3

Problemas con valores propios

En esta lección revisaremos diversos aspectos de la teoría de EDO, dejamos por un buen rato las EDP. Nos interesa, en particular, una situación que poco se toca en un curso usual de EDO. Nos referimos a la solución de una EDO en la que no se tienen CI sino CF.

3.1. Introducción

Una EDP lineal de segundo orden tiene la forma

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = F(x), \qquad x_1 < x < x_2 \tag{1}$$

Los coeficientes A_0, A_1, A_2 se consideran, en general, funciones continuas en (x_1, x_2) y $A_2(x)$ no es idénticamente cero en ese intervalo. Como sabemos, en ocasiones la función incógnita y debe satisfacer ciertas condiciones adicionales o auxiliares. Cuando estas condiciones se especifican en un mismo punto se llaman condiciones iniciales (CI), mientras que si se especifican en dos puntos distintos $(x = x_1, x = x_2)$, se conocen como condiciones de frontera (CF). En general, esto toma la forma,

$$\begin{aligned} a_{11}y(x_1) + a_{12}y'(x_1) &= \alpha \qquad a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0 \\ a_{21}y(x_2) + a_{22}y'(x_2) &= \beta \qquad a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

donde α y β son constantes.

La ecuación (1) junto con las CF (2) se conoce como un problema con valores en la frontera (PVF). Un PVF no necesariamente tiene solución, o en caso de tenerla, puede no ser única. Decimos que un PVF está bien planteado si se satisfacen las siguientes condiciones

❶ Existencia. Existe al menos una solución

❷ Unicidad. Existe a lo sumo una solución

❸ Estabilidad. La solución depende en forma continua de las CF.

El último requisito es importante en la práctica, ya que usualmente los datos se miden y es previsible que ocurran errores de medición. Decimos que la solución es estable si errores pequeños en estas mediciones conducen, a lo sumo, a cambios pequeños en la solución. La mayoría de las CF surgen como casos particulares de (2); en realidad pueden existir CF más generales como,

$$\begin{aligned} a_{11}y(x_1) + a_{12}y'(x_1) + b_{11}y(x_2) + b_{12}y'(x_2) = \alpha \\ a_{21}y(x_2) + a_{22}y'(x_2) + b_{21}y(x_1) + b_{22}y'(x_1) = \beta \end{aligned} \tag{3}$$

llamadas CF mixtas o mezcladas.

La ecuación (1) es homogénea cuando $F(x) \equiv 0$ en el intervalo de interés; cuando $\alpha = \beta = 0$ las CF son homogéneas. También decimos que una CF o una ED es homogénea si siempre que y la satisfaga, también lo hace cy para c cualquier constante.

Cualquier otra especificación de los valores de α y β dan lugar a CF no homogéneas. Una característica de enorme importancia de las ecuaciones lineales homogéneas es que si y_1, y_2 son soluciones de la ED, cualquier combinación lineal de ellas $c_1y_1 + c_2y_2$ también lo es

Retomemos el asunto de una barra cilíndrca o un alambre que se coloca sobre el eje x, $0 \leq x \leq b$. Supongamos que el extremos de la barra en $x = 0$ se mantiene a una temperatura constante T_1 y el otro extremo, en $x = b$, a temperatura constante T_2. Intuitivamente, debe ser claro que después de que transcurra un tiempo suficientemente largo, la tempertura en la barra se estabilizará, se alcanza una temperatura estable o en estado estable; cerca del extremo izquierdo, la temperatura estará cercana a T_1 y en el otro extremo, cercana a T_2. Por supuesto, la temperatura en la barra cambia en forma continua, físicamente no puede pegar brincos o cambiar abruptamente. Lo que nos interesa determinar es esta distribución de temperaturas en estado estable.

En la lectura 1, ecuación (5), obtuvimos la ecuación de calor

$$u_t = ku_{xx}$$

suponiendo que no hay generación o acumulación en la barra. Sabemos que $u = u(x,t)$, pero en nuestro caso, buscamos la solución estable, esto es, cuando u no depende ya de t, por lo que la ecuación se reduce a

$$0 = ku''$$

Por la situación descrita, las CF son claramente $u(0) = T_1$, $u(b) = T_2$.

Resolvemos $u'' = 0$, para llegar a $u = c_1 + c_2x$. Resta determinar c_1, c_2. Esto es muy sencillo, en este caso,

$$T_1 = c_1 + c_2(0)$$

dando lugar a $c_1 = T_1$, esto es, $u = T_1 + c_2x$. Ahora, apelamos a la segunda condición,

$$T_2 = T_1 + c_2(b)$$

es decir, $c_2 = (T_2 - T_1)/b$. En consecuencia

$$u(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{b}$$

Se observa que $u(x)$ es una recta que une los puntos $(0, T_1)$ y (b, T_2) y como es de esperarse, $u(0) = T_1$, $u(b) = T_2$.

