

18.5 The Major Nuclear Burning Stage



実際に起こっているのは元素の核融合反応。
この節では各段階でのいくつかの重要な反応を列挙する。

各反応でのエネルギー放出は**Q値**で与えられ、
ニュートリノを除くあらゆる反応を含む。
β崩壊で e^+ を出して対消滅することによって放出される分も含む。

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \sum_j \frac{\varepsilon_{ji}}{q_{ji}} - \sum_k \frac{\varepsilon_{ik}}{q_{ik}}$$

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{1 + \delta_{jk}} \frac{Q}{m_j m_k} \rho X_j X_k \langle \sigma v \rangle$$

ε_{jk} : $j \rightarrow k$ に核種が変化するときの、単位質量当たりのエネルギー生成率
 q_{jk} : $j \rightarrow k$ に核種が変化するときの、1反応で発生する単位質量当たりの
 エネルギー。 $\varepsilon_{jk} = m_j q_{jk} r_{jk} / \rho$, r_{jk} : 単位体積あたりの反応数

によって全核種が割合を変化させながら反応するときのエネルギー生成率を計算
 することができる。

反応の中で最も進むのが遅いものが核融合反応の進行度合いを決めている。

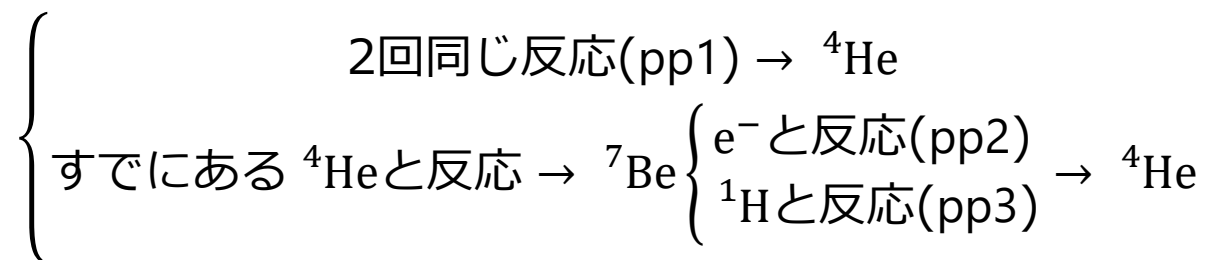
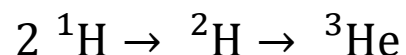


水素燃焼のおおまかな反応は



であり、2-30%のエネルギーをニュートリノが持っていき、そのほかのエネルギーが放出される。

1. pp chain



Q(MeV)=26.5(pp1), 25.97(pp2), 19.59(pp3)

pp2のニュートリノ(${}^7\text{Be}$ -neutrinos)

→0.863MeV(90%), 0.386MeV(10%) (${}^7\text{Li}$ の励起状態で決まる)

最初の反応のニュートリノ(pp-neutrinos)

→平均0.267MeV, 上限0.423MeV

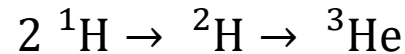
pp3のニュートリノ(${}^8\text{B}$ -neutrinos)

→平均6.735MeV, 上限15MeV

[陽電子とニュートリノ両方が出るならエネルギーは連続スペクトルになる。]



1. pp chain



$$\left\{ \begin{array}{l} 2\text{回同じ反応(pp1)} \rightarrow\ ^4\text{He} \\ \text{すでにある } ^4\text{Heと反応} \rightarrow\ ^7\text{Be} \left\{ \begin{array}{l} e^- \text{と反応(pp2)} \\ ^1\text{Hと反応(pp3)} \end{array} \right. \rightarrow\ ^4\text{He} \end{array} \right.$$

「2回同じ反応」よりも「すでにある ^4He と反応」の方が τ が大きく、温度依存性(ν)が高い。 $T_6 = 5, 20$ で $\nu = 5, 3.5$

