UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Calcul Intégral (MATH 1173) - Chapitre 4: Applications des intégrales

Ibrahima Dione

Département de Mathématiques et de Statistique

Sommaire

- Le présent chapitre porte sur des applications de l'intégrale définie.
- On utilisera l'intégrale définie pour calculer:
    - des aires comprises entre des courbes,
    - des volumes de solides,
    - des longueurs d'arcs,
    - la valeur moyenne d'une fonction,
    - le travail effectué par une force qui varie,
    - le centre de gravité d'une plaque.
- Toutes ces applications ont en commun la méthode générale de l'intégrale définie qui permet de les calculer.

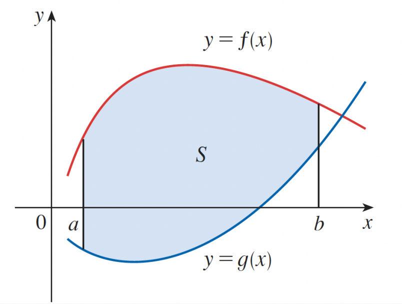
L’aire de la région entre deux courbes

- Les aires définies et calculées au chapitre 3 étaient celles situées sous le graphique de la fonction à intégrer.
- Ici, nous allons nous occuper de régions de forme plus générale.
- Celles situées entre les courbes représentatives de deux fonctions.
- Et celles délimitées par des courbes décrites paramétriquement.

La méthode des rectangles verticaux

- On considère la région S situé entre les graphes de $y = f(x)$, $y = g(x)$, et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

- Il est supposé que f et g sont des fonctions continues et $f(x) \geq g(x)$ quel que soit x dans $[a, b]$.



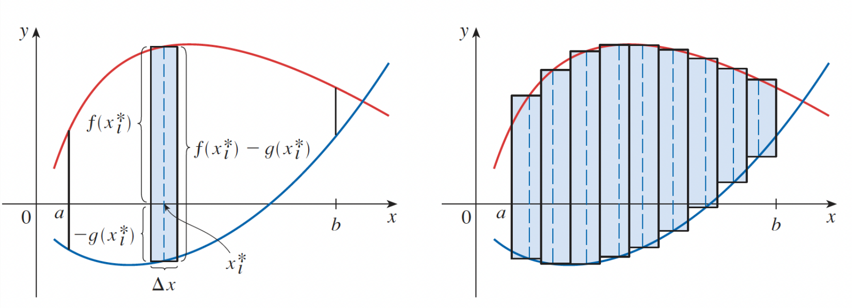
$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$.

- On découpe S en n bandes de même largeur et on approxime la $i^{\text{ième}}$ bande par un rectangle de base Δx et de hauteur $f(x_i^*) - g(x_i^*)$.

▷ On prend les points aux extrémités droites, c'est-à-dire $x_i^* = x_i$.

▷ L'aire de S est approximée par la somme de Riemann suivante

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x.$$



a) Rectangle représentatif b) Rectangles d'approximation.

▷ Cette approximation s'améliore à mesure que n devient grand.

Définition

- On définit l'aire A de S comme la valeur de la limite de la somme des aires de ces rectangles d'approximation:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\, \Delta x. \qquad (1)$$

Cette limite n'est autre que l'intégrale définie de la fonction $f - g$.

- L'aire A de la région délimitée par les courbes $y = f(x)$, $y = g(x)$ et les droites $x = a$ et $x = b$, où f et g sont des fonctions continues et $f(x) \geq g(x)$ pour tout x dans $[a, b]$, est égale à

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx. \qquad (2)$$

Remarque :

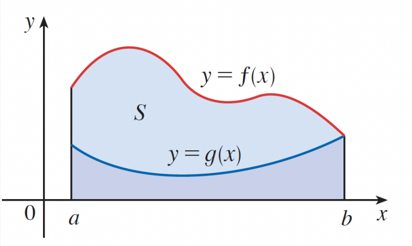
- Lorsque $g(x) = 0$, la région S est située sous le graphique de f (Ch.3).

- La définition de l'aire (1) se ramène à celle introduite au chapitre 3.

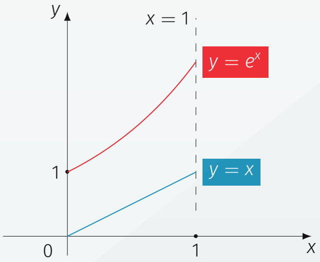
- Si f et g sont positives, il est facile de lire graphiquement l'aire en (2):

$$A = \underbrace{[\text{aire sous } y = f(x)]}_{\int_a^b f(x)dx} - \underbrace{[\text{aire sous } y = g(x)]}_{\int_a^b g(x)dx}$$

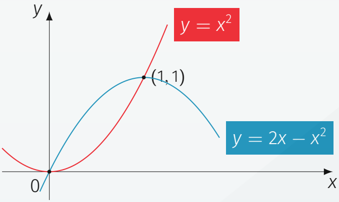
$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$



Exemple 1.1: Déterminez l'aire de la surface bornée supérieurement par $y = e^x$, inférieurement par $y = x$ et terminée par les droites $x = 0$ et $x = 1$.



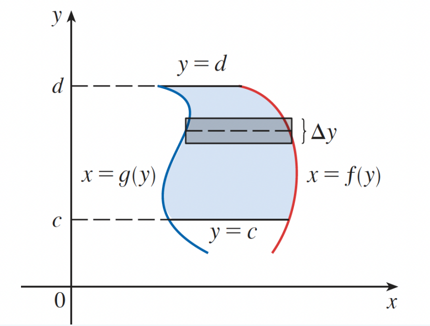
Exemple 1.2: Déterminer l'aire de la région entourée par les paraboles $y = x^2$ et $y = 2x - x^2$.



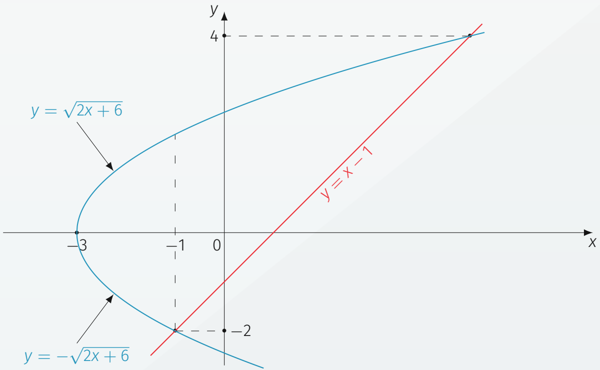
Définition

- Si la région S est délimitée par les courbes $x = f(y)$, $x = g(y)$ et les droites $y = c$ et $y = d$, où f et g sont des fonctions continues et $f(y) \geq g(y)$ pour tout y dans $[c, d]$, alors son aire est déterminée par

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy. \tag{3}$$



Exemple 1.3: Calculez l'aire de la surface enfermée entre la droite $y = x - 1$ et la parabole $y^2 = 2x + 6$.



