

Exercise Questions 2.2

2024 年 5 月 2 日 辻勇吹樹

Q.1 表 A.2 記載の軌道長半径を用いて、地球と火星が orbital conjunction(太陽から見て 180 度反対に並ぶこと。[合]) が起こるまでの時間間隔を決定せよ。

地球と火星の公転周期をそれぞれ T_E, T_M とおく。このとき地球と火星の 1 年に回転する角度は

$$\theta_E = \pi/T_E, \theta_M = \pi/T_M \quad (1)$$

で与えられる。すなわち 1 年で 2 天体には $|\theta_E - \theta_M|$ の角度だけ離れることになる。したがって conjunction から次の conjunction までの時間 t_{con} は

$$t_{con} = \frac{\pi}{|\theta_E - \theta_M|} = \frac{T_E T_M}{|T_E - T_M|} \quad (2)$$

と求められる。今回与えられているのは軌道長半径 a であるが、ケプラーの第 3 法則より $T^2 \propto a^3$ となることを用いる。比例定数は地球の値を用いれば $1[\text{年}^2/\text{AU}^3]$ となるので

$$t_{con} = \frac{a_E^{3/2} a_M^{3/2}}{|a_E^{3/2} - a_M^{3/2}|} \approx 2.135[\text{年}] \quad (3)$$

となり、約 2 年と 1.6 ヶ月と求められる。

Q.2 固定された軌道で地球と火星の間の最短距離がほぼ 2 倍に変化することを示せ。

Q.1 より conjunction は約 780 日で起きるので、 $780[\text{day}] - 2[\text{year}] = 50[\text{day}]$ 、すなわち 50 度ずつ conjunction の位置は動くことになる。ケプラーの第 1 法則より、地球と火星は太陽を焦点の 1 つとする楕円軌道上を動く。方程式は

$$\frac{(x - ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \quad (4)$$

で与えられる。図 1 は地球と火星の軌道を表した図である。

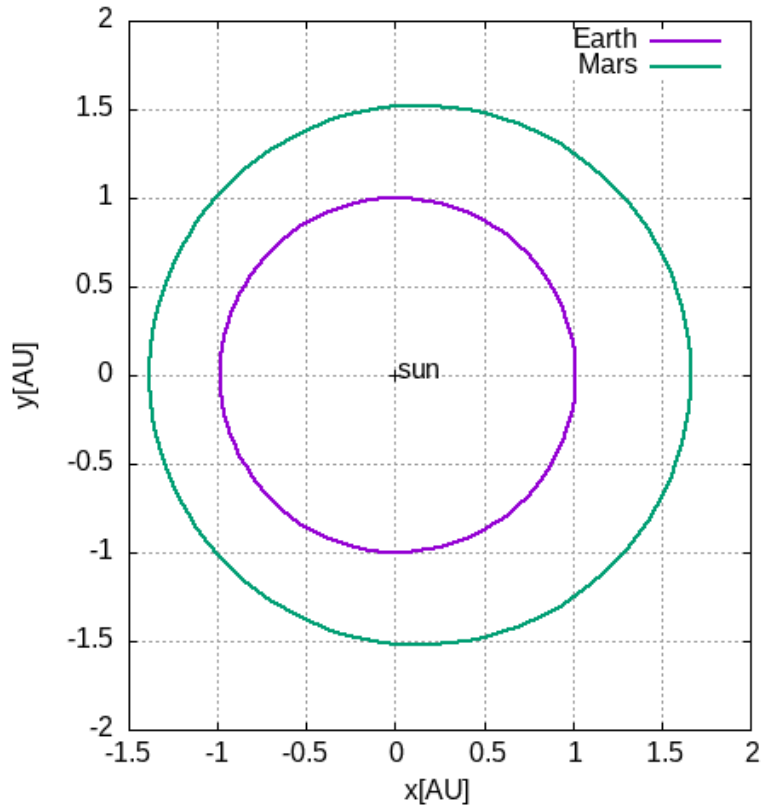


図 1 地球と火星の軌道。原点 (0,0) に太陽がある。軌道傾斜は考えていない。

地球はほぼ円運動をしているが火星は比較的離心率 e が大きいので、地球と火星の距離は常に変化していく。もし最短の位置 (図 1 で地球の座標はほぼ (-1,0)) で conjunction が起こったとすると、地球と火星の間の距離は太陽からの距離を用いて

