

Opacity

Chapter **17**

Chapter 17

17.1 Electron Scattering

- Opacityに寄与するプロセスと、その近似式を求める。
- 量子力学による詳しい導出はここではしない。

①電子散乱：1. トムソン散乱

電磁波が電子を通過すると電子は振動してエネルギーを出す。
周波数依存性はない。

$$\kappa_{\nu} = \frac{8\pi}{3} \frac{r_e^2}{\mu_e m_u} = \frac{8\pi}{3} \frac{\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2}{\left(\frac{2}{1+X}\right) m_u} \approx 0.20(1+X)[\text{cm}^2 \text{g}^{-1}]$$

([参考](#))

17.1 Electron Scattering

非弾性衝突

①電子散乱：2. コンプトン散乱

光子のエネルギー（=温度）が高くなると、光子から電子にエネルギーが渡される。量子力学的にはトムソン散乱と同じ現象。

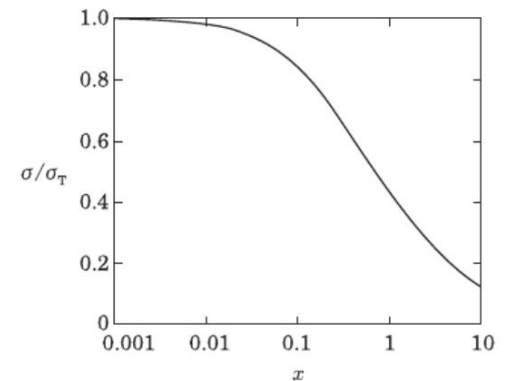
$$\kappa_\nu = \begin{cases} \kappa_T \left(1 - \frac{2h\nu}{m_e c^2} \right) & (h\nu \ll m_e c^2) \\ \frac{3}{8} \kappa_T \left(\frac{m_e c^2}{h\nu} \right) \left[\ln \left(\frac{2h\nu}{m_e c^2} \right) + \frac{1}{2} \right] & (h\nu \gg m_e c^2) \end{cases}$$

光子の平均エネルギーが $h\nu \gtrsim 0.1 m_e c^2$ となったときに重要。

Wienの法則からピーク波長は $h\nu_{max} = 4.965 kT$ となるので

ピーク波長で $T > \frac{0.1 m_e c^2}{4.965 k} \approx 1.2 \times 10^8 [\text{K}]$ で効き始める。

(10^8K で20%、 10^9K で50%断面積が下がる。)



放射素過程の基礎(2022) → 図 4.9 クライン-仁科の散乱断面積. 横軸は $x = h\nu/(m_e c^2)$, 縦軸は σ/σ_T .

17.2 Absorption Due to Free-Free Transitions

②自由自由遷移（熱制動吸収）

電子がイオンの近くを通り抜けるとき！

2個の荷電粒子が衝突することで、運動エネルギー分が光子として放射される。

$$\kappa_\nu \sim Z^2 \rho T^{-\frac{1}{2}} \nu^{-3}$$

Z : イオンの電荷数(H^+ : +1)。Krammersにより古典的な計算がなされた。

$\propto T^{-1/2}$: 電子の熱速度は $\propto \sqrt{k_B T / m}$ なので、衝突タイムスケールは $\propto T^{-1/2}$
光子なので単位長さ当たり→単位時間当たりに変換できる？

$\propto \rho$: 2つの荷電粒子が接近する確率。

※単位長さあたりの吸収係数 α_ν は電子と荷電粒子それぞれの数密度に比例する。 $\kappa_\nu = \alpha_\nu / \rho$ であり荷電粒子の背景場の依存を消している。

17.2 Absorption Due to Free-Free Transitions

②自由自由遷移（熱制動吸収）

* 参考

電子がMaxwell分布に従う時、単位体積周波数当たりのエネルギー放射率は単一エネルギーの放射率の重み付き積分で表される。

$$\begin{aligned}\epsilon_\nu &= \frac{dW(T, \omega)}{dV dt d\nu} = \frac{\int_{\nu_{min}}^{\infty} \frac{dW(\nu, h\nu)}{dV d\omega dt} 4\pi \nu^2 \exp\left(-\frac{m_e \nu^2}{2k_B T}\right) d\nu}{\int_0^{\infty} 4\pi \nu^2 \exp\left(-\frac{m_e \nu^2}{2k_B T}\right) d\nu} \\ &= \left(\frac{2\pi k_B T}{3m_e}\right)^{1/2} \frac{2^5 \pi e^6}{3 h m_e c^3} Z_i^2 n_e n_i \overline{g_B}\end{aligned}$$

$\overline{g_B}$ はガウント因子と呼ばれ、量子力学での厳密な計算の補正が入る。

前の κ_ν とは $\kappa_\nu = \frac{1}{4\pi} \frac{\epsilon_\nu}{B_\nu(T) \rho}$ の関係がある。

