

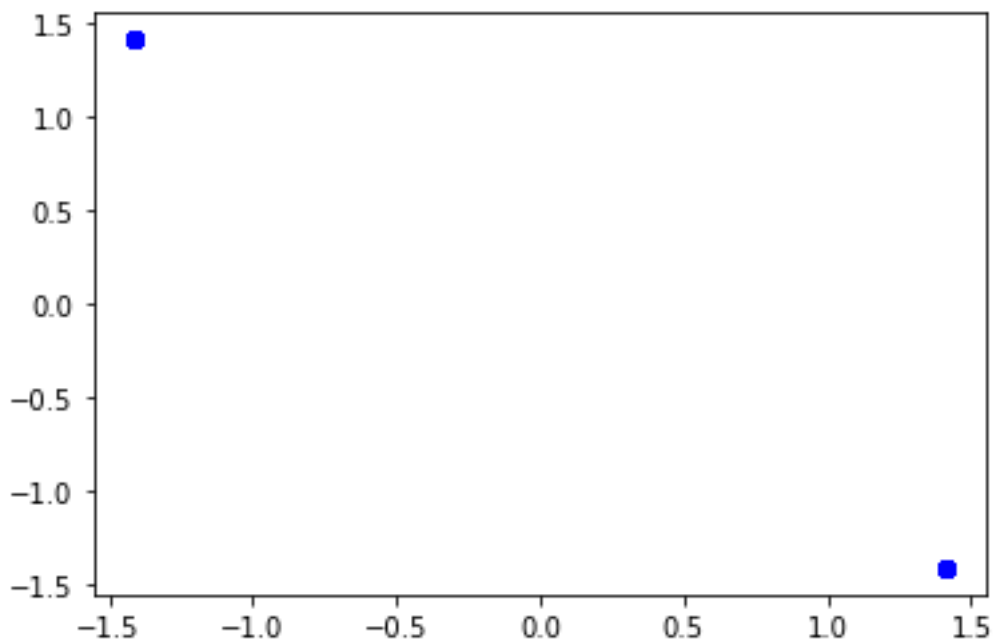
2変数非線形方程式の解を求めるNewton-Raphson法

1. $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 0$
 $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$ とする.

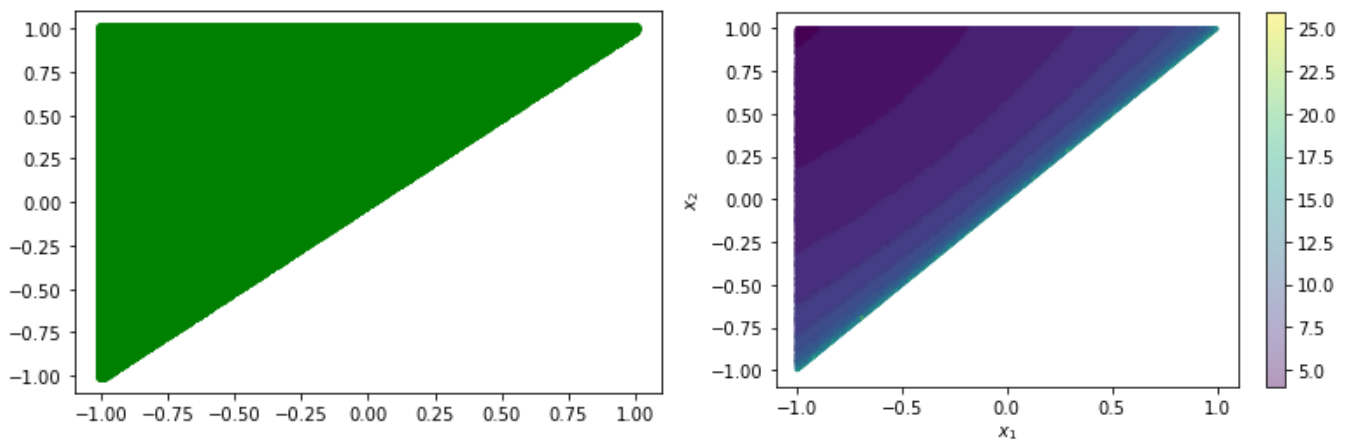
NewtonRaphson01.py

初期値 $[-1, -1] \times [1, 1]$ をNewton-Raphson法のプログラムに代入した結果以下のような収束値となった.

