Espaces Vectoriels

Sommaire

1 Exemples introductifs et rappels

1.1 Exemples

- Nous connaissons déjà le plan $\mathbb{R}^2$ défini par

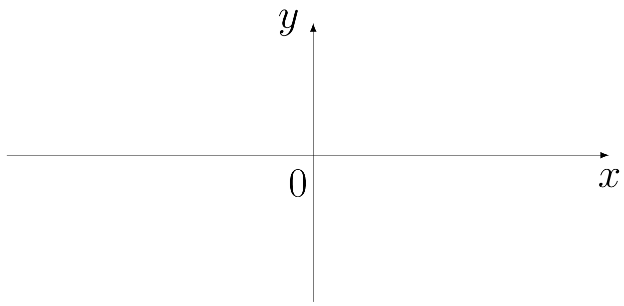
$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\},$$

où tout élément $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur de composantes a et b.

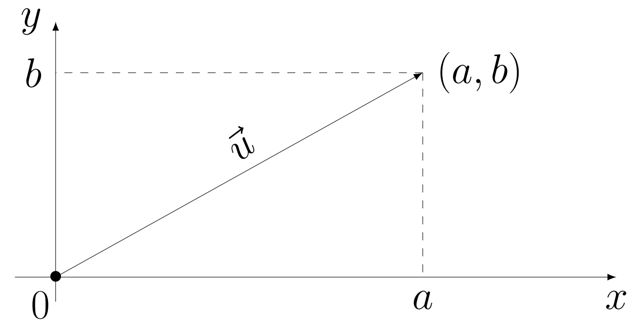
  - L'addition de deux vecteurs $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (c,d) \in \mathbb{R}^2$ est également un vecteur, qu'on note $u+v$ et définit comme suit

$$u + v = (a+c, b+d) \quad \text{(règle du parallélogramme)}.$$

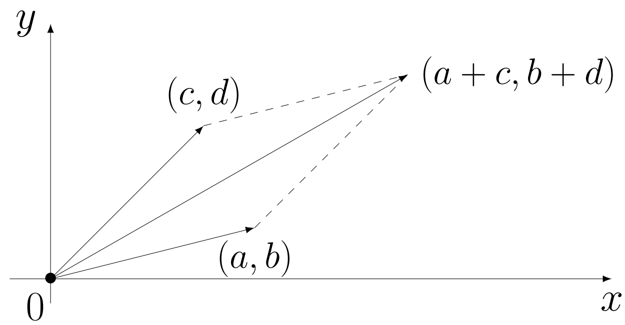
- La multiplication d'un vecteur $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ par un scalaine $k \in \mathbb{R}$, soit $ku = k(a, b)$ où $k \in \mathbb{R}$, est aussi le vecteur $ku = (ka, kb)$.



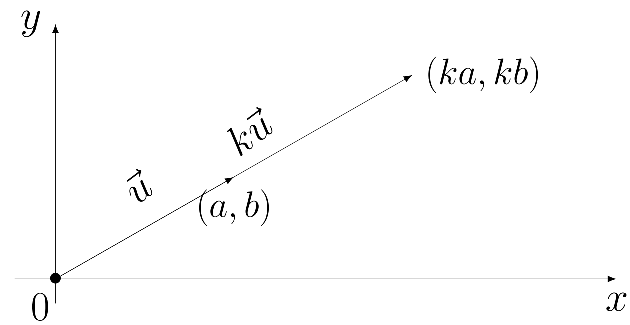
Plan $\mathbb{R}^2$



Vecteur $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$



Règle du parallélogramme



Multiplication vecteur et scalaire

- De façon général $\mathbb{R}^n$ défini comme suit

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\},$$

où n est un entier positif, vérifie :

- Addition de deux vecteurs : Soit $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $v = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. On a

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)\,.$$

- Multiplication d'un vecteur par un scalaire : Soit $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{R}$ (un scalaire). Nous avons alors

$$ku = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)\,.$$

Propriété 1.1

Soit u, v, w des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et k, k' des scalaires. On a les propriétés :

1	$u+v=v+u$	2	$k(u+v)=ku+kv$
3	$1u=u$	4	$(k+k')u=ku+k'u$
5	$u+0=u$	6	$k\left(k'u\right)=\left(kk'\right)u$
7	$u+(-u)=0$	8	$(u+v)+w=u+(v+w)$

où $O=(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n \text{ fois}})$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$.

La définition d'un espace vectoriel repose sur les propriétés ci-dessus. L'opération de la multiplication d'un vecteur par un scalaire n'est pas limitée aux nombres réels. On peut aussi multiplier un vecteur par un nombre complexe. En fait, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des cas particuliers de corps.

1.2 Rappels

Définition 1.1

Soit K un ensemble non vide muni de deux opérations $+$ et $\times$ telles que

$$\forall\, a, b \in K, a+b \in K \quad \text{et} \quad a \times b \in K.$$

On dit que K est un corps commutatif si les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $\forall\, a, b \in K,\ a+b=b+a.$
2. $\forall\, a, b, c \in K,\ (a+b)+c=a+(b+c).$
3. Il existe un élément de K, noté 0, tel que $\forall\, a \in K,\ a+0=a.$
4. Pour tout elément $a \in K$, il existe un unique élément $b \in K$ tel que

$$a+b=0, \quad b \text{ est noté } -a.$$

5. $\forall\, a, b \in K,\ a \times b=b \times a.$
6. $\forall\, a, b, c \in K, \quad (a \times b) \times c=a \times (b \times c).$

7 Il existe un élément de K, noté 1, tel que $\forall\, a \in K,\ 1 \times a = a$.

8 $\forall\, a \in K, a \neq 0$, il existe un unique élément $b \in K$ tel que

$$a \times b = 1, \ \ b \text{ est noté } a^{-1}.$$

9 $\forall\, a, b, c \in K, (a+b) \times c = a \times c + b \times c$.

Note : Soit K un corps. On définit les opérations suivantes :

$$a - b = a + (-b) \ \text{ et } \ a/b = a \times b^{-1} \ \text{ pour } b \neq 0,$$

grâce aux propriétés des opérations $+$ et $\times$.

Exemple 1.1 :

- $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}$ sont des corps.
- Par contre, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas des corps.
- Dans toute la suite, on se restreint au corps des nombres reéls $\mathbb{R}$ ou au corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Quelques rappels sur les nombres complexes : Soit $z = a + ib, w = c + id$ deux nombres de $\mathbb{C}$, alors on obtient

- $z + w = (a + c) + i(b + d)$,
- $zw = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$,
- $z - w = (a - c) + i(b - d)$,
- pour $w \neq 0$, on a $\overline{w} = c - id$ et

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}},$$
$$w\overline{w} = c^2 + d^2,$$
$$|w| = \sqrt{w\overline{w}} = \sqrt{c^2 + d^2}.$$

2 Espaces vectoriels

2.1 Définition

Définition 2.1

Soit K un corps et V un ensemble non vide muni de deux operations :

- Addition : Deux éléments quelconques $u, v \in V$ est associé l'unique élément $u + v \in V$.
- Multiplication par un scalaire : Tout élément $u \in V$ et à tout scalaire $k \in K$, est associé l'unique élément $ku \in V$.

L'ensemble V est appelé espace vectoriel sur le corps K si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\forall\, u, v \in V, \quad u + v = v + u$.
2. $\forall\, u, v, w \in V,\ (u + v) + w = u + (v + w)$.
3. Il existe un élément de V, noté 0, tel que $\forall\, u \in V,\ u + 0 = u$.
4. Pour tout $u \in V$, il existe un unique élément de V, noté $-u$, tel que
$$u + (-u) = 0.$$
5. $\forall\, u, v \in V,\ \forall\, k \in K,\ k(u + v) = ku + kv$.
6. $\forall\, u \in V,\ \forall\, k, k' \in K,\ (k + k')\, u = ku + k'u$.
7. $\forall\, u \in V,\ \forall k, k' \in K,\ k\,(k'u) = (kk')\, u$.
8. $\forall\, u \in V,\ 1u = u$ où 1 est l'élément neutre de la multiplication dans K.

Note : Les éléments de V sont appelés vecteurs, tandis que les éléments de K sont appelés scalaires.

A partir de la définition d'un espace vectoriel, on peut déduire les propriétés suivantes :

- On définit la soustraction de deux vecteurs comme suit :

$$u - v = u + (-v)$$

- $\forall\, k \in K$, nous avons $k0 = 0$ où $0 \in V$ est le vecteur nul : En effet,

$$\begin{aligned} 0 + 0 = 0 &\Rightarrow k(0+0) = k0 \\ &\Rightarrow k0 + k0 = k0 \\ &\Rightarrow k0 + k0 + (-k0) = k0 + (-k0) \\ &\Rightarrow k0 = 0 \end{aligned}$$

- $\forall\, u \in V$, nous avons $0u = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} 0 + 0 = 0 &\Rightarrow (0+0)u = 0u \\ &\Rightarrow 0u + 0u = 0u \\ &\Rightarrow 0u + 0u + (-0u) = 0u + (-0u) \\ &\Rightarrow 0u = 0 \end{aligned}$$

- Lorsque $ku = 0$, alors c'est parce que $k = 0$ ou bien $u = 0$. En effet, si $k = 0$ alors c'est fini. Sinon, on a ainsi :

$$\begin{aligned} ku = 0 &\Rightarrow k^{-1}(ku) = k^{-1}0 \\ &\Rightarrow \left(k^{-1}k\right) u = 0 \\ &\Rightarrow 1u = 0 \\ &\Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

- $\forall\, k \in K, \forall\, u \in V$, alors $(-k)u = k(-u) = -ku$. En effet,

$$\begin{aligned} u + (-u) = 0 &\Rightarrow k(u + (-u)) = k0 \\ &\Rightarrow ku + k(-u) = 0 \\ &\Rightarrow k(-u) = -ku \\ k + (-k) = 0 &\Rightarrow (k + (-k))u = 0u \\ &\Rightarrow ku + (-k)u = 0 \\ &\Rightarrow (-k)u = -ku \end{aligned}$$

2.2 Exemples d'espaces vectoriels

- Soit K un corps et n un entier positif. On définit K^n comme suit

$$K^n = \{u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in K, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Soit $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $v = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ deux éléments de K^n. L'addition de u et v est définie par

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

La multiplication de u par un scalaire $k \in K$ est définie par

$$ku = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$$

Note : K^n muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur K.

Le vecteur nul de l'espace vectoriel K^n est donné par

$$0 = (0, 0, \ldots, 0).$$

L'opposé d'un vecteur $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n$ est

$$-u = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n).$$

Note : En particulier, on a :

$\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
$\mathbb{C}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$
$\mathbb{C}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

- **Espace des polynômes** :

Soit P l'ensemble des polynômes $p(t)$ de la variable t de la forme :

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_s t^s, s \in \mathbb{N},$$

où les coéfficients appartiennent à un corps K. Alors, l'ensemble P, muni des deux opérations usuelles

- addition de 2 polynômes : $p(t) + q(t)$,

- et multiplication d'un polynôme par un scalane : $kp(t)$,

est un espace vectoriel sur K.

Le polynôme nul O est le vecteur nul de P.

Note : L'espace des polynômes P est un espace vectoriel.

Espace des matrices :

Soit M l'ensemble des matrices $A = [a_{ij}]$ de format $m \times n$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ dont les eléments a_{ij} appartiemnent a un corps K. M est muni des deux opérations suivantes :

- addition de 2 matrices : $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$
- multiplication d'une matrice par un scalaire : $kA = k\,[a_{ij}] = [ka_{ij}]$.

M (muni de ces deux opérations) est un espace vectoriel sur K.

Note : L'espace des matrices M est un espace vectoriel.

Espace des fonctions :

Soit X un ensemble non vide et K un corps. On désigne par $F(X)$ l'ensemble de toutes les fonctions de X dans K, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow K \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

On munit $F(X)$ des deux opénations usuelles suivantes :

- addition de deux fonctions : la somme de deux fonctions f et g de $F(X)$ est la fonction $f+g$ définie par $(f+g)(x) = f(x)+g(x), \forall\, x \in X$.
- multiplication d'une fonction par un scalaire : soit $k \in K$, la multiplication d'une fonction f de $F(X)$ par k est la fonction kf définie par $(kf)(x) = kf(x), \forall\, x \in X$.

Note : L'espace des fonctions $F(X)$, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel sur K.

Le vecteur nul de $F(X)$ est la fonction O, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} O : X &\longrightarrow K \\ x &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

L'opposé de la fonction f est la fonction $-f$ définie par $(-f)(x) = -f(x), \forall\, x \in K$.