Exemple 1.4: Trouvons l'aire de la région délimitée par les courbes d'équations $y = 1/x,\ y = x$ et $y = \frac{1}{4}x$ en utilisant:

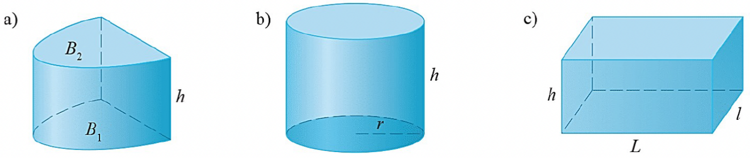
a) x comme variable d'intégration.

b) y comme variable d'intégration.

Calcul d’un volume par la méthode des tranches

- Nous définirons le calcul du volume à l'aide du calcul différentiel et intégral.
- Ce calcul mène au même type de problème que celui d'une aire.
- Nous partirons d'un solide simple, le cylindre, dont le volume est connu.

On appelle «cylindre» un solide délimité par une région plane B_1, nommée base, et une région congruente B_2 d'un plan parallèle.



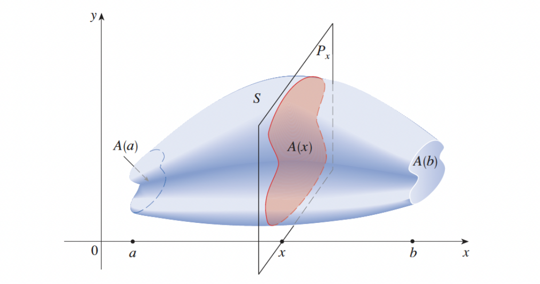
Cylindre : $V = Ah$

Cylindre droit à base circulaire : $V = \pi r^2 h$

Parallélépipède rectangle : $V = Llh$

Le découpage d'un solide en éléments de volume

- ▷ Dans le cas d'un solide S non cylindrique, on le «découpe» en tronçons.
- ▷ Chaque tronçon d'aire $A(x)$, est situé sur une région plane P_x appelée section transversale.

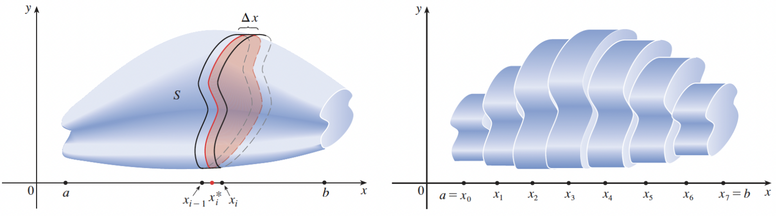


- ▷ La section P_x est perpendiculaire à l'axe des x et passe par le point x tel que $a \leq x \leq b$.

L'aire $A(x)$ varie quand x prend des valeurs comprises entre a et b.

▷ En divisant maintenant S en n «tranches» d'égale épaisseur Δx en coupant le solide avec les plans $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots,$

▷ et en choisissant comme points d'échantillonnage $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$,



▷ on approxime le volume de la i-ième tranche S_i par celui d'un cylindre

* dont l'aire de la base est $A(x_i^*)$,
* et dont la «hauteur» est l'épaisseur Δx de la tranche.

On appelle **disque** un tel cylindre dont la hauteur est petite.

- Le volume d'un tel disque est égal à $A(x_i^*)\,\Delta x$, de sorte qu'une approximation du volume de la i-ième tranche S_i est

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\,\Delta x.$$

- En additionnant les volumes respectifs de tous les disques, on obtient une valeur approchée du volume total

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x.$$

- Cette approximation semble être d'autant meilleure que $n \to \infty$ (On peut imaginer que les disques sont de plus en plus minces.)

- On définit donc le volume comme la limite des sommes lorsque $n \to \infty$.

Définition

- Soit S, un solide situé entre les droites $x = a$ et $x = b$. Si l'on désigne par $A(x)$ l'aire de la section de S appartenant au plan P_x passant par x et perpendiculaire à l'axe des x, et si A est une fonction continue, alors le **volume** de S est

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A\left(x_i^*\right) \Delta x = \int_a^b A(x)dx.$$

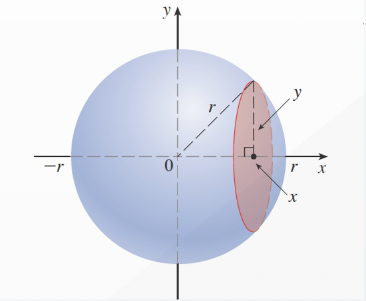
- Lorsqu'on emploie la formule $V = \int_a^b A(x)dx$, il est bon d'avoir à l'esprit l'image d'une section transversale, perpendiculaire à l'axe des x et d'aire $A(x)$, qui parcourt toutes les valeurs de x.

Dans le cas d'un cylindre, l'aire d'une section transversale est constante: $A(x) = A$ pour tout x. Ainsi,

$$V = \int_a^b A dx = A(b-a)$$

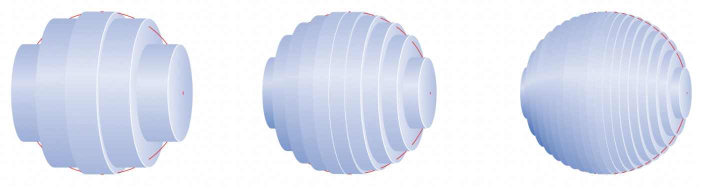
ce qui correspond à la formule connue $V = Ah$.

Exemple 2.1: Montrons que le volume d'une sphère de rayon r est donné par la formule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



- Dans le cas où le solide est une sphère de rayon $r = 1$, son volume est $\frac{4}{3}\pi$, soit environ $4,18879$.

- Les tranches sont des cylindres à base circulaire, ou disques



- La figure est une interprétation géométrique des sommes de Riemann

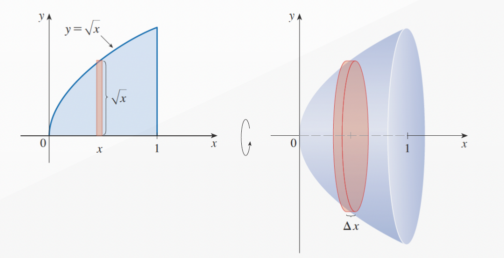
$$\sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \pi\left(1^2 - \bar{x}_i^2\right)\Delta x,$$

où $n = 5$ ($V \approx 4,2726$), $n = 10$ ($V \approx 4,2097$) et $n = 20$ ($V \approx 4,1940$), les points d'échantillonnage x_i^* étant les milieux $\bar{x}_i$.

