

SÉRIE 8 - Algèbre linéaire (MATH 2673)

Exercice 1

Soit A une matrice réelle, carrée d'ordre n , symétrique. On dit que A est définie positive si

$$X^T A X > 0, \forall X \in \mathbb{R}_c^n, X \neq 0.$$

Soit A une matrice, carrée d'ordre n , définie positive. Montrez que la fonction qui associe à chaque couple $(X, Y) \in \mathbb{R}_c^n \times \mathbb{R}_c^n$ la valeur réelle $\langle X, Y \rangle = X^T A Y$, définit un produit scalaire sur \mathbb{R}_c^n .

Exercice 2

Soient V un espace euclidien de dimension n et $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base de V . Soit la matrice $A = (a_{ij})$, où $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$, $i, j = 1, \dots, n$. Montrez que, $\forall u, v \in V$,

$$\langle u, v \rangle = {}_B[u]^T A {}_B[v].$$

Exercice 3

Soit V un espace euclidien, et soit $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ un sous-ensemble de V . Montrez que

$$S^\perp = (\text{Vect}(S))^\perp.$$

Exercice 4

Soit W le sous-espace de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 2, 2)$ et $v_3 = (1, 2, -3, -4)$.

Déterminez une base orthogonale de W .

Exercice 5

Soit $V = C[0, 1]$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt, \text{ où } f, g \in V.$$

Soit W le sous-espace de V engendré par f_0, f_1 et f_2 où $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = t$ et $f_2(t) = t^2$. Déterminez une base orthogonale de W .

Exercice 6

Soit W le sous-espace de \mathbb{R}^5 engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$ et $v_2 = (1, 0, 1, 5, -1)$. Déterminez une base du supplémentaire orthogonal W^\perp de W .