Consideremos el PVF más general

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = F(x), \qquad x_1 < x < x_2 \tag{16}$$

con condiciones de frontera mixtas

$$\begin{aligned} a_{11}y(x_1) + a_{12}y'(x_1) &= \alpha \qquad (a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0) \\ a_{21}y(x_2) + a_{22}y'(x_2) &= \beta \qquad (a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0) \end{aligned} \tag{17}$$

Par simplificar las cosas, habremos de introducir alguna notación. Primero el operador diferencial

$$M \equiv A_2(x)D^2 + A_1(x)D + A_0(x) \tag{18}$$

donde D es el operador diferencial $D = d/dx$, así

$$M[y] = A_2(x)y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y \tag{19}$$

En forma similar, introducimos los operadores frontera B_1, B_2,

$$\begin{aligned} B_1[y] &= a_{11}y(x_1) + a_{12}y'(x_1) \\ B_2[y] &= a_{21}y(x_2) + a_{22}y'(x_2) \end{aligned} \tag{20}$$

Expresamos (16) y (17) en forma compacta,

$$M[y] = F(x), \quad x_1 < x < x_2, \qquad B_1[y] = \alpha, \qquad B_2[y] = \beta \tag{21}$$

Los operadores M, B_1, B_2 son ejemplos de operadores lineales. Decimos que un operador L es lineal si

$$L[c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 L[f(x)] + c_2 L[g(x)] \tag{22}$$

donde $f(x), g(x)$ son funciones dadas y c_1, c_2 constantes.

Cuando $F(x) \equiv 0$ en (21), decimos que la ED es homogénea y el problema queda

$$M[y] = 0, \qquad x_1 < x < x_2 \qquad B_1[y] = \alpha \quad B_2[y] = \beta \tag{23}$$

Ejemplo 3.1.1. Considere la ecuación diferencial

$$y'' + y = 0$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} y(0) &= \pi \\ y'(1) &= 0 \end{aligned}$$

Primero nos ocupamos de la EDO, la comparamos con (1) arriba para deducir que $A_2(x) = 1$, $A_1(x) = 0$, $A_0(x) = 1$ y $F(x) = 0$.

Luego comparamos las CF con (2) para establecer que: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$.

Si y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de $M[y] = 0$, la solución general está dada por

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{24}$$

con c_1, c_2 constantes arbitrarias. Nos interesa determinar los valores de c_1, c_2 de tal modo que (24) también satisface las CF (23). Si imponemos las CF en (24), obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} c_1 B_1[y_1] + c_2 B_1[y_2] &= \alpha \\ c_1 B_2[y_1] + c_2 B_2[y_2] &= \beta \end{aligned} \tag{25}$$

de donde se desprende que (regla de Cramer)

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & B_1[y_2] \\ \beta & B_2[y_2] \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\alpha B_2[y_2] - \beta B_1[y_2]}{\Delta} \tag{26}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} B_1[y_1] & \alpha \\ B_2[y_1] & \beta \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\beta B_1[y_1] - \alpha B_2[y_1]}{\Delta} \tag{26}$$

Δ es el determinante del sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} B_1[y_1] & B_1[y_2] \\ B_2[y_1] & B_2[y_2] \end{vmatrix} \tag{28}$$

Por supuesto, Δ puede ser cero, en cuyo caso el sistema tendrá solución cuando también los numeradores de (26) y (27) son cero, en cuyo caso el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones.

Por ejemplo, suponga que $\alpha = \beta = 0$ en (23). El problema resultante es un PVF homogéneo; en este caso, siempre se tiene la solución $y \equiv 0$, la solución trivial. Si $\Delta \neq 0$, $c_1 = 0 = c_2$, y $y \equiv 0$ es la única solución de (23). Las soluciones que no son idénticamente cero se conocen como soluciones no triviales. Para que existan soluciones no triviales cuando $\alpha = \beta = 0$, debe ocurrir que $\Delta = 0$, que conduce a la indeterminación $0/0$ para c_1 y c_2. Esto sugiere que (26) y (27) son equivalente, y una de las constantes se puede expresar como múltiplo de la otra.

Teorema 3.1.2. *Si y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de $M[y] = 0$, el PVF*

$$M[y] = 0, \quad x_1 < x < x_2 \qquad B_1[y] = 0, \qquad B_2[y] = 0$$

tiene solución no trivial si y sólo si $\Delta = 0$; si $\Delta \neq 0$, el problema sólo tiene la solución trivial $y \equiv 0$.

Ejemplo 3.1.3. Resuelva $y'' + y = 0$, $0 < x < \pi$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$

La solución general es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

Comparamos la EDO con (16) para deducir $A_2(x) = 1$, $A_1(x) = 0$ y $A_0(x) = 1$, mientras que $F(x) = 0$.

Luego, comparamos las CF con (20): $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 1$ y $a_{22} = 0$; $\alpha = 0$, $\beta = 0$ (en (23)). Ahora evaluamos Δ, para lo cual necesitamos $B_1[y_1], B_1[y_2], B_2[y_1]$ y $B_2[y_2]$. Tomamos $y_1(x) = \cos x$ y $y_2 = \operatorname{sen} x$. Por inspección, comparando con (20), para obtener $B_1[y_1]$ debemos evaluar $y_1 = \cos x$ en 0, que nos da 1; $B_1[y_2]$ resulta de evaluar $y_2 = \operatorname{sen} x$ en 0, lo que arroja valor 0. En forma correspondiente $B_2[y_1]$ es $y_(\pi) = \cos(\pi) = -1$ y $B_2[y_2] = \operatorname{sen}(\pi) = 0$. Por tanto

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ahora sabemos que existen soluciones no triviales.

Si aplicamos las CF,

$$y(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0$$

de donde se desprende que $c_1 = 0$. Además,

$$y(\pi) = c_2 \cdot 0 = 0$$

que sugiere que c_2 es arbitraria. Por consiguiente, este problema tiene una cantidad infinita de soluciones descritas por

$$y = c_2 \operatorname{sen} x$$

Ejemplo 3.1.4. Resuelva $y'' + y = 0$, $0 < x < \pi/2$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$.

La solución general es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

Esta vez, las CF dan lugar a que $c_1 = 0 = c_2$, por lo que sólo se cuenta con la solución trivial $y \equiv 0$. Tenemo que,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(0) & \operatorname{sen}(0) \\ \cos(\pi/2) & \operatorname{sen}(\pi/2) \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Ejemplo 3.1.5. Resuelva $x^2y'' + xy' + \pi^2 y = 0$, $1 < x < e$, $y(1) = 0$, $y(e) = 0$.

La EDO no tiene coeficientes constantes, pero es de Cauchy-Euler. Aplicamos la sustitución $x = e^t$, para obtener la ecuación con coeficientes constantes,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \pi^2 y = 0$$

cuya variable independiente es t. La solución general es

$$y(t) = c_1 \cos \pi t + c_2 \operatorname{sen} \pi t$$

o, en términos de la variable original x, donde $t = logx$, deducimos

$$t(x) = c_1 \cos(\pi \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\pi \ln x)$$

Aplicamos las CF,

$$\begin{aligned} y(1) &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ y(e) &= c_1 \cdot (-1) + c_2 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

y concluimos que $c_1 = 0$, c_2 es arbitraria. Disponemos de una cantidad infinita de soluciones $(\Delta = 0)$

$$y = c_2 \operatorname{sen}(\pi l n x).$$

Considere el problema

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) + y(\pi) = 0 \qquad y'(0) + y'(\pi) = 0 \tag{29}$$

cuya solución general es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x \tag{30}$$

quedan, entonces, ambas constantes arbitrarias.

Si α y β no son cero y $\Delta \neq 0$, entonces (23) tiene solución única no trivial. Si $\Delta = 0$, no hay solución o existe una cantidad infinita de ellas.

Ejemplo 3.1.6. Resuelva $y'' + y = 0$, $0 < x < \pi$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 2$.

La solución general es $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$; imponemos las condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0 \\ y(\pi) &= c_2 \operatorname{sen} \pi = 2 \end{aligned}$$

que es absurdo, para cualquier elección de c_2. En consecuencia, el problema no tiene solución $(\Delta = 0)$.

Ejemplo 3.1.7. Resuelva $y'' + y = 0$, $0 < x < \pi$, $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$.

La solución general es como arriba, aplicamos las CF para dar lugar a

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 1 \\ y(\pi) &= -c_1 = -1 \end{aligned}$$

Por tanto, debemos elegir $c_1 = 1$, mientras que c_2 queda arbitraria. En este caso obtenemos una cantidad infinita de soluciones dadas por $(\Delta = 0)$

$$y = \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 3.1.8. Encuentre la solución de $y'' + y = 0$, $0 < x < \pi/2$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 3$.

Otra vez, la solución general es $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$, que al aplicarle las CF, nos conduce a

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0 \\ y(\pi/2) &= c_2 = 3 \end{aligned}$$

Obtenemos la solución única $(\Delta \neq 0)$

$$y = 3 \operatorname{sen} x.$$

Estos ejemplos ilustran que la solución de un PVF depende enormemente del intervalo en el que está definido y de los valores de α, β.

3.2. EDO no homogéneas

Sabemos que la solución geneal de

$$M[y] = F(x), \qquad x_1 < x < x_2 \tag{31}$$

está dada por la suma de las soluciones

$$\begin{aligned} y &= y_H(x) + y_p(x) \\ &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x), \end{aligned} \tag{32}$$

donde y_H es la solución del problema homogéneo asociado $M[y] = 0$, y y_p es una solución particular de (31), misma que se puede encontrar mediante coeficientes indeterminados o variación de parámetros.

Si usamos las CF

$$B_1[y] = \alpha \qquad B_2[y] = \beta, \tag{33}$$

en la solución (32), generamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 B_1[y_1] + c_2 B_1[y_2] &= \alpha - B_1[y_p] \\ c_1 B_2[y_1] + c_2 B_2[y_2] &= \beta - B_2[y_p] \end{aligned}$$

cuya solución es

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha - B_1[y_p] & B_1[y_2] \\ \beta - B_2[y_p] & B_2[y_2] \end{vmatrix}}{\Delta} \tag{34}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} B_1[y_1] & \alpha - B_1[y_p] \\ B_2[y_1] & \beta - B_2[y_p] \end{vmatrix}}{\Delta} \tag{35}$$

donde Δ es el determinante del sistema dado por (28). Si $\Delta \neq 0$, se sigue que (34) y (35) dan soluciones únicas de c_1, c_2, esto es, una solución única de (31) y (33). Si $\Delta = 0$, (31) y (33) carece de solución o tiene una cantidad infinita de ellas.

Ejemplo 3.2.1. Determine la solución de $y'' + y = x - 1$, $0 < x < 1$, $y(0) = -1$, $y(1) = 1$.

