Faculté des Sciences de l'Administration

Finance en Temps Continu (GSF-8001)

Calcul Stochastique et Application en Finance

Ibrahima Dione, Ph.D.

Automne 2020

Table des matières

Chapitre 1

Introduction au Calcul Stochastique

Sommaire

La branche des mathématiques la plus utilisée en ingénierie financière et en finance mathématique est sans doute le calcul stochastique. Nous introduirons dans ce chapitre des concepts indispensables à une bonne compréhension du sujet, tout en ignorant certains détails mathématiques profonds. Nous aborderons ainsi les notions de processus stochastique, de mouvement brownien, de martingale et d'intégration stochastique. Ces notions seront abordées en temps continu et sont largement étudiées dans les références [1, 3, 2, 6, 8, 7] qui ont servi à la mise en oeuvre de ce chapitre.

1 Processus Stochastique, Mouvement Brownien et Martingale

1.1 - Processus Stochastique

À travers ce chapitre, nous considérons les hypothèses suivantes :

1. L'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et l'espace $(\mathbb{R}, \mathscr{E})$ où
   - ⋆ Ω est l'univers des réalisations w et $\mathbb{R}$ l'ensemble des valeurs réelles ;
   - ⋆ $\mathscr{F}$ est une tribu de Ω, i.e. un sous-ensemble d'événements vérifiant

— $\Omega \in \mathscr{F}$

— Si $E \in \mathscr{F}$, alors $E^c \in \mathscr{F}$

— Si $E_1, E_2, \cdots \in \mathscr{F}$, alors $\cup_{i\geq 1} E_i \in \mathscr{F}$

Ainsi l'espace $(\Omega, \mathscr{F})$ est appelé *espace probabilisable.*

⋆ $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration qui modélise l'évolution de l'information sur un marché financier. Ainsi, $\mathscr{F}_t$ représente l'information dont on dispose à l'instant t. Une filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{F})$ est une famille croissante de sous tribus de la tribu $\mathscr{F}$, e.i.

— Pour tout instant $t \geq 0$, on obtient $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$

— Pour tous instants t_1, t_2 tels que $t_1 \leq t_2$, on a $\mathscr{F}_{t_1} \subseteq \mathscr{F}_{t_2}$

La première condition signifie que l'information la plus fine à notre disposition est décrite par la tribu $\mathscr{F}$, tandis que la deuxième indique que l'information est de plus en plus fine avec le temps [1].

L'espace $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$ est appelé *espace probabilisable filtré.*

⋆ $\mathbb{P}$ est la mesure de probabilité réelle (c'est à dire physique). La fonction $\mathbb{P} : \mathscr{F} \longrightarrow [0,\ 1]$ est appelée mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ si

— $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

— $E \in \mathscr{F}$, alors $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$

— $\forall\, E_1, E_2, \cdots \in \mathscr{F}$, tels que $E_i \cap E_j = \varnothing$ si $i \neq j$, alors

$$\mathbb{P}(\cup_{i\geq 1} E_i) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(E_i)$$

L'espace $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé *espace probabilisé filtré.*

⋆ Et $\mathscr{E}$ est également une tribu de $\mathbb{R}$;

2. L'ensemble des événements qui ont une probabilité nulle de se réaliser $\mathscr{N} = \{E \in \mathscr{F} : \mathbb{P}(E) = 0\}$ est inclus à la tribu $\mathscr{F}_0$.

1. Les transactions, au fur et à mesure, sur le marché sont synonymes d'informations accumulables.

Définition 1.1

• On appelle processus stochastique à temps continu et à valeurs réelles, une famille $(X_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{F})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Outre la notation X_t, pour désigner ces variables aléatoires on peut aussi utiliser $X(t)$ ou bien $X(\cdot, t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
• Une variable aléatoire X_t construite sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{F})$, est une fonction à valeurs réelles telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \{w \in \Omega \,|\, X_t(w) \leq x\} \in \mathscr{F} \tag{1.1}$$

Note :

1. Dans la pratique l'indice t représente le temps et l'origine des temps ici se situe, par convention, en zéro. Et l'horizon des temps est supposé infini (considérant que le marché ne ferme jamais).
2. Un processus peut être vu comme une fonction aléatoire telle qu'à chaque réalisation $w \in \Omega$, on associe la trajectoire $t \longrightarrow X_t(w)$ (voir Figure 1.1).
3. Un processus est une application mesurable de $(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathscr{B} \times \mathscr{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{E})$. C'est à dire vérifiant la formule (1.1).
4. On peut construire la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ engendrée par le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ par $\mathscr{F}_t = \sigma\left\{(X_s,\ 0 \leq s \leq t) \cup \mathscr{N}\right\}$ [a], appelée filtration naturelle (ou bien filtration engendrée) du processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$.
5. Les processus considérés ici seront $\mathscr{F}_t-$adaptés à la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, c'est à dire $\forall\, x \in \mathbb{R}, \{w \in \Omega \,|\, X_t(w) \leq x\} \in \mathscr{F}_t$, pour tout $t \geq 0$.

a. $\mathscr{F}_t = \sigma\{(X_s,\ 0 \leq s \leq t) \cup \mathscr{N}\}$ est la plus petite tribu pour laquelle les variables aléatoires $X_s, 0 \leq s \leq t$, sont mesurables (c'est à dire satisfaisant (1.1)).

Exemple 1.1 *Comme exemples de processus stochastique, on peut citer les indices boursieres ou les prix des titres boursiers.*

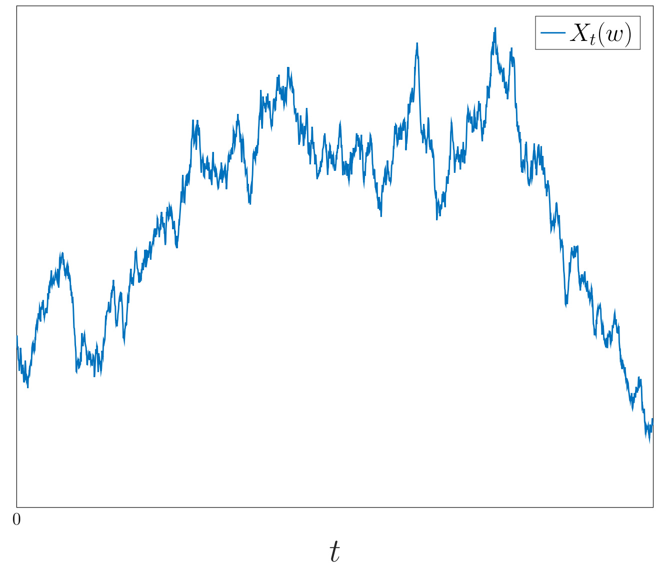


FIGURE 1.1 – Exemple de trajectoire d'un processus stochastique.

Définition 1.2

Un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ est une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ telle que pour tout $t \geq 0$,

$$\{w \in \Omega : \tau(w) \leq t\} \in \mathscr{F}_t$$

On associe à un temps d'arrêt τ une tribu que l'on note $\mathscr{F}_\tau$ et définie par

$$\mathscr{F}_\tau = \{E \in \mathscr{F} \text{ tel que } \forall\, t \geq 0, E \cap \{w \in \Omega : \tau(w) \leq t\} \in \mathscr{F}_t\}$$

Cette tribu représente les informations disponibles avant l'instant aléatoire que représente le temps d'arrêt τ. *En termes non mathématiques, nous voyons qu'un temps d'arrêt est un temps aléatoire dont la valeur fait partie des informations accumulées par ce temps.*

1.2 - Mouvement Brownien

Définition 1.3

Un mouvement brownien standard $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ encore appelé processus de Wiener standard, est un processus stochastique adapté, construit sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et caractérisé par les quatre propriétés suivantes :

1. Le processus commence à zéro, c'est à dire $\forall\, w \in \Omega,\ W_0(w) = 0$;

2. Pour toutes dates s, t telles que $s < t$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ est de distribution normal d'espérance 0 et de variance $t - s$, c'est à dire $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$;
3. Pour toutes dates $t_0, \cdots, t_k$ telles que $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k$, les variables aléatoires $W_{t_1} - W_{t_0}$, $W_{t_2} - W_{t_1}$, $\cdots$, $W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ sont indépendantes ;
4. Pour tout $w \in \Omega$, la trajectoires $t \longrightarrow W_t(w)$ est continue.

Note :

1. W_t est une gaussienne telle que $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[W_t] = 0$ et que $\mathbb{V}ar^{\mathbb{P}}[W_t] = t$.
2. La densité de la variable aléatoire W_t, notée $f_{W_t}(\cdot)$, est définie par

$$f_{W_t}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{v^2}{2t}}$$

3. La variable aléatoire W_t est la somme de ses accroissements, c'est à dire la somme de variables aléatoires indépendantes et de même loi

$$\begin{aligned} W_t &= W_t - W_0 \\ &= (W_t - W_{t-1}) + (W_{t-1} - W_{t-2}) + \cdots + (W_1 - W_0) \end{aligned}$$

Excercice 1.1: Est ce que le processus $\left\{W_t = \sqrt{t}Z,\ t \geq 0\right\}$, où $Z \sim N(0, 1)$, est une mouvement brownien standard ? Justifier votre réponse !

La qualification de *standard* au mouvement brownien est due au fait que

$W_0 = 0$ $\mathbb{P}$-presque-sûrement [2], $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[W_t] = 0$ et $\mathbb{V}ar^{\mathbb{P}}[W_t] = t$.

Lorsque l'on parlera de mouvement brownien sans préciser, il s'agira d'un mouvement brownien standard.

2. X = Y presque-sûrement si l'ensemble des w pour lesquels X est différente de Y a une probabilité nulle, c'est à dire

$$\mathbb{P}\left(\{w \in \Omega : X(w) \neq Y(w)\}\right) = 0$$

Propriété 1.1 *Si $\{W_t,\ t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard, alors les processus suivants sont aussi des mouvements browniens standard :*

1. $\{-W_t,\ t \geq 0\}$, *(Propriété de symétrie) ;*
2. $\left\{cW_{\frac{t}{c^2}},\ t \geq 0\right\}$, *pour* $c > 0$, *(Propriété de rééchelonnement du temps) ;*
3. $\{W_{t+s} - W_s,\ t \geq 0\}$, *pour* $s > 0$, *(Propriété d'homogénéité au temps) ;*
4. $\left\{tW_{\frac{1}{t}} :\ t \geq 0\right\}$, *(Propriété d'inversion du temps)*

Les titres financiers ne sont généralement pas modélisés directement comme des mouvement browniens, mais plutôt comme des processus dérivés de mouvements browniens. Il sera ainsi intéressant de pouvoir considérer des mouvements browniens ayant une valeur initiale différente de zéro. C'est le cas des deux types de mouvements browniens suivants :

▷ **Mouvement Brownien Issu de X_0** : Un mouvement brownien issu de X_0 est un processus de la forme $\{X_t = X_0 + W_t,\ t \geq 0\}$, avec une condition initiale[3] X_0 indépendante du mouvement brownien $\{W_t,\ t \geq 0\}$.

▷ **Mouvement Brownien avec Dérive** : Un mouvement brownien issu de X_0, de dérive (ou tendance) b et de coefficient de diffusion σ est un processus de la forme[4] $\{X_t = X_0 + \sigma W_t + bt,\ t \geq 0\}$ avec une condition initiale X_0 indépendante du mouvement brownien standard $\{W_t,\ t \geq 0\}$.

Exercice 1.2: Soient $\{W_t,\ t \geq 0\}$ et $\left\{\widetilde{W}_t,\ t \geq 0\right\}$ deux mouvements browniens indépendants et ρ un paramètre fixé dans $[-1,\ 1]$. On définit le processus $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ où $X_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}\widetilde{W}_t$.

1. Vérifier que la variable X_t suit une loi normale $N(0,t)$, pour $t > 0$.
2. Est ce que le processus X est un mouvement Brownien ?

3. Dans beaucoup de situations, la valeur initiale X_0 est déterministe.
4. Le processus $\{X_t = X_0 + \sigma W_t + bt,\ t \geq 0\}$ est aussi appelé *mouvement brownien arithmétique*, appellation à mettre en rapport avec celle du mouvement brownien géométrique.

Un processus à n-dimensions, $\left\{W_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \cdots, W_t^{(n)}),\ t \geq 0\right\}$, est un mouvement brownien standard à n dimensions si chaque $W^{(i)}$ est un mouvement brownien standard et les $W_t^{(i)}$ sont indépendants les uns des autres.

- **1.3 - Martingale**

La notion de martingale est un outil essentiel pour expliciter la notion d'arbitrage. On present ici sa définition.

Définition 1.4

Soit $M = \{M_t,\ t \geq 0\}$ un processus stochastique construit sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. M est une martingale en temps continu lorsque qu'il satisfait les propriétés suivantes :

1. Le processus M est intégrable : Pout tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[|M_t|\right] < +\infty$;
2. Pout toute date $t \geq 0$, M_t est $\mathscr{F}_t-$mesurable [a] ;
3. Pour toutes dates s, t telles que $s < t$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t \,|\, \mathscr{F}_s] = M_s \tag{1.2}$$

a. Une variable aléatoire M_t mesurable signifie que sa valeur est connue au temps t.

Propriété 1.2 *L'espérance de toute martingale M est constante et vérifie*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_0],\ \forall\, t \geq 0 \tag{1.3}$$

D'autre part, si $\{W_t,\ t \geq 0\}$ est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien standard :

1. *Le processus $\{W_t,\ t \geq 0\}$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale ;*
2. *Le processus $\{W_t^2 - t,\ t \geq 0\}$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale ;*
3. *Le processus $\left\{e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t},\ t \geq 0\right\}$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale[5].*

Preuve :

Supposons que le processus $\{W_t,\ t \geq 0\}$ est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien.

1. Montrons que c'est une une $\mathscr{F}_t$-martingale :

5. Cette dernière martingale est un exemple de martingale exponentielle. Les martingales exponentielles ont une importance particulière car elles sont positives et peuvent être utilisées pour définir de nouvelles mesures de probabilité.

⋆ Vérifions que $\forall\ t$, la variable W_t est intégrable, e.i. $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[|W_t|] < \infty$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[|W_t|] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |w| e^{-\frac{w^2}{2t}} dw \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{w}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{w^2}{2t}} dw \\ &= -\sqrt{\frac{2t}{\pi}} \left[e^{-\frac{w^2}{2t}} \right]_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\end{aligned}$$

⋆ Par hypothèse, le processus $\{W_t,\ t \geq 0\}$ est $\mathscr{F}_t$-adapté.

⋆ Vérifions que $\forall\ s, t \geq 0$ tels que $s < t$, on a $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[W_t \,|\, \mathscr{F}_s] = W_s$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[W_t \,|\, \mathscr{F}_s] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[W_t - W_s + W_s \,|\, \mathscr{F}_s] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[W_t - W_s \,|\, \mathscr{F}_s] + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[W_s \,|\, \mathscr{F}_s] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[W_t - W_s] + W_s \\ &= W_s\end{aligned}$$

2. Appliquer la même démarche pour démontrer les points 2 et 3. □

Exercice 1.3: Vérifier les points 2 et 3 cités à la Propriété 1.2.

2 Intégration Stochastique

Nous discutons ici le concept d'intégrale stochastique en ignorant diverses conditions techniques, nécessaires pour rendre nos définitions rigoureuses.

▷ Nous considérerons ici le mouvement brownien standard $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$, construit sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

▷ L'objectif est de définir l'intégrale du processus prévisible $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$

$$\left(\int_0^t X_s dW_s\right)(w) \tag{1.4}$$

dite *intégrale stochastique (ou d'Itô)* de X par rapport au brownien W.