温度が増加するにつれてpp1→pp2→pp3が重要になる。

エネルギー生成率の計算

低温：個々の反応の速度を計算する必要がある。

高温：最初以外のすべての反応が速やかに行われるので、平衡（定常）状態になる。

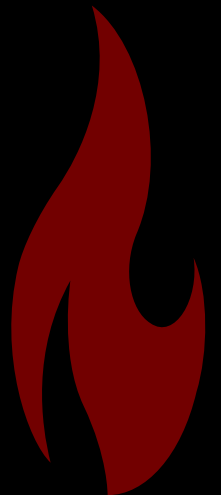
個々の原子核の平衡存在量が決まり、生成率は最も遅いpp1に比例する。

$$\varepsilon_{pp} = 2.57 \times 10^4 \psi f_{11} g_{11} \rho X_1^2 T_9^{-2/3} e^{-3.381/T_9^{1/3}}$$

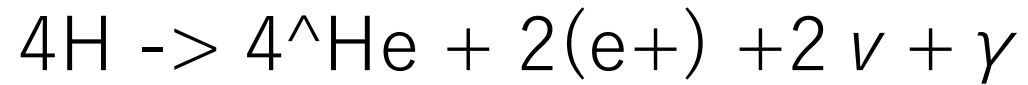
pp2, pp3の補正項 ψ は図18.7のようになる。

1(pp1)→増加(pp2の方が ^4He をたくさん作れる)→減少(pp3の方がQ値低い)

2Dだと直接 ^4He にはならない。p,nが出て $3^1\text{H}, 3^4\text{He}$ になる。



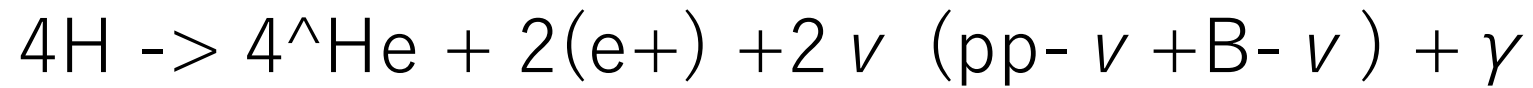
- Pp1



- Pp2

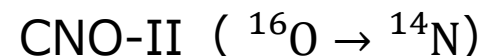
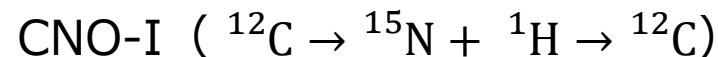


- Pp3



2. CNO cycle

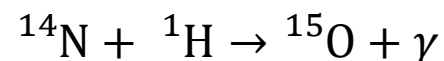
C,N,Oが触媒のように働き、エネルギーを生成する。



CNO-IIでは内部にもともとある ^{16}O がほぼ使われる(CNO-Iでもわずかに生成)

pp-chainと同様、1つの ^4He に対して2つの ν を出す。

最も遅い反応は



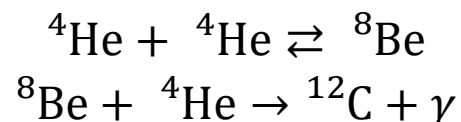
であり、高温ではほぼすべてのC,N,Oが ^{14}N で待機している。

$T = 1.5 \times 10^7 \text{K}$ 程度でpp-chainと切り替わり、高温ではCNO cycleが支配的になる。



Triple α reaction

$T > 10^8 \text{K}$



最初の反応は 10^{-16}s で戻ってしまうが、もう1度衝突する散乱時間よりも十分長い。短寿命でも 10^{-9} だけ常に存在し、2つ目の反応に移行できる。

エネルギー生成率は密度の2乗に比例し、温度依存性は極めて高い。

$T_8 = 1, \dots, 2$ で $\nu \approx 40 \dots 19$ となる。

^{12}C が十分に多くなると、更なる α 捕獲反応が進み、 ^{16}O , ^{20}Ne と作っていく。

^{16}O を作る反応 $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ のエネルギー生成率には不定性が大きい。

