# MAT 1910
# Mathématiques de l'ingénieur II

Dione Ibrahima

Chapitre V: Les Fonctions Vectorielles

# Paramétrisation dans $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$

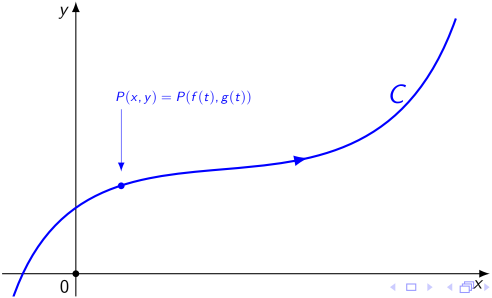
- Définition : On a jusqu'ici décrit les courbes planes, soit par une équation de la variable $x$ $\left[y = f(x)\right]$, soit par une équation de la variable $y$ $\left[x = f(y)\right]$, ou soit par une équation qui définit implicitement $y$ en fonction de $x$ $\left[f(x, y) = 0\right]$. L'objet de cette sous partie est de donner une nouvelle méthode, dite de paramétrisation, permettant de décrire ces courbes.

## Définition 1 (Paramétrisation dans $\mathbb{R}^2$)

Soit $C$ une courbe du plan où tout point $P$ est décrit par ses coordonnées $(x, y)$. On suppose que $x$ et $y$ sont des fonctions de la même variable $t$ définies par :

$$x := f(t), \quad y := g(t). \tag{1}$$

Les équations (1) sont dites équations paramétriques de la courbe $C$.



## Définition 2 (Paramétrisation dans $\mathbb{R}^3$)

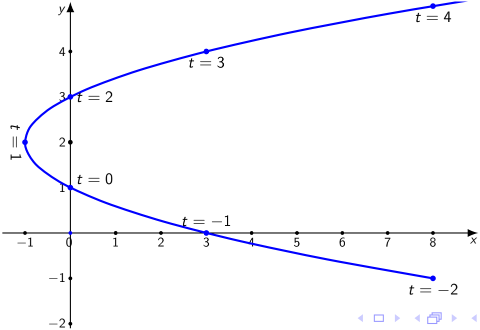
Si la courbe $C$ est dans l'espace $\mathbb{R}^3$, les équations paramétriques sont définies par

$$x := f(t)\,,\;\; y := g(t)\,,\;\; z := h(t)\,. \tag{2}$$

La courbe paramétrique $C$ sera représentée, dans la suite, par le vecteur $\vec{r}(t) := (x(t), y(t), z(t))$ (soit $\vec{r}(t) := (x(t), y(t))$ sur le plan $\mathbb{R}^2$).

Exemples :

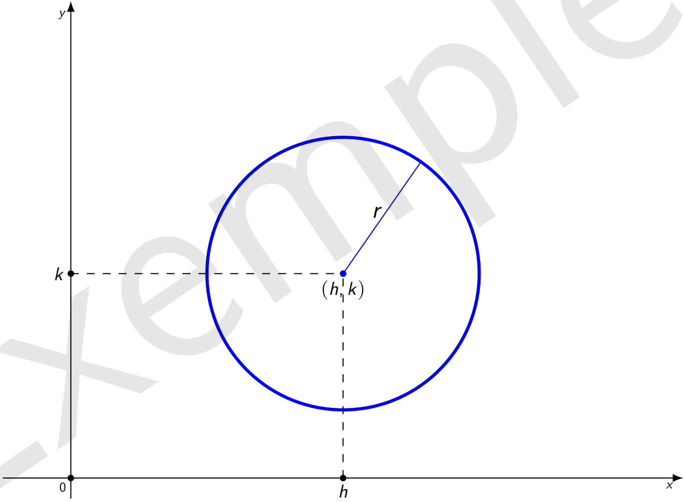
i. Donner un aperçu et identifier la courbe définie par les équations paramétriques suivantes : $x(t) := t^2 - 2t\,,\;\; y := t + 1$.



ii. Quelle est la courbe représentée par les équations paramétriques suivantes :

$$x(t) := \cos(t)\,, \;\; y := \sin(t)\,,\; 0 \le t \le 2\pi\,. \tag{3}$$

iii. Donner les équations paramétriques du cercle de centre $(h, k)$ et de rayon $r$.
Réponse : $x := h + r\cos(t), \;\; y := k + r\sin(t), \quad 0 \le t \le 2\pi$ .