Por inspección, una solución particular es $y_p = x - 1$, así que la solución general es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x - 1.$$

La primera condición de frontera requiere que

$$y(0) = c_1 - 1 = -1$$

o $c_1 = 0$, mientras que la segunda condición da lugar a

$$y(1) = c_2 \operatorname{sen} 1 = 1$$

de donde se deduce que $c_2 = 1/(\operatorname{sen} 1)$. En consecuencia, la solución única es ($\Delta \neq 0$)

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 1} + x - 1.$$

Ejemplo 3.2.2. Resuelva $y'' + y = x - 1$, $0 < x < \pi$, $y(0) = -1$, $y(\pi) = 1$.

Del ejemplo previo, sabemos que la solución que satisface la primera CF es

$$y = c_2 \operatorname{sen} x + x - 1.$$

La segunda CF requiere que

$$y(\pi) = \pi - 1 = 1$$

lo cual es imposible. Concluimos que el problema carece de solución ($\Delta = 0$).

Otra vez, estos ejemplos muestran que la prescripción de las CF influyen en la unicidad de la solución.

Ejemplo 3.2.3. Encuentre la solución del PVF,

$$y'' + y = x, \qquad 0 < x < \pi \qquad y(0) = \pi \qquad y(\pi) = 0$$

Una solución particular es $y_p = x$, por lo que

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x.$$

Las CF conducen a

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = \pi \\ y(\pi) &= -c_1 + \pi = 0 \end{aligned}$$

que se satisfacen mediante $c_1 = \pi$ y c_2 arbitraria. Así, obtenemos una cantidad infinita de soluciones ($\Delta = 0$)

$$y = \pi \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x$$

Teorema 3.2.4. *Si y_1, y_2 son soluciones linealmente indpendientes de la EDO homogénea $M[y] = 0$, entonces el PVF*

$$M[y] = F(x), \qquad x_1 < x < x_2, B_1[y] = \alpha, \qquad B_2[y] = \beta$$

tiene solución única si y sólo si $\Delta \neq 0$, donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} B_1[y_1] & B_1[y_2] \\ B_2[y_1] & B_2[y_2] \end{vmatrix}$$

Si $\Delta = 0$, el problema carece de solución o tiene una cantidad infinita de ellas.

3.3. Problemas con valores propios

Con frecuencia, las soluciones de una EDO dependen de un parámetro λ que puede tomar diversos valores en ciertas circunstancias. El parámetro puede aparecer en los coeficientes de la EDO, en las CF, o en ambas. Una ecuación típica a este respecto es,

$$M[y] + \lambda y = 0, \qquad x_1 < x < x_2 \tag{36}$$

donde $M = A_2(x)D^2 + A_1(x)D + A_0(x)$. En los problemas que examinaremos, λ sólo aparece en la EDO, pero no en las CF.

Es claro que la solución de (36) dependerá de x y del parámetro λ. Si y_1, y_2 son soluciones continuas y linealmente independientes de (36), escribimos la solución general como

$$y = c_1 y_1(x,\lambda) + c_2 y_2(x,\lambda) \tag{37}$$

Si aplicamos a esta solución las CF homogéneas

$$B_1[y] = 0 \qquad B_2[y] = 0, \tag{38}$$

obtenemos a un determinante de los coeficientes Δ (dado por (28) que también dependerá de λ). Problemas de este tipo surgen en forma natural al resolver EDP, pero también en otras aplicaciones. El problema básico es determinar los valores de λ para los cuales $\Delta(\lambda) = 0$; esto es, determinar los valores de λ para los cuales el PVF homogéneo (36), (38) admite soluciones no triviales, y entonces encontrar la solución correspondiente a estos valores de λ. Estos valores peculiares λ se llaman valores propios y las soluciones no triviales correspondientes se conocen como funciones propias. También se emplean los téminos valor característico y función característica. El problema general recién descrito se conococe como problema con valores propios o problema de Sturm-Liouville (SL). Las siguientes ecuaciones de la física matemática son especialmente representativas en este contexto,

- Ecuación de Helmholtz $y'' + \lambda y = 0$, $x_1 < x < x_2$
- Ecuación de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, $-1 < x < 1$
- Ecuación de Bessel $x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2)y = 0$, $0 < x < b$
- Ecuación de Laguerre $xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0$, $0 < x < \infty$
- Ecuación de Hermite $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, $-\infty < x < \infty$

Por ejemplo la ecuación de Helmholtz aparece en el problema de la cuerda vibrante y al determinar la distribución de temperaturas en una barra. La ecuación de Legendre surge en ciertos problemas con geometría esférica, en cambio, la ecuación de Bessel está asociada a problemas en regiones cilíndricas; la ecuación de Laguerre y la de Hermite aparecen en mécanica cuántica.

Ejemplo 3.3.1. Establezca los valores propios y las funciones propias del PVF

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad 0 < x < 1 \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 0$$

Primero trataremos de determinar los valores propios suponiendo que son reales. Lo que se debe destacar ahora mismo es que la solución, su forma, depende de la naturaleza de λ. Debemos considerar trrs casos por separado,

Caso I. $\lambda = 0$, que conduce a la solución general

$$y = c_1 + c_2 x.$$

La primera CF $(y(0) = 0$ requiere que $c_1 = 0$, y la segunda conduce a $c_1 + c_2 = 0$, así que $c_1 = c_2 = 0$, por lo que la única solución posible es la trivial $y \equiv 0$. En consecuencia, $\lambda = 0$ no es un valor propio del problema.