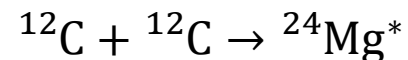
温度増加に伴い、

1. Triple α 反応が支配。
2. $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ が大きくなり、ヘリウムが減るとともに ^{16}O が増加。
(Triple α の反応はヘリウムの量の3乗に比例)
3. $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ の割合で変化するが、 $\text{O}:\text{C} \approx 1:1 - 2:1$ となる。



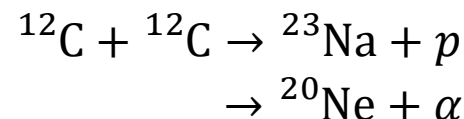
$T_8 \approx 5 - 10$ の温度帯では**炭素・酸素**燃焼が起こる。が、複雑で難しい。

1. ^{12}C 同士の反応経路が複数。



の後に、(18.72)式のどれかの経路をたどる。

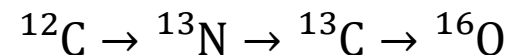
最も起こりやすいのは



の発熱反応である。(1つ目は電磁相互作用のため起こりづらい)

$T_9 < 3$ くらいの温度帯では同じくらいの割合で上2つの反応が起こる。

2. 作られる p, α も核融合反応する。



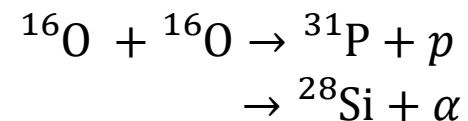
というように反応が起こってしまう。

以上も含めておおよそ勘定すると、 $Q \approx 13\text{MeV}$ 。

また高密度なのでscreeningの効果(電子たくさんで正味クーロン力弱まる)がよく効く。



$T_9 \geq 1$ では酸素燃焼が始まる。



が最も起こりやすい。

p, α も核融合反応も起こり、正味で $Q \approx 16\text{MeV}$ 。

光崩壊/光分解(photodisintegration)

光子が原子核に衝突し、 α 崩壊などで崩壊する過程。

電離と同様にSahaの式が使える（とする）。

$$n_{ij} + \gamma \rightarrow n_i + n_j + \dots$$

という反応について、

$$\frac{n_i n_j}{n_{ij}} \sim T^{\frac{3}{2}} e^{-Q/kT}$$

と表せる。ここでの Q は反応前後の束縛エネルギーの差。

Sahaの式

$$\begin{aligned} &\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e \\ &\propto \frac{g_{r+1}}{g_r} T^{\frac{3}{2}} e^{-\chi_r/kT} \end{aligned}$$

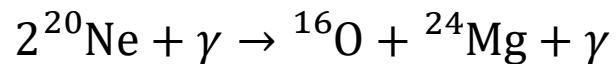


光崩壊(photodisintegration)

(鉄までの元素なら) 光崩壊は吸熱反応だが、
崩壊後に別の重元素を作ると、正味で発熱反応になることもある。

例1 : ^{20}Ne 崩壊 (酸素燃焼前)

^{20}Ne が ^{16}O と α 粒子に光崩壊すると、
 α 粒子は他の ^{20}Ne と結びついて $^{24}\text{Mg} + \gamma$ になる。



正味で $Q = +4.583\text{MeV}$ 。→ Neon burning

他の反応も起きてはいる。

例2 : ^{28}Si 崩壊 (酸素燃焼終わり)

^{28}Si が Al, Mg, Ne などと n, p, α 粒子とに光崩壊すると、
崩壊してできた Al, Mg, Ne も光崩壊して、 n, p, α がたくさんできる。

^{28}Si がその n, p, α との反応で、最も安定な ^{56}Fe までの重元素を作る。

→ Silicon burning

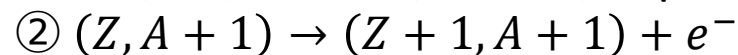
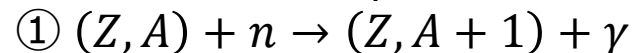
$T_9 \geq 5$ となる(e.g. 超新星爆発)ときは ^{56}Fe も光崩壊する。(輪島くん！！)



