



## Devoir 3 - Optimisation (MATH 3163)

À remettre 1 avril 2024

À 15h00 au plus tard

**● Professeur :** Ibrahima Dione

**Nom(s) personne étudiante :** \_\_\_\_\_

**Numéro personne étudiante :** \_\_\_\_\_

Le devoir est composé de **4 questions**, pour un total de 25 points.

- Ceci est un devoir à livres ouverts et les notes du cours sont permises.
- Répondez aux questions dans l'espace fourni.
- Imprimez le devoir en recto et utilisez le verso des feuilles si nécessaire.
- Ne sera pas accepté, tout travail rendu sur un format autre que celui-ci.

---

**Question I**

Soit  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \rho\}$ . On note  $P_S$  l'opérateur de projection sur  $S$ . Montrer que

$$P_S(x) = \begin{cases} x & \text{si } \|x\| \leq \rho \\ \rho \frac{x}{\|x\|} & \text{si } \|x\| > \rho \end{cases} \quad (1)$$

---

## Question II

Soit  $U$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . On désigne par  $P_U(x)$  la projection de  $x$  sur  $U$ . Montrer que

$$(P_U(x) - x, y) = 0, \forall y \in U.$$

---

**Question III**

Soit  $C$  une matrice de format  $m \times n$ , de rang  $m$ , avec  $m \leq n$ . Soit

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx = 0\}.$$

On désigne par  $P_S(x)$  la projection de  $x$  sur  $S$ . Montrer que

$$P_S(x) = [I - C^T(CC^T)^{-1}C]x$$

où  $I$  désigne la matrice identité d'ordre  $n$ .

---

## Question IV

Déterminer la solution du problème suivant :

$$\min_{\|x\|^2=1} \sum_{i=1}^n x_i$$

où  $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ .