Параллелограмм и его площадь

Определение и свойства параллелограмма

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого две пары параллельных сторон.

Теорема 3 (*о свойствах параллелограмма*)
*
1) **Противоположные стороны параллелограмма равны.**
2) **Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.**
*

Доказательство. 1) Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Проведем его диагональ AC. Так как отрезки AB и CD параллельны, то накрест лежащие углы $\angle 1$ и $\angle 2$. Аналогично так как $BC \parallel AC$, то $\angle 3 = \angle 4$.

У треугольников ABC и ACD сторона общая, а углы, пригающие к этой стороне, соответственно равны. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle CDA$ (по второму признаку равенства треугольников). А тогда $AB = CD$ и $BC = DA$. Первое свойство доказано.

2) Проведем и вторую диагональ. O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Треугольники ABO и CDO равны, так как $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 5 = \angle 6$. Поэтому $AO = CO$ и $BO = DO$. ■

Признаки параллелограмма

Теорема 4
*
Четырехугольник называется параллелограммом, если:
1) **он имеет две пары равных противоположных сторон;**
2) **его диагонали, пересекаясь, делятся пополам;**

3) сумма соседних углов равна 180°;
4) противоположные углы равны;
5) две его противоположные стороны равны и параллельны.

*

Доказательство. 1) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны равны: $AB = CD$ и $AB = BC$. Пусть диагональ AC четырехугольника $ABCD$ разбивает его на два треугольника. Треугольники ABC и CDA равны, так как $AB = CD$, $BC = AD$ и сторона AC общая. Следовательно, соответственные углы этих треугольников равны. Поэтому $\angle 3 = \angle 4$. Из равенства этих накрест лежащих углов, образованных прямыми BC и AD и секущей AC, вытекает, что прямые BC и AD параллельны.

Аналогично из равенства углов 1 и 2 вытекает параллельность AB и CD. Итак, $ABCD$ – параллелограмм.

2) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O и делятся ей пополам: $AO = CO$ и $BO = DO$. Так как вертикальные углы равны, то $\triangle AOD = \triangle COB$ (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, $AD = BC$. Аналогично $AB = CD$. По первому признаку четырехугоник $ABCD$ – параллелограмм.

3) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и параллельны: $AB = CD$ и $AB \parallel CD$. Проведем диагональ AC и рассмотрим треугольнии ABC и CDA. Они равны по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, стороны BC и AD равны и $ABCD$ – параллелограм (по первому признаку). ■

Площадь параллелограмма

Высотой параллелограмма называют общий перпендикуляр его противоположных сторон (или содержащих их прямых).

Теорема 5
*
Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и проведенной к ней высоты ($\boldsymbol{S = ah}$).
*

Доказательство. Проведем диагональ параллелограмма. Она разбивает его на два треугольника с равными основаниями a и высотами h. Площади этих треугольников равны $\frac{1}{2}ah$. Площадь S параллелограмма равна сумме площадей этих треугольников.

Значит, $S = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah = ah$. ■

Частные виды параллелограмма

Прямоугольник можно определить как четырехугольник, все углы которого равны. Так как его противоположные стороны равны, то он является параллелограммом.

Свойство прямоугольника
*
Диагонали прямоугольника равны.
*

Доказательство. Проведем в прямоугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD. Прямоугольные треугольники BAD и CDA равны. Поэтому равны и их гипотенузы: $AC = BD$. ■

Признак прямоугольника
*
Параллелограмм, диагонали которого равны, является прямоугольником.
*

Доказательство. Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали равны: $AC = BD$. Тогда $\triangle ACD = \triangle DBA$. Следовательно, $\angle D = \angle A$. Аналогично доказывается что $\angle A = \angle B$ и $\angle B = \angle C$. Поэтому $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$. Итак, $ABCD$ — прямоугольник. ■

Ромбом называется четырехугольник, все стороны которого равны. Ромб является параллелограммом, по первому признаку параллелограмма.

Свойство ромба
*
Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов ромба.
*

Доказательство. Пусть диагонали AC и BD ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Так как $AO = OC$, то BO — медиана равнобедренного треугольника ABC. Поэтому BO — биссектриса и высота этого треугольника. Следовательно, $\angle ABO = \angle CBO$ и $BO \perp AC$. ■

Признаки ромба
*
1) **Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то параллелограмм является ромбом.**
2) **Если диагональ параллелограмма является биссектрисой угла, то параллелограмм является**

ромбом.
*

Квадрат называется четырехугольник, у которого все стороны и углы равны. Он является прямоугольником, ромбом и параллелограммом одновременно. (У него нет характерных свойств, так как квадрат — это совокупность свойств параллелограмма, прямоугольника и ромба)

Параллелепипед. Призмы.

Параллелепипедом называется многогранник, у которого шесть граней и все они — параллелограммы.

Многогранник, все грани которого прямоугольники — **прямоугольный параллелепипед.**

Два параллельных друг другу ребра параллелепипеда, не лежащие в одной его грани, являются противоположными сторонами **диагонального сечения параллелепипеда**, которое также представляет собой параллелограмм.

Диагональное сечение параллелепипеда рассекает его на две **треугольные призмы.**

$\boldsymbol{n}$**-угольной призмой** называется многогранник, имеющий $n+2$ грани, из которых две грани, называемые основанием призмы, представляют собой n-угольники с соответсвенно равными и параллельными сторонами, а остальные n граней — параллелограммы.

Эти (остальные) грани называют **боковыми гранями призмы**, а их стороны, не лежащие в основании призмы, — **боковыми ребрами призмы.**

Все боковые грани призмы равны и параллельны друг другу.

Параллелепипед — частный случай четырехугольной призмы: любая пара его противоположных сторон может считаться её основаниями.

Треугольник — вырожденная трапеция, параллелограмм — частный случай трапеции. Отсюда площадь треугольника, параллелограмма и трапеции можно вычеслять с помощью одной формулы — формулы площади трапеции ($S = \frac{1}{2}(a+b)h$).

Created by KAD