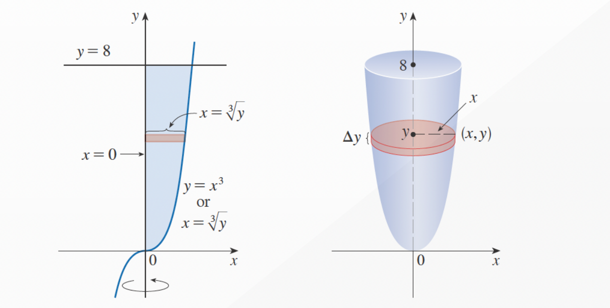
- Lorsqu'on fait tourner une région plane fermée autour d'une droite située dans le même plan et qui ne traverse pas la région, on obtient un solide de révolution.

- On constate que, pour un tel solide, les sections perpendiculaires à l'axe de rotation sont circulaires.

Exemple 2.2: Calculez le volume du solide obtenu en faisant tourner autour de l'axe Ox la surface sous la courbe $y = \sqrt{x}$ pour x compris entre 0 et 1.

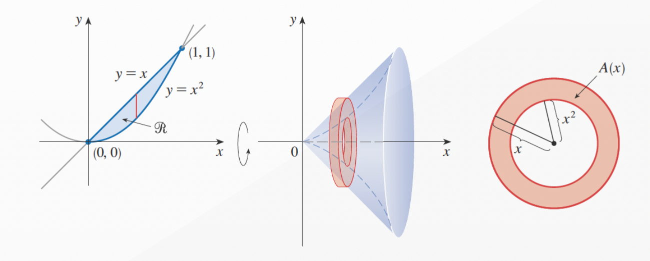


Exemple 2.3: Déterminez le volume du solide obtenu en faisant tourner autour de l'axe Oy la région délimitée par $y = x^3$, $y = 8$ et $x = 0$.



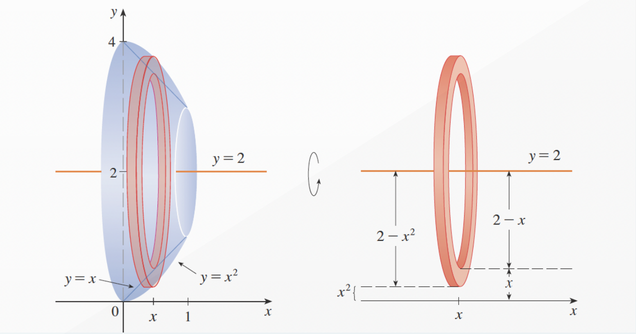
Certains solides de révolution possèdent un trou autour de leur axe de révolution.

Exemple 2.4: Déterminons le volume du solide résultant de la rotation autour de l'axe des x de la région $\mathcal{R}$ délimitée par les courbes $y = x$ et $y = x^2$.



Lorsqu'un solide de révolution est obtenu par la rotation autour d'un axe autre qu'un axe de coordonnées, on doit déterminer soigneusement les rayons de ses sections.

Exemple 2.5: Déterminez le volume du solide engendré par la surface de l'exemple précédent lorsqu'elle tourne autour de l'axe $y = 2$.



Démarche générale de la méthode des disques et des disques troués

1. Si la région plane est délimitée par des courbes définies par des équations, la représenter:

   * en calculant les points d'intersection entre les courbes et avec l'axe de rotation, s'il y a lieu;

   * en traçant les courbes et en les identifiant.

2. Tracer l'axe de rotation et l'identifier.

3. Imaginer un découpage en tranches perpendiculaires à l'axe de rotation de la région plane et tracer un rectangle étroit, représentatif d'une de ces tranches.

4. Identifier les extrémités de la région plane, sur l'axe des x pour des tranches verticales et sur l'axe des y pour des tranches horizontales.

5 Identifier la largeur du rectangle par Δx ou dx pour un rectangle vertical et par Δy ou dy pour un rectangle horizontal.

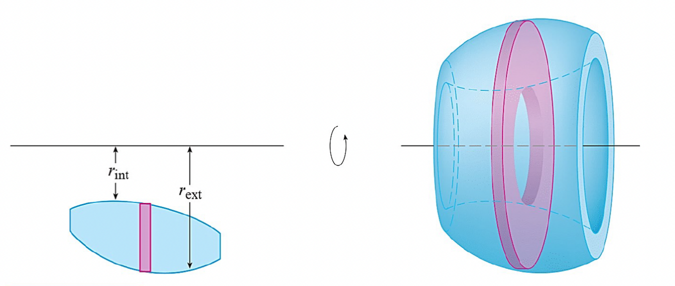
6 Identifier le rayon externe (distance entre l'axe de rotation et le point du rectangle le plus éloigné de l'axe).

7 Identifier le rayon interne s'il y en a un (distance entre l'axe de rotation et le point du rectangle le plus proche de l'axe).

8 Identifier l'élément de volume généré par la rotation du rectangle.

9
- $\ast$ Si la tranche est un disque, en calculer le rayon (par rapport à x ou à y), puis employer la formule $A = \pi(\text{rayon})^2$.
- $\ast$ Si la tranche est un disque troué, en calculer les rayons interne r et externe R à l'aide d'un schéma, et évaluer l'aire du disque troué en soustrayant l'aire du disque interne de celle externe

$$A = \pi(\text{rayon externe})^2 - \pi(\text{rayon interne})^2.$$



10 Calculer le volume du solide de révolution par la méthode des tranches,

$$V = \int_a^b A(x)dx \quad \text{ou} \quad V = \int_c^d A(y)dy.$$

Plus précisément, pour les disques, le volume se calcule par

$$V = \int_a^b \pi(\text{rayon})^2 dx \quad \text{ou} \quad V = \int_c^d \pi(\text{rayon})^2 dy$$

et, pour les disques troués, par

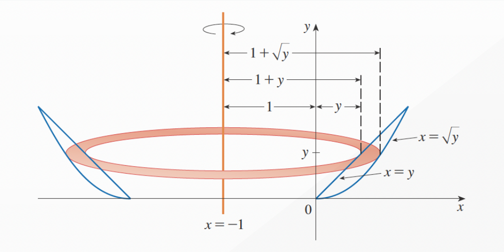
$$
\begin{aligned}
V &= \int_a^b \pi \left((\text{rayon externe})^2 - (\text{rayon interne})^2 \right) dx \\
&= \int_a^b \pi \left(R^2 - r^2 \right) dx \\
&= \int_a^b \pi \left((y_1 - y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2 \right) dx
\end{aligned}
$$

pour un axe de rotation horizontal et par

$$
\begin{aligned}
V &= \int_c^d \pi \left((\text{rayon externe})^2 - (\text{rayon interne})^2 \right) dy \\
&= \int_c^d \pi \left(R^2 - r^2 \right) dy \\
&= \int_c^d \pi \left((x_3 - x_1)^2 - (x_3 - x_2)^2 \right) dy
\end{aligned}
$$

