc pour $(r, \theta) \in D$ on a la relation suivante

$$\begin{aligned} (r\cos(\theta) - a)^2 + (r\sin(\theta))^2 &\leq a^2, \\ r^2\cos^2(\theta) - 2ar\cos(\theta) + a^2 + r^2\sin^2(\theta) &\leq a^2, \\ r^2 - 2ar\cos(\theta) &\leq 0, \\ r &\leq 2a\cos(\theta). \end{aligned} \tag{14}$$

L'inégalité (14) implique que $\cos(\theta) \geq 0$, c'est à dire que $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$D := \Big\{(r, \theta) : \theta \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big], 0 \leq r \leq 2a\cos(\theta)\Big\}.$$

Nous pouvons maintenant calculer l'aire du domaine pour ensuite chercher $\bar{x}, \bar{y}$:

$$\begin{aligned} A(D) &:= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos(\theta)} r dr \right) d\theta, \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2a^2 \cos^2(\theta) d\theta, \\ &= a^2 \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &:= \frac{1}{a^2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos(\theta)} r^2 \cos(\theta) dr \right) d\theta, \\ &= \frac{1}{a^2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} a^3 \cos^4(\theta) d\theta, \\ &= \frac{a^3\pi}{a^2\pi} = a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &:= \frac{1}{a^2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos(\theta)} r^2 \sin(\theta) dr \right) d\theta, \\ &= \frac{1}{a^2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} a^3 \sin^3 \cos(\theta) d\theta = 0 \end{aligned}$$

Les références :

- Livre J. Stewart (Édition MODULO), page 269-283 : sections 6.4, 6.5.
- Livre J. Stewart (Édition 2), page 852-856 : sections 12.4.
- Pour un cours de maple complet : http ://alamanya.free.fr/

Fin