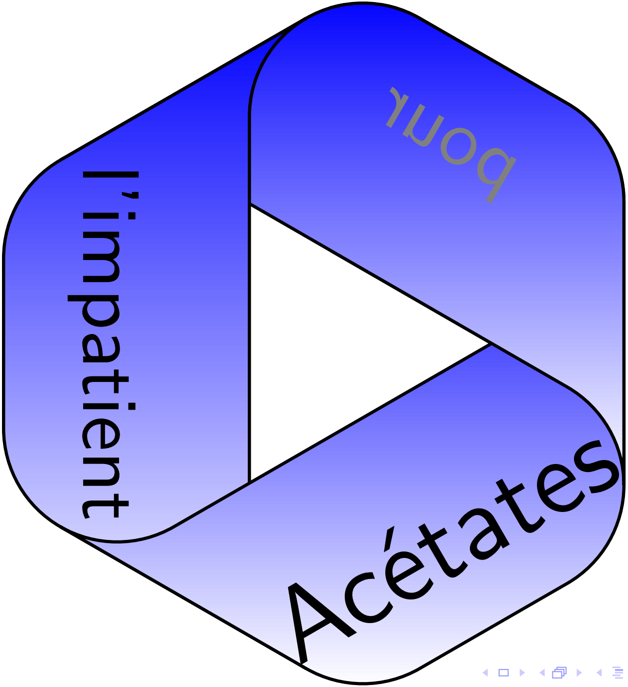
MAT 1910 Mathématiques de l'ingénieur II: Intégrales multiples en coordonnées curvilignes générales

Dione Ibrahima

Chapitre IV:Intégrales multiples


Acétates
pour
l'impatient

OBJECTIF

Dans le but de simplifier certaines intégrales, un changement de variable est souvent utilisé. En effet ;

i. Dans le calcul intégrale à une dimension, on utilise fréquement le changement de variable communément appelé méthode de substituton. C'est à dire, en remplaçant le role de x par u via le changement $x := g(u)$, l'intégrale simple de f sur $[a, b]$ est donnée par :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du, \text{ où } a := g(c),\ b := g(d). \tag{1}$$

ii. Sur le plan, un changement en coordonnées polaires est souvent utile afin d'évaluer l'integrale double dont le domaine D est circulaire. C'est à dire, par la transformation $x := r\,cos\theta$, $y := r\,sin\theta$, l'intégrale double de f s'écrit :

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_{D_p} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta. \tag{2}$$

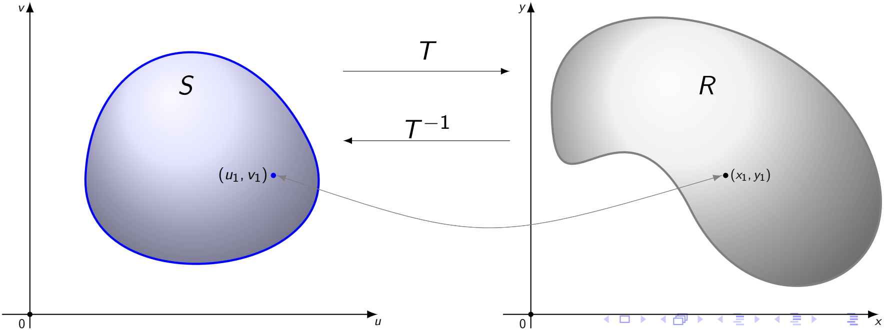
iii. Dans l'espace, un changement en coodonnées cylindriques est utilisé en définissant la transformation $x := r\cos\theta$, $y := r\sin\theta$, $z := z$:

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dV = \int\int\int_{D_c} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta, \tag{3}$$

oubien un changement en coodonnées sphériques est utilisé, en définissant la transformation $x := \rho \sin\phi \cos\theta$, $y := \rho \sin\phi \sin\theta$, $z := \rho \cos\phi$:

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dV = \int\int\int_{D_s} f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \sin\phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta. \tag{4}$$

Le but de ce chapitre est, définissant un système de coordonnées quelconque sur le plan (i.e. en prenant $x := g(u,v)$, $y := h(u,v)$) ou dans l'espace $(x := g(u,v,w), y := h(u,v,w), z := k(u,v,w))$, d'effectuer l'intérale double ou triple via ce nouveaux systèmes de coordonnées.