Caso II. $\lambda < 0$. Es útil poner $\lambda = -k^2 < 0$, en cuyo caso la solución general se puede expresar como

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

o

$$y = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx.$$

Al resolver problemas con valores propios en dominios acotados (finitos), se prefiere expresar la solución general en términos de funciones hiperbólicas. La razón es que podemos obtener ciertas simplificaciones al usar este tipo de funciones; por ejemplo $\cosh(0) = 1$ y $\sinh(0) = 0$.

Al aplicar las CF a la solución general en términos de funciones hiperbólicas

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0 \\ y(1) &= c_2 \sinh k = 0 \end{aligned}$$

pero como $\sinh z \neq 0$ para $k \neq 0$, dedujcimos que $c_1 = c_2 = 0$, dando lugar a la solución trivial $y \equiv 0$. Por tanto, no existen valores propios para este problema.

Caso III. $\lambda > 0$. Hacemos $\lambda = k^2 > 0$, y la solución general es

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx$$

Aplicamos las CF para llegar a $c_1 = 0$ y

$$c_2 \operatorname{sen} k = 0.$$

Si exigimos $c_2 \neq 0$, la última condición se satisface si k es un múltiplo entero de π, es decir, $k = n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. En consecuencia, los valores propios están dados por

$$\lambda_n = k_n^2 = n^2\pi^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

y las funciones correspondientes son múltiplos (no cero) de

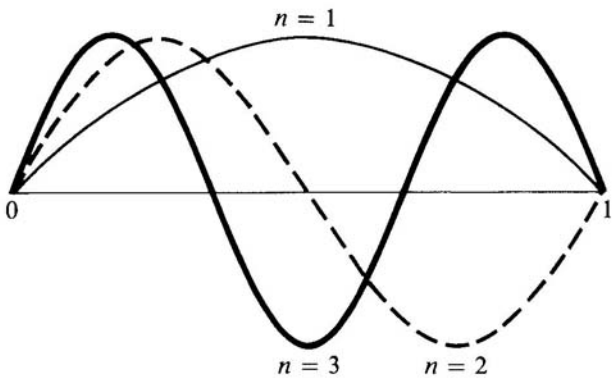
$$y = \varphi_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(pusimos $c_1 = 1$ por conveniencia).

En el caso III, también podemos determinar los valores propios considerando el determinante de coeficientes

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos k & \operatorname{sen} k \end{vmatrix} = \operatorname{sen} k,$$

que se anula para $k = n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. No obstante, en la mayoría de los casos no es necesario calcular $\Delta(\lambda)$, pero puede ser útil en problemas difíciles.



Funciones propias $\varphi_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x$, $n = 1, 2, 3$ y sus ceros en el intervalo $(0, 1)$.

En la figura se presentan las tres primeras funciones propias en el intervalo $[0, 1]$. Éstas son necesariamente cero en los extremos del intervalo, por que satisfacen las CF. La primera $\varphi_1(x) = \operatorname{sen} \pi x$ no tiene ceros adicionales en $(0, 1)$. La segunda $\varphi_2(x) = \operatorname{sen} 2\pi x$ tiene un cero en $(0, 1)$ en $x = 1/2$, y la tercera $\varphi_n(x) = \operatorname{sen} 3\pi x$ tiene ceros en $x = 1/3$ y $x = 2/3$. De hecho, es claro que para cualquier $n \geq 1$, la función propia $\varphi_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x$ tiene exactamente $(n-1)$ ceros en $(0, 1)$, que se encuentran en

$$x = \frac{1}{2}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{(n-1)}{n}.$$

Esto, no sólo ocurre para este ejemplo, si no es una propiedad general de las funciones propias, la n-ésima función propia $\varphi_n(x)$ tiene exactamente $(n-1)$ ceros en el intervalo abierto en el que se formula el problema.

Hemos supuesto que los valores propios son reales. Existe la posibilidad de valores propios complejos, pero pronto veremos que ciertas clases clases de problemas sólo admiten valores propios reales. También se acostumbra, cuando la función propia es un múltiplo constante, tomar esta constante como 1.

En algunos problemas, la determinación de los valores propios requiere encontrar raíces de ecuaciones trascendentes. Tales ecuaciones se resuelven, generalmente, en forma numérica, por ejemplo, usando el método de Newton. Si tenemos la ecuación $f(x) = 0$ y queremos aproximar los valores de x para los cuales se cumple, definimos la siguiente sucesión

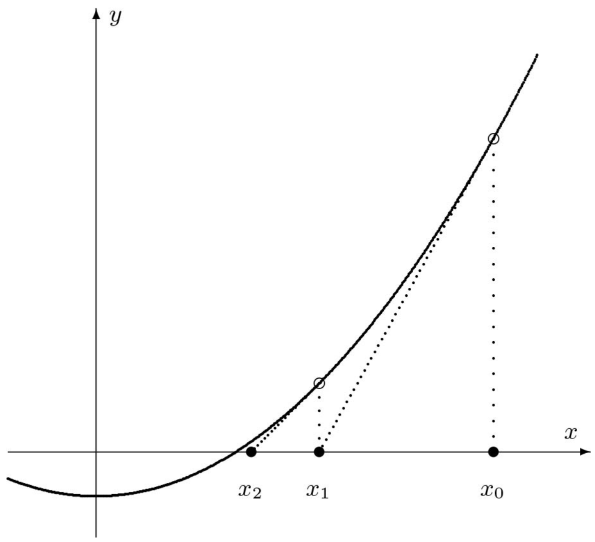
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

donde x_0 es un valor dado de antemano. Se supone que $f'(x_k) \neq 0$ para toda $k \geq 0$.