$$[b - ae]_M - [b - ae]_E \approx 0.39[\text{AU}] \quad (5)$$

となる。一方最長の位置 (図 1 で地球の座標はほぼ (1,0)) で conjunction が起こったとすると、地球と火星の間の距離は

$$[b + ae]_M - [b + ae]_E \approx 0.64[\text{AU}] \quad (6)$$

となる。したがってこの最短距離は 1.6 倍ほど変化することになる。より厳密には昇交点黄経 Ω から地球と火星の軌道の傾きも考慮すべきであるが、地球の軌道が火星に比べて十分に円形なのでここでは考えないこととした。

Q.3 連続して「非常に近い」opposition(太陽から見て一直線に並ぶこと。「衝」)となるまでのおよその時間間隔を求めよ。

Q.2 で最も距離の近い opposition だったとき (図 1 で地球の座標はほぼ (1,0)) ときが最も距離の近い opposition である。Q.1 で求めた会合周期 T_{con} より、整数 n, m と地球の公転周期 T_E を用いて $nT_{con} = mT_E$ となるととき地球は元の位置に戻るの、連続した「非常に近い」opposition が起きることになる。 $T_E = 365$ 日とすると

$$\frac{T_{con}}{T_E} \approx 2.14 \approx 14.96/7 \quad (7)$$

よりおおよそ 15 年が周期となる。より精度良く計算すると 79 年周期でより近い opposition が起きる。

Q.4 表 A.2 に与えられている $a_0, e_0, \varpi_0, \lambda_0$ の値と、1985 年-2002 年の間の地球と火星の軌道運動を決定するためにケプラー方程式の数値解を用いよ。地球と火星の相対的な軌道傾斜角を無視して、1985 年-2002 年の間に最も接近した衝は 1988 年 9 月、最も離れた衝は 1995 年 2 月であることを示し、この間の最小距離を求めよ。

Appendix.A より J2000(2000 年 1 月 1 日 12 時正午)における軌道要素は次のように与えられている。

$$a_E = 1.000000011, \quad e_E = 0.01671022, \quad \varpi_E = 102^\circ.94719, \quad \lambda_E = 100^\circ.46435 \quad (8)$$

$$a_M = 1.52366231, \quad e_M = 0.09341233, \quad \varpi_M = 336^\circ.04084, \quad \lambda_M = 355^\circ.45332 \quad (9)$$

まず平均近点角 M を計算すると

$$M_E = \lambda_E - \varpi_E = 357^\circ.51716 \quad (10)$$

$$M_M = \lambda_M - \varpi_M = 19^\circ.41248 \quad (11)$$

となる。さらにケプラー方程式の数値解より e の 4 次まで考慮すると

$$\begin{aligned} E \approx M + e \sin M + e^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2M \right) + e^3 \left(\frac{3}{8} \sin 3M - \frac{1}{8} \sin M \right) \\ + e^4 \left(\frac{1}{3} \sin 4M - \frac{1}{6} \sin 2M \right) \end{aligned} \quad (12)$$

となるので代入すると

$$E_E = 357^\circ.51642 \quad (13)$$

$$E_M = 19^\circ.44651 \quad (14)$$

と求められる。また平均運動 n は

$$n_E = \frac{2\pi}{T_E} \approx \frac{2\pi}{a_E^{3/2}} \approx 2\pi[\text{/year}] \quad (15)$$

$$n_M = \frac{2\pi}{T_M} \approx \frac{2\pi}{a_M^{3/2}} \approx 1.06\pi[\text{/year}] \quad (16)$$