Coordonnées curvilignes générales

- Transformation :

Définition

Une transformation T (ou un changement de coordonnées) est une fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$) par $(u, v) \longrightarrow T(u, v) := (x, y)$:

$$T(u,v) := \begin{cases} x := g(u,v) \\ \\ y := h(u,v) \end{cases} \tag{5}$$

On peut aussi écrire $x := x(u, v)$ et $y := y(u, v)$.

Exemples :

i. On définit la transformation $T(u, v) := (x, y)$ par les relations suivantes :

$$x := x(u,v) = u^2, \ \ y := y(u,v) = v^2.$$

Déterminer l'image, par la transformation T, du carré C défini comme suit :

$$C := \Big\{(u,v) : 0 \le u \le 1, \, 0 \le v \le 1\Big\}.$$

ii. Soit une transformation définie par les équations :

$$x := u^2 - v^2, \ \ y := 2uv.$$

Trouver l'image du carré $S := \{(u, v) : 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$.

- Jacobien :

Définition

Le Jacobien de la transformation T définie par $x := x(u,v)$ et $y := y(u,v)$ est

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Remarque

Si la transformation T est inversible, le jacobien défini en (6) vérifié la relation :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} \qquad (7)$$

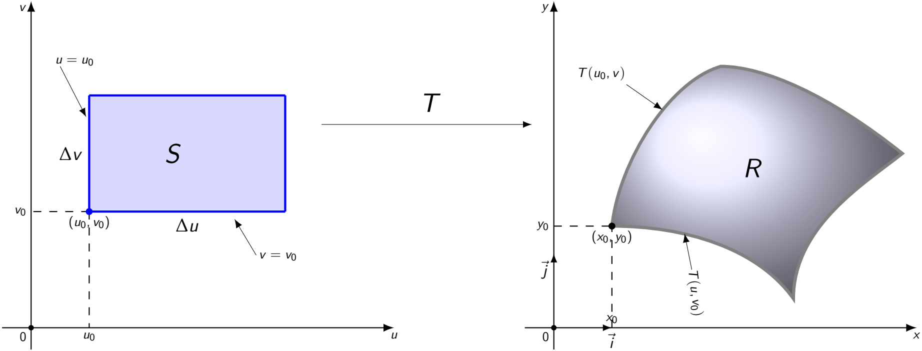
Exemple :

i. Donner le jacobien de la fonction : $x(r,\theta) = r\,cos(\theta)$, $y(r,\theta) = r\,sin(\theta)$.

ii. Donner le jacobien de la fonction : $x(u,v) = u^2 - v^2$, $y(u,v) = u^2 + v^2$.

Intégrales doubles

Étudions maintenant comment un changement de variables affecte une intégrale double. Soit S un rectangle du plan uOv de dimensions Δu et Δv, et où un de ses sommets est noté (u_0, v_0) (voir figure ci dessous).



L'image de S via la transformation T est la région R du plan xoy, où un de ses points au bord est noté par $(x_o, y_o) := T(u_o, v_o)$.
De manière générale, tout point $T(u, v)$ de la région R est défini par la relation

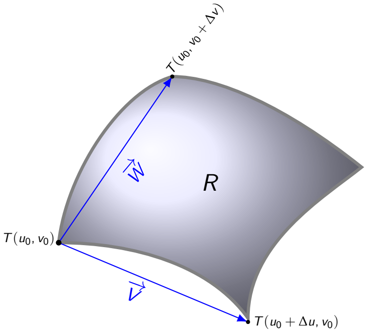
$$T(u, v) := (x, y) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j}.$$

