



## SÉRIE 8 - Algèbre linéaire (MATH 2673)

### Exercice 1

Soit  $A$  une matrice réelle, carrée d'ordre  $n$ , symétrique. On dit que  $A$  est définie positive si

$$X^TAX > 0, \forall X \in \mathbb{R}_c^n, X \neq 0.$$

Soit  $A$  une matrice, carrée d'ordre  $n$ , définie positive. Montrez que la fonction qui associe à chaque couple  $(X, Y) \in \mathbb{R}_c^n \times \mathbb{R}_c^n$  la valeur réelle  $\langle X, Y \rangle = X^TAY$ , définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_c^n$ .

### Exercice 2

Soient  $V$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  une base de  $V$ . Soit la matrice  $A = (a_{ij})$ , où  $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Montrez que,  $\forall u, v \in V$ ,

$$\langle u, v \rangle = {}_B[u]^T A {}_B[v].$$

### Exercice 3

Soit  $V$  un espace euclidien, et soit  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  un sous-ensemble de  $V$ . Montrez que

$$S^\perp = (Vect(S))^\perp.$$

### Exercice 4

Soit  $W$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs  $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, -1, 2, 2)$  et  $v_3 = (1, 2, -3, -4)$ .

Déterminez une base orthogonale de  $W$ .

---

**Exercice 5**

Soit  $V = C[0, 1]$  muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt, \text{ où } f, g \in V.$$

Soit  $W$  le sous-espace de  $V$  engendré par  $f_0$ ,  $f_1$  et  $f_2$  où  $f_0(t) = 1$ ,  $f_1(t) = t$  et  $f_2(t) = t^2$ . Déterminez une base orthogonale de  $W$ .

**Exercice 6**

Soit  $W$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^5$  engendré par les vecteurs  $v_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$  et  $v_2 = (1, 0, 1, 5, -1)$ . Déterminez une base du supplémentaire orthogonal  $W^\perp$  de  $W$ .