UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Calcul Intégral (MATH 1173) - Chapitre 2: L'intégrale définie

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

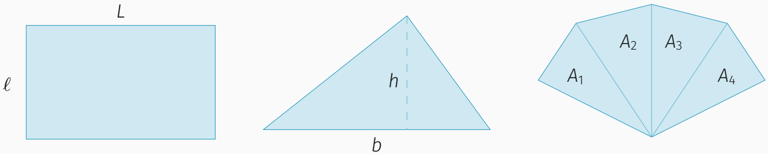
Introduction

- ✓ L'intégrale définie est la base du calcul intégral.
- ✓ Nous l'introduirons par des problèmes d'aire et de distance parcourue.
- ✓ Et nous terminerons par le «**Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral**».
- ✓ Ce théorème décrit le lien entre calcul différentiel et intégral.

Des aires et des distances

Le problème de l'aire

- L'aire du rectangle s'obtient par le produit de sa longueur par sa largeur.

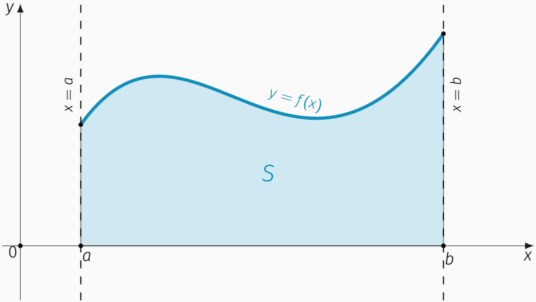


$A = L\ell$ $\quad$ $A = \frac{1}{2}bh$ $\quad$ $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

- Celui du triangle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur.

- Et celui d'un polygone s'obtient en le décomposant en triangles.

- En revanche, déterminer l'air d'une région dont les bords sont courbes n'est pas aussi facile.



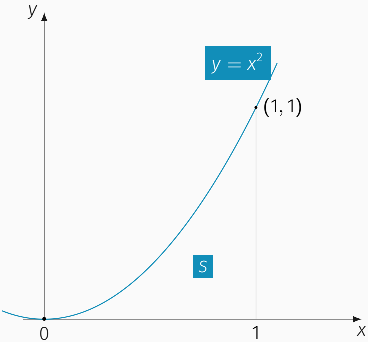
$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

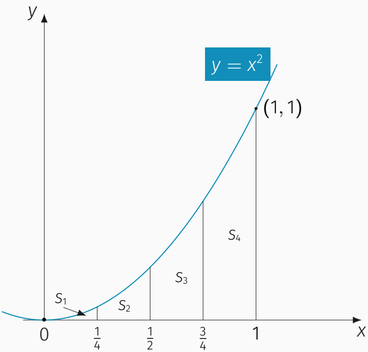
- Pour obtenir la tangente (voir MATH 1073), nous l'avions définie comme étant la limite d'une suite de sécantes.

- En suivant la même démarche pour l'air, nous commençerons par une **évaluation approximative** de la région S au moyen de rectangles.

Estimation d'une aire

- Peut-on utiliser des rectangles pour estimer l'aire sous la parabole $y = x^2$ depuis 0 jusqu'à 1?



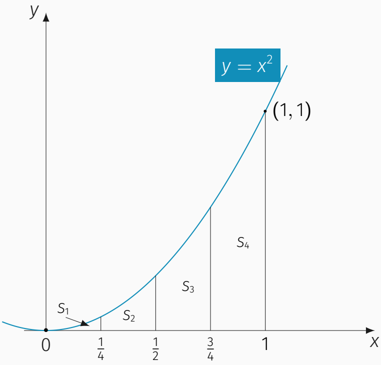


- Il est clair que l'aire de S est située entre 0 et 1, puisque S est contenue dans le carré de coté 1.

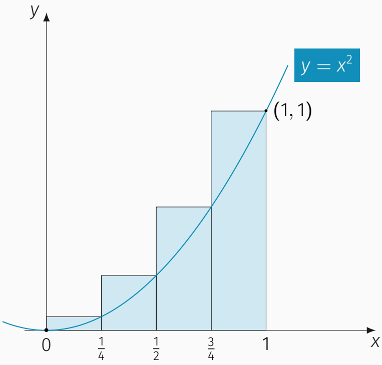
- On peut mieux la cerner en divisans S en quatre tranches S_1, S_2, S_3 et S_4 par les verticales $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{3}{4}$.