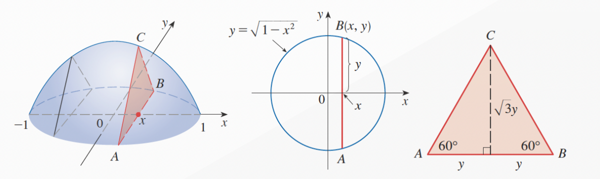
pour un axe de rotation vertical.

Exemple 2.6: Calculer le volume du solide obtenu en faisant tourner la région de l'Exemple 2.4 autour de la droite $x = -1$.

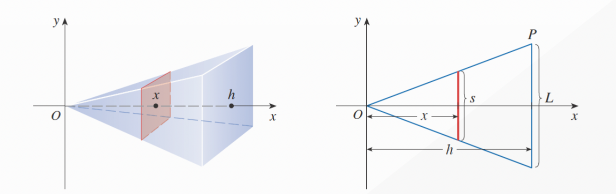


Il s'agit maintenant de déterminer les volumes de solides qui ne sont pas des solides de révolution, mais dont les sections ont des aires faciles à calculer.

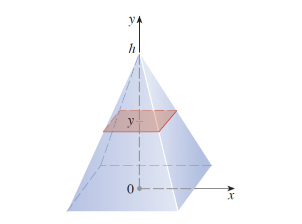
Exemple 2.7: La fugure ci-dessous montre un solide dont la base est un cercle de rayon 1 et dont chaque section par un plan perpendiculaire à la base est un triangle équilatéral. Déterminez le volume de ce solide.



Exemple 2.8: Calculez le volume d'une pyramide à base carrée de coté L et de hauteur h.



- Il n'est pas nécessaire dans cette exemple, de faire coïncider le sommet de la pyramide avec l'origine: on le fait pour simplifier les calculs.



- Si on fait plutôt coïncider le centre de la base avec l'origine, et qu'on place le sommet sur la partie positive de l'axe des y, comme dans la figure ci-dessus, il est facile de vérifier qu'on obtient l'intégrale

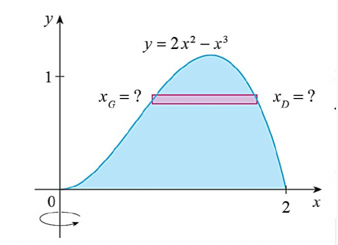
$$V = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}(h-y)^2 dy = \frac{L^2 h}{3}$$

Calcul d’un volume par la méthode des tubes cylindriques

Calcul d'un volume par la méthode des tubes cylindriques

- Il est très difficile de résoudre certains problèmes de volume à l'aide des méthodes étudiées dans la section précédente.

- C'est le cas par exemple du solide résultant de la rotation autour de l'axe Oy de la région délimitée par les courbes $y = 2x^2 - x^3$ et $y = 0$.

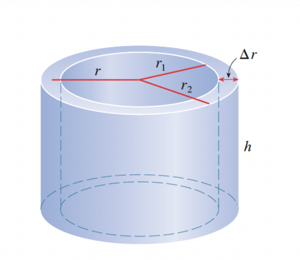


- Si on le découpe perpendiculairement à l'axe Oy, on a une rondelle.

- Et déterminer les rayons interne et externe de la rondelle, demande de résoudre par rapport à x l'équation cubique $y = 2x^2 - x^3$. Ce qui n'est pas facile!

- Il existe une autre méthode, la méthode des tubes cylindriques, plus facile à appliquer dans ce cas.

- La figure suivante représente un tybe cylindrique de hauteur h, de rayon interne r_1 et de rayon externe r_2.



▷ On obtient son volume V en soustrayant le volume V_1 du cylindre interne du volume V_2 du cylindre externe:

$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 \\ &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi \left(r_2^2 - r_1^2 \right) h \\ &= \pi \left(r_2 + r_1 \right) \left(r_2 - r_1 \right) h \\ &= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h \left(r_2 - r_1 \right). \end{aligned}$$

- En posant $\Delta r = r_2 - r_1$ (l'épaisseur du tube) et $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ (le rayon moyen du tube), la formule du volume du tube cylindrique devient alors

$$V = 2\pi r h \Delta r$$

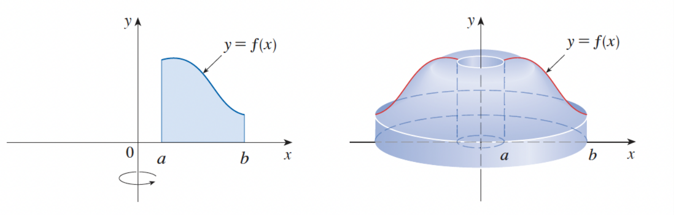
- On peut la mémoriser sous la forme suivante:

$$V = [\text{circonférence}][\text{hauteur}][\text{épaisseur}].$$

▷ Soit maintenant S le solide résultant de la rotation autour de l'axe Oy de la région délimitée par les courbes

✓ $y = f(x)$ [où $f(x) \geq 0$], $y = 0$,

✓ $x = a$ et $x = b$, où $b > a \geq 0$.



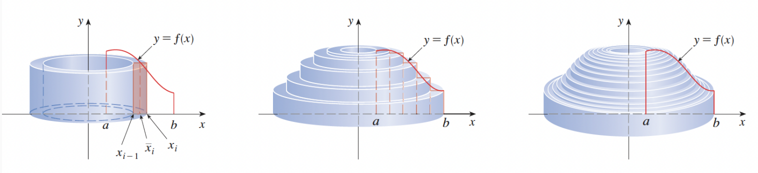
Solide S obtenu par rotation autour de Oy.

▷ On divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ d'une même longueur

$$\Delta x = (b - a)/n,$$

et on note $\bar{x}_i$ le milieu du i-ième sous-intervalle.