3 Sous-espaces vectoriels

3.1 Définition

Définition 3.1

Soit V un espace vectoriel sur un corps K et soit W un sous ensemble de V. On dit que W est un sous-espace vectoriel de V si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $0 \in W$.
2. $\forall\, u, v \in W, u + v \in W$.
3. $\forall\, u \in W, \forall\, k \in K,\ ku \in W$.

Note : Il est clair que W est un espace vectoriel sur K.

3.2 Exemples de sous-espaces vectoriels

Exemple 3.1 :

1. Pour tout espace vectoriel V, les sous-ensembles $\{0\}$ et V sont des sous-espaces vectoriels de V, appelés sous-espaces banals ou triviaux.
2. Soit

$$W = \left\{ u = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \right\}.$$

W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. En effet,

- $O = (0, 0, \ldots, 0) \in W$ car $\sum_{i=1}^{n} 0 = 0$.
- $\forall\, u = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in W$ et $\forall\, v = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in W$, on a

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \in W,$$
$$\text{car } \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = 0 + 0 = 0.$$

- $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $\forall\, u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in W$, on a :

$$ku = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n) \in W, \text{ car } \sum_{i=1}^{n} ka_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i = k0 = 0$$

3 Soit

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\right\}.$$

W n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $0 \notin W$.

4 Soit M l'espace des matrices carrées d'ordre n. Soit N le sous-ensemble de M constitué des matrices symétriques. N est un sous-espace vectoriel de M. En effet,

- $O \in N$ où O est la matrice carrée nulle d'ordre n.
- $\forall\, A, B \in N$, on a $A+B \in N$, car $(A+B)^\top = A^\top + B^\top = A+B$.
- $\forall\, k \in K, \forall\, A \in N$, on a $kA \in N$, car $(kA)^\top = kA^\top = kA$.

5 Soit P l'espace vectoriel des polynômes $p(t)$ de la variable t et soit P_n le sous-ensemble de P constitué de polynôme de degré inférieur ou égale à n (degré $\leq n$). Alors, P_n est un sous-espace vectoriel de P.

Proposition 3.1

Soit V un espace vectoriel sur un corps K, et $\{W_i\}_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de V. Alors, l'intersection $W = \cap_{i \in I} W_i$ est un sous-espace vectoriel de V.

Preuve :

- Sachant que $0 \in W_i, \forall\, i \in I$, alors $0 \in \cap_{i \in I} W_i$. D'où $0 \in W$.

- $\forall u, v \in W$, on a $u \in W_i$ et $v \in W_i, \forall i \in I$. Et donc

$$u + v \in W_i, \forall i \in I, \text{ ce qui implique que } u + v \in W = \bigcap_{i \in I} W_i.$$

- $\forall k \in K, \forall u \in W$, on a

$$\begin{aligned} u \in W_i, \forall i \in I &\Rightarrow ku \in W_i, \forall i \in I \\ &\Rightarrow ku \in W = \bigcap_{i \in I} W_i. \end{aligned}$$

□

4 Espaces vectoriels engendrés

4.1 Combinaisons linéaires

Définition 4.1

Soit V un espace vectoriel sur un corps K. Un vecteur $v \in V$ est dit combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$ s'il existe des scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_m \in K$ tels que

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_m u_m.$$

On écrit aussi cette combinaison linéaire, en utilisant la notation Σ, par :

$$v = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i.$$

Exemple 4.1 :

1. Soit $v = (3, 7, -4), u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (2, 3, 7)$ et $u_3 = (3, 5, 6)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrons que v s'exprime comme combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3, c'est-à-dire qu'il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = xu_1 + yu_2 + zu_3, \text{ ce qui équivalent à}$$
$$(x + 2y + 3z, 2x + 3y + 5z, 3x + 7y + 6z) = (3, 7, -4).$$

Et donc

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 2x + 3y + 5z &= 7 \\ 3x + 7y + 6z &= -4 \end{aligned} \tag{1}$$

Pour résoudre ce systeme d'équations linéaires, on peut utiliser la méthode de Gauss appliquée à la matrice angmentée du système :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & (-1) & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -13 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 3L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 + L_2 \to L_3 \end{array}$$

On obtient ainsi à partir de cette dernière matrice échelon, le système suivant (équivalente au système initial (1))

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ -y - z &= 1 \\ -4z &= -12 \end{aligned}$$

À partir de la troisième équation, on obtient la valeur de $z = 3$. On a celle de y à partir de la deuxième équation $y = -4$ et celle de x à partir de la première équation $x = 2$. Donc le vecteur v s'écrit comme suit : $v = 2u_1 - 4u_2 + 3u_3$.

2 Exprimer le polynôme p défini par $p(t) = 3t^2+5t-5$ comme combinaison linéaire des polynômes p_1, p_2, p_3 qui sont définis par

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^2 + 2t + 1, \\ p_2(t) &= 2t^2 + 5t + 4 \\ p_3(t) &= t^2 + 3t + 6 \end{aligned}$$

On cherche donc $x, y, z \in \mathbb{R}$ tel quce $p = xp_1 + yp_2 + zp_3$. Cette équation est équivalente à

$$3t^2 + 5t - 5 = x\left(t^2 + 2t + 1\right) + y\left(2t^2 + 5t + 4\right) + z\left(t^2 + 3t + 6\right)$$
$$3t^2 + 5t - 5 = (x + 2y + z)t^2 + (2x + 5y + 3z)t + x + 4y + 6z$$

On aboutit à l'égalité de deux polynômes, et donc leurs coefficients sont identiques :

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 2x + 5y + 3z &= 5 \\ x + 4y + 6z &= -5 \end{aligned} \tag{2}$$

On utilise la méthode de Gauss à la matrice augmentée du système (2) :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & (1) & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -8 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3 \end{array}$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right] \qquad L_3 - 2L_2 \to L_3$$

Le systeme initial (2) est ainsi equivalent au suivant :

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ y + z &= -1 \\ 3z &= -6 \end{aligned}$$

où à partir de la dernière équation on a $z = -2$, à la deuxième équation on en tire $y = -z - 1 = 2 - 1 = 1$ et à la première équation on obtient $x = 3 - 2y - z = 3 - 2 + 2 = 3$. Donc le polynôme p s'écrit $p = 3p_1 + p_2 - 2p_3$.