La figura ilustra una interpretación geométrica del método; la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_k, f(x_k))$ es la recta con ecuación $y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$, que interseca al eje x en el punto $(x_{k+1}, 0)$.

Ejemplo 3.3.2. Determine los valores propios del PVF

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad 0 < x < 1, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) + y'(1) = 0.$$



El método de Newton

Otra vez, consideramos tres casos.

Caso I. $\lambda = 0$. La solución general es

$$y = c_1 + c_2 x$$

Las CF demandan que $c_1 = 0$ y $c_1 + 2c_2 = 0$, dando lugar a la solución trivial. Por tanto, $\lambda = 0$ no es valor propio.

Caso II. $\lambda < -$. Ponemos $\lambda = -k^2 < 0$. La solución general es

$$y = c_1 \cosh kx + c_2 \operatorname{senh} kx$$

y las CF dan paso a $c_1 = 0$ y

$$c_2(\operatorname{senh} k + k \cosh k) = 0$$

o, para $c_2 \neq 0$,

$$k = -\tanh k$$

Para averiguar si hay solución de esta ecuación trascendente, graficamos $u = k$ y $u = -\tan k$ para buscar intersecciones.

Es claro que no hay intersección para $k > 0$, por lo que concluimos que no existen valores propios negativos.

Caso III. $\lambda > 0$. Ponemos $\lambda = k^2 > 0$, dando como solución general

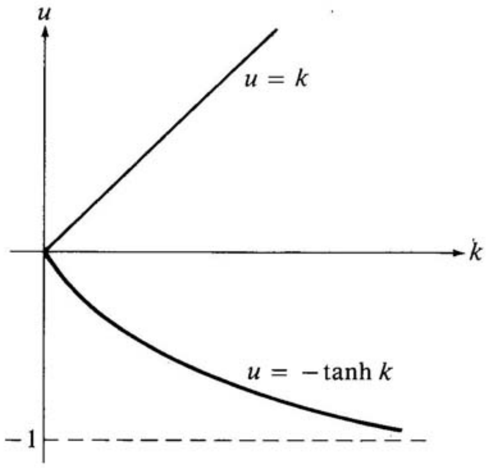
$$y = c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx$$

La CF en $x = 0$ requiere que $c_1 = 0$ y la CF en $x = 1$ da lugar a

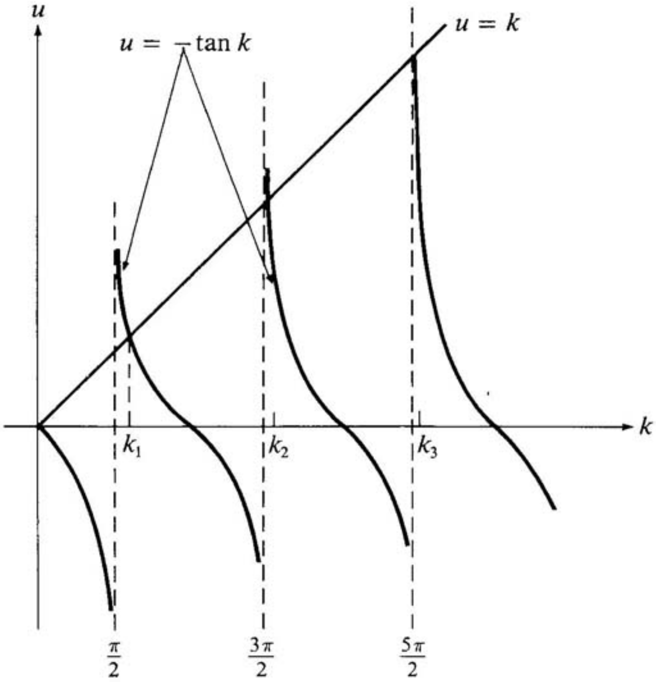
$$c_2(\operatorname{sen} k + k \cos k) = 0,$$

o, para $c_2 \neq 0$,

$$k = -\tan k$$



Caso II, ejemplo 3.3.2



Caso III, ejemplo 3.3.2

Graficamos $u = k$ y $u = -tank$ para buscar intersecciones. Según la figura, existen una cantidad infinita de valores k_n $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ donde ocurren las intersecciones, pero su valor exacto debe determinarse numéricamente, por ejemplo, con el método de Newton. Buscamos ceros de la función

$$F(x) = x + \tan x$$

así que

$$x_{j+1} = x_j - \frac{F(x_j)}{F'(x_j)}$$

que a su vez podemos aproximar mediante

$$x_{j+1} = x_j - \frac{F(x_j)}{F'(x_0)}$$

donde x_0 es el estimado inicial. Por ejemplo, por la figura, proponemos, para el primer cero k_1 como 2, $x_0 = 2$, entonces,

$$F'(2) = 1 + \sec^2(2) \approx 6.7744$$

Así,

$$x_{j+1} = x_j - \frac{x_j + \tan x_j}{6.7744} \qquad j = 0, 1, 2, 3$$

En forma sucesiva, sustituimos $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ en el último reusltado, para obtener

$$x_1 = 2.0273, \qquad x_2 = 2.0286, \qquad x_3 = 2.0287, \ldots$$

y concluimos que $k_1 = 2.0287$. En consecuencia, $\lambda_1 = k_1^2 = 4.1158$.