これらの値を用いると、任意の時刻における平均近点角は

$$M = M_{2000} + n(t - t_{2000}) \quad (17)$$

となり、これをケプラー方程式の数値解に代入することで離心近点角を計算できる。ただし年月を一致させるためには、地球と火星の軌道の水平方向の傾きを考慮する必要がある。軌道傾斜 I を無視すれば、この傾きは近点角 ϖ となる。したがって最後に求めた座標 (x, y) について ϖ だけ回転させてやればよい。

以上のことを考えて c 言語で 2000 年 1 月 1 日正午から 1 ヶ月ごとに戻って軌道計算を行なうプログラムを実装した。J2000 を基準としたため、ここでは 1985-2000 年の計算のみを実行した。コードは最後に記載している。計算を実行すると確かに最も接近した衝は 1988 年 9 月、最も離れた衝は 1995 年 2 月であった。そのときの軌道の様子と地球火星間の距離は図 1,2 に示している。図を見ると完全な衝とはなっていないが、ここでの計算は 1 月 1 日正午のものであるため $\pi/10$ までのズレを許容している。

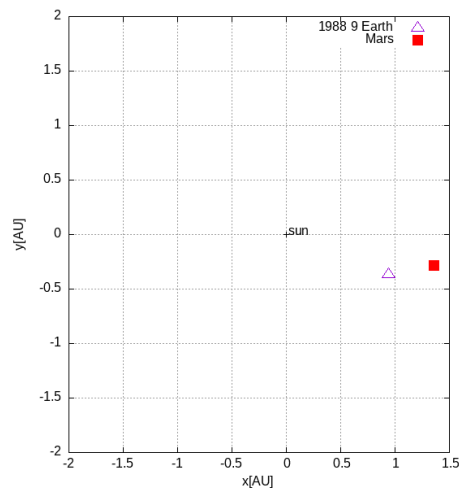


図2 1988年9月の最も接近した衝。距離は0.399AUとなっている。

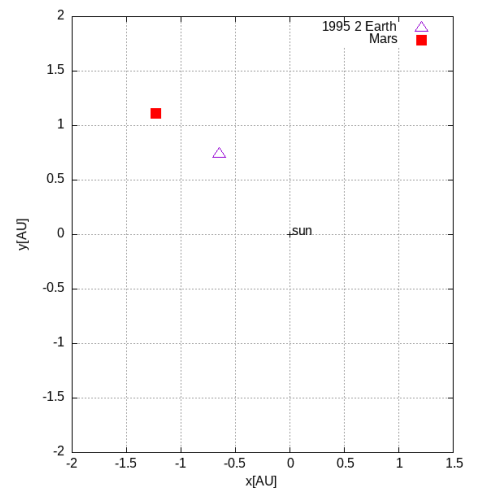


図3 1995年2月の最も離れた衝。距離は0.706AUとなっている。

```

1
2 #include <stdio.h>
3 #include <math.h>
4 #include <stdlib.h>
5
6 int radiancheck(double *a){//をradian0-2の間にする関数 pi
7     double check=*a;
8     while(0>=check){
9         check+=2*M_PI;
10    }
11    while(check>=2*M_PI){
12        check-=2*M_PI;
13    }
14    *a=check;
15 }
16
17 int kepler(double *E, double M, double e){//はMradian
18     double Er=M+e*sin(M)+e*e*sin(2*M)*0.5+e*e*e*(0.375*sin(3*M)

