Série 2 - Optimisation (MATH 3163)

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction quadratique définie par :

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2 + 2x_1.$$

a Déterminer l'unique point stationnaire $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ de f comme solution d'un système linéaire 2×2. Calculer $f(\bar{x})$.

b Le point $\bar{x}$ est-il le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$?

c Que peut-on dire de la convexité de f ? Vérifier vos conclusions en calculant les valeurs propres du Hessien de f.

d Le problème de minimisation de f sur $\mathbb{R}^2$ a-t-il une solution optimale ?

Exercice 2

Considérons la fonctionnelle quadratique $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^\top \mathbf{x} + c$, où A est une matrice carrée d'ordre $n \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur et $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ une direction de descente de f en $\mathbf{x}$. Notre objectif ici est de déterminer une formule explicite du pas de la méthode de la plus forte pente, c'est-à-dire une expression de la solution du problème

$$\min_{t \geq 0} f(\mathbf{x} + t\mathbf{d}) \tag{1}$$

a En posant $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{d})$, montrez que

$$g(t) = \left(\mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{d}\right) t^2 + 2\left(\mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \mathbf{b}\right) t + f(\mathbf{x}).$$

b Désignons par $\bar{t}$ le point stationnaire du problème (1). En utilisant le fait que $g'(\bar{t}) = 0$ et en tenant compte du fait que $\nabla f(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$, montrez que

$$\bar{t} \equiv -\frac{\mathbf{d}^\top \nabla f(\mathbf{x})}{2\mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{d}}. \tag{2}$$

Exercice 3

Considérons le problème de minimisation bidimensionnelle

$$\min_{x,y} f(x, y), \quad \text{où} \quad f(x, y) = x^2 + 2y^2 \tag{3}$$

dont la solution optimale est $(x, y) = (0, 0)$ avec la valeur optimale correspondante $f(0, 0) = 0$.

a Montrez que le problème (3) est un problème de minimisation d'une fonctionnelle quadratique de la forme $f(x) = x^\top A x + 2b^\top x$, où A est une matrice carrée d'ordre 2×2 et $b \in \mathbb{R}^2$.

b Pour déterminer des approximations de la solution optimale, nous considérons la méthode du gradient où le pas est déterminé par la formule (2)

Algorithme : La méthode du gradient :

- **Entrée :** La tolérance $\varepsilon = 1e^{-5}$
- **Initialisation :** $(x_0, y_0) = (2, 1)$
- **Étape générale :** Pour tout $k = 0, 1, 2, \cdots$, exécutez les étapes suivantes :
  - Choisissez le pas t_k à partir de la formule (2).
  - Effectuer $x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$.
  - Si $\|\nabla f(x_{k+1})\| \leq \varepsilon$, on arrête et x_{k+1} est l'approximation recherchée.

Effectuez deux itérations de la méthode du gradient (donnez les détails de chaque étape du calcul) !

c En utilisant le code Matlab «*methode_gradient_quadratique.m*» fourni dans la plateforme d'apprentissage en ligne (CLIC), déterminez la meilleur approximation de la solution en montrant les itérations effectuées.

Exercice 4

Considérons le même problème d'optimisation donné dans l'exemple précédent :

$$\min_{x,y} f(x,y), \quad \text{où} \quad f(x,y) = x^2 + 2y^2 \tag{4}$$

Pour résoudre ce problème en utilisant la méthode du gradient avec un pas constant, nous utilisons la fonction MATLAB fourni dans la plateforme d'apprentissage en ligne (CLIC) qui utilise la méthode du gradient avec un pas constant pour une fonction objectif arbitraire (code : «*methode_gradient_constant.m*»).

a Nous pouvons utiliser la méthode du gradient avec un pas constant $t_k = 0.1$ et le vecteur initial $(2,\ 1)^\top$. Effectuez deux itérations de cette méthode (donnez les détails de chaque étape du calcul).

b En utilisant ce code Matlab, déterminez la meilleur approximation possible de la solution en montrant les itérations effectuées.

c Cependant, prendre un pas constant égale à $t_k = 100$ et refaire le point b. Que constatez-vous ?