Algèbre et Relations (MATH 2413) - Chapitre 2: Systèmes d'Équations Linéaires et Matrices

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

- Matrices
- Opérations sur les matrices
- Résolution de systèmes d'équations linéaires

Sommaire

- Nous étudierons aux deux premières parties les matrices et leurs opérations:

  1. l'addition de matrices,
  2. la multiplication d'une matrice par un scalaire,
  3. la multiplication de matrices.

- Nous aborderons ensuite les méthodes de résolution de systèmes d'équations Linéaires:

  1. les méthodes élémentaires de substitution et d'élimination,
  2. la méthode de Gauss-Jordan et l'nversion de matrices carrées.

Matrices

Définition de matrices

Définition

Une **matrice de dimension** m **par** n, ou de format m par n, est un tableau rectangulaire ordonné d'éléments disposés sur m lignes et n colonnes.

Façon 1

$$
\begin{array}{cl}
A = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
\leftarrow \text{Ligne } 1 \\
\leftarrow \text{Ligne } 2 \\
\\
\leftarrow \text{Ligne } i \\
\\
\leftarrow \text{Ligne } m
\end{array}
\\
\begin{array}{cccc}
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\text{Colonne } 1 & \text{Colonne } 2 & \text{Colonne } j & \text{Colonne } n
\end{array}
&
\end{array}
$$

Façon 2

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Note:

- Dans ce tableau, a_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ représentent les **éléments** (ou **entrées**) de la matrice A.

- Les indices i et j donnent la position de l'élément a_{ij}, situé à la $i-$ième ligne et à la $j-$ième colonne.

- Les nombres m et n représentent le nombre de lignes et de colonnes de la matrice (**le nombre de lignes précède toujours le nombre de colonnes**).

- Nous pouvons également noter la matrice A précédente de l'une des façons suivantes.

$$A_{m\times n} \quad \vdots \quad A_{mn} \quad \vdots \quad [a_{ij}]_{mn}$$

Exemple 1.1: Représentons à l'aide de matrices légendées les résultats que Jean, Marie et Lucie ont obtenus à leur cours de mathématiques.

$$\begin{array}{l} \\ \textbf{Jean} \\ \textbf{Marie} \\ \textbf{Lucie} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \textbf{Examen 1} & \textbf{Examen 2} & \textbf{Examen 3} & \textbf{Devoir} & \textbf{Note finale} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 75 & 90 & 85 & 90 & 85 \\ 78 & 87 & 87 & 92 & 86 \\ 69 & 78 & 90 & 87 & 81 \end{bmatrix} \end{array}$$

La dimension de cette matrice est 3×5.

$$\begin{array}{l} \\ \textbf{Examen 1} \\ \textbf{Examen 2} \\ \textbf{Examen 3} \\ \textbf{Devoir} \\ \textbf{Note finale} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Jean} & \textbf{Marie} & \textbf{Lucie} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 75 & 78 & 69 \\ 90 & 87 & 78 \\ 85 & 87 & 90 \\ 90 & 92 & 87 \\ 85 & 86 & 81 \end{bmatrix} \end{array}$$

La dimension de cette matrice est 5×3.

Ces matrices nous permettent de constater, par exemple, que Jean a obtenu 75 au premier examen, que Lucie a obtenu la meilleure note au troisième examen et que Marie a obtenu une note finale de 86.

Les valeurs 75, 78, 69, 90, …, 86 et 81 sont les éléments de ces matrices.

Exemple 1.2: Soit la matrice A suivante:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & 1 \\ 9 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

- La dimension de A est 3×4.
- L'élément a_{23} est -2.
- 6 est l'élément a_{32}.

Définition

- Une matrice $A_{m \times n}$ est une **matrice nulle**, si $a_{ij} = 0, \forall\, i$ et j. Cette matrice nulle est notée $O_{m \times n}$, O_{mn} ou O.

- **Une matrice nulle est une matrice dont tous les éléments sont égaux à zéro**. Donc, $O_{m \times n} = [O]_{m \times n}$.

Exemple 1.3:

▷ Écrivons explicitement les matrices $O_{3\times 2}$, $O_{2\times 4}$ et $O_{1\times 3}$.

$$O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad O_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Définition

- Une **matrice ligne** est une matrice de dimension $1 \times n$.
- Une **matrice colonne** est une matrice de dimension $m \times 1$.

Exemple 1.4:

- $L_{1\times 5} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & \pi & \sqrt{5} & \sin(30^\circ) \end{bmatrix}$ est une matrice ligne de dimension 1×5.
- $C_{3\times 1} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 10 \\ \sin(30^\circ) \end{bmatrix}$ est une matrice colonne de dimension 3×1.

