5

Sistemas de Sturm-Liouville

En esta lectura abundamos sobre los sistemas SL, establecemos notación importante e introducimos nociones pertinentes y relevantes para el resto del curso.

Recuerde que el producto interno de dos vectores $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ es el número real $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. Decimos que los vectores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ son ortogonales, si son distinto de cero y su producto interno es cero. Un conjunto de vectores distintos de cero es ortogonal cuando son ortogonales entre sí. Por ejemplo, $\{e_1, \ldots, e_m\}$ es una familia ortogonal de vectores en $\mathbb{R}^n$, donde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, etc.

La norma de un vector $\boldsymbol{v}$ está dada por

$$||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} = \left(\sum_{j=1}^{n} v_j^2 \right)^{1/2} \tag{1}$$

Entre las propiedades y nociones relacionados al producto interno y norma encontramos que,

- ★ El conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es completo. Esto es, si $\boldsymbol{v}$ es un vector orogonal a cada e_i, entonces $\boldsymbol{v} = 0$.

- ★ El conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto generador para $\mathbb{R}^n$. Esdecir, si $\boldsymbol{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$, lo podemos representar como

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{v}, e_j) e_j. \tag{2}$$

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \ldots, \mathbb{R}^n$ son ejemplos significativos de espacios vectoriales fundamentales en álgebra lineal. Ahora debemos generalizar nociones de este tipo a espacios más generales, en particular a espacios de vectores. Si f, g son funciones a los reales definidas en (a, b) (el intervalo puede ser infinito), el producto interno de f y g que se denota (f, g) (en ocasiones también mediante $\langle f, g\rangle$) es el número

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \tag{3}$$

En el caso de funciones con valores en $\mathbb{C}$, definimos

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

En lo sucesivo, supondremos que las funciones involucradas son lo suficientemente bien comportadas para que estas nociones tengan sentido.

Decimos que las funciones f, g son ortogonales en el intervalo (a, b) si

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

La norma de una función f se define como[1]

$$||f|| = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

Si $||f|| < \infty$, decimos que f es cuadrado integrable. Si f es real valuada, $|f(x)|^2 = f^2(x)$; si f toma valores en $\mathbb{C}$, $|f(x)|^2 = f(x)\overline{f(x)}$. Un conjunto de funciones $\{f_1, f_2, \ldots\}$ definidas en (a, b) son ortogonales cuando $||f_n|| \neq 0$ para toda n y son ortogonales entre sí, es decir, $(f_l, f_j) = 0$ siempre que $l \neq j$. Si, además, la norma de cada f_n es 1, decimos que el conjunto es ortonormal. En consecuencia, si dividimos cada función en un conjunto ortogonal por su norma, obtenemos un conjunto ortonormal.

Ejemplo 5.0.1. Muestre que el conjunto de funciones $f_n(x) = \operatorname{sen} nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y obtenga el conjunto ortonormal correspondiente.

Requerimos mostrar que $||\operatorname{sen} nx|| \neq 0$ y que cualesquier dos de esas funciones distintas son ortogonales. Se cumple que

$$||\operatorname{sen} nx||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \pi$$

Por consiguiente, la norma de $\operatorname{sen} nx$ es $\sqrt{\pi} \neq 0$. Para $m \neq n$ ocurre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m - n)x - \cos(m + n)x] dx = 0.$$

Para obtener el conjunto ortonormal dividimos cada función por su norma. El conjunto correspondientes es

$$\frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} 3x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

[1] El lector debe estar advertido de que ésta es una de las tantas definiciones posibles de norma de una función. Lo mismo aplica para la definición dada de producto interno.

Ejemplo 5.0.2. El conjunto de funciones

$$\{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \operatorname{sen} 3x, \cos 3x, \ldots\}$$

es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$, como lo corroboran las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \qquad && \text{si } m \neq n\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \operatorname{sen} nx dx = 0 \qquad && \text{para cualesquier } m, n\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx = 0 \qquad && \text{si } m \neq n
\end{aligned}$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 mx dx = \pi \qquad \text{para toda } m \neq 0.$$

Existen varias formas de probar estas identidades, por ejemplo, para la primera hacemos uso de la identidad

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$$

Dado que $m \pm n \neq 0$, se deduce que

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\operatorname{sen}(m+n)x + \frac{1}{m-n}\operatorname{sen}(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.0.3. Para resolver la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \mu y = 0, \qquad -1 < x < 1$$

se recurre al método de series de potencias. Después de dividir la ecuación por $(1 - x^2)$, obtenemos

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\mu}{1-x^2}y = 0.$$

En realidad, se tiene una ecuación de Legendre para cada valor de μ.

La solución polinomial da lugar a lo que se conoce como el polinomio de Legendre de grado n y se denota $P_n(x)$.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{M}(-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}, \tag{9}$$

donde $M = n/2$ si n es par y $M = (n-1)/2$ si n es impar.