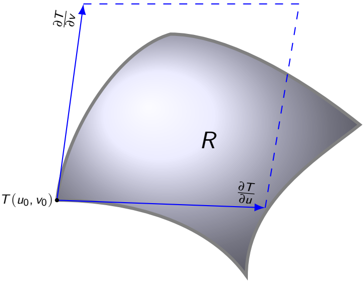
- Calcul de l'élément d'aire : La courbe image du bord inférieur d'équation $v = v_0$ de S étant donnée par $T(u, v_0)$, alors le vecteur tangent au point $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$ de cette courbe sera défini par :

$$\frac{\partial T(u_0, v_0)}{\partial u} := \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u}\vec{j} := \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j}.$$

Le vecteur tangent au point (x_0, y_0) de la courbe image du coté $u = u_0$ de S

$$\frac{\partial T(u_0, v_0)}{\partial v} := \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j}.$$





La région image $R := T(S)$ est approximée par le parallélogramme défini par les vecteurs $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{W}$ et donnés par :

$$\overrightarrow{V} := T(u_0 + \Delta u, v_0) - T(u_0, v_0), \ \ \overrightarrow{W} := T(u_0, v_0 + \Delta v) - T(u_0, v_0).$$

Or la dérivée partielle de T par rapport à une de ses variables étant par définition

$$\frac{\partial T}{\partial u} \simeq \frac{T(u_0 + \Delta u, v_0) - T(u_0, v_0)}{\Delta u}, \ \text{ si } \Delta u \to 0,$$

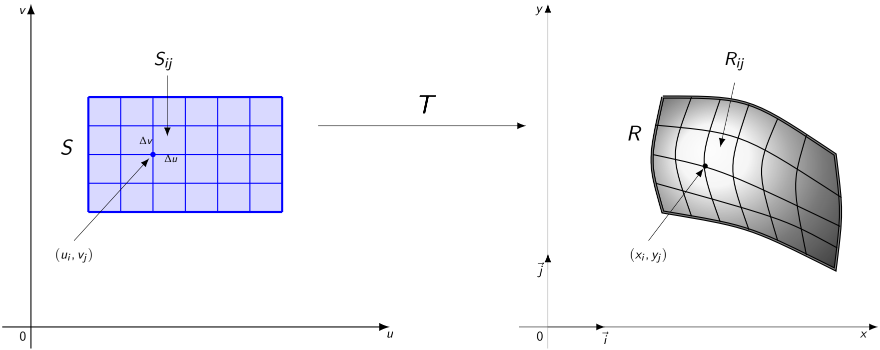
alors $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ sont approximés par les vecteurs $\Delta u \frac{\partial T}{\partial u}$ et $\Delta v \frac{\partial T}{\partial v}$, respectivement :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V} := T(u_0 + \Delta u, v_0) - T(u_0, v_0) &\simeq \Delta u \frac{\partial T}{\partial u}, \\ \overrightarrow{W} := T(u_0, v_0 + \Delta v) - T(u_0, v_0) &\simeq \Delta v \frac{\partial T}{\partial v}. \end{aligned}$$

La région R peut donc être approximée par les vecteurs $\Delta u \frac{\partial T}{\partial u}$ et $\Delta v \frac{\partial T}{\partial v}$. Ce qui permet d'approcher son aire $\Delta A :\simeq \left|(\Delta u \frac{\partial T}{\partial u}) \times (\Delta v \frac{\partial T}{\partial v})\right| = \left|(\frac{\partial T}{\partial u}) \times (\frac{\partial T}{\partial v})\right| \Delta u \Delta v$.

Pour une tranformation T donnée, l'élément d'aire ΔA défini par le nouveau système de coordonnées est approximé par : $\Delta A :\simeq \left|J(u, v)\right| \Delta u \Delta v$.

- Formule de changement de variables : Sur le plan (uOv), on subdivise la région S en rectangles S_{ij} et désigne leur image sur le plan xOy par R_{ij}.



