UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

MATH 2013 - Chapitre 3: Les fonctions de plusieurs variables

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

Introduction

- Une fonction d'une variable modélise une quantité qui dépend d'une seule autre quantité.
- Cependant, les grandeurs physiques dépendent souvent de plusieurs variables.
- Dans ce chapitre, nous traitons des fonctions de plusieurs variables [1].

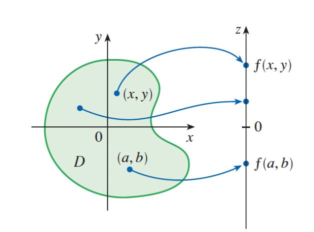
Les fonctions de plusieurs variables

- La température T en un point de la surface de la Terre à un instant donné dépend:
  - de la longitude x,
  - et de la latitude y de ce point.
- On peut donc considérer T comme une fonction de deux variables x et y, ou comme une fonction du couple (x, y).
- On exprime cette dépendance fonctionnelle en écrivant $T = f(x, y)$.

Définition

- Une **fonction de deux variables** est une règle qui assigne à chaque couple de nombres réels (x, y) d'un ensemble D, un nombre réel unique noté $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$



- L'ensemble D est le **domaine** de f,

$$\operatorname{domaine}(f) = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) \in \mathbb{R}\}.$$

- Et l'**image** de f est l'ensemble des valeurs prises par f, soit

$$\operatorname{image}(f) = \{f(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D\}.$$

- On écrit souvent $z = f(x, y)$ pour désigner la valeur de f au point générique (x, y).

  - Les variables x et y sont les **variables indépendantes**,

  - et la variable z est la **variable dépendante**.

- Le domaine de définition D est un sous ensemble du plan *oxy*

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

- Lorsqu'une fonction est donnée par une formule sans que soit précisé son domaine de définition, celui-ci est considéré comme étant $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$

Exemple 1.1:

▷ Soit la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 + 2y^2$.

Réponse:

- ⋆ Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire le plan Oxy.
- ⋆ L'ensemble image de f est $[0, \infty[$.

▷ Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions:

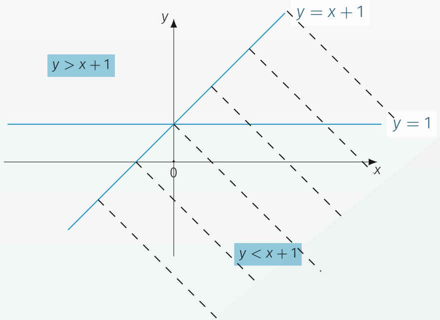
a. $f(x,y) = \frac{\sqrt{x-y+1}}{y-1}$

b. $f(x,y) = y \ln\left(y^2 - x\right)$

Réponse:

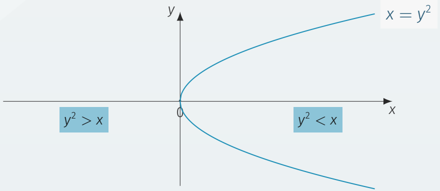
a. Le domaine de définition de $f(x,y) = \frac{\sqrt{x-y+1}}{y-1}$ est

$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 1 \geqslant 0 \text{ et } y \neq 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 1 \geqslant y \text{ et } y \neq 1\right\}$



b. Le domaine de definition de $f(x, y) = y \ln\left(y^2 - x\right)$ est

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x > 0\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y^2\right\}$$



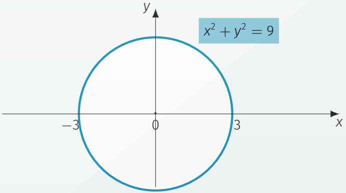
Exemple 1.2: Trouvons le domaine et l'image de $g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Réponse:

a. Le domaine de g est

$$D = \left\{(x,y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geq 0\right\} = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\right\}$$

qui est le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 3.



b. L'image de g est $\left\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x,y) \in D\right\}$.