Définition

- Une **matrice carrée d'ordre** n, notée $A_{n\times n}$, est une matrice contenant n lignes et n colonnes.

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Les éléments $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{(n-1)(n-1)}$ et a_{nn} forment la **diagonale principale** de la matrice carrée $A_{n\times n}$.

- Les éléments $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \cdots, a_{2(n-1)}$ et a_{1n} forment la **diagonale secondaire** ou la **deuxième diagonale** de la matrice carrée $A_{n\times n}$.

Exemple 1.5: Soit la matrice A suivante:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

- La matrice A est une matrice carrée d'ordre 4.
- Les éléments $1, 6, 11$ et 16 forment la diagonale principale.
- Les éléments $13, 10, 7$ et 4 forment la diagonale secondaire.

Définition

- Une matrice A est appelée **matrice triangulaire supérieure**, si elle est carrée et si ses éléments vérifient $a_{ij} = 0, \forall\, i > j$.

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Éléments au-dessous de la diagonale principale sont nuls.

- Une matrice A est appelée **matrice triangulaire inférieure**, si elle est carrée et si ses éléments vérifient $a_{ij} = 0, \forall\, i < j$.

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Éléments au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

Définition

- A est une **matrice diagonale** si A est carrée et si $a_{ij} = 0, \forall\, i \neq j$.

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Éléments qui ne sont pas sur la diagonale principale sont nuls.

- A est une **matrice scalaire** si A est carrée et si

$$a_{ij} = \begin{cases} k \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Éléments de la diagonale principale sont égaux et seuls non nuls.

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Note:

- Une matrice diagonale est une matrice carrée qui est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.
- Une matrice scalaire est une matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux.

Exemple 1.6:

a) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 14 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, alors A est une matrice triangulaire supérieure.

b) Si $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$, alors B est une matrice triangulaire inférieure.

c) Si $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, alors C est une matrice diagonale.

d) Si $E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, alors E est une matrice scalaire.

Définition

Une matrice carrée A d'ordre n est la **matrice identité** d'ordre n si

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Cette matrice est notée $I_{n\times n}$ ou I_n ou I.

Ainsi, une matrice identité est une matrice scalaire dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1 et tous les autres éléments sont nuls.

Exemple 1.7: Écrivons explicitement les matrices $I_{3\times 3}$ et I_4.

$$I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Égalité de deux matrices

Définition

Les matrices $A_{m\times n}$ et $B_{p\times q}$ sont égales, c'est-à-dire $A_{m\times n} = B_{p\times q}$, si et seulement si

- $m = p$ et $n = q$;
- $a_{ij} = b_{ij}, \forall\, i$ et j.

Note: Ainsi, deux matrices sont égales si:

- elles ont la même dimension, c'est-à-dire qu'elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes;
- les éléments qui sont à la même position sont égaux.

Exemple 2.1:

- Soit les matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & \sin(30^\circ) \\ \ln(1) & \sqrt{\sqrt{81}+16} \end{bmatrix}$$

Nous avons $A \neq B, A \neq C, A \neq E$ et $A \neq F$ (dimensions différentes)

$B \neq C, B \neq E$ et $B \neq F$ (dimensions différentes)

$C \neq E$ et $C \neq F$ ($c_{11} \neq e_{11}$ et $c_{11} \neq f_{11}$)

$E = F$ (définition 1.9 satisfaite)

Exemple 2.2:

- Déterminons la valeur des éléments x, y, z et w tels que

$$\begin{bmatrix} x & 5 \\ 4y-1 & w^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & y-3 \\ -z & 4 \end{bmatrix}$$

Puisque les matrices ont la même dimension, les éléments qui ont la même position doivent être égaux. Ainsi,

$x = 4$	$5 = y - 3$ $y = 8$
$4y - 1 = -z$ $4(8) - 1 = -z$ (car $y = 8$) $z = -31$	$w^2 - 1 = 4$ $w^2 = 5$ $w = \sqrt{5}$ ou $w = -\sqrt{5}$

d'où les matrices sont égales si $x = 4$, $y = 8$, $z = -31$ et $w = \sqrt{5}$ ou $w = -\sqrt{5}$.