▷ Si on fait tourner le rectangle de base $[x_{i-1}, x_i]$ et de hauteur $f(\bar{x}_i)$ autour de l'axe Oy,



▷ on obtient un tube cylindrique de rayon $\bar{x}_i$, de hauteur $f(\bar{x}_i)$ et d'épaisseur Δx, dont le volume est

$$V_i = (2\pi\bar{x}_i)\,[f(\bar{x}_i)]\,\Delta x$$

▷ Ainsi, on obtient une valeur approchée du volume V de S en faisant la somme des volumes respectifs de toutes les tubes:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} (2\pi\bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\Delta x$$

- Cette approximation s'améliore lorsque n tend vers l'infini ($n \to \infty$).

- Grâce à la définition de l'intégrale, on arrive ainsi à

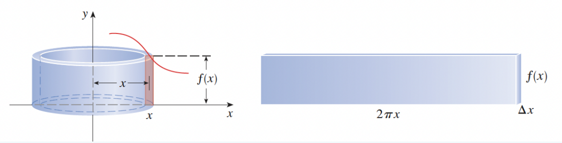
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (2\pi\bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\Delta x = \int_a^b (2\pi x) f(x) dx$$

- Le volume du solide résultant de la rotation autour de l'axe Oy de la région sous la courbe $y = f(x)$, entre a et b, est donné par

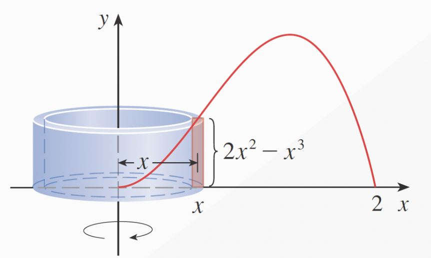
$$V = \int_a^b (2\pi x) f(x) dx \quad \text{où} \quad 0 \leq a < b.$$

- Pour se rappeler de cette formule, imaginer un tube cylindrique, de rayon x, de circonférence $2\pi x$, de hauteur $f(x)$ et d'épaisseur Δx ou dx, découpé et posé à plat comme dans cette figure

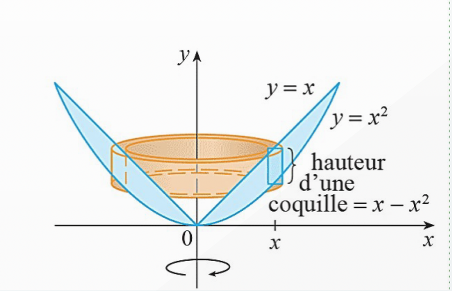
$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circonférence}} \underbrace{[f(x)]}_{\text{hauteur}} \underbrace{dx}_{\text{épaisseur}}$$



Exemple 3.1: Déterminez le volume du solide résultant de la rotation autour de l'axe Oy de la région délimitée par les courbes $y = 2x^2 - x^3$ et $y = 0$ (l'axe Ox).

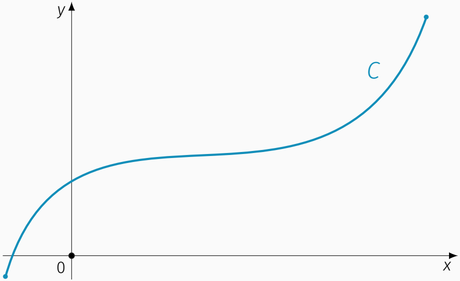


Exemple 3.2: Calculez le volume du solide obtenu en faisant tourner autour de l'axe Oy la région comprise entre $y = x$ et $y = x^2$.



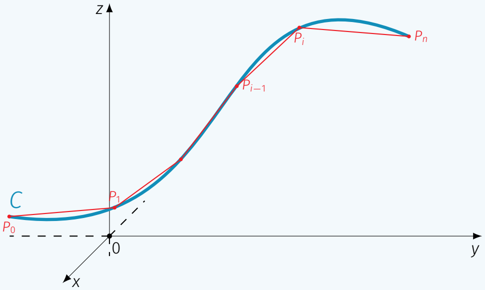
La longueur d’un arc de courbe

- Qu'entend-on par longueur d'un arc de courbe?
- Si la courbe est un polygone, il est facile de calculer sa longueur.
- Il suffit d'additionner les longueurs respectives des segments de droite qui forment le polygone.
- Par exemple pour la courbe C, on pourrait prendre une ficelle et lui faire épouser la courbe puis mesurer la ficelle avec une règle.



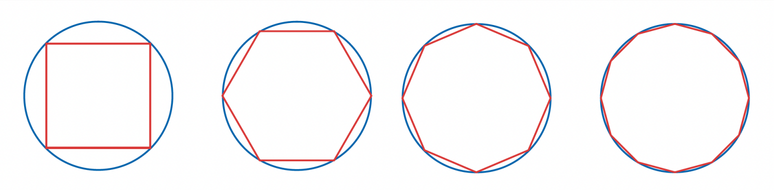
- Il est difficile d'obtenir avec précision la longueur avec cette approche.
- On a besoin d'une approche plus précise du calcul de la longueur d'un arc de courbe, analogue aux définitions d'aire et de volume.

- La longueur d'une courbe quelconque sera déterminée en l'approchant d'abord par un polygone.



- Puis, on effectuera un passage à la limite en augmentant le nombre de segments du polygone.

▷ Ce procédé est bien connu dans le cas d’un cercle dont la circonférence est égale à la limite des périmètres des polygones inscrits dans le cercle.

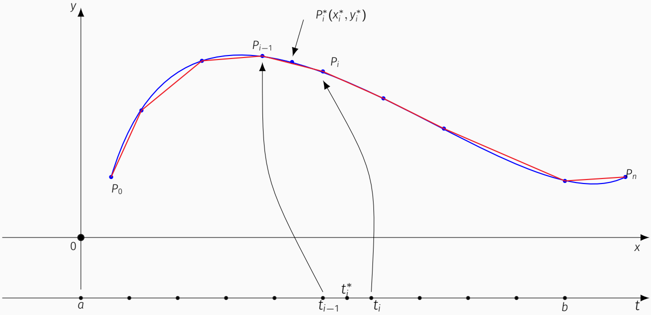


Cercle approximé par une suite de polygones inscrits.

- On suppose que la courbe C est décrite par les équations paramétriques

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad \text{où} \quad a \leq t \leq b.$$

- On divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles égaux de longueur Δt.



- Si $t_0, t_1, \cdots, t_n$ désignent les points de division, alors $x_i = f(t_i)$ et $y_i = g(t_i)$ sont les coordonnées des points $P_i\,(x_i, y_i)$.