Los primeros polinomios de Legendre son

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$
$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \qquad P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$$

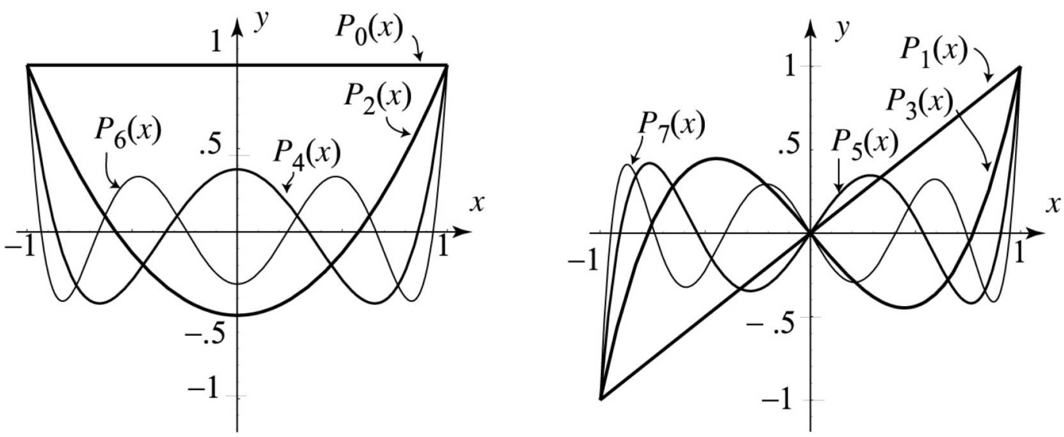


Figura 5.1: Polinomios de Legendre

Algunas propiedades de estos polinomios se enuncian a continuación.

- P_n es par si n lo es, en otro caso es impar.
- $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$ para toda n
- $|P_n(x)| \leq 1$ para cada n y toda x en $[-1, 1]$.
- $P_n(x)$ tienen n ceros en $[-1, 1]$.
- Todos los máximos y mínimos relativos de P_n ocurren en $[-1, 1]$.

Para mostrar la ortogonalidad de los polinomios de Legendre requerimos los siguiente.

Para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ se cumple que

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n. \tag{1}$$

Para verificar esto recordamos la ecuación (9) arriba. Para cada $0 \leq m \leq M$ se cumple

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2m} = \frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!} x^{n-2m},$$

y para $M < m < n$,

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2m} = 0.$$

Escribimos (2) como

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2m},$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{m!(n-m)!} (x^2)^{n-m} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \end{aligned}$$

donde la última igualdad se desprende de la fórmula binomial,

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} a^{n-m} b^m.$$

Empleando apropiadamente la fórmula de Rodrigues, se deduce la siguiente identidad.

Relación de recurrencia de Bonnet Para $n = 1, 2, 3, \ldots$ se cumple que

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x). \tag{3}$$

Esta identidad tiene diversas aplicaciones; por ejemplo, se puede usar para generar tantos polinomios de Legendre como se requiera, una vez que se conocen P_0 y P_1. También es útil la relación,

$$P'_{n+1}(x) = P'_{n-1}(x) + (2n+1)P_n(x). \tag{4}$$

Para ilustrar el uso de estas relaciones, probemos que $P_n(1) = 1$ para toda $n > 1$. Usamos inducción en dos etapas. Sabemos que $P_0(x) = 1$ y que $P_1(x) = x$, por lo que la aseveración es evidente para $n = 0$ y $n = 1$. Supongámosla cierta para $n-1$ y n; esto es, supongamos que $P_{n-1}(1) = 1 = P_n(1)$. La fórmula de Bonnet nos conduce a

$$(n+1)P_{n+1}(1) + nP_{n-1}(1) = (2n+1)P_n(1).$$

Usamos la hipótesis de inducción y simplificamos para obtener $P_{n+1}(1) = 1$.

También podemos verificar que $P_n(-1) = (-1)^n$. Sin duda, recuerde que $P_n(x)$ es una función par cuando n es par, e impar cuando n es impar. Así, $P_n(-1) = P_n(1) = 1$

si n es par; en cambio $P_n(-1) = -P_n(1) = -1$, si n es impar. De esto se deduce que $P_n(-1) = (-1)^n$.

Finalmente la ortogonalidad de los polinomios de Legendre.

(i) Si $m \neq n$,

$$\int_1^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0.$$

(ii) Para cada n, ocurre que

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}.$$

En particular, si $m = 0$, (i) da paso a

$$\int_{-1}^1 P_n(x)dx = 0, \qquad \text{para toda } n \neq 0.$$

Para probar estas afirmaciones, comenzamos con (i). Considere la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0$$

que la escribimos como

$$[(1-x^2)y']' = -\lambda(\lambda+1)y.$$

Como P_m y P_n son soluciones de la EDO con $\lambda = m$ y $\lambda = n$, respectivamente, se desprende que

$$\begin{aligned} -\lambda_m P_m &= [(1-x^2)P_m']', \qquad \lambda_m = m(m+1) \\ -\lambda_n P_n &= [(1-x^2)P_n']', \qquad \lambda_n = n(n+1). \end{aligned}$$

Multiplicamos la primera ecuación por $-P_n$ y la segunda por P_m, sumamos

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n)P_m P_n &= -[(1-x^2)P_m']'P_n + [(1-x^2)P_n']'P_m \\ &= \frac{d}{dx}[(1-x^2)(P_m P_n' - P_m' P_n)]. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n)\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx &= [(1-x^2(P_m(x)P_n'(x) - P_m'(x)P_n(x))]\Big|_{-1}^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

y como $\lambda_n \neq \lambda_m$, se deduce (i).

Para (ii), usamos la fórmula de Bonnet para n y $n-1$,

$$(n+1)P_{n+1} + nP_{n-1} = (2n+1)xP_n$$

y

$$nP_n + (n-1)P_{n-2} = (2n-1)xP_{n-1}.$$

Multiplicamos la primera ecuación por P_{n-1} y la segunda por P_n, e integramos de -1 a 1. Usamos (i) para obtener

$$n\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx = (2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx$$

y

$$n\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = (2n-1)\int_{-1}^{1} xP_{n-1}(x)P_n(x)dx.$$

Comparamos los lados derechos de estas ecuaciones,

$$(2n+1)\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = (2n-1)\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx$$

en forma equivalente

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx. \qquad (*)$$

Recuerde que $P_0(x) = 1$, por lo que

$$\int_{-1}^{1} P_0^2(x)dx = 2.$$

Usamos repetidamente (*)para lograr

$$\int_{-1}^{1} P_1^2(x)dx = \frac{(2-1)}{(2+1)}2 = \frac{2}{3}$$
$$\int_{-1}^{1} P_2^2(x)dx = \frac{(4-1)}{(4+1)}\frac{2}{3} = \frac{2}{5},$$

y así sucesivamente. Por inducción se completa la prueba de (ii).

