

# Stellar Structure Dynamics[1]

C1SB2064 辻 勇吹樹

2024 年 5 月 20 日

## 3 The Restricted Three-Body Problem

### 3.5 Lagrangian Equilibrium Points

軌道面と基準面

ラグランジュ点

制限 3 体問題において、回転座標系で動かない点。

$L_4, L_5$ :  $m_1, m_2$  を結ぶ線分を 1 辺とする正三角形のもう一つの点。

制限 3 体問題では、2 天体  $m_1, m_2$  が重心  $O$  を中心に円運動をしている。本節では、回転座標系 (synodic system) において位置が変わらない、すなわち平衡点を探す。ただし回転座標系なので、慣性系 (sidereal system) から見ると力を受けて円運動をしていることに注意する。

平衡点では 2 天体からの力  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  と遠心力が釣り合っている。遠心力は回転座標系の中心である重心  $O$  から受けるので、釣り合いのためには 2 天体の力のベクトルの和は  $O$  に向いていなければならない。図 1 には、平衡点  $P$  にかかる力を図示している。 $P$  は回転座標系で動かないので、コリオリ力は働かない。

図 1 のように、 $m_1$  に向かう方向の単位ベクトルを  $\mathbf{a}$ ,  $m_2$  に対して  $\mathbf{c}$ , 重心に対して  $\mathbf{b}$  と定義すると、重心の定義から

$$\mathbf{b} = \frac{m_1 \mathbf{a} + m_2 \mathbf{c}}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

$$m_1(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = m_2(\mathbf{b} - \mathbf{c}) \quad (2)$$

となる。

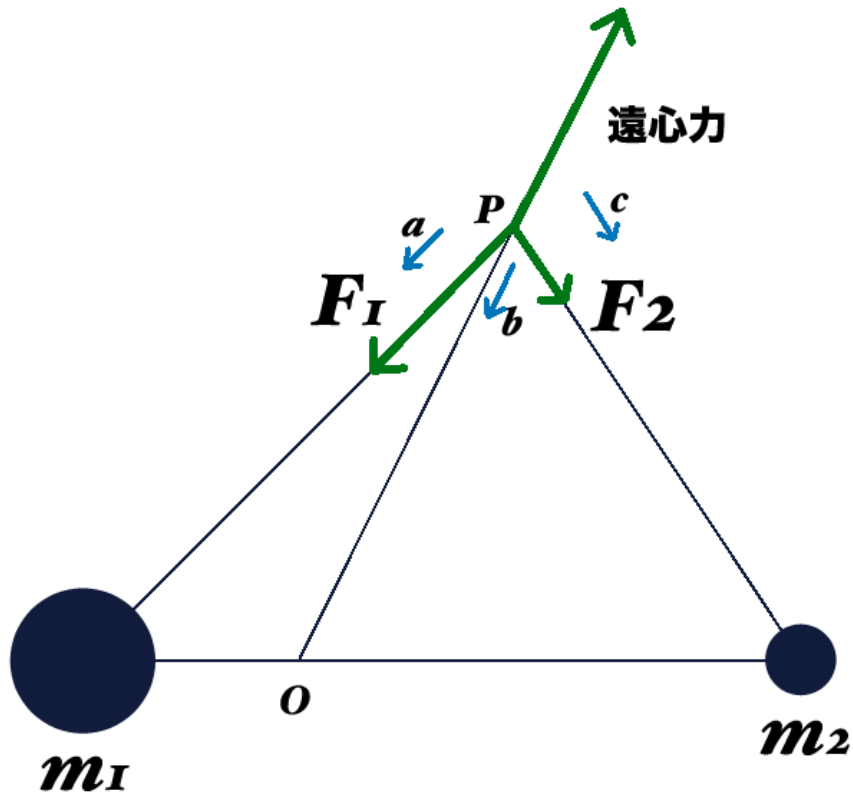


図1 平衡点  $P$  が受ける力の図。 $P$  は回転系で固定であり、 $O$  は慣性系でも固定。

両辺に  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$  の外積を左からかけると、 $\mathbf{F}_1 = F_1 \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{F}_2 = F_2 \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F} = F \mathbf{b}$  より

$$m_1(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = m_2(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \quad (3)$$

$$m_1 F_2 (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = -m_2 F_1 (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \quad (4)$$

$$m_1 F_2 = m_2 F_1 \quad (5)$$

となる。ここで重力の逆2乗を代入する。 $P$  から  $m_1$  までの距離を  $a$ ,  $P$  から  $m_2$  までの距離を  $c$  とすると

$$m_1 \frac{Gm_2}{c^2} = m_2 \frac{Gm_1}{a^2} \quad (6)$$

$$a = c \quad (7)$$

と求まり、「2 天体からの重力のベクトルの和が重心方向となる」ときの平衡点  $P$  は  $m_1, m_2$  を結ぶ線分を底辺、 $P$  を頂点とする二等辺三角形を作ることが導かれた。