Vale la pena notar que después de algunas inetrseccionesm las restantes son cercanas a la asíntota vertical de $-\tan k$. En consecuencia, deducimos que los valores propios mayores satisfacen la relación (aproximada)

$$\lambda_n \approx \frac{1}{4}(2n-1)^2\pi^2, \qquad n \ggg 1.$$

Correspondiente a cada valor propio $\lambda_n = k_n^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ tenemos la función propia

$$\varphi_n(x) = \operatorname{sen} k_n x \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(pusimos $c_2 = 1$).

Los tres casos identificados en la busqueda de valores propios están realcionados a la forma de la ecuación $y'' + \lambda y = 0$. Para EDO más generales, los casos son diferentes. Por ejemplo,

$$ay'' + by' + \lambda y = 0, \tag{39}$$

tenemos como ecuación característica

$$am^2 + bm + \lambda = 0$$

Las raíces de esta ecuación están dadas por

$$m = \frac{-m \pm \sqrt{b^2 - 4a\lambda}}{2a}$$

y los tres casos involucrados para buscar valores propios

$$\begin{aligned} b^2 - 4a\lambda &= 0 \\ b^2 - 4a\lambda &= k^2 > 0 \\ b^2 - 4a\lambda &= -k^2 < 0 \end{aligned} \tag{40}$$

en lugar de los casos mencionados $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, $\lambda < 0$.

Ejemplo 3.3.3. Determine los valores propios del PVF

$$y^{(4)} + \lambda y'' = 0, \qquad 0 < x < 1, \qquad y(0) = y''(0) = 0, \qquad y(1) = y'(1) = 0.$$

Empezamos por suponer que $\lambda = k^2 > 0$. La EDO resultante tiene como solución general

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos kx + c_4 \operatorname{sen} kx$$

cuyas primeras derivadas son

$$\begin{aligned} y' &= c_2 + k(-c_1 \operatorname{sen} kx + c_4 \cos kx) \\ y'' &= -k^2(c_3 \cos kx + c_4 \operatorname{sen} kx) \end{aligned}$$

Las dos CF en $x = 0$ conducen a

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_3 &= 0 \end{aligned}$$

de donde se desprende que $c_1 = c_3 = 0$. Las CF restantes, en $x = 1$, dan lugar a

$$\begin{aligned} c_2 + c_4 \operatorname{sen} k &= 0 \\ c_2 + c_4 k \cos k &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tienen soluciones distintas de cero para c_2, c_4 si y sólo si el determinante de los coeficientes satisface

$$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen} k \\ 1 & k \cos k \end{vmatrix} = k \cos k - \operatorname{sen} k = 0$$

en consecuencia, k debe seleccionarse de tal suerte que $k = \tan k$, que es similar a la situación de un ejemplo previo. Se puede mostrar que existen una cantidad infinita de valores k_n que satisfacen esta relación, dando valores propios $\lambda_n = k_n^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Observe que cuando k es uno de los valores k_n, las dos ecuaciones en c_2, c_4 son equivalentes, y cualquiera puede emplearse para eliminar una de las constantes. Por ejemplo, la primera ecuación propicia

$$c_2 = -c_4 \operatorname{sen} k_n$$

de la que obtenemos las funciones propias (ponemos $c_4 = 1$)

$$\varphi_n(x) = \operatorname{sen} k_n x - x \operatorname{sen} k_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

El lector puede cerciorarse de que no hay valores propios $\lambda \leq 0$.

Ejercicios

1. Determine la tempertura en estado estable dada por el PVF.

   a) $y'' = 0$, $y(0) = T_1$, $y(\pi) = T_2$.
   b) $y'' = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = T_2$
   c) $y'' = 0$, $y(0) - y'(0) = T_1$, $y(1) = 0$
   d) $y'' = -T_0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$.
   e) $y'' - y = 0$, $y(0) = T_1$, $y(b) = T_1$. [Sugerencia: exprese la solución en términos de seno y cosen hiperbólico]
   f) $y'' - y = -T_0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

2. La tempertura en un enfriador está gobernada por el PVF

$$y'' = h(y - T_0), \qquad y(0) = T_1, \qquad -y'(b) = h[y(b) - T_0]$$

   donde h, T_0, T_1 son constantes.

   a) Determine la solución $y(x)$.
   b) ¿qué ocurre con la solución cuando $b \to \infty$?