4.2 Espaces vectoriels engendrés

Soit $S = \{u_1, u_2, \ldots u_m\}$ un sous-ensemble d'un espace vectoviel V sur K. On désigne par $\mathrm{Vect}(S)$ l'ensemble suivant

$$\mathrm{Vect}(S) = \left\{ v \in V \mid v = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i, \text{ où } a_i \in K, 1 \leqslant i \leqslant m \right\}.$$

Théorème 4.1

- $\mathrm{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de V contenant S.
- Si W est un sous-espace vectoriel de V tel que $S \subset W$, alors $\mathrm{Vect}(S) \subset W$.

Preuve :

- Montrons que $\mathrm{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de V :

  - $$0 \in \mathrm{Vect}(S) \quad \text{car} \quad 0 = \sum_{i=1}^{m} 0 u_i.$$
  - $$\forall\, u = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \in \mathrm{Vect}(S),\ \forall\, v = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \in \mathrm{Vect}(S), \quad \text{on a :}$$
    $$u + v = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{i=1}^{m} b_i u_i = \sum_{i=1}^{m} (a_i + b_i)\, u_i \in \mathrm{Vect}(S).$$
  - $$\forall\, k \in K, \forall\, u = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \in \mathrm{Vect}(S), \quad \text{on a :}$$
    $$ku = k \sum_{i=1}^{m} a_i u_i = \sum_{i=1}^{m} (k a_i)\, u_i \in \mathrm{Vect}(S).$$

  Donc $\mathrm{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de V et on a bien $S \subset \mathrm{Vect}(S)$.

- $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subset W$, alors $\forall\ a_i \in K$, $i = 1, \ldots, m$, on a $\Sigma_{i=1}^{m} a_i u_i \in W$ car W est un sous-espace vectoriel. Donc $\mathrm{Vect}(S) \subset W$.
  $\square$

Définition 4.2

- On dit que $\mathrm{Vect}(S)$ est l'espace vectoriel engendré par S, et S est un ensemble générateur de $\mathrm{Vect}(S)$.

- D'après le $2^{\text{ième}}$ point du théorème précédent, $\text{Vect}(S)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de V contenant S.
- Si $S = \phi$, on convient que $\text{Vect}(\phi) = \{0\}$.

Exemple 4.2 :

1. Soit le sous-ensemble $S = \Big\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\Big\} \subset \mathbb{R}^3$. L'espace vectoriel engendré par S est

$$\text{Vect}(S) = \left\{u = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i, \quad \text{où} \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

Sachant que $\sum_{i=1}^{3} a_i e_i = (a_1, a_2, a_3)$, alors $\text{Vect}(S)$ peut s'écrire par

$$\text{Vect}(S) = \{u = (a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}, \text{ c'est-à-dire } \text{Vect}(S) = \mathbb{R}^3.$$

On en déduit que $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ est un ensemble générateur de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $S = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\} \subset P_n$, où P_n est l'espace des polynômes de degré $\leq n$. Alors, $\text{Vect}(S) = P_n$. En effet, $\forall\, p \in P_n$ s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, \\ &= a_0 \times 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, \text{ où } a_i \in K,\ i = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

$p(t)$ s'écrit ainsi comme une combinaison d'éléments de S, donc $P_n \subset \text{Vect}(S)$.
D'autre part on a $S \subset P_n$, alors $\text{Vect}(S) \subset P_n$ et on obtain $\text{Vect}(S) = P_n$. Ainsi $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ est un ensemble générateur de P_n.

3. Soit $M_{m\times n}$ l'espace vectoriel des matrices de format $m\times n$ à coéfficients dans un corps K. Soit le sous-ensembe S de $M_{m\times n}$ défini par

$$S = \Big\{A_{ij} \in M_{m\times n} \mid \text{le coefficient à la } i \text{ ligne et la } j \text{ colonne est égal à } 1 \text{ et tous les autres coefficients sont nuls, } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\Big\}$$

Montrons que $\operatorname{Vect}(S) = M_{m\times n}$. Pour cela, $\forall\, A \in M_{m\times n}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m_2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} a_{ij}A_{ij}$$

Donc $M_{m\times n} \subset \operatorname{Vect}(S)$. D'autre part, comme $S \subset M_{m\times n}$, alors $\operatorname{Vect}(S) \subset M_{m\times n}$. Par conséquent, $\operatorname{Vect}(S) = M_{m\times n}$. On en déduit : $S = \{A_{ij} \in M_{m\times n} \mid \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ est un ensemble genérateur de $M_{m\times n}$.

4.3 Espaces lignes d'une matrice

Définition 4.3

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice de format $m \times n$ dont les éléments a_{ij} appartiennent à un corps K. Les lignes $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})\,, i = 1, \dots, m$, de la matrice peuvent être considérées comme des vecteurs de K^n. On appelle l'espace ligne de la matrice A, noté $\operatorname{Lig}(A)$, l'espace vectoriel engendré par ses lignes :

$$\operatorname{Lig}(A) = \operatorname{Vect}\left(A_1, A_2, \dots, A_m\right).$$

Note : À noter que $\operatorname{Lig}(A)$ est un sous-espace vectoriel de K^n.

Théorème 4.2

Si A et B sont deux matrices équivalentes en ligne $(A \sim B)$, alors $\operatorname{Lig}(A) = \operatorname{Lig}(B)$.

Preuve :

Comme B est obtenue par application d'opérations élémentaires sur les lignes de A, alors les lignes de B sont des combinaisons linéaires des lignes de A. Donc $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} \subset \operatorname{Lig}(A)$ et par conséquent $\operatorname{Lig}(B) \subset \operatorname{Lig}(A)$.
D'autre part, puisque $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, et donc $\operatorname{Lig}(A) \subset \operatorname{Lig}(B)$. D'où, $\operatorname{Lig}(A) = \operatorname{Lig}(B)$. $\square$

Exemple 4.3 :

1. Soit $S = \{(1,2,0),(2,0,4),(0,3,6)\} \subset \mathbb{R}^3$. Déterminons $\mathrm{Vect}(S)$.

   Posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. Il nous faut alors $\mathrm{Vect}(S) = \mathrm{Vect}\left(A_1, A_2, A_3\right)$.