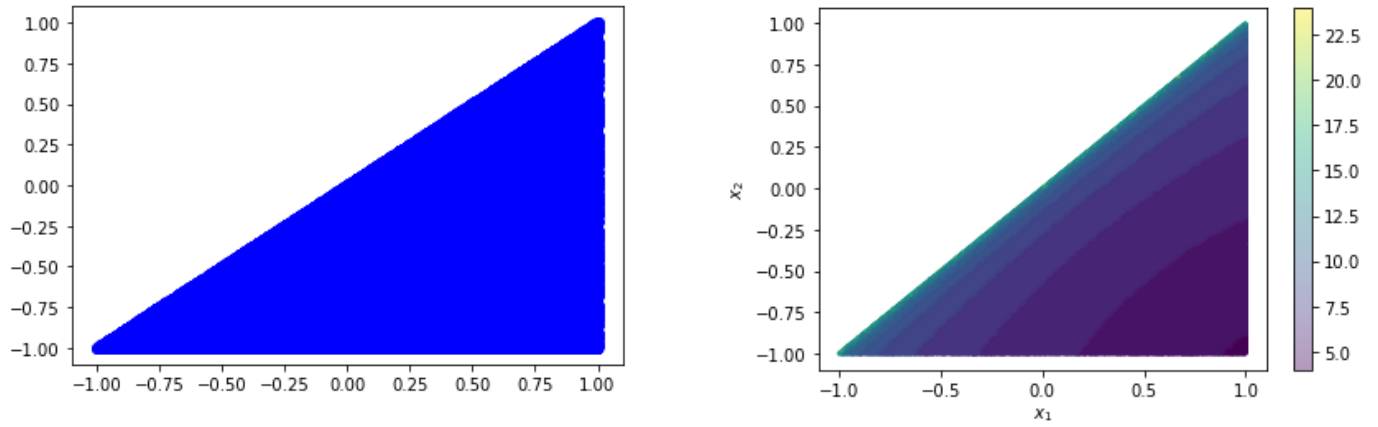
(以下, 横軸 x_1 , 縦軸 x_2)



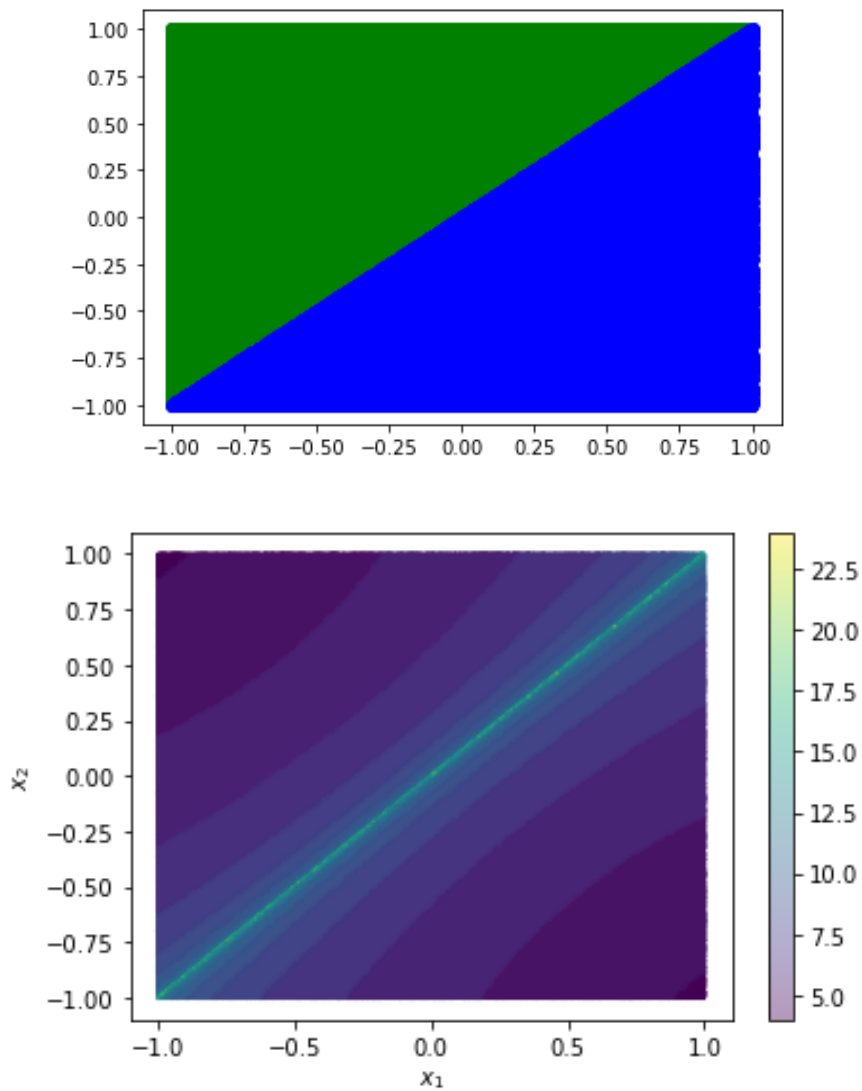
収束値が $(-1.4142135623 \dots, 1.4142135623 \dots)$ となる初期値は以下のようになった. (右の図は反復回数を色の濃さで表したもの.)



