

# Introduction to Cosmology 2nd Edition

C1SB2064 辻 勇吹樹

2023 年 10 月 19 日

## From 3.2 The Special Way of Einstein[2]

### Einstein の発見

Albert Einstein は 1905 年に「Zur Elektrodynamik bewegter Körper(動く物体の電磁気学について)[1]」を発表した。その introduction での最初の段落で次のような文章を記している (翻訳は筆者)。

Maxwell の電磁気学は現状理解されているのと同じように、動く物体に適用すると固有なものとは思われない非対称性をもたらすということはよく知られている。例えば磁石と導体の間の電磁氣的なやりとりを考えてみよう。観察できる現象は磁石と導体の相対的な運動だけに依っており、一方で普通に考えれば 2 つの状況があり、どちらか一方の物体が動いているということは厳密に (2 つの考えは) お互いに分離されていなければならない。すなわち運動している磁石と止まっている導体では磁石の近傍でとあるエネルギーの値の電場を生じさせ、導体の存在する場所で電流を生じさせる。しかし磁石が静止していて導体が運動していると磁石の近傍では電場が生じないが、それに反して自身がエネルギーを持たないことに対応して導体内の起電力が (目で捉えられた 2 つの状況が同一と当然仮定した場合) 同じ大きさで同じ流れの電流を与える誘因となる、最初の状況における電気による力のように。

筆者の翻訳能力と論文の難しさで 1 度で理解することは困難である。Einstein の提示した例を使って考えてみよう。

文中の導体を円形回路、磁石を棒磁石に置き換えて考える。まず回路を静止させ磁石を動

かす場合では回路に誘導電流が流れることになる。これは Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (1)$$

で与えられる。例えば棒磁石の N 極側を回路の中心に向かって近づけると回路には磁石側から見たときに半時計回りの電流が誘導される。次に、磁石を静止させ回路をその静磁場の中で動かすことを考える。このとき動かす物体は違っても相対的な速度や向きが同じであれば同じ向きに電流が流れるはずである。それは回路に乗った系を考えると「磁石と導体の相対的な運動」から磁石は前の例と同じように回路に対して運動しているからである。しかし磁石の止まった系では誘導電場を発生させる磁場の時間的な変化は存在しない。確かに回路を動かすことで回路の場所での磁場の値は変化しているはずだが、それは Lagrange 的な見方であり今回議論しているのは Euler 的（空間の不動点に着目したような）時間変化に他ならない。すなわち電場は作られない。するとここで高校物理を思い返すと「Lorentz 力」というものがこの状況を説明してくれることに気づく。電荷  $e$  を持つ荷電粒子は Lorentz 力  $e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  の力が発生することになる。この力を受けた荷電粒子は群れをなして運動し電流となって回路の中を流れることになる。Lorentz 力には速度が入っているので最初の回路が動かない例では発生しなかった力となる。以上より電磁誘導の法則と Lorentz 力、これらがそれぞれ働くことで運動する物体が変わったときの電磁場の働きを記述し同じ電流の流れをもたらすことになる。

これが「非対称性」であり、Einstein をはじめとする科学者たちはこれらの説明を統一するように試行錯誤した。先程見たように違うのは系だけで実際は同じ現象であるはずだからである。もし見る系によって法則が変わるのであればたいへん困ったことになる。地球は太陽の周りを周っているため、私達が導いた法則の全てはこの地球上でしか、しかも地球上で動いていない場所でしか成立しないことになる。これは科学者が目指してきた現象をできるだけかんたんに説明する努力を水の泡とする行いであり、そうであってはほしくない。そうして Einstein は 1905 年に特殊相対性理論を発表し重力を除く力を記述する物理法則が系によって変わらないとする相対性原理を打ち出した。ここからは特殊相対性理論とそれを支える 2 つの原理について見ていこう。

## 特殊相対性理論

ここでは次の枠組みの中で考えることにする。

- ユークリッド幾何学
- 重力質量と慣性質量は等しい (3.1 を参照)

- 重力の影響は考えない

## 基準系

質量  $m$  を持つ粒子 A が系 T で外力  $\mathbf{F}$  を受けて運動している状況を考える。このとき粒子の位置  $\mathbf{r}$  を記述する方法はいくつもあるが Newton の第 2 法則

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\mathbf{F} \quad (2)$$

に従って粒子が運動しているときこの系は慣性系である。慣性系とは Newton の第 1 法則「外部から力が働かない限り、物体は今の状態を保ち続ける。」を満たす系を指す。粒子の速度  $v$  が光速  $c$  に比べて十分に遅いとき、空間に固定された系、例えばデカルト (直交) 座標系は慣性系となる。これは高校物理でもかんたんな物理を考えるとときにはよく使用されているものである。ただし机の上においたボールを考えると机の面で座標系を展開することは厳密には慣性系ではない (ほとんど無視して良いものではあるが)。それはおおよそ机が地球の上に乗っていて地球は加速度運動しているためである。加速度運動している系に乗ると第 2 法則は満たされない。例えば粒子が回転するテーブルに乗っているとときそのテーブルにおける座標は回転座標系と呼ばれ「コリオリの力」と「遠心力」が右辺に加わることになる。実際にどうなるか式を追ってみよう。