Ejemplo 5.0.4. También la ecuación de Bessel da lugar a funciones ortogonales. Recuerde que la ecuación de Bessel es

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \qquad x > 0 \qquad (1)$$

que aparece al resolver la ecuacióınde Laplace en coordenadas cilíndricas y polares. Para cada valor de p tenemos una ecuación de Bessel. Se recurre al método de Frobenius para resolverla, donde se propone

$$y = \sum_{m+0}^{\infty} a_m x^{r+m}. \qquad (2)$$

Después de diversas manipulaciones se llega a una solución

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(1+p)(2+p)\cdots(k+p)} x^{2k+p}, \tag{6}$$

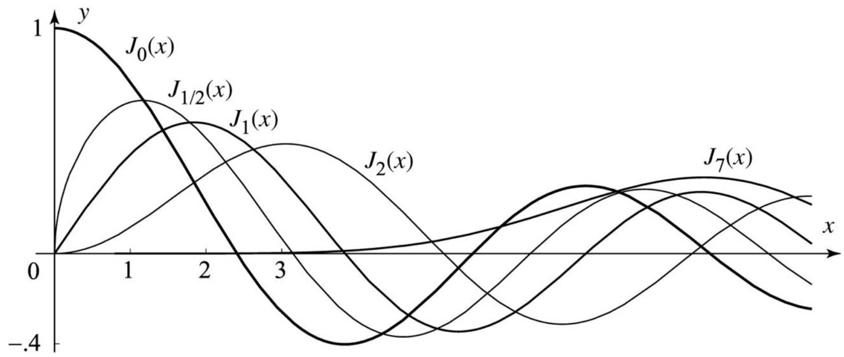
donde $a_0 \neq 0$ es arbitraria. Finalmente llegamos a la función de Bessel de orden p expresada en términos de la función Γ,

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}. \tag{7}$$

Cuando $p = n$, $\Gamma(k+p+1) = (k+n)!$, así que la función de Bessel de orden n es

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Para darnos una idea del comportamiento de las funciones de Bessel, bosquejamos algunas de ellas.



Note que

$$J_0(0) = 1,$$
$$J_p(0) = 0, \qquad \text{si } p > 0$$

Si en la ecuación (2) sustituimos r por $-p$, obtenemos

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}. \tag{8}$$

Cuando p no es un entero, resulta que J_{-p} es linealmente independiente de J_p.

Por ejemplo

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x$$

y

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Sin duda, si ponemos $p = 1/2$ en (7), obtenemos

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\frac{1}{2}+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}.$$

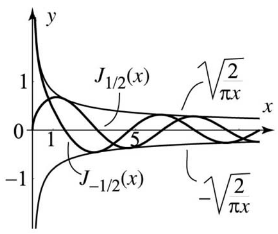
Para simplificar esta expresión usamos el hecho de que

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}+1\right) = \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}k!}\sqrt{\pi}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} k!}{k!(2k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

La otra igualdad se confirma en forma similar sustituyendo $p = -1/2$ en (8).



De acuerdo con la figura $J_{1/2}$ y $J_{-1/2}$ son linealmente independientes, pues una está acotada y la otra no.

Es importante notar que J_p y J_{-p} son linealmente independientes sólo cuando p no es un entero. Cuando p es un entero positivo, $k - p + 1 \leq 0$ para $k = 0, 1, \ldots, p-1$, por lo que los coeficientes en (8) no están definidos para $k = 0, 1, \ldots, p-1$, porque la función Gama no está definida en 0 o en los enteros negativos. Es conveniente tener una definición para J_{-n}, $n = 1, 2, 3 \ldots$

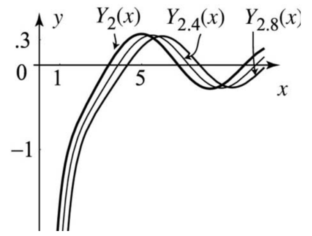
$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad n \in \mathbb{N} \tag{9}$$

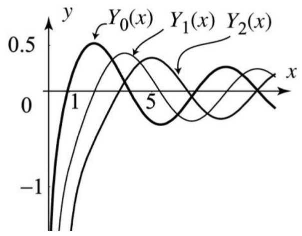
Para obtener una segunda solución linealmente independiente, empezamos otra vez con el caso $p \notin \mathbb{Z}$ y definimos

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} p\pi} \qquad p \notin \mathbb{Z} \tag{10}$$

Dado que en este caso J_p y J_{-p} son linelamente independientes, Y_p es una solución linealmente independiente de J_p. La función Y_p es la función de Bessel de segunda clase de orden p. Para $p \in \mathbb{Z}$, la función se define mediante un límite

$$Y_p = \lim_{\nu \to p} Y_\nu. \tag{11}$$





Se deduce que

$$\lim_{x\to 0^+} Y_p(x) = -\infty. \tag{12}$$

En particular, las funciones de Bessel de segunda clase no están acotadas cerca de 0. En resumen, la solución general de la ecuación de Bessel (1) de orden p es

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x),$$

donde $J_p(x)$ está dada por (7) y Y_p or (10) o (11). Cuando $p \notin \mathbb{Z}$, una solución está dada por

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x),$$

donde J_p está dada por (7) y J_{-p} por (8).

Hemos usado la función Gama sin definirla. Vale la pena introducirla, junto con algunas propiedades.

La función Gama está definida para $x > 0$ mediante

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{13}$$

Esta integral impropia converge para toda $x > 0$. La propiedad básica de la función Gama es

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

En efecto, usamos integración por partes,

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \\ &= -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= x\Gamma(x),\end{aligned}$$

donde hemos empleado $u(t) = t^x$, $dv = e^{-t}dt$, $du = xt^{x-1}dt$, $v(t) = -e^{-t}$.

Podemos encontrar fácilmente los valores de Γ para naturales. Por ejemplo,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

La propiedad básica arroja

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2! \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3!\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{14}$$

para $n \in \mathbb{N}$, donde $0! = 1$. Sabiendo que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{15}$$

se deducen los siguientes valores,

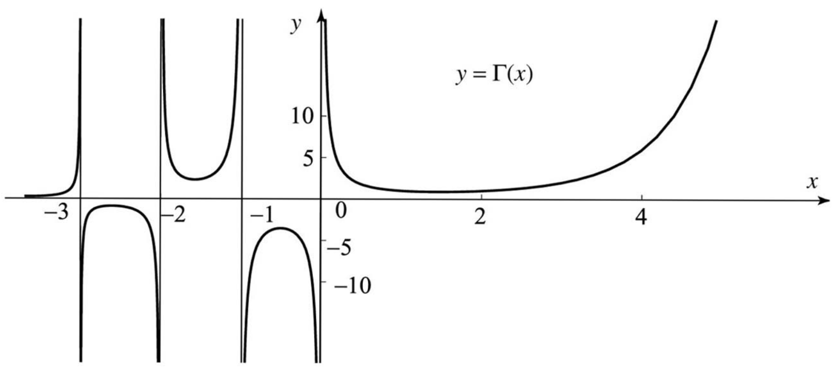
$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Aunque hemos definido a la función Gama para $x > 0$, es posible extenderla a todo real que no sea $0, -1, -2, \ldots$ de tal suerte que se siga cumpliendo la propiedad básica

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

y entonces definir el valor de la función Gama en x a partir de su valor en $x+1$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) &= -\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$



La función Γ

Tenemos algunas identidades para las funciones de Bessel

$$\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x) \tag{i}$$
$$\frac{d}{dx}[x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x) \tag{ii}$$

note que para $p = 0$, (ii) da lugar a

$$\frac{d}{dx}[J_0(x)] = -J_1(x)$$

Para probar (i), recuerde la definición de J_p dada en (7),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^p}{k!\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2p} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^p (k+p)}{k!\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2p-1} \\
&= x^p \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p-1} \\
&= x^p J_{p-1}(x).
\end{aligned}$$

Hemos usado la propiedad básica de la función Gama para escribir $\Gamma(k+p+1) = (p+k)\Gamma(p+k)$. La segunda identidad se prueba en forma similar.

Otras propiedades importantes de las funciones de Bessel son las siguientes.

(iii) $xJ_p'(x) + pJ_p(x) = xJ_{p-1}(x)$

(iv) $xJ_p'(x) - pJ_p(x) = -xJ_{p+1}(x)$

(v) $J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J_p'(x)$

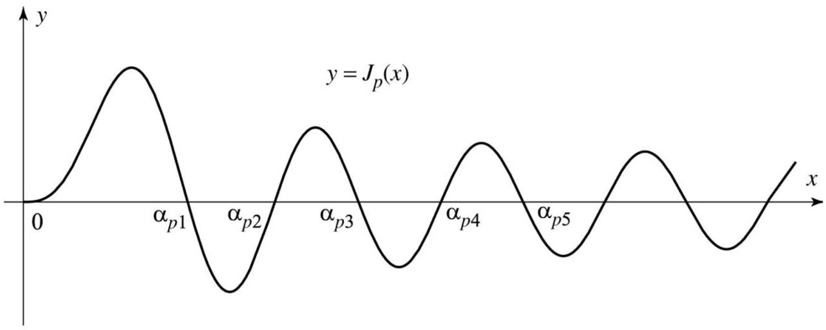
(vi) $J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x)$.

Las fórmulas correspondientes para las funciones de Besse de segunda clase también se cumplen. Para probar (iii), expandimos el lado izquierdo de (i) usando la regla del producto para obtener

$$x^p J_p'(x) + px^{p-1}J_p(x) = x^p J_{p-1}(x).$$

Si dividimos por x^{p-1} logramos (iii). La identidad (iv) se pueba en forma análoga empezando con (ii) y expandiendo mediante la regla del producto. Si sumamos (iii) y (iv), después de simplificar damos paso a (v). Si restamos (iv) de (iii) y simplificamos logramos (vi). Existen identidades similares para integrales de funciones de Bessel.

(vii) $\int x^{p+1}J_p(x)dx = x^{p+1}J_{p+1}(x) + C$



(viii) $\int x^{-p+1} J_p(x)dx = -x^{-p+1} J_{p-1}(x) + C$

que se obtienen de integrar ambos lados de (i) y (ii).

Finalmente la ortogonalidad de las funciones de Bessel. Fijamos $p \geq 0$ y considere la gráfica de $J_p(x)$ para $x > 0$.