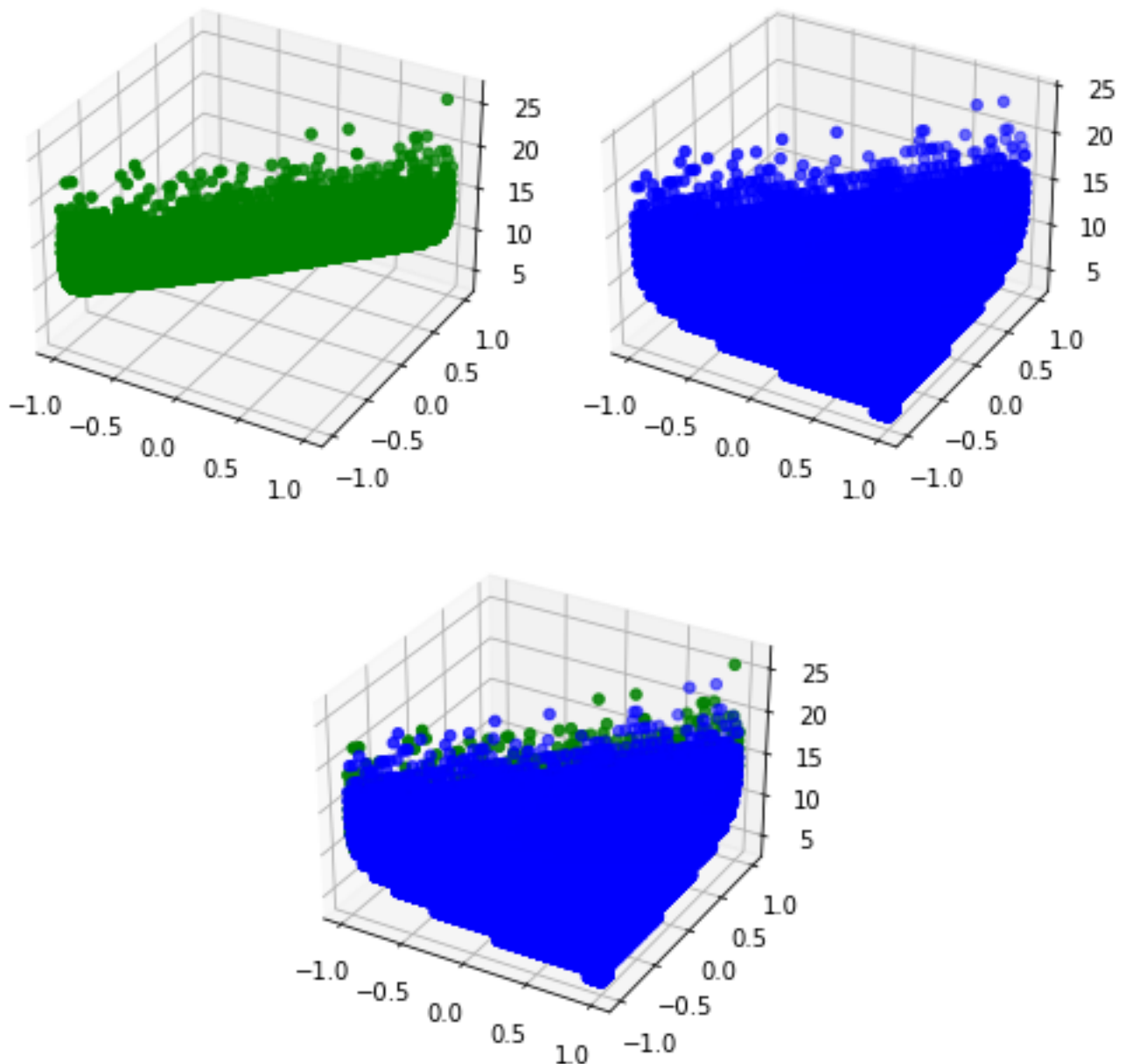
収束値が $(1.4142135623 \dots, -1.4142135623 \dots)$ となる初期値は以下のようになった.