つづいて重力と遠心力が釣り合うための条件を見つける。図 2 のような二等辺三角形を考える。

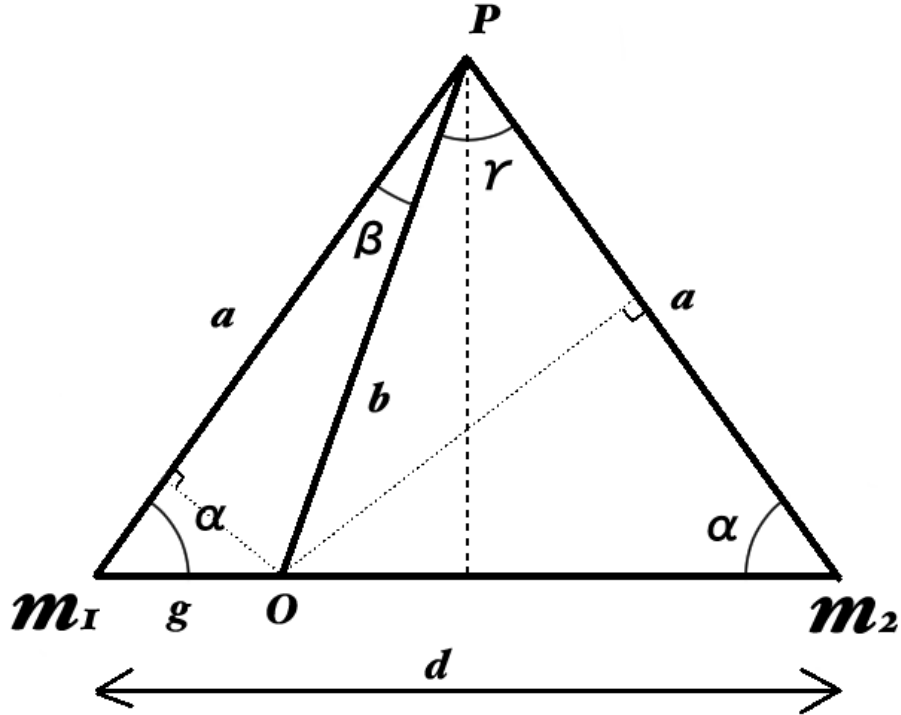


図 2 点  $P$  において  $m_1, m_2$  の作る力の合成ベクトルが重心  $O$  を向くときの模式図。

遠心力と重力が釣り合うとき

$$n^2 b = F_1 \cos \beta + F_2 \cos \gamma \quad (8)$$

$$= \frac{Gm_1}{a^2} \cos \beta + \frac{Gm_2}{a^2} \cos \gamma \quad (9)$$

$$n^2 = \frac{G}{a^2 b} (m_1 \cos \beta + m_2 \cos \gamma) \quad (10)$$

となる。ここで  $\cos \beta$  を書き換えることを考え、余弦定理より

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - g^2 = 2ab \cos \beta & (11) \\ a^2 + b^2 - (d - g)^2 = 2ab \cos \gamma & (12) \\ a^2 + g^2 - b^2 = 2ag \cos \alpha = dg & (13) \end{cases}$$

また重心の性質から

$$\begin{cases} g = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d \\ d - g = \frac{m_1}{m_1 + m_2} d \end{cases} \quad (14)$$

$$(15)$$

となることを用いる。上 2 式を使って書き換えた式 (11)(12) を代入すると

$$n^2 = \frac{G}{2a^3b^2} \{m_1(a^2 + b^2 - g^2) + m_2(a^2 + b^2 - (d - g)^2)\} \quad (16)$$

$$= \frac{G}{2a^3b^2} \left\{ (m_1 + m_2)(a^2 + b^2) - \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} d^2 \right\} \quad (17)$$

$$(18)$$

となる。最後に式 (13) を変形した式

$$a^2 = b^2 + \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} d^2 \quad (19)$$

を用いれば

$$n^2 = G(m_1 + m_2)/a^3 \quad (20)$$

となる。しかし式 (2.26) より軌道長半径  $d$  について

$$n^2 = G(m_1 + m_2)/d^3 \quad (21)$$

となるはずなので  $a = d$  となることが導かれる。すなわち遠心力と重力が釣り合うためにはこの三角形は正三角形でなければならない。同様に、 $m_1, m_2$  の線分に対して対称な点  $P'$  も平衡点となる。これらの点はラグランジュ点 (Lagrangian equilibrium points)  $L_4, L_5$  と呼ばれる。他のラグランジュ点は  $m_1, m_2$  の直線上に存在し、Appendix でその式を与えている。

ここでの議論は抵抗など他の定常な力があっても同様に考えることができる。平衡点の位置は変わるが、「すべての力のベクトルの和が重心方向となる」、そして遠心力と釣り合うことを利用して解くことができる。

## Appendix: ラグランジュ点の直線解

ラグランジュ点  $L_1, L_2, L_3$  の位置はそれぞれ  $m_1, m_2$  の間、 $m_2 (< m_1)$  の外側、 $m_1$  の外側にある。それぞれの点の重心からの距離を  $x_1, x_2, x_3$ 、 $m_1, m_2$  から重心までの距離を

$R_1, R_2$  とすればそれぞれ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Gm_1}{(x_1 + R_1)^2} = n^2 x_1 + \frac{Gm_2}{(-x_1 + R_2)^2} \end{array} \right. \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Gm_1}{(x_2 + R_1)^2} + \frac{Gm_2}{(x_2 - R_2)^2} = n^2 x_2 \end{array} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n^2 x_3 = \frac{Gm_1}{(x_3 - R_1)^2} + \frac{Gm_2}{(x_3 + R_2)^2} \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right. \quad (25)$$

を満たす。実際には 5 次方程式となって解を簡単な式で記述はできないが、各ラグランジュ点を数値的に解くことはできる。太陽を  $m_1$ 、地球を  $m_2$  としたときの地球からの距離を以下に示す。

$L_1$ :  $1.48 \times 10^{11}$  cm (金星に近い)

$L_2$ :  $1.40 \times 10^{11}$  cm (JWST)

$L_3$ :  $2.99 \times 10^{13}$  cm (太陽との距離は 1AU よりも少し長い)

## 参考文献

[1] Carlo Murray. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.