17.2 Absorption Due to Free-Free Transitions

②自由自由遷移（熱制動吸収）

全振動数で積分することでKrammersの式が得られる。

$$\kappa_{ff} \propto \rho T^{-7/2}$$

[導出]ロスランド平均

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\pi}{acT^3} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu$$

$B_\nu \propto \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$ より $\kappa_\nu \propto \nu^\alpha$ であれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} &\propto \frac{1}{T^3} \int_0^\infty \frac{1}{\nu^\alpha} \frac{\nu^3}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]^2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \frac{h\nu}{kT^2} d\nu \\ &\propto T^\alpha \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} \frac{x^3}{[e^x - 1]^2} e^x x dx \end{aligned}$$

となり、 $\kappa \propto T^{-\alpha}$ が出てくる。もともとの T 依存性と合わせて $T^{-7/2}$ となる。

17.2 Absorption Due to Free-Free Transitions

②自由自由遷移（熱制動吸収）

組成も考慮すると

$$n_e = \frac{\rho}{m_H} \left(X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}Z \right) = \frac{\rho}{m_H} \frac{1+X}{2}$$
$$\sum Z_i^2 n_i = \frac{\rho}{m_H} X + \frac{\rho}{4m_H} 4Y + \sum_i \frac{X_i Z_i^2}{A_i} \approx \frac{\rho}{m_H} (X + Y)$$

となるので

$$\kappa_{ff} = 3.8 \times 10^{22} (1 + X) [(X + Y) + B] \rho T^{-7/2}$$

となる。 B は重元素の寄与を表す。

$$B = \sum_i \frac{X_i Z_i^2}{A_i}$$

A_i は*i*番目の原子の質量数。

温度が上がるとスカスカ！エントロピーも上がる！

17.3 Bound-Free Transitions

③ 束縛自由遷移

中性の原子が光子からエネルギーを受け取って電離する。

静止していた電子がエネルギーを受け取る時

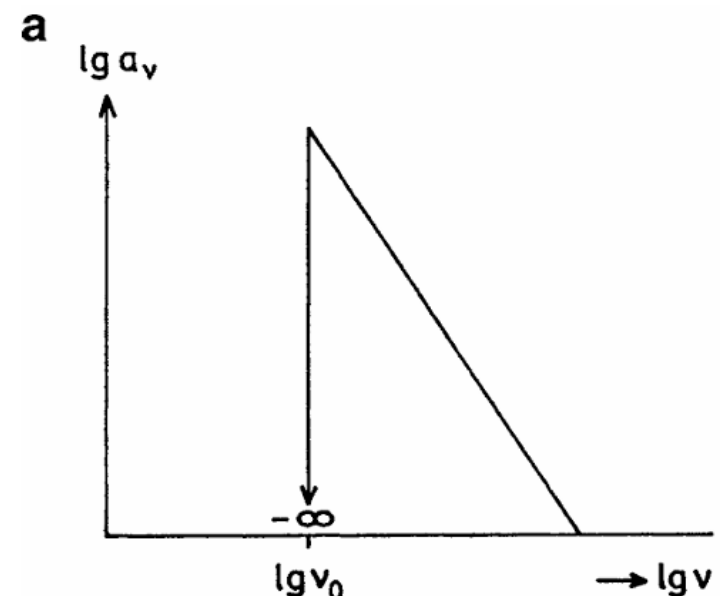
$$h\nu = \chi_0 + \frac{1}{2}m_e v^2$$

となる。 χ_0 は電離エネルギー。

電離エネルギーより小さな振動数では電離できないので、 $\nu \geq \chi_0/h$ で不連続に吸収が起こる。

$\nu \geq \chi_0/h$ ではKrammersの式とほぼ同じになる
($\kappa_\nu \propto \nu^{-3}$)と考えられるので右式のようになりそう…

(電子出てこないのに $\alpha_\nu \propto \rho^2$ となる理由は…)



17.3 Bound-Free Transitions

③束縛自由遷移

おまけ：電子出てこないのに $\alpha_\nu \propto \rho^2$ となる理由は…

束縛自由遷移を引き起こす重原子イオンの数密度を n_{Z_i} 、すでに電離したイオンの数密度を $n_{Z_{i+1}}$ とする。

このときの電離平衡は

$$n_{Z_i} \propto n_{Z_{i+1}} n_e$$

となる。また電子の多くは水素やヘリウムから出るので

$$n_{Z_{i+1}} \sim n_e$$

となる。したがって $\alpha_\nu \propto \rho^2$

17.3 Bound-Free Transitions

③束縛自由遷移

実際には励起状態ごとに電離エネルギーが異なるので、それぞれの重ね合わせとなる。なのでそれぞれの準位にいる原子の数をボルツマン分布で計算する必要がある。

中性水素原子がbf遷移することが重要だと仮定すると

$$\kappa_{bf} = X(1 - x)\tilde{\kappa}(T)$$

と表せる。 $\tilde{\kappa}(T)$ は異なる励起状態における a_ν の和のRossland積分(5.19式、右図実線)。 x が電離度で $X(1 - x)$ が中性水素の割合。

