

# Astrophysics of Planet Formation[1]

C1SB2064 辻 勇吹樹

2024 年 5 月 4 日

## 5.1 Physics of Collisions

ここではまず 2 天体は衝突することで 1 つのより大きな天体となる (ほど重力が強い) こと、すなわち完全合体を仮定する。このときはとりあえず衝突すれば成長が進むので、衝突の断面積が重要になる。

### 5.1.1 Gravitational Focusing

#### Gravitational Focusing

重力と速度の関係によって本来の天体半径よりも遠いところにあった天体同士で衝突することができる。衝突断面積は次の式で与えられる。

$$\Gamma = \pi R_s^2 \left( 1 + \frac{v_{esc}^2}{\sigma^2} \right) \quad (1)$$

( $R_s$ : 天体半径,  $v_{esc}$ : 衝突位置での脱出速度,  $\sigma$ : 無限遠での速度)

同じ質量  $m$  を持つ 2 つの天体が互いに速度  $\sigma$  で無限遠から向き合って近づき、やがて衝突するという状況を考える。衝突に近づくにつれて互いの重力によって引き合うので、無限遠から進む間に衝突が可能な半径  $b$  [インパクトパラメータ] だけ速度の垂直方向に離れているとする。すなわち、無限遠と衝突直前での位置と速度は次のように与えられているものとする。

無限遠

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \pm\infty \\ b/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \pm\sigma/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

衝突直前

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \pm R_c \cos \alpha/2 \\ \pm R_c \sin \alpha/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \pm v_{max} \sin \alpha \\ \mp v_{max} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

ここで衝突直前での 2 天体の距離を  $R_c$ 、速度を  $v_{max}$  とした。ただし速度は天体の進む方向しか持たないものとする (図 1)。

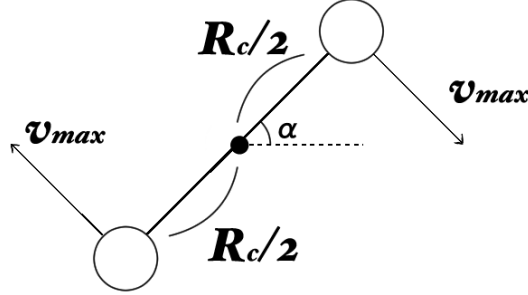


図 1 衝突直前の模式図。

このとき

エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m\sigma^2 + \frac{1}{2}m\sigma^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 + \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{Gm^2}{R_c} \quad (4)$$

角運動量保存則 (z 成分)

$$-\frac{b\sigma}{4} - \frac{b\sigma}{4} = -\frac{R_cv_{max}}{2} - \frac{R_cv_{max}}{2} \quad (5)$$

が与えられる。衝突の条件は天体の半径を  $R_s$  とすると  $R_c < R_s$  であるから、 $R_c = R_s$  としたものが衝突できる範囲を示すことになる。ここで衝突直前での脱出速度  $v_{esc} = 4Gm/R_s$  を定義する。脱出速度は全エネルギーが正 (重力ポテンシャルから束縛されない) という条件から求められる。このとき 2 天体が衝突することのできる衝突断面積  $\Gamma$  は

$$\Gamma = \pi b^2 = \pi R_s^2 \left( 1 + \frac{v_{esc}^2}{\sigma^2} \right) \quad (6)$$

と求められる。第 2 項が重力による効果 [gravitational focusing] であり、飛び交う天体の速度が遅いような低温では大きな影響を及ぼす。

### 5.1.2 Shear versus Dispersion Dominated Encounters

中心星との位置関係や速度によって、衝突で考慮すべき対象が変化する。

**Dispersion-dominated:** ( $\sigma > v_H$  (Hill 速度))

衝突する 2 天体だけの力学で考えることができる。

**Shear-dominated:** ( $\sigma < v_H$ )

中心星も考慮に入れた 3 体問題で考える必要がある。

5.1.1 では 2 天体の重力相互作用のみを考えていたが、実際には中心星からの重力相互作用も考慮に入れる必要がある。しかし 3 体問題は簡単に解くことができないため、ここでは 2 体問題として衝突を計算できる領域とそうでない領域を分けることを考える。