- ⋆ Puisque z est une racine carrée, alors elle est positive ($z \geq 0$).
- ⋆ D'autre part, on a: $9 - x^2 - y^2 \leq 9 \;\Rightarrow\; z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$.
- ⋆ Par conséquent, l'image de $g(x,y)$ est $\{z \mid 0 \leq z \leq 3\} = [0,3]$.

Définition

Soit f est une fonction de deux variables de domaine D.

- Le **graphe** de f est l'ensemble de tous les points (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ tels que $z = f(x, y)$ et (x, y) appartient à D.

- Autrement dit, le graphe de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$\Big\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\Big\}.$$

Note:

- Le graphe de la fonction d'une seule variable f est une courbe C d'équation $y = f(x)$.

- Tandis que le graphe d'une fonction f de deux variables est une surface S d'équation $z = f(x, y)$.

Exemple 1.3: Traçons le graphe de la fonction $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

Réponse:

- L'équation du graphe de f est

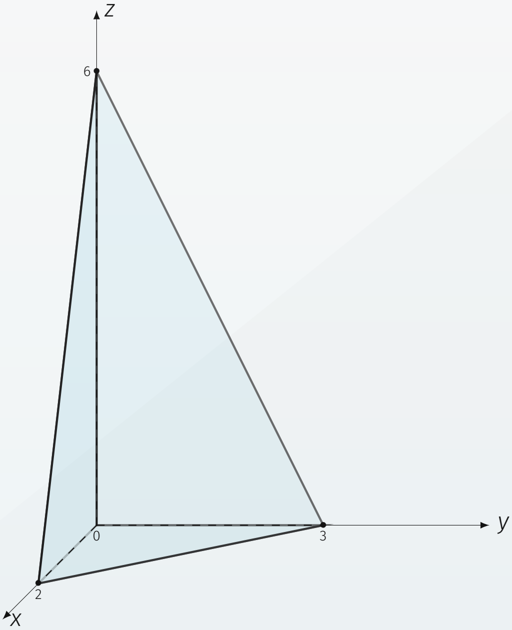
$$z = 6 - 3x - 2y \quad \text{ou} \quad 3x + 2y + z = 6,$$

qui est celle d'un plan.

- Pour représenter graphiquement ce plan, on doit d'abord trouver ses intersections avec les axes de coordonnées.

    - ⋆ En posant $y = z = 0$ dans l'équation, on obtient l'intersection avec l'axe des x au point $(2, 0, 0)$.
    - ⋆ De même, l'intersection avec l'axe des y est au point $(0, 3, 0)$.
    - ⋆ Et l'intersection avec l'axe des z est au point $(0, 0, 6)$.

- On a ainsi la partie du graphe située dans le premier octant:



Note:

- La fonction de cet exemple est un cas particulier de la fonction

$$f(x, y) = ax + by + c$$

appelée fonction linéaire.

- L'équation du graphe d'une telle fonction est un plan

$$z = ax + by + c \quad \text{ou} \quad ax + by - z + c = 0.$$

Exemple 1.4: Trouver le domaine et l'image de la fonction $h(x, y) = 4x^2 + y^2$, puis tracer son graphe.

Réponse:

- On remarque que la fonction $h(x, y)$ est définie pour tous les couples possibles de nombres réels (x, y) et donc son domaine est $\mathbb{R}^2$, soit le plan xy.