- **2.1 - Processus de Base**

Définition 2.1

Le processus $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ est dit de base lorsqu'il est défini par

$$X_t(w) = C(w)\mathbb{1}_{(a,\ b]}(t),\ \forall\, t \geq 0 \text{ et } \forall\, w \in \Omega \tag{1.5}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes telles que $a < b$ et C est une variable aléatoire $\mathscr{F}_a$-mesurable vérifiant $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[C^2] < \infty$.

Propriété 2.1 *Si le processus $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ est de base, alors il est $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté. Mieux il est $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-prévisible.*

Si le processus $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ modélise la part d'un titre à détenir pendant la durée $(a,\ b]$, alors $X_t(w) = C(w)\mathbb{1}_{(a,\ b]}(t)$ représente le nombre de parts à acheter à l'instant a suivant la base de l'information disponible. A la maturité b, ces titres seront ainsi vendus.

Exercice 2.1: Montrer que le processus de base $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ est adapté à la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$.

Définition 2.2

L'intégration d'Itô du processus de base $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ par rapport au brownien $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ est définie par [a]

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^t X_s dW_s\right)(w) &= \left(\int_0^t C\mathbb{1}_{(a,b]}(s)dW_s\right)(w) \\
&= C(w)\left(W_{t\wedge b}(w) - W_{t\wedge a}(w)\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ C(w)\left(W_t(w) - W_a(w)\right) & \text{si } a \leq t \leq b \\ C(w)\left(W_b(w) - W_a(w)\right) & \text{si } b \leq t \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

[a]. Pour tous t et b deux nombres réels, on a la définition suivante $t \wedge b = \min\{t, b\}$.

Note :

1. Pour tout t, l'intégrale $\left(\int_0^t X_s dW_s\right)(\cdot)$ est une variable aléatoire.
2. $\left\{\left(\int_0^t X_s dW_s\right)(\cdot),\ t \geq 0\right\}$ est un processus stochastique.
3. On a l'égalité suivante $\left(\int_0^t X_s dW_s\right)(w) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X_s \mathbb{1}_{(0,\, t]}(s) dW_s\right)(w)$.

Propriété 2.2 *Si $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ est un processus stochastique de base :*

1. *Le processus $\left\{\left(\int_0^t X_s dW_s\right)(\cdot),\ t \geq 0\right\}$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale ;*
2. *Grâce à la formule (1.3), on a le résultat suivant*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t X_s dW_s\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^0 X_s dW_s\right] = 0,\ \forall\, t \geq 0 \tag{1.7}$$

3. *De plus si $Y = \{Y_t,\ t \geq 0\}$ est aussi un processus de base, alors*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t X_s Y_s ds\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\int_0^t X_s dW_s\right)\left(\int_0^t Y_s dW_s\right)\right],\ \forall\, t \geq 0 \tag{1.8}$$

Exercice 2.2:

1. Prouver les points $1, 2$ et 3 de la Propriété 2.2.
2. Soient $\{M_t,\ t \geq 0\}$ et $\{N_t,\ t \geq 0\}$ deux martingales construites sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. On définit le processus $\{Z_t,\ t \geq 0\}$ où $Z_t = aM_t + bN_t$ et a, b sont des constantes. Si $\{X_t,\ t \geq 0\}$ est un processus de base, alors montrer que

$$\int_0^t X_s dZ_s = a\int_0^t X_s dM_s + b\int_0^t X_s dN_s \tag{1.9}$$

2.2 - Processus Simple

Définition 2.3

Le processus $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ est appelé processus simple lorsqu'il est défini comme une somme finie de processus de base $X_{(i,t)}(w)$

$$\begin{aligned} X_t(w) &= \sum_{i=1}^{n} X_{(i,t)}(w) \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i(w)\mathbb{1}_{(a_i,\, b_i]}(t),\ \forall\, t \geq 0 \text{ et } \forall\, w \in \Omega \end{aligned} \tag{1.10}$$

où $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$, sont des constantes telles que $a_i < b_i$, et C_i sont des variables aléatoires $\mathscr{F}_{a_i}$-mesurables vérifiant $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[C_i^2] < \infty$.

Un processus simple étant une somme de processus de base $\mathscr{F}_t$-prévisibles, alors il est lui-même prévisible par rapport à la même filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$.

Définition 2.4

L'intégration d'Itô du processus simple $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$, où $X_t(w)$ défini en (1.10), par rapport au brownien $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ est définie par

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t X_s dW_s\right)(w) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^t X_{(i,s)} dW_s\right)(w) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^t C_i \mathbb{1}_{(a_i,\, b_i]}(s) dW_s\right)(w) \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i(w)\left(W_{t\wedge b_i}(w) - W_{t\wedge a_i}(w)\right) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Propriété 2.3 *Si $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ est un processus stochastique simple :*

1. *Le processus $\left\{\left(\int_0^t X_s dW_s\right)(\cdot),\ t \geq 0\right\}$ est une $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale ;*
2. *Grâce à la formule (1.3), on a le résultat suivant*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t X_s dW_s\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^0 X_s dW_s\right] = 0,\ \forall\, t \geq 0 \tag{1.12}$$

3. *De plus pour tout instant $t \geq 0$, on a le résultat suivant*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t X_s^2 ds\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\int_0^t X_s dW_s\right)^2\right] \tag{1.13}$$

Exercice 2.3:

1. Vérifier les points $1, 2$ et 3 de la Propriété 2.3.
2. Montrer que la variance du processus simple X est donné par

$$\mathbb{V}ar^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t X_s dW_s\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\int_0^t X_s dW_s\right)^2\right] - \left(\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\int_0^t X_s dW_s\right)\right]}_{=0}\right)^2$$
$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t X_s^2 ds\right] = \int_0^t \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[X_s^2\right] ds \qquad (1.14)$$

3. Soient $\{M_t,\ t \geq 0\}$ et $\{N_t,\ t \geq 0\}$ deux martingales construites sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et le processus $\{Z_t = aM_t + bN_t,\ t \geq 0\}$ où a et b sont des constantes. Si $\{X_t,\ t \geq 0\}$ est un processus de simple, alors démontrer le résultat

$$\int_0^t X_s dZ_s = a\int_0^t X_s dM_s + b\int_0^t X_s dN_s \qquad (1.15)$$

2.3 - Processus Prévisible

Nous allons ainsi généraliser aux processus prévisibles, l'ntégrale stochastique ou l'intégrale d'Itô par rapport au mouvement brownien $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$.

Définition 2.5

Soit $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ une processus $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-prévisible où ses composantes $X_t(w)$ sont la limite de suites de processus simples $\left(X_t^{(n)}(w)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. L'intégration d'Itô du processus X par rapport au brownien $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ est défini par

$$\left(\int_0^t X_s dW_s\right)(w) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^t X_s^{(n)} dW_s\right)(w) \qquad (1.16)$$

Les propriétés établies aux classes de processus précédentes restent valables.

Propriété 2.4 *Soit $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ une processus $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-prévisible.*

1. *Si le processus X est de carré intégrable, c'est à dire*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t X_s^2 ds\right] < \infty$$

alors le processus $\left\{\left(\int_0^t X_s dW_s\right), t \geq 0\right\}$ *est une $\mathscr{F}_t$-martingale.*

2. *Grâce à la formule* (1.3), *on a le résultat suivant*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t X_s dW_s\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^0 X_s dW_s\right] = 0, \ \forall\, t \geq 0 \tag{1.17}$$

3. *Pour tout $t \geq 0$, on a le résultat suivant appelé* **Isométrie d'Ito**

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t X_s^2 ds\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\int_0^t X_s dW_s\right)^2\right] \tag{1.18}$$

Exercice 2.4: Soient $\{M_t,\ t \geq 0\}$ et $\{N_t,\ t \geq 0\}$ deux martingales construites sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Soit le processus $\{Z_t,\ t \geq 0\}$ où $Z_t = aM_t + bN_t$ et a, b sont des constantes. Démontrer que si $\{X_t,\ t \geq 0\}$ est un processus de prévisible, alors on a le résultat

$$\int_0^t X_s dZ_s = a\int_0^t X_s dM_s + b\int_0^t X_s dN_s \tag{1.19}$$

Chapitre 2

Équations Différentielles Stochastiques et Lemme d'Itô

Sommaire

Nous présentons ici les équations différentielles stochastiques en ignorant certaines notions mathématiques profondes. Nous introduirons également le lemme d'Itô qui est probablement le résultat le plus important en calcul stochastique. Ces notions seront abordées en temps continu et sont largement étudiées dans les références [1, 3, 2, 6, 8, 7] qui ont servi à la mise en oeuvre de ce chapitre.

1 Introduction des Équations Différentielles Stochastiques

Avant d'introduire les équations différentielles stochastiques, nous commencerons par décrire les différentes étapes de modélisation de l'évolution du prix d'un actif risqué.

- **1.1 - Modélisation du Prix d'un Actif par une Équation Différentielle Stochastique**

Le procédé de modélisation exige de faire des hypothèses qui permettent de traduire le phénomène étudier sous forme d'équation. **On prétendra** que :

▷ L'evolution du prix d'un actif est donnée par le processus $S = \{S_t,\ t \geq 0\}$; En général, la loi qui gouverne un tel processus est mal connue mais nous avons une idée de son comportement local. En effet :

▷ Le prix varie proportionnellement à lui même et à la taille de la période :

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu S_t \Delta t \tag{2.1}$$

où une hausse des prix équivaut à $\mu > 0$ et une baisse correspond à $\mu < 0$. Sachant que nous prétendons (donc pas sûre) que le prix évolue suivant (2.1), alors il faut incorporer un terme d'erreur non prévisible.

▷ On ajoute ainsi un terme stochastique à l'équation (2.1) afin d'obtenir :

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \sqrt{\Delta t}\, \varepsilon_t \tag{2.2}$$

où σ est une constante positive et ε_t est une variable aléatoire de loi $N(0,1)$ et est indépendante au processus de prix $S = \{S_t,\ t \geq 0\}$ [1].

▷ Bien que l'erreur n'est pas prévisible, son ampleur est contrôlable cpdt :

1. Le terme $\sqrt{\Delta t}\, \varepsilon_t$ suit une loi normale $N(0, \Delta t)$;
2. La variance conditionelle du terme d'erreur $\sigma S_t \sqrt{\Delta t}\, \varepsilon_t$ est $\sigma^2 S_t^2 \Delta t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t\left[\sigma S_t \sqrt{\Delta t}\, \varepsilon_t\right] &= \mathbb{E}\left[\sigma S_t \sqrt{\Delta t}\, \varepsilon_t \mid \mathscr{F}_t\right] \\
&= \sigma S_t \sqrt{\Delta t}\, \mathbb{E}\left[\varepsilon_t\right] \\
&= 0 \\
\mathbb{V}ar_t\left[\sigma S_t \sqrt{\Delta t}\, \varepsilon_t\right] &= \mathbb{E}_t\left[\left(\sigma S_t \sqrt{\Delta t}\, \varepsilon_t\right)^2\right] \\
&= \sigma^2 S_t^2 \Delta t\, \mathbb{E}\left[\varepsilon_t^2\right] \\
&= \sigma^2 S_t^2 \Delta t
\end{aligned}$$

1. Cette condition est importante et lorsque traduit autrement, elle signifie que nous ne devons pas être capable de prédire l'erreur ε_t en observant le comportement (l'information $\mathscr{F}_t$) du prix de l'actif risqué antérieurement à la date t. La filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$, où $\mathscr{F}_t = \sigma\left\{(S_u,\ u \in \{0, \Delta t, \cdots, t\}) \cup \mathscr{N}\right\}$, représent l'information véhiculée par le processus de prix et est la plus petite tribu pour laquelle les variables aléatoires de prix $S_u, u \in \{0, \Delta t, \cdots, t\}$ sont mesurables. Ainsi à l'instant t, on connait le prix de l'actif risqué S_t et on a en disposition aussi l'information de prix du passé $\{S_u,\ u \in (0, \Delta t, \cdots, t)\}$ car $\mathscr{F}_u \subset \mathscr{F}_t$ pour tout $u < t$.

3. Ainsi, l'écart-type conditionnel du terme d'erreur est $\sigma S_t\sqrt{\Delta t}$. Il est donc fonction de la taille de l'intervalle de temps Δt et du prix S_t [2].

▷ $\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t$ est indépendant de l'information $\mathscr{F}_t$ et est remplacé $W_{t+\Delta t} - W_t$:

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \left(W_{t+\Delta t} - W_t\right) \tag{2.3}$$

▷ Lorsque l'intervalle de temps Δt devient infinitésimale, on a l'équation

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{2.4}$$

où le processus $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard [3].

▷ Finalement, le processus de prix d'un actif risqué vérifie l'équation (2.4), connue sous le nom d'*Équation Différentielle Stochastique*.

Note : La solution d'une Équation Différentielle Stochastique n'est pas, contrairement aux équations différentielles ordinaires, une fonction mais un processus stochastique.

1.2 - Définition d'une Équation Différentielle Stochastique

Définition 1.1

Soit $\{X_t,\ t \geq 0\}$ une processus stochastique dans l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{2.5}$$

où $\mu(t, X_t) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma(t, X_t) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ respectivement appelés coefficients de dérive et de diffusion, sont mesurables. Le processus $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard.

Note :

1. Le terme dW_t représente le *changement instantané* de W en t. La propriété de non différentiabilité des trajectoires des browniens interdit de considérer dW_t/dt comme la dérivée de W_t, par rapport au temps.

2. Plus la taille de la période Δt ou du prix S_t est grande, plus l'écart-type de l'erreur aléatoire est grand.
3. Le mouvement brownien $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ modélise le choc du marché sur le prix de l'actif.

La distribution des changements de W sur tout intervalle infinitésimal dt, conditionnellement à l'information disponible en t, est

$$\mathbb{E}_t[dW_t] = 0 \text{ et } \mathbb{V}ar_t[dW_t] = dt$$

2. Le terme $\mu(t, X_t)\,dt$ représente le changement déterministe de la trajectoire de X dû à l'écoulement du temps, où $\mu(t, X)$ est un processus stochastique intégrable et adapté à la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$.
3. Le terme $\sigma(t, X_t)dW_t$ représente le choc exogène perturbant la trajectoire de X, où le processus $\sigma(t, X)$ est de carré intégrable, adapté à la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ et détermine la force du choc dW_t sur X à t.
4. dX_t désigne le changement instantané du processus X à l'instant t. En prenant l'espérance et la variance de l'équation (2.5), on a [a]

$$\mathbb{E}_t[dX_t] = \mu(t, X_t)dt \text{ et } \mathbb{V}ar_t[dX_t] = \sigma^2(t, X_t)dt$$

a. $\mu(t, X_t)$ est l'espérance du changement de X en t, par unité de temps. Et $\sigma^2(t, X_t)$ est la variance par unité de temps du changement de X_t.