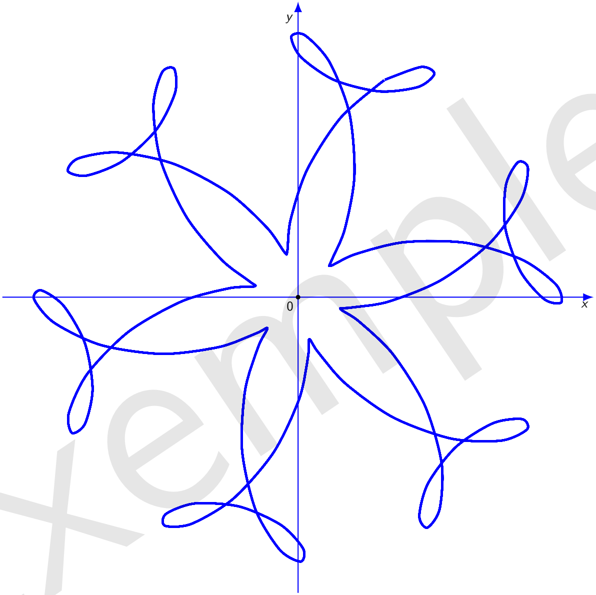


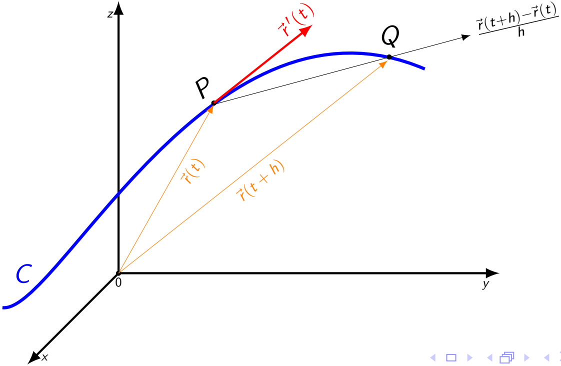

FIGURE: $x = sin(t) + \frac{1}{2}cos(5t) + \frac{1}{4}sin(13t)$ et $y = cos(t) + \frac{1}{2}sin(5t) + \frac{1}{4}cos(13t)$.

- Vecteur tangent et longueur d'une courbe :
    1. Vecteur tangent :

## Définition

Soit $C$ une courbe paramétrique représentée par $\vec{r}(t) := (x(t), y(t), z(t))$. La dérivée $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$, si elle existe, est appelée le vecteur tangent à $C$ en $P(x, y, z)$ :

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}\,'(t) := \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}. \qquad (4)$$



La figure précédente montre l'interprétation géométrique de cette définition. Si les vecteurs positions $\vec{r}(t)$ et $\vec{r}(t+h)$ ont comme extrémité les points $P$ et $Q$, alors le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ représente le vecteur $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$, qui peut être vu comme un vecteur sécant. Si $h > 0$, le multiple scalaire $(1/h)(\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t))$ est de même direction et de même sens que $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$. Lorsque $h \to 0$, il semble que ce vecteur tende vers un vecteur porté par la droite tangente. Pour cette raison, le vecteur $\vec{r}\,'(t)$ est appelé le vecteur tangent à la courbe définie par $\vec{r}(t)$ au point $P$.