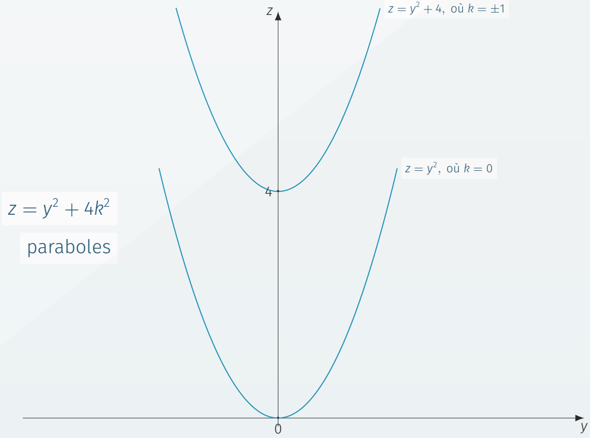
- L'image de h est l'ensemble $[0, \infty[$ de tous les nombres réels non négatifs. En effet:

  - ⋆ $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$, de sorte que $h(x, y) \geq 0$ pour tout x et tout y.

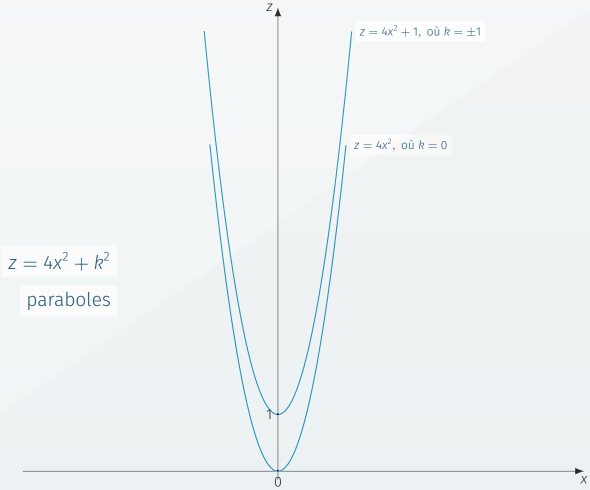
  - ⋆ De plus, $h(x, y)$ prend des valeurs arbitrairement grandes lorsque x et y deviennent grands.

Pour tracer le graphe de la fonction $f(x, y) = 4x^2 + y^2$, on va déterminer les sections transversales de la surface $z = f(x, y)$.

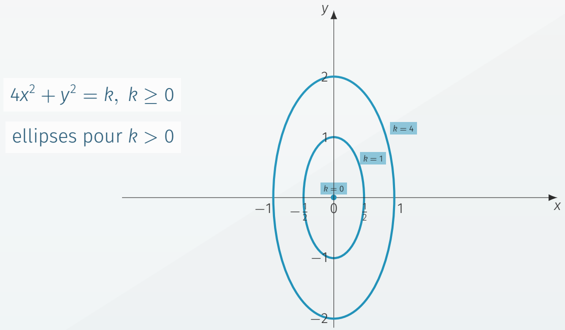
- L'équation de cette surface est $z = 4x^2 + y^2$. En prenant $x = k$ (où k est une constante), on obtient $z = 4k^2 + y^2$.



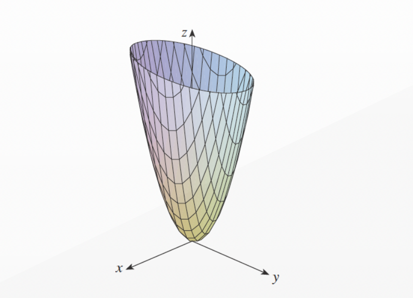
- Pour $y = k$, on a $z = 4x^2 + k^2$:



- Pour $z = k$, on a $4x^2 + y^2 = k$ ($k \geq 0$).



- À l'aide de ces sections transversales, il est possible de tracer la surface $z = 4x^2 + y^2$:



- Cette surface porte le nom de paraboloïde elliptique.

Les courbes de niveau

- Jusqu'ici, on a représenté visuellement des fonctions à l'aide de graphes.
- Voyons maintenant une troisième façon, empruntée aux cartographes: le diagramme de courbes de niveau.