(自由束縛放射: Einstein-Milne relation)

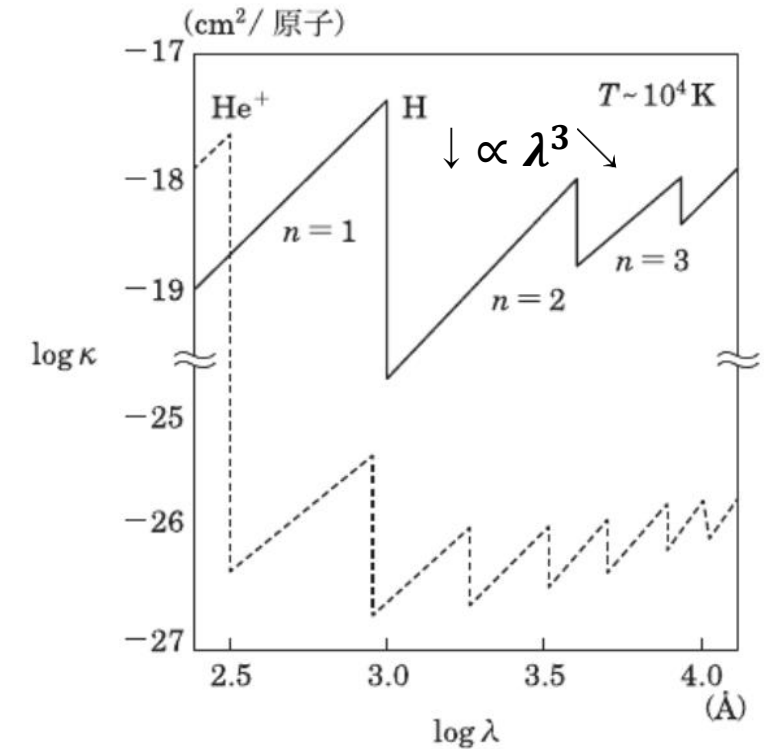


図 6.12 H または He^+ 1 個当たりの束縛-自由係数の概略 (対数グラフ). 横軸は波長で、縦軸の単位は $\text{cm}^2/\text{原子}$ 1 個. それぞれの主量子数 $n = 1, 2, \dots$ に対応する波長で大きな不連続 (吸収端) がみられる.

