UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Calcul Différentiel (MATH 1073) - Annexe C: Trigonométrie

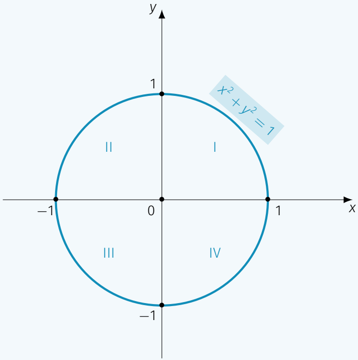
Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

Les angles

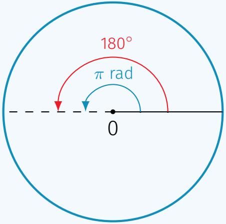
1. Un **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1 centré à l'origine du plan cartésien.



2. Les axes partagent le cercle en quatre parties égales appelées **quadrants**, numérotés de I, II, III à IV.

- On mesure les angles en **degrés** ou en **radians** (notés *rad*).
- L'angle qui correspond à un tour complet mesure 360° ou 2π *rad*. Ainsi

3. $\pi\ rad = 180^\circ$



4. $1\ rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\ rad \approx 0.017\ rad$

Exemple 1.1:

- ▷ Quelle est la mesure en radians de $60°$.

- ▷ Exprimez en degrés $5\pi/4$ radians.

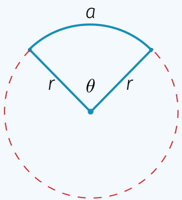
- ▷ Sauf mention contraire, les angles sont toujours mesurés en radians.

▷ Le tableau suivant présente la correspondance entre les radians et les degrés de quelques angles couramment utilisés.

Degrés	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

5. Pour un secteur circulaire d'angle θ, de rayon r et de longueur d'arc a, on a les formules (**seulement valables si θ est en *rad***):

$$\theta = \frac{a}{r} \qquad a = r\theta$$



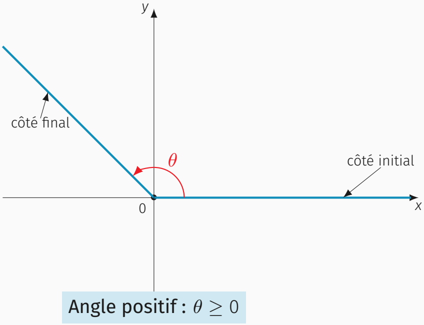
Exemple 1.2:

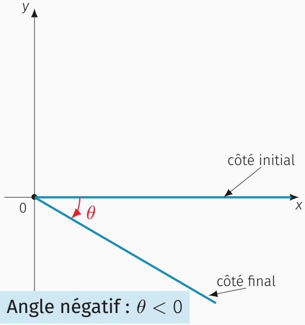
- Dans un cercle dont le rayon mesure 5 *cm*, combien mesure l'angle qui intercepte un arc de 6 *cm*?

- Dans un cercle de 3 *cm* de rayon, quelle est la longueur de l'arc intercepté par un angle de $3\pi/8$ *rad*?

- Un angle est en **position standard** lorsque son sommet est l'origine d'un système de coordonnées et son côté initial sur la partie positive de l'axe $0x$.

- On obtient un angle **positif** en faisant tourner le côté initial dans le **sens contraire** des aiguilles d'une montre.





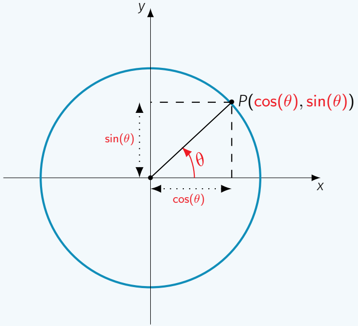
- Les angles **négatifs** sont obtenus par une rotation dans le **sens des aiguilles** d'une montre.

Les fonctions trigonométriques

Définition

Si P un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle θ.

- Le **cosinus** de θ est égal à l'abscisse du point P.