   Or $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, et donc

$$\mathrm{Vect}(S) = \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} = \mathbb{R}^3.$$

2. Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{aligned} &u_1 = (1,2,-1,3), \quad u_2 = (2,4,1,-2), u_3 = (3,6,3,-7), \\ &w_1 = (1,2,-4,11), w_2 = (2,4,-5,14). \end{aligned}$$

   Soit $U = \mathrm{Vect}\left(u_1, u_2, u_3\right)$ et $W = \mathrm{Vect}\left(w_1, w_2\right)$. Montrer que $U = W$.
   Pour cela, utilisons les espaces lignes de matrices. D'abors, on a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   et

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 2 & 4 & -5 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

   Alors,

$$\begin{aligned} U &= \mathrm{Vect}\left\{(1,2,0,1/3),(0,0,1,-8/3)\right\} \text{ et} \\ W &= \mathrm{Vect}\left\{(1,2,0,1/3),(0,0,1,-8/3)\right\}, \end{aligned}$$

   d'où $U = W$.

5 Bases et dimension d'un espace vectoriel

5.1 Dépendance et indépendance linéaires

Définition 5.1

- Soit V un espace vectoriel sur un corps K. On dit que les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de V sont linéairement dépendants, ou sont liés, s'il existe des scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de K non tous nuls tels que

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_m u_m = 0.$$

- Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sont linéairement indépendants (ou $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ est linéairement indépendants, ou libre).

Note :

- Un ensemble de vecteurs contenant le vecteur nul est linéairement dépendant.
- Donc $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ est linéairement indépendant si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i = 0 \Rightarrow a_i = 0, \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

Exemple 5.1 :

1. L'ensemble

$$S = \{e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots e_n = (0, \cdots, 0, 1)\},$$

où $e_i \in K^n, i = 1, \cdots, n$, est linéairement indépendant.

2. Soit $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (2, -3, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Montrons que S est linéairement indépendant. Pour cela, soit la combinaison linéaire nulle suivante

$$x(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(2, -3, 1) = (0, 0, 0).$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ y - 3z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $x = y = z = 0$, et donc S est linéairement indépendant.

3 Soit $S = \{(1,0,1,1),(2,3,1,0),(5,6,3,1)\} \subset \mathbb{R}^4$. S est-il linéairement indépendant ? Pour répondre à la question, on considère la combinaison linéaire nulle

$$x(1,0,1,1) + y(2,3,1,0) + z(5,6,3,1) = (0,0,0,0).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} x + 2y + 5z &= 0 \\ 3y + 6z &= 0 \\ x + y + 3z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}$$

La matrice associée à ce système homogène est

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et donc, le système initial est équivalent à

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= -z \\ y &= -2z. \end{aligned}$$

Par exemple, en prenant $z = 1$, on obtient $x = -1$ ef $y = -2$, et on constate que

$$-(1,0,1,1) - 2(2,3,1,0) + (5,6,3,1) = (0,0,0,0).$$

Alors, S est linéairement dépendant (c'est-à-dire lié).

4 Soit V l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que les fonctions f et g, définies par $f(t) = \cos t$ et $g(t) = \sin t$, sont linéairement indépendantes. On a,

$$\begin{aligned} af + bg = 0 \quad &\Rightarrow \quad af(t) + bg(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad a\cos t + b\sin t = 0, \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Alors en prenant $t = 0$, on obtient $a = 0$. Et en prenant $t = \frac{\pi}{2}$, on obtient $b = 0$; ainsi les fonctions f et g sont linéairement indépendantes.

5 Les lignes non nulles de toute matrice échelon sont linéairement indépendantes.

5.2 Bases et dimension d'un espace vectoriel

Définition 5.2

Un sous-ensemble B d'un espace vectoriel V est appelé une base de V si

- $\text{Vect}(B) = V$, c'est-à-dire B engendre V et
- B est linéairement indépendant.

Exemple 5.2 :

1 Soit les n vecteurs de K^n

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, \ e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1).$$

Tout vecteur $u = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$, il s'écrit

$$u = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n$$

et donc $\text{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n) = K^n$.
D'autre part, les n vecteurs $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sont linéairement indépendants. Par conséquent, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de K^n, appelée la base canonique.

2 Soit $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (2, -3, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$. On a déjà montré que B est linéairement indépendant. D'autre part $\text{Vect}(B) = \mathbb{R}^3$. En effet,

la matrice dont les lignes sont les vecteurs de B est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(qui est une matrice inversible puisque son déterminant, égale à 1, est non nul).
Et donc

$$\mathrm{Vect}(B) = \mathrm{Vect}\left\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right\} = \mathbb{R}^3.$$

Alors, B est une base de $\mathbb{R}^3$.

3 $B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ est une base de l'espace P_n des polynômes de degré $\leq n$.
En effet, $\forall\, p \in P_n$, $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$, et donc $\mathrm{Vect}(B) = P_n$. D'autre part,

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n = 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ a_i = 0,\ \forall\, i \in \{0,1,2,\ldots,n\},$$

c'est-à-dire B est linéairement indépendant. Donc B est une base de P_n.

L'objectif maintenant est de montrer que deux bases quelconques d'un espace vectoriel ont le même nombre d'éléments.

Théorème 5.1

Soit $B = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base d'un espace vectoriel V $(V \neq \{0\})$. Soit $S = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ un sous ensemble de V. Si $m > n$ alors S est linéairement dépendant.

Preuve :

Supposons que S est linéairement indépendant. Comme B est une base, et donc $\mathrm{Vect}(B) = V$, alors on a

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \tag{3}$$

De plus comme $v_1 \neq 0$, alors au moins un des a_i est non nul. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_1 \neq 0$. Alors, à partir de l'égalité (3) on obtient

$$u_1 = \frac{1}{a_1} v_1 + \left(\frac{-a_2}{a_1} \right) u_2 + \cdots + \left(\frac{-a_n}{a_1} \right) u_n,$$

et on en conclut donc $u_1 \in \text{Vect}\,(v_1, u_2, \ldots, u_n)$. Mais sachant que $V = \text{Vect}\,(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, alors on en arrive à $V = \text{Vect}\,(v_1, u_2, \ldots, u_n)$.
Ainsi, on répète le même procédé avec cette fois-ci v_2

$$v_2 = b_1 v_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n, \text{ où au moins un des } c_i \neq 0.$$