Appliquant l'approximation de l'élément d'aire précédent sur chaque R_{ij}, l'intégrale double sera approximée comme suit :

$$\begin{aligned} \int\int_R f(x,y)dA \quad &:\simeq \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\Delta A, \\ &:\simeq \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\Big(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)\Big)\big|J(u_i, v_j)\big|\Delta u\Delta v. \end{aligned}$$

Définition : (Intégrales doubles par changement de variables)

Soient T une transformation dont le jacobien J est non nul et R la région du plan xoy, image de la région S du plan uov via la transformation T.
Si f est une fonction continue sur R, on a la formule de changement suivante :

$$\begin{aligned}\int\int_R f(x,y)dA &= \int\int_S f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\left|J(u,v)\right| du\,dv,\\ &= \int\int_S f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.\end{aligned}$$

Exemples :

i. Par le changement de variables $x = u^2 - v^2$ et $y = 2uv$, calculer l'intégrale :

$$I = \int\int_R y dA,$$

où R est la région délimitée par l'axe (Ox) et les paraboles $y^2 = 4 - 4x$ et $y^2 = 4 + 4x$, où $y \geq 0$.

ii. Calculer l'intégrale suivante, où R est la région trapézoidale de sommets $A(1,0)$, $B(2,0)$, $C(0,-2)$ et $D(0,-1)$:

$$\int\int_R e^{\frac{x+y}{x-y}} dA.$$

Intégrales triples

- Calcul de l'élément de volume : En intégrales triples, on a la transformation T qui est donnée par $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v, w) \longrightarrow T(u, v, w)$:

$$T(u, v, w) := \begin{cases} x := x(u, v, w) \\ y := y(u, v, w) \\ z := z(u, v, w) \end{cases} \tag{8}$$

Et où $J(u, v, w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} := det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$

Avec un raisonnement idem au cas double précédent, pour une tranformation T donnée, l'élément de volume ΔV défini par le nouveau système de coordonnées est approximé par : $\Delta V :\simeq \left|J(u, v, w)\right|\Delta u \Delta v \Delta w$.

- Formule de changement de variables : La même démarche conduit à :

Définition : (Intégrales triples par changement de variables)

Soient T une transformation dont le jacobien J est non nul et R la région de l'espace $\mathbb{R}^3$, image de la région S via la transformation T.
Si f est une fonction continue sur R, on a la formule de changement suivante :

$$\begin{aligned}\int\int\int_R f(x,y,z)dV &= \int\int\int_S f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\big|J(u,v,w)\big|\,du\,dv\,dw,\\ &= \int\int\int_S f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw.\end{aligned}$$

Exemple :

i. Retrouver la formule d'intégration en coordonnées sphériques en utilisant la définition précédente, où le système de coordonnées associé est le suivant :

$$x(\rho,\theta,\phi) := \rho\sin\phi\cos\theta,\ \ y(\rho,\theta,\phi) := \rho\sin\phi\sin\theta,\ \ z(\rho,\theta,\phi) := \rho\cos\phi.$$

ii. Retrouver la formule d'intégration en coordonnées cylindriques en utilisant la définition précédente, où le système de coordonnées associé est le suivant :

$$x(r,\theta,w) = r\cos(\theta),\ y(r,\theta,w) = r\sin(\theta),\ z(r,\theta,w) = w.$$

Applications

- Transformation linéaire : Soit à calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int\int_S e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dxdy\ , \tag{9}$$

où le domaine d'intégration S est défini par l'ensemble suivant :

$$S = \Big\{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 2\Big\}.$$

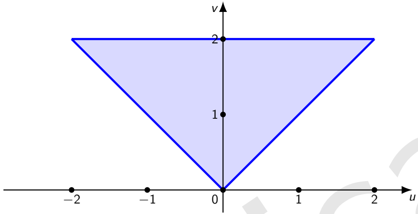
1. S'appuyant sur la forme de la fonction à intégrer, proposer une transformation.
2. Définir le domaine d'intégration généré par ce nouveau système de coordonnées
3. Calculer le Jacobien ainsi que l'élément d'aire modifié.
4. Évaluer l'intégrale donnée en (9) avec ces nouveaux outils.