## Remarque

1. Le vecteur tangent unitaire noté $\overrightarrow{T}$, associé à $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$, est : $\overrightarrow{T} := \frac{\vec{r}\,'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||}$.
2. L'équation paramétrique de la tangente à $C$ au point $P\big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\big)$ :

$$\vec{R}(t) := \vec{r}(t_0) + t\,\vec{r}\,'(t_0)\,. \tag{5}$$

## Théorème

Soient $\vec{r}_1(t)$ et $\vec{r}_2(t)$ des courbes paramétriques dérivables et $\lambda$ un scalaire, alors :

1. $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)\right] = \frac{d\,\vec{r}_1(t)}{dt} + \frac{d\,\vec{r}_2(t)}{dt}, \quad \frac{d}{dt}\left[\lambda\vec{r}_1(t)\right] = \lambda\frac{d\,\vec{r}_1(t)}{dt}$
2. $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)\right] = \frac{d\,\vec{r}_1(t)}{dt} \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \frac{d\,\vec{r}_2(t)}{dt}$
3. $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1(t) \wedge \vec{r}_2(t)\right] = \frac{d\,\vec{r}_1(t)}{dt} \wedge \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \wedge \frac{d\,\vec{r}_2(t)}{dt}$

Exemples :

i. Soit $C$ une courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = (1+t^3)\vec{i} + (te^{-t})\vec{j} + \sin(2t)\vec{k}$.
   a. Calculer la dérivée de $\vec{r}(t) = (1+t^3)\vec{i} + (te^{-t})\vec{j} + \sin(2t)\vec{k}$.
   b. Déterminer le vecteur tangent unitaire au point correspondant à $t = 0$.

ii. Pour la courbe $\vec{r}(t) = \sqrt{t}\,\vec{i} + (2-t)\vec{j}$, calculer $\vec{r}\,'(t)$ et dessiner le vecteur position $\vec{r}(1)$ et le vecteur tangent $\vec{r}\,'(1)$.

iii. Chercher des équations paramétriques de la droite tangente à l'hélice d'équations paramétriques :

$$x := 2\cos(t)\,, \quad y := \sin(t)\,, \quad z = t\,, \tag{6}$$

au point $(0, 1, \pi/2)$.

iv. Démontrer que si $||\vec{r}(t)|| = c$ (une constante), alors $\vec{r}\,'(t)$ est orthogonal à $\vec{r}(t)$ quel que soit $t$.

2. Longueur d'une courbe : Soit $C$ la courbe donnée sous la forme paramétrique

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\,,\ \ t \in [a, b]. \tag{7}$$

1. Soit $n+1$ points $\vec{r}_i$ sur $C$ définis par une partition régulière de $[a, b]$ :

$$\vec{r}_i = \vec{r}(t_i)\,,\ \ t_i = a + i\,\frac{(b-a)}{n}\,,\ \ i := 0, \cdots, n. \tag{8}$$

2. La ligne polygonale obtenue en joignant les points $\vec{r}_i$ est de longueur

$$L_n := \sum_{i=0}^{n-1} ||\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i|| = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{||\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i||}{\Delta t}\right)(\Delta t)\,,\ \text{où}\ \Delta t = t_{i+1} - t_i. \tag{9}$$

3. Si $\Delta t$ est assez petit, on a l'approximation $\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i :\simeq \vec{r}\,'(t)\Delta t$, et donc

$$L_n :\simeq \sum_{i=0}^{n-1} ||\vec{r}\,'(t)||\Delta t. \tag{10}$$

Le membre de droite de $(10)$ n'est rien d'autre qu'une somme de Riemann sur l'intervalle $[a, b]$ de la fonction numérique $||\vec{r}\,'(t)||$. Lorsque $n \to +\infty$, cette somme converge vers une intégrale dont la valeur est ce qu'on appelle longueur de la courbe $C$.