Définition

- Les **courbes de niveau** d'une fonction f de deux variables sont des courbes d'équations $f(x, y) = k$, où k est une constante.
- Autrement dit la **courbe de niveau k de f** est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x, y) \mid f(x, y) = k\}$$

- La courbe de niveau $f(x, y) = k$ est l'ensemble de tous les points du domaine de f pour lesquels f prend une valeur k donnée.
- On utilise aussi le terme **ensembles de niveau** pour désigner les courbes de niveau.

Exemple 1.5: Traçons les courbes de niveau de la fonction

$$f(x,y) = 6 - 3x - 2y, \quad \text{pour} \quad k = -6, 0, 6, 12.$$

Réponse:

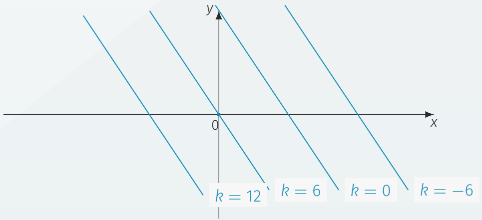
- Les courbes de niveau sont

$$6 - 3x - 2y = k \quad \text{ou} \quad 3x + 2y + (k-6) = 0.$$

- Ces courbes forment une famille de droites de pente $-3/2$.

- Les quatre courbes de niveau pour $k = -6, 0$, 6 et 12 sont:

$$3x + 2y - 12 = 0, \; 3x + 2y - 6 = 0,$$
$$3x + 2y = 0, \; 3x + 2y + 6 = 0.$$



- Les courbes de niveau sont des droites parallèles et espacées.

Les courbes de niveau d'une fonction linéaire $f(x, y) = ax + by + c$ sont:

- des droites parallèles,
- également espacées (pour des valeurs de k à intervalles réguliers),
- et d'équation lorsque $b \neq 0$ donnée par

$$ax + by + c = k \text{ ou encore } y = -\frac{a}{b}x + \frac{k - c}{b}.$$

Exemple 1.6: Traçons les courbes de niveau de la fonction

$$g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

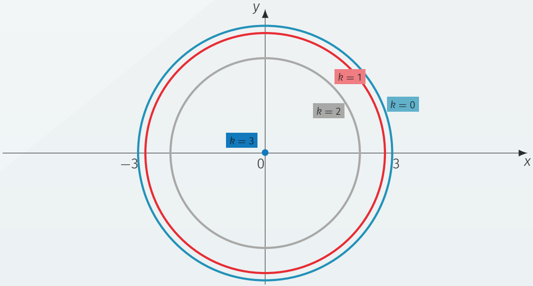
Réponse:

- Les courbes de niveau sont

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 9 - k^2.$$

- Ces courbes forment une famille de cercles concentriques de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{9 - k^2}$.

- La figure ci-dessous montre ces cercles pour $k = 0, 1, 2, 3$.

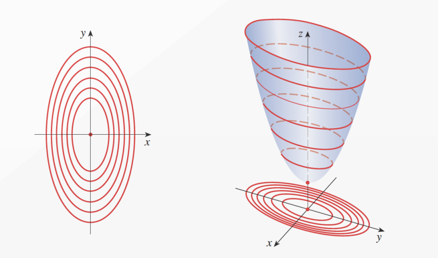


Exemple 1.7: Traçons les courbes de niveau de la fonction $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$.

Réponse:

- Les courbes de niveau sont: $4x^2 + y^2 + 1 = k$ ou $\frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$.

- Pour $k > 1$, ces courbes sont des ellipses de demi-axes $\frac{1}{2}\sqrt{k-1}$ et $\sqrt{k-1}$ en x et y respectivement.



- La figure de gauche montre un diagramme de courbes de niveau de la fonction h tracées à l'aide d'un ordinateur.

- La figure de droite montre ces courbes de niveau élevées jusqu'au graphe de h (paraboloïde elliptique) où elles correspondent à des traces horizontales.

- Cette figure montre la construction du graphe de h à partir des courbes de niveau.