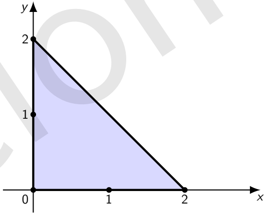
Solution :

1. La forme de l'intégrant suggère le changement suivant :

$$\begin{cases} u := y - x \\ v := y + x \end{cases} \tag{10}$$

2. Puisque la transformation définie en (10) est linéaire, alors elle applique une droite sur une autre. Ce qui fait que le segment $x = 0$ est appliqué sur $u = v$, le segment $y = 0$ est appliqué sur $u = -v$ et la droite $x + y = 2$ est appliquée sur $v = 2$ (voir figures ci-dessous).





3. Le calcul du jacobien associé à cette transformation donne :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} := det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}.$$

L'élément d'aire est donc donné par $dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{2} dudv$

4. L'intégrale est donnée par

$$I = \int\int_S e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dxdy = \int_{v=0}^{2}\left(\int_{u=-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\left(\frac{1}{2}\right)du\right)dv = \frac{1}{2}\int_{v=0}^{2} v\left(e - \frac{1}{e}\right)dv = \left(e - \frac{1}{e}\right).$$

- Coordonnées elliptiques : Utilisant les coordonnées elliptiques, calculer la masse de l'ellipse E d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et sous l'hypothèse que $\rho := |x|$.
Solution : On utilise les coordonnées elliptiques définies par le changement :

$$\begin{cases} x(r,\theta) := r\, a\, cos(\theta) \\ \\ y(r,\theta) := r\, b\, sin(\theta) \end{cases} \tag{11}$$

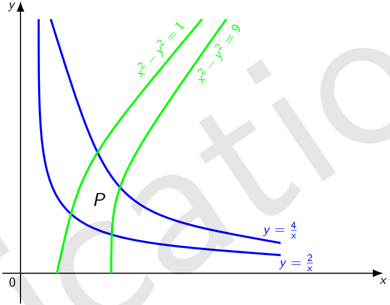
Le calcul du jacobien $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ donne clairement $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r\,a\,b$.
Par ailleurs, l'équation de la frontière du domaine s'écrit $r^2=1$ et il n'y a aucune contraint sur θ. Au final la masse s'écrit :

$$\begin{aligned} M(E) = \int\int_E |x| dxdy &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_0^1 a\, r\, |cos\theta|\, r\, a\, b\, dr\, d\theta \\ &= a^2\, b \frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi} |cos\theta| d\theta\right), \text{ or} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} |cos\theta| d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -cos\theta\, d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} cos\theta\, d\theta = 4$$

Par suite on a : $M(E) = \frac{4a^2b}{3}$.

- Coordonnées curvilignes : Soit à calculer le moment d'inertie polaire (c'est à dire par rapport à un axe perpendiculaire au plan, passant par (0, 0)) d'une plaque P de densité constante $\rho = 1$, représentée par la figure ci-dessous.



Le moment d'inertie polaire est donné, par définition, la relation suivante :

$$J = \int\int_P (x^2 + y^2) dxdy.$$

La forme de P suggère le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u := x^2 - y^2 \\ \\ v := xy \end{cases} \tag{12}$$

Ce qui permet de voir clairement que $P_{uv} = [1, 9] \times [2, 4]$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2+y^2) \Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2(x^2+y^2)}.$$

Par suite on a le moment qui est donné par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} J &= \int\int_{P_{uv}} \Big(x^2(u,v)+y^2(u,v)\Big)\frac{1}{2\Big(x^2(u,v)+y^2(u,v)\Big)}dudv. \\ &= \frac{1}{2}A(P_{uv}) = 8. \end{aligned}$$

Exercices du Livre Stewart (édition MODULO) à Faire :

- Section 7.5 : Exercices 3, 5, 13, 15, 17, 19, 23, 27.

Références :

- Livre Stewart (édition MODULO), page 322 : section 7.5.
- Livre Stewart (édition 2), page 890 : section 12.9.
- Pour un cours de Maple complet : http ://alamanya.free.fr/

Fin