- On peut approcher chaque tranche par un rectangle de même base que la tranche et de hauteur égale au bord droit de la tranche.

- La largeur de chaque rectangle est égale à $\frac{1}{4}$ et leur hauteur à $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ et 1^2.



Subdivision de S en tranches $S_i, i = 1, 2, 3, 4$



Approximation des tranches par la droite

- Si nous désignons par D_4 la somme des aires de ces rectangles, on a

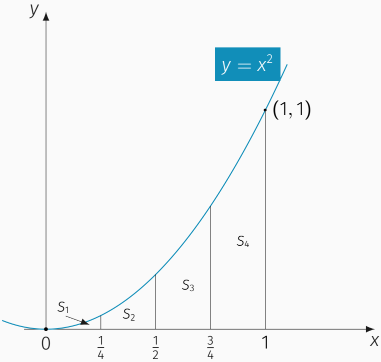
$$D_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot (1)^2 = \frac{15}{32} = 0.46875$$

- Comme l'aire de S est inférieur à D_4, nous pouvons écrire

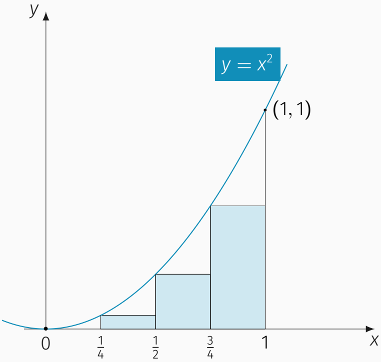
$$A_{\text{aire}}(S) < 0.46875$$

- On peut également approcher chaque tranche de S par un rectangle de même base que la tranche et de hauteur égale au bord gauche.

- Le rectangle à l'extrémité gauche a disparu car sa hauteur est nulle.



Subdivision de S en tranches $S_i, i = 1, 2, 3, 4$



Approximation des tranches par la gauche

- Si nous désignons par G_4 la somme des aires de ces rectangles, on a

$$G_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$$

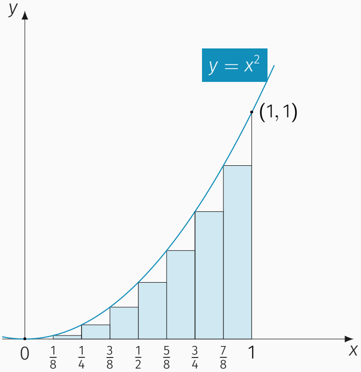
- Comme l'aire de S est supérieur à G_4, nous pouvons écrire

$$A_{\text{aire}}(S) > 0.21875$$

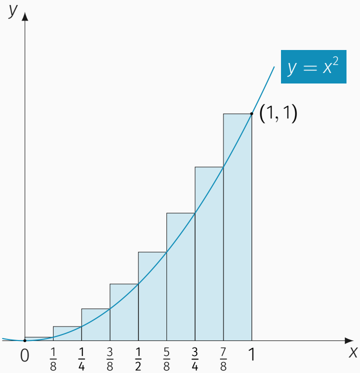
Nous disposons désormais $0.21875 < A_{\text{aire}}(S) < 0.46875$.

- Répétons cette approche avec un plus grand nombre de bandes.

- Si la région S est divisée en huit bandes de même largeur, on observe:



Avec les extrémités gauches



Avec les extrémités droites

- ▷ La somme des aires des plus petits rectangle (G_8) et celle des plus grands (D_8) fournissent l'approximation par **défaut** et par **excès** de $A_{aire}(S)$:

$$0.2734375 < A_{aire}(S) < 0.3984375$$

Pour répondre à la question posée, l'aire exacte de S se situe entre 0.2734375 et 0.3984375.