En univers certain, on a la représentation classique sous forme d'équation différentielle ordinaire(EDO) de modèle dynamique déterministe

$$\frac{dY_t}{dt} = \mu(t, Y_t), \quad \text{ou encore } \; dY_t = \mu(t, Y_t)dt \tag{2.6}$$

En intégrant l'équation (2.6) entre 0 et t, on obtient la solution suivante

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \mu(s, Y_s)ds \tag{2.7}$$

Cependant à partir de l'équation différentielle stochastique (2.5), l'expression

$$\frac{dX_t}{dt} = \mu(t, Y_t) + \sigma(t, X_t)\frac{dW_t}{dt}$$

n'a pas de sens car le terme dW_t/dt n'est pas défini tel que souligné en 1. N'empêche on pourra toujours intégrer l'équation (2.5) :

Note : L'équation (2.5) peut également s'écrire sous la forme intégrale

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \ \mathbb{P} - p.s. \ \forall\, t \geq 0 \qquad (2.8)$$

où X_0 est un réel, la première intégrale peut être vue comme une intégrale de Riemann et la deuxième est une intégrale stochastique.

1. Les termes $\mu(s, X_s)$ et $\sigma(s, X_s)$ sont appelés les *paramètres infinitésimaux* du processus X.
2. Le terme dW_s est la *différentielle stochastique* du brownien W. C'est son évolution aléatoire à l'instant s sur une période de temps infinitésimale de longeur ds.

Un outil fondamental qui aboutit aux équations différentielles stochastiques, est le lemme d'Itô que nous discutons maintenant.

2 Lemme d'Itô et Résolution des Modèles Gaussiens

Le lemme d'Itô est le résultat le plus important en calcul stochastique.

2.1 - Versions du Lemme d'Itô

2.1.1 - Première Version du Lemme d'Itô

Théorème 1 (**Première Version du Lemme d'Itô**)
Soient $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ un mouvement brownien construit sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et $f(t, W_t) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction une fois dérivable par rapport à sa variable t et deux fois dérivables de dérivées continues par rapport à sa variable W_t (c'est à dire que $f \in \mathscr{C}^{1,2}$). Alors pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $f(t, W_t)$ vérifie l'équation différentielle stochastique suivante

$$df(t, W_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, W_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}(t, W_t)\right)dt + \frac{\partial f}{\partial W}(t, W_t)dW_t \qquad (2.9)$$

L'équation (2.9) peut également s'écrire sous la forme intégrale suivante

$$f(t,W_t) - f(0,W_0) = \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s,W_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}(s,W_s)\right) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial W}(s,W_s)dW_s,\ \mathbb{P}-p.s. \tag{2.10}$$

Exemple 2.1 *Soit le processus de prix d'un actif risqué* $\{S_t,\ t \geq 0\}$ *où*

$$S_t \equiv S(t,W_t) = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right] \tag{2.11}$$

où μ *et* σ *sont des constantes, et* $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ *un mouvement brownien standard*[4]*.*

▷ *Déterminons l'équation différentielle stochastique du processus de prix : Les dérivées du processus de prix sont données par*

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)S_t, \quad \frac{\partial S_t}{\partial W} = \sigma S_t, \quad \frac{\partial^2 S_t}{\partial W^2} = \sigma^2 S_t$$

Ainsi, en reprenant l'équation (2.9) on obtient

$$\begin{aligned} dS_t &= \left(\frac{\partial S_t}{\partial t}(t,W_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_t}{\partial W^2}(t,W_t)\right)dt + \frac{\partial S_t}{\partial W}(t,W_t)dW_t \\ &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \end{aligned} \tag{2.12}$$

▷ *La forme intégrale de l'équation différentielle stochastique (2.12) est*

$$S_t - S_0 = \mu \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dW_s \tag{2.13}$$

Exercice 2.1: Soit le processus $C = \{C_t,\ t \geq 0\}$, où $C_t = C_0 e^{\sigma W_t}$ et où $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Déterminer l'équation différentielle stochastique vérifiée par le processus C.

- ## 2.1.2 - Deuxième Version du Lemme d'Itô

4. Dans la suite, le processus de prix d'un actif risqué sera simplement noté S_t. Sachant que $W_t \sim N(0,1)$ alors S_t suit une loi lognormale.

Définition 2.1

Le processus $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ est appelé processus d'Itô, dans l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, lorsqu'il est defini sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \tag{2.14}$$

où $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard, les processus $\{K_t,\ t \geq 0\}$ et $\{H_t,\ t \geq 0\}$ sont adaptés à la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ et vérifient

$$\int_0^t |K_s| ds < \infty,\ \mathbb{P} - p.s. \quad \int_0^t H_s^2 ds < \infty,\ \mathbb{P} - p.s. \tag{2.15}$$

Le processus d'Itô s'écrit sous la forme différentielle suivante

$$dX_t = K_t\, dt + H_t\, dW_t \tag{2.16}$$

Définition 2.2

• Soit X le processus d'Itô défini dans (2.16). On appelle processus de variation quadratique de X, celui défini par

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \{\langle X \rangle_t\,,\ t \geq 0\}\,,\ \text{où} \\ \langle X \rangle_t &= \int_0^t H_s^2 ds \text{ et } d\,\langle X \rangle_t = H_t^2 dt \end{aligned} \tag{2.17}$$

• Soient X et Y deux processus d'Itô définis par les équations suivantes

$$dX_t = K_t\, dt + H_t\, dW_t \ \text{ et } \ dY_t = \widetilde{K}_t\, dt + \widetilde{H}_t\, dW_t \tag{2.18}$$

On définit le processus de covariation quadratique noté $\langle X, Y \rangle$ par

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \{\langle X, Y \rangle_t\,,\ t \geq 0\}\,,\ \text{où} \\ \langle X, Y \rangle_t &= \int_0^t H_s \widetilde{H}_s ds \ \text{ et } \ d\,\langle X, Y \rangle_t = H_t \widetilde{H}_t dt \end{aligned} \tag{2.19}$$

Exemple 2.2 *Le mouvement brownien standard* $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ *est un processus d'Itô. On a en effet*

$$W_t = \int_0^t 1 dW_s$$

Par conséquent, ayant identifié la fonction H_s, on obtient

$$\langle W \rangle_t = \int_0^t 1^2 ds$$

Théorème 2 (**Deuxième Version du Lemme d'Itô**)

• *Soit $\{X_t,\ t \geq 0\}$ un processus d'Itô satisfaisant l'équation différentielle*

$$dX_t = K_t\, dt + H_t\, dW_t$$

Si $f(t, X_t) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction une fois dérivable par rapport à sa variable t et deux fois dérivables et de dérivées continues par rapport à sa variable X_t (c'est à dire que $f \in \mathscr{C}^{1,2}$). Alors pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $f(t, X_t)$ vérifie l'équation différentielle stochastique

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial f}{\partial X}(t, X_t)K_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(t, X_t)H_t^2\right) dt + \frac{\partial f}{\partial X}(t, X_t)H_t\, dW_t \tag{2.20}$$

L'équation (2.20) peut également s'écrire sous la forme intégrale suivante

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + \frac{\partial f}{\partial X}(t, X_s)K_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(s, X_s)H_s^2\right) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X}(s, X_s)H_s dW_s,\ \mathbb{P} - p.s. \tag{2.21}$$

L'équation (2.21) peut s'écrire suivant la forme intégrale suivante

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(s, X_s)d\left\langle X \right\rangle_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X}(s, X_s)dX_s,\ \mathbb{P} - p.s. \tag{2.22}$$

• *Soient X et Y deux processus d'Itô définis en (2.18). Si $f(t, X_t, Y_t) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction une fois dérivable par rapport à sa variable t et deux fois dérivables et de dérivées continues par rapport à chacune de ses variables X_t et Y_t. Alors pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $f(t, X_t, Y_t)$ vérifie l'équation différentielle stochastique*

$$df(t, X_t, Y_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t, Y_t)dt + \frac{\partial f}{\partial X}(t, X_t, Y_t)dX_t + \frac{\partial f}{\partial Y}(t, X_t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(t, X_t, Y_t)d\left\langle X \right\rangle_t + 2\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y}(t, X_t, Y_t)d\left\langle X, Y \right\rangle_t + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(t, X_t, Y_t)d\left\langle Y \right\rangle_t\right) \tag{2.23}$$

Exemple 2.3 (**Prix d'un Obligation Zéro-Coupon**)
Soit le prix B_t à t d'une obligation zéro-coupon dont la maturité est T

$$B_t \equiv B(t,S) = Ae^{-R(t,T,S)(T-t)} \tag{2.24}$$

où A est la valeur de remboursement (ou valeur nominale), $R(t,T,S)$ représente la structure par terme des taux d'intérêt et S désigne une variable d'état satisfaisant le processus d'Itô suivant

$$dS_t = a(S)\,dt + \sigma(S)\,dW_t$$

où $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard.

Déterminons l'équation différentielle stochastique vérifiée par le processus de prix de l'obligation. D'après la formule (2.20), on a

$$dB_t = \left(\frac{\partial B_t}{\partial t} + \frac{\partial B_t}{\partial S}a(S) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_t}{\partial S^2}\sigma^2(S)\right)dt + \frac{\partial B_t}{\partial S}\sigma(S)\,dW_t \tag{2.25}$$

Note : *Les quantités composant le coefficient de dérive de l'équation (2.25), sont des caractéristiques déterminant du prix courant de l'obligation que sont la duration $D(t,S)$, la convexité $C(t,S)$ et la valeur du temps $\Theta(t,S)$*

$$D(t,S) = \left(\frac{1}{B(t,S)}\right)\left(-\frac{\partial B(t,S)}{\partial S}\right)$$
$$C(t,S) = \left(\frac{1}{B(t,S)}\right)\left(\frac{\partial^2 B(t,S)}{\partial^2 S}\right)$$
$$\Theta(t,S) = \left(\frac{1}{B(t,S)}\right)\left(\frac{\partial B(t,S)}{\partial t}\right)$$

A partir du prix de l'obligation en (2.24) , on obtient les dérivées

$$\frac{\partial B_t}{\partial t} = \left(R(t,T,S) - \frac{\partial R(t,T,S)}{\partial t}(T-t)\right)B_t \tag{2.26}$$
$$\frac{\partial B_t}{\partial S} = -\frac{\partial R(t,T,S)}{\partial S}(T-t)B_t \tag{2.27}$$
$$\frac{\partial^2 B_t}{\partial S^2} = \left(\left(\frac{\partial R(t,T,S)}{\partial S}\right)^2(T-t) - \frac{\partial^2 R(t,T,S)}{\partial S^2}\right)(T-t)B_t \tag{2.28}$$

Reprenant (2.25) tout en tenant compte de (2.26)-(2.28), on obtient

$$dB_t = \left(R(t,T,S) - \frac{\partial R(t,T,S)}{\partial t}(T-t) - \frac{\partial R(t,T,S)}{\partial S}(T-t)a(S) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R(t,T,S)}{\partial S}\right)^2 (T-t)^2\sigma^2(S) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R(t,T,S)}{\partial S^2}(T-t)\sigma^2(S) + \right) B_t dt - \frac{\partial R(t,T,S)}{\partial S}(T-t)\sigma(S)B_t\, dW_t$$

Exemple 2.4 *Soit le processus de prix d'un actif risqué $S = \{S_t,\ t \geq 0\}$ satisfaisant l'équation différentielle stochastique suivante*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t\, dW_t \tag{2.29}$$

On définit le rendement R_t de cet actif financier, suivant une capitalisation continue, comme suit

$$R(t,S) = R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \tag{2.30}$$

Montrons que l'équation différentielle du processus $R = \{R_t,\ t \geq 0\}$ est

$$dR_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t \tag{2.31}$$

La question à la quelle il faut se poser est si le processus S est d'Itô ? Notons les processus $K = \{K_t,\ 0 \leq t \leq T\}$ et $H = \{H_t,\ 0 \leq t \leq T\}$ où

$$K_t = \mu S_t,\ H_t = \sigma S_t$$

Vérifions les conditions dans (2.15) en utilisant la solution (2.11) ; il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T |K_s| ds\right] &= |\mu| \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T S_s ds\right] \\
&= |\mu| \int_0^T \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[S_s\right] ds \\
&= |\mu| \int_0^T \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[S_0\right] e^{\mu s} ds \\
&= |\mu| \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[S_0\right] \int_0^T e^{\mu s} ds \\
&= |\mu| \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[S_0\right] \left(\frac{e^{\mu T} - 1}{\mu}\right) < \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] &= \sigma^2 \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T S_s^2 ds\right] \\
&= \sigma^2 \int_0^T \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[S_s^2\right] ds \\
&= \sigma^2 \int_0^T \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[S_0^2\right] e^{\left(2\mu+\sigma^2\right)s} ds \\
&= \sigma^2 \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[S_0^2\right] \int_0^T e^{\left(2\mu+\sigma^2\right)s} ds \\
&= \sigma^2 \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[S_0^2\right] \left(\frac{e^{T\left(2\mu+\sigma^2\right)} - 1}{2\mu+\sigma^2}\right) < \infty
\end{aligned}$$

On en déduit ainsi que les conditions dans (2.15) sont vérifiées !
Afin d'appliquer le lemme d'Itô, nous déterminons les dérivées de R_t :

$$\frac{\partial R_t}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial R_t}{\partial S} = \frac{1}{S_t}, \quad \frac{\partial^2 R_t}{\partial S^2} = -\frac{1}{S_t^2}$$

Ainsi, reprenant l'équation (2.20) on obtient

$$\begin{aligned}
dR_t &= \left(\frac{\partial R_t}{\partial t}(t, S_t) + \frac{\partial R_t}{\partial S}(t, S_t)K_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R_t}{\partial S^2}(t, S_t)H_t^2\right) dt + \frac{\partial R_t}{\partial S}(t, S_t)H_t\, dW_t \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t
\end{aligned}$$

Exemple 2.5 (**Rendement Réel à la Itô**)
Soit le processus $Q = \{Q_t,\ t \geq 0\}$ de valeur nominale des obligations où

$$dQ_t = rQ_t dt \tag{2.32}$$

On modélise le taux d'inflation par le processus d'Itô $P = \{P_t,\ t \geq 0\}$ où

$$dP_t = \pi P_t dt + \sigma P_t dW_t \tag{2.33}$$

Par le lemme d'Itô (2.23), déterminons l'équation différentielle de la valeur réelle des obligations définie par $q_t = q(t, P, Q) = \frac{Q_t}{P_t}$. On obtient

$$\begin{aligned}
dq_t &= \frac{\partial q_t}{\partial t}(t, P_t, Q_t)dt + \frac{\partial q_t}{\partial P}(t, P_t, Q_t)dP_t + \frac{\partial q_t}{\partial Q}(t, P_t, Q_t)dQ_t \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 q_t}{\partial P^2}(t, P_t, Q_t)d\left\langle P\right\rangle_t + 2\frac{\partial^2 q_t}{\partial P \partial Q}(t, P_t, Q_t)d\left\langle P, Q\right\rangle_t + \frac{\partial^2 q_t}{\partial Q^2}(t, P_t, Q_t)d\left\langle Q\right\rangle_t\right)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

A partir de la valeur réelle q_t, on obtient les dérivées suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_t}{\partial P} &= -\frac{q_t}{P_t}, & \frac{\partial q_t}{\partial Q} &= \frac{1}{P_t}, & \frac{\partial q_t}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial^2 q_t}{\partial P^2} &= \frac{2q_t}{P_t^2}, & \frac{\partial^2 q_t}{\partial Q^2} &= 0, & \frac{\partial^2 q_t}{\partial P \partial Q} &= -\frac{1}{P_t^2} \end{aligned} \tag{2.35}$$

Sachant que $d\langle P\rangle_t = \sigma^2 P_t^2 dt$, $d\langle Q\rangle_t = 0$ et $d\langle P, Q\rangle_t = 0$, et tenant compte des processus (2.32), (2.34) et de (2.35), on obtient de (2.35)

$$\begin{aligned} dq_t &= \left(r - \pi + \sigma^2\right) q_t\, dt - \sigma q_t dW_t \\ \frac{dq_t}{q_t} &= \left(r - \pi + \sigma^2\right) dt - \sigma dW_t \end{aligned}$$

La différence $r - \pi$ est le rendement réel de l'obligation, alors que σ^2 représente l'incertitude dans l'inflation.