```

```

        -0.125*sin(M))+e*e*e*e*(sin(4*M)/3.0-sin(2*M)/6.0);
19     radiancheck(&Er);
20     *E=Er;
21     return 0;
22 }
23
24 int position(double *x, double *y, double E, double a,double e,double
    varpi){
25     double xr=a*(cos(E)-e);
26     double yr=a*sqrt(1-e*e)*sin(E);
27     *x=xr*cos(varpi)-yr*sin(varpi);
28     *y=xr*sin(varpi)+yr*cos(varpi);
29
30     return 0;
31 }
32
33 int main(void)単位は//AU年,,radian
34 {
35
36     FILE *fp,*fq, *fg;
37     char filename[128];
38     double aE=1.00000011;
39     double aM=1.52366231;
40     double eE=0.01671022;
41     double eM=0.09341233;
42     double ME2000=6.239851574;//mean anomaly
43     double MM2000=0.338811692;
44     double EE2000=6.239838726;//eccentric anomaly
45     double EM2000=0.339405546;
46     double nE=6.28318427;//mean motion
47     double nM=3.34077157;
48     double xE2000=0.982350572;//での J2000(x,y)
49     double yE2000=0.043326963;
50     double rE2000=sqrt(xE2000*xE2000+yE2000*yE2000);
51     double dxE2000=-0.276891887;
52     double dyE2000=6.382967195;
53     double xM2000=1.294412706;
54     double yM2000=0.505049702;

```

```

55     double rM2000=sqrt(xM2000*xM2000+yM2000*yM2000);
56     double dxM2000=-1.858355928;
57     double dyM2000=5.240433398;
58     double varE2000=1.796767421;
59     double varM2000=5.865019079;
60     int year=2000;
61     int month=1;
62     double ME, MM, EE, EM;
63     double xE,xM, yE, yM;
64     fq = fopen("kep00000.dat", "w");
65     double distance=sqrt((xE2000-xM2000)*(xE2000-xM2000)+(yE2000-
        yM2000)*(yE2000-yM2000));
66     fprintf(fq,"%lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf %d %d\n",EE2000,
        xE2000,yE2000,EM2000,xM2000,yM2000,distance,year,month);
67     for (int t = 1; t <= 15*12; t += 1)
68     {
69         sprintf(filename, "kep%05d.dat", t);
70         fp = fopen(filename, "w");
71         ME=ME2000-nE*(double)t/12;
72         MM=MM2000-nM*(double)t/12;
73         radiancheck(&ME);
74         radiancheck(&MM);
75         kepler(&EE, ME,eE);
76         kepler(&EM, MM,eM);
77         position(&xE,&yE,EE,aE,eE,varE2000);
78         position(&xM,&yM,EM,aM,eM,varM2000);
79         distance=sqrt((xE-xM)*(xE-xM)+(yE-yM)*(yE-yM));
80         if(month-1==0){
81             month=12;
82             year=year-1;
83         }else{
84             month=month-1;
85         }
86         fprintf(fp,"%lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf %d %d\n",EE,
            xE,yE,EM,xM,yM,distance,year,month);
87         double rot=EE+varE2000-(EM+varM2000);
88         radiancheck(&rot);
89         if(fabs(rot)<M_PI/10)printf("%d %d %lf\n",year,month,

```

```

        distance);
90     fclose(fp);
91     if ((fg = popen("gnuplot -persist", "w")) == NULL)
92     {
93         fprintf(stderr, "Error!");
94         exit(2);
95     }
96     fprintf(fg, "set print '-' \n");
97     fprintf(fg, "set terminal png size 800,600 \n");
98     fprintf(fg, "set x1 'x[AU]' \n");
99     fprintf(fg, "set y1 'y[AU]' \n");
100    fprintf(fg, "set xr [-2:1.5] \n");
101    fprintf(fg, "set yr [-2:2] \n");
102    fprintf(fg, "set size ratio -1\n");
103    fprintf(fg, "set grid\n");
104    fprintf(fg, "set label 1 point at 0,0 'sun'\n");
105    fprintf(fg, "set output 'kep%05d.png' \n", t);
106    fprintf(fg, "plot 'kep%05d.dat' u 2:3 t '%d %d Earth'
        pointsize 2 pt 8 , 'kep%05d.dat' u 5:6 t 'Mars' pt
        5 pointsize 2 lc 'red'\n", t, year, month, t);
107    fprintf(fg, "unset output\n");
108    fprintf(fg, "set terminal qt \n");
109    fclose(fg);
110 }
111 fclose(fq);
112 return 0;
113 }

```
