Introduction to Cosmology 2nd Edition

C1SB2064　　辻 勇吹樹

2024 年 1 月 25 日

From 12.4 Making Galaxies[3]

5.1 節では銀河の光度と数密度の関係を表す Schechter 関数を与えた。

$$\Phi(L)dL = \Phi^* \left(\frac{L}{L^*}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right)\frac{dL}{L^*} \tag{1}$$

$\Phi(L)dL$ がある光度の区間における銀河の数密度を表す。5.1 節ではこの式を積分することで銀河の光度密度 $\Psi \sim 1.9 \times 10^8 L_\odot \mathrm{Mpc}^{-3}$ を求め、星の光の密度パラメータでは光子やニュートリノに比べて無視できることを示した。$L = L^*$ より大きな光度では銀河があまり存在せず、観測より $L_V^* \approx 2 \times 10^{10} L_{\odot,V}$ で与えられる。特に銀河系の光度は L_V^* に近く質量は $M_{bary} \approx 1.2 \times 10^{11} M_\odot, M_{tot} \approx (1-2) \times 10^{12} M_\odot$ に相当する。したがってこれ以上のバリオン質量、合計質量 (主にダークハローによる) を超える銀河の形成は非常に困難であることになる。ダークハローではかみのけ座銀河団は $M_{tot} \approx 2 \times 10^{15} M_\odot$ あるため、この質量の制限にはバリオンが深く関わっていることが推察される。そこでこの節では銀河の構造形成のメカニズムを見ることでバリオンによる銀河形成の限界を探っていく。

ちなみに銀河系のダークハローも含めた質量には近年も多くの研究がなされている。表 1 には Bland-Hawthorn & Gerhard(2016) による過去の研究による質量の推定を載せている [1]。M_{200} は宇宙の臨界密度の 200 倍の密度を持つ半径の中にある質量であり、モデルの比較に用いられている。これらはハローや脱出速度、Hyper Velocity Star(HVS) と呼ばれる銀河の脱出速度を超えるような速さを持つ星などから与えられている。

表 1　銀河系の各モデルによる質量の推定 [1]。

	R_{200}[kpc]	$M_{200}[10^{12}M_{\odot}]$
Wilkinson & Evans(1999)	243.9	1.67
Sakamoto et al.(2003)	243.9	1.67
Dehnen et al.(2006)	247.7	1.75
Smith et al.(2007)	207.7	1.03
Xue et al.(2008)	196.1	0.87
Gnedin et al.(2010)	226.4	1.33
Watkins et al.(2010)	283.4	2.62
McMillan(2011)	222.0	1.26
Kafle et al.(2012)	219.1	1.21
Deason et al.(2012)	196.0	0.87
Gonzalez et al.(2013)	215.3	1.15
Kafle et al.(2014)	184.2	0.72
Piffl et al.(2014b)	235.0	1.60
Gibbons et al.(2014)	168.7	0.55

1　銀河形成のメカニズム

11.1 節で導入した overdensity を用いて、等密度時に δ_{rm} だったものが時間発展して $\delta_{coll} \approx 1$ となった時刻 t_{coll} で重力崩壊を起こして収縮したとしよう。$\delta >> 1$ となると 11 章で扱ったゆらぎの線形進化では記述できなくなり、非線形的な進化で星形成が起こることになる。等密度時以降は物質優勢期であり、11.3 節より $\delta \propto a \propto t^{2/3}$ であったことに注意すると、$\delta_{rm} \approx a_{rm}/a_{coll}$ と表すことができて、等密度時の overdenisty が大きい領域ほど早く重力崩壊を起こしたことが分かる。

ある時刻 t における宇宙の平均密度を $\bar{\rho_m}(t)$、重力崩壊を起こす領域の密度を $\rho(t) = \bar{\rho_m}(t)[1+\delta(t)]$ とおく。教科書の表記とはやや異なることに注意されたい。重力崩壊後、合体や降着の運動エネルギーは熱エネルギーへと変換され、やがてビリアル平衡状態へと落ち着く (vilialization)。ビリアル平衡状態では $R_{halo} \approx R(t_{coll})/2$ となるので M 一定から

$$\rho_{halo} \approx 8\rho(t_{coll}) \approx 16\rho_{m,0}(1+z_{coll})^3 \tag{2}$$

が導かれる。全エネルギーが $E = E_{gravity} = -GM/r$ であったハローがビリアル平衡になると全エネルギーは $E = E_{inner} + E_{gravity}, 2E_{inner} + E_{gravity} = 0$ より $E = E_{gravity}/2$ となることが分かる。M は変わらないので半径は平衡前の半分になることが求められる。

7.2 節で円運動している星の速度と半径、質量の関係が以下の式になることを運動方程式から導いた。銀河系のダークハローの速度は、太陽系の回転速度とそれほど変わらないと仮定すれば

$$M = 1.05 \times 10^{11} M_{\odot} \left(\frac{v}{235\mathrm{kms}^{-1}}\right)\left(\frac{R}{8.2\mathrm{kpc}}\right) \tag{3}$$

$$= 1.9 \times 10^{12} M_{\odot} \left(\frac{R_{halo}}{0.15\mathrm{Mpc}}\right) \tag{4}$$

と表される。したがって上のダークハローの密度進化の式と組み合わせることで

$$1 + z_{coll} \approx 6 \left(\frac{R_{halo}}{0.15\mathrm{Mpc}}\right)^{-2/3} \tag{5}$$

という関係が導かれる。

vilialization はハロー内のバリオンガスの塊 (subclumps) が衝突し合うことで大きなエネルギーと温度を発することで達成される。7.3 節での静水圧平衡と理想気体を組み合わせることで

$$M(r) = \frac{kT_{gas}(r)r}{G\mu}\left[-\frac{\mathrm{d}\ln\rho_{gas}}{\mathrm{d}\ln r} - \frac{\mathrm{d}\ln T_{gas}}{\mathrm{d}\ln r}\right] \tag{6}$$

となることを導き、かみのけ座銀河団の質量の推定を行った。ハロー内のガスは等温とし、$\rho_{gas} \propto r^{-\beta}$ の分布をしていると考える。これは Einast 分布と呼ばれ、他にも NFW 分布

$$\rho_{gas} \propto \left[\frac{r}{R_s}(1 + \frac{r}{R_s})^2\right]^{-1} \tag{7}$$

(R_s : ハロー間の距離) や最近では double-γ 分布

$$\rho_{gas} \propto \left(\frac{r}{R_s}\right)^{-4/3} \exp\left[-\frac{1}{\beta_r}\left(\frac{r}{R_s}\right)^{2\beta_r/3}\right] \tag{8}$$

(β_r: 形状パラメータ) が Xu(2023) によって与えられている [4]。Einast 分布 + 等温の仮定で

$$kT_{gas} = \frac{GM_{tot}\mu}{\beta R_{halo}} \tag{9}$$

$$= \frac{4}{\beta}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3} G\mu\rho_{m,0}^{1/3} M_{tot}^{2/3}(1+z_{coll}) \tag{10}$$

と求められる。ここで 11 章で与えられた初期の ^{4}He の質量比 $Y_p = 0.24$ を用いる。平均分子量 μ は Appendix で計算しているがおおよそ $0.59(m_p)$ と求められる。さらに密度分布で $\beta = 2$ とすれば

$$T_{gas} \approx 1.05 \times 10^6 \mathrm{K}\left(\frac{M_{tot}}{10^{12}M_\odot}\right)^{2/3}\left(\frac{1+z_{coll}}{5}\right) \tag{11}$$

$$\approx 1.2 \times 10^6 \mathrm{K}\left(\frac{M_{tot}}{10^{12}M_\odot}\right)^{2/3}\left(\frac{R_{halo}}{0.15\mathrm{Mpc}}\right)^{-2/3} \tag{12}$$

$$5 \approx 6.9 \times 10^8 \mathrm{K}\left(\frac{M_{tot}}{10^{12}M_\odot}\right)^{2/3}\delta_{rm} \tag{13}$$

と求められる。

CDM によるボトムアップシナリオによる構造形成が有力であることは 11 章で述べた。ただし図 11.5 によれば, $\delta M/M$ は質量依存性が弱いことが分かる。特に $M = 10^{10} - 10^{14}M_\odot$ では 1-3 と 3 倍ほどしか変化していないことが確かめられる。表 2 には等密度時の overdensity が $2 \times \delta M/M$ であったときの上式に代入した時のビリアル温度をまとめた。ビリアル温度は質量に対してほぼ 2/3 乗の関係になっている。

表 2　$\delta_{rm} = 2 \times \delta M/M$ のときのビリアル温度

M_{tot}	z_{coll}	δ_{rm}	T_{gas}
$10^{10}M_\odot$	6.7	4×10^{-3}	7×10^4K
$10^{12}M_\odot$	3.4	2×10^{-3}	9×10^5K
$10^{14}M_\odot$	1.0	1×10^{-3}	9×10^6K

2　重いハローでの銀河形成の困難

表 2 でハローの質量とビリアル温度の関係の一例を挙げた。銀河形成が困難になるギリギリのところにある銀河系のハロー質量は $10^{12}M_\odot$ ほどであった。一般に $T_{gas} < 10^6$K

