

ロジスティック写像 / カオス・フラクタル

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), 0 \leq a \leq 4, x_n \in [0,1]$$

$$0 < x_0 < 1$$

<理想>

周期	aの範囲
4	$1 + \sqrt{6} < a \leq 3.5440903$
8	$3.5440903 < a \leq 3.5644073$
16	$3.5644073 < a \leq 3.5687594$
32	$3.5687594 < a \leq 3.5696916$
64	$3.5696916 < a \leq 3.5698913$
128	$3.5698913 < a \leq 3.5699340$
カオス	$3.56994... < a < 4$

津田 一郎(監訳) Chaos An Introduction to Dynamical Systems (カオス 第3巻 力学系入門) 丸善出版 2012年2月. より引用.

<自作>

周期	aの範囲
4	$1 + \sqrt{6} < a \leq 3.5437897$
8	$3.5437897 < a \leq 3.5643897$
16	$3.5643897 < a \leq 3.5686537$
32	$3.5686537 < a \leq 3.5690198$
64	$3.5690198 < a \leq 3.5699089$
128	$3.5699089 < a \leq 3.5699203$
カオス	$3.56994... < a < 4$

aの範囲を求めるプログラム, chaos.pyを作成した. 結果は上記のようになった.

“””

<結果>

周期:4

3.449489742783178 0.0001 0.001

3.543789742783377

周期:8

3.543789742783377 0.0001 0.001

3.5643897427834204

周期:16

3.5643897427834204 1e-06 0.0001

3.5686537427840164

周期:32

3.5686537427840164 1e-07 0.0001

3.569019842783417

周期:64

3.569019842783417 1e-07 0.0001

3.569908952782998

周期:128

3.569908952782998 1e-08 0.0001

3.569920312782929

“””

計算方法は、まずaの初期値(a0), aの増加幅(step), 求める周期(period), 許容する誤差(error)を代入する.

次に、numpyのarange()を用いてaをstepずつ増加させ最大の4.0になると終了するfor文を作った. このfor文の中では変数xに自作関数のlogistic()を呼び出し、aを渡している.

logistic()では、aを受け取り、xの初期値(x0)を持つリストxを作成. ここではx0は0.001に固定してある. その後for文で $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ を計算し、リストxに追加していく作業を1000回繰り返す. 計算結果は浮動小数点数になるためround()を

用いて小数点以下10桁で丸めこんでいる。最後にリストxの後ろから300個(各周期の数より多ければ良い)の要素を返している。

帰ってきたリストxの1個目の要素(x[0])と周期の数個目の要素(x[period])の差の絶対値が許容する誤差(error)より大きい場合、aを出力し終了する。

計算する中で浮動小数点数の誤差問題がどうしても出てしまうため理想の結果のようになかなか上手くいかなかった。そのため周期を増やすたびに、aの増加幅(step)、許容する誤差(error)を小さくしたり、小数点組み込みの桁(round関数)を増やしながら計算した。

結果としては理想の範囲と一致させることはできなかったが、近い値を得ることができた。

また、可視化してプログラムを作成しやすくするためロジスティック写像のグラフを作成した。