3. Mediante $u(r)$ denotamos la tempertatura en estado estable en un sólido acotado por dos esferas concéntricas de radios $r = 1$ y $r = 2$. Si $u = 0$ en la superficie interna y $u = T_0$ en la externa, T_0 constante, determine $u(r)$ en la región entre las esferas concéntricas si la ecuación correspondiente es

$$\frac{d^2 ru}{dr^2} = 0.$$

4. ¿Con qué condiciones tiene solución el siguiente problema?

$$y'' = 0, \qquad y'(0) = T_1, \qquad y'(1) = T_2$$

5. Determine soluciones no triviales, si es que existen. Establezca si la solución es única o no.

   a) $y'' = 0$, $y(0) = 0 = y(1)$.
   b) $y'' + y = 0$, $y(0) = 0 = y'(\pi)$.
   c) $y'' + \pi^2 y = 0$, $y(0) + y(1) = 0$, $y'(0) + y'(1) = 0$
   d) $y'' - y = 0$, $y(0) = 0 = y(1)$.
   e) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 0 = y(1)$.

f) $y'' + y = 0$, $y(0) = 3$, $y(\pi) = -2$.
g) $y'' + k^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 2$, $k > 0$.
h) $y'' - y = 0$, $y'(0) + 3y(0) = 0$, $y'(1) + y(1) = 1$.
i) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 3$.
j) $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = e^3$.

6. Use (22) para verificar lo siguiente.

   a) El operador diferencial ($D = d/dx$)

   $$M = A_2(x)D^2 \bullet + A_1(x)D \bullet + A_0(x)\bullet$$

   es lineal.

   b) Los operadores frontera B_1, B_2 dados en (20) son operadores lineales.

7. Verifique que el PVF

   $$y'' - k^2 y = 0, \qquad y(0) = 0 = y(1)$$

   carece de soluciones no triviales para valores reales de k.

8. ¿Para qué valores de k tiene solución no trivial el siguiente problema?

   $$y'' + k^2 y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 0, \qquad k \geq 0$$

   ¿Cuáles son las soluciones?

9. Determine el valor de b para los cuales el PVF

   $$y'' + 4y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(b) = 3, \qquad b > 0$$

   carece de solución.

10. Muestre que el PVF

    $$y'' + y = 0, \qquad y(a) = \alpha \qquad y'(b) = \beta$$

    tiene solución única para cualquier elección de a, b tal que $a \neq b$, $a - b \neq n\pi/2$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

11. Encuentre la solución (cuando sea posible). Establezca si la solución es única o no.

    a) $y'' = -x$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.
    b) $y'' = x$, $y(0) = 1$, $y(1) - y'(1) = 0$.
    c) $y'' = \operatorname{sen} \pi x$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.
    d) $y'' = 3 \operatorname{sen} \pi x$, $y(0) = -2$, $y'(1) = 7/pi$.

e) $y'' = 1$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 1$.

f) $y'' + 4y = e^{-x}$, $y(0) = -1$, $y'(\pi/2) = -e^{-\pi/2}/5$.

g) $y'' + 2y' + y = x$, $y(0) = -3$, $y(1) = -1$.

h) $y'' - y' - 6y = e^{x}$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

12. La EDO
$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \qquad x > 0$$
donde a, b, c son constantes, se llama de Cauchy-Euler.

a) Verifique que el cambio de variable $x = e^t$ conduce a
$$xy- = Dy, \qquad x^2y'' = D(D-1)y.$$
Aquí, $D = \frac{d}{dt}$.

b) Use el inciso previo para corroborar que la ecuación de Cauchy-Euler se puede transformar en la EDO con coeficientes constantes
$$[aD^2 + (b-a)D + c]y = 0$$

c) En los siguientes incisos, use lo anterior para transformar la ecuación de Cauchy-Euler dada en una con coeficientes constantes, resuélvala, y regrese a la variable original.

1) $x^2y'' - 5xy' + 25y = 0$, $y(1) = 0$, $y(e^{\pi}) = 0$
2) $x^2y'' - xy' + y = 0$, $y(1) = 1$, $y(e^2) = 0$.
3) $x^2y'' + xy' - y = x$, $\qquad y(1) = 0$, $y(e) = e/2$.
4) $xy'' + y' = x$, $y(1) = 0$, $y(e) = e^2/4$.

13. Encuentre los valores propios reales y las correspondientes funciones propias.

a) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0 = y'(1)$.

b) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) - y'(1) = 0$.

c) $y'' + 2y' + (1-\lambda)y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

d) $y'' + 4y' + (4 + 9\lambda)y = 0$, $y(0) = 0$, $y(2) = 0$.

e) $y'' + 2y' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(2) = 0$.

f) $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$, $y(1) = 0$, $y(e) = 0$

g) $x^2y'' - xy' + \lambda y = 0$, $y(1) = 0$, $y(e) = 0$.

h) $\frac{d(xy')}{dx} + \frac{\lambda}{x}y = 0$, $y'(1) = 0$, $y(2) = 0$.

14. Dado el PVF
$$y'' + \lambda y = 0, \qquad hy(0) + y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0$$
muestre lo siguiente.

a) Si $\lambda = 0$ es un valor propio, $h = 1$

b) Si $h > 1$, existe exactamente un valor negativo y este valorpropio decrece conforme h crece.

c) Si $h < 0$, no existe valores propios negativos.

15. Mediante el método de Newton aproxime la primera raíz de $\cosh x \cos x + 1 = 0$.

16. Use el método de Newton para estimar los primeros valores propios $\neq 0$. Determine la forma de las funciones propias.

    a) $y'' + \lambda y = 0, y(0) - y'(0) = 0, y'(\pi) = 0$.

    b) $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0 = y(\