陽子や中性子の数が「魔法数」の原子核は安定。

${}^4\text{He}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{40}\text{Ca}$ などはdouble-magic number。

鉄以降の元素を作る「**中性子捕獲反応**」(+「 β 崩壊」)



最初の反応を繰り返すとたくさん捕獲できるが、
中性子数密度と捕獲反応の断面積で決まる。

1. s-process ($T\textcircled{1} > T\textcircled{2}$)

「 β 安定性の谷」に沿って反応が進む。 ([参考](#))
→あるA(質量数)において最も安定なZ(陽子数)の線。
中質量星($2-5M_{\odot}$)の後期(AGB)で起こる。
(↑ 短寿命同位体 ${}^{99}\text{Tc}$ の観測)

2. r-process ($T\textcircled{1} < T\textcircled{2}$)

①②が繰り返し起こり重元素ができる。
超新星爆発などで起こる。

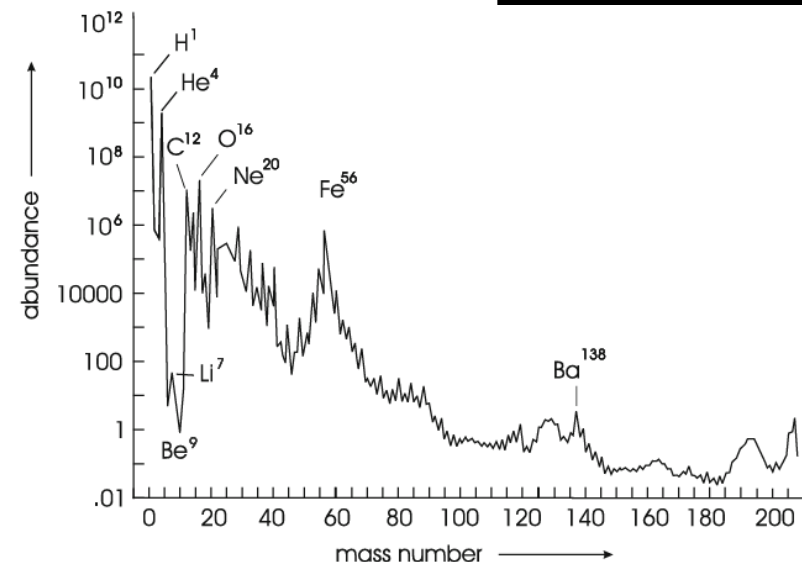


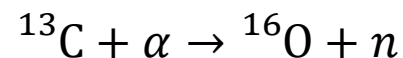
Fig. 18.9 The abundances (particle number fractions) of elements in the Sun, normalized to a value of 10^6 for ${}^{28}\text{Si}$



中性子を作る反応

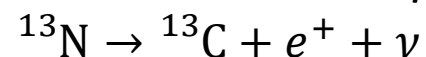
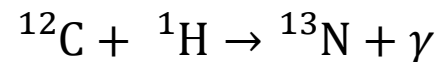
1. carbon source

$2 \times 10^8 \text{ K}$ (C燃焼期)で起こる。

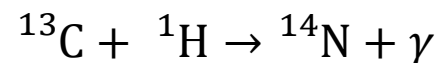


ただし、He燃焼で ^{12}C がほとんどになり、 α もHeになってしまう。

⇒ He燃焼領域とH-richの外層の間（熱すぎない領域）で、
CNO-Iの上2式



から ^{13}C を作る。ただし3つ目の式

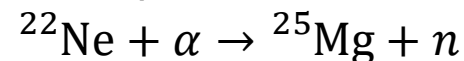


が起きないように、pの量は少ないままを保つ。

He燃焼領域にHをちょっと混ぜる。

1. neon source

$4 \times 10^8 \text{ K}$ (He燃焼期)のmassive, super-AGBで起こる。



中性子捕獲のモデル

[Clayton]