## Définition

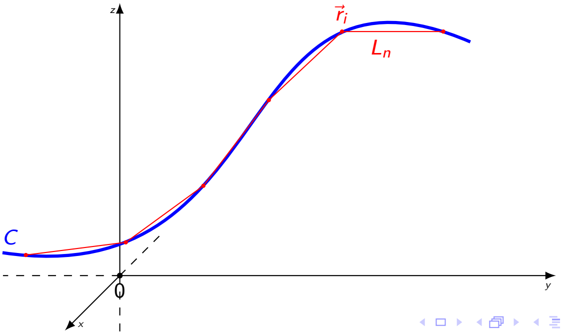
Soit $C$ la courbe donnée sous la forme paramétrique suivante :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\,,\ \ t \in [a, b]. \tag{11}$$

La longueur $L(C)$, de la courbe $C$ est la limite de la somme de Riemann (10) :

$$L(C) = \int_C ds := \int_a^b ||\vec{r}\,'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt, \tag{12}$$

où la différentielle $ds = ||\vec{r}\,'(t)||dt$ est appelé élément de longueur.



Exemples :

i. Calculer la longueur d'un arc d'hélice circulaire d'équation vectorielle $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$ compris entre les points $(1, 0, 0)$ et $(1, 0, 2\pi)$.
Réponse : $L = 2\sqrt{2}\pi$.

ii. Calculer la longueur du cycloide d'équation $\vec{r}(t) = (t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi)$.
Réponse : $L = 8$.

iii. Déterminer la longueur de l'hélice conique $\vec{r}(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$, $t \in [0, \log 2)$.
Réponse : $L = \sqrt{3}$.

# Les champs de scalaires et de vecteurs

- Définitions de champs scalaires et vectoriels :

## Définition 1

Soit $D$ une région plane dans $\mathbb{R}^2$. Un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ est une fonction $\mathbb{F}$ qui à tout point $(x, y) \in D$ associe le vecteur de dimension deux $\mathbb{F}(x, y)$.

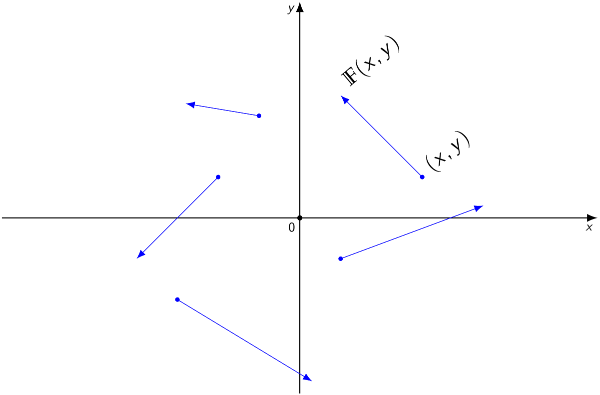
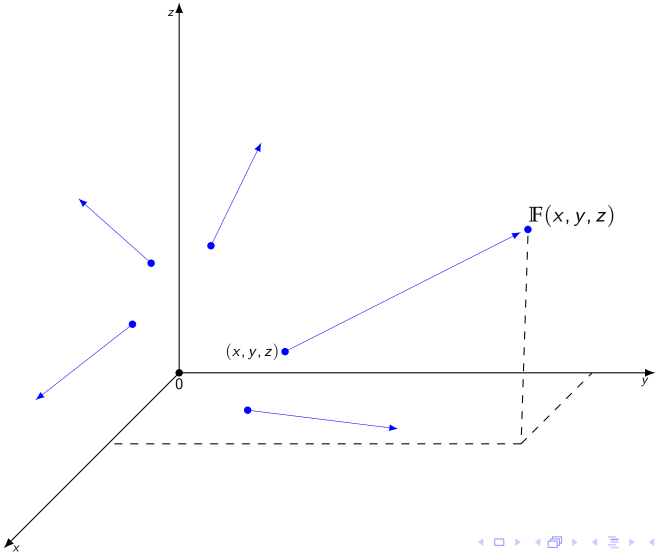



FIGURE: Un champ de vecteurs $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{R}^2$.