組み合わせると以下のようになる.



高さを反復回数とした3次元グラフを作ると以下ようになる。(2次元グラフと色は同じである。)



<考察>

以上より初期値 $[-1, -1] \times [1, 1]$ からどの点を取っても2つのうちどちらかの収束値に収束することがわかる。また図からもわかるように、緑と青の境が $x_1 = x_2$ となっている。試しに $x_1 = 1, x_2 = 1$ や、 $x_1 = -0.5, x_2 = -0.5, x_1 = 0, x_2 = 0$ のように $x_1 = x_2$ となる初期値をとるとエラーになってしまう。

3次元グラフより、緑と青の境界線($x_1 = x_2$)に近づくほど反復回数が増えていくのがわかる。(境界線から遠のくほど反復回数が小さい。)

反復回数の平均: 6.929703回

反復回数最高: 26回, 反復回数最低: 4回

2. $f(x_1, x_2) = x_2^3 - 3x_1^2x_2 = 0$

$g(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 4 = 0$ とする.

NewtonRaphson02.py

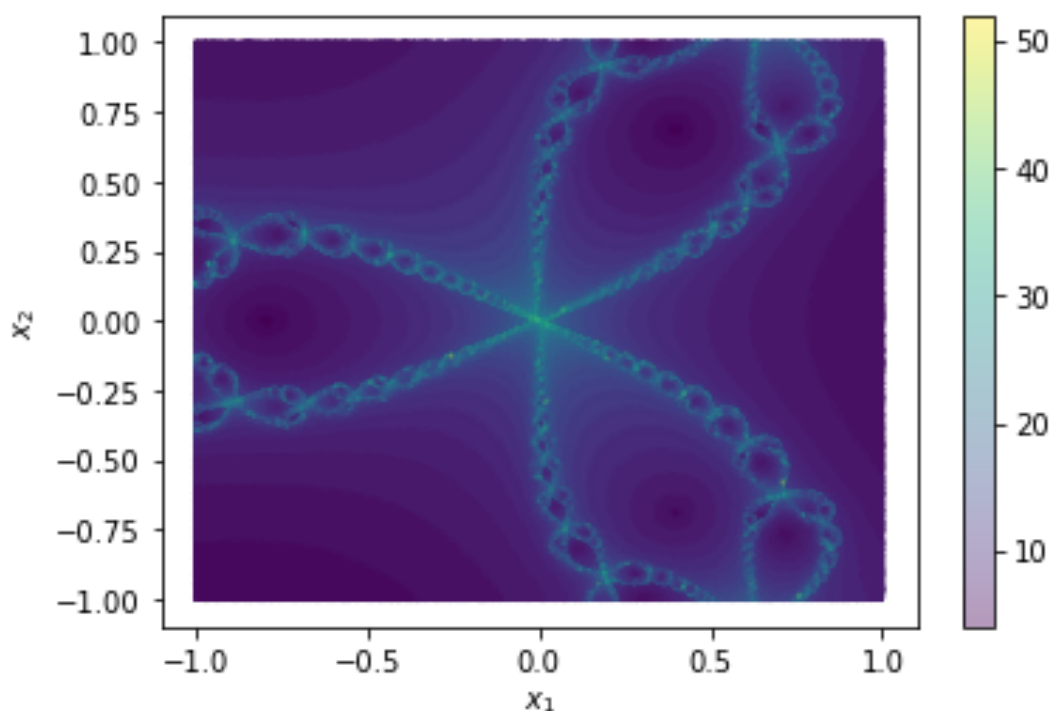
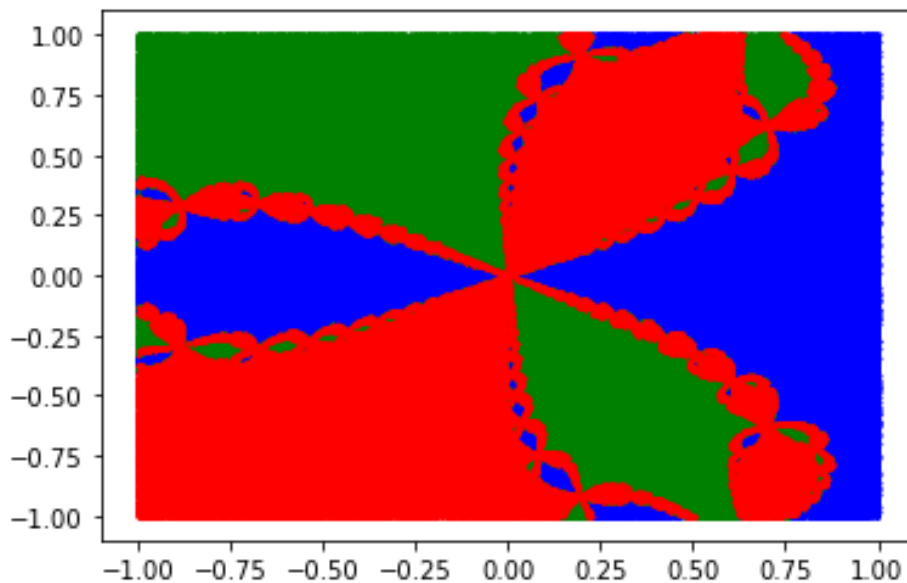
NewtonRaphson01.pyと同様に初期値 $[-1, -1] \times [1, 1]$ をNewton-Raphson法のプログラムに代入した結果ところ、大きく分けて3種類の収束値がでた.