のハローでは H や He が完全にはイオン化されず、残った束縛電子が衝突による束縛束縛遷移によって輝線放射を出すことができるため効率よくハロー内のガスが冷やされる。一方 $T_{gas} > 10^6$K のハローではほぼ完全にイオン化されているためガスを冷やすのは自由自由遷移による制動放射になる。$\mu = 0.59(m_p)$ のとき、ガスのエネルギー密度は

$$\epsilon = \frac{3}{2}\frac{\rho}{\mu}kT \approx 2.08 \times 10^{-14}\mathrm{Jm}^{-3}\left(\frac{\rho_{gas}}{10^{-24}\mathrm{kgm}^{-3}}\right)\left(\frac{T}{10^6\mathrm{K}}\right) \tag{14}$$

と求められる。自由自由放射による光度密度は

$$\Psi = 5.3 \times 10^{-32}\mathrm{Wm}^{-3}\left(\frac{\rho_{gas}}{10^{-24}\mathrm{kgm}^{-3}}\right)^2\left(\frac{T}{10^6\mathrm{K}}\right)^{1/2} \tag{15}$$

で与えられるので、すべてのエネルギーを放射するのにかかる時間は

$$t_{cool} = \frac{\epsilon}{\Psi} = 13\mathrm{Gyr}\left(\frac{\rho_{gas}}{10^{-24}\mathrm{kgm}^{-3}}\right)^{-1}\left(\frac{T}{10^6\mathrm{K}}\right)^{1/2} \tag{16}$$

と概算される。ハロー内のバリオン密度は宇宙における物質に対するバリオンの比 $f = \Omega_{bary,0}/\Omega_{m,0} \approx 0.15$ を用いて

$$\rho_{bary} = f\rho_{halo} \approx 16f\rho_{m,0}(1+z_{coll})^3 \tag{17}$$

$$\approx 0.8 \times 10^{-24}\mathrm{kgm}^{-3}\left(\frac{f}{0.15}\right)\left(\frac{1+z_{coll}}{5}\right)^3 \tag{18}$$

と表される。したがって宇宙年齢よりも早くガスを冷却して収縮を始めるためにはより多くのバリオンが含まれていること、そのためにはより遅く収縮を始める必要があることが分かる。表 2 でみたように、質量が大きいほどビリアル温度が高く収縮を開始するのが早いので、冷却時間が足りず銀河形成が困難になる。統計的にも考えてみよう。例えば最終散乱面の時の宇宙内の質量

$$M = \rho_{m,0}\frac{4\pi}{3}d_p(t_0)^3 \approx 4.3 \times 10^{23}M_\odot \tag{19}$$

の中で $10^{14}M_\odot$ の星を作ろうと考える。その星は宇宙の 4.3×10^9 のうちの 1 を占める領域であり、その位置が選ばれる確率は $P = 1/4.3 \times 10^9 \approx 2.3 \times 10^{-10}$ になる。ガウス分布によれば (overdensity は 11.4 節よりガウス分布に従っていた)、これは 6.2σ のゆらぎに相当し、図 11.5 の計算から $10^{14}M_\odot$ の星は $z_{coll} \approx 5.2$ であることが求められる。このときの温度や平均密度、冷却時間は上で述べてきた式を用いて

$$T_{gas} \approx 2.82 \times 10^7\mathrm{K} \tag{20}$$

$$\rho_{gas} \approx 1.54 \times 10^{-24}\mathrm{kgm}^{-3} \tag{21}$$

$$t_{cool} \approx 44.8\mathrm{Gyr} \tag{22}$$

と求められる。T_{gas}, ρ_{gas} の式から、さらに遅く生まれた星はわずかに低温だが密度も低く、冷却時間が更に伸びることになる $(t_{cool} \propto (1+z_{coll})^{-5/2})$。したがって少なくとも最終散乱時刻以降に $10^{14}M_\odot$ のハローの重力崩壊を起こすことはできない。実際には球対称でないモデルの計算により cold flow と呼ばれるフィラメント状のガスが銀河中心に流れ込み、vilialization に伴う高温化 (virial shock) を経ずに高い赤方偏移でも銀河形成を行える銀河もあることが分かっている。今回のモデルでは球対称、等温、ビリアルの仮定で計算したことに注意が必要である。

3 Press-Schechter 理論

最初に重い銀河が形成されにくいことを述べるときに Schechter 関数を持ち出したが、今までの議論には登場しなかった。最後にこの関数の背景にある Press-Schechter 理論をかんたんに述べる。「Galaxy Formation」(Longair)[2] を参考にした。

最初に出した関数は光度と数密度の関係だったが、質量と数密度にも同様の関係が与えられる。

$$n(M) = \frac{\bar{\rho}}{\sqrt{\pi}}\frac{\gamma}{M^2}\left(\frac{M}{M^*}\right)^{\gamma/2}\exp\left[-\left(\frac{M}{M^*}\right)^{\gamma}\right] \tag{23}$$

