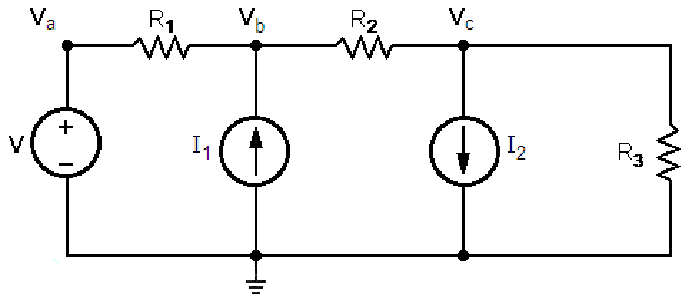
Circuitos con fuentes de voltaje. Caso 1.

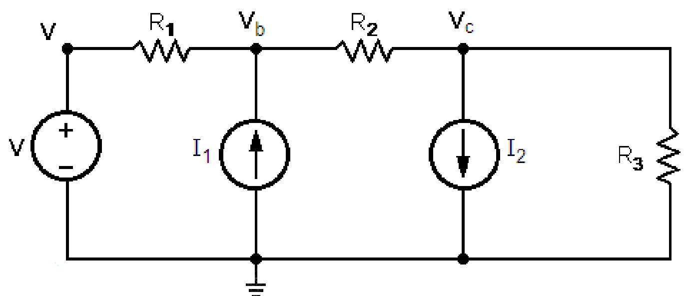


$$V_a = V$$

$$V_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\frac{V_a}{R_1}-\frac{V_c}{R_2}=I_1$$

$$V_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\frac{V_c}{R_2}=I_1+\frac{V}{R_1}$$

$$V_c\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-\frac{V_b}{R_2}=-I_2$$



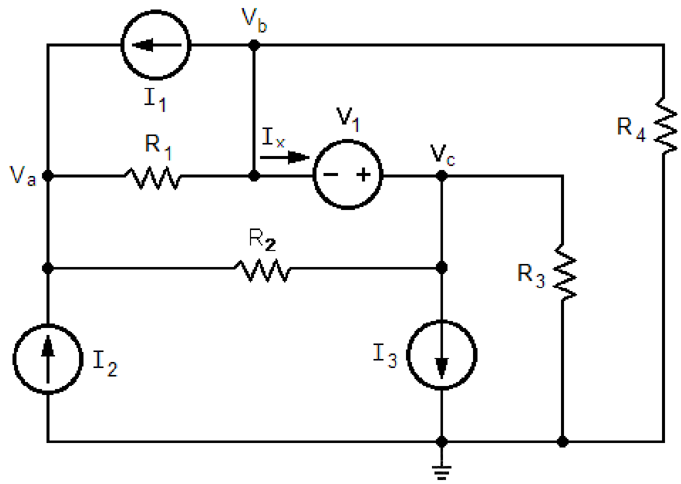
$$V_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\frac{V}{R_1}-\frac{V_c}{R_2}=I_1$$

$$V_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\frac{V_c}{R_2}=I_1+\frac{V}{R_1}$$

Circuitos con fuentes de voltaje. Caso 2.

- Cuando una fuente de voltaje está entre dos nodos, se asigna una corriente desconocida que circula a través de ésta.
- Se establece la ecuación de nodo considerando la corriente en la fuente de voltaje.

- Finalmente, se toma en cuenta que la fuente de voltaje establece la diferencia de potencial entre los dos nodos en donde se encuentra, y se le relaciona con los voltajes de éstos.



$$V_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\frac{V_b}{R_1}-\frac{V_c}{R_2}=I_1+I_2 \qquad (1)$$

$$V_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)-\frac{V_a}{R_1}+I_x=-I_1 \qquad (2)$$

$$V_c\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-\frac{V_a}{R_2}-I_x=-I_3 \qquad (3)$$