『放射素過程の基礎』2022

17.4 Bound-Bound Transitions

④束縛束縛遷移

$T < 10^6 \text{K}$ ではopacityの主な寄与となる。（ $T \approx 10^7 \text{K}$ では10%程度。）

光子が吸収され、電子がより高次の準位に上がると、等方的にエネルギーが再放射されるので、光子のビームが弱められる。

bf遷移と同様に、準位間の特定の周波数で有効だが、衝突によるスペクトル線の広がり（pressure broadening）が効く。

（cf. natural broadening, Doppler width）

鉄(?)はラインが多いので良く効く

すべての吸収線の吸収係数の計算が必要（放り投げ）。

（2準位系なら「自発放射・誘導放射」と「吸収」のつり合いがボルツマン分布になることから係数を決められる。）

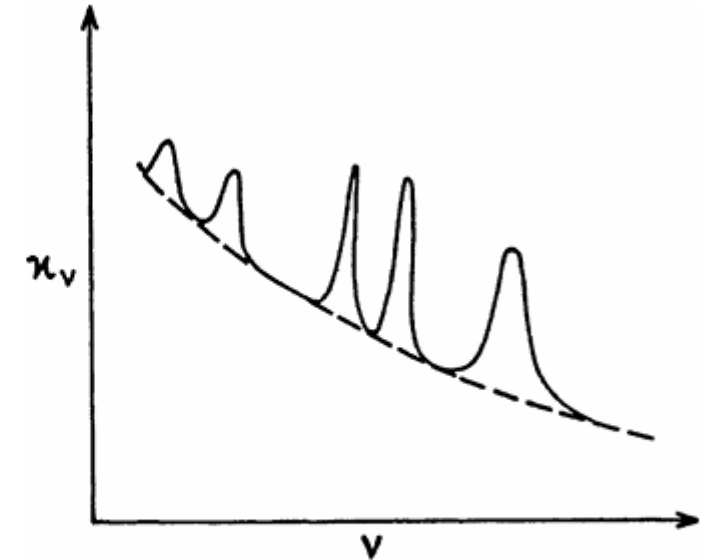


Fig. 17.3 Bound-bound transitions contributing to the opacity κ_ν

17.5 The Negative Hydrogen Ion

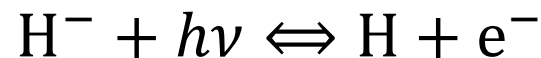
水素負イオン H^-

$T < 10^4\text{--}5\text{K}$ では中性原子が多くなりff吸収減。

また光子も減るため重元素のbf遷移も起きなくなるが、太陽の大気はかなり不透明。

⇒水素負イオンによる束縛自由遷移

光子($>0.75\text{eV}$, 1655nm (赤外))によって緩く結合した2つ目の電子を放出する。



17.5 The Negative Hydrogen Ion

水素負イオン H^-

•サハの式 (u :分配関数)

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} P_e = \frac{u_{r+1}}{u_r} 2 \frac{(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3} e^{-\chi/kT}$$

から (H^- は H よりも電子1個多いのでパウリの排他原理より)

$$\frac{n_0}{n_{-1}} P_e = 4 \frac{(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3} e^{-\chi/kT}$$

$$\begin{aligned} n_0 &= (1-x)\rho X/m_u \\ x &\text{は水素の電離度} \\ X &\text{は水素の質量比} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n_{-1} = \frac{1}{4} \frac{h^3}{(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}} m_u} P_e (1-x) X \rho e^{\chi/kT}$$

$$\square \text{スランド平均: } \kappa_{\text{H}^-} = \frac{a(T)n_{-1}}{\rho} = \frac{1}{4} \frac{h^3}{(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}} m_u} P_e (1-x) X a(T) e^{\chi/kT}$$

17.5 The Negative Hydrogen Ion

水素負イオン H^-

- $\kappa_{\text{H}^-} \propto n_{-1} \propto n_0 n_e$: H^- は中性水素と自由電子で作られるため。

- 中性の水素だけのガスであれば H^- はできない。しかし温度が上がると水素の割合 X だけ電子数 n_e が増え、 H^- ができる。すなわち温度上昇で κ_{H^-} は増加する。

- 重元素があるときは

$$n_e = \rho [xX + (1 - X - Y)/A] / m_u$$

となり、第2項の質量数 A の原子数密度が加わる。

(数eVで電離するため、比較的低温でも電子を出せる。)

低温では x が小さく温度が低いため、星の外側境界などでは重元素が κ を決めている。Metalicity依存する！

17.6 Conduction

電子など粒子による伝導は基本無視されるが、 ($l_{\text{photon}} \gg l_{\text{particle}}$)
白色矮星など**縮退した高密度の星内部**では重要。

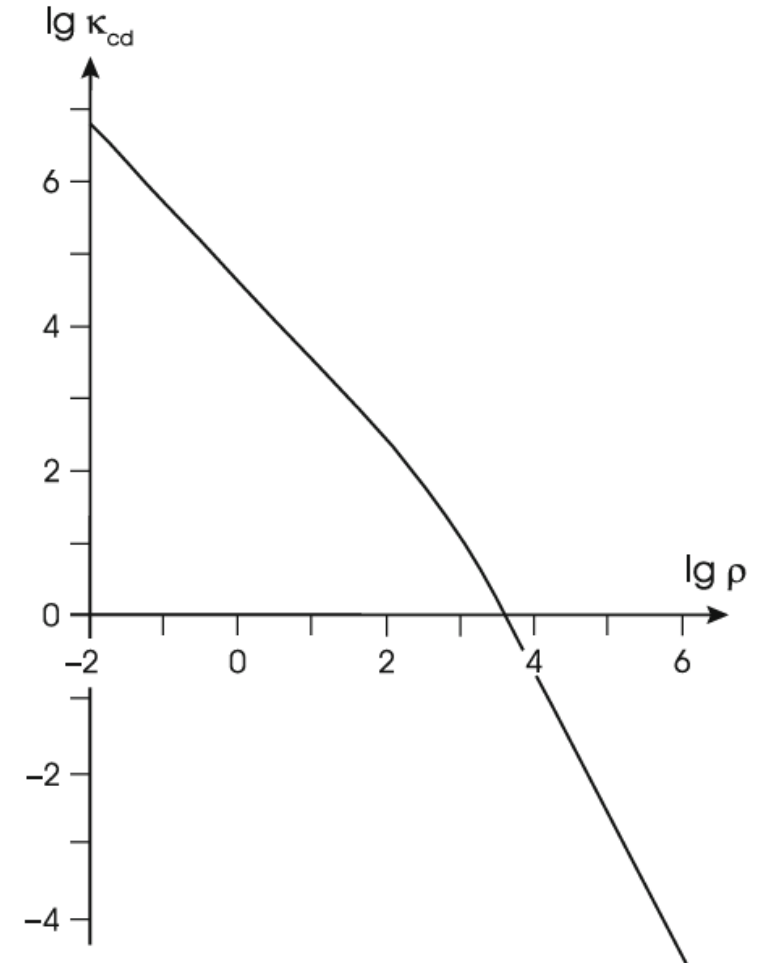
(縮退していると運動量の交換ができず、電子と他の粒子の「衝突」ができないため l_{particle} が大きくなる。)