Car si $c_i = 0, \forall\, i \in \{2, \ldots, n\}$, on aura $v_2 = b_1 v_1$ et donc (v_1, v_2) est lié. Ceci est en contradition avec l'hypothèse que S est libre. On peut supposer que c'est $c_2 \neq 0$. Alors,

$$u_2 = \left(-\frac{b_1}{c_2} \right) v_1 + \frac{1}{c_2} v_2 + \left(-\frac{c_3}{c_2} \right) u_3 + \cdots + \left(-\frac{c_n}{c_2} \right) u_n$$

c'est-à-dire $u_2 \in \text{Vect}\,(v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n)$. Mais $V = \text{Vect}\,(v_1, u_2, \ldots, u_n)$, alors on a $V = \text{Vect}\,(v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n)$.
En continuant cette procédure, on aboutit à

$$V = \text{Vect}\,(v_1, v_2, \ldots, v_n)\,.$$

Comme $m > n$, alos $v_{n+1} = \Sigma_{i=1}^{n} a_i v_i$, c'est-à-dire $(v_1, v_2, \ldots, v_{n+1})$ est liée. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse que $S = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ est libre. Par conséquent S est linéairement dépendant (lié). □

Théorème 5.2

Soit $V (V \neq \{0\})$ un espace vectoriel possédant une base composée de m éléments et une seconde base composée de n éléments. Alors $m = n$.

Preuve :

Soit $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ et $B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ deux bases de V.

- Si $m > n$, alors B est linéairement dépendant car B' est une base. Ceci contredit le fait que B est une base.
- Si $n > m$, alons B' est linéairement dépendant car B est une base. Ceci contredit le fait que B' est une base.

Par conséquent $m = n$. □

Note :

- On dit qu'un espace vectoriel V est de dimension finie n, et on écrit $\dim V = n$, si V possède une base à n éléments.
- D'après le théorème précédent, toute base de V a le même nombre d'éléments.
- Si $V = \{0\}$, alors par définition $\dim\{0\} = 0$, puisque $\{0\} = \mathrm{Vect}(\phi)$ ou bien $\{0\}$ ne possède pas de base.
- Un espace vectoriel ne possèdant pas de base à nombre fini d'éléments est dit de dimension infinie.

Exemple 5.3 :

1. Pour l'espace vectoriel K^n sur le corps K, on a vu que $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, où $e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0}_{1 \text{ à la } i^{\text{ème}} \text{ composante}}), i = 1, \ldots, n$, est une base de K^n. Alors, dim $K^n = n$.

2. Soit $M_{m\times n}$ l'espace vectoriel des matrices de format $m \times n$. Soit $E_{ij} \in M_{m\times n}$ la matrice dont l'élément à la i^{e} ligne et la j^{e} colonne vaut 1 et dont tous les autres sont nuls.
On a vu que $B = \{E_{ij}, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n\}$ engendre $M_{m\times n}$. De plus, B est libre. En effet,
$$\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} a_{ij}E_{ij} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$
ce qui veut dire que $a_{ij} = 0, \forall\, i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ et $\forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Donc B est une base de $M_{m\times n}$, appelée la base canonique. Alors, dim $M_{m\times n} = m \times n$.

3. Soit P_n l'espace des polynômes de degré $\leq n$. On a vu que $B =$

$\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ est une base de P_n. Alors, dim $P_n = n + 1$.

4. Soit P l'espace des polynômes (de degré quelcongue). P est un espace vectoriel de dimension infinie.
En effet, supposons que P possède une base B à nombre fini d'éléments. Soit m le degré maximum des éléments de B. Dans ce cas un polynôme de P de degré $m+1$ ne peut être une combinaison linéaire des eléments de B. Alors, B n'est pas un ensemble générateur de P. D'où la contradiction.
Donc, P est de dimension infinie.

Définition 5.3

Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un ensemble d'éléments d'un espace vectoriel V et r un entier inférieur ou égale à n $(r \leq n)$. On dit que $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ est un sous-ensemble maximal d'éléments linéairement indépendants,

- si $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sont linéairement indépendants,
- et si, étant donné un v_i quelconque où $i > r$, les éléments $v_1, v_2, \ldots, v_r, v_i$ sont linéairement dépendants.

Théorème 5.3

Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un systeme générateur d'un espace vectoriel V $(V \neq \{0\})$. Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$, $r \leqslant n$, un sous-emsemble maximal d'éléments linéairement indépendants. Alors $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ est une base de V.

Preuve :

Comme $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ est linéairement indépendant, il suffit de montrer que c'est un ensemble générateur de V. Pour cela, montrons d'abord que chaque v_i, $i > r$, est une combinaison linéaire des éléments $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Comme $v_1, \ldots, v_r, v_i$ sont linéairement dépendants (car $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ est un sous-emsemble maximal et $i > r$), alors il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_r, b$ non tous nuls tels que

$$a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r + b v_i = 0.$$

De plus $b \neq 0$, sinon on aurait $a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r = 0$ avec au moins un $a_i \neq 0$. Ce qui est contradictoire avec le fait que $\{v_1, \ldots, v_r\}$ est linéairement indépendant. Donc,

$$v_i = \left(-\frac{a_i}{b}\right) v_1 + \cdots + \left(-\frac{a_r}{b}\right) v_r, \text{ c'est-à-dire } v_i \in \mathrm{Vect}(S), \forall\, i > r.$$

Maintenant, comme $V = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_n)$ et $v_i \in \mathrm{Vec}\,(v_1, \ldots, v_r)\,, \forall\, i > r$, alors $V = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_r)$. Par conséquent, $\{v_1, \ldots, v_r\}$ est une base de V.□

Théorème 5.4

Soit $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un systeme générateur d'un espace vectoriel V $(V \neq \{0\})$. Alors, V possède une base B contenue dans S.

Preuve :

- Si S est linéairement indépendant alors S est une base de V.
- Sinon, il existe au moins un vecteur de S qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres. Sans perte de génénalité, on peut supposer que $u_n \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_{n-1})$ et donc $V = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_{n-1})$. Si $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ est linéairement indépendant, alors $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ est une base de V.
- Sinon, on peut répeter cette procédure jusqu'à obtenir un sous-ensemble maximal de vecteurs linéairement indépendants, et donc (d'après le théorème précédent) une base de V. □

Théorème 5.5

Soit V un espace vectoriel de dimension n.

- Tout ensemble générateur de V à n éléments est une base de V.
- Tout système linéairement indépendant à n éléments est une base de V.

Preuve :

- Soit $S = \{u_1, \cdots, u_n\}$ un systeme générateur de V. Il existe une base B de V telle que $B \subset S$. Puisque $\dim V = n$, B contient n éléments. Par conséquent $B = S$, et donc S est une base de V.