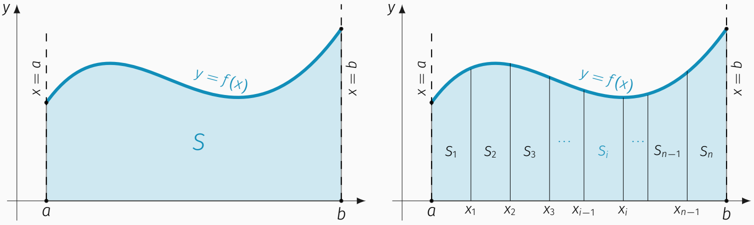
- ▷ En augmentant encore les bandes, on arrive à une meilleure estimation:

n	G_n	D_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

- Le tableau montre les résultats produits par ordinateur pour n bandes.

Note: La moyenne de ces deux dernières estimations fournit une bonne approximation: $A_{aire}(S) \approx 0.3333335$.

- Appliquons cette idée à la région S de forme plus générale encore:



- Subdivisons d'abors S en n tranches $S_1, S_2, \cdots, S_n$ d'égales largeurs.
- L'intervalle $[a, b]$ mesure $b - a$, la largeur de chaque tranche mesure

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

- Ces tranches divisent l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ [x_2, x_3],\ \cdots,\ [x_{n-1}, x_n],$$

où les extrémités de l'intervalle $[a, b]$ sont données par $x_0 = a$ et $x_n = b$.

- Les **extrémités droites** des sous-intervalles sont

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \Delta x, \\ x_2 &= a + 2\Delta x, \\ x_3 &= a + 3\Delta x, \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Approchons la $i^{\text{ième}}$ tranche S_i par un rectangle de largeur Δx et de longueur $f(x_i)$, la valeur de f en l'extrémité droite.

- L'aire de ce $i^{\text{ième}}$ rectangle vaut donc $f(x_i)\Delta x$.

- Ainsi, l'aire de S est approximée par la somme des aires $f(x_i)\Delta x$

$$\begin{aligned} D_n &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x. \end{aligned}$$

Définition

- L'**aire** A de la région S située sous le graphique de la fonction continue f est la limite de la somme des aires des rectangles d'approximation:

$$A = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Note:

- La limite est la même si nous choisissons les extrémités gauches:

$$A = \lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x.$$

- Choisissant *n'importe quel point* x_i^* du $i^{\text{ième}}$ sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$:

$$A = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Une aire exprimée par une limite

Exemple 1.1: Soit A l'aire de la région située sous la courbe représentative de la fonction $f(x) = e^{-x}$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2$.

- Cherchez une expression de l'aire comme limite d'une somme en prenant les extrémités droites. Ne calculez pas la limte.

- Estimez l'aire en choisissant les points médians, d'abord sur quatre sous-intervalles, ensuite sur dix.

Question : Calculer la distance parcourue par un mobile durant un certain temps connaissant sa vitesse à tout moment.

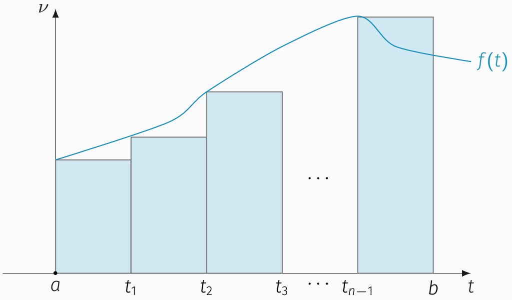
- Si la vitesse était constante, il serait facile de répondre à la question:

$$\text{distance} \;=\; \text{vitesse} \;\times\; \text{temps}$$

- Mais la vitesse varie et il n'est pas si facile de déterminer la distance.

- Supposons la vitesse du mobile $\nu = f(t)$ comme une fonction du temps, où $a \leq t \leq b$ et $f(t) \geq 0$ (le mobile se déplaçant dans le sens positif).

- La vitesse est relevée aux moments $t_0 (= a), t_1, t_2, \cdots, t_n (= b)$ et supposée constante entre-temps.



- La parenté devient manisfeste dès qu'on trace le graphique de la fonction vitesse et les rectangles dont les hauteurs correspondent aux vitesses initiales sur chaque intervalle de temps.