Mise en situation

Les matrices T_1 et T_2 représentent le nombre d'automobiles neuves (AN) et d'automobiles usagées (AU) vendues dans une région au cours du premier et du deuxième trimestre d'une année, par les concessionnaires A, B, C, D et E.

$$T_1 = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} \textbf{AN} & \textbf{AU} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 157 & 97 \\ 160 & 62 \\ 190 & 67 \\ 113 & 40 \\ 162 & 17 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \\ \textbf{E} \end{array} \end{array} \qquad T_2 = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} \textbf{AN} & \textbf{AU} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 193 & 102 \\ 170 & 65 \\ 223 & 72 \\ 135 & 51 \\ 191 & 21 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \\ \textbf{E} \end{array} \end{array}$$

Pour connaître le nombre total d'automobiles neuves et d'automobiles usagées vendues depuis le début de l'année, il suffit d'additionner respectivement les éléments qui sont à la même position de ces deux matrices.

Nous obtenons ainsi la matrice S suivante.

$$S = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} \textbf{AN} & \textbf{AU} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 157+193 & 97+102 \\ 160+170 & 62+65 \\ 190+223 & 67+72 \\ 113+135 & 40+51 \\ 162+191 & 17+21 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \\ \textbf{E} \end{array} \end{array}$$

d'où, en effectuant les additions, nous obtenons

$$S = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} \textbf{AN} & \textbf{AU} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 350 & 199 \\ 330 & 127 \\ 413 & 139 \\ 248 & 91 \\ 353 & 38 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \\ \textbf{E} \end{array} \end{array}$$

Définition

Soit $A_{m\times n}$ et $B_{m\times n}$ deux matrices de même dimension. La **somme** $A+B$ de ces deux matrices est la matrice $S_{m\times n}=[s_{ij}]_{m\times n}$, où

$$s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \forall\ i \text{ et } j.$$

Note: Ainsi, pour obtenir la somme de deux matrices de même dimension, il suffit d'additionner respectivement les éléments qui sont à la même position de ces deux matrices.

On ne peut pas additionner deux matrices de dimensions différentes.

La somme des matrices A et B de dimension $m \times n$ se fait comme suit:

Façon 1

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2j} + b_{2j} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{ij} + b_{ij} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mj} + b_{mj} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1j} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2j} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{i1} & s_{i2} & \dots & s_{ij} & \dots & s_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mj} & \dots & s_{mn} \end{bmatrix}, \text{ où } s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ \forall\, i \text{ et } j$$

$$= S$$

Façon 2

$$A + B = [a_{ij}]_{mn} + [b_{ij}]_{mn}$$

$$= [a_{ij} + b_{ij}]_{mn}$$

$$= [s_{ij}]_{mn}, \text{ où } s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$= S$$

Exemple 2.3: Soit les matrices $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$,
$C = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ et $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Calculons, si c'est possible, les sommes suivantes.

a) $A + B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+3 & 1+5 \\ 4+7 & 8+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}$

b) $A + A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+(-3) & 1+1 \\ 4+4 & 8+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$

c) $C + O = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -4+0 \\ -7+0 & 8+0 \\ 3+0 & 5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

d) $A + C$ n'est pas définie, car A et C ne sont pas de même dimension.

Exemple 2.4: La matrice P ci-dessous représente le prix de trois types de voitures, A, B et C, selon leur équipement, Q_1 et Q_2.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textbf{ÉQ}_1 & \textbf{ÉQ}_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 12\,000 & 15\,000 \\ 16\,000 & 20\,000 \\ 25\,000 & 31\,000 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{array}$$

Déterminons la matrice légendée N des nouveaux prix obtenus à la suite d'une augmentation de 5 % des prix suggérés en P.

Pour déterminer les éléments de N, il suffit de multiplier chaque élément de P par 1,05. Ainsi,

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textbf{ÉQ}_1 & \textbf{ÉQ}_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 1{,}05(12\,000) & 1{,}05(15\,000) \\ 1{,}05(16\,000) & 1{,}05(20\,000) \\ 1{,}05(25\,000) & 1{,}05(31\,000) \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{array}$$

d'où, en effectuant les multiplications, nous obtenons

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textbf{ÉQ}_1 & \textbf{ÉQ}_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 12\,600 & 15\,750 \\ 16\,800 & 21\,000 \\ 26\,250 & 32\,550 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{array}$$

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition

Soit $A_{m\times n}$ une matrice, et $k \in \mathbb{R}$. **Le produit** kA **de la matrice** A **par le scalaire** k est la matrice

$$P_{m\times n} = [p_{ij}]_{m\times n}, \text{ où } p_{ij} = ka_{ij}, \forall\, i \text{ et } j.$$

Note: Ainsi, pour obtenir le produit d'une matrice par un scalaire, on multiplie chaque élément de la matrice par ce scalaire.

Le produit de la matrice A par ce scalaire k se fait comme suit:

Façon 1

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{ij} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mj} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mj} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix}, \text{ où } p_{ij} = ka_{ij}, \forall\, i \text{ et } j$$

$$= P$$

Façon 2

$$kA = k[a_{ij}]_{mn}$$

$$= [ka_{ij}]_{mn}$$

$$= [p_{ij}]_{mn}, \text{ où } p_{ij} = ka_{ij}$$

$$= P$$

Exemple 2.5: Soientt $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Calculons :

a) $2A = 2\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(4) & 2(-2) & 2(3) \\ 2(-3) & 2(6) & 2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 6 \\ -6 & 12 & 2 \end{bmatrix}$

b) $-3B = -3\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(5) & -3(3) & -3(-1) \\ -3(4) & -3(2) & -3(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -9 & 3 \\ -12 & -6 & 18 \end{bmatrix}$

c) $-1C = -1\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1(-1) & -1(4) \\ -1(3) & -1(-2) \\ -1(5) & -1(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$

d) $0A = 0\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0(4) & 0(-2) & 0(3) \\ 0(-3) & 0(6) & 0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $4O_{2\times 3} = 4\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(0) & 4(0) & 4(0) \\ 4(0) & 4(0) & 4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Définition

La matrice $B_{m\times n}$ est la **matrice opposée** de la matrice $A_{m\times n}$ lorsque

$$b_{ij} = -a_{ij}, \forall\, i \text{ et } j.$$

Nous notons la matrice opposée de A par $-A$, où $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.

Note: Ainsi, nous avons $-A = -1A$ pour toute matrice A. De plus, la différence $A - B$ est obtenue en effectuant $A + (-B)$.

Exemple 2.6: Soientt $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

a) Déterminons l'opposée de A.

$$-A = \begin{bmatrix} -5 & -(-6) & -3 \\ -7 & -4 & -(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 & -3 \\ -7 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Calculons $A - A$.

$$A - A = A + (-A) = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 7 & 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 6 & -3 \\ -7 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Calculons $A - B$.

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 7 & 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -(-4) & -(-2) \\ 0 & -1 & -(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Définition

- Le **produit** AB **des matrices** $A_{m\times p}$ et $B_{p\times n}$ est la matrice $C_{m\times n} = [c_{ij}]_{m\times n}$, dont les éléments c_{ij} sont données par

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}, \forall\ i \text{ et } j, \text{ c'est à dire}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

- Ainsi, chaque élément c_{ij} de la matrice C est la somme du produit des éléments de la i-ième ligne de A, c'est-à-dire $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \cdots, a_{ip}$, par les éléments respectifs de la j-ième colonne de B, c'est-à-dire $b_{1j}, b_{2j}, b_{3j}, \cdots, b_{pj}$.

- Si A est une matrice de dimension $m \times p$, et B, une matrice de dimension $p \times n$, alors AB est une matrice de dimension $m \times n$

Façon 1	**Façon 2**
$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$	$$AB = [a_{ij}]_{m \times p} \, [b_{ij}]_{p \times n}$$
$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$	$$= [c_{ij}]_{m \times n}$$
$$= C,$$	$$= C,$$
où, $\forall$ i et j, $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$	où, $\forall$ i et j, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

Note:

- Le produit matriciel AB de deux matrices est défini seulement lorsque le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B. Nous pouvons alors écrire $AB = C$.

- Le nombre de lignes de C égale le nombre de lignes de A.

- Le nombre de colonnes de C égale le nombre de colonnes de B.

De façon générale, $A_{m \times p} B_{p \times n} = C_{m \times n}$

égalité

Exemple 2.7: Soient les matrices $A_{4\times 2}$ et $B_{3\times 4}$. Déterminons si les multiplications suivantes sont possibles et, s'il y a lieu, la dimension de la matrice résultante.

Multiplication de $A_{4\times 2}$ par $B_{3\times 4}$

Nous constatons que $A_{4\times 2}B_{3\times 4}$

pas d'égalité

d'où le produit matriciel n'est pas défini.

b) Multiplication de $B_{3\times 4}$ par $A_{4\times 2}$

Nous constatons que $B_{3\times 4}A_{4\times 2}$

égalité

d'où le produit matriciel est défini par $B_{3\times 4}A_{4\times 2} = C_{3\times 2}$.

La dimension de la matrice résultante C est 3×2.