Excercice 2.2: (**Mouvement Brownien Géométrique**)
Considérons le prix d'un stock, S_t, satisfaisant l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \tag{2.36}$$

1. En effectuant la substitution $f(t, S_t) = \log(S_t)$ et appliquant le lemme d'Itô à la fonction $f(t, x) = \log(x)$, montrer que la solution de l'EDS (2.36) est donnée par

$$S_t = S_0 exp\left(\int_0^t \left(\mu_s - \sigma_s^2/2\right) dt + \int_0^t \sigma_s dW_t\right) \tag{2.37}$$

2. Si $\mu_s = \mu$ et $\sigma_s = \sigma$ sont des constantes, alors assurez-vous que la solution (2.37) devient

$$S_t = S_0 exp\left(\left(\mu - \sigma^2/2\right) t + \sigma dW_t\right)$$

Excercice 2.3: (**Processus d'Ornstein-Uhlenbeck**)

Soit S_t le prix d'un titre et introduisons $X_t = \log(S_t)$ satisfaisant l'EDS

$$dX_t = (-\gamma(X_t - \mu t) + \mu)\,dt + \sigma dW_t$$

1. En appliquant le lemme d'Itô à la fonction $f(t, X_t) = X_t e^{\gamma t}$, montrer qu'on obtient

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= (dX_t)e^{\gamma t} + X_t(de^{\gamma t}) \\ &= e^{\gamma t}((\gamma\mu t + \mu)dt + \sigma dW_t) \end{aligned}$$

2. En déduire la solution de la fonction $f(t, X_t)$ suivante

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \mu\int_0^t e^{\gamma s}(\gamma s + 1)\,ds + \sigma\int_0^t e^{\gamma s} dW_s \qquad (2.38)$$

3. En remplaçant la fonction $f(t, X_t)$ par $X_t e^{\gamma t}$ dans (2.38), vérifier que le processus X_t est

$$X_t = X_0 e^{-\gamma t} + \mu t + \sigma e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma s} dW_s$$

4. Calculer l'espérance $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t]$ et la variance $\mathbb{V}ar^{\mathbb{P}}[X_t]$ de la variable X_t

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t] &= X_0 e^{-\gamma t} + \mu t \\ \mathbb{V}ar^{\mathbb{P}}[X_t] &= \mathbb{V}ar\left[\sigma e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma s} dW_s\right] \\ &= \sigma^2 e^{-2\gamma t}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t e^{\gamma s} dW_s\right)^2\right] \\ &= \sigma^2 e^{-2\gamma t}\int_0^t e^{2\gamma s} ds = \frac{\sigma^2}{2\gamma}\left(1 - e^{-2\gamma t}\right) \end{aligned}$$

Lorsque nous voulons déterminer l'équation différentielle stochastique du produit de deux processus, nous avons alors besoin de la règle de multiplication.

Théorème 3 *Soit X et Y deux processus d'Itô définis par les équations*

$$dX_t = K_t\,dt + H_t\,dW_t \;\; \text{et} \;\; dY_t = \widetilde{K}_t\,dt + \widetilde{H}_t\,dW_t \qquad (2.39)$$

La règle de multiplication entre les processus X et Y est déterminée par

$$\begin{aligned} d\left(X_t Y_t\right) &= X_t\, dY_t + Y_t\, dX_t + d\left\langle X, Y\right\rangle_t \\ &= X_t\left(\widetilde{K}_t\, dt + \widetilde{H}_t\, dW_t\right) + Y_t\left(K_t\, dt + H_t\, dW_t\right) + H_t\widetilde{H}_t dt \\ &= \left(X_t\widetilde{K}_t + Y_t K_t + H_t\widetilde{H}_t\right) dt + \left(X_t\widetilde{H}_t + Y_t H_t\right) dW_t \end{aligned} \tag{2.40}$$

Exemple 2.6 *Soit le processus d'évolution du prix d'un actif risqué $S = \{S_t,\ t \geq 0\}$ satisfaisant l'équation différentielle stochastique*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t\, dW_t$$

On considère le facteur d'actualisation β modélisé par le processus d'Itô

$$d\beta_t = -r\beta_t dt \tag{2.41}$$

où r est un taux d'intérêt constant. En appliquant la formule (2.40), on détermine l'équation différentielle du prix actualisé βS

$$\begin{aligned} d\left(\beta_t S_t\right) &= \beta_t dS_t + S_t d\beta_t + d\left\langle \beta, S\right\rangle_t \\ &= \beta_t\left(\mu S_t dt + \sigma S_t\, dW_t\right) + S_t\left(-r\beta_t dt\right) \\ &= \left(\mu - r\right)\beta_t S_t dt + \sigma\beta_t S_t dW_t \end{aligned} \tag{2.42}$$

Exercice 2.4: Considérons le processus d'évolution du prix d'une action en livres sterling par

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t\, dW_t \tag{2.43}$$

Supposons que l'évolution de la valeur en dollars canadiens de la livre sterling est modélisée par C

$$dC_t = \alpha C_t dt + \beta C_t\, d\widetilde{W}_t + \gamma C_t\, dW_t \tag{2.44}$$

où les browniens W et $\widetilde{W}$ sont construits sur le même espace probabilisé filtré et indépendants.

1. Déterminer le prix de l'action en dollars canadiens.
2. Déterminons l'équation différentielle stochastique du prix de l'action en dollars canadiens.

Exercice 2.5: Soit le processus de taux d'intérêt $r = \{r_t,\ t \geq 0\}$ défini par

$$r_t = \frac{\theta}{\alpha} + e^{-\alpha t}\left(r_0 - \frac{\theta}{\alpha}\right) + \sigma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha s} dW_s$$

où $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ est mouvement brownien standard. Montrer que la dynamique du processus r est donnée par

$$dr_t = (\theta - \alpha r_r)\, dt + \sigma\, dW_t$$

- **2.2 - Résolution des Modèles Gaussiens**

Le lemme d'Itô permet de trouver l'équation différentielle stochastique satisfaite par un processus, mais n'est pas une méthode systématique d'obtention d'une solution. Cependant lorsque l'équation différentielle stochastique a une certaine structure, il est possible d'obtenir une close forme de sa solution. C'est l'objet de cette sous partie.

Définition 2.3

Le processus stochastique $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ est appelé modèle Gaussien, dans l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, lorsqu'il est de la forme

$$dX_t = (\mu_1(t)X_t + \mu_2(t))\, dt + \sigma(t)\, dW_t \tag{2.45}$$

où $\mu_1(\cdot)$, $\mu_2(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont des fonctions déterministes du temps et $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ est mouvement brownien standard [a].

a. Voir chapitre 5 dans [2] pour plus de détails.

Exemple 2.7 *Des exemples de modèles Gaussiens, on peut citer les modèles de Merton et Vasicek étudiés dans 2.2.1 et 2.2.2.*

Théorème 4 *Soit $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ le modèle Gaussien défini dans (2.45) et $\phi(\cdot)$ une fonction vérifiant l'équation différentielle ordinaire*

$$d\phi(t) = \mu_1(t)\phi(t)\, dt, \quad \phi(0) = 1$$

Si la condition suivante est satisfaite

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \frac{\sigma^2(s)}{\phi^2(s)} ds < \infty\right)$$

alors la solution de l'équation différentielle stochastique (2.45) *s'obtient*

$$X_t = \phi(t)\left(X_0 + \int_0^t \frac{\mu_2(s)}{\phi(s)} ds + \int_0^t \frac{\sigma(s)}{\phi(s)} dW_s\right) \tag{2.46}$$

Preuve :
La preuve de ce théorème est donne en annexe du chapitre 5 dans [2]. □

Nous allons nous intéresser à deux modèles gaussiens à un facteur qui sont le modèle de Merton et celui de Vasicek [5].

- **2.2.1 - Modèle de Merton (1973)**

Le modèle de Merton est celui dont le taux d'intérêt instantané est modélisé

$$dr_t = \mu dt + \sigma\, dW_t \tag{2.47}$$

Sur ce modèle, on identifie les fonctions $\mu_1(\cdot)$, $\mu_2(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ comme suit

$$\mu_1(t) = 0,\ \ \mu_2(t) = \mu \ \text{ et } \ \sigma(t) = \sigma$$

Et l'équation différentielle ordinaire $\phi(\cdot)$ est donnée par

$$d\phi(t) = 0, \quad \phi(0) = 1$$

La solution de cette équation est donc $\phi(t) = 1$ pour $t \in [0, T]$. De plus, on a

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \frac{\sigma^2(s)}{\phi^2(s)} ds < \infty\right) = \mathbb{P}\left(\sigma^2 T < \infty\right) = 1$$

Par suite la solution du modèle de Merton, en utilisant le Théorème 4, est

$$\begin{aligned} r_t &= \phi(t)\left(r_0 + \int_0^t \frac{\mu_2(s)}{\phi(s)} ds + \int_0^t \frac{\sigma(s)}{\phi(s)} dW_s\right) \\ &= r_0 + \int_0^t \mu\, ds + \int_0^t \sigma\, dW_s \\ &= r_0 + \mu t + \sigma\, W_t \sim N(r_0 + \mu t, \sigma^2 t) \end{aligned}$$

5. Voir chapitre 5 dans [2] pour plus de détails.

- **2.2.2 - Modèle de Vasicek**

Le modèle de Vasicek est celui dont le taux d'intérêt instantané est modélisé

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\, dW_t \tag{2.48}$$

Sur ce modèle, on identifie les fonctions $\mu_1(\cdot)$, $\mu_2(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ par

$$\mu_1(t) = -\kappa, \;\; \mu_2(t) = \kappa\theta \;\; \text{et} \;\; \sigma(t) = \sigma$$

Et l'équation différentielle ordinaire $\phi(\cdot)$ est donnée par

$$d\phi(t) = -\kappa\phi(t)\, dt, \qquad \phi(0) = 1$$

dont la solution est $\phi(t) = e^{-\kappa t}$ pour tout $t \in [0, T]$. De plus, on note que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\int_0^T \frac{\sigma^2(s)}{\phi^2(s)} ds < \infty\right) &= \mathbb{P}\left(\sigma^2 \int_0^T e^{2\kappa s} ds < \infty\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa}\left(e^{2T\kappa} - 1\right) < \infty\right) = 1
\end{aligned}$$

Par suite la solution du modèle de Vasicek, utilisant le Théorème 4, est

$$\begin{aligned}
r_t &= \phi(t)\left(r_0 + \int_0^t \frac{\mu_2(s)}{\phi(s)} ds + \int_0^t \frac{\sigma(s)}{\phi(s)} dW_s\right) \\
&= e^{-\kappa t}\left(r_0 + \int_0^t \kappa\theta e^{\kappa s} ds + \int_0^t \sigma e^{\kappa s} dW_s\right) \\
&= r_0 e^{-\kappa t} + \theta\left(1 - e^{-\kappa t}\right) + \int_0^t \sigma e^{-\kappa(t-s)} dW_s \\
&= \theta + (r_0 - \theta)e^{-\kappa t} + \int_0^t \sigma e^{-\kappa(t-s)} dW_s
\end{aligned}$$

Exercice 2.6: Soit l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \kappa\left(\theta - X_t\right)\, dt + \sigma\, dW_t \tag{2.49}$$

où $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ est mouvement brownien standard.

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle stochastique (2.49).
2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X_t]$ de la variable aléatoire X_t.

3 Changement de Mesure et Théorème de Girsanov

On a travaillé jusqu'ici dans l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, c'est à dire l'espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$ sur lequel est placé la mesure de probabilité $\mathbb{P}$, où est construit le mouvement brownien standard $\left\{W_t^{\mathbb{P}},\ t \geq 0\right\}$. Cette structure est la base de l'ensemble des calculs effectué jusque là.

Reprenant le processus modélisant l'évolution du prix d'un titre risqué

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t^{\mathbb{P}} \tag{2.50}$$

dont sa valeur actualisée $Y = \beta_t S_t$ est déterminée dans (2.42) par le processus

$$dY_t = (\mu - r)\, Y_t dt + \sigma Y_t dW_t^{\mathbb{P}} \tag{2.51}$$

où le facteur d'actualisation β_t est modélisé par l'EDO suivante

$$d\beta_t = -r \exp\left(-rt\right) dt$$

La forme intégrale de l'équation différentielle stochastique (2.51) est donnée

$$Y_t = Y_0 + (\mu - r) \int_0^t Y_s\, ds + \sigma \int_0^t Y_s\, dW_s^{\mathbb{P}} \tag{2.52}$$

On remarque qu'à partir de (2.52) que le processus de prix actualisé $\{Y_t,\ t \geq 0\}$ n'est pas une $\left((\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$-martingale (car $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Y_t]$ n'est pas constante).

Note : En effet, l'avantage que ce processus soit une martingale est de pouvoir utiliser la formule (1.2). Cette propriété des martingales permet de valoriser les actifs comme si on négligeait le risque. Pour arriver alors à cela, on exprime le modèle (2.52) (ou bien (2.51)) sous une probabilité différente. Se pose ainsi avec acuité la question suivante !

Question : Peut-t-on munir l'espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$ d'une nouvelle mesure de probabilité, rendant le processus $\{Y_t,\ t \geq 0\}$ une martingale ?

• 3.1 - Motivation à la Construction d'une Mesure de Probabilité

Une première étape à la réponse à cette question réside dans la condition nécessaire (1.3) que dois d'abord vérifier le processus de prix actualisé

$\{Y_t,\ t \geq 0\}$. Afin d'arriver à cette condition, reformulons l'équation (2.52) dans l'optique d'exploiter le résultat (1.17) :

- ▷ Pour cela, on effectue d'abord la première manipulation suivante de (2.52)

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_0^t (\mu - r)\, Y_s\, ds + \int_0^t \sigma Y_s\, dW_s^{\mathbb{P}} \\ &= Y_0 + \int_0^t \sigma \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) Y_s\, ds + \int_0^t \sigma Y_s\, dW_s^{\mathbb{P}} \\ &= Y_0 + \int_0^t \sigma Y_s\, d\left(\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) s\right) + \int_0^t \sigma Y_s\, dW_s^{\mathbb{P}} \\ &= Y_0 + \int_0^t \sigma Y_s\, d\left(\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) s + W_s^{\mathbb{P}}\right) \end{aligned} \tag{2.53}$$

- ▷ En vue de la condition (1.3), on introduit le processus $\{W_s,\ s \geq 0\}$ où

$$W_s = \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) s + W_s^{\mathbb{P}},\ \forall\ s \geq 0 \tag{2.54}$$

- ▷ On réécrit ainsi le processus du prix actualisé (2.53) comme suit

$$Y_t = Y_0 + \sigma \int_0^t Y_s\, dW_s \tag{2.55}$$

  qui n'est toujours pas $\left((\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$-martingale car le processus $\{W_s,\ s \geq 0\}$ n'est pas un $\mathbb{P}$-mouvement brownien standard

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[W_s\right] = \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) s \neq 0$$

- ▷ Cependant, la question revient à trouver une mesure (qu'on notera $\mathbb{Q}$) rendant le processus $\{W_s,\ s \geq 0\}$ un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien standard. C'est ce que permet le théorème suivant dit de Cameron-Martin-Girsanov.