- Si ces moments sont régulièrement espacés, l'intervalle de temps entre deux lectures consécutives dure $\Delta t = (b - a)/n$:

  - Pendant le 1^{er} intervalle, l'espace parcourue est $f(t_0)\Delta t$.

  - Pendant le 2^{e} intervalle, l'espace parcourue est $f(t_1)\Delta t$.

$$\vdots$$

▷ À la fin de l'intervalle de temps complet $[a, b]$, la distance totale est approximativement égale à

$$f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t.$$

▷ Si on retient la vitesse du moment final de chaque intervale, alors on a l'aproximation totale de la distance suivante

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t.$$

Note: Plus la vitesse est mésurée fréquemment, plus l'estimation devient précise et il semble acceptable que la valeur exacte de la distance parcourue d soit la limite:

$$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t.$$

L’intégrale définie

- Les limites que nous venons de calculer lors du calcul d'aire et de distance, seront également utilisées dans le calcul:
  - ✓ de longueurs d'arcs, de volumes de solide,
  - ✓ de centre de masse, de force exercée,
  - ✓ du travail et d'autre grandeurs encore.
- Voilà pourquoi nous attribuons ce type de limite un nom et une notation particulier:

Définition

- Étant donné une fonction continue f définie pour $a \leq x \leq b$, on divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de largeur égale à

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

- On appelle $x_0 (= a), x_1, x_2, \cdots, x_n (= b)$ les extrémités de ces sous-intervalles et on fixe arbitrairement des points $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ dans ces sous-intervalles de sorte que x_i^* appartient au $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

- Alors, l'**inégrale définie de** f **depuis** a **jusqu'à** b est

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x, \tag{1}$$

à condition que cette limite existe. Dans le cas où elle existe, on dit que la fonction est **intégrable** sur $[a, b]$.

Remarque :

- Le symbole $\int$ fut introduit par Leibniz et s'appelle le **signe intégrale**.
- Dans la notation $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ s'appelle l'**intégrande**, et a et b les **bornes d'intégration**:
  - ✓ a est la **borne inférieur**,
  - ✓ et b la **borne supérieur**.
- Le symbole dx indique que l'intégrale s'effectue par rapport à x.
- Cependant, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas de x, c'est-à-dire

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr.$$

- L'inégrale $\int_a^b f(x)dx$ est un nombre.

- La somme dans la définition de l'intégrale,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x,$$

porte le nom de **somme de Riemann**.

Théorème

Si une fonction f est **continue** sur $[a, b]$ ou si elle **ne présente qu'un nombre fini de discontinuités par saut**, alors elle est **intégrable sur** $[a, b]$; autrement dit l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Note:

- Lorsque f est intégrable sur $[a, b]$, alors la limite en (1) donne le même nombre quels que soient le choix des points x_i^*.
- Pour simplifier le calcul de l'intégrale, on choisit souvent les extrémités droites des sous-intervalles.

Théorème

Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{2}$$

où $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + i\Delta x$.

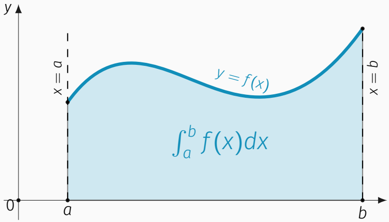
Exemple 2.1: Exprimez

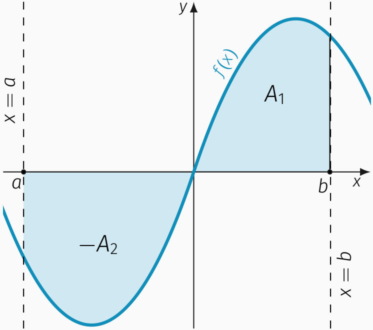
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[x_i^3 + x_i \sin x_i\right] \Delta x$$

comme une intégrale sur l'intevarlle $[0, \pi]$.

- ▷ Si $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, alors l'intégrale définie représente l'aire sous la courbe de la fonction f sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{Aire sous la courbe de } f(x) \text{ sur } [a, b].$$





- ▷ Si f prend des valeurs positives et négatives sur $[a, b]$, alors l'intégrale définie est une différence d'aires

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2.$$

Exemple 2.2:

- Écrivez une expression de $\int_1^3 e^x dx$ sous forme d'une limite de sommes.