- Et le polygone de sommets $P_0, P_1, \ldots, P_n$, est une approximation de C.

- La longueur L de C est approximativement égale à la longueur de la ligne polygonale.
- Et cette approximation est d'autant meilleure que n est grand.

On définit donc la **longueur L de l'arc de courbe** C, comme la limite des longueurs des segments de droite:

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| .$$

Ce procédé, utilisé pour définir la longueur d'un arc de courbe, est très semblable à celui qui a servi à définir l'aire et le volume.

- En vue du calcul, il faut disposer d'une autre expression de L.

- Si on pose $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ et $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, alors la longueur du $i^{\text{ième}}$ segment du polygone est égale à

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

- Or, par la définition de la dérivée en tout point $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$, on sait que

$$f'(t_i^*) \approx \frac{\Delta x_i}{\Delta t}, \text{ lorsque } \Delta t \text{ est très petit.}$$

- Par conséquent,

$$\Delta x_i \approx f'(t_i^*)\Delta t, \quad \Delta y_i \approx g'(t_i^*)\Delta t.$$

- Et donc

$$\begin{aligned}
|P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\
&= \sqrt{\left[f'(t_i^*)\Delta t\right]^2 + \left[g'(t_i^*)\Delta t\right]^2} \\
&= \sqrt{\left[f'(t_i^*)\right]^2 + \left[g'(t_i^*)\right]^2}\,\Delta t.
\end{aligned}$$

▷ De là

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[f'(t_i^*)\right]^2 + \left[g'(t_i^*)\right]^2}\,\Delta t.$$

▷ Ceci est une somme de Riemann de la fonction $\sqrt{\left[f'(t_i^*)\right]^2 + \left[g'(t_i^*)\right]^2}$, le passage à la limite conduit à une expression de L sous forme d'intégrale

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

Formule de la longueur d'un arc

Lorsqu'une courbe C est décrite par les équations paramétriques $x = f(t)$ et $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, alors sa longueur est donnée par

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{4}$$

Exemple 4.1: Combien mesure l'arc de la courbe $x = t^2$, $y = t^3$ compris entre les points $(1, 1)$ et $(4, 8)$.

▷ Si la courbe était donnée par l'équation $y = f(x)$, on pourrait considérer x comme paramètre.

- Les équations paramétrique seraient alors $x = x$, $y = f(x)$ et la formule (4) s'écrirait

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{5}$$

▷ De même, si la courbe était donnée par l'équation $x = f(y)$, on regarderait y comme paramètre.

- Les équations paramétrique seraient alors $x = f(y)$, $y = y$ et la formule (4) s'écrirait

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy. \tag{6}$$

Exemple 4.2: Estimez la longueur de l'arc de l'hyperbole $xy = 1$ d'extrémités $(1, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$.

Exemple 4.3: Calculer la longueur de l'arc de parabole $y^2 = x$ compris entre $(0,0)$ et $(1,1)$.

Valeur moyenne d’une fonction

- Pour calculer la valeur moyenne d'un nombre fini de valeurs $y_1, y_2, \cdots, y_n$, on a la formule

$$y_{moy} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

Comment calculer la température moyenne d'une journée, si on la releve à tout moment (générant donc un nombre infini de valeurs)?

- La réponse à cette question est l'objet de cette partie.

- Déterminons de façons générale, la valeur moyenne de la fonction $y = f(x),\ a \leq x \leq b$.

- Divisons d'abord l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles égaux, chacun de longueur $\Delta x = (b - a)/n$.

- En choisissant des points $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ dans chaque sous-intervalle, calculons la valeur moyenne des valeurs $f(x_1^*), f(x_2^*), \cdots, f(x_n^*)$
$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}.$$

- Comme $n = (b - a)/\Delta x$, cette valeur moyenne prend la forme
$$\begin{aligned}\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\frac{b-a}{\Delta x}} &= \frac{1}{b-a}\left[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x\right] \\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x\end{aligned}$$

- En faisant croître n, nous calculons la valeur moyenne d'un grand nombre de valeurs (peu espérées).

▷ Suivant la définition de l'intégrale, la valeur limite est

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

La **valeur moyenne d'une fonction** f sur un intervalle $[a, b]$ est

$$f_{moy} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

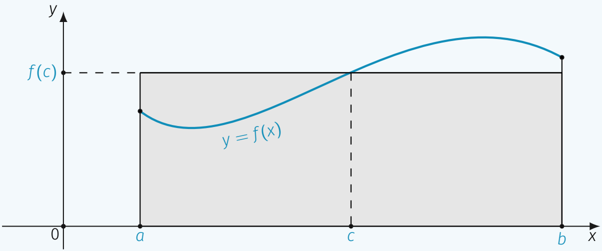
Exemple 5.1: Calculez la valeur moyenne de la fonction $f(x) = 1 + x^2$ sur l'intervalle $[1, 2]$.

Théorème de la valeur moyenne pour intégrales

- Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors il existe un nombre c dans $[a,b]$ tel que

$$f(c) = f_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

- Si $f(x) \geq 0$, ce théorème s'interprète comme suit: «il existe un nombre c tel que le rectangle de base $[a,b]$ et de hauteur $f(c)$ a la même aire que celle de la région sous la courbe de f sur $[a,b]$».



Détermination de la valeur de c - Théorème de la valeur moyenne

Exemple 5.2: Déterminez la valeur de c dans le Théorème de la valeur moyenne pour intégrales, lorsque $f(x) = 1 + x^2$, $a = -1$ et $b = 2$.

Applications en physique et en sciences appliquées

Applications en physique et en sciences appliquées

- À coté des applications de type géométrique (aires, volumes et longueurs) des intégrales,
- nous allons nous intéresser à des applications en physique et en sciences appliquées:
  - le calcul du travail,
  - et des centres de masse.
- La stratégie sera la même et consistera à:
  - diviser la grandeur physique en de petits morceaux,
  - de calculer une valeur approximative de chaque morceau,
  - d'additionner les résultats et de passer à la limite.

- Dans le language de tous les jours, le mot travail signifie la quantité d'efforts qu'il faut fournir pour effectuer une tâche.

- Alors qu'en physique, ce mot a une signification de l'idée de force:

1 Si $s(t)$ désigne la position d'un object se déplaçant en ligne droite, la **force** F appliquée à l'object est définie par le produit de sa masse et de son accélération:

$$F = m \times \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

C'est la deuxième loi de Newton sur le mouvement.

