SÉRIE 4 - Suites, séries, calcul dans $\mathbb{R}^n$

Exercice I

Montrer que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^P}$ est convergente pour tout $p > 1$.

Exercice II

Déterminer si la série converge ou diverge.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3+1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-1}{n^3+1}$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-1}{n-\cos n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^4}{4^n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$

Exercice III

Déterminer le rayou et l'intervalle de convergence de chacune des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x+3)^n$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!}x^n$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt[4]{n}}x^n$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n3^n}$