De la figura se deduce (se puede probar esta afirmación) que J_p tienen una infinidad de ceros en $x > 0$ (como la función seno). Denotamos estos ceros como

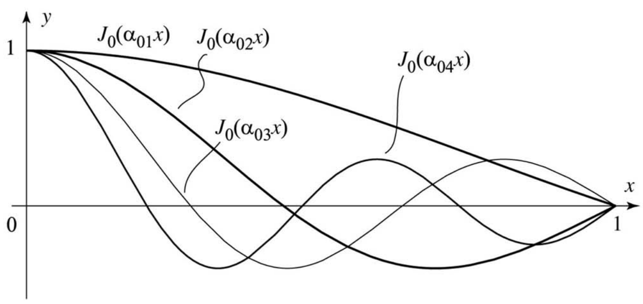
$$0 < \alpha_{p1} < \alpha_{p2} < \alpha_{p3} < \cdots < g_{pj} < \cdots$$

Así, α_{pj} denota al j-ésimo cero positivo de J_p. A direncia de la función seno, para la que los ceros se determinan fácilmente, no hay fómrula para los ceros positivos de J_p.

Sea $a > 0$; para generar funciones otogonales en el intervalo $[0, a]$ a partir de J_p procedemos como en el caso de la función seno usando α_{pj}, los ceros de la función de Bessel. Se obtienen las funciones

$$J_p\left(\frac{\alpha_{pj}}{a}x\right), \qquad j + 1, 2, 3 \ldots \tag{9}$$

Las primeras cuatro funciones, correspondientes a $p = 0$, se muestran la figura.



Estas funciones están acotadas por 1 y la cantidad de ceros incrementa en $(0, 1)$. Para simplificar la notación, hacemos

$$\lambda_{pj} = \frac{\alpha_{pj}}{a} \qquad j = 1, 2, 3 \ldots \tag{10}$$

Así, λ_{pj} es el valor del j-ésimo cero positivo de $J - p$ escalado por un valor fijo $1/a$.

Teorema 5.0.5. *Fije $p \geq 0$ y $a > 0$. sea $J_p(\lambda_{pj}x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ como en (9) y (10). Entonces,*

$$\int_0^a J_p(\lambda_{pj}) J_p(\lambda_{pk}x) x dx = 0 \qquad j \neq k \tag{11}$$

y

$$\int_0^a J_p^2(\lambda_{pj}x) x dx = \frac{a^2}{2} J_{p+1}^2(\alpha_{pj}) \qquad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

Note que (12) involucra λ_{pj} y α_{pj}. La propiedad (11) se puede eninciar diciendo que las funciones $J_p(\lambda_{pj}x)$, $j = 1, \ldots$ son ortogonales e $[0, 1]$ respecto a la función peso x. En el intervalo $[0, 1]$, esto es, cuando $a = 1$, las fórmulas (11) y (12) adquieren la fomra

$$\int_0^1 J_p(\alpha_{pj}x) J_p(\alpha_{pk}x) x dx = 0 \qquad j \neq k \tag{13}$$

$$\int_0^1 J_p^2(\alpha_{pj}x) x dx = \frac{1}{2} J_{p+1}^2(\alpha_{pj}) \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Este último ejemplo nos da pie para retomar la ortogonalidad de funciones respecto a una función peso. Recuerde que las funciones f, g son ortogonales respecto a la función peso w en $[a, b]$ si

$$\int_a^b f(x) g(x) w(x) dx = 0.$$

La norma de f respecto a la función peso w es

$$||f|| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \right)^{1/2}. \tag{7}$$

Ejemplo 5.0.6. Las funciones $f_n(x) = \cos nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ satisfacen

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_m(x) f_n(x) dx = 0$$

para $m \neq n$. Por tanto, estas funciones conforman un conjunto ortogonals con función peso $w(x) = 1$ en $(-\pi, \pi)$.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ son los ceros positivos de la función J_0,

$$\int_0^1 J_0(\alpha_m x) J_0(\alpha_n x) x dx = 0$$

para $m \neq n$. Por consiguiente, las funciones $J_0(\alpha_n x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ forman un conjunto ortogonal respecto a la función peso $w(x) = x$ en $(0, 1)$.

5.1. Más sobre sistemas SL

Retomemos la teoría de Sturm Liouville, en particular la ortogonalidad de las funciones propias que se cumple para sistemas regulares y algunos singulares. Planteamos el sistema regular como

$$[p(x)y']' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0, \qquad a < x < b \tag{1}$$

$$\begin{aligned} c_1y(a)+c_2y'(a)&=0,\\ d_1y(b)+d_2y'(b)&=0 \end{aligned} \tag{2}$$

Sean λ_j, λ_k valores propios distintos y y_i, y_j las correspondientes funciones propias. De la primera ecuación en (2) obtnemos,

$$\begin{aligned} c_1y_j(a)+c_2y_j'(a)&=0\\ c_1y_k(a)+c_2y_k'(a)&=0 \end{aligned}$$

que en forma matricial quedan como

$$\begin{bmatrix} y_j(a) & y_j'(a)\\ y_k(a) & y_k'(a)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\end{bmatrix}$$

como c_1, c_2 no pueden ser cero simultáneamente, debe ocurrir que

$$\begin{vmatrix} y_j(a) & y_j'(a)\\ y_k(a) & y_k'(a)\end{vmatrix}=0$$

o, en forma equivalente, $y_k(a)y_j(a) - y_j(a)y_k'(a) = 0$. En forma similar, para las condiciones sobre b obtenemos $y_k(b)y_k'(b) - y_j(b)y_k'(b) = 0$. Si combinamos estas dos igualdades y el hecho de que $p(a), p(b)$ son finitas, deducimos que

$$p(b)(y_k(b)y_j'(b) - y_j(b)y_k'(b)) - p(a)(y_k(a)y_k'(a) - y_j(a)y_k'(a)) = 0 \tag{3}$$

Como pronto veremos, esta condición implica la ortogonalidad de las funciones propias.