▷ Dans le systeème international (SI):

- La masse est mesurée en kilogrammes (kg),
- le temps en secondes (s),
- et la force en newtons ($N = kg \cdot m/s^2$).

▷ Donc, une force de 1 N qui agit sur une masse de 1 kg produit une accélération de 1 m/s^2.

2 Si l'accélération est constante, la force F est aussi constante et le **travail** effectué est défini par

$$W = F \times d, \quad \boxed{\text{travail} = \text{force} \times \text{distance}}$$

où d est la distance que l'object a parcouru.

L'unite du travail est le newton-mètre appelé encore le joule (J).

Exemple 6.1: Si on soulève du sol un livre d'une masse de 1.2 kg pour le poser sur une table de 0.7 m de haut,

- la force exercée est égale et opposée à celle qu'exerce la gravité: l'équation donne 1

$$F = mg = (1.2)(9.8) = 11.76\,N.$$

- Et de là, par l'équation 2, le travail effectué est de

$$W = F \times d = (11.76)(0.7) \approx 8.2\,J.$$

- Mais si le poids d'un objet est de 20 N et qu'il est soulevé à 6 m du sol, alors la force appliquée est $F = 20\,N$ et le travail effectué est

$$W = F \times d = 20 \cdot 6 = 120\,J.$$

- L'équation 2 ne définit le travail que dans une situation où la force est constante.
- Que se passe-t-il si au contraire la force est variable?
- Supposons qu'un object se déplace le long de l'axe Ox dans le sens positif, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$.
- En chaque point entre a et b, une force $f(x)$ est appliquée à l'object.
- On divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ de longueur Δx.
- Si Δx est petit (i.e. n est assez grand), la force $f(x_i^*)$, où $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, est quasi constante.

- ▷ Le travail W_i, qui déplace l'objet de x_{i-1} à x_i, est approximativement

$$W_i \approx f(x_i^*)\Delta x.$$

- ▷ Le travail total est approché par la somme des travaux élémentaires W_i

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

- ▷ Cette approximation s'améliore probablement à mesure que n grandit.

3 Le travail effectué pour déplacer un objet de a jusqu'à b est la limite de la somme des travaux élémentaires

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx.$$

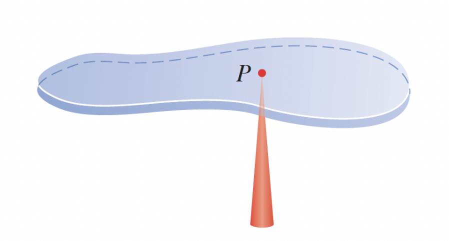
Le travail produit par une force variable

Exemple 6.2: Une force de $x^2 + 2x$ newton (N) est appliquée à un objet, lorsqu'il se trouve à x mètre (m) de l'origine. Quel est le travail effectué si l'objet se déplace de $x = 1$ à $x = 3$?

Exemple 6.3: Un ressort a une longueur naturelle de 10 cm. Lorsqu'il est soumis à un effort de traction 40 newton (N), il passe de 10 à 15 cm. Calculez le travail qu'il faut développer pour étirer ce ressort de 15 à 18 cm.

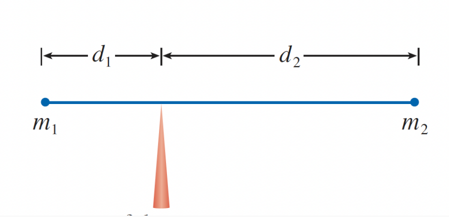
Exemple 6.4: Un câble de 900 newton et mesurant 30 m de long est suspendu au sommet d'un gratte-ciel. Quel est le ravail nécessaire pour remonter le câble au sommet du gratte-ciel?

- L'objectif ici est de réussir à situer le point P sur lequel doit reposer une fine plaque, pour rester en équuilibre.



Ce point est appelé centre de masse (ou centre de gravité) de la plaque.

▷ Le cas le plus simple est celui de deux masses m_1 et m_2 fixées aux extrémités d'une tige de masse négigeable.



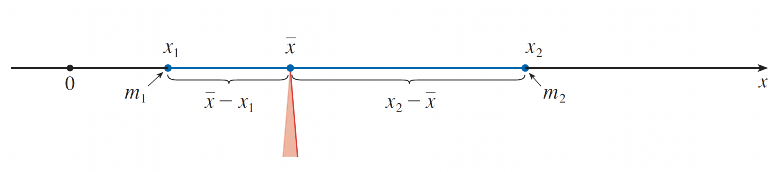
Point d'appui.

▷ Ces masses sont à des distances d_1 et d_2 d'un point d'appui.

4 D'après la loi du levier d'Archimède, la tige est en équilibre lorsque

$$m_1 \times d_1 = m_2 \times d_2.$$

- Plaçons la tige le long de l'axe Ox où la masse m_1 se situe en x_1, la masse m_2 en x_2 et le centre de masse en $\overline{x}$.



- Ainsi, on a les distances $d_1 = \overline{x} - x_1$, $d_2 = x_2 - \overline{x}$ et par la loi 4 on obtient

$$m_1 \times (\overline{x} - x_1) = m_2 \times (x_2 - \overline{x}) \;\Rightarrow\; \overline{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

5 m_1x_1 et m_2x_2 sont appelés les **moments** des masses m_1 et m_2.

6 Le centre de masse $\overline{x}$ s'obtient en divisant la somme des moments par la masse totale $m = m_1 + m_2$

$$\overline{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

7 De façon générale, pour un système de n masses $m_1, m_2, \cdots, m_n$ situées aux abscisses $x_1, x_2, \cdots, x_n$, le centre de masse est donné par

$$\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) = \frac{M}{m},$$

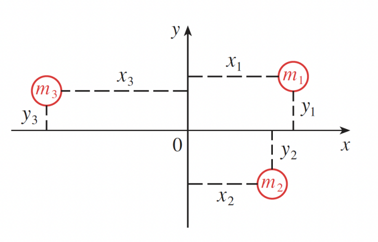
où $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ est la masse totale du système. La somme des moments individuels

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

est appelée le **moment du système par rapport à l'origine**.

Cas bidimensionnel - Le plan Oxy

▷ On envisage maintenant un système de n points matériels de masses $m_1, m_2, \cdots, m_n$ dispersés aux points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ du plan Oxy.



8 Le **moment du système par rapport à Oy** est défini par

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

M_y mesure la tendance du système à tourner autour de l'axe Oy.

9 Le **moment du système par rapport à Ox** est défini par

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i.$$

M_x mesure la tendance du système à tourner autour de l'axe Ox.