5.2節と同様に

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_{\text{rad}}} + \frac{1}{\kappa_{\text{cd}}}$$

とすればよい。

[Potekhin et al. \(1999\)](#)に詳しい計算アリ。



17.7 Molecular Opacity

分子による寄与

$T < 10^4 \text{ K}$ で低温星外層で分子が作
する。回転遷移、振動遷移など多
なくても支配的になる。

- $O > C$ の場合（普通）：TiO

- $O < C$ の場合：C₂, CN, C₂H₂

原子以上に複雑で種類も多い。[Fe](#)
色々載っている。

塵・ダストは1500K以下で支配的

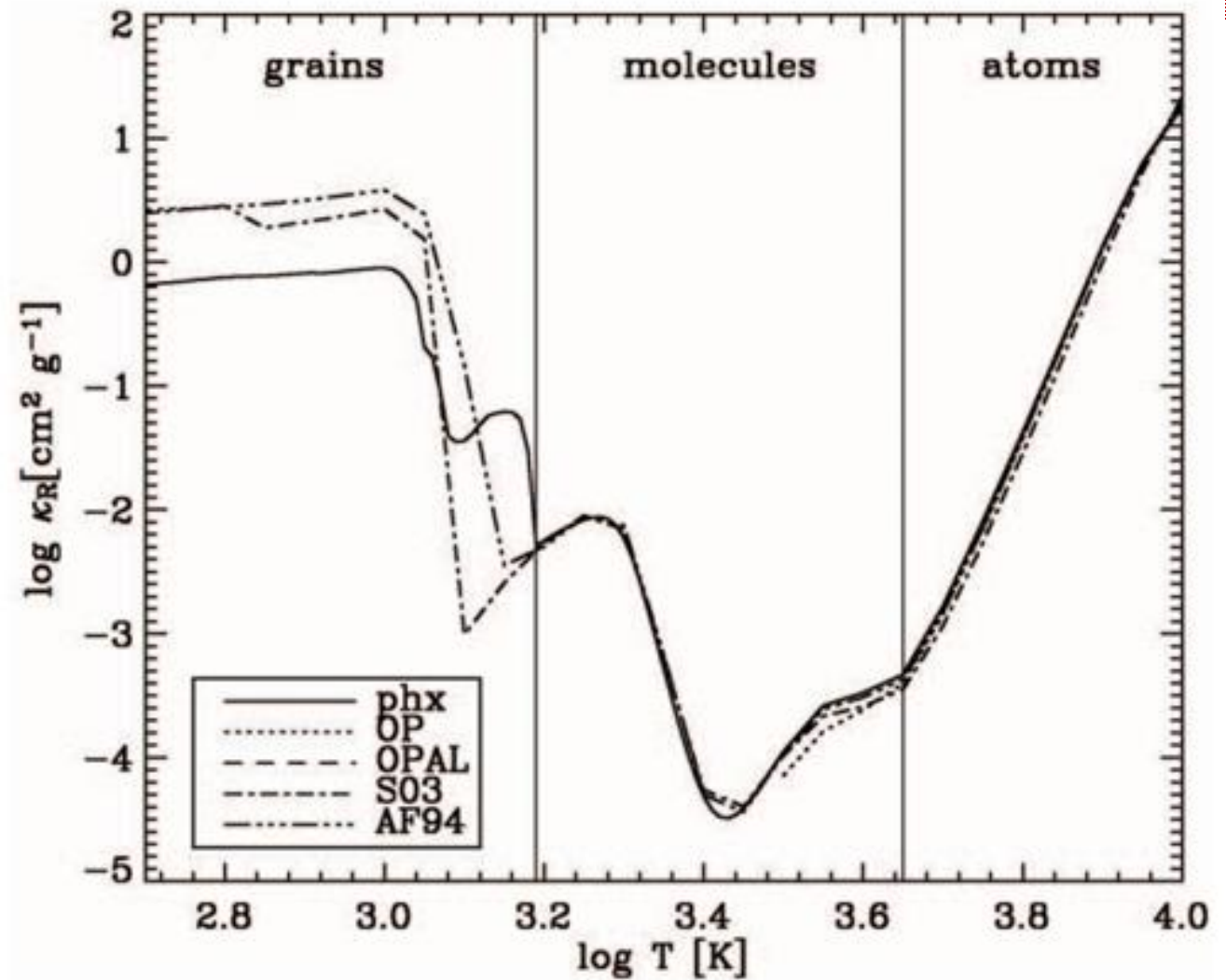


FIG. 9.—Logarithm of the Rosseland mean opacity as a function of temperature for various computation of the opacity as indicated in the legend. The computation is for solar abundances and $\log R = -3$. Regions where certain species grains, molecules, and atoms dominate the opacity are indicated. Differences at low temperature are discussed in the text.

17.7 Molecular Opacities

右図のopacityのロスランド平均の3Dグラフ

高温：原子の吸収[$\mathbf{H^-}$]

$\log T = 3.4$ で $\mathcal{R} = \rho/T^3$ が小さいあたり

：分子[CO, NO, H_2]

$\log T = 3.3$ の極小値を超えたあたりの上昇

：分子[TiO, H_2O]

$\log T = 3.1$ あたり

：塵ダスト[Al_2O_3 , CaTiO_3]

より低温ではSi, Feの塵が効いてくる

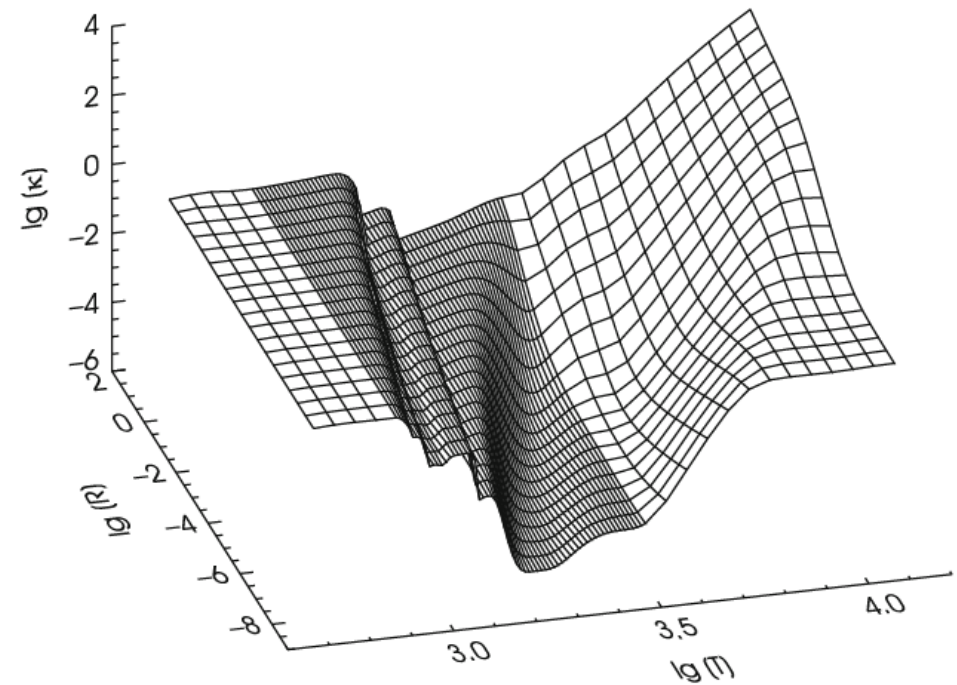


Fig. 17.5 The Rosseland mean of the opacity κ (in $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$) as a function of $R = \rho/T_6^3$ (in g cm^{-3} , since $T_6 = T/10^6 \text{ K}$) and T (in K) for a mixture of $X = 0.70$, $Y = 0.29$, $Z = 0.01$, using data for atomic, molecular, and dust opacity from [Ferguson et al. \(2005\)](#)

17.7 Molecular Opacities

補足

ビリアル定理より、おおよそ

$$kT \sim \frac{GMm_p}{R}$$

となり、 $M \propto R^3 \rho$ より

$$T \propto M^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{1}{3}}$$

したがって質量が変わらなければ $\mathcal{R} = \rho/T^3$ は一定になる。

$\mathcal{R} \propto M^{-2}$ なので \mathcal{R} が小さいと重い星になる。星内部でほぼ一定！ポリトロープ？

塵やダストの吸収線は低温、すなわち11章でやったように対流外層で見られる。対流なので $\nabla = \nabla_{ad}$ となりそうだが、一番外側では superadiabatic になり ∇_{rad} に近くなっている（次スライド）。

定義より opacity が温度勾配を決めている。

$$\nabla_{rad} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa l P}{m T^4}$$