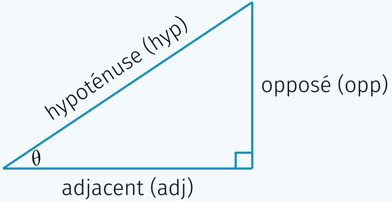


- Le **sinus** de θ est égal à l'ordonnée du point P.

6. Les fonctions trigonométriques d'un **angle aigu** θ, sont obtenues par le rapport des longueurs des côtés du triangle rectangle:

$$\sin\theta = \frac{opp}{hyp} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{hyp}{opp} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{opp}{adj}$$

$$\cos\theta = \frac{adj}{hyp} \qquad \sec\theta = \frac{hyp}{adj} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{adj}{opp}$$

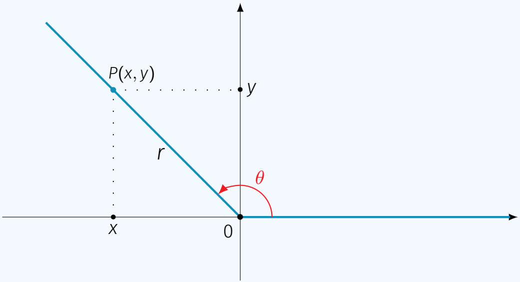


Angle aigu : θ

7. Les fonctions trigonométriques d'un **angle θ quelconque** en position standard, basées sur les coordonnées du point $P(x, y)$, sont obtenues par:

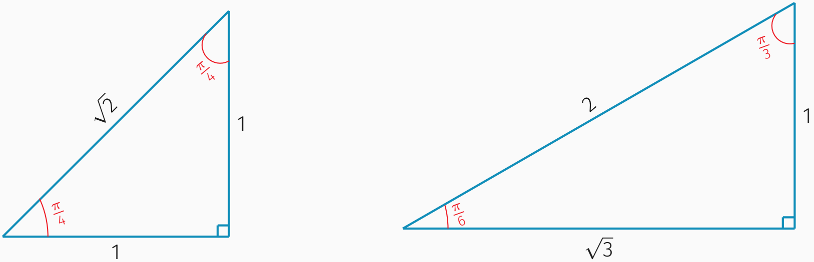
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{x}{y}$$



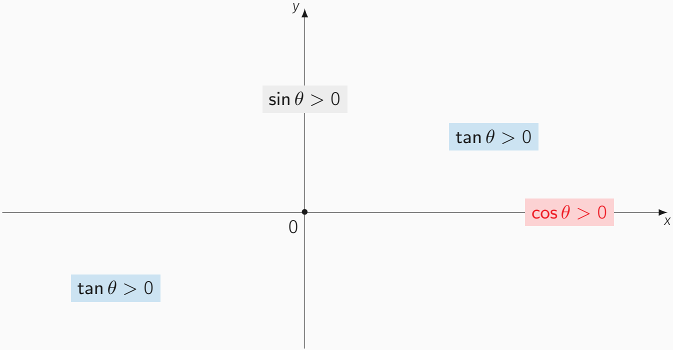
Angle quelconque θ en position standard, basé sur le point $P(x, y)$ où $|OP| = r$

- Ces triangles rectangles particuliers permettent d'obtenir la valeur exacte des rapports trigonométriques de certains angles:



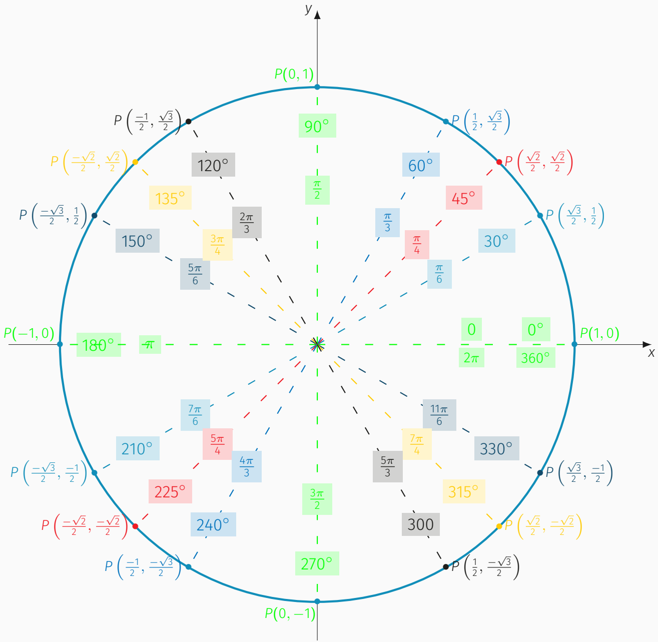
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