- Calculez cette expression à l'aide d'un logiciel de calcul algébrique.

Exemple 2.3: En interprétant les intégrales suivantes comme des aires, déterminez leur valeur.

- ▷ $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$
- ▷ $\int_0^3 (x-1)dx.$

- Pour faciliter le calcul de la limite, on a souvent choisi le point x_i^* à l'extrémité droite du $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle.

- Si l'objectif est de calculer une valeur approchée d'une intégrale, il vaut mieux choisir x_i^* au milieu de l'intervalle, qu'on notera $\overline{x}_i$.

Méthode des points médians

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x = \Delta x\,[f(\overline{x}_1) + \cdots + f(\overline{x}_n)]$$

où $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ et $\overline{x}_i = \dfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ où $\overline{x}_i$ = **point médian** de $[x_{i-1}, x_i]$.

Exemple 2.4: Calculer une approximation de $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ par la méthode des points médians avec $n = 5$.

Propriétés de l'intégrale Les fonctions f et g sont continues.

1. Intervertir a et b a pour effet de changer $(b-a)/n$ en $(a-b)/n$:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

2. Dans le cas où $a = b$, alors $\Delta x = 0$ de sorte que $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3. Si c est une constante quelconque, alors nous avons

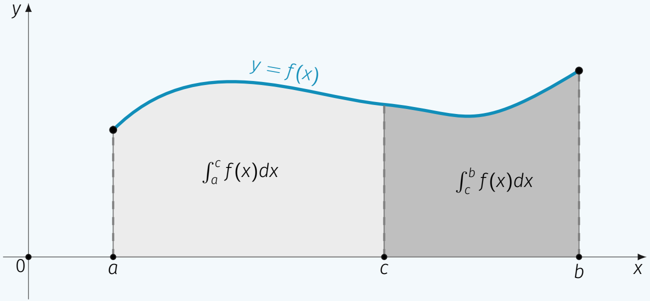
$$\int_a^b c dx = c(b-a) \quad \text{et} \quad \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

4. $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Exemple 2.5: Utilisez les propriétés de l'intégrale pour calculer $\int_0^1 (4+3x^2)dx$.

5 La propriété suivante nous explique comment combiner des intégrales de la même fonction sur des **intervalles adjacents**:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$



Exemple 2.6: Sachant que $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ et $\int_0^{8} f(x)dx = 12$, calculez $\int_8^{10} f(x)dx$.

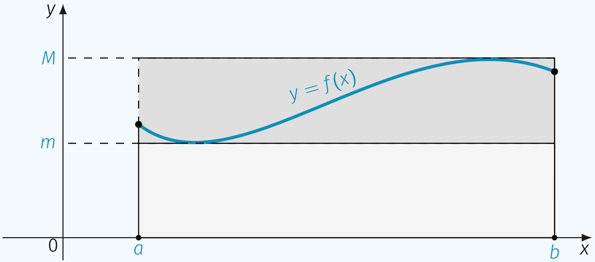
Propriétés de comparaison de l'intégrale

6. Si $f(x) \geq 0$ pour $a \leq x \leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

7. Si $f(x) \geq g(x)$ pour $a \leq x \leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

8. Si $m \leq f(x) \leq M$ pour $a \leq x \leq b$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$



Exemple 2.7: Estimez, grâce à la propriété $\boxed{8}$, l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

Le calcul des intégrales définies

Définition

Une fonction F est appelée une **primitive** de f sur un intervalle I, si

$$F'(x) = f(x), \text{ pour tout } x \text{ sur l'intervalle } I.$$

Exemple 3.1: $F(x) = x^2$ est une primitive de $f(x) = 2x$ car:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x = f(x).$$

Exemple 3.2: Soit

$$F(x) = x^3, \quad G(x) = x^3 + 4, \quad H(x) = x^3 - \frac{1}{2}.$$

Montrez que F, G et H sont trois primitives de la fonction $f(x) = 3x^2$.

Note: Toute fonction de la forme $x^3 + C$ est une primitive de $f(x) = 3x^2$.