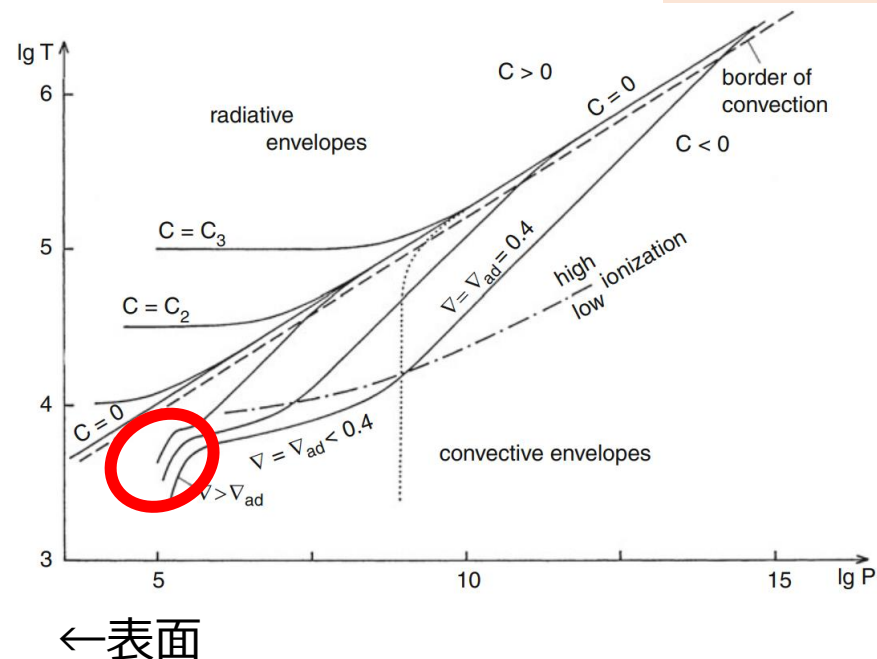
iv) $C < 0$: 対流の解

- ・ 表面に近づくと密度が小さくなり

$$\nabla > \nabla_{ad}$$

となり、傾きが急になる。
(不確かさが大きい)

光球面温度 T_{eff} が低いほど対流はより内部で起きる



17.8 Opacity Tables

星のモデルを正確に計算するために

高温領域：The Opacity Project, the Livermore OPAL group (図17.6)

低温領域：the Wichita group

電子の伝導：Itoh, Potekinなど
でopacity tableが計算された。

全部合体！ →

$X=0.70, Y=0.29, Z=0.01$

太線は太陽の T - ρ グラフに対応。

太陽は中心から $X=0.34$ - 0.737 まで変化するが、特徴はそのまま使える。

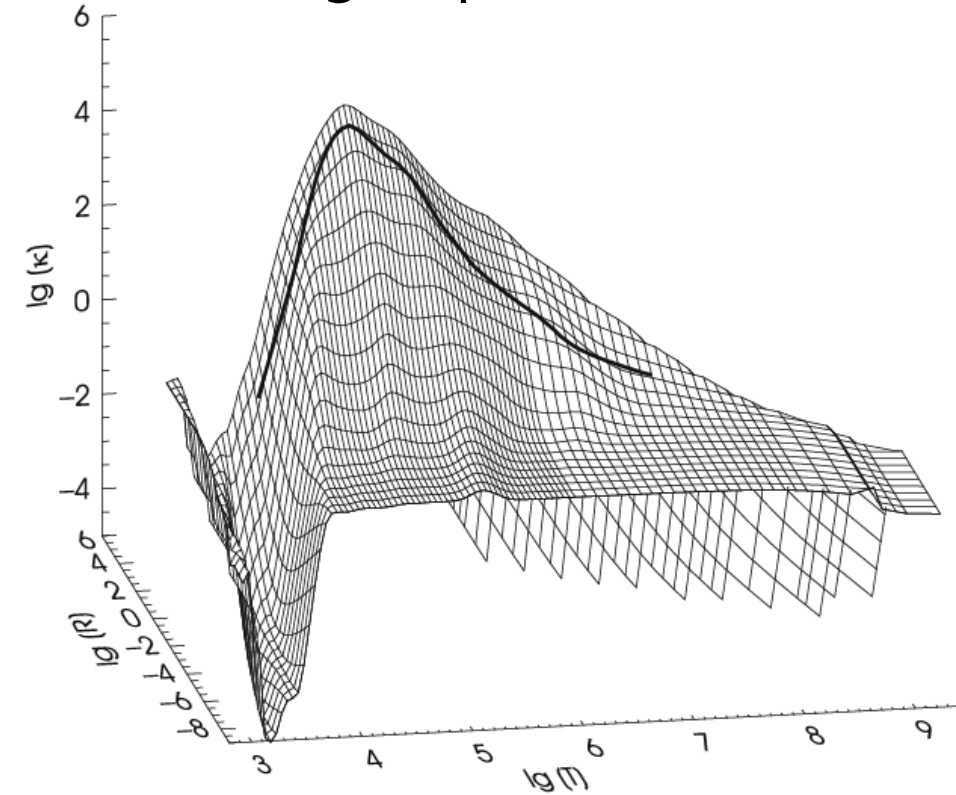


Fig. 17.7 Combination of the opacity κ shown in Figs. 17.6 and 17.5, and of electron conduction opacities as in Fig. 17.4. The latter is a steeply declining function of ρ (or R) and can be seen “from below” in the back of the figure. Electron scattering provides the flat region in the right foreground. The thick solid line represents the $T - \rho$ structure of a solar model (for details see text)