- Soit $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ un système libre. Supposons que S n'est pas un ensemble générateur de V. Alors $\exists\, w \in V$ tel que $w \notin \text{Vect}(S)$, et donc $S' = \{u_1, \ldots, u_n, w\}$ est linéairement indépendant. En effet, si
$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i + bw = 0, \text{ alors } b = 0 \text{ car } w \notin \text{Vect}(S)$$
et par suite $a_i = 0, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, car S est libre.
Mais comme $\dim V = n$, donc $\{u_1, \ldots, u_n, w\}$ est linéairement dépendant (car il contient plus de n éléments).
D'où la contradiction et par conséquent $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est un ensemble générateur de V et par suite une base de V. $\square$

Corollaire 5.1

Soit V un espace vectoriel de dimension n. Soit r un entier positif, avec $r < n$, et soit $v_1, \ldots, v_r$ des vecteurs linéairement indépendants. On peut alors trouver des vecteurs $v_{r+1}, \ldots, v_n$ tels que $\{v_1, \ldots v_n\}$ soit une base de V.

Preuve :

Puisque $\dim V = n$ et $r < n$, $\{v_1, \ldots v_r\}$ n'est pas un système génénateur de V. Alors $\exists\, v_{r+1} \in V$ tel que $v_{r+1} \notin \text{Vect}\,(v_1, \ldots, v_r)$, et donc $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}\}$ est linéairement indépendant.
Si $r + 1 < n$, alors $\exists\, v_{r+2} \in V$ tel que $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}\}$ est linéairement indépendant.
En répétant ce raisonnement, on obtient un systeme de n vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ linéairement indépendants, et donc forment une base de V. $\square$

Corollaire 5.2

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel W de V est de dimension finie, et $\dim W \leq \dim V$.

Preuve :

Posons $\dim V = n$. Si $W = \{0\}$, alors $\dim W = 0 \leq n$. Si $W \neq \{0\}$, soit $\{w_1, \ldots, w_r\} \subset W$ un système libre. Alors, $\exists\, w_{r+1}, \ldots, w_m \in W$ tel que

$\{w_1, \ldots, w_m\}$ soit une base de W. En particulier, $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset V$ est libre. Puisque $\dim V = n$, on a $m \leqslant n$. Donc $\dim W \leq \dim V$. $\square$

Note : Si W est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel V de dimension finie et si $\dim W = \dim V$, alors $W = V$.

En effet, toute base de W est une base de V.

Exemple 5.4 : Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 2, 1, -2), u_2 = (2, 4, 4, -3),\ u_3 = (3, 6, 7, -4)$.

1. Déterminons une base de W et $\dim W$. Considérons la matrice A dont les lignes sont les vecteurs u_1, u_2, u_3. Alors,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & 7 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit $v_1 = (1, 2, 1, -2), v_2 = (0, 0, 2, 1)$. On a, $W = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2)$ et $\{v_1, v_2\}$ est libre. Donc, $B = \{v_1, v_2\}$ est une base de W et $\dim W = 2$.

2. Complétons la base trouvée en 1 pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.
Soit la matrice échelon suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posons $v_3 = (0, 1, 0, 0)$ et $v_4 = (0, 0, 0, 1)$. Alors, $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est libre et comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, alors S est une base de $\mathbb{R}^4$.

6 Somme et somme directe

6.1 Définition

Définition 6.1

Soit U et W deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V. On appelle somme de U et W, noté $U+W$, l'ensemble suivant :

$$U+W=\Big\{v\in V \mid v=u+w, u\in U, w\in W\Big\}$$

Note : Il est facile de vérifier que $U+W$ est un sous-espace vectoriel de V.

Théorème 6.1

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Soit U et W deux sous-espaces vectoriels de V. Alors,

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W).$$

Preuve :

Soit $B=\{u_1,\cdots,u_k\}$ une base de $U\cap W$. On peut compléter B en une base $C=\{u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_s\}$ de U, et en une base $D=\{u_1,\ldots,u_k,w_1,\ldots,w_t\}$ de W. Alors,

$$\begin{aligned}
\forall\, u\in U, u &= \sum_{i=1}^{k} a_iu_i+\sum_{i=1}^{s} b_iv_i \quad \text{et}\\
\forall\, v\in W, v &= \sum_{i=1}^{k} c_iu_i+\sum_{i=1}^{t} d_iw_i, \quad \text{et donc}\\
u+v &= \sum_{i=1}^{k} (a_i+c_i)\,u_i+\sum_{i=1}^{s} b_iv_i+\sum_{i=1}^{t} d_iw_i,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $S=\{u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_s,w_1,\ldots,w_t\}$ engendre $U+W$. Montrons que S est linéairement indépendant. Soit la combinaison linéaire nulle suivante, des éléments de S :

$$\sum_{i=1}^{k} a_iu_i+\sum_{i=1}^{s} b_iv_i+\sum_{i=1}^{t} c_iw_i=0 \quad\text{et posons}\quad w=\sum_{i=1}^{t} c_iw_i\in W.$$

Alors,

$$w=\sum_{i=1}^{k}(-a_i)\,u_i+\sum_{i=1}^{s}(-b_i)\,v_i\in U,\quad \text{et donc}\quad w\in U\cap W.$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} w=\sum_{i=1}^{k}d_iu_i \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k}d_iu_i+\sum_{i=1}^{t}(-c_i)\,w_i=0\\ &\Rightarrow \quad d_i=0,\forall\, i\in\{1,\cdots,k\}\ \text{ et }\ c_i=0,\forall\, i\in\{1,\cdots,t\}\end{aligned}$$

car D est une base de W. Alors,

$$\sum_{i=1}^{k}a_iu_i+\sum_{i=1}^{s}b_iv_i=0\Rightarrow a_i=0,\forall\, i\in\{1,\ldots,k\}\ \text{ et }\ b_i=0,\forall\, i\in\{1,\cdots,s\},$$

car C est une base de U. Par conséquent S est libre, et donc S est une base de $U+W$. Alors, $\dim(U+W)=k+s+t=(k+s)+(k+t)-k$, d'où $\mathrm{din}(U+W)=\mathrm{din}\,U+\mathrm{din}\,W-\mathrm{din}(U\cap W)$. $\square$

Définition 6.2

Soit V un espace vectoriel et Soit U et W deux sous-espaces vectoriels de V. On dit que V est la somme directe de U et W, noté $V=U\oplus W$, si pour tout $v\in V$, ils existent un unique $u\in U$ et un unique $w\in W$ tels que $v=u+w$.