Theorem

Soit F une primitive de la fonction f. Alors la forme générale d'une primitive de f est $F(x) + C$, où C est une constante arbitraire.

- On utilise l'**intégrale indéfinie** pour dénoter la famille de primitives:

$$\underbrace{\int f(x)}_{\text{intégrale indéfinie de } f} \qquad = F(x) + C.$$

- L'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ est un nombre.
- L'intégrale indéfinie $\int f(x)dx$ est une famille de fonctions (primitives de f).

- On a constaté à quel point le calcul des intégrale à partir de la somme de Riemann est laborieux!

- Il existe une méthode plus simple pour calculer les intégrales:

Théorème

Théorème de calcul de l'intégrale définie

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive quelconque de f, c'est-à-dire $F' = f$.

Note: Le théorème établit que, dès qu'une primitive F de f est connue, le nombre $\int_a^b f(x)dx$ peut être calculé en soustrayant simplement les valeurs de F aux extrémités de l'intervalle $[a, b]$.

Exemple 3.3: Calculez $\int_1^3 e^x dx$.

Note: Lorsqu'on applique le théorème de calcul de l'intégrale, on emploie la notation

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a), \quad \text{ou} \quad F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Table des intégrales indéfinies

- $$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \qquad \int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$
- $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$
- $$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
- $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C$$
- $$\int \sec^2 x\, dx = tg\, x + C \qquad \int cosec^2 x\, dx = -cotgx + C$$

- $$\int \sec x \, tg\, x \, dx = \sec x + C \qquad \int cosec\, x \, cotg\, x \, dx = -cosec\, x + C$$
- $$\int \frac{1}{x^2+1} dx = Arctg\, x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = Arcsin\, x + C$$

Exemple 3.4: Calculez l'intégrale

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\, dx$$

Exemple 3.5: Calculez $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

Exemple 3.6: Calculez $\int_1^9 \frac{2t^2+t^2\sqrt{t}-1}{t^2}\,dt$.

- Par le théorème de calcul de l'intégrale, si f est continue sur $[a, b]$, alors
$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$
- F étant une primitive quelconque de f, c'est-à-dire que $F' = f$, alors
$$\int_a^b F'(x) = F(b) - F(a)$$
- Or $F'(x)$ représente la vitesse de variation de $y = F(x)$ par rapport à x et $F(b) - f(a)$, la variation totale de y lorsque x passe de a à b.

Théorème de variation nette

L'intégrale d'un taux de variation est la variation nette:
$$\int_a^b F'(x) = F(b) - F(a)$$

- Si $s(t)$ désigne la fonction position au moment t d'un mobile, alors sa vitesse est $v(t) = s'(t)$ et

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

est le changement net de position (ou **déplacement**) du mobile sur l'intervalle de temps $[t_1; t_2]$.

▷ Pour calculer la distance totale parcourue pendant un intervalle de temps, il faut distinguer

  ⋆ les intervalles durant lesquels $v(t) \geq 0$ (mobile se déplace vers la droite),

  ⋆ et ceux durant lesquels $v(t) \leq 0$ (mobile se déplace vers la gauche).

- La distance totale parcourue $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|dt$.

- Comme l'accélération d'un mobile est égale à $a(t) = \nu'(t)$,

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = \nu(t_2) - \nu(t_1)$$

représente la variation de la vitesse entre les instants t_1 et t_2.

Exemple 3.7: Une particule se déplace le long d'une droite à une vitesse donnée à chaque instant t par $\nu(t) = t^2 - t - 6$ (mésurée en mètres par seconde).

- ▷ Calculez le déplacement de la particule entre $t = 1$ et $t = 4$.

- Calculez la distance parcourue pendant cet intervalle de temps.

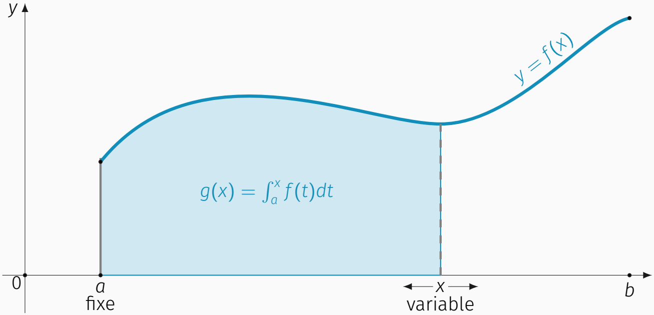
Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

- Lorsque la valeur de x est fixée, l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$ est un nombre fini.

- Si x varie, $\int_a^x f(t)dt$ varie aussi et définit une fonction de x qu'on note g:

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

où f est une fonction continue sur $[a, b]$ et x situé entre a et b.



g ne dépend que de x qui est la borne supérieur variable de l'intégrale.

Exemple 4.1: Soit $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ avec $a = 1$ et $f(t) = t^3$. Cherchez une expression de $g(x)$ et calculez $g'(x)$.

Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, Partie I

Si f est continue sur $[a, b]$, alors la fonction g définie par

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b$$

est une primitive de f, autrement dit $g'(x) = f(x)$ pour $a < x < b$.

- ▷ Le théorème de calcul de l'intégrale définie donne

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\Big(F(x) - F(a)\Big) = F'(x) = f(x).$$

- ▷ La dérivation et l'intégration sont donc des procédés réciproques.

Exemple 4.2: Calculez la dérivée de la fonction $g(x) = \int_a^x \sqrt{1+t^2}dt$.

Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

On suppose que f est continue sur $[a, b]$.

- Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors $g'(x) = f(x)$.
- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive quelconque de f, autrement dit $F' = f$.

Exercices suggérés

Exercices suggérés

1. On a mesuré la vitesse d'une voiture sur un intervalle d'une minute et les données sont dans le tableau suivant. On note que le temps est mesuré en seconde et la vitesse en mètre/seconde.

t	$v(t)$
0	0
10	14
20	23
30	26
40	28
50	29
60	30

À l'aide des sommes de Riemann, trouvez une sous-estimation de la distance parcourue par la voiture dans l'intervalle de temps $0 \leq t \leq 60$.

2. Calculez les intégrales suivantes:

- ⋆ $\int_0^1 y(y-1)(2y+1)dy$
- ⋆ $\int \frac{v^2+3v^5-v^3}{v^3}dv$
- ⋆ $\int_1^2 x^{\frac{1}{2}}dx$
- ⋆ $\int_1^3 \left(3e^x - \sin x + \frac{1}{x}\right)dx$
- ⋆ $\frac{d}{dx}\left(\int_1^x t^2 dt\right)$
- ⋆ $\int_4^9 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$
- ⋆ $\int_{-1}^1 \left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$
- ⋆ $\int_0^\pi |\cos x| dx$

- ⋆ $\int_{\frac{1}{2}}^{3} \left| x - \frac{1}{x^2} \right| dx$
- ⋆ $\int_{-1}^{2} (x - 2|x|) dx$

3. Exprimez l'intégrale de Riemann $\int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx$ sous forme de limite d'une somme de Riemann. Justifiez votre réponse et montrez votre travail.

4. Si $\int_0^7 f(x)dx = 4$ et $\int_0^9 f(x)dx = 6$, calculez l'intégrale $\int_7^9 f(x)dx$.

5. Calculez la dérivée de la fonction g définie par

$$g(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{1 + t^2} dt$$

6. Évaluez la limite de la somme de Riemann suivante:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \cos \left(\pi + \frac{i\pi}{2n} \right) \left(\frac{\pi}{2n} \right)$$

7. Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_1^{e^x} \ln(t^2 + 1)dt$$

- ⋆ Calculez $F(0)$.
- ⋆ Calculez $F'(x)$.

8. À l'aide du concept de somme de Riemann, trouvez une appproximation de l'intégrale de Riemann $\int_1^2 \frac{\sin x}{x} dx$ en prenant $n = 4$.

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)

- Disponibilités:
  - Lundi 13:00 - 16:00, MRR B-214
  - Jeudi 13:00 - 16:00, MRR B-214

- Manuel du cours:
  J. Stewart. *Analyse concepts et contextes*. Volume 1, Fonctions d'une variable, DeBoeck Université 3^e édition.