後に詳細な計算を行なうが、簡単には次のように計算できる。中心星に原始惑星の軌道周波数と、惑星の周りを運動する粒子の軌道周波数が同じになる粒子の半径  $r_H$  を持つ球を Hill 球とする。すなわち

$$\sqrt{\frac{GM_*}{a^3}} = \sqrt{\frac{GM_p}{r_H^3}} \quad (7)$$

$$r_H \sim \left(\frac{M_p}{M_*}\right)^{1/3} a \quad (8)$$

と求められる。この圏内では衝突する天体同士の 2 体問題として考えることができると考える。また同様に Hill 速度を

$$v_H = r_H \omega \sim \sqrt{\frac{GM_p}{r_H}} \quad (9)$$

と表す。天体のランダムな速度  $\sigma$  に対してこの  $v_H$  が小さければ Hill 球の中に入って衝突する割合を 2 体問題で考えることができる。逆に  $\sigma < v_H$  であれば 3 体問題として考えなければならない。

簡単な導入を見た所で、より詳細な計算を行なう。中心星から原始惑星を通る直線を  $x$  軸とする回転座標系を考え、原点を 2 天体の重心とする。回転座標系での運動方程式は、原

原始惑星（座標系）の角速度を  $\Omega$  として

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\Phi - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (10)$$

$$\Phi = -\frac{GM_*}{r_*} - \frac{GM_p}{r_p} \quad (11)$$

で与えられる。右辺第 2 項はコリオリ力、第 3 項は遠心力である。ここで式を簡単化して以下の近似と座標変換を行なう。

- $M_p \ll M_*$   
原始惑星は固定された中心星を中心にケプラー回転するとみなせる。すなわち  $|x_*| \ll |x_p|$ ,  $\Omega^2 = GM_*/x_p^3$  とする。
- 原始惑星の位置を原点とする。
- 粒子の惑星との距離  $\Delta$  は原始惑星の軌道半径  $x_p$  よりも十分に小さいとする。

座標変換を行なった後に近似をとると、成分ごとに

$$\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} = \Omega^2(x + x_p) - G \left[ \frac{M_*(x + x_* + x_p)}{[(x_* + x_p)^2 + \Delta^2 + 2(x_* + x_p)x]^{3/2}} + \frac{M_p x}{\Delta^3} \right] \quad (12)$$

$$\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} = \Omega^2 y - G \left[ \frac{M_*}{[(x_* + x_p)^2 + \Delta^2 + 2(x_* + x_p)x]^{3/2}} + \frac{M_p}{\Delta^3} \right] y \quad (13)$$

となるので

$$\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} \approx \Omega^2(x + x_p) - \frac{\Omega^2 x_p^3(x + x_p)}{x_p^3} \left( 1 - 3\frac{x}{x_p} \right) - \frac{GM_p x}{\Delta^3} \quad (14)$$

$$\approx \left( 3\Omega^2 - \frac{GM_p}{\Delta^3} \right) x \quad (15)$$

同様に

$$\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} \approx -\frac{GM_p}{\Delta^3} y \quad (16)$$

これは Hill 方程式と呼ばれ、原始惑星近傍を動く微惑星の運動を記述する。右辺がゼロになるときの原始惑星からの距離  $\Delta = r_H$  を Hill 半径と定義し、

$$r_H = \left( \frac{M_p}{3M_*} \right)^{1/3} a \quad (17)$$

と表される。実際に Hill 方程式を解くと、惑星の Hill 半径の数倍以上離れた距離で通り過ぎる粒子はそのまま引き込まれずに衝突せず、原始惑星の軌道にあまりに近づきすぎた

粒子は惑星の Hill 半径に入ることができずに衝突せず跳ね返される馬蹄形の軌道を描くことが分かる。後者は多くが木星と 1:1 共鳴をとっているトロヤ群と同じ軌道である。したがって惑星の軌道に対してその間ほどで進んでいる粒子だけが惑星に衝突することができる。

### 5.1.3 Accretion versus Disruption

衝突は降着 (Accretion), 粉砕 (Shattering), 分散 (Dispersal) のタイプに分けられる。それらは物性にも依るが、大枠には速度と質量比で決まるエネルギー密度

$$Q \equiv \frac{mv^2}{2M} \quad (18)$$

が 3 つのタイプを分けるしきい値  $Q_D^*, Q_S^*$  との大小で決まる。このしきい値は次のサイズと物質の強度の関係を定める 2 つの因子によって変化する。