Exemple 2.8: Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$.

a) Vérifions si nous pouvons effectuer la multiplication de la matrice A par la matrice B.

La multiplication de A par B est possible, car le produit $A_{2\times 3}B_{3\times 2}$ est défini.

égalité

b) Déterminons la dimension de la matrice résultante C.

$A_{2\times 3}B_{3\times 2} = C_{2\times 2}$, d'où la dimension de C est 2×2.

égalité

c) Effectuons la multiplication AB.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$c_{11} = 1(2) + 4(-4) + 3(7) = 7$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & 54 \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$c_{12} = 1(-5) + 4(8) + 3(9) = 54$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ 26 & \square \end{bmatrix}$$

$c_{21} = 2(2) + 5(-4) + 6(7) = 26$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & 84 \end{bmatrix}$$

$c_{22} = 2(-5) + 5(8) + 6(9) = 84$

D'où $AB = \begin{bmatrix} 7 & 54 \\ 26 & 84 \end{bmatrix}$

Attention !

De façon générale, la multiplication de matrices n'est pas commutative, c'est-à-dire que $AB \neq BA$.

Exemple 2.9: Soient $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$. Calculons AB et BA.

a) $$A_{1\times 3}B_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) + 5(0) + (-1)(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$$

égalité

d'où $AB = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$

b) $$B_{3\times 1}A_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3) & 1(5) & 1(-1) \\ 0(3) & 0(5) & 0(-1) \\ -6(3) & -6(5) & -6(-1) \end{bmatrix}$$

égalité

d'où $BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18 & -30 & 6 \end{bmatrix}$

Théorème

- Si A est une matrice de dimension $m \times n$, alors

$$I_{m\times m}A_{m\times n} = A_{m\times n} \text{ et } A_{m\times n}I_{n\times n} = A_{m\times n}$$

- En particulier, si A est une matrice carrée d'ordre n, alors $IA = AI = A$, où I est d'ordre n.

Exemple 2.10: Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Calculons IA et AI, en choisissant la matrice identité I de façon adéquate.

$$I_{2\times 2}A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

égalité

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

d'où $IA = A$

$$A_{2\times 3}I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

égalité

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

d'où $AI = A$

Exemple 2.11: Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Calculons AB et AC:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 20 & 16 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 20 & 16 \end{bmatrix}$$

Note: L'exemple précédent nous permet de constater que $AB = AC$, même si $B \neq C$; par conséquent, **lorsque $AB = AC$, on ne peut pas conclure que $B = C$.**

Exemple 2.12: Soient $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -2 & -12 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Calculons AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -12 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{2\times 2}$$

Note: L'exemple précédent nous permet de constater que $AB = O$, même si $A \neq O$ et $B \neq O$; par conséquent, **lorsque $AB = O$, on ne peut pas conclure que $A = O$ ou que $B = O$.**

Définition

- Soit $A_{n \times n}$, une matrice carrée. La matrice A est **inversible** s'il existe une matrice $B_{n \times n}$ telle que

$$A_{n \times n} B_{n \times n} = B_{n \times n} A_{n \times n} = I_{n \times n}$$

- Dans ce cas, la matrice B est appelée **inverse** de A et la matrice A est appelée **inverse** de B. On les note respectivement

$$B = A^{-1} \text{ et } A = B^{-1}$$

Exemple 2.13: Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Calculons AB et BA:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_{3\times 3}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_{3\times 3}}$$

Puisque $AB = BA = I_{3\times 3}$, $B = A^{-1}$ et $A = B^{-1}$.

Résolution de systèmes d’équations linéaires

Définition

- Une **équation linéaire** à n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une équation de premier degré qui peut être exprimée sous la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_n$, les coefficients des variables, et b sont des constantes réelles.

- Un **système de** m **équations linéaires à** n **variables** $x_1, x_2, \cdots, x_n$, noté S, est constitué de m équations linéaires de la forme

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où a_{ij}, les coefficients des variables, et b_i sont des constantes réelles, $i \in \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ et $j \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Note:

- Le système (S) s'écrit sous la forme de l'équation matricielle $AX = B$ suivante (la position de chaque variable est la même dans toutes les équations du système)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice des Coefficients}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matrice} \\ \text{des} \\ \text{Variables}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matrice} \\ \text{des} \\ \text{Constantes}}}$$

- En tenant compte seulement des coefficients et des constantes dans le système précédent, nous pouvons écrire la matrice

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

appelée **matrice augmentée** du système (S).