En los sistemas singulares, dado que podemos tratar con intervalos infinitos, o con funciones no acotadas, en lugar de (2) requerimos una condición similar a (3), pero formulada en términos de límites.

Condición para ortogonalidad en un sistema SL singular

Suponga que y_1, y_2 son funciones propias de un sistema SL, correspondientes a dos valores propios distintos λ_1, λ_2. Se requiere que

$$\lim_{x\to b^-} p(x)(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)) - \lim_{y\to a^+} p(x)(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)) = 0 \tag{4}$$

(4) se reduce a (3) para sistemas SL regulares, por lo que se cumple para sistemas regulares. También son válidas en diversos sistemas singulares, tales como el de Legendre y Bessel.

Otra situación interesante donde se cumple (4), considere el caso de (a) cuando a y b son finitos y $p(a) = p(b) > 0$. En lugar de (2), exigimos que $y(a) = y(b)$ y $y'(a) = y'(b)$, que son las condiciones periódicas que antes vimos.

Teorema 5.1.1. *(a) Cada valor propio de un sistema SL regular tiene exactamente una función propia asociada.*

(b) Las funciones propias correspondientes a valores propios en un sistema SL regular son ortonormales con respecto a la función peso $r(x)$. Esta afirmación también es válida para otros sitemas SL admisibles para la condición (4).

Demostración. (a) Suponga que y_1, y_2 son funciones propias correspondientes al valor propio λ. Mostraremos que $W(y_1, y_2) = 0$ lo que confirma que y_1 y y_2 son linealmente dependientes, y como sabemos, basta que se anule el Wronskiano en un punto. Evaluemos el Wronskiano en $x = 1$,

$$W(y_1, y_2)(a) = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = y_1(a)y_2'(a) - y_2(a)y_1'(a).$$

Podemos hacer lo anterior, porque las funciones propias corresponden al mismo valor propio, es decir, son soluciones de la misma EDO.

Dado que y_1, y_2 satisfacen las CF (2),

$$\begin{aligned} c_1 y_1(a) + c_2 y_1'(a) &= 0 \\ c_1 y_2(a) + c_2 y_2'(a) &= 0 \end{aligned}$$

Note que si tomamos $c_1 = c_2 = 0$, se satisface el sistema de ecuaciones. Por hipótesis, el sistema tienen solución cuando c_1 y c_2 no son ambas cero, por lo que tenemos más de una solución, y esto sólo ocurre si el determinante del sistema es cero. Es decir, $y_1(a)y_2'(a) - y_1(a)y_2(a) = 0$, o en forma equivalente, $W(y_1, y_2)(a) = 0$.

(b) Suponga que $\lambda_j \neq \lambda_k$ son valores propios con funciones propias correspondientes y_j, y_k. Como y_j, y_k son solución de (1), ocurre que

$$\begin{aligned} [p(x)y_j']' + [q(x) + \lambda_j r(x)]y_j &= 0 \\ [p(x)y_k'] + [q(x) + \lambda_k r(x)]y_k &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicamos la primera ecuación por y_k, la segunda por y_j, restamos y simplificamos,

$$y_k[p(x)y_j']' - y_j[p(x)y_k']' = (\lambda_k - \lambda_j)y_j y_k r(x).$$

Como $\frac{d}{dx}(p(x)(y_k y_j' - y_j y_k')) = y_k[p(x)y_j']' - y_j[p(x)y_k']$ (usamos la regla del producto y simplificamos), obtenemos

$$\begin{aligned} (\lambda_k - \lambda_j)\int_a^b y_j(x)y_k(x)r(x)dx &= \int_a^b \frac{d}{dx}(p(x)(y_k y_j' - y_j y_k'))dx \\ &= p(x)(y_k y_j' - y_j y_k')\Big|_a^b \\ &= p(b)[y_k(b)y_j'(b) - y_j(b)y_k'(b)] \\ &\quad - p(a)[y_k(a)y_j'(a) - y_j(a)y_k'(a)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Apelamos a (4) para concluir que el lado derecho de (5) es cero. Como $\lambda_k - \lambda_j \neq 0$, se desprende que

$$\int_a^b y_j(x)y_k(x)r(x)dx = 0,$$

esto es, y_j, y_k son ortogonales respecto a la función peso $r(x)$.

Note que el inciso (a) del teorema puede fallar para sistemas SL con CF periódicas, porque no satisface (2). En particular, la ecuación

$$y'' + \lambda y = 0$$

con Cf $y(-\pi) = y(\pi)$, $y'(\pi) = y'(\pi)$ tiene valores propios $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ y para cada λ_n con $n \geq 1$, tenemos dos soluciones linealmente independientes $\operatorname{sen} nx$, $\cos nx$. En general, en cualquies sistema SL de segundo orden un valor propio corresponde a lo sumo dos funciones propias linealmente independientes.

Ejemplo 5.1.2. Si ponemos la ecuación de Legendre en forma SL, la función $p(x) = 1 - x^2$ satisface $p(\pm x) = 0$. Por tanto, (4) se cumple y el teorema 5.1.1 implica que los polinomios de Legendre son ortogonales en $(-1, 1)$ con respecto a la función peso $r(x) = 1$, como ya vimos.

Algo correspondiente ocurre para las funciones de Bessel; si ponemos la ecuación de Bessel en forma SL, obtenemos $p(x) = x$ y $r(x) = x$. Usamos el hecho de que $p(0) = 0$ y $y(R) = 0$, (4) se cumple, por lo que el teorema 5.1.1 da lugar a que las soluciones $J_p(\frac{\alpha_{pj}}{R}x)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ sean ortogonales en $(0, R)$ respecto a la función peso $r(x) = x$.