Sumando las ecuaciones (2) y (3):

$$V_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)-\frac{V_a}{R_1}+I_x+V_c\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-\frac{V_a}{R_2}-I_x=-I_1-I_3$$

$$V_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)-\frac{V_a}{R_1}+V_c\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-\frac{V_a}{R_2}=-I_1-I_3$$

$$V_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)-V_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+V_c\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)=-I_1-I_3 \quad (4)$$

En los dos nodos entre los que está la fuente de voltaje, se tiene:

$$V_1=V_c-V_b$$

de donde se despeja V_c:

$$V_c=V_1+V_b$$

que al sustituirse en (1):

$$V_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\frac{V_b}{R_1}-\frac{V_1+V_b}{R_2}=I_1+I_2$$

$$V_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-V_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=I_1+I_2+\frac{V_1}{R_2} \qquad (5)$$

Y al sustituir en (4):

$$V_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)-V_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+(V_1+V_b)\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)=-I_1-I_3$$

$$V_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)-V_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=-V_1\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-I_1-I_3$$

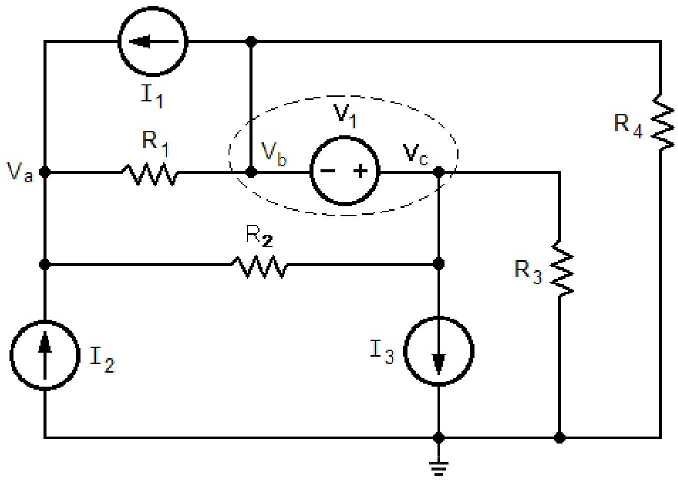
Quedando el sistema de ecuaciones de la forma

$$V_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-V_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=I_1+I_2+\frac{V_1}{R_2}$$

$$-V_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+V_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)=-I_1-I_3-V_1\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$

Supernodo

- El circuito puede resolverse por un método distinto que establece un **supernodo**.
- Esto se crea como resultado de encerrar en una superficie cerrada los dos nodos entre los que está la fuente de voltaje.
- Se ve el circuito como si la rama que contiene la fuente de voltaje se compactara (imaginariamente), pero siguen considerándose los dos voltajes de nodo independientes.



La ecuación del nodo 'a' se establece de manera igual a cuando se consideran todos los nodos independientes.

$$V_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\frac{V_b}{R_1}-\frac{V_c}{R_2}=I_1+I_2$$

Para los nodos 'b' y 'c', que forman el supernodo, se establece una sola ecuación considerando, en cada resistencia, los voltajes en sus terminales.

$$V_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)+V_c\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-\frac{V_a}{R_1}-\frac{V_a}{R_2}=-I_1-I_3$$

Reordenando los términos de la ecuación de supernodo:

$$-V_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+V_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)+V_c\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)=-I_1-I_3$$

Hasta aquí, se tienen sólo dos ecuaciones para encontrar tres incógnitas; la tercera ecuación se obtiene de la relación del voltaje de fuente con los voltajes de nodo, es decir

$$V_1=V_c-V_b$$

la cual, como tercera ecuación del sistema, se escribe

$$-V_b+V_c=V_1$$

El sistema de ecuaciones queda

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\boldsymbol{V_a}-\frac{1}{R_1}\boldsymbol{V_b}-\frac{1}{R_2}\boldsymbol{V_c}=I_1+I_2$$

$$-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\boldsymbol{V_a}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)\boldsymbol{V_b}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\boldsymbol{V_c}=-I_1-I_3$$