かんたんに 2 次元で考える。角速度  $\omega t$  で回っている回転座標系における粒子の位置  $\mathbf{r}_{rot} = (X, Y)$  は静止系における位置  $\mathbf{r} = (x, y)$  を用いると次のように表せる。

$$\mathbf{r}_{rot} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$= R(\omega t)\mathbf{r} \quad (5)$$

速度や加速度、外力も同様に回転行列  $R(\omega t)$  をかけることで回転座標系に直すことができる。静止系では第 2 法則に従うので、回転行列の逆行列をかけて回転座標系での運動方程式を導く。ここで回転行列の逆行列は  $R^{-1}(\omega t) = R(-\omega t)$  となり、回転行列の時間

の 2 階微分は  $\frac{d^2}{dt^2}R(\omega t) = -\omega^2 R(\omega t)$  となることに注意する。

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{dt} R^{-1}(\omega t) \mathbf{r}_{rot} \right\} \quad (6)$$

$$= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{dR^{-1}(\omega t)}{dt} \mathbf{r}_{rot} + R^{-1}(\omega t) \frac{d\mathbf{r}_{rot}}{dt} \right\} \quad (7)$$

$$= \frac{d^2 R^{-1}(\omega t)}{dt^2} \mathbf{r}_{rot} + 2 \frac{dR^{-1}(\omega t)}{dt} \frac{d\mathbf{r}_{rot}}{dt} + R^{-1}(\omega t) \frac{d^2 \mathbf{r}_{rot}}{dt^2} \quad (8)$$

$$= \omega^2 R(\omega t) \mathbf{r}_{rot} + 2 \frac{dR(-\omega t)}{dt} \mathbf{v}_{rot} + R(-\omega t) \mathbf{a}_{rot} \quad (9)$$

外力も同様に直すことで運動方程式は以下ようになる。ただし回転行列の時間微分は  $\frac{d}{dt}R(\omega t) = -\omega R(\omega t + \pi/2)$  となる。

$$m \{ \omega^2 R(\omega t) \mathbf{r}_{rot} + 2\omega R(-\omega t + \pi/2) \mathbf{v}_{rot} + R(-\omega t) \mathbf{a}_{rot} \} = R^{-1}(\omega t) \mathbf{F}_{rot} \quad (10)$$

$$m \mathbf{a}_{rot} + 2\omega R(\pi/2) \mathbf{v}_{rot} - m\omega^2 \mathbf{r}_{rot} = \mathbf{F} \quad (11)$$

$$m \begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \end{pmatrix} + 2\omega \begin{pmatrix} -v_Y \\ v_X \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \end{pmatrix} \quad (12)$$

左辺第 2 項がコリオリの力で第 3 項が遠心力に相当する。したがって回転座標系では第 2 法則がそのまま成り立たないことが確かめられる。地球も自転しているので回転による影響を厳密には取り入れるべきではあるが、台風など大きなスケールでないといほとんど無視できるようなものであり実際 Newton は観測できていなかった。

## ガリレイ変換

それでは等速度で動く系 (座標:  $\mathbf{r}_{vel}$ ) ではどうなるだろうか。回転座標系で考えたように次のような変換を考え、実際に慣性系を満たすかどうかを確かめてみよう。

$$\mathbf{r}_{vel} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$= \begin{pmatrix} x - vt \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$= \mathbf{r} - vt \mathbf{e}_x \quad (15)$$

このとき加速度は

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_{vel} + vt\mathbf{e}_x) \right\} \quad (16)$$

$$= \frac{d^2\mathbf{r}_{vel}}{dt^2} + \frac{d}{dt} (v\mathbf{e}_x) \quad (17)$$

$$= \frac{d^2\mathbf{r}_{vel}}{dt^2} \quad (18)$$

となって静止系と一致する。したがって等速度で動く系に対しても第 2 法則は成立し慣性系となる。また式 14 で与えられる変換を Galilean 変換と呼ぶ。この変換を見れば分かるように時間は系に対して独立であり、等速で動く系の間で同じ時間を共有していることになる。この変換は一見うまく説明できているように見えるかもしれないが、第 1 章で見たように電磁場においてはうまく行かないことを Einstein は指摘していた。ここでは割愛するが電磁場に Galilean 変換を施すと電荷密度が見る系によって変化したり磁場が系によって変化しなかったり奇妙な現象が見られるようである。そして 1 章で見た非対称性を解消するために Einstein は次の 2 つの原理を設定した。

特殊相対性理論の 2 つの原理と Lorentz 変換

相対性原理

全ての慣性系において物理の基本法則を記述する方程式は同じである。

光速不変の原理

全ての慣性系において真空の光の速度は一定値  $c$  をとる。

Galilean 変換は Galileo によって第 2 法則が全ての慣性系で成り立つように考えた、系の間の関係である。Einstein はさらに Maxwell 方程式をはじめとするあらゆる物理法則が慣性系で同じように成り立つことを考えた。そして Maxwell 方程式は電磁場が光速で伝播することを記述しているので、この法則が全ての慣性系で成り立つのであれば光速不変の原理が導かれることになる。