Exemple 3.1:

- Exemples d'une équation linéaire:
  - à une variable: $3x = 5$.
  - à deux variables: $-\frac{1}{2}x_1 + 7x_2 = 5$.

- Soit le système de 2 équations linéaires à 2 variables, noté (S):

$$(S)\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 = 2 \\ 2x_1 - 8x_2 = -1 \end{cases}$$

Nous pouvons écrire ce système sous la forme matricielle $AX = B$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B}$$

La matrice augmentée du système (S) est donnée comme suit:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -5 & 2 \\ 2 & -8 & 1 \end{array}\right]$$

Exemple 3.2:

▷ Soit le système de 3 équations linéaires à 3 variables, noté (S):

$$(S)\begin{cases} x + 3y - 2z &= 5 \\ x + 5y - 8z &= 9 \\ 2x + 4y + 5z &= 12 \end{cases}$$

La forme matricielle $AX = B$ de ce système s'écrit alors:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -8 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}}_{B}$$

La matrice augmentée du système (S) est donnée par:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & 5 & -8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right]$$

Définition

- Une **solution** d'un système d'équations linéaires de la forme

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

  est une suite de nombres $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n$ telle que, si nous remplaçons x_1 par s_1, x_2 par s_2, x_3 par s_3, $\cdots$, x_n par s_n dans chacune des équations du système (S), nous obtenons une égalité vraie entre les deux membres.

- L'**ensemble-solution** d'un système d'équations, noté E.-S., est l'ensemble de toutes les solutions du système.

Exemple 3.3:

▷ Vérifions que $(2,1,4)$ est une solution du système (S) suivant:

$$(S)\begin{cases} 3x-4y+2z=10 \\ 2x+2y-z=2 \\ 5x-3y+4z=23 \\ x+5y-8z=-25 \end{cases}$$

Pour cela, il suffit de remplacer x par 2, y par 1 et z par 4 dans chaque équation et de vérifier si nous obtenons une égalité vraie entre les deux membres.

$$\begin{array}{rrcl} \text{Ainsi, dans l'équation (1):} & 3(2)-4(1)+2(4) & = & 10 \\ \text{dans l'équation (2):} & 2(2)+2(1)-(4) & = & 2 \\ \text{dans l'équation (3):} & 5(2)-3(1)+4(4) & = & 23 \\ \text{dans l'équation (4):} & (2)+5(1)-8(4) & = & -25 \end{array}$$

d'où $(2,1,4)$ est une solution de (S).

Note: Il peut arriver qu'un système d'équations linéaires ait plus d'une solution ou qu'il n'en ait aucune.

Exemple 3.4: Soit les systèmes d'équations linéaires S_1 et S_2 suivants.

$$(S_1)\begin{cases} x - y - z = 4 \\ 4x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$(S_2)\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$$

- Nous pouvons vérifier que (3, -5, 4) et (0, -3, -1) sont des solutions du système S_1. Ce système a donc plus d'une solution.

  De fait, ce système a une infinité de solutions.

- Le système S_2 n'a aucune solution, car $(x + y + z)$ ne peut pas être égal à 4 et à -2 simultanément.

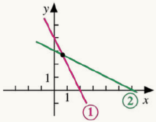
Définition

Un système d'équations linéaires est dit

- **compatible** (**cohérent** ou **non contradictoire**) lorsqu'il a au moins une solution ;
- **incompatible** (**incohérent** ou **contradictoire**) lorsqu'il n'a aucune solution. Nous écrivons alors E.-S.$= \emptyset$.

Exemple 3.5:

$$S_1 \begin{cases} 2x + y = 4 & (1) \\ x + 2y = 6 & (2) \end{cases}$$

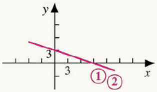


Puisque les droites ne sont pas parallèles, elles ont un seul point d'intersection.

Le système a donc une solution unique.

D'où le système est compatible.

$$S_2 \begin{cases} x + 3y = 9 & (1) \\ 2x + 6y = 18 & (2) \end{cases}$$

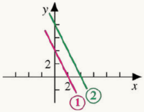


Puisque les droites sont parallèles confondues, elles ont une infinité de points d'intersection.

Le système a donc une infinité de solutions.

D'où le système est compatible.

$$S_3 \begin{cases} 2x + y = 4 & (1) \\ 2x + y = 8 & (2) \end{cases}$$



Puisque les droites sont parallèles distinctes, elles n'ont pas de point d'intersection.

Le système n'a donc aucune solution.

D'où le système est incompatible.

Méthode

La méthode de substitution consiste à isoler une des variables dans une des équations et à substituer cette valeur dans les autres équations.