- 強度支配域 ( $\sim m$ ): サイズが大きくなるほど強度が弱くなる。
- 重力支配域 ( $\sim km$ ): サイズが大きくなるほど強度が強くなる。

天体同士が衝突すると、必ずしも合体して大きくなるわけではない。結果として以下の 3 つのタイプが考えられる。

- 降着 (Accretion)  
2 天体のほぼ全ての質量が 1 つの安定な天体になる。
- 粉砕 (Shattering)  
衝突によってバラバラになるが、それぞれが再降着する。降着でできる安定なものとは異なり Rubble pile のように隙間の多い構造となる。
- 分散 (Dispersal)  
衝突によってバラバラになり、そのまま重力の束縛を抜けていく。

どのような衝突をするとこれらのうちのどのタイプになるのかを調べるために、衝突するエネルギーをターゲットの質量で割ったエネルギー  $Q$  を定義する。

$$Q \equiv \frac{mv^2}{2M} \quad (19)$$

そして、「最大の破片が元々のターゲットの質量の半分となる」のに必要な最小のエネルギー密度を  $Q_D^*$  とする。また  $Q_S^*$  を粉砕させるために必要なエネルギー密度とする。た

だし衝突には質量比や速度だけでなく、角度や形など多くの要素が絡んでいるためこれらのしきい値は近似であることに注意する。

$Q_D^*$  と天体のサイズの関係は物性によらず次の 2 つのタイプがある。

- 強度支配域 (Strength dominated regime)

一般に物体の破壊強度はサイズが大きくなるにつれてヒビ割れがしやすくなるため小さくなる。下に述べる重力が効いてくるまでの小天体では、 $Q_D^*$  はサイズの増加に伴って減少する。

- 重力支配域 (Gravity dominated regime)

衝突して分散させるためには、天体の重力エネルギーよりも大きなエネルギーが必要になる。すなわち天体の半径を  $s$  とすると、少なくとも  $Q_D^* \propto GM/s \propto \rho_m s^2$  となる。したがってサイズの増加に伴って大きくなる。実際にはより大きなエネルギーが必要となるが、サイズの依存性は同じである。

しきい値は実験や流体計算によって決められ、簡単には以上の 2 つの支配域の効果を考慮した

$$Q_D^* = q_s \left( \frac{s}{1\text{cm}} \right)^a + q_g \rho_m \left( \frac{s}{1\text{cm}} \right) \quad (20)$$

で与えられる。係数は実験や数値計算でフィッティングされるが、衝突速度によっても変化する。また厳密には物性によって決まるが、以上の 2 つの支配域の転換点はターゲットの強度に依らず 100m-1km ほどとなる。

例えば  $e \sim 0.1$  で運動する火星と木星の間の小惑星帯 (main belt) では  $2\text{kms}^{-1}$  のオーダーで衝突が頻繁に起こっている。 $m/M = 0.1$  とすると  $Q = 2 \times 10^9 \text{erg g}^{-1}$  となり、 $s \sim 100\text{km}$  の天体も分散させてしまうようなエネルギー密度となり、観測と一致している。惑星形成の時代でこのような衝突が頻繁に起こると形成が妨げられてしまうため、km サイズの微惑星を作るためには main belt における速度よりも遅い必要がある。

また Leinhardt&Stewart(2012)[2] は重力支配域における高分解の衝突計算によって  $Q_D^*$  が運動量に従い、速度と質量比に強く依存することを示している。計算では流体コードと最新の N 体 ( $\sim 10^4$ ) 重力コードを用いていて、Rubble pile どうしが重力と非弾性衝突によって決まる運動を計算している。 $Q_D^*$  は質量比  $\gamma$  を用いて

$$Q_D^* = c^* \frac{4\pi}{5} \rho_1 G R_{C1}^2 \left( \frac{1}{4} \frac{(\gamma + 1)^2}{\gamma} \right)^{(2/3\mu)-1} \quad (21)$$

と計算している。ここで  $R_{C1}$  は衝突時の 2 天体の合計密度が  $1000\text{kgm}^{-3}$  となる半径であり、 $\rho_1$  はその密度 (定数) である。 $\mu$  は 2 天体のエネルギーと運動量の結合度合いを

示すパラメータ [結合パラメータ]、 $c^*$  は  $\gamma = 1$  での分散と重力束縛エネルギーの間の補正パラメータ [散逸パラメータ] となっている。