Définition

Une **fonction de trois variables** est une règle qui assigne à chaque triplet (x, y, z) dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ un nombre réel unique noté $f(x, y, z)$.

- Par exemple, la température T en un point de la surface de la Terre:
  - dépend de la longitude x,
  - de la latitude y de ce point,
  - ainsi que de l'instant t.
- On peut ainsi écrire $T = f(x, y, t)$.

Exemple 1.8: Trouvons le domaine de f si $f(x,y,z) = \ln(z-y) + xy\sin(z)$.

Réponse:

- L'expression de $f(x,y,z)$ est définie si et seulement si $z-y>0$, de sorte que le domaine de f est

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z-y>0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z>y\right\} \end{aligned}$$

- Le domaine D représente un **demi-espace** constitué de tous les points au-dessus du plan $z=y$.

Note:

- La représentation visuelle d'une fonction f de trois variables par son graphe est impossible!

- Car celui-ci serait contenu dans un espace à quatre dimensions.

- Cependant, on peut se faire une idée du comportement de f en examinant ses **surfaces** (ou **ensembles**) **de niveau**, qui sont des surfaces d'équations $f(x, y, z) = k$, où k est une constante.

- Si le point (x, y, z) se déplace sur une surface de niveau, la valeur de $f(x, y, z)$ demeure constante.

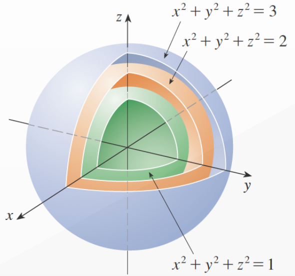
Exemple 1.9: Trouvons les surfaces de niveau de la fonction

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Réponse:

- Les surfaces de niveau sont $x^2 + y^2 + z^2 = k$ où $k \geq 0$.

- Ces surfaces forment une famille de sphères concentriques de rayon $\sqrt{k}$ et centrées à l'origine O.



- Lorsque (x, y, z) varie sur n'importe quelle sphère de centre O, la valeur de $f(x, y, z)$ demeure constante.

On peut considérer des fonctions d'un nombre quelconque de variables.

- Une **fonction de n variables** est une règle qui assigne un nombre $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ à un n-uplet de nombres réels.
- L'ensemble de tous ces n-uplets se note $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.10:

- Par exemple, supposons qu'une entreprise utilise n ingrédients différents pour fabriquer un produit alimentaire.
  - ⋆ Si c_i est le coût unitaire du $i^{\text{ième}}$ ingrédient, $i = 1, \cdots, n$,
  - ⋆ et qu'il faut x_i unités pour chaque $i^{\text{ième}}$ ingrédient, $i = 1, \cdots, n$.

- ⋆ Le coût total C des ingrédients est alors une fonction des n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$C = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Note: La fonction f est une fonction à valeurs réelles dont le domaine est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Les limites et la continuité de fonctions de deux variables

- Comparons le comportement des fonctions

$$f(x,y) = \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

lorsque x et y tendent vers 0, c'est-à-dire le point (x,y) tend vers $(0,0)$.

Note: On notera qu'aucune des deux fonctions n'est définie à l'origine.

- Ce tableau donne les valeurs de $f(x,y)$, avec trois décimales exactes, pour des points (x,y) près de l'origine.

x/y	$-1,0$	$-0,5$	$-0,2$	0	$0,2$	$0,5$	$1,0$
$-1,0$	$0,455$	$0,759$	$0,829$	$0,841$	$0,829$	$0,759$	$0,455$
$-0,5$	$0,759$	$0,959$	$0,986$	$0,990$	$0,986$	$0,959$	$0,759$
$-0,2$	$0,829$	$0,986$	$0,999$	$1,000$	$0,999$	$0,986$	$0,829$
0	$0,841$	$0,990$	$1,000$		$1,000$	$0,990$	$0,841$
$0,2$	$0,829$	$0,986$	$0,999$	$1,000$	$0,999$	$0,986$	$0,829$
$0,5$	$0,759$	$0,959$	$0,986$	$0,990$	$0,986$	$0,959$	$0,759$
$1,0$	$0,455$	$0,759$	$0,829$	$0,841$	$0,829$	$0,759$	$0,455$