① $(-0.79370052598 \dots, 1.37472963699 \dots)$ Green

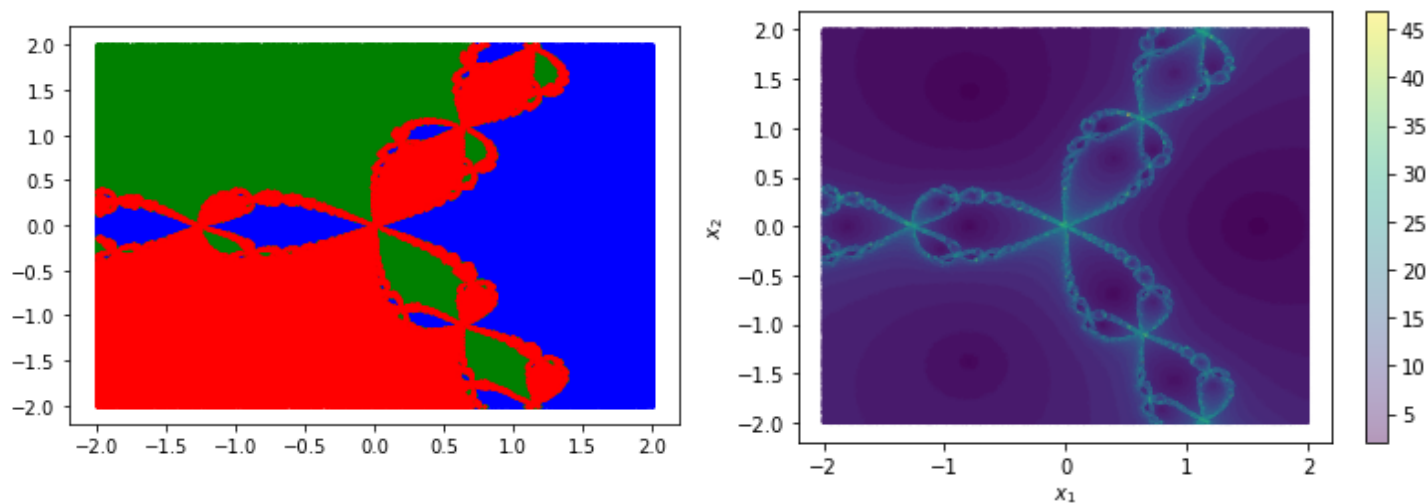
② $(-0.79370052598 \dots, -1.37472963699 \dots)$ Red

③ $(1.587401051968 \dots, \dots)$ Blue

上の結果となる初期値を緑, 赤, 青で色付けしたところ, 以下のようにった.