$$-\boldsymbol{V_b}+\boldsymbol{V_c}=V_1$$

LINEALIDAD Y SUPERPOSICIÓN

La linealidad requiere aditividad y homogeneidad (escala). Si a una resistencia se aplica $i_1(t)$, el voltaje de la resistencia es

$$v_1(t)=R\cdot i_1(t)$$

De manera similar, si se aplica $i_2(t)$, entonces

$$v_2(t)=R\cdot i_2(t)$$

Si se aplica $i_1(t)+i_2(t)$, el voltaje a través de la resistencia es

$$v(t)=R\cdot[i_1(t)+i_2(t)]=R\cdot i_1(t)+R\cdot i_2(t)=v_1(t)+v_2(t)$$

Si se tiene

$$v(t)=R\cdot i(t)$$

y la corriente se multiplica por una constante, entonces

$$v(t)=R\cdot[K\cdot i(t)]=K\cdot R\cdot i(t)$$

Esto demuestra la homogeneidad.

Un circuito que contiene sólo fuentes independientes, fuentes linealmente dependientes y resistencias, está descrito por ecuaciones de la forma

$$a_1v_1(t)+a_2v_2(t)+\cdots+a_nv_n(t)=i(t)$$

O

$$b_1i_1(t)+b_2i_2(t)+\cdots+b_ni_n(t)=v(t)$$

Si las fuentes independientes se multiplican por una constante, los voltajes de nodos o las corrientes de mallas también están multiplicados por la misma constante.

Cualquier elemento en el cual el voltaje y la corriente están relacionados por

$$i = A\frac{d^n v}{dt^n} \qquad\qquad v = B\frac{d^n i}{dt^n} \qquad\qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

Es llamado un **elemento lineal**, asumiendo que A y B no dependen de v o i.

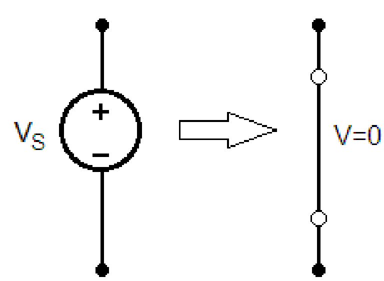
Un circuito compuesto de elementos y fuentes lineales, es llamado un **circuito lineal**.

SUPERPOSICIÓN

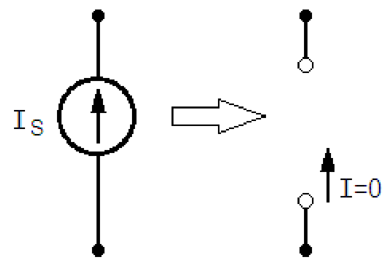
- Cuando más de una fuente aplican energía a una red lineal, la respuesta resultante puede ser obtenida como la suma de las respuestas individuales causadas por cada fuente actuando sola mientras las demás fuentes son hechas cero.
- De aquí, sumando las respuestas debidas a las fuentes aplicadas una a la vez, se puede obtener la respuesta debida a todas las fuentes actuando juntas.
- Esto se conoce como principio de superposición o teorema de superposición.

TEOREMA DE SUPERPOSICIÓN

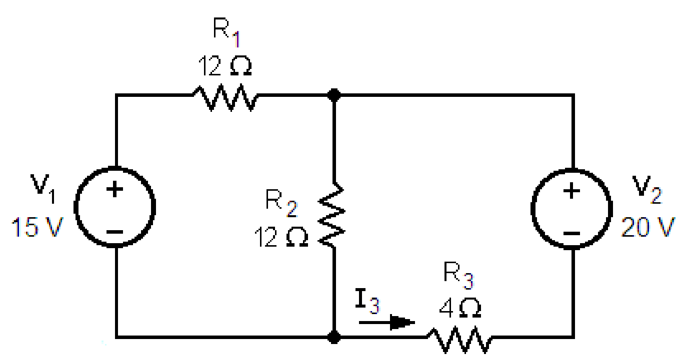
- Establece que **la corriente, o voltaje, a través de un elemento en una red lineal, es igual a la suma algebraica de las corrientes, o voltajes, producidos independientemente por cada fuente**.
- En general, el número de redes a ser analizados es igual al número de fuentes independientes.
- Considerar los efectos de cada fuente independientemente, requiere que las fuentes independientes sean eliminadas y reemplazadas sin afectar el resultado final.
- Para eliminar una **fuente de voltaje**, la diferencia de potencial entre las terminales de la fuente de voltaje debe ser **igualada a cero**, por lo que se sustituye por un **cortocircuito**.