Ejemplo 5.1.3. Determine los valores propios y las funciones propias del sistema SL regular,

$$\begin{aligned} &X'' + \lambda X = 0 \\ &\quad X'(0) = 0, \qquad X(1) + X'(1) = 0. \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$, la solución general de la ED es $X = ax + b$, y la única forma de satisfacer las CF es $a = b = 0$. En consecuencia, $\lambda = 0$ no es valor propio. Si $\lambda < 0$, la solución general es $X = c_1 \cosh \sqrt{-\lambda}x + c_2 \sinh \sqrt{-\lambda}x$. Se verifica que no existe solución no trivial de esta forma con las CF dadas. Cuando $\lambda > 0$, poenmos $\lambda = \mu^2$ y la solución general es de la forma

$$X = A \cos \mu x + B \operatorname{sen} \mu x$$

Aplicamos las CF

$$\begin{aligned} X'(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ X(1) + X'(a) = 0 &\Rightarrow A(\cos \mu - \mu \operatorname{sen} \mu) = 0. \end{aligned}$$

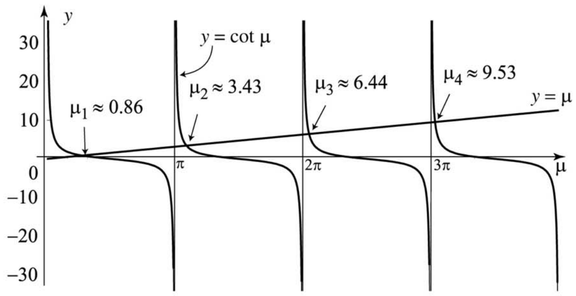
Para asegurar que tenmos funciones propias no triviales, tomamos $A = 1$ y

$$\cos \mu - \mu \operatorname{sen} \mu = 0$$

o en forma equivalente

$$\cot \mu = \mu \tag{6}$$

Los valores propios $\lambda = \mu^2$ corresponden a las raíces positivas μ de (6). Si graficamos $y = \cot \mu$ y $y = \mu$, las gráficas se intersectan una cantidad infinita de veces.



Raíces de $\cot\mu = \mu$.

Se sigue que (6) tiene una infinidad de raíces. Aunque no hay una forma simple de calcularlas, podemos aproximarlas numéricamente. Digamos que las raíces son $\mu_1, \mu_2, \ldots$

$$X - X_n = \cos\mu_n x, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Los valores propias son $\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots$.

Ejemplo 5.1.4. Determine los valores propios y las funciones propias del sistema SL singular

$$\begin{aligned} rR'' + R' + \lambda^2 rR = 0 \qquad (0 \leq r < a) \\ R'(a) = -\kappa R(a) \end{aligned}$$

Aquí $\kappa > 0$ es el coeficiente de transferencia, $a > 0$ es el radio de un disco (estamos hablando de transferencia de calor en un disco con condiciones de frontera de Robin). No tenemos CF en el extremo 0, usualmente requerimos que la solución esté acotada en $[0, a]$.

Reconocemos a la ecuación de Bessel de orden 0; sus soluciones acotadas en el intervalo $[0, a]$ son de la forma

$$R(r) = J_0(\lambda r),$$

donde el valor propio λ está determinado por las CF,

$$R'(a) = -\kappa R(a) \Rightarrow \lambda J_0'(\lambda a) = -\kappa J_0(\lambda a)$$

Se verifica que esta ecuación tienen una infinidad de soluciones en λ. Aquí damos una aproximación de las raíces; mediante la fórmula $J_0'(x) = -J_1(x)$, la ecuación se convierte en

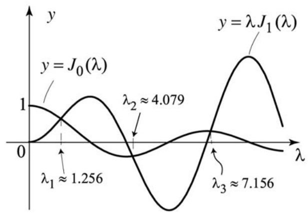
$$\lambda J_1(a\lambda) = \kappa J_0(a\lambda). \tag{7}$$

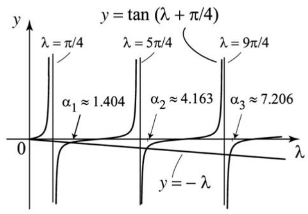
Las seis primeras raíces aparecen en la tabla, para el caso $k = a = 1$.

k	1	2	3	4	5	6
λ_k	1.25578	4.07948	7.1558	10.271	13.3984	16.5312

Table 1. Positive roots of $\lambda J_1(\lambda) = J_0(\lambda)$.

El hecho de que las raíces de las ecuaciones $J_0(\lambda) = \lambda J_1(\lambda)$ y $-\lambda = \tan(\lambda + \pi/4)$ sean aproximadamente iguales se puede usar para estimar los valores propios. Por ejemplo, si consideramos las asíntotas verticales de la tangente, podemos justificar la afirmación de que para k grande, $\lambda_k \approx \frac{\pi}{4} + k\pi$.





Una descripción mas exacta de los valores propios se logra apelando a fórmulas asintóticas para las funciones de Bessel. Ocurre que

$$J_0(\lambda) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$J_1(\lambda) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)$$

así que las raíces de $\lambda J_1(a\lambda) = kJ_0(a\lambda)$ son, aproximadamente las raíces de la ecuación

$$\lambda \cos\left(a\lambda - \frac{3\pi}{4}\right) = k \cos\left(a\lambda - \frac{\pi}{4}\right)$$

y como

$$\cos\left(a\lambda - \frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(a\lambda + \frac{\pi}{4}\right)$$

y

$$\cos\left(a\lambda - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(a\lambda + \frac{\pi}{4}\right)$$

la ecuación se convierte en,

$$-\frac{1}{k}\lambda = \tan\left(a\lambda + \frac{\pi}{4}\right). \tag{8}$$

Las seis primeras raíces de esta ecuación con $n = a = 1$ (denotadas α_k) aparecen en la tabla.

k	1	2	3	4	5	6
α_k	1.40422	4.16275	7.20647	10.3069	13.4261	16.5537

Table 2. Positive roots of $-\lambda = \tan\left(\lambda + \frac{\pi}{4}\right)$.