## Définition 2

Soit $E$ une sous région de $\mathbb{R}^3$. Un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ est une fonction $\mathbb{F}$ qui à tout point $(x, y, z) \in E$ associe le vecteur de dimension trois $\mathbb{F}(x, y, z)$.



## Remarque

Il existe toutefois des fonctions de deux ou trois variables à valeurs numériques (scalaires) qui sont appellées champs scalaires.

Exemples : On définit le champ de vecteurs $\mathbb{F}$ par la relation $\mathbb{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$. Décrire ce champ en représentant quelque'un des ses vecteurs.

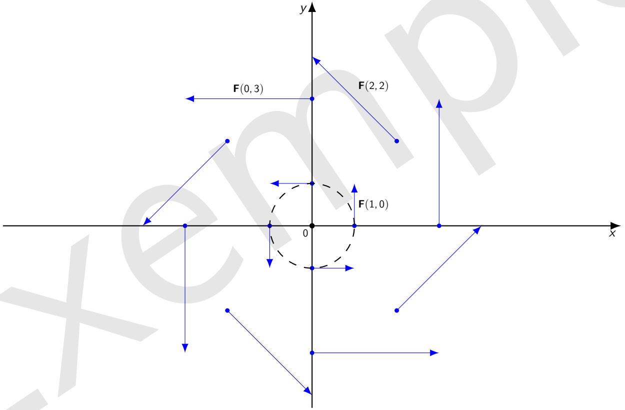



FIGURE: Représentation du champ de vecteur $\mathbb{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.

- Dérivation de champs scalaires et vectoriels :
  1. Dérivation de champs scalaires :

## Définition

Soit $f$ une fonction scalaire de classe $C^1$. Sa dérivée, noté $\nabla f$, est appelée champ de gradient vectoriel et est définie par une des relations suivantes, dépendant que le domaine de $f$ est de deux ou trois dimensions :

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &:= \big(f_x(x,y), f_y(x,y)\big) = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}, \\ \nabla f(x,y,z) &:= \big(f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\big) \\ &= f_x(x,y,z)\vec{i} + f_y(x,y,z)\vec{j} + f_z(x,y,z)\vec{k}, \end{aligned}$$

où $f_x$, $f_y$ et $f_z$ sont les dérivée partielles de $f$ par rapport à ses variables $x$, $y$ et $z$.

## Propriétés du gradient

Soient $f$ et $g$ deux fonctions scalaires de classe $C^1$. On a les relations suivantes :

1. $\nabla(fg) = g\nabla(f) + f\nabla(g)$.
2. Si $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors on a : $\nabla(h \circ f) = (h' \circ f)\nabla f$.
3. $\nabla f(P)$ est toujours perpendiculaire à la courbe de niveau passant par le point $P$.

2. Dérivation de champs vectoriels :

## Définition

Soit $\mathbb{F}(x,y,z) = \big(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)\big) = f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}$ un champ vectoriel dont les composantes $f_1$, $f_2$ et $f_3$ sont de classe $C^1$. Sa dérivée, noté $\nabla\mathbb{F}$, est un champ de vecteurs appelé matrice jacobienne et est définie par :

$$\nabla\mathbb{F}(x,y,z) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix},$$

$\frac{\partial f_i}{\partial x}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y}$ et $\frac{\partial f_i}{\partial z}$, $i = 1,2,3$ sont les dérivées partielles de $f_i$ par rapport à $x$, $y$, $z$.

Exemples :

i. Calculer le gradient de la fonction scalaire : $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

ii. Calculer le gradient du champ vectoriel suivant : $\mathbb{F}(x,y) = (x^2, x+y^2)$.

iii. Trouver la matrice jacobienne du champ vectoriel $\mathbb{G}(x,y) = (\cos(x+y), x)$.