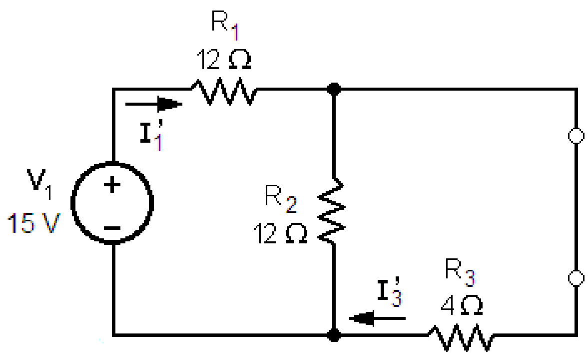
- Eliminar una **fuente de corriente**, requiere que su corriente sea **igual a cero**, es decir, que sus terminales sean abiertas, por lo que se sustituye por un **circuito abierto**.



- La corriente total a través de cualquier porción de la red es igual a la **suma algebraica de las corrientes producidas independientemente por cada fuente.**
- En un circuito con dos fuentes, si la corriente producida por una fuente es en un sentido, mientras que la producida por otra fuente está en sentido opuesto a través del mismo resistor, la corriente resultante es la diferencia de las dos y fluye en el sentido de la mayor.
- Si las corrientes individuales fluyen en el mismo sentido, la corriente resultante es la suma de ambas, en el sentido de cualquier corriente.
- Esta regla también su cumple para el voltaje a través de una porción de red, como lo determinen sus polaridades, y puede ser extendida.
- El principio de superposición **no es aplicable a los efectos de potencia**, debido a que la pérdida de potencia en un resistor varía con el cuadrado (no lineal) de la corriente o voltaje.



Para la fuente V_1:

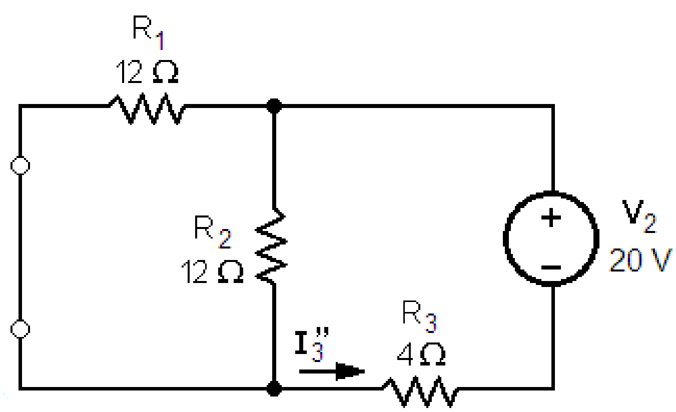


$$R_T = R_1 + R_2||R_3 = 15\Omega$$

$$I_1 = \frac{V_1}{R_T} = 1\ A$$

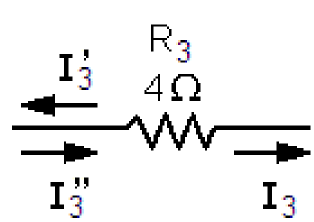
$$I_3' = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot I_1 = \frac{12\Omega}{16\Omega} \cdot 1A = 0.75\ A$$

Para la fuente V_2:



$$R_T = R_3 + R_1||R_2 = 10\Omega$$

$$I_3'' = \frac{V_2}{R_T} = \frac{20V}{10\Omega} = 2\ A$$



$$I_3 = -I_3' + I_3''$$

$$I_3 = -0.75A + 2A$$

$$I_3 = 1.25\ A$$