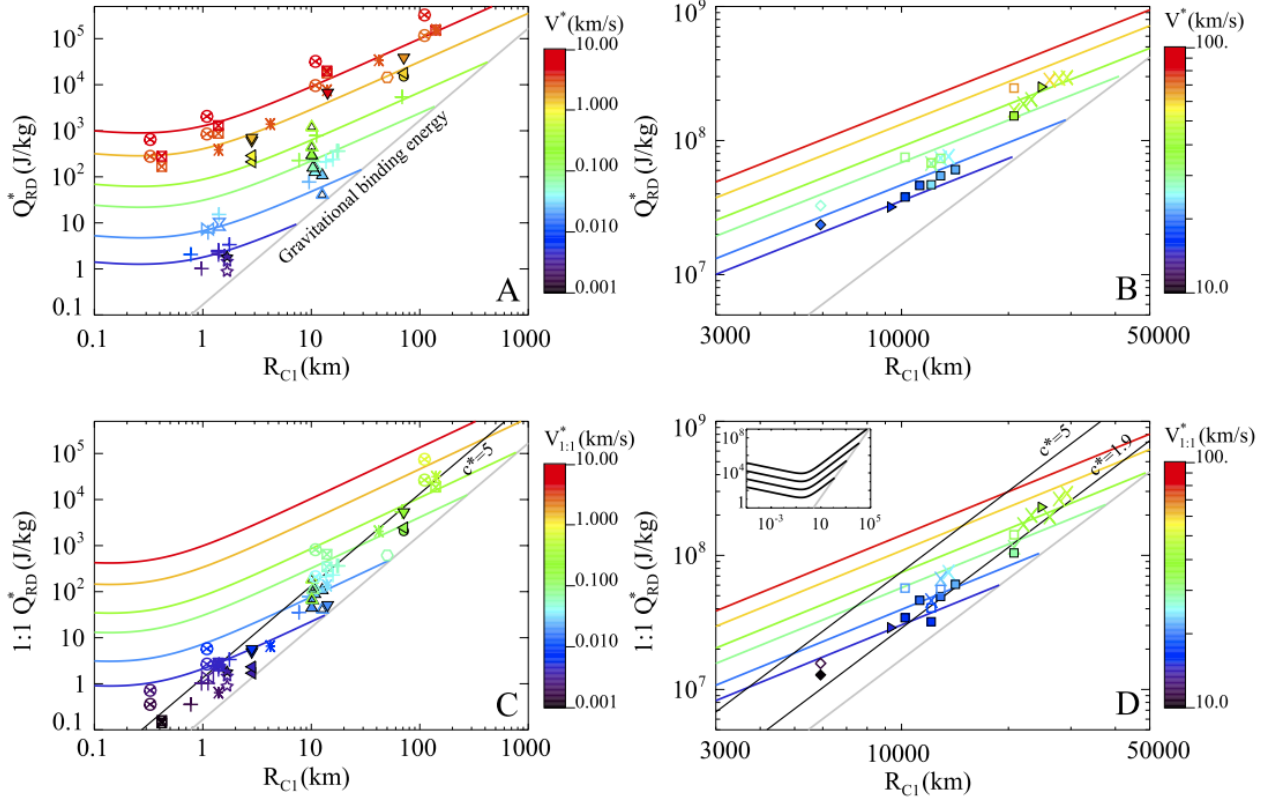


図2 Leinhardt&Stewart(2012)[2] による、重力支配域での物質のサイズと  $Q_D^*$  の関係。グラフ中の記号は材質や大きさの違いを表していて、多くは Rubble pile や玄武岩。色は衝突速度を示す。これらのグラフから最もフィットする  $\bar{\mu}$  と  $c^*$  を計算している。下の C,D は  $\gamma = 1$  の等質量での衝突における関係を示し、 $c^*$  一定の直線に材質や大きさに依らずフィットしているように見える。

## 参考文献

- [1] Philip J. Armitage. *Astrophysics of Planet Formation*. Cambridge University Press, 2 edition, 2020.
- [2] Zoë M Leinhardt and Sarah T Stewart. Collisions between gravity-dominated bodies. i. outcome regimes and scaling laws. *The Astrophysical Journal*, 745(1):79, 2011.