17.8 Opacity Tables

太陽モデルで図17.7のopacity tableを読み解く

光球での値： $\log T = 3.76, \log \rho = -6.58, \log R = 0.14$ （太線の左端）

分子による寄与が残っている

↓

水素の電離はじまる

[H^- に必要な電子を供給]

↓

ほとんど電離[H^- 終了]

↓

bf, ff遷移がopacity源になる

$\kappa \propto \rho T^{-7/2}$ （接平面）

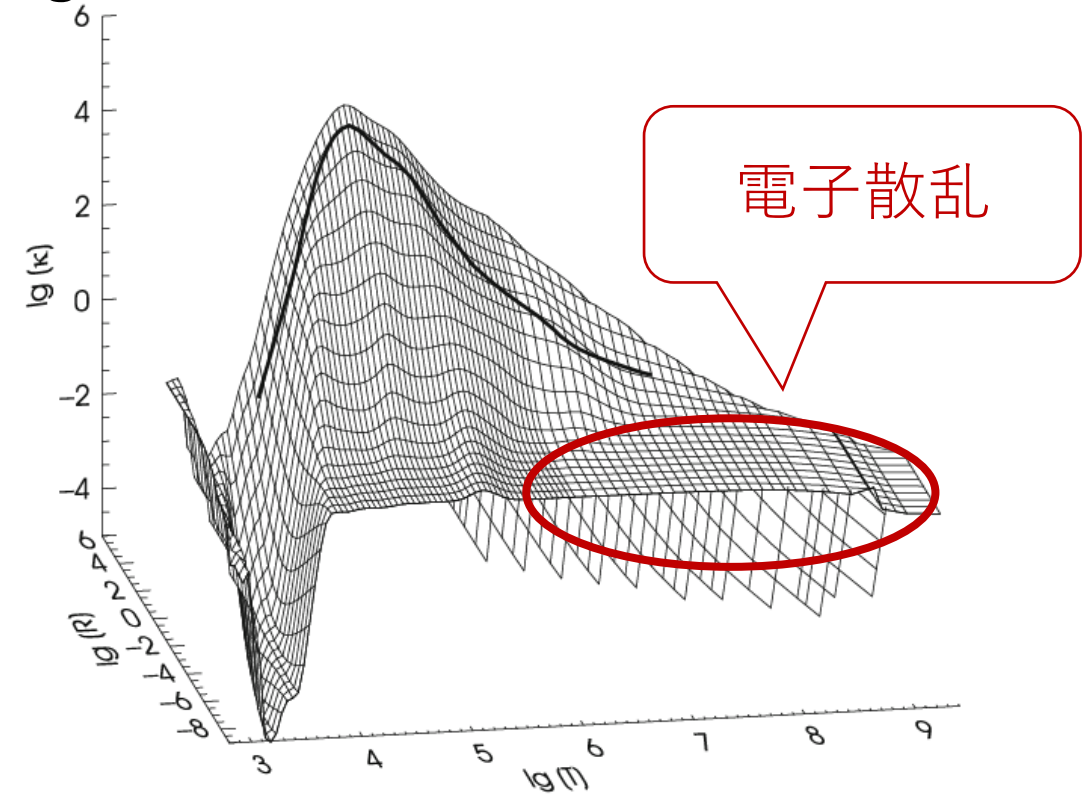


Fig. 17.7 Combination of the opacity κ shown in Figs. 17.6 and 17.5, and of electron conduction opacities as in Fig. 17.4. The latter is a steeply declining function of ρ (or R) and can be seen “from below” in the back of the figure. Electron scattering provides the flat region in the right foreground. The thick solid line represents the $T - \rho$ structure of a solar model (for details see text)

17.8 Opacity Tables

コンプトン散乱の効果で κ は高温で電子散乱で計算するよりも小さくなる。

電子の伝導の効果（ κ を下げる）は山の稜線に隠されていて、この図では「下から(??)」しか見えない。

ある ρ_0, T_0, X_{i0} における κ を見つけるためには
Zの中でも異なる金属割合を考慮して
opacity tableを探して補完する必要がある。
図17.7のように**合体!**するときは
同じ金属配合で行なう。

低温星の高密度領域ではopacityがよく分からない。

←状態方程式がわからない（非理想気体の効果16.6節）