nの束縛エネルギーが8MeV。

⇒中性子捕獲で励起された原子核 $(Z, A+1)^*$ は $(Z, A+1)$ の中で8MeV励起している。

重元素のその辺りのエネルギーにおける状態密度はエネルギー空間で密になっており、隣接する共鳴間のエネルギーは1keVほどしかない。

また中性子のエネルギー幅も広く、広いエネルギー幅で共鳴が起こる。

中性子は中性なので**クーロン障壁が効かない**。⇒**トンネル確率 $P_0 = 1$**

共鳴より低いエネルギーでは(18.14)式より

$$\begin{aligned}\sigma(E) &\propto \pi \lambda^2 P_0(E) \xi(E) \\ &\propto \frac{1}{E} \frac{\Gamma_n \Gamma}{(E_{res})^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \propto \frac{1}{v}\end{aligned}$$

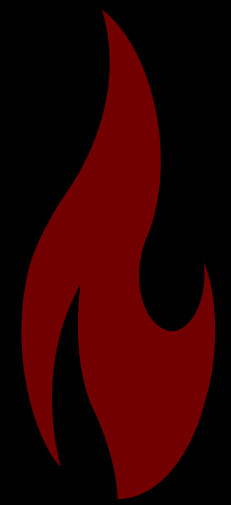
ただし $\Gamma_n = \hbar/\tau \propto v$ となる。速いほどぶつかりやすくなって寿命短い。



NEUTRON-CAPTURE CROSS SECTIONS

Because the neutron-capture lifetimes depend upon the magnitude of neutron-capture cross sections, we may profitably digress into a brief discussion of the determination of neutron-capture cross sections.¹ The neutron binding energy in an average heavy nucleus is near 8 Mev, so that the excited compound nucleus $(Z, A + 1)^*$ formed by the addition of a low-energy neutron to the nucleus (Z, A) generally has an excitation of some 8 Mev in the nucleus $(Z, A + 1)$. The density of nuclear states at that excitation energy in a heavy nucleus is commonly very large, there being on the average an energy of only 1 kev or so separating adjacent resonances. The resonances are generally broad, moreover, because the neutron widths Γ_n are large. This fact reflects the absence of a coulomb barrier and is especially true for s-wave neutrons. The neutron capture in such a heavy element occurs, therefore, through many wide overlapping levels of the compound nucleus. The Maxwell-Boltzmann distribution of neutron velocities in a star yields a weighted average of σv over resonances primarily in the vicinity of kT . It is experimentally difficult to obtain a neutron energy resolution comparable to the level separation, so that the experimental measurements already yield σ averaged over an energy region sufficiently large for it to vary smoothly with energy. It is found that σ varies as v^{-1} at low energies, i.e., thermal cross sections, and

¹ An outstanding program of this type has been pursued at the Oak Ridge National Laboratory. The reader is referred to R. L. Macklin and J. H. Gibbons, Neutron Capture Data at Stellar Temperatures, *Rev. Mod. Phys.*, **37**:166 (1965). See also their account in *Science*, **156**:1039 (1967). A very interesting discussion is G. I. Bell, Cross Sections for Nucleosynthesis in Stars and Bombs, *Rev. Mod. Phys.*, **39**:59 (1967).



中性子捕獲のモデル

$$\langle \sigma \rangle \equiv \frac{\langle \sigma(v)v \rangle}{v_T}$$

$$d\tau \equiv v_T n_n(t) dt$$

中性子と核子の相対熱速度 v_T を用いて定義する。

$$\tau = v_T \int n_n(t) dt$$

は **neutron exposure** と呼ばれ、 v_T の中性子の数密度流束で次元は $[\sigma^{-1}]$

で中性子捕獲で作られる元素量を決める。



中性子捕獲のモデル

質量数 A を持つ核子の、中性子捕獲による時間発展は

$$\frac{dn_A}{dt} = -\langle\sigma(v)v\rangle_A n_n n_A + \langle\sigma(v)v\rangle_{A-1} n_n n_{A-1}$$