- Ce tableau donne les valeurs de $g(x, y)$, avec trois décimales exactes, pour des points (x, y) près de l'origine.

x/y	$-1,0$	$-0,5$	$-0,2$	0	$0,2$	$0,5$	$1,0$
$-1,0$	$0,000$	$0,600$	$0,923$	$1,000$	$0,923$	$0,600$	$0,000$
$-0,5$	$-0,600$	$0,000$	$0,724$	$1,000$	$0,724$	$0,000$	$-0,600$
$-0,2$	$-0,923$	$-0,724$	$0,000$	$1,000$	$0,000$	$-0,724$	$-0,923$
0	$-1,000$	$-1,000$	$-1,000$		$-1,000$	$-1,000$	$-1,000$
$0,2$	$-0,923$	$-0,724$	$0,000$	$1,000$	$0,000$	$-0,724$	$-0,923$
$0,5$	$-0,600$	$0,000$	$0,724$	$1,000$	$0,724$	$0,000$	$-0,600$
$1,0$	$0,000$	$0,600$	$0,923$	$1,000$	$0,923$	$0,600$	$0,000$

- Lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$, les valeurs de $f(x, y)$ semblent tendre vers 1, tandis que les valeurs de $g(x, y)$ ne tendent vers aucun nombre.

▷ Ces constatations, qui reposent sur des observations numériques, sont en fait correctes et on peut écrire que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = 1 \text{ et que } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ n'existe pas.}$$

Note: En général, on utilise la notation

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

- pour indiquer que les valeurs de $f(x,y)$ tendent vers le nombre L lorsque le point (x,y) tend vers le point (a,b) selon n'importe quel chemin dans le domaine de f.
- Autrement dit, on peut rendre les valeurs de $f(x,y)$ aussi proches de L qu'on le désire en prenant des points (x,y) suffisamment proches du point (a,b), mais non égaux à (a,b).

Définition

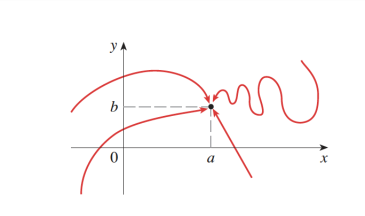
On dit que la **limite** de $f(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers (a,b) est L et on écrit

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

si on peut rendre les valeurs de $f(x,y)$ aussi proches que l'on veut de L pourvu que (x,y) soit suffisamment proches du point (a,b), mais non égale à (a,b).

Note:

- Il n'est pas nécessaire que $f(x,y)$ soit déifinie au point (a,b) pour parler de la limite de f en ce point.
- Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe, alors elle est unique et est indépendante de la manière selon laquelle (x,y) s'approche de (a,b).



- Si $f(x, y)$ a des limites différentes lorsque (x, y) tend vers (a, b) pour deux chemins différents, alors $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ **n'existe pas**.

Exemple 2.1: Montrons que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

Réponse:

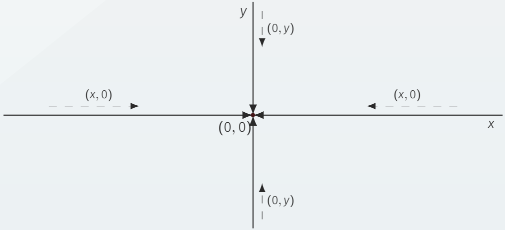
- On pose $f(x,y) = (x^2 - y^2)\,/\,(x^2 + y^2)$.