  Note : Ce processus sera alors noté $\left\{W_s^{\mathbb{Q}},\ s \geq 0\right\}$ afin d'indiquer que c'est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien standard.

• 3.2 - Théorème de Cameron-Martin-Girsanov

Théorème 5 (**Théorème de Cameron-Martin-Girsanov**)
Soit $\gamma = \{\gamma_t,\ t \in [0, T]\}$ un processus $\mathscr{F}_t$-prévisible dans l'espace probabi-

lisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$*, tel que*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right)\right] < \infty \tag{2.56}$$

Il existe une variable aléatoire positive qu'on notera $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ *définie par*

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt - \int_0^T \gamma_t dW_t\right)$$

et une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ *sur* $(\Omega, \mathscr{F})$*, équivalente à la mesure de probabilité* $\mathbb{P}$*, définie par*

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\mathbb{1}_A\right],\ A \in \mathscr{F}, \tag{2.57}$$

telles que le processus $\left\{\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds,\ s \geq 0\right\}$ *est un* $\mathbb{Q}$*-mouvement brownien standard.*

Note : Le théorème de Cameron-Martin-Girsanov permet alors d'affirmer qu'il est possible de construire, à l'aide du processus $\{\gamma_t,\ t \in [0,T]\}$, une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ telle que le processus $\left\{\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds,\ s \geq 0\right\}$ soit un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien standard.

Exemple 3.1 *En reprenant le processus de prix actualisé* $\{Y_t,\ t \geq 0\}$ *sur l'espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$*, on définit*

$$\gamma_t = \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right),\ \forall\, t \geq 0$$

et vérifie que le processus $\{\gamma_t,\ t \geq 0\}$ *satisfait la condition* (2.56)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right)\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 dt\right)\right] \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T\right) < \infty\end{aligned}$$

Ainsi sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ définie dans (2.57), on obtient[6]

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q}(A) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\mathbb{1}_A\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\int_0^T\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dW_t^{\mathbb{P}}-\frac{1}{2}\int_0^T\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2dt\right)\mathbb{1}_A\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)W_T^{\mathbb{P}}-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2T\right)\mathbb{1}_A\right], \forall\ A\ \in \mathscr{F} \qquad (2.58)
\end{aligned}
$$

Le processus de prix actualisé $\{Y_t,\ t\geq 0\}$ donné à la formule (2.55) par

$$Y_t = Y_0 + \sigma\int_0^t Y_s\,dW_s^{\mathbb{Q}}$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale, car $\left\{W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{P}} + \left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)t,\ t\geq 0\right\}$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien standard. Le processus de prix $\{Y_t,\ t\geq 0\}$ vérifie suivant la probabilité $\mathbb{Q}$, la nouvelle équation différentielle stochastique

$$dY_t = \sigma Y_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Exercice 3.1: Soit le processus d'évolution du prix d'un actif risqué $S = \{S_t,\ t\geq 0\}$ satisfaisant l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t\,dW_t$$

Déterminer l'équation différentielle stochastique satisfaite par l'évolution du prix de ce titre risqué dans un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{Q})$ à préciser.

Afin de comprendre la façon dont ce changement de probabilité intervient dans le cas d'une équation différentielle stochastique générale, considérons la dynamique suivante

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \qquad (2.59)$$

où $\{W_t,\ t\geq 0\}$ est un mouvement brownien standard sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et $\sigma(t, X_t)$ est la volatilité supposée $\neq 0$.

6. Nous n'avons pas vraiment besoin de calculer la mesure des réponses $\mathbb{Q}$. Nous avons besoin de savoir qu'elle existe pour déterminer l'équation du processus en cours.

Note : L'équation différentielle (2.59) décrit la vraie dynamique de la variable X_t, c'est à dire dans le monde réel où $\mathbb{P}$ désigne la *probabilité objective* (ou *probabilité historique*).

Pour déterminer la dynamique de X sous la nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}$, on procède à la manipulation suivante

$$\begin{aligned}
dX_t &= (\mu(t, X_t) - \tilde{\mu}(t, X_t))\, dt + \tilde{\mu}(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\
&= \tilde{\mu}(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) \left(\frac{\mu(t, X_t) - \tilde{\mu}(t, X_t)}{\sigma(t, X_t)} \right) dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\
&= \tilde{\mu}(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) \left(\frac{\mu(t, X_t) - \tilde{\mu}(t, X_t)}{\sigma(t, X_t)} dt + dW_t \right) \\
&= \tilde{\mu}(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\, d \left(\int_0^t \frac{\mu(s, X_s) - \tilde{\mu}(s, X_s)}{\sigma(s, X_s)} ds + W_t \right) \\
&= \tilde{\mu}(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\, d\widetilde{W}_t
\end{aligned}$$

où le processus $\widetilde{W}_t$ est défini par la formule suivante

$$\widetilde{W}_t = \int_0^t \gamma_s ds + W_t, \text{ où } \gamma_s = \frac{\mu(s, X_s) - \tilde{\mu}(s, X_s)}{\sigma(s, X_s)}$$

Note : Si le processus $\gamma = \{\gamma_t,\ t \in [0, T]\}$ vérifie la condition suivante $\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) \right] < \infty$, alors on obtient par le théorème de Cameron-Martin-Girsanov que la différentielle stochastique

$$dX_t = \tilde{\mu}(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\, d\widetilde{W}_t \tag{2.60}$$

décrit la dynamique du processus $\{X_t,\ t \geq 0\}$ sous la probabilité $\mathbb{Q}$. La dynamique (2.60) est exprimée avec une tendance modifiée.

Exercice 3.2: Soit l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \mu_t X_t\, dt + \sigma X_t\, dW_t \tag{2.61}$$

où $\mu_t = \mu\,(1 + \sin(t))$ et $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Déterminer la dynamique du processus X sous la mesure neutre au risque.

Exercice 3.3: Soit le processus $r = \{r_t,\ t \geq 0\}$ où $dr_t = c(\rho - r_r)\,dt$ et le processus d'évolution du prix d'un actif risqué $S = \{S_t,\ t \geq 0\}$ défini

$$S_t = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$$

1. Montrer que la dynamique de S est donnée par $dS_t = r_t S_t dt$.
2. En redéfinissant la dynamique de S par $dS_t = r_t S_t dt + \sigma\, dW_t$, où $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ montrer qu'il est possible de changer la mesure $\mathbb{P}$.

Chapitre 3

Valorisation des Titres Contingents

Sommaire

Dans ce chapitre, nous utiliserons le lemme d'Itô et un argument de réplication pour établir l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le prix d'un titre contingent. On investiguera un cas particulier de titre contingent, les options européennes, qui ont donné naissance à la célèbre formule de Black-Scholes-Merton. A travers cette formule, nous illustrerons le calcul des coefficients de sensitivité communément appelés les Grecques et discuterons de la façon dont ils sont utilisés dans la pratique à des fins de couverture de portefeuilles d'options. Les notions abordées ici sont largement étudiées dans les références [3, 4, 5] qui ont servi à la mise en oeuvre de ce chapitre.

1 Modèle Binomial d'Évaluation des Options

Le modèle binomial est une méthode d'évaluation des options, développée par Cox, Ross et Rubinstein. Ce modèle permet de comprendre les concepts de risque neutre (ou risque neutralisé).

Nous nous intéresserons principalement, dans l'étude de la méthode binomial d'évaluation des options, à l'option call européenne. Cependant l'analyse reste également valable pour l'option put. Afin de mettre en place cette méthode, un certain nombre d'hypothèses mérite d'être mis en place.

Hypothèses 1 *On considérera :*

1. *Deux états de la nature (bon et mauvais) ;*
2. *Une obligation (du trésor) représentant un investissement sans risque au taux r ;*
3. *Un actif risqué de prix d'aujourd'hui S qui varie suivant le processus binomial multiplicatif :*
   - ⋆ *Dans le bon état, le prix de l'actif augmente à un taux u avec probabilité q (du point de vue de l'investisseur) ;*
   - ⋆ *Dans le mauvais état, il diminue à un taux d avec probabilité $1-q$;*
   - ⋆ *L'actif ne paye pas de dividende*
4. *Le taux d'intérêt r est positif, constant et vérifie $d < r < u$.*

Schématiquement, le processus de prix de l'actif sur une période est

$$\begin{tikzcd}
 & (1+u)S \\
S \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\
 & (1+d)S
\end{tikzcd}$$

- **1.1 - Évaluation d'une Option sur une Période**

On considère une option d'achat de prix C sur l'actif S (le sous-jacent), dont le prix d'exercice est K. A la fin de la période, les paiements possibles de l'option sont schématiquement représentés par

$$\begin{tikzcd}
 & C_u = \max\Big(0, (1+u)S - K\Big) \\
C \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\
 & C_d = \max\Big(0, (1+d)S - K\Big)
\end{tikzcd}$$

Dans le but de déterminer le prix C de cette option, nous allons montrer qu'il est possible de répliquer ses paiements futures à l'aide d'un portefeuille adéquatement choisi. Pour ce faire, considérons le portefeuille $P = (\Delta, B)$ composé de Δ nombres de l'actif risqué (le sous-jacent) et d'une quantité B de l'obligation sans risque (dette). Schématiquement, la valeur de ce portefeuille $V_P = \Delta S + B$ évoluera sur une période

$$\begin{tikzcd}
 & \Delta(1+u)S + (1+r)B \\
\Delta S + B \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\
 & \Delta(1+d)S + (1+r)B
\end{tikzcd}$$

Ainsi pour que le portefeuille reproduise l'option, il faut exiger les égalités :

$$\begin{aligned} \Delta(1+u)S + (1+r)B &= C_u \\ \Delta(1+d)S + (1+r)B &= C_d \end{aligned} \tag{3.1}$$

Les contraintes dans (3.1) reviennent à résoudre le système d'équations suivant

$$\begin{bmatrix} (1+u)S & 1+r \\ (1+d)S & 1+r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_u \\ C_d \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Note : Ainsi la question de savoir s'il est possible de répliquer l'option par la mise en place du portefeuille revient à s'assurer que le système (3.2) admet une unique solution (Δ, B). Et la réponse est oui, car le déterminant de la matrice est $(u-d)(1+r)S \neq 0$ qui est différent de zéro.

Par suite, on obtient les solutions

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} \quad \text{et} \quad B = \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)} \tag{3.3}$$

Sachant que par construction, les valeurs possibles du portefeuille égalent celles de l'option à la fin de la période, alors pour éviter l'arbitrage la valeur du portefeuille d'aujourd'hui doit égaler celle actuelle du call (loi du prix unique) :

$$\begin{aligned} C = V_P &= \Delta S + B \\ &= \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} S + \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)} \\ &= \frac{\left(\frac{r-d}{u-d}\right) C_u + \left(\frac{u-r}{u-d}\right) C_d}{1+r} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Note :

1. La probabilité de l'investisseur q n'apparait pas dans la formule (3.4). Ce qui est légitime car c'est une probabilité propre à chaque investisseur, alors que la formule du prix de l'option dans (3.4) est propre au marché et est indépendant de l'attitude face au risque des acteurs.
2. En définissant à partir de la formule (3.4) la quantité $p = \frac{r-d}{u-d}$, on obtient la nouvelle formule du prix du call

$$C = \frac{pC_u + (1-p)\,C_d}{1+r} \tag{3.5}$$

   Sachant que $0 \leq p \leq 1$ (grâce à l'hypothèse 4), alors les paramètres p et $1-p$ sont assimilable à des probabilités. De plus, ils sont définis indépendamment de l'investisseur et sont qualifiés de *probabilités risque neutres* [a].
3. La valeur de l'option dépend seulement de la valeur de l'actif sous-jacent et des paramètres de marché, mais elle ne dépend explicitement pas à d'autres facteurs comme le portefeuille de marché par exemple.

a. le paramètre p doit être interprété comme la probabilité d'une hausse dans un univers risque-neutre, de sorte que $1-p$ est la probabilité d'une baisse dans ce même univers. Si les investisseurs sont neutres au risque, alors q devrait prendre la valeur p.

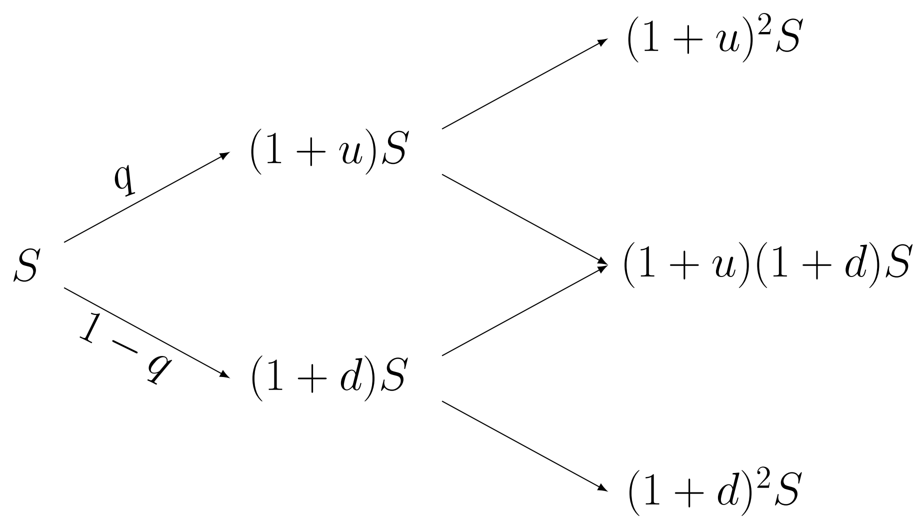
Exercice 1.1: Considérons le cas où $1+u = 1.2$, $1+d = 0.8$, $1+r = 1.05$, $S = 45$ et $K = 40$.

1. Calculer les paiements C_u et C_d de l'option à la première période.

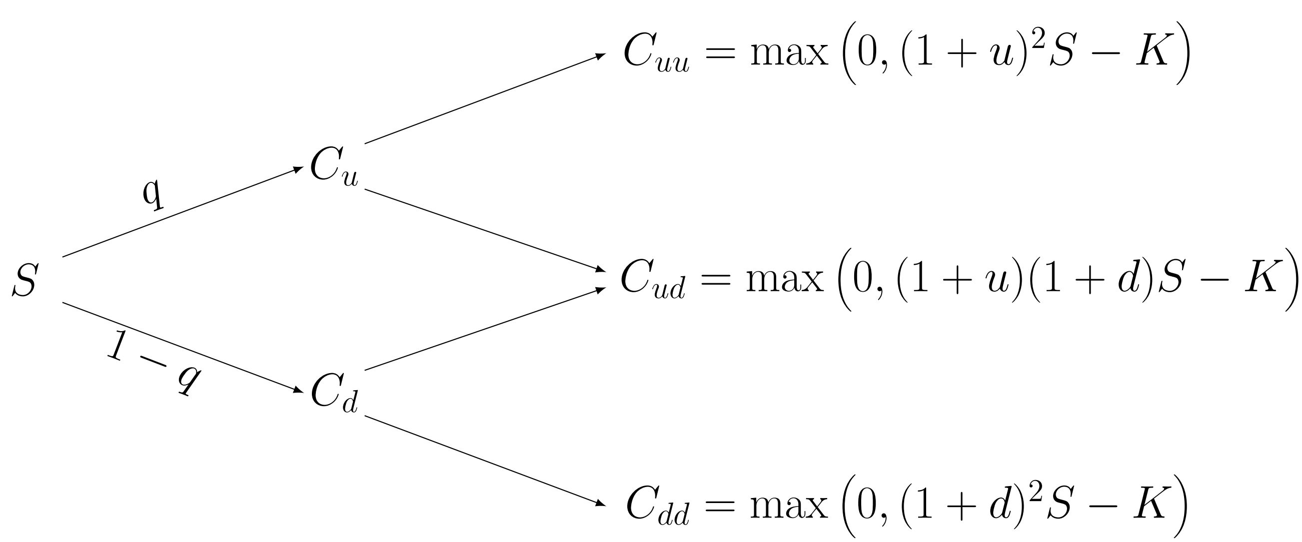
2. En déduire le prix unique du marché de l'option C.