Théorème 6.2

Soit V un espace vectoriel et Soit U et W deux sous-espaces vectoriels de V. Alors, $V=U\oplus W$ si et seulement si $V=U+W$ et $U\cap W=\{0\}$.

Preuve :

Commençons par montrer que

$$V=U\oplus W\quad\Rightarrow\quad V=U+W\ \text{ et }\ U\cap W=\{0\}$$

Tout d'abord, d'après la définition de $V=U\oplus W$, on a $V=U+W$. il reste à montrer que $U\cap W=\{0\}$. Pour cela, soit $v\in U\cap W$ alors $v=v+0=0+v$

et d'après l'unicité on a $v = 0$, et donc $U \cap W = \{0\}$.
Montrons maintenant l'implication dans l'autre sens, c'est-à-dire

$$V = U + W \text{ et } U \cap W = \{0\} \quad \Rightarrow \quad V = U \oplus W.$$

Comme $V = U + W$, alors

$$\forall\, v \in V, \text{ alors } v = u + w \text{ avec } u \in U \text{ et } w \in W.$$

Il reste à montrer l'unicité de cette décomposition. Soit $v \in V$, et supposons qu'on a deux décompositions de v

$$v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2, \text{ avec } u_1, u_2 \in U \text{ et } w_1, w_2 \in W.$$

Alors $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$, et comme $u_1 - u_2 \in U$ et $w_2 - w_1 \in W$ alors $u_1 - u_2 \in \mathrm{U} \cap \mathrm{W} = \{0\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \text{ et} \\ w_2 - w_1 = 0 \Rightarrow w_1 = w_2, \end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

Note : Sachant que $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \mathrm{din}(U \cap W)$, alors on a

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W.$$

Exemple 6.1 :

1. Soit les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ et } W = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Il est clair que $\mathbb{R}^3 = U + W$ et $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$ et donc $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

2. Soit $M_{n\times n}$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Soit

$$\mathrm{S_{ym}} = \left\{A \in M_{n\times n} \mid A^\top = A\right\} \text{ et } \mathrm{A_{sym}} = \left\{A \in M_{n\times n} \mid A^\top = -A\right\}$$

Il est évident que $\mathrm{S_{ym}}$ et $\mathrm{A_{sym}}$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_{n\times n}$.

Montrons que $M_{n\times n} = \mathrm{S_{ym}} \oplus \mathrm{A_{sym}}$. Pour cela, soit $A \in M_{n\times n}$, alors

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^{\top}\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^{\top}\right).$$

Comme

$$\frac{1}{2}\left(A + A^{\top}\right) \in \mathrm{S_{ym}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\left(A - A^{T}\right) \in \mathrm{A_{sym}} \quad \text{alors} \quad M_{n\times n} = \mathrm{S_{ym}} + \mathrm{A_{sym}}.$$

Il reste à montrer que $\mathrm{S_{ym}} \cap \mathrm{A_{sym}} = \{0\}$.
Soit $A \in \mathrm{S_{ym}} \cap \mathrm{A_{sym}}$, alors $A^{\top} = A$ et $A^{\top} = -A$, cela implique $2A^{\top} = 0$ et $A = 0$. Par conséquent $\mathrm{S_{ym}} \cap \mathrm{A_{sym}} = \{0\}$. D'où, $M_{m\times n} = \mathrm{S_{ym}} \oplus \mathrm{A_{sym}}$.

6.2 Composantes d'un vecteur

Théorème 6.3

Soit V un espace vectoriel de dimension n. Soit $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une base de V. Alors tout vecteur $v \in V$ s'écrit, de façon unique, comme combinaison linéaire des éléments de la base B :

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

Preuve :

En effet, considérons les deux écritures suivante du vecteur v

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \ \text{ et } \ v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i v_i - \sum_{i=1}^{n} b_i v_i = 0 \ &\Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)\, v_i = 0, \\
&\Rightarrow \ a_i - b_i = 0, \forall\, i, \ \text{ car } B \text{ est libre}, \\
&\Rightarrow \ a_i - b_i = 0, \forall\, i.
\end{aligned}$$

$\square$

Note : Les scalaires $a_i, i = 1, \ldots, n$, sont appelés les composantes de v relativement à la base B. On utilise la notation suivante pour les désigner

$$_B[v] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \text{qui signifie que } v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

Exemple 6.2 :

1. Soit $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canonique de l'espace vectoriel K^n sur le corps K. Alors, tout vecteur $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n$ s'écrit
$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \text{ et donc } {}_B[v] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

2. Soit $B = \{u_1 = (1, -1, 0), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (0, 1, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $_B[u]$.
Posons $u = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$. Alors,
$$(x, y, z) = (a_1 + a_2, -a_1 + a_2 + a_3, a_3)$$
ce qui est équivalent à résoudre. le système d'équations linéaires suivant :
$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= x \\ -a_1 + a_2 + a_3 &= y \\ a_3 &= z \end{aligned}$$
La solution de ce dernier système est
$$a_1 = \frac{1}{2}(x - y + z), \quad a_2 = \frac{1}{2}(x + y - z), a_3 = z$$
et donc
$$_B[u] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x - y + z) \\ \frac{1}{2}(x + y - z) \\ z \end{pmatrix}$$

Note : . Si on désigne par B' la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors

$$_{B'}[u] = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3 Soit P_2 l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 en la variable t. Soit $B = \{p_1 = 1, p_2 = t-1, p_3 = (t-1)^2\}$ une base de P_2. Soit $p = 2t^2 - 5t + 9$.

Determiner $_B[p]$. On a $p = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 9 = a_1 + a_2(t-1) + a_3(t-1)^2 \\
&\Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 9 = a_3t^2 + (a_2 - 2a_3)\,t + (a_1 - a_2 + a_3) \\
&\Leftrightarrow a_3 = 2, a_2 - 2a_3 = -5, a_1 - a_2 + a_3 = 9 \\
&\Leftrightarrow a_3 = 2,\ a_2 = -1,\ a_1 = 6
\end{aligned}$$

et donc $_B[p] = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Note :

- Soit $\mathbb{C}$ en tant qu'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$. Alors, sa dimension est 1.
- Soit $\mathbb{C}$ en tant qu'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. Alors, sa dimension est 2.
  En effet, $\forall\, z \in \mathbb{C}, z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et donc $\{1, i\}$ est une base.