10 Les coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$ du centre de masse sont

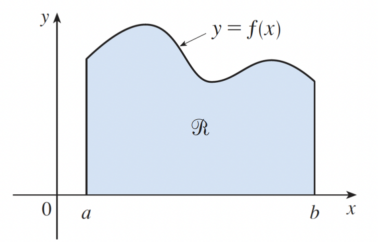
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m},$$

où $m = \sum m_i$ est la masse totale du système.

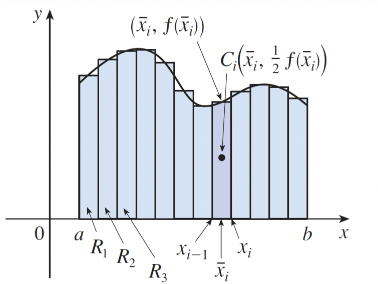
Comme $m\bar{x} = M_y$ et $m\bar{y} = M_x$, le centre de masse $(\bar{x}, \bar{y})$ est le point en lequel une seule masse m aurait les mêmes moments que tout le système.

Exemple 6.5: Déterminez les moments et le centre de masse d'un système de trois points de masses respectives 3, 4 et 8 localisés en $(-1, 1)$, $(2, -1)$ et $(3, 2)$.

▷ Soit la plaque $\mathscr{R}$ de densité uniforme ρ, comprise entre les droites $x = a$ et $x = b$, au dessus de l'axe Ox et sous le graphique de la fonction f



▷ On divise $[a, b]$ en n sous-intervalles de taille Δx aux points $x_0, \cdots, x_n$.



▷ Pour chaque i, on fait le choix $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, qui détermine une approximation de $\mathscr{R}$ (voir figure)

- Le $i^{\text{ième}}$ rectangle d'approximation R_i a comme centre de masse son centre géométrique $C_i(\overline{x}_i, \frac{1}{2}f(\overline{x}_i))$.

- Son aire est égale à $f(\overline{x}_i)\Delta x$ et sa masse

$$\rho f(\overline{x}_i)\Delta x.$$

- Le moment M_y de R_i par rapport à l'axe Oy, est le produit de sa masse par la distance entre C_i et l'axe Oy, qui vaut $\overline{x}_i$. On a ainsi

$$M_y(R_i) = [\rho f(\overline{x}_i)\Delta x]\,\overline{x}_i = \rho \overline{x}_i f(\overline{x}_i)\Delta x.$$

- On a une approximation du moment de $\mathscr{R}$ en sommant ces moments:

Le moment de $\mathscr{R}$ par rapport à Oy est donné par

$$M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \overline{x}_i f(\overline{x}_i)\Delta x = \rho \int_a^b x f(x)dx.$$

▷ De façon analogue, on calcul le moment M_x de R_i par rapport à l'axe Ox comme le produit de sa masse par la distance entre C_i et l'axe Ox:

$$M_x(R_i) = [\rho f(\overline{x}_i)\Delta x] \frac{1}{2} f(\overline{x}_i) = \rho \cdot \frac{1}{2} [f(\overline{x}_i)]^2 \Delta x.$$

▷ En additionnant et en prenant la limite, on obtient le moment M_x:

■ Le moment de $\mathscr{R}$ par rapport à Ox est donné par

$$M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \cdot \frac{1}{2} [f(\overline{x}_i)]^2 \Delta x = \rho \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 \, dx.$$

▷ Le centre de masse de la plaque est défini de manière à ce que

$$m\bar{x} = M_y \quad \text{et} \quad m\bar{y} = M_x$$

▷ Or, la masse de la plaque est le produit de sa densité par son aire:

$$m = \rho A = \rho \int_a^b f(x)dx$$

■ Le centre de masse de la plaque est ainsi situé au point $(\bar{x}, \bar{y})$ donné:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{A} \times \int_a^b xf(x)dx$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{A} \times \int_a^b \frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2 dx$$

Exemple 6.6: Situez le centre de masse d'une plaque semi-circulaire de rayon r.

Exercices suggérés

Exercices suggérés

1. Calculez l'aire de la région délimitée par la courbe $y = x^3 - 4x$ et la droite $y = -3x$.

2. La base d'un solide est la région délimitée par l'ellipse d 'équation $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Chaque section transversale, perpendiculaire à l'axe des x, est un triangle équilatéral. Calculez le volume de ce solide.

3. Soit la région R délimitée par les paraboles d'équations $y = 1 - x^2$ et $y = x^2 - 1$. Calculez le volume du solide engendré par la rotation de la région R autour de la droite $y = -1$.

4. Soit la région R délimitée par les courbes $y = \frac{2}{1+x^2}$, $y = x^2$ et la droite $x = 0$. Calculez le volume du solide engendré par la rotation de la région R autour de l'axe des y.

5. Calculez l'aire de la région enfermée entre la parabole $y = 4 - x^2$ et la parabole $y = x^2 - 2x$.

6. Calculez le volume des solides engendrés si on fait tourner la région du plan délimitée par les courbes $y = e^x, y = 1, x = 0$ et $x = 1$

   a. autour de l'axe des x,

   b. autour de l'axe des y.

7. a. Tracez la région du plan délimitée par les courbes d'équations $y = x^3$ et $y = \sqrt{x}$.

   b. Trouvez l'aire totale de la région décrite à la sous-question a).

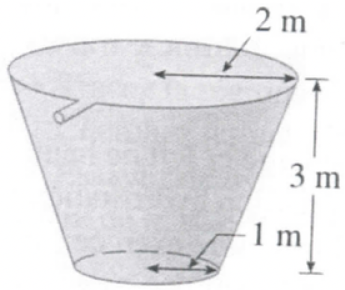
   c. Déterminez le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des y de la région décrite à la sous-question a).

   d. Écrivez l'intégrale (ne pas la calculer) qui donne la longueur de la courbe d'équation $y = f(x) = x^3$ entre $x = 1$ et $x = 2$.

8. Un réservoir est en forme de tronc de cône (voir figure).

a. Calculez le volume du réservoir.

b. Si le réservoir est rempli d'eau $(\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3})$, calculez le travail nécessaire pour pomper l'eau par la sortie. tronc de cône.



tronc de cône

Informations sur le cours

Questions ou commentaires? Envoyez-les à:

- Ibrahima Dione (ibrahima.dione@umoncton.ca)
- Disponibilités:
  - Mercredi 9H00 - 12H00, MRR B-214
  - Jeudi 13:00 - 16:00, MRR B-214
- Manuel du cours:
  J. Stewart. *Analyse concepts et contextes*. Volume 1, Fonctions d'une variable, DeBoeck Université 3^e édition.