- Signe des fonctions trigonométriques, suivant la position du côté final de l'angle sur les quadrants:



Exemple 2.1: Écrire la valeur exacte des rapports trigonométriques pour $\theta = 2\pi/3$.

Coordonnées des points remarquables du cercle trigonométrique



Les identités trigonométriques

8. Voici les plus élémentaires identités trogonométriques:

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

9. L'une des identités trogonométriques les plus utiles est:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

10. Ces identités expriment les caractères impair de la fonction sinus et pair de la fonction cosinus:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

11. Les identités suivantes sont appelées **formules d'addition**:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

12. Ces identités sont appelées **formules de soustraction**:

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

13. Ces identités sont appelées **formules de l'angle double**:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

14. Gâce à l'identité $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, nous obtenons deux autres formes de la formule de l'angle double pour le cosinus:

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$
$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

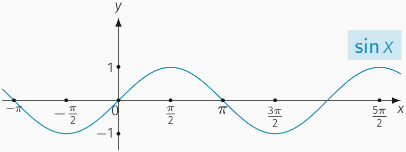
15. La résolution de ces équations par rapport à $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$ conduit aux deux **formules de l'angle moitié**:

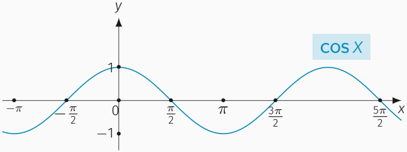
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

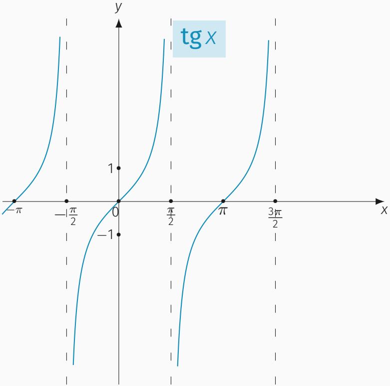
Exemple 3.1: Déterminez les valeurs de x comprises entre 0 et 2π telles que $\sin(x) = \sin(2x)$.

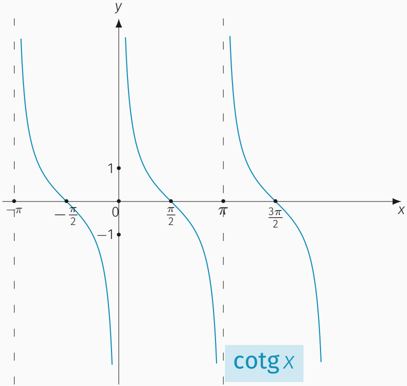
Les graphiques des fonctions trigonométriques

Les graphiques des fonctions trigonométriques









Exercices suggérés

Exercices suggérés

1. Calculez $\cos t$ et $\operatorname{tg} t$ si $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$.

2. Résoudre, sur l'intervalle $[0; 2\pi[$, l'équation suivante:
$$2\sin^2 x + 5\cos x - 4 = 0.$$

3. Résoudre $(1 - \sin x)(1 + \cos x) = 0$ dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

4. Trouvez toutes les valeurs de x dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ qui satisfont à l'inéquation $2\cos x - 1 > 0$.

5. Résolvez l'équation trigonométrique $(\operatorname{tg} x - 1)(\sin x + 1) = 0$.

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)
- Disponibilité:

  Lundi 13:00 - 15:00, MRR B-214

  Mercredi 13H00 - 15H00, MRR B-214

  Jeudi 12:00 - 13:15, MRR B-214