UNIVERSITÉ DE MONCTON
CAMPUS DE MONCTON

Examen Intra - Algèbre linéaire (MATH 2673)

23 février 2023, Durée 75 minutes (1h15)

Professeur : Ibrahima Dione

Nom étudiant.e. : ______________________________

Numéro étudiant.e. : ___________________________

Prenez le temps de lire l'examen au complet avant de commencer. Lisez attentivement chaque question. Vérifiez qu'il y a 9 pages à votre examen. L'examen est composé de **4 questions**, pour un total de 100 points.

- L'utilisation de tout appareil électronique est interdite.
- Répondez aux questions dans l'espace fourni.
- Utilisez le verso des feuilles si nécessaire.
- Ceci est un examen à livres fermés et aucune note du cours n'est permise.

Exercice 1 (15 points)

1. Soit H le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$H = \{(a - 3b, b - a, a, b) \mid a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{R}\}.$$

Montrez que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. On considère les trois polynômes $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t$ et $p_3(t) = 4 - t$. Est-ce que ces polynômes sont linéairement dépendants, indépendants ? Justifiez.

Exercice 2 (25 points)

Soit U et W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, définis comme suit

$$U = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}\,, \; W = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}\,.$$

1. Montrez que $\mathbb{R}^3 = U + W$.

2. Montrez que $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$.

3. En déduire la dimension $\dim(U \oplus W)$ de la somme direct $U \oplus W$.

Exercice 3 (30 points)

Soit $B = \{u_1 = (1,1), u_2 = (1,-1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$, et $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que

$$T(u_1) = (2,1,-1) \text{ et } T(u_2) = (0,1,1).$$

1. Déterminez $T(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Déterminez le noyau ($\operatorname{Ker} T$) de l'application linéaire T.

3. Est-ce que l'application T est un isomorphisme ?

Exercice 4 (30 points)

Soit l'application linéaire $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$F(x, y) = (3x + y,\ 5x + 7y,\ x + 3y).$$

1. Déterminez une base de $\operatorname{Im} F$ et la dimension de $\operatorname{Im} F$.

2. Est-ce que l'application F est surjective ?

3. Est-ce que l'application F est injective ?