光が同心円状に広がる様子を 2 つの慣性系  $K, K'$  で観察する。 $K'$  系では  $K$  系に対して  $x$  方向に速度  $v$  で動いているものとする。 $K$  系で、ある時刻  $t$  での光の位置は半径  $ct$  の同心円上に広がることになる。一方  $K'$  系で、ある時刻  $t'$  での光の位置は半径  $ct'$  の同心円に広がる。したがって

$$\begin{cases} c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{cases} \quad (20)$$

となる。真面目な計算をせずに  $y = y', z = z'$  として考えよう。また原点は揃えているので  $x'$  は  $y, z$  の項をもたず、 $x' = A(x - vt)$  を満たすと考ええる。また  $t' = Bx + Dt$  として線型結合で表されたとする。これらの式を代入することで次のような変換式が与えられる。この変換は Lorentz 変換と呼ばれる。

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) & (21) \\ y' = y & (22) \\ z' = z & (23) \\ t' = \gamma(t - vx/c^2) & (24) \end{cases}$$

$\gamma$  は Lorentz 因子であり

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 1 \quad (25)$$

で定義される。また回転座標系での回転行列のようなものを Lorentz 変換でも与えることができる。 $\tanh(\theta) = v/c$  とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma/c \\ v\gamma/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} \quad (27)$$

と与えることができる。

### 相対論的効果と世界間隔

Galilean 変換とは異なり Lorentz 変換は時間の刻み方が系によって異なる。系  $K'$  に固定された豆電球が  $\Delta t' = 1s$  で光る状況を考えよう。系  $K'$  にいる人はもちろんこの明滅の時間を 1 秒と認識するが、前節での系  $K$  ではどうだろうか。Lorentz 変換の式から

$$\Delta t = t_{off} - t_{on} \quad (28)$$

$$= \gamma(t'_{off} + vx/c^2) - \gamma(t'_{on} + vx/c^2) \quad (29)$$

$$= \gamma(t'_{off} - t'_{on}) = \gamma[s] > 1[s] \quad (30)$$

となるので  $K'$  系から見て  $K$  系の時間経過は遅れていることになる。このようにして Newton の考えに反して一般の系の間で絶対的な時間というものはないことを導くことができる。

ある空間の間隔も系によって違うように見えることになる。同様に系  $K'$  に固定さ

れた棒の間隔  $\Delta l'$  は系  $K$  で見ると

$$(\Delta l')^2 = (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 \quad (31)$$

$$= \gamma^2 \{x_1 - x_2 - v(t_1 - t_2)\}^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \quad (32)$$

$$= (\Delta l)^2 + (\gamma^2 - 1)(x_1 - x_2)^2 \quad (33)$$

$$(\Delta l)^2 = (\Delta l')^2 - (\gamma^2 - 1)(x_1 - x_2)^2 \quad (34)$$

となる。棒の長さは止まっている系から見ると短くなる (Lorentz 収縮) ことが確かめられる。

時間や空間それぞれは系によって膨張収縮してしまったが Lorentz 変換で変わらない量も存在する。次の式で表される量  $\Delta s$  は「世界間隔」と呼ばれすべての慣性系で保存される量になる。これは光速不変の原理からもただちに導かれ、このとき世界間隔の値は 0 になる。一般の物体では何らかの値をとる。

$$(\Delta s)^2 = -c^2(t_1 - t_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \quad (35)$$

$$= -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta l)^2 \quad (36)$$

このとき時間の単位を  $ict$  と取ることによって 4 次元空間の距離として考えやすくなる。もしくは  $ct = s \sinh(\alpha)$ ,  $x = s \cosh(\alpha)$  として与えることができる。これらを式 27 に代入すると

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh(\alpha) \\ \cosh(\alpha) \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$= s \begin{pmatrix} \sinh(-\theta + \alpha) \\ \cosh(-\theta + \alpha) \end{pmatrix} \quad (38)$$

となり、 $ct - x$  グラフを描くと慣性系の間では同じ双曲線の上に乗っていることが分かる。

上の式で示されたようなものだが最後にこの値が慣性系で不変であることを示す。

$$(\Delta s')^2 = -c^2(t'_1 - t'_2)^2 + (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 \quad (39)$$

$$= -\gamma^2 c^2 \left[ (t_1 - t_2) - \frac{v}{c^2} (x_1 - x_2) \right]^2 + \gamma^2 (x_1 - x_2 - v(t_1 - t_2))^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \quad (40)$$

$$= (v^2 - c^2) \gamma^2 (t_1 - t_2)^2 + \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \gamma^2 (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \quad (41)$$

$$= -c^2(t_1 - t_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \quad (42)$$

$$= (\Delta s)^2 \quad (43)$$

## 参考文献

- [1] A. Einstein. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der Physik*, 322(10):891–921, 1905.
- [2] Barbara Ryden. *Introduction to Cosmology*. Cambridge University Press, 2 edition, 2016.