  ⋆ On fait d'abord tendre (x,y) vers $(0,0)$ selon l'axe des x. Dans ce cas, $y = 0$ et $f(x,0) = x^2/x^2 = 1$ pour tout $x \neq 0$, d'où

  $$f(x,y) \to 1 \ \text{ lorsque } \ (x,0) \to (0,0) \ \text{ selon l'axe des } x.$$

  ⋆ On fait ensuite tendre (x,y) vers $(0,0)$ selon l'axe des y. Dans ce cas, $x = 0$ et $f(0,y) = -y^2/y^2 = -1$ pour tout $y \neq 0$, d'où

  $$f(x,y) \to -1 \ \text{ lorsque } \ (0,y) \to (0,0) \ \text{ selon l'axe des } y.$$



- Puisque f a deux limites différentes selon deux chemins différents, la limite n'existe pas.

Exemple 2.2: Si $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, est-ce que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe?

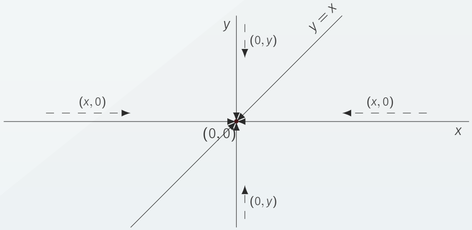
Réponse:

- Si $y = 0$, alors $f(x,0) = 0/x^2 = 0$. Alors,

$$f(x,y) \to 0 \text{ lorsque } (x,0) \to (0,0) \text{ selon l'axe des } x.$$

- Si $x = 0$, alors $f(0,y) = 0/y^2 = 0$, d'où

$$f(x,y) \to 0 \text{ lorsque } (0,y) \to (0,0) \text{ selon l'axe des } y.$$



- L'obtention de deux limites identiques selon les axes de coordonnées ne garantit pas que la limite est 0.

- Maintenant, on fait tendre (x, y) vers $(0, 0)$ selon une autre droite, soit $y = x$. Pour tout $x \neq 0$,

  $$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

  Ainsi, $f(x, y) \to \frac{1}{2}$ lorsque $(x, y) \to (0, 0)$ selon la droite $y = x$.

- Comme on a obtenu des limites différentes selon des chemins différents, la limite n'existe pas.

Exemple 2.3: Si $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, est-ce que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe?

Réponse:

- En s'inspirant de la solution de l'exemple précédent, on fait tendre $(x,y) \to (0,0)$ selon une droite quelconque non verticale qui passe par l'origine.
- Une telle droite a pour équation $y = mx$, où m est la pente, et on a

$$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \frac{m^2x}{1+m^4x^2}.$$

- D'où, on obtient la limite suivante

$$f(x,y) \to 0 \text{ lorsque } (x,y) \to (0,0) \text{ selon la droite } y = mx.$$

- Donc, f a la même valeur limite le long de toute droite non verticale passant par l'origine.
- Cependant, cela ne montre pas que la limite donnée est 0.

- Car si on pose maintenant $(x, y) \to (0, 0)$ le long de la parabole $x = y^2$, on a

$$f(x, y) = f\left(y^2, y\right) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}.$$

- D'où, on obtient alors la limite suivante

$$f(x, y) \to \frac{1}{2} \text{ lorsque } (x, y) \to (0, 0) \text{ le long de } x = y^2.$$

- Puisque différents chemins conduisent à différentes valeurs limites, la limite n'existe pas.

L'exemple précédent montre qu'il ne suffit pas d'examiner la limite le long de droites, mais bien le long de tout chemin menant au point considéré.

Note:

- Les propriétés des limites de fonctions d'une variable s'étendent aux fonctions de deux variables:
  - ⋆ La limite d'une somme est égale à la somme des limites.
  - ⋆ La limite d'un produit est égale au produit des limites, etc.
- En particulier, les égalités suivantes sont vraies:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c,$$

où c est une constante.

▷ Le théorème du sandwich demeure valide.