Exemple 3.6:

Résolvons le système (S) suivant par la méthode de substitution.

$$(S)\begin{cases} 3x+4y+z=7 \\ -2x+y-z=6 \\ x-y+2z=-3 \end{cases}$$

Nous allons suivre quatre étapes pour illustrer cette méthode:

▷ **Étape 1: Isoler une des variables dans une des équations**
Choisissons une variable facile à isoler, par exemple la variable z dans l'équation (1). Nous obtenons $z = 7 - 3x - 4y$.

▷ **Étape 2: Substituer cette valeur dans les autres équations**

- ⋆ Dans l'équation (2) , nous obtenons

$$\begin{aligned} -2x + y - (7 - 3x - 4y) &= 6 \\ x + 5y &= 13 \qquad (1) \end{aligned}$$

- ⋆ Dans l'équation (3) , nous obtenons

$$\begin{aligned} x - y + 2(7 - 3x - 4y) &= -3 \\ -5x - 9y &= -17 \qquad (2) \end{aligned}$$

- ⋆ Nous obtenons ainsi un nouveau système d'équations (S_1), donné par les équations (1) et (2) et contenant seulement deux variables.

$$(S_1) \begin{cases} x + 5y = 13 \\ -5x - 9y = -17 \end{cases}$$

- **Étape 3: Avec les nouvelles équations du système (S_1):**
  Nous isolons x dans la première équation de (S_1): $x = 13 - 5y$.
  Nous substituons cette valeur dans la deuxième équation de (S_1):

$$\begin{aligned} -5(13-5y) - 9y &= -17 \\ 16y &= 48 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

- **Étape 4: Trouver la valeur des autres variables**
  - Trouvons la valeur de x en remplaçant y par 3 dans l'équation $x = 13 - 5y$ obtenue à l'étape 3.
    Nous obtenons alors $x = 13 - 5(3) = -2$.
  - Trouvons la valeur de z en remplaçant y par 3 et x par -2 dans l'équation $z = 7 - 3x - 4y$ obtenue à l'étape 1.
    Nous obtenons alors $z = 7 - 3(-2) - 4(3) = 1$, d'où E.-S. $= \{(-2, 3, 1)\}$.

- Il suffit de remplacer x par -2, y par 3 et z par 1 dans les équations de (S) pour vérifier l'égalité entre les deux membres de chaque équation du système.

Méthode

- La méthode d'élimination, appelée aussi **méthode d'addition** ou **méthode de réduction**, consiste à faire en sorte que les coefficients d'une des variables, dans deux équations, soient des nombres opposés.

- Cela peut être obtenu en multipliant chaque membre d'une équation par un nombre approprié et chaque membre de l'autre équation par un autre nombre approprié.

- En additionnant membre à membre les équations obtenues, la variable choisie sera éliminée.

Exemple 3.7:

Résolvons le système (S) suivant par la méthode d'élimination.

$$(S)\begin{cases} x-2y+4z=-6 & \text{notée } E_1 \\ 5x+3y-z=25 & \text{notée } E_2 \\ 3x-4y+2z=4 & \text{notée } E_3 \end{cases}$$

- ▷ **Étape 1: Éliminer une variable pour obtenir un système à deux variables**

  - ⋆ Pour éliminer x, effectuons les opérations suivantes.
  - ⋆ En effectuant E_2-5E_1, nous obtenons $13y-21z=55$, notée E_4.
  - ⋆ En effectuant E_3-3E_1, nous obtenons $2y-10z=22$, notée E_5.

▷ Étape 2: Éliminer une variable dans le système obtenu à l'étape 1

- ⋆ En effectuant $2E_4 - 13E_5$, nous obtenons

$$88z = -176$$
$$z = -2$$

▷ Étape 3: Trouver la valeur des autres variables

- ⋆ En remplaçant z par -2 dans l'équation E_4 ou E_5, nous obtenons $y = 1$.
- ⋆ En remplaçant z par -2 et y par 1 dans l'équation E_1, E_2 ou E_3, nous obtenons $x = 4$. D'où $\text{E.-S.} = \{(4, 1, -2)\}$.

▷ Nous pouvons vérifier que $x = 4$, $y = 1$ et $z = -2$ est une solution du système (S) de l'exemple 1 précédent.

Méthode

La méthode de Gauss-Jordan pour résoudre un système d'équations linéaires consiste à transformer la matrice augmentée correspondant au système d'équations linéaires en une matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan.