- **1.2 - Évaluation d'une Option sur Deux Périodes**

Le processus du prix de l'actif sous-jacent sur deux périodes est schématisé



Ainsi, l'évolution du prix de l'option d'achat C écrite sur l'actif S (le sous-jacent) de prix d'exercice K est schématiquement représentée par



En appliquant un raisonnement similaire au mode d'évaluation d'une période (voir cas précédent), on détermine les prix C_u et C_d de l'option

$$\begin{aligned} C_u &= \frac{pC_{uu} + (1-p)\,C_{ud}}{1+r} \\ C_d &= \frac{pC_{ud} + (1-p)\,C_{dd}}{1+r} \end{aligned} \tag{3.6}$$

En substituant les formules à (3.6) dans l'expression (3.5), on obtient le prix d'aujourd'hui d'une option à deux périodes

$$\begin{aligned} C &= \frac{p^2 C_{uu} + 2p\,(1-p)\,C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}}{(1+r)^2} \\ &= \frac{\Sigma_{i=0}^{2}\binom{2}{i} p^i (1-p)^{2-i} \max\left\{0, (1+u)^i (1+d)^{2-i} S - K\right\}}{(1+r)^2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Par récurrence, on peut établir que le prix d'aujourd'hui d'une option call à n périodes est obtenu par la formule suivante [1]

$$C = \frac{\Sigma_{i=0}^{n}\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \max\left\{0, (1+u)^i (1+d)^{n-i} S - K\right\}}{(1+r)^n} \tag{3.8}$$

Exercice 1.2: On considère une option d'achat de prix d'exercice $K = 50$ sur un actif dont le prix aujourd'hui est $S = 48$. La maturité de l'option est $\tau = 55$ jours, correspondant à $\frac{55}{365} = 0.151$ an. Le taux d'intérêt sans risque est $r = 3\%$ par an. Pour évaluer cette option, on va considérer un arbre binomial à deux périodes $n = 2$ où $1 + u = 1.25$ et $1 + d = 0.8$ par période.

1. Calculer le taux d'intérêt par période.
2. Déterminer les paiements C_u et C_d de l'option à la première période.
3. En déduire le prix unique du marché C de l'option aujourd'hui.

1. Celui d'aujourd'hui d'une option put sera donné par $p = \frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \max\left\{0, K-(1+u)^i (1+d)^{n-i} S\right\}}{(1+r)^n}$.

2 Valorisation de Titres par les Équations aux Dérivées Partielles

Le prix d'un titre contingent est également modélisable sous forme d'équations aux dérivées partielles connues sous le nom de modèle de Black-Scholes-Merton. On abordera en première partie, l'approche d'arbitrage permettant la mise en place d'un tel modèle. On étudiera en deuxième étape, les coefficients de sensitivité des options européennes.

L'actif sous-jacent considéré ici ne paie pas de dividende et son processus de prix est défini par le mouvement brownien géométrique suivant

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{3.9}$$

où μ représente le rendement espéré instantané de l'actif, σ est la volatilité instantanée de ses rendements et $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ est un mouvement brownien (un processus Wiener) standard.

2.1 - Modèle de Black-Scholes-Merton d'Évaluation d'un Titre

Considérons un titre contingent de prix $F(t,S)$ écrit sur l'actif sous-jacent S. Par le lemme d'Itô (2.20), le processus de prix du titre contingent est

$$\begin{aligned} dF(t,S) = &\left(\frac{\partial F(t,S)}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial F(t,S)}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t) \frac{\partial^2 F(t,S)}{\partial S^2}\right) dt \\ &+ \frac{\partial F(t,S)}{\partial S} \sigma S_t dW_t \end{aligned} \tag{3.10}$$

A partir de (3.10), on obtient le rendement espéré instantané $\mu_F = \frac{\mathbb{E}\left[\frac{dF}{dt}\right]}{F}$ et la variance instantanée σ_F des rendements du titre contingent comme suit [2]

$$\mu_F = \frac{\frac{\partial F(t,S)}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial F(t,S)}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t) \frac{\partial^2 F(t,S)}{\partial S^2}}{F} \tag{3.11}$$

$$\sigma_F = \frac{\frac{\partial F(t,S)}{\partial S}\sigma S_t}{F} \tag{3.12}$$

Formons le portefeuille $P = (w, 1-w)$, où w représente la fraction à investir sur le titre contingent F et le reste $1-w$ celle à mettre sur l'actif S. L'objectif

2. D'où, on peut réécrire le processus de $F(t,S)$ comme suit $dF(t,S) = \mu_F F(t,S)dt + \sigma_F F(t,S)dW_t$.

ici est de déterminer la part optimale w telle que la valeur de ce portefeuille soit sans risque. En notant la valeur de ce portefeuille par $V_P(t, S, F)$, son rendement est donné par

$$\begin{aligned} \frac{dV_P(t,S,F)}{V_P(t,S,F)} &= w\frac{dF(t,S)}{F(t,S)} + (1-w)\frac{dS_t}{S_t} \\ &= (w\mu_F + (1-w)\mu)\, dt + \underbrace{(w\sigma_F + (1-w)\sigma)}_{I}\, dW_t \end{aligned} \tag{3.13}$$

Le rendement de ce portefeuille serait sans risque si le terme de diffusion est nul, c'est à dire que le coefficient $I = w\sigma_F + (1-w)\sigma$ est égal à zéro. Ce qui implique que la part w doit être choisi comme suit

$$w = \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_F} \tag{3.14}$$

D'autre part, dans le cas où le portefeuille est sans risque son rendement espéré doit égalé le taux d'intérêt sans risque r

$$\frac{dV_P(t,S,F)}{V_P(t,S,F)} = rdt \tag{3.15}$$

Comparant (3.15) et (3.13) en utilisant l'expression de w en (3.14), on obtient [3]

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\mu_F - r}{\sigma_F} \tag{3.16}$$

En substituant les équations (3.11) et (3.12) dans l'équation (3.16), nous obtenons l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton de valorisation des titres contingents suivante

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F(t,S)}{\partial S^2} + rS\frac{\partial F(t,S)}{\partial S} + \frac{\partial F(t,S)}{\partial t} - rF = 0$$

Définition 2.1

Le prix de tout titre contingent $F(t, S)$, écrit sur un sous-jacent S ne payant pas de dividende et de processus de prix défini par l'équation (3.9),

3. Cette expression signifie que les primes de risque divisées par leur niveau de risque (les ratios de Sharpe) pour l'actif sous-jacent et le titre contingent sont égales.

vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante dite de Black-Scholes-Merton

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F(t,S)}{\partial S^2} + rS\frac{\partial F(t,S)}{\partial S} + \frac{\partial F(t,S)}{\partial t} - rF = 0 \qquad (3.17)$$

Note :

1. Il est important de noter que le taux de rendement espéré μ du titre sous-jacent, n'affecte pas la valeur des options dans la formule de Black-Scholes-Merton (3.17). La contrepartie en temps discret de cette observation est lorsque nous avions observé que les probabilités réelles de mouvements haussiers et baissiers n'avaient pas d'impact sur les prix des options.
2. Soulignons que l'équation de Black-Scholes-Merton (3.17) reste également valable lorsqu'on a $\mu = r$. Cependant dans un tel scénario, les investisseurs ne demanderaient pas de prime pour la détention de l'actif car étants indifférents au risque. Cette méthode de valorisation des produits dérivés est communément connue sous le nom de tarification risque-neutre.

Exercice 2.1: Suivant l'argument de réplication donné ci-dessus, déterminer l'EDP Black-Scholes-Merton lorsque l'actif sous-jacent paie un taux de dividende continu q.

L'équation (3.17) est bien connue en sciences physiques sous le nom d'équation de la chaleur. Sous certaines conditions limites, cette équation admet une solution analytique. C'est le cas des options call et put européennes.

▷ **Option call européenne** : Pour une option call européenne écrite au temps t sur l'actif sous-jacent S de prix d'exercice K et de maturité T, la solution de l'équation (3.17) sous les conditions limites

$$\begin{aligned} C(t,0) &= 0, \\ C(t,S) &\to S, \text{ si } S \to \infty \\ C(t,S) &= \max(0, S_t - K) \end{aligned} \tag{3.18}$$

est donnée par la formule [4]

$$C(t,S) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{3.19}$$

où $N(\cdot)$ est la fonction de distribution cumulée de la loi normale, r le taux d'intérêt sans risque (supposé constant) [5] et d_1 et d_2 sont données par

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(S_t/K\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned} \tag{3.20}$$

et où σ est la volatilité instantanée des rendements de l'actif sous-jacent.

▷ **Option put européenne** : Une option put européenne écrite à l'instant t sur l'actif sous-jacent S, de prix d'exercice K, de maturité T et suivant les conditions limites

$$\begin{aligned} P(t,0) &= K e^{-r(T-t)}, \\ P(t,S) &\to 0, \text{ si } S \to \infty \\ P(t,S) &= \max(0, K - S_t) \end{aligned} \tag{3.21}$$

a son prix donné par la formule suivante

$$P(t,S) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \tag{3.22}$$

Note : La relation entre les prix des options call et put appelée parité put-call est [a]

$$C(t,S) + K e^{-r(T-t)} = P(t,S) + S_t \tag{3.24}$$

4. La détention d'une option call européenne peut être interprété comme étant la détention d'actions d'une valeur $S_t N(d_1)$ et la vente d'obligations de valeur $K e^{-r(T-t)} N(d_2)$ à des proportions convenables. Sachant que si le taux d'intérêt r augmente, on a la valeur de la dette qui diminue et donc le prix de l'option qui augmente.

5. Signifiant qu'une unité de devise investie au taux r à l'instant t, vaudra $B(t,T) = e^{r(T-t)}$ au temps T.

a. Lorsque l'actif sous-jacent paie le montant de dividende D, alors la relation parité put-call est définie par

$$C(t,S) + D(S,t) + Ke^{-r(T-t)} = P(t,S) + S_t \tag{3.23}$$

Exercice 2.2: En calculant les diverses dérivées partielles des solutions (3.19) et (3.22), vérifier que le prix des options call et put satisfont la formule de Black-Scholes-Merton (3.17).

	Call européen	Put européen	Call Américain	Put Américain
Cours actuel de l'action	+	−	+	−
Prix d'exercice	−	+	−	+
La date d'échéance	?	?	+	+
Volatilité	+	+	+	+
Taux d'intérêt sans risque	+	−	+	−
Dividendes	−	+	−	+

TABLE 3.1 – Les effets de l'augmentation d'une des variables du prix des options sur actions (voir [4]). Le signe (+) signifie qu'une croissance de la variable provoque une augmentation de la valeur de l'option. Le signe (−) signifie qu'une augmentation de la variable entraîne une baisse de la valeur de l'option. Le signe (?) signifie que la relation est incertaine.

• 2.2 - Ratios de Couverture et Coefficients de Sensitivité

Nous présentons ici les coefficients de sensitivité des options encore appelés les Grecques, qui sont fondamentaux au hedging et pricing des titres contingents.

• 2.2.1 - Le coefficient DELTA (Δ)

Définition 2.2

Le delta d'une option est la sensibilité du prix de l'option à une variation du prix du titre sous-jacent.

Le delta de l'option d'achat européenne de la formule (3.19) est défini par

$$\Delta = \frac{\partial C(t,S)}{\partial S} = N(d_1) > 0 \tag{3.25}$$

Le delta de l'option de vente européenne de la formule (3.22) est défini par

$$\Delta = \frac{\partial P(t, S)}{\partial S} = N(d_1) - 1 \tag{3.26}$$

Exercice 2.3: Considérons deux options call et put ayant le même prix d'exercice, la même maturité et écrites sur la même action. Soit le portefeuille formé d'un nombre n_A d'actions, d'un nombre n_C d'options call et d'un nombre n_P d'options put, dont la valeur est donnée par

$$V = A \times S + n_C \times C + n_P \times P$$

où S, C et P sont les prix de l'action, du call et du put.

1. Déterminer le delta $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ du portefeuille.
2. Si $\Delta = 0$, déterminer la relation linéaire entre le nombre d'options call et put.
3. Si on a $A = 100$, $n_P = 0$ et $N(d_1) = 0.7437$, calculer le nombre d'options call qui annule Δ.

- **2.2.2 - Le coefficient GAMMA** (Γ)

Définition 2.3

Le gamma d'une option est la sensibilité du delta de l'option à une variation du prix du titre sous-jacent.

Le gamma de l'option d'achat européenne de la formule (3.19) est défini par

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S_t \sigma \sqrt{T - t}} \tag{3.27}$$

Le gamma de l'option de vente européenne de la formule (3.22) est

$$\Gamma = \frac{\partial^2 P(t, S)}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S_t \sigma \sqrt{T - t}} \tag{3.28}$$

- **2.2.3 - Le coefficient VEGA** (ν)

Définition 2.4

La vega d'une option est la sensibilité du prix de l'option à un changement de volatilité.

Le vega de l'option d'achat européenne de la formule (3.19) est défini par

$$\nu = \frac{\partial C(t,S)}{\partial \sigma} = S_t\sqrt{T-t}N'(d_1) \tag{3.29}$$

Le vega de l'option de vente européenne de la formule (3.22) est donné par

$$\nu = \frac{\partial P(t,S)}{\partial \sigma} = S_t\sqrt{T-t}N'(d_1) \tag{3.30}$$

- **2.2.4 - Le coefficient THETA** (θ)

Définition 2.5

Le thêta d'une option est la sensibilité du prix de l'option à une variation négative de la durée jusqu'à l'échéance.

Le thêta de l'option d'achat européenne de la formule (3.19) est défini par

$$\theta = -\frac{\partial C(t,S)}{\partial T} = -\frac{S_t\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{3.31}$$

Le thêta de l'option de vente européenne de la formule (3.22) est donné par

$$\theta = -\frac{\partial P(t,S)}{\partial T} = -\frac{S_t\sigma N'(-d_1)}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) \tag{3.32}$$

- **2.2.5 - Le coefficient RHO** (ρ)

Définition 2.6

Le rho d'une option est la sensibilité du prix de l'option à une variation du taux d'intérêt r.

Le rho de l'option d'achat européenne de la formule (3.19) est défini par

$$\rho = \frac{\partial C(t,S)}{\partial r} = K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{3.33}$$

Le rho de l'option de vente européenne de la formule (3.22) est donné par

$$\rho = \frac{\partial P(t,S)}{\partial r} = -K(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2) \tag{3.34}$$

Chapitre 4

Structure par Terme et Dérivés des Taux d'Intérêt

Sommaire

Pour actualiser les flux monétaires, nous avons besoin des taux d'intérêts. Les taux d'intérêts sont difficiles à appréhender à cause de leur nature instable. Ces derniers décennies cependant, des modèles de plus en plus sophistiqués à capter les taux sur les marchés financiers ont été mis en place.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à la structure par terme des taux d'intérêt mais également à un cas classique de dérivée sur taux d'intérêt qui est une obligation. Les notions abordées ici sont largement étudiées dans les références [2, 5] qui ont servi à la mise en oeuvre de ce chapitre.

1 Approche Générale de la Structure à Terme

1.1 - Formule Générale

Soit $R(t,T)$ le rendement d'une obligation zéro-coupon $P(t,T)$ payant 1\$ à maturité (c'est à dire $P(T,T) = 1\$$). Alors on a

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \tag{4.1}$$

où équivalemment, on obtient la formule suivante du rendement $R(t,T)$

$$R(t,T) = -\frac{\ln\left(P(t,T)\right)}{T-t} \tag{4.2}$$

La fonction $R(\cdot,T) : t \longrightarrow -\frac{\ln(P(t,T))}{T-t}$ est la structure à terme des taux d'intérêt.

Définition 1.1

La structure à terme des taux est la courbe représentant l'évolution des taux d'intérêt des obligations du trésor zéro-coupon à différentes maturités.

Nous avons besoin de variables d'état pour générer $R(t,T)$ à tout instant t. Le taux d'intérêt sans risque $r(t)$, comme unique variable d'état, est alors proposé et introduit comme suit

$$r(t) = R(t,t) = \lim_{T\to t} R(t,T) \tag{4.3}$$

où sa dynamique est définie par le processus suivant

$$dr(t) = f(t,r)dt + \rho(t,r)dW(t) \tag{4.4}$$

Ainsi le prix $P(t,T)$ au temps t de 1\$ payable à l'instant T, est une fonction également du taux d'intérêt appelé dérivé de taux d'intérêt. Ainsi le prix $P(t,T)$ sera finalement noté par $P(t,T,r)$.

Définition 1.2

On appelle dérivé de taux d'intérêt, un titre contingent ayant un ou plusieurs taux d'intérêt comme sous-jacent.

Note : Les rendements instantanés des obligations de maturités différentes sont parfaitement corrélés.

Afin d'établir l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton du titre contingent $P(t,T,r)$, appliquons le lemme d'Itô

$$\begin{aligned} dP(t,T,r) = &\left\{\frac{\partial P(t,T,r)}{\partial t} + f(t,r)\frac{\partial P(t,T,r)}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2(r,t)\frac{\partial^2 P(t,T,r)}{\partial r^2}\right\}dt \\ &+ \frac{\partial P(t,T,r)}{\partial r}\rho(t,r)dW(t) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Écrit autrement, on obtient la forme suivante

$$dP(t,T,r) = P(t,T,r)\left\{\mu(t,T,r)dt + \sigma(t,T,r)dW(t)\right\} \tag{4.6}$$

où les coefficients $\mu(t,T,r)$ and $\sigma(t,T,r)$ sont donnés par

$$\mu(t,T,r) = \frac{\frac{\partial P(t,T,r)}{\partial t} + f(t,r)\frac{\partial P(t,T,r)}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2(r,t)\frac{\partial^2 P(t,T,r)}{\partial r^2}}{P(t,T,r)} \tag{4.7}$$

$$\sigma(t,T,r) = \frac{\frac{\partial P(t,T,r)}{\partial r}\rho(t,r)}{P(t,T,r)} \tag{4.8}$$

Considérons un portefeuille formé de deux obligations de prix $P(t,T_1,r)$ et $P(t,T_2,r)$ auxquelles les proportions de richesse $(w, 1-w)$ y sont respectivement investies. Si V désigne la valeur de ce portefeuille, alors son rendement est

$$\begin{aligned} dV &= w\frac{dP(t,T_1,r)}{P(t,T_1,r)} + (1-w)\frac{dP(t,T_2,r)}{P(t,T_2,r)} \\ &= \left\{w\mu(t,T_1,r) + (1-w)\mu(t,T_2,r)\right\}dt \\ &+ \left\{w\sigma(t,T_1,r) + (1-w)\sigma(t,T_2,r)\right\}dW(t) \end{aligned}$$

Afin de mettre en place un portefeuille sans risque, il faut imposer les contraintes

$$\begin{aligned} w\sigma(t,T_1,r) + (1-w)\sigma(t,T_2,r) &= 0 \\ w\mu(t,T_1,r) + (1-w)\mu(t,T_2,r) &= r(t) \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'équation fondamentale suivante

$$\frac{\mu(t,T_1,r) - r(t)}{\sigma(t,T_1,r)} = \frac{\mu(t,T_2,r) - r(t)}{\sigma(t,T_2,r)} \tag{4.9}$$

Le résultat (4.9) est valable pour tout T_1, T_2 et est indépendant de la maturité.

Définition 1.3

On appelle le *prix de marché* du risque, encore appelé la *prime de risque*, la quantité notée $q(t,r)$ et définie par

$$q(t,r) = \frac{\mu(t,T,r) - r(t)}{\sigma(t,T,r)}, \ \forall\, t \leq T \tag{4.10}$$

Substituant $\mu(t,T,r) = q(t,r)\sigma(t,T,r) + r(t)$ dans (4.7) en tenant compte (4.8), on obtient l'EDP suivante appelée *l'équation de structure par terme*

$$\frac{\partial P(t,T,r)}{\partial t} + (f(t,r) - \rho(t,r)q(t,r))\frac{\partial P(t,T,r)}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2(t,r)\frac{\partial^2 P(t,T,r)}{\partial r^2} = r(t)P(t,T,r) \tag{4.11}$$

La solution de (4.11), tenant compte de la condition $P(T,T) = 1\$$, est

$$P(t,T,r) = \mathbb{E}_t\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds - \frac{1}{2}\int_t^T q^2(s,r)ds - \int_t^T q(s,r)dW(s)\right)\right] \tag{4.12}$$

- **1.2 - Application aux Modèles à un Facteur**

1.2.1 - Modèle de Vasicek

Si le taux sans risque est modélisé par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

$$dr(t) = \alpha\left(\gamma - r(t)\right)dt + \rho dW(t) \tag{4.13}$$

le prix de marché du risque q est constant. On a ainsi le prix de l'obligation

$$P(t,T) = \mathbb{E}_t\left[exp\left(-\int_t^T r(s)ds - \frac{1}{2}\int_t^T q^2 ds - \int_t^T q dW(s)\right)\right] \tag{4.14}$$

Sous la probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$, on considère le mouvement brownien

$$d\widetilde{W} = dW(t) + qdt$$

Et le processus du taux d'intérêt d'Ornstein-Uhlenbeck devient

$$dr(t) = \left(\alpha\gamma - \rho q - \alpha r(t)\right)dt + \rho d\widetilde{W}$$

On remarque ainsi que $r(t)$ est normalement distribué et qu'on a le prix

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\right] \\ &= exp\left(\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[-\int_t^T r(s)ds\right] + \frac{1}{2}\mathbb{V}ar_t^{\mathbb{Q}}\left[-\int_t^T r(s)ds\right]\right) \\ &= e^{\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right)(R(\infty)-r(t))-(T-t)R(\infty)-\frac{\rho^2}{4\alpha^3}\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right)^2} \end{aligned} \tag{4.15}$$

où $R(\infty) = \gamma + \frac{\rho q}{\alpha} - \frac{\rho^2}{2\alpha^2}$. On obtient à partir de (4.2) et tenant compte de (4.15), la courbe de la structure à terme suivante

$$\begin{aligned} R(t,T) &= R(\infty) + \frac{1}{\alpha(T-t)}\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right)(r(t)-R(\infty)) \\ &+ \frac{\rho^2}{4\alpha^3(T-t)}\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right)^2 \end{aligned}$$

Note : La courbe de la structure à terme du modèle d'Ornstein-Uhlenbeck, peut ainsi être plate, ascendante ou descendante selon les valeurs du taux $r(t)$ et de ses paramètres.

- **1.2.2 - Modèle de Cox, Ingersoll et Ross**

Si le taux sans risque est modélisé par le processus de Cox, Ingersoll et Ross

$$dr(t) = \kappa\left(\gamma - r(t)\right)dt + \sigma\sqrt{r(r)}dW(t) \tag{4.16}$$

sous la contrainte $2\kappa\theta \geq \sigma^2, \forall\, t \in [0,T]$. Le prix de marché du risque est

$$q(t,r) = \frac{\lambda\sqrt{r(t)}}{\sigma},\ \forall\, t \leq T \tag{4.17}$$

où λ est une constante. Le prix de l'obligation est donné par

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)} \tag{4.18}$$

où les fonctions $A(\cdot,\cdot)$ et $B(\cdot,\cdot)$ sont définies comme suit

$$\begin{aligned} A(t,T) &= \left(\frac{2\gamma e^{(\kappa+\lambda+\gamma)(T-t)/2}}{(\kappa+\lambda+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \\ B(t,T) &= \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\kappa+\lambda+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} \\ \gamma &= \sqrt{(\kappa+\lambda)^2+2\sigma^2} \end{aligned}$$

A partir de (4.2) et tenant compte de (4.18), on obtient la structure à terme

$$R(t,T) = \frac{B(t,T)r(t) - \ln\left(A(t,T)\right)}{T-t}$$

Note : A long terme, c'est à dire pour $T = \infty$, on obtient

$$R(t, \infty) = \frac{2\kappa\theta}{\gamma + \kappa + \lambda}$$

1. Lorsque $r < R(t, \infty)$, la structure à terme est croissante ;
2. Lorsque $r > \frac{\kappa\theta}{\kappa+\lambda}$, la structure à terme est décroissante ;
3. Pour des valeurs de r entre ces bornes, la courbe n'est pas monotone.

2 Modèle Affine de la Structure à Terme

En absence d'opportunité d'arbitrage, le prix à l'instant t d'une obligation zéro-coupon qui mature à T est donné par le formule suivante

$$P(t, T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\right] \tag{4.19}$$

où $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}$ est l'opérateur d'espérance sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$.

On va supposer ici un modèle de structure à terme affine à N facteurs

$$r(t) = \delta_0 + \sum_{i=1}^{N} \delta_i Y_i(t) \tag{4.20}$$

où $Y(t) = (Y_1(t), \cdots, Y_N(t))'$ sont les variables économiques d'états vérifiant

$$dY(u) = \mathcal{K}(\Theta - Y(t))dt + \Sigma\sqrt{S(Y(t))}dW(t) \tag{4.21}$$

où W est un vecteur de mouvement brownien indépendants sous la probabilité $\mathbb{Q}$, $\Theta \in \mathbb{R}_+^N$ est un vecteur constant, $S(Y)$ est une matrice diagonale définie

$$[S_{ii}(Y(t))] = \alpha_i + \beta_i' Y(t)$$

$\mathcal{K}$ et Σ sont des matrices de dimension $N \times N$. Le prix de l'obligation définie en (4.19) est donné, suivant la structure à terme affine (4.20), par

$$P(t, T) = e^{A(T-t) - B'(T-t)Y(t)} \tag{4.22}$$

où les fonctions A et B vérifient les équations différentielles ordinaires

$$\begin{aligned}
\frac{dA(s)}{ds} &= \Theta'\mathcal{K}'B(s) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[\Sigma'B(s)\right]_i^2\alpha_i - \delta_0 \\
\frac{dB(s)}{ds} &= -\mathcal{K}'B(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[\Sigma'B(s)\right]_i^2\beta_i + \delta
\end{aligned}$$

où $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_N)'$. A partir de (4.2) et tenant compte (4.22), on a la structure à terme

$$R(t,T) = \frac{B'(T-t)Y(t) - A(T-t)}{T-t}$$

Annexe A

Rappel de Probabilité et de Variables Aléatoires

Sommaire

Les notions abordées ici sont un rappel en temps discret et continu d'outils indispensables à une bonne compréhension de ce cours. Elles sont largement étudiées dans [9, 10] qui ont servi à la mise en oeuvre de ce rappel.

1 Probabilité et Variables Aléatoires

1.1 - Variables Aléatoires Discrètes

Définition 1.1

Une variable aléatoire discrète X est une fonction définit de Ω dans $\mathbb{R}$ qui

- Associe la valeur $X(w) \in \mathbb{R}$ à chaque résultat de l'expérience aléatoire $w \in \Omega$;
- Ces valeurs sont discrètes $X(w) \in \{x_i, i = 1, 2, \cdots\}$;
- Et admet une masse de probabilité p vérifiant

$$p(x_i) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_i p(x_i) = 1$$
$$p(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \neq x_i$$

Exemple 1.1 *Considérons une urne contenant 3 boules noires, 2 boules blanches et 1 boule rouge. L'expérience aléatoire consiste à «tirer une boule au hasard» et on définit la variable aléatoire X comme étant un montant perdu suivant la boule retirée :*

$$X = \begin{cases} 1\$ & \textit{si la boule est noire} \\ 2\$ & \textit{si la boule est blanche} \\ 3\$ & \textit{si la boule est rouge} \end{cases}$$

Alors on a $P(X = 1\$) = p(1\$) = 1/2$, $p(2\$) = 1/3$ et $p(3\$) = 1/6$.

- **1.1.1 - Espérance**

L'espérance de la variable aléatoire discrète X suivant l'ensemble de ses valeurs dénombrables $\{x_i, i = 1, 2, \cdots\}$ est définie par

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i p(x_i)$$

Exercice 1.1: Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X]$ de la variable X de l'Exemple 1.1. Réponse : $\mathbb{E}[X] = \frac{5}{3}$.

Si $Y = g(X)$, où g est une fonction et X est une variable aléatoire, alors l'espérance de la variable Y est définie par

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)$$

Exercice 1.2: Déterminer l'espérance $\mathbb{E}[Y]$ où $Y = X^2$ et X est la variable de l'Exemple 1.1. Réponse : $\mathbb{E}[Y] = \frac{10}{3}$.

- **1.1.2 - Variance**

La variance de la variable aléatoire X est la mesure de sa dispersion autour de sa moyenne et est définie par

$$\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mu)^2\right] = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i), \text{ où } \mu = \mathbb{E}[X]$$

Il existe une formule souvent utilisée de la variance s'écrivant sous la forme

$$\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

La racine carrée de la variance, appelée l'écart type et notée σ, est donnée par

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{V}ar[X]}$$

Exercice 1.3: Déterminer la variance $\mathbb{V}ar[X]$ et l'écart type de la variable X de l'Exemple 1.1. Réponse : $\mathbb{V}ar[X] = \frac{5}{9}$ et $\sigma = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

• 1.1.3 - Fonction Génératrice des Moments

La fonction génératrice des moments de la variable X, notée ϕ, est définie

$$\phi(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_i e^{tx_i} p(x_i)$$

où t est une paramètre réel. Les dérivées de la fonction génératrice $\frac{\partial^k}{\partial t^k}\phi$, évaluées à $t = 0$, déterminent les moments de la variable aléatoire X

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\phi(0) := \phi^{(k)}(0) = \mathbb{E}[X^k]$$

Exercice 1.4: Déterminer fonction génératrice des moments de la variable X de l'Exemple 1.1. Réponse : $\phi(t) = \frac{e^t}{2} + \frac{e^{2t}}{3} + \frac{e^{3t}}{6}$.

• 1.1.4 - Exemples de Distribution Discrète

• **Bernoulli (p)** : Une variable aléatoire est dite de Bernoulli, si elle prend deux valeurs que l'on dénotera par 1 et 0.

▷ Masse de probabilité est donnée par

$$P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = 1 - p$$

▷ Moments sont donnés par

$$\mathbb{E}[X] = p \text{ et } \mathbb{V}ar[X] = p(1 - p)$$

▷ Fonction génératrice des moments est

$$\phi(t) = pe^t + (1-p)$$

Le paramètre p est un réel positif vérifiant $0 \leq p \leq 1$

• **Binomiale (n, p)** : Une variable aléatoire est dite binomiale, si elle est n répétitions d'une variable de Bernoulli.

▷ Masse de probabilité est donnée par

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \text{ pour } k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

▷ Moments sont donnés par

$$\mathbb{E}[X] = np \text{ et } \mathbb{V}ar[X] = np(1-p)$$

▷ Fonction génératrice des moments est

$$\phi(t) = \left[pe^t + (1-p)\right]^n$$

Le paramètre p est un réel positif vérifiant $0 \leq p \leq 1$

• **Géométrique (p)** : Une variable géométrique est caractérisée par :

▷ Masse de probabilité donnée par

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1} \text{ pour } k = 1, 2, 3, \cdots$$

▷ Moments donnés par

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbb{V}ar[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

▷ Fonction génératrice des moments qui est

$$\phi(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

Le paramètre p est un réel positif vérifiant $0 \leq p \leq 1$.

• **Poisson (λ)** : Une variable de poisson est caractérisée par :

▷ Masse de probabilité donnée par

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \text{ pour } k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

▷ Moments donnés par

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \text{ et } \mathbb{V}ar[X] = \lambda$$

▷ Fonction génératrice des moments qui est

$$\phi(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Le paramètre λ est un réel positif.

- **1.2 - Variables Aléatoires Continues**

Définition 1.2

Une variable aléatoire continue X est une fonction qui associe un nombre $X(w)$ à chaque résultat d'une expérience aléatoire w. Elle est définit de l'ensemble des réalisations possibles Ω dans $\mathbb{R}$ et caractérisée par :

- Un ensemble de valeurs $X(w)$ dans $(a,\ b)$;
- Une densité de probabilité f vérifiant

$$f(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

- La probabilité d'un événement $(\alpha \leq X \leq \beta)$ défini par

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Exemple 1.2 *Un exemple de variable aléatoire continue X est de considérer la densité f définie comme suit*

$$f(x) = \begin{cases} 2(5-x)/25 & si\ 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

Exercice 1.5: Calculer la probabilité $P(1 \leq X \leq 3)$ de la variable aléatoire X ayant pour densité la fonction f de l'Exemple 1.2. Réponse : $P(1 \leq X \leq 3) = 0.48$.

• 1.2.1 - Espérance

L'espérance de la variable aléatoire continue X est définie par

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Exercice 1.6: Calculer l'espérance de la variable aléatoire X, définie à l'Exemple 1.2. Réponse : $\mathbb{E}[X] = \frac{5}{3}$.

Si $Y = g(X)$, où g est une fonction et X est une variable aléatoire, alors l'espérance de la variable Y est définie par

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

Exercice 1.7: Déterminer l'espérance $\mathbb{E}[Y]$ où $Y = X^2$ et X est la variable de l'Exemple 1.2. Réponse : $\mathbb{E}[Y] = \frac{25}{6}$.

• 1.2.2 - Variance

La variance de la variable aléatoire continue X est la mesure de sa dispersion autour de sa moyenne et est définie par

$$\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx, \text{ où } \mu = \mathbb{E}[X]$$

Il existe une formule souvent utilisée de calcul de la variance sous la forme

$$\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

La racine carrée de la variance, appelée l'écart type et notée σ, est donnée par

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{V}ar[X]}$$

Exercice 1.8: Déterminer la variance $\mathbb{V}ar[X]$ et l'écart type de la variable X de l'Exemple 1.2. Réponse : $\mathbb{V}ar[X] = \frac{25}{18}$ et $\sigma = \frac{5}{3\sqrt{2}}$.

- **1.2.3 - Fonction Génératrice des Moments**

La fonction génératrice des moments de la variable continue X, notée ϕ, est définie

$$\phi(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

où t est une paramètre réel. Les dérivées de la fonction génératrice $\frac{\partial^k}{\partial t^k}\phi$, évaluées à $t = 0$, déterminent les moments de la variable aléatoire X

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\phi_X(0) := \phi_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}[X^k]$$

Exercice 1.9: Déterminer la fonction génératrice des moments de la variable continue X de l'Exemple 1.2. Réponse : $\phi(t) = \frac{2(e^{5t}-1)}{25t^2} - \frac{2}{5t}$.

- **1.2.4 - Exemples de Distribution Continue**

• **Uniforme** $(a,\ b)$: Une variable aléatoire suit une loi uniforme sur l'intervalle $(a,\ b)$, si sa densité de probabilité est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

▷ Les moments de la variable aléatoire uniforme X sont donnés par

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \text{ et } \mathbb{V}ar[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

▷ La fonction génératrice des moments est donnée

$$\phi(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

• **Exponentielle** (λ) : Une variable aléatoire est dite de suivre une loi exponentielle de paramètre λ, si sa densité de probabilité est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

▷ Les moments de la variable exponentielle X sont donnés par

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}ar[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

▷ La fonction génératrice des moments est donnée

$$\phi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

• **Normale** (μ, σ^2) : Une variable aléatoire est dite de suivre une loi normale de paramètre (μ, σ^2), si sa densité de probabilité est définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

▷ Les moments de la variable exponentielle X sont donnés par

$$\mathbb{E}[X] = \mu \text{ et } \mathbb{V}ar[X] = \sigma^2$$

▷ La fonction génératrice des moments est donnée

$$\phi(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

• **Loi de distribution Log-normale** : Une variable aléatoire Y suit une loi log-normale de paramètre (μ, σ^2), si elle est définie par

$$Y = e^X$$

où la variable X suit une loi normale de paramètre (μ, σ^2).

$$f_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\ln(y)) \tag{A.1}$$

et où f_X est la densité de probabilité de la variable normale X. Les moments de la variable exponentielle Y sont donnés par

$$\mathbb{E}[Y] = e^{\mu + \sigma^2/2} \text{ et } \mathbb{V}ar[Y] = e^{\left(2\mu + \sigma^2\right)} \left(e^{\sigma^2} - 1\right) \tag{A.2}$$

Exercice 1.10: Vérifier que la densité de probabilité de la variable log-normale Y est bien définie par la formule (A.1). Déterminer également les formules de l'espérance et de la variance de la variable Y données dans (A.2).

2 Les Lois Conditionnelles

Si deux variables aléatoires X et Y sont définies à partir d'une même expérience aléatoire, leur distribution de probabilité peut être spécifiée par la *masse croisée* dans le cas discret, et par la *densité croisée* dans le cas continu. À partir de cette masse ou de cette densité, on définira les *probabilités conditionnelles* qui par la même occasion permettront d'introduire la *masse conditionnelle*, la *densité conditionnelle* ainsi que l'*espérance conditionnelle* [5].

Remarque 2.1 *La probabilité conditionnelle de l'événement E sachant l'événement F est définie par*

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \tag{A.3}$$

2.1 - Distributions Croisées

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont définies à partir d'une même expérience aléatoire.

2.1.1 - Variable Discrète

▷ **Masse Croisée** : La masse croisée des variables X et Y est définie par

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p(x_i, y_j)$$

On en déduit les masses marginales de ces variables définies comme suit

$$P(X = x_i) = \sum_j p(x_i, y_j)$$
$$P(Y = y_i) = \sum_i p(x_i, y_j)$$

▷ **Espérance de Variables Croisées** : Si g est une fonction des deux variables aléatoires discrètes X et Y, alors son espérance est définie par

$$\mathbb{E}\left[g(X,Y)\right] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p(x_i, y_j)$$

▷ **Variables Aléatoires Indépendantes** : Les variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si on a l'égalité suivante

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) P(Y = y_i), \forall\, i, j$$

▷ **Loi conditionnelle** : La masse conditionelle de X sachant $Y = y$, si $P(Y = y) > 0$, est la fonction

$$\begin{aligned} p_{X/Y}(x\,|\,y) &= P(X = x\,|\,Y = y) \\ &= \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} \end{aligned}$$

où $p(x,y)$ est la masse croisée des variables X et Y, et $p_Y(y)$ est la masse marginale de Y.

Exercice 2.1: Soient X et Y des variables aléatoires ayant la masse croisée $p(x,y)$ suivante

$p(x,y)$	$y = 0$	$y = 1$	$P(X = x)$
$x = 0$	0.40	0.10	0.50
$x = 1$	0.20	0.30	0.50
$P(Y = y)$	0.60	0.40	1.00

1. Calculer les espérances $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$. Réponse : $\mathbb{E}[X] = 0.5$ et $\mathbb{E}[Y] = 0.4$.
2. Calculer les variances $\mathbb{V}ar[X]$ et $\mathbb{V}ar[Y]$. Réponse : $\mathbb{V}ar[X] = 0.25$ et $\mathbb{V}ar[Y] = 0.24$.
3. Calculer la covariance $\mathbb{C}ov[X,Y]$ et la corrélation $\mathbb{C}orr[X,Y]$. Réponse : $\mathbb{C}ov[X,Y] = 0.1$ et $\mathbb{C}orr[X,Y] = 0.4658$.

- **2.1.2 - Variable Continue**

▷ **Densité Croisée** : La probabilité de l'événement $(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d)$, associé aux variables X et Y, est définie par

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$$

où la fonction f est la densité croisée de ces variables aléatoires. On en déduit les densités marginales de ces variables par

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

Exercice 2.2: Soient les variables aléatoires continues X et Y, ayant la densité croisée $f(x,y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x+y \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{A.4}$$

1. Déterminer la densité marginale $f_X(x)$ de la variable X. Réponse :
2. Déterminer la densité marginale $f_Y(y)$ de la variable Y. Réponse :

▷ **Espérance de Variables Croisées** : Si $g(X,Y)$ est une fonction des variables aléatoires continues X et Y, alors son espérance est définie par

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int_a^b \int_c^d g(x,y)f(x,y)dxdy$$

Exercice 2.3: Calculer l'espérance de la variable $g(X,Y) = X + Y$ où les variables aléatoires continues X et Y ont leur densité croisée $f(x,y)$ définie en (A.4).

▷ **Variables Aléatoires Indépendantes** : Les variables aléatoires continues X et Y sont indépendantes si on a

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \forall\ x, y$$

Exercice 2.4:

1. Est ce que les variables aléatoires X et Y dont la densité croisée $f(x, y)$ est donnée en (A.4), sont indépendantes ?
2. Calculer les espérances $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$. Réponse : $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 1/3$.
3. Calculer les variances $\mathbb{V}ar[X]$ et $\mathbb{V}ar[Y]$. Réponse : $\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{V}ar[Y] = 1/18$.
4. Calculer la covariance $\mathbb{C}ov[X, Y]$ et la corrélation $\mathbb{C}orr[X, Y]$. Réponse : $\mathbb{C}ov[X, Y] = -1/36$ et $\mathbb{C}orr[X, Y] = -1/2$.

▷ **Loi conditionnelle** : La densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ est la fonction

$$f_{X|Y}(x \,|\, y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \text{ si } f_Y(y) > 0$$

où $f(x, y)$ est la densité croisée de X et Y, $f_Y(y)$ est la densité marginale Y.

Note : On a les différentes propriétés des fonctions espérance et variance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[aX + bY] &= a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]\\ \mathbb{V}ar[X + Y] &= \mathbb{V}ar[X] + \mathbb{V}ar[Y] + 2\mathbb{C}ov[X, Y]\end{aligned}$$

La covariance et la correlation des variables aléatoires X et Y sont définies

$$\begin{aligned}\mathbb{C}ov[X, Y] &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\right]\\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\\ \mathbb{C}orr[X, Y + Z] &= \frac{\mathbb{C}ov[X, Y]}{\sqrt{\mathbb{V}ar[X]\mathbb{V}ar[Y]}}\end{aligned}$$

Si les variables X et Y sont indépendantes (discrètes ou continues), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X)h(Y)] &= \mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)]\\ \phi_{X+Y}(t) &= \phi_X(t) \times \phi_Y(t)\\ \mathbb{V}ar[X + Y] &= \mathbb{V}ar[X] + \mathbb{V}ar[Y]\end{aligned}$$

- **2.2 - Espérances Conditionnelles**

• 2.2.1 - Variable Discrète

▷ L'espérance conditionnelle de la variable discrète X sachant $Y = y$ est

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x \mid y)$$

Remarque 2.2 *L'espérance conditionnelle est donc une fonction g de la variable y définie par $g(y) = \mathbb{E}[X \mid Y = y]$. Ainsi, on pourra en déduire la variable aléatoire $g(Y)$ qu'on dénotera $E[X|Y]$.*

▷ Si X et Y sont des variables discrètes indépendantes alors, pour tout réel y, on a $p(x, y) = p_X(x) \times p_Y(y)$. Par suite, on obtient

$$p_{X|Y}(x \mid y) = p_X(x)$$
$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \mathbb{E}[X]$$

Exercice 2.5: Trouver $\mathbb{E}[X \mid Y = 1]$ si la masse croisée est définie par $p(1, 1) = 0.50$, $p(1, 2) = 0.10$ et $p(2, 2) = 0.30$. Rép. : $\mathbb{E}[X \mid Y = 1] = \frac{7}{6}$.

▷ Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes, alors on a la formule

$$\mathbb{E}[X] = \sum_y \mathbb{E}[X \mid Y = y] p_Y(y)$$

• 2.2.2 - Variable Continue

▷ L'espérance conditionnelle de la variable continue X sachant $Y = y$ est

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid y) dx$$

Remarque 2.3 *L'espérance conditionnelle d'une variable continue est une fonction g de la variable y définie par $g(y) = \mathbb{E}[X \mid Y = y]$. Ainsi, on en déduit la variable aléatoire $g(Y)$ qu'on dénotera $E[X|Y]$.*

▷ Si X et Y sont des variables continues indépendantes alors, pour tout réel y, on a $f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$. Par suite, on obtient

$$f_{X|Y}(x \mid y) = f_X(x)$$
$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \mathbb{E}[X]$$

Exercice 2.6: Soient les variables aléatoires continues X et Y dont la densité croisée $f(x, y)$ est définie en (A.4). Trouver la densité $f_{X|Y}(x \mid y)$ et l'espérance conditionnelles $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ de X sachant $Y = y$ où $0 \leq y \leq 1$. Réponse : $f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{1}{1-y}$ et $\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \frac{1-Y}{2}$.

▷ Si X et Y sont des variables aléatoires continues, alors on a la formule

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[X \mid Y = y] f_Y(y) dy$$

References

[1] M. Baxter and A. Rennie. *Financial calculus : An introduction to derivative pricing*. Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK, 2012.

[2] C. Bisière. *La structure par terme des taux d'intérêt*. Presses Universitaires de France, 108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris, 1997.

[3] P. Devolder. *Finance stochastique*. Collection Actuariat, Avenue Paul Héger 26 - 1050 Bruxelles, 1993.

[4] J. Hull. *Options, futures et autres actifs dérivés*. Pearson Education Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 07458, 2017.

[5] H. Huynh, V. Lai, and I. Soumare. *Simulation stochastiques et applications en finance avec programmation*. Economica, 49, rue Héricart, 75015 Paris, 2006.

[6] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[7] N. E. Karoui and E. Gobet. *Les outils stochastiques des marchés financiers : Une visite guidée de Einstein à Black-Scholes*. Éditions de l'École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, 2011.

[8] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*. Ellipses, 32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15, 2012.

[9] B. Lamond. *Cours Modèles Probabilistes En Gestion*. Programme Ingénierie Financière, Université Laval, 2325 Rue de l'Université, Québec, QC G1V 0A6, 2019.

[10] S. M. Ross. *Introduction to Probability Models*. Academic Press, 125 London Wall, London EC2Y 5AS, United Kingdom, 2019.