# Les intégrales curvilignes

- Intégrales curvilignes d'un champ scalaire : Afin d'illustrer les étapes conduisant à la définition de l'intégrale

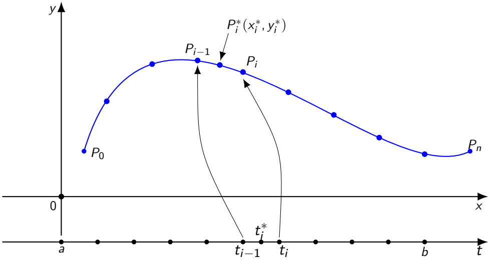
$$\int_C f\,ds \tag{13}$$

où $f$ est une fonction de densité, i.e. $f(x,y) \neq 0$, en tout point de $C$, on va reprendre brièvement les étapes sur la définition de la longueur d'une courbe. La courbe $C$ sera supposée lisse, i.e. $\vec{r}\,'(t)$ est continue et $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$, où $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$, est sa représentation paramétrique.

1. On subdivise $[a,b]$ en $n$ sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ d'égale longueur.
2. L'arc $C$ est alors subdivisé en $n$ sous-arcs de longueur $\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n$, où sur chacun on choisi le point $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ (qui est l'image de $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$).
3. On définit ainsi la somme de Riemann suivante :

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i. \tag{14}$$

4. On répète le même processus avec une subdivision raffinée de $[a,b]$.




## Définition 1.

Soit $f$ définie sur une courbe lisse $C$ donnée par ses équations paramétriques. L'intégrale curviligne de $f$ le long de $C$ est défini par la limite de (14) si elle existe :

$$\int_C f(x,y)\,ds := \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i\,. \tag{15}$$

## Définition 2.

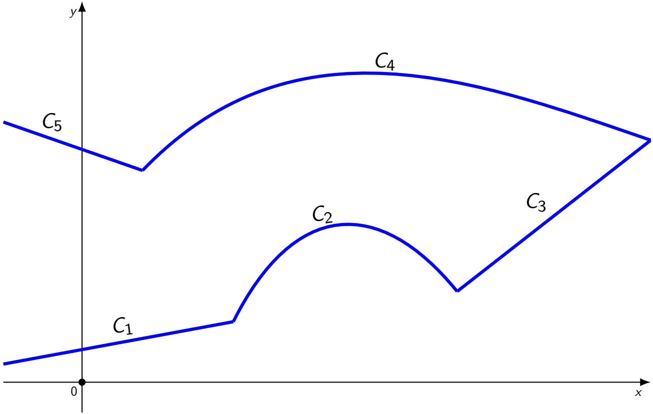
Par un argument du type que la définition de la longueur de $C$, on a celle-ci :

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \tag{16}$$

## Remarque

1. La figure ci-dessous montre la courbe $C$ composée d'arcs $C_1$, $C_2$, $\cdots$, $C_n$, lisses. On dit dans ce cas que $C$ est lisse par morceaux et l'intégrale sur $C$ est définie par la somme :

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_{C_1} f(x,y)\,ds + \int_{C_2} f(x,y)\,ds + \cdots + \int_{C_n} f(x,y)\,ds\,.$$



2. L'intégrale curviligne par rapport à $x$ et $y$ s'effectue aussi en exprimant tout en fonction de la variable $t$ : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$.

$$\begin{aligned} \int_C f(x,y)\,dx &:= \int_a^b f(x(t),y(t))\,x'(t)dt\,, \\ \int_C f(x,y)\,dy &:= \int_a^b f(x(t),y(t))\,y'(t)dt\,. \end{aligned}$$

3. En général, une paramétrisaion $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$ porte un sens de parcours d'une courbe $C$. Si $-C$ désigne la même courbe mais parcourue en sens inverse, alors

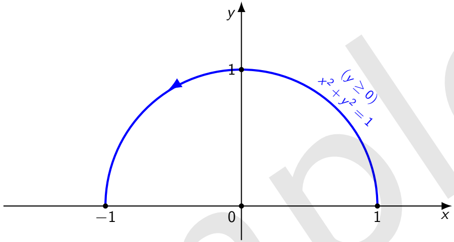
$$\int_{-C} f(x,y)\,dx = -\int_C f(x,y)\,dx\,,\ \int_{-C} f(x,y)\,dy = -\int_C f(x,y)\,dy\,.$$

4. Alors que l'intégrale curviligne par rapport à l'abscisse curviligne, elle, ne change pas :

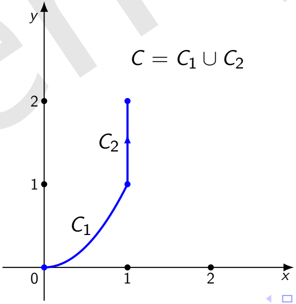
$$\int_{-C} f(x,y)\,ds = \int_C f(x,y)\,ds\,.$$

Exemples :

i. Calculer $\int_C (2 + x^2 y)\, ds$, où $C$ est le demi-cercle supérieur $x^2 + y^2 = 1$ :




ii. Calculer $\int_C 2x\, ds$, où $C$ se compose de l'arc $C_1$ de la parabole $y = x^2$ entre $(0, 0)$ et $(1, 1)$ suivi du segment vertical $C_2$ qui relie $(1, 1)$ et $(1, 2)$.



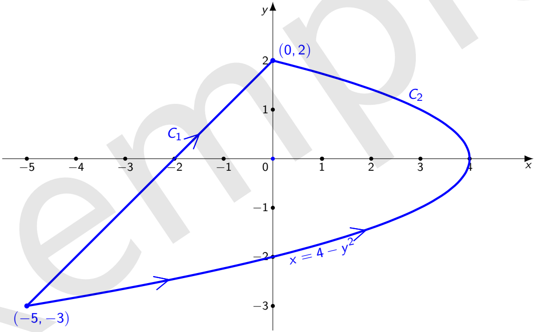
La représentation paramétrique d'un segment de droite allant de $\vec{r}_0$ à $\vec{r}_1$ est

$$\vec{r}(t) = (1-t)\vec{r}_0 + t\vec{r}_1, \;\; 0 \leq t \leq 1.$$

iii. Calculer $\int_C y^2 dx + x dy$, où la courbe $C$ est définie comme étant :

  a. Le segment qui relie $(-5,-3)$ à $(0,2)$ nommé $C_1$.

  b. L'arc de la parabole $x = 4 - y^2$ depuis $(-5,-3)$ jusqu'à $(0,2)$ nommé $C_2$.




iv. Calculer $\int_C y \sin(z) ds$, où $C$ est l'hélice circulaire décrite par les équations $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

v. Calculer $\int_C y dx + z dy + x dz$, où $C$ se compose du segment $C_1$ de $(2,0,0)$ à $(3,4,5)$ suivi du segment vertical $C_2$ de $(3,4,5)$ à $(3,4,0)$.

- Intégrales curvilignes d'un champ vectoriel :

## Définition

Soit $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ un champ vectoriel continu défini sur une courbe lisse $C$ de représentation paramétrique $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Alors l'intégrale curviligne de $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ le long de $C$, notée $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r}$, est définie par :

$$\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} := \int_a^b \overrightarrow{\mathbb{F}}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt = \int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbb{T}}\, ds\,, \tag{17}$$

où $\overrightarrow{\mathbb{T}} := \frac{\vec{r}\,'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||}$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe $C$ au point associé.

## Remarque

Malgré que $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = \int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbb{T}}\, ds$ et que les intégrales par rapport à l'abscisse curviligne restent inchangées lorsque le sens est inversé, il n'en est pas moins vrai que

$$\int_{-C} \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = -\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r}\,, \tag{18}$$

parce que le vecteur unitaire tangent $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ est remplacé par son opposé si $C$ est changé en $-C$.

Exemples :

i. Calculer l'intégrale curviligne du champ vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{F}}(x,y) = x^2\vec{i} - xy\vec{j}$ le long de la courbe $C$, de représentation paramétrique $\vec{r}(t) := (x(t), y(t))$, avec $x(t) := \cos(t)$, $y(t) := \sin(t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.
Réponse : $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = -\frac{2}{3}$.

Cette intégrale est le travail effectué par le champ de forces $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ pour déplacer un point matériel le long du quart du cercle unité (voir applications).

ii. Calculer $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r}$, où $\overrightarrow{\mathbb{F}}(x,y,z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ et où $C$ est la cube gauche définie par $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ 0 \leq t \leq 1$ .
Réponse : $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = -\frac{27}{28}$.

**Remarque (Lien entre intégrales champs vectoriels et ceux scalaires)**

Si $\overrightarrow{\mathbb{F}} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ est un champ vectoriel défini sur $\mathbb{R}^3$, alors selon la définition (17) :

$$\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz\,. \tag{19}$$

iii. L'intégrale $\int_C ydx + zdy + xdz$ pourrait être écrite comme suit, $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r}$, où $\overrightarrow{\mathbb{F}}(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$.

# Interprétation physique des intégrales curvilignes

Toute interprétation physique d'une intégrale curviligne $\int_C f(x,y)ds$ ou $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r}$ dépend de l'interprétation physique des fonctions $f$ ou $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ elles-mêmes.

- Interprétation de l'intégrale d'un champ scalaire :

Si $\rho(x,y)$ représente la densité en un point $(x,y)$ d'un fil profilé selon une courbe $C$, l'intégrale curviligne suivant définit soit :

- La masse, notée $m$, de cet fil :

$$m := \int_C \rho(x,y)ds\,, \tag{20}$$

- Les coordonnées du centre d'inertie :

$$\bar{x} := \frac{1}{m}\int_C x\rho(x,y)ds\,,\ \ \bar{y} := \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y)ds\,. \tag{21}$$

- Les moments d'inertie par rapport aux axes :

$$I_x := \int_C y^2\rho(x,y)ds\,,\ \ I_y := \int_C x^2\rho(x,y)ds\,,\ \ I_o := \int_C (x^2+y^2)\rho(x,y)ds. \tag{22}$$

- Interprétation de l'intégrale d'un champ vectoriel :

Si le champ vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{F}} = (f_1, f_2, f_3)$ représente un champ de force, l'intégrale curviligne $\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r}$ définit le travail nécessaire pour déplacer un point matériel le long de la courbe $C$ soumis au champ de force $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ :

$$\int_C \overrightarrow{\mathbb{F}} \cdot d\vec{r} = \int_C f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz \,. \tag{23}$$

## Remarque

Dans d'autres contextes, l'intégrale curviligne (23) est appelée circulation de $\overrightarrow{\mathbb{F}}$ le long de la courbe $C$.

Exemple : Un fil suit la courbure d'un demi-cercle $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$. Il est plus épais dans sa partie inférieure que sa partie supérieure. Déterminer le centre d'inertie du fil si la densité en un point est proportionnelle à sa distance de la droite $y = 1$.
Réponse : $\rho(x, y) = k(1 - y)$, $m = k(\pi - 2)$, $\bar{x} = 0$ et $\bar{y} = \frac{4-\pi}{2(\pi-2)}$.

Exercices du Livre Stewart (édition MODULO) à Faire :

- Section 8.1 : Exercices 15, 19, 23, 37.
- Section 8.2 : Exercices 17, 19, 23, 31.
- Section 8.3 : Exercices 3, 11, 17.
- Section 9.1 : Exercices 11, 13, 21, 31.
- Section 9.2 : Exercices 3, 5, 11, 19, 21, 33, 37.

Références :

- Livre Stewart (édition MODULO), page 340-390 : section 8.1- section 9.2
- Livre Stewart, page 913 : section 13.2
- Pour un cours de Maple complet : http ://alamanya.free.fr/

Références