Exemple 2.4: Trouvons $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ si elle existe.

Réponse:

- Puisque $0 \leq y^2$, alors $x^2 \leq x^2 + y^2$ et donc

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \tag{1}$$

- À partir de l'équation (1), on obtient en multipliant par $3|y|$

$$0 \leq \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \leq 3|y|.$$

- Or $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3|y| = 0$,
- alors le théorème du sandwich implique que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} = 0.$$

- Ce qui à son tour implique que la limite de la fonction est nulle.

Définition

- Une fonction de deux variables est dite continue en (a,b) si et seulement si
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$
- On dit que f est continue dans $\boldsymbol{D}$ si f est continue en tout point (a,b) de $\boldsymbol{D}$.

Note:

- Les propriétés des limites permettent de démontrer que:
  - ⋆ les sommes et les différences,
  - ⋆ les produits et les quotients,

  de fonctions continues sont continus sur leurs domaines.

- Une **fonction polynomiale de deux variables** (un polynôme) est une somme de termes de la forme $cx^m y^n$, où c est une constante et m et n sont des nombres entiers non négatifs. Par exemple

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6 \text{ est un polynôme.}$$

Tout polynôme est continu dans son domaine qui est ici $\mathbb{R}^2$.

- Une **fonction rationnelle** est un quotient de polynômes. Par exemple

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2} \text{ est une fonction rationnelle.}$$

Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine parce qu'elle est un quotient de fonctions continues.

Exemple 2.5: Évaluons $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y\right)$.

Réponse:

- Comme la fonction $f(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ est un polynôme, elle est continue partout (c'est-à-dire sur $\mathbb{R}^2$).

- On peut alors trouver sa limite par substitution directe:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y\right) &= f(1,2) \\ &= 1^2 \times 2^3 - 1^3 \times 2^2 + 3 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 11.\end{aligned}$$

Exemple 2.6: Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Déterminer le domaine sur lequel f est continue.

Réponse:

- Pour $(x,y) \neq (0,0)$, alors $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ est une fonction rationnelle et donc continue sur

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\right\}$$

- Or, sachant que la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

n'existe pas, alors f n'est pas continue en $(0,0)$.

- Par suite, f est seulement continue sur D.

Exemple 2.7: Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Réponse:

- Pour $(x,y) \neq (0,0)$, alors $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ est continue sur
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\right\},$$
car c'est une fonction rationnelle.

- D'autre part, on a vu que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$, donc
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

- D'où, f est contnue au point $(0,0)$.

- Par suite, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Note:

- La composition de deux fonctions continues pour en obtenir une troisième est continue.

- C'est-à-dire, la composition $h = g \circ f$ définie par

$$h(x, y) = g(f(x, y))$$

  est une fonction continue si:

  - ⋆ f est une fonction continue de deux variables,
  - ⋆ et si g est une fonction continue d'une variable.

Exemple 2.8: Déterminez le domaine sur lequel la fonction $h(x,y) = \arctan(y/x)$ est continue et calculez la limite $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \arctan(y/x)$.

Réponse:

- On peut écrire $h = g \circ f$ où $f(x,y) = \frac{x}{y}$ et $g(t) = \arctan(t)$.

- Comme $f(x,y) = \frac{x}{y}$ est continue sur son domaine de définition

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\right\},$$

- Et que $g(t) = \arctan(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors $h = g \circ f$ est continue sur D.

- Sachant que $h(x,y) = \arctan(y/x)$ est continue sur D et que $(1,-1) \in D$, alors

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \arctan(y/x) = \arctan(-1/1) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)

- Disponibilités:

  - Lundi 10H00 - 12H00, MRR B-214
  - Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214
  - Jeudi 08H00 - 10H00, MRR B-214

- Manuels du cours:

[1] J. Stewart.
Analyse concepts et contextes : Volume 2. Fonctions de plusieurs.
DE BOECK, 2011.