Dado que las fórmulas asintóticas para las funciones de Bessel dan una mejor aproximación para valores grandes de λ, las entradas de la tabla dan mejores aproximaciones para valores propios grandes. A cada valor propio λ_k corresponde una función propia $R_k(r) = J_0(\lambda_k r)$. Tomamos $k = a = 1$ y graficamos las funciones propias para $k = 1, 2, 3$. No se debe confundir con las funciones de Bessel que surgen de la solución de la ecuación de calor en un disco, con CF 0.

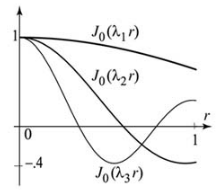
Ejemplo 5.1.5. Muestre que las funciones propias del ejemplo previo son ortogonales en el intervalo $(0, a)$ con respecto a la función peso r. Formalmente, corrobore que

$$\int_0^a J_0(\lambda_j r) J_0(\lambda_k r) r dr = 0 \qquad j \neq k$$

donde λ_k son las raíces positivas de (7), $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Basta mostrar que se satisface la condición (4) arriba. La ecuación en forma SL es (con orden $p = 0$)

$$[rR']' + \lambda^2 rR = 0, \qquad 0 < r < a, \qquad R'(a) = -kR(a).$$



Así, en (4) tomamos $p(r) = r$ y sean y_1, y_2 dos funciones propias correspondientes a valores propios distintos. En nuestra notación, (4) se convierte en

$$\lim_{r \to a^-} p(r)(y_1(r)y_2'(r) - y_2(r)y_1'(r)) - \lim_{r \to 0^+} p(r)(y_1(r)y_2'(r) - y_2(r)y_1'(r)) = 0$$

y como $p(0) = 0$, $p(a) = a$ y todas las funciones son continuas, la condición se reduce a

$$a(y_1(a)y_2'(a) - y_2(a)y_1'(a)) = 0$$

en forma equivalente

$$y_1(a)y_2'(a) - y_2(a)y_1'(a) = 0.$$

En el extremo $r = a$, ocurre que $y_k'(a) = -ky_k(a)$. El lado izquierdo de la última condición es

$$y_1(a)(-ky_2(a)) - y_2(a)(-ky_1(a)) = 0,$$

que es cierto. Por tanto, (4) se cumple y por el teorema 5.1.1 las funciones propias son ortogonales con respecto al peso r.

Ejercicios

1. Ponga la ED en forma SL y decida si el problema es regular o singular.

   a) $xy'' + y' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0 = y(1)$.
   b) $xy'' + y' + \lambda y = 0$, $y(1) = 0 = y(2)$.
   c) $xy'' + 2y' + \lambda y = 0$ $y(1) = 0 = y; (1)$. [Sugerencia: multiplique por x]
   d) $y'' + (x + \lambda)y = 0$, $y(0) = 0 = y(1)$.
   e) $xy'' - y' + \lambda xy = 0$, $y(0) = 0 = y(1)$ [Sugerencia Divida por x^2]
   f) $y'' + \left(\frac{1+\lambda x}{x}\right) y = 0$, $y(1) = 0 = y(2)$.
   g) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, $y(-1) = 0 = y(1)$.
   h) $y'' - \frac{x}{1-x^2} y' + \lambda y = 0$, $y(-1) = 0 = y(1)$.

2. Determine los valores propios y las funciones propias del sistema SL dado.

   a) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0 = y(2\pi)$.
   b) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0 = y(\pi/2)$.
   c) $y''\lambda y = 0$, $y(-\pi) = y(\pi)$, $y'(-\pi) = y'(\pi)$.
   d) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) + y'(\pi) = 0$.
   e) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) + y'(0) = 0$, $y(2\pi) = 0$.
   f) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) + 2y'(0) = 0$, $y(1) = 0$.
   g) $xy'' + y' + \left(-\frac{1}{x} + \lambda x\right) y = 0$, $0 < x < 3$, $y(0)$ es finita, $y(3) = 0$.

3. Muestre que el PVF $y'' - \lambda y = 0$, $y(0) = 0 = y(1)$ carece de valores propios positivos.

4. Verifique que el PVF $y'' - \lambda y = 0$, $y(0) + y'(0) = 0 = y(1) + y'(1)$ tiene un valor propio positivo.

5. La EDO
$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \qquad -1 < x < 1$$
   $n \in \mathbb{N}$ se concoe como la ecuación de Chebyshev. Pretendemos resolverla con las CF $y(1) = 1$ y $y'(1)$ finita.

   (a) Ponga la ecuación en forma SL y determine $p(x), q(x), r(x)$. [Sugerencia: divida por $(1 - x^2)^{1/2}$]

   (b) Use el método de serie de potencias y muestre que la EDO tiene una solución polinomial de grado n, que se denota $T_n(x)$. Es un hecho que la derivada de una solución no polinomial no está acotada en $x = 1$. Así, $T_n(x)$ es la única solución que satisface la CF.

(c) Use (4), muestre que los polinomios de Chebyshev son ortogonales en $(-1, 1)$ con respecto a la función peso $r(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.