$(\gamma = 1 + (n/3), n$: パワースペクトル $P(k) \propto k^n$ の指数, $M^* = M_0^*(t/t_0)^{4/(3+n)} = (\bar{\rho}^{1-(n/3)}/2\delta^2)^{3/(3+n)}, M_0^*$: 観測で与えられるカットオフ質量)
この式を導出する。overdensity がガウス分布に従うことから、臨界値 δ_c 以上の大きさのゆらぎを持つ確率 F は

$$F(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(M)}\int_{\delta_c}^{\infty}\exp\left[-\frac{\delta^2}{2\sigma^2(M)}\right]d\delta = \frac{1}{2}[1-\Phi(t_c)] \tag{24}$$

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx, \quad t_c = \frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma} \tag{25}$$

で表される。分散 $\sigma = (\delta M/M)^2$ は 11.4 節より $\sigma \propto M^{-(3+n)/3}$ となる。この比例定数を A とおく。このとき $t_c \propto M^{(3+n)/6}$ となることが分かる。したがって

$$t_c = \left(\frac{M}{M^*}\right)^{(3+n)/6}, \quad M^* = \left(\frac{2A}{\delta_c}\right)^{3/(3+n)} \tag{26}$$

と表せる。$M - M + dM$ の重力崩壊を起こす天体の個数密度を $n(M)dM$ とおくと

$$\frac{Mn(M)}{\bar{\rho}}dM = F(M) - F(M+dM) \approx -\frac{\partial F}{\partial M}dM \tag{27}$$

となる。ただしゆらぎの非線形効果も考えてこの数密度を 2 倍する必要がある。以上より

$$n(M) = -2\frac{\bar{\rho}}{M}\frac{\partial F}{\partial M} = \frac{\bar{\rho}}{M}\frac{\partial \Phi}{\partial M} \tag{28}$$

$$= \frac{\bar{\rho}}{M}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t_c^2}\right)\frac{\partial t_c}{\partial M} \tag{29}$$

$$= \frac{\bar{\rho}}{\sqrt{\pi}}\frac{\gamma}{M^2}\left(\frac{M}{M^*}\right)^{\gamma/2}\exp\left[-\left(\frac{M}{M^*}\right)^{\gamma}\right] \tag{30}$$

Press-Schechter mass function が導出された。N 体シミュレーションとの結果とも良い一致が見られている。

Appendix: 平均分子量 μ

イオンの平均分子量を計算するのは多少厄介である。ここでは完全電離したガスの平均分子量を求める。数密度 n、平均分子量 μ の理想気体混合ガスには

$$P = nkT = \frac{\rho}{\mu}R_{gas}T \tag{31}$$

の関係が成り立っている。$R_{gas} = 8.31 \times 10^7 \mathrm{erg K^{-1} g^{-1}}$ は気体定数である。このとき、それぞれの核子の質量比を $X_i = \rho_i/\rho$、平均分子量を μ_i とおくと数密度は

$$n_i = \frac{\rho_i}{\mu_i m_u} = \frac{\rho}{m_u}\frac{X_i}{\mu_i} \tag{32}$$

と表される。圧力は核子と電子の分を考えて、電子の数=原子番号を Z_i とおくと

$$P = P_e + \sum_i P_i = \left(n_e + \sum_i n_i\right)kT \tag{33}$$

$$= \sum_i (1+Z_i)n_i kT \tag{34}$$

$$= \sum_i \frac{X_i(1+Z_i)}{m_u \mu_i}\rho kT \tag{35}$$

$$= R_{gas}\sum_i \frac{X_i(1+Z_i)}{\mu_i}\rho T \tag{36}$$

となる。理想気体の式 (31) と比較すれば平均分子量を

$$\mu = \left(\sum_i \frac{X_i(1+Z_i)}{\mu_i}\right)^{-1} \tag{37}$$

と求めることができる。例えば電離水素なら $X_H = 1, \mu_H = 1, Z_H = 1$ なので $\mu = 1/2$ となる。今回の $Y_p = 0.24$ では

$$\mu = \left(\frac{0.76(1+1)}{1} + \frac{0.24(1+2)}{4} \right)^{-1} \approx 0.588 \tag{38}$$

} と求められる。教科書では $\mu_{\text{教科書}} = \mu m_u$ として平均分子量ではなく 1 粒子あたりの質量としている。

参考文献

[1] Joss Bland-Hawthorn and Ortwin Gerhard. The galaxy in context: structural, kinematic, and integrated properties. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 54:529–596, 2016.

[2] M.S. Longair. *Galaxy Formation*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[3] Barbara Ryden. *Introduction to Cosmology*. Cambridge University Press, 2 edition, 2016.

[4] Zhijie Xu. Dark matter halo mass functions and density profiles from mass and energy cascade. *Scientific Reports*, 13(1):16531, 2023.