$$\frac{dn_A}{d\tau} = -\sigma_A n_A + \sigma_{A-1} n_{A-1}$$

ここで $\langle\sigma\rangle = \sigma$ としている。

Clayton&Wald(1974)によると
微分方程式の解は

$$\psi_A(\tau) \equiv \sigma_A n_A(\tau) / n_{56}(0) = \sum_{i=56}^A \left(\prod_{j=56}^i \frac{\sigma_j}{\sigma_j - \sigma_i} \right)_{j \neq i} \exp(-\sigma_i \tau)$$

簡単に、初期に ^{56}Fe だけがある単一のseed nucleus

$$\rho(\tau) = \frac{f n_{56}}{\tau_0} \exp(-\tau/\tau_0)$$

を考える。 $\rho(\tau)d\tau$ が $d\tau$ の間に中性子照射を受けたseed nucleusの数に相当する。
この重ね合わせをすると $\sigma_A n_A = \int \psi_A(\tau) \rho(\tau) d\tau$ より

$$\sigma_A n_A = \frac{f n_{56}}{\tau_0} \prod_{i=56}^A [1 + (\sigma_i \tau_0)^{-1}]^{-1}$$



ニュートリノ
平均自由行程

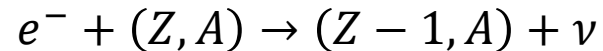
$$l = \frac{1}{n\sigma} \approx \frac{2 \times 10^{20} \text{ cm}}{\rho}$$

$\rho \approx 1 \text{ g cm}^{-3}$ ではほとんど相互作用しないので持ち去るエネルギーは無視できる。
星の末期では $\rho \approx 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ となり星内部で吸収される。

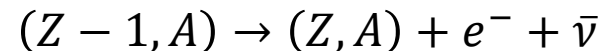
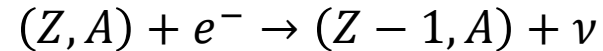
pp-chainの1サイクルで $4 \times 10^{-5} \text{ erg/2個}$ のニュートリノが生成される
⇒太陽の光度 ($L_{\odot} \approx 4 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$) のためには 2×10^{38} 個/s生成される。

核融合反応以外のニュートリノ生成（冷却）過程

①電子捕獲



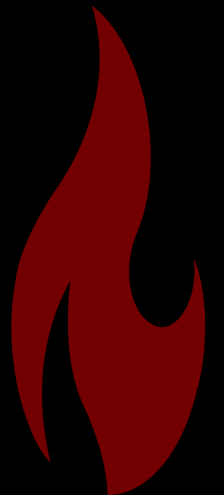
②ウルカ(Urca)過程



条件： $(Z - 1, A)$ が (Z, A) よりもエネルギーが少し高い。⇒β崩壊しやすい

例： $^{35}\text{Cl} + e^{-} \rightarrow ^{35}\text{S} + \nu$, $^{35}\text{S} \rightarrow ^{35}\text{Cl} + e^{-} + \bar{\nu}$

電子の縮退度が高くなると起きにくくなる。



ニュートリノ

- **対消滅ニュートリノ** ($e^- + e^+ \rightarrow \nu + \bar{\nu}$)
 $T_9 > 1$ では電子陽電子対ができる。 10^{-19} の確率で生成される。
 高温低密度のプラズマで有効。
- **光ニュートリノ** ($\gamma + e^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$)
 光子が電子に散乱され、ニュートリノ対に変換される。
- **プラズマニュートリノ** ($\gamma_{plasm} \rightarrow \nu + \bar{\nu}$)
 plasmon：相対論的粒子のようにふるまう、電子の集団的な運動の量子化。

$$\hbar^2 \omega^2 = K^2 c^2 + \hbar^2 \omega_0^2$$
- **制動放射ニュートリノ**
 低温高密度で有効。
- **シンクロトロンニュートリノ**
 強磁場で有効。