Exemple 3.8:

Résolvons le système suivant par la méthode de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 2y + 8z = 0 \\ x - y - 4z = 3 \\ 2x - 3y + 4z = 14 \end{cases}$$

Transformons la matrice augmentée correspondant à ce système en une matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan.

On veut obtenir un nombre différent de 0

Étape 1
On veut obtenir des 0

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 14 \end{array}\right] \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 14 \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{l} L_2 \to L_1 \\ L_1 \to L_2 \end{array}$$

Étape 2
On veut obtenir des 0

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 12 & 8 \end{array}\right] \qquad L_3 - 2L_1 \to L_3$$

Étape 3
On veut obtenir des 0

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_1 + (1/2)L_2 \to L_1 \\ \\ L_3 + (1/2)L_2 \to L_3 \end{array}$$

Exemple 3.9:

Étape 4
On veut obtenir des 1

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \end{array}\right] \qquad L_2 - (1/2)L_3 \to L_2$$

Matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} (1/2)L_2 \to L_2 \\ (1/16)L_3 \to L_3 \end{array}$$

Système compatible avec une solution unique

Le système d'équations linéaires correspondant est $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

d'où E.-S. $= \left\{\left(3, -2, \frac{1}{2}\right)\right\}$

Méthode

La méthode de Gauss-Jordan pour trouver l'inverse d'une matrice carrée A, lorsque cette matrice est inversible, consiste:

- À écrire une matrice augmentée de la forme $[A|I]$.
- Et de la transformer, si c'est possible, à l'aide des opérations élémentaires, de manière à obtenir une nouvelle matrice augmentée équivalente de la forme $[I|B]$, c'est-à-dire

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right]$$

où $B = A^{-1}$.

Exemple 3.10: Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. Déterminons l'inverse de A, si A est inversible.

Étape 1
On veut obtenir un 0

Étape 2
On veut obtenir un 0

Étape 3
On veut obtenir des 1

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{matrix}}_{A} \,\vdots\, \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right] \sim \left[\begin{matrix} 2 & 8 \\ 0 & 2 \end{matrix} \,\vdots\, \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{matrix}\right] \quad 2L_2 - L_1 \to L_2$$

$$\sim \left[\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \,\vdots\, \begin{matrix} 5 & -8 \\ -1 & 2 \end{matrix}\right] \quad L_1 - 4L_2 \to L_1$$

$$\sim \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \,\vdots\, \underbrace{\begin{matrix} \frac{5}{2} & -4 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{matrix}}_{B}\right] \quad \begin{matrix} (1/2)L_1 \to L_1 \\ (1/2)L_2 \to L_2 \end{matrix}$$

$$\text{d'où } A^{-1} = B = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -4 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 3.11: Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$. Déterminer A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan, si A est inversible.

Transformons, si c'est possible, la matrice augmen tée correspondante en une matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan.

Étape 1
On veut obtenir des 0

Étape 2
On veut obtenir des 0

Étape 3
On veut obtenir des 0

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{matrix}}_{A} \left|\, \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right.\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -11 & 8 \\ 0 & -4 & 0 \end{matrix} \left|\, \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix}\right.\right] \qquad \begin{matrix} L_2 - 4L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{matrix} 11 & 0 & 2 \\ 0 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & -32 \end{matrix} \left|\, \begin{matrix} -1 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 11 \end{matrix}\right.\right] \qquad \begin{matrix} 11L_1 + 3L_2 \to L_1 \\ \\ 11L_3 - 4L_2 \to L_3 \end{matrix}$$

Étape 4
On veut obtenir des 1

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 176 & 0 & 0 & -22 & 44 & 11 \\ 0 & -44 & 0 & -22 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -32 & -6 & -4 & 11 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 16L_1 + L_3 \to L_1 \\ 4L_2 + L_3 \to L_2 \end{array}$$

$$\sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right.}_{I} \underbrace{\left|\begin{array}{ccc} \frac{-1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{-11}{32} \end{array}\right]}_{A^{-1}} \quad \begin{array}{l} (1/176)L_1 \to L_1 \\ (-1/44)L_2 \to L_2 \\ (-1/32)L_3 \to L_3 \end{array}$$

D'où $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{-11}{32} \end{bmatrix}$. L'étudiant peut vérifier que $AA^{-1} = I$.

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- ibrahima.dione@umoncton.ca
- Disponibilités:
  - ⋆ Lundi 10:00 - 12:00, MRR B-214
  - ⋆ Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214
  - ⋆ Jeudi 08H00 - 10H00, MRR B-214
- Manuel du cours: