

# Astrophysics of Planet Formation[1]

C1SB2064 辻 勇吹樹

2024 年 7 月 7 日

## 7.1.5 Gap Opening and Gap Depth

7.1 節のこれまでで見たように、Type 2 migration では惑星が円盤ガスとの重力相互作用によってお互いに離れて gap ができる。これは Type 1 に比べて大きな質量でないと gap を作ることができないため、本節ではまず gap をつくることのできる最小質量を求める。図 7.4 に図示されるように、共鳴位置での重力トルクは惑星とガスの間を広げる方向に働き、一方粘性 (viscosity) はそうした表面密度の不連続性を和らげる方向に働く。すなわち gap を閉じる方向に働くため、gap を開くことができるかどうかは重力トルクと粘性の優勢度合いで決まることになる。

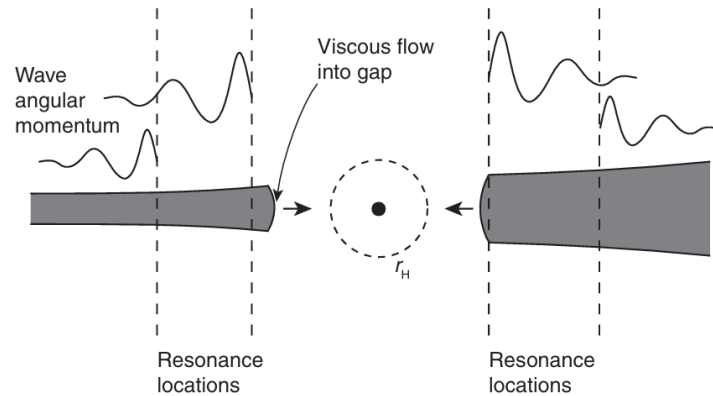


Figure 7.4 The balance of torques that determines (in part) whether a planet is able to open a gap within the disk. Waves excited at resonant locations act to remove angular momentum from the disk interior to the planet, and add angular momentum to the disk outside, thereby opening a gap. Viscous flow counteracts this tendency.

そこでまず、それぞれのタイムスケールを計算する。7.1.1 節でインパクトパラメータの最小値  $b_{min}$  を  $h$  にとったように、 $r_H \ll h$  のときは gap の最小値は  $h$  のオーダーであると考えられる。以下に 2 つの理由を述べる。

- Lindblad 共鳴

式 (7.15,16)(p.256) より Lindblad 共鳴によるトルクは  $(h/r)^{-2}$  の依存性を持ち、 $r \geq h$  で大きな効果となる。

- 円盤厚みとの比較

円盤厚みよりも小さな gap は不安定なため、安定に存在できる gap 幅の最小値は  $h$  といえる。これは回転方向に対して垂直な方向には粒子を退ける作用がないため、幾何学的にオーダー  $h$  の幅の gap があれば落ちてこない。また惑星の腕スケールも  $h$  であるから角運動量をやりとりできる距離がその程度になる。

これより  $[a, a+h]$  のガスがすべて取り除かれることになるので、そのタイムスケールを計算する。このガスを取り除くためには、ケプラー回転による単位質量あたりの角運動量を  $l = \sqrt{GM_* r}$  として

$$\Delta J = M_{[a, a+h]}(l_{a+h} - l_a) \quad (1)$$

$$= 2\pi a h \Sigma \cdot \left. \frac{dl}{dr} \right|_a \cdot h \quad (2)$$

の角運動量を与えればよい。したがって gap を開くタイムスケールは 7.1 節で求めた  $dJ/dt$  も用いて

$$t_{open} = \frac{\Delta J}{|dJ/dt|} \quad (3)$$

$$= \frac{2\pi a h \Sigma \cdot \left. \frac{dl}{dr} \right|_a \cdot h}{\frac{8}{27} \frac{G^2 M_p^2 a \Sigma}{\Omega_p^2 h^3}} \quad (4)$$

$$= \frac{27\pi}{8} \frac{\Omega_p^3 h^5 a}{G^2 M_p^2} \quad (5)$$

と求められる。一方 gap を閉じる方向には粘性による拡散方程式のタイムスケールを用いる。2 次元降着円盤の進化方程式は (c.f.「宇宙流体力学」7.3 節)、

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r) = 0 \quad (\text{連続の式}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma j) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Sigma j v_r - r^3 \Sigma \nu \frac{d\Omega}{dr} \right) = 0 \quad (\text{角運動量保存の式}) \quad (7)$$

を組み合わせることで

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{(dj/dr)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \Sigma \nu \frac{d\Omega}{dr} \right) \right] = 0 \quad (8)$$

が得られる。特にケプラー回転のときは  $j = r^2 \Omega \propto r^{1/2}$  より

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Sigma \nu r^{1/2} \right) \right] \quad (9)$$

となる。この式は更に拡散方程式の形に書き直すことができる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \quad (10)$$

$$\begin{cases} X & \equiv 2r^{1/2} \\ f & \equiv \frac{3}{2} \Sigma X \\ D & = \frac{12\nu}{X^2} \end{cases} \quad (11)$$

この式を用いれば粘性によって gap が閉じるタイムスケールは  $r \rightarrow h$  として

$$t_{close} = \frac{(\Delta X)^2}{D} \approx \frac{h^2}{\nu} \quad (12)$$

と書ける。  $t_{open} < t_{close}$  となるとき gap が作られるので

$$\frac{27\pi}{8} \frac{\Omega_p^3 h^5 a}{G^2 M_p^2} < \frac{h^2}{\nu} \quad (13)$$

$$\frac{M_p}{M_*} > \left( \frac{27\pi}{8} \right)^{1/2} \left( \frac{h^3 \nu}{a^5 \Omega_p} \right)^{1/2} \quad (14)$$

$$> \left( \frac{27\pi}{8} \right)^{1/2} \left( \frac{h}{a} \right)^{5/2} \alpha^{1/2} \quad (15)$$

という質量の境界が得られる。最後の式は乱流粘性の  $\alpha$  モデル  $\nu = \alpha c_s h$  を用いた。この境界を  $q_{crit}$  とする。やや分かりづらいが、最初に仮定した gap 境界は左辺と右辺でうまく相殺されている。また  $\Sigma$  にも依存していない。典型値 ( $\alpha = 10^{-3}, h/a = 0.05$ ) を代入すると

$$q_{crit} \simeq 5.8 \times 10^{-5} \quad (16)$$

となり、土星質量 ( $\sim 3 \times 10^{-4} M_\odot$ ) で可能であり、海王星質量 ( $\sim 5 \times 10^{-5} M_\odot$ ) でギリギリになる。

ただし 7.1.1 節でも先行して述べたように、gap 境界  $b_{min} = h$  が  $r_H$  よりも小さくなるときのこの近似は成り立たなくなり、3 次元的に考えなければならなくなる。このとき

$$\frac{M_p}{3M_*}a^3 \gtrsim h^3 \quad (17)$$

$$q_{crit} \gtrsim 3\left(\frac{h}{a}\right)^3 \approx 4 \times 10^{-4} \quad (18)$$

となり、木星質量 ( $\sim 9.5 \times 10^{-4} M_\odot$ ) で gap を形成できる。 $r_H > h$  のとき、 $r_H$  内の粒子は惑星の一部として束縛されているため gap 形成の角運動量交換はない。

ここまでタイムスケールの比較から gap を形成できる質量条件を求めた。ここからはより物理的な手法で、別のやり方で計算を行う。

上述した角運動量保存の式から角運動量流速の式は  $\dot{M} = -2\pi r \Sigma v_r, j = r^2 \Omega$  より

$$F_J(r) = -r^2 \Omega \dot{M} - 2\pi r^3 \nu \Sigma \frac{d\Omega}{dr} \quad (19)$$

と書き表せる。この式を用いると gap の最も外側 ( $r = r_+$ ) における角運動量流速は

$$F_J(r_+) = F_J(a) + \Gamma_{LB,1} \quad (20)$$

となる。ここで gap 幅がカットオフ長よりも十分に広いことを仮定し、gap 内のガス全体に Lindblad によるトルクが働くものとした。カットオフは (7.13) 式の大きな  $m$  でトルクが働くなることであり、ガス円盤の圧力の効果も考慮するとカットオフが起きる。惑星外側の大きな  $m$  は惑星に近い側なので、gap 幅がカットオフ長よりも十分に広いことは gap 幅ほぼ全体でこのトルクを受けられることを意味する。

Lindblad によるトルクの式は Kanagawa *et al* (2015)[2] によれば

$$\Gamma_{LB,1} = \int_{R_p+\Delta}^{\infty} 0.80\pi q^2 a^3 \Omega_K^2 \Sigma_{gap} \left(\frac{a}{R-a}\right)^4 dR \quad (21)$$

$$= 0.12\pi q^2 \left(\frac{h}{r}\right)^{-3} a^4 \Sigma_{gap} \Omega_K^2 \quad (22)$$

で与えられる。 $\Delta$  はカットオフ長 ( $= 1.3h$ ) であり、WKB 近似による計算である。最初の  $0.80\pi$  は  $(2^5/3^4)[2K_0(2/3) + K_1(2/3)]^2/\pi$  である。この式を (20) 式に代入するが、 $r_+ \approx a, \Omega_K(r_+) \approx \Omega_K(a)$  が成り立つほどに gap 幅は狭いことも用いる。上での近似と

まとめて  $\Delta \ll r_+ \approx a$  となる。したがって角運動量流速の第 2 項のみが寄与して

$$-2\pi r^3 \nu \Sigma \frac{d\Omega}{dr} = -2\pi r^3 (\alpha h^2 \Omega_K) \Sigma \left( -\frac{3}{2} \frac{\Omega_K}{r} \right) \quad (23)$$

$$= 3\pi r^4 \alpha \left( \frac{h}{r} \right)^2 \Omega_K^2 \Sigma \quad (24)$$

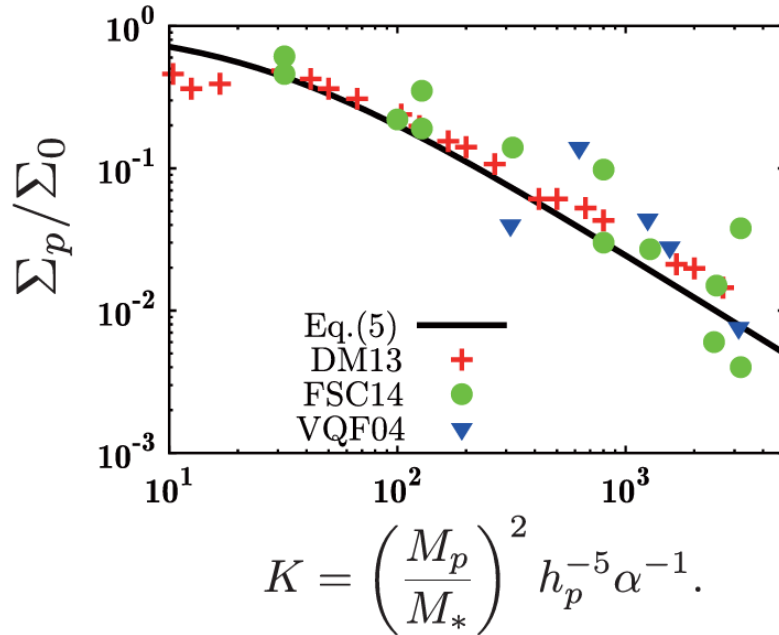
となるので代入すると

$$3\pi r^4 \alpha \left( \frac{h}{r} \right)^2 \Omega_K^2 \Sigma_{disk} = 3\pi r^4 \alpha \left( \frac{h}{r} \right)^2 \Omega_K^2 \Sigma_{gap} + 0.12\pi q^2 \left( \frac{h}{r} \right)^{-3} a^4 \Sigma_{gap} \Omega_K^2 \quad (25)$$

$$\frac{\Sigma_{gap}}{\Sigma_{disk}} = \frac{3\pi r^4 \alpha \left( \frac{h}{r} \right)^2 \Omega_K^2}{3\pi r^4 \alpha \left( \frac{h}{r} \right)^2 \Omega_K^2 + 0.12\pi q^2 \left( \frac{h}{r} \right)^{-3} a^4 \Omega_K^2} \quad (26)$$

$$= \frac{1}{1 + 0.04q^2 \left( \frac{h}{r} \right)^{-5} \alpha^{-1}} \quad (27)$$

と求められる。図 2 には右辺のパラメタ部分を横軸にとった面密度比のグラフを載せていて、数値計算結果とも整合が取れていることが分かる。



**Figure 1.** Gap depth as a function of the parameter  $K$ . The solid line denotes Equation (5). The crosses, circles, and triangles represent the gap depth obtained by hydrodynamic simulations done by Duffell & MacFadyen (2013), Fung et al. (2014), and Varnière et al. (2004), respectively. (Entire runs of  $K < 8000$  are shown in these papers.)

図 2 Kanagawa *et al*(2015)[2] による、(27) 式の図。点はいくつかの数値計算結果。

また、前のタイムスケール比較のときと同様に  $q$  について解くと

$$q_{crit} \approx 9 \times 10^{-5} \left( \frac{1}{\Sigma_{gap}/\Sigma_{disk}} - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{h/r}{0.05} \right)^{5/2} \left( \frac{\alpha}{10^{-3}} \right)^{1/2} \quad (28)$$

となり、新たに面密度への依存性が出てきていることが分かる。特に図 2 において面密度の比が 1 に近いような場合でも整合が見られるため、7.1.4 節の Type 1 と Type 2 の regime の境界もうまく入れ込むことができているように思われる。Kanagawa *et al*(2015) は、これらの結果を実際に観測された gaplike の構造に対して他の観測量からパラメタを決めたり仮定したりすることでその惑星の質量を見積もっている。

## 参考文献

- [1] Philip J. Armitage. *Astrophysics of Planet Formation*. Cambridge University Press, 2 edition, 2020.
- [2] Kazuhiro D Kanagawa, Takayuki Muto, Hidekazu Tanaka, Takayuki Tanigawa, Taku Takeuchi, Takashi Tsukagoshi, and Munetake Momose. Mass estimates of a giant planet in a protoplanetary disk from the gap structures. *The Astrophysical Journal Letters*, 806(1):L15, 2015.