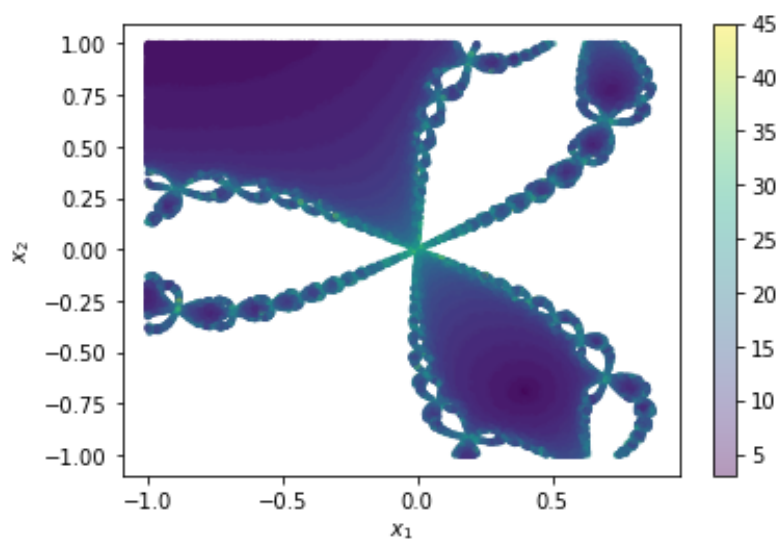


また, $[-2, -2] \times [2, 2]$ で初期値をとると以下ようになった.

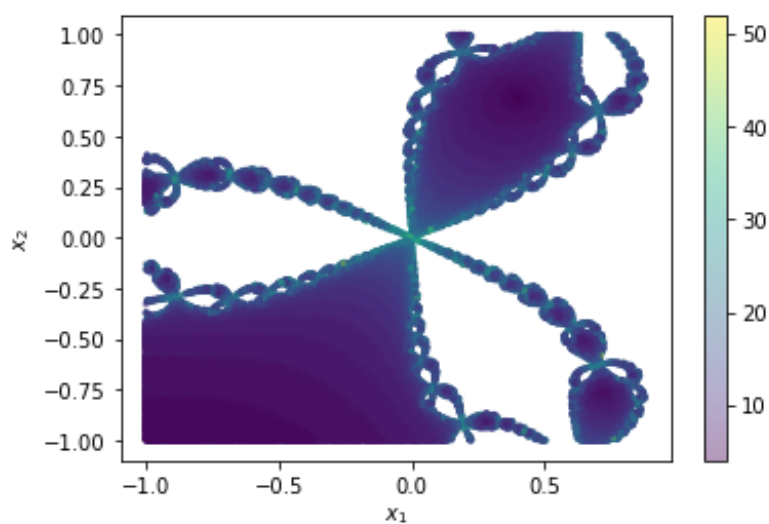


分けてグラフ化すると..

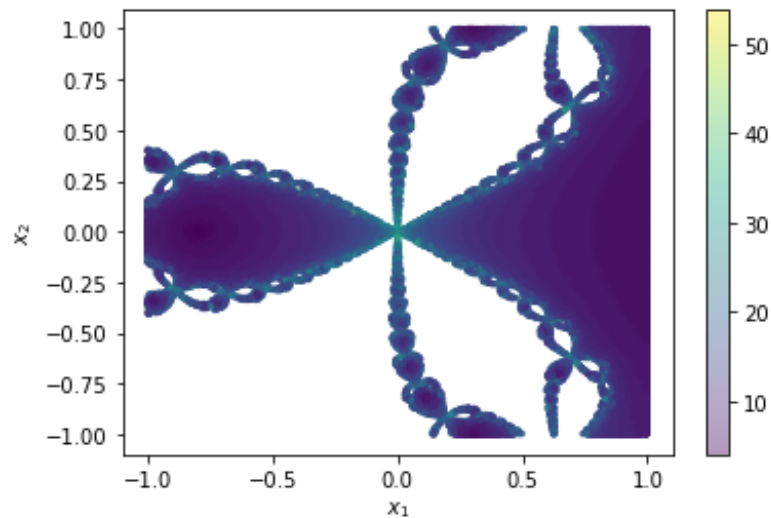
① $(-0.79370052598 \dots, 1.37472963699 \dots)$



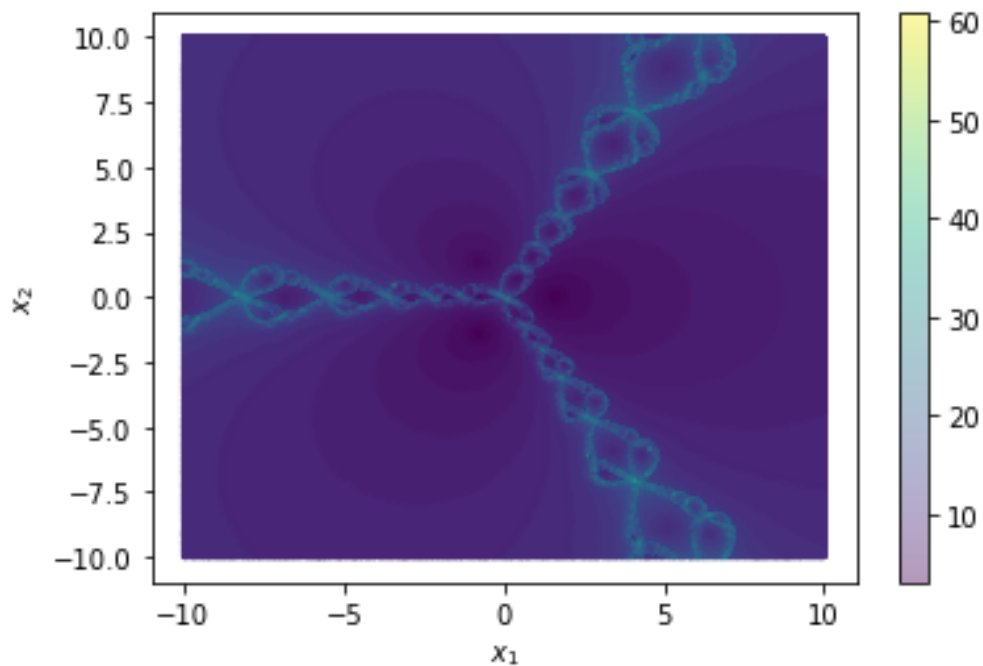
② $(-0.79370052598 \dots, -1.37472963699 \dots)$



③ (1.587401051968..., ...)



初期値を $[-10, -10] \times [10, 10]$ から1000万個とると以下のようになった.



<考察>

収束値より, ①緑と②赤は同じような値にうまく収束する.

しかし, ③青は $x_1 = 1.587401051968\dots$ と決まるものの, x_2 がうまく決まらず While文を抜け出してしまふ.

最後の図からもわかるように反復回数が大きい初期値がチェーン型の模様を描き, 続いていくことがわかる.

マンデルブロ集合に似ていて, 模様を拡大しても同じ模様が出てきそう..

⇒この模様を**ニュートン・フラクタル**と呼ぶ.

複素数の範囲でNewton-Raphson法を適用するとニュートン・フラクタルという複雑な図形が現れる.

4次式, 5次式 . . . と次数を増やすとこのチェーン模様が4本, 5本 . . . と増えていくことが予想される.

反復回数の平均: 9.223021回

反復回数最高: 54回

- ・ 初期値: $(-0.7098683232540588, -0.2530403691589891)$
- ・ 収束値: $(1.5874010519681538, -2.9887220689452776e-14)$

反復回数最低: 3回

- ・ 初期値: $(0.3972774272715158, -0.6874111686190114)$
- ・ 収束値: $(-0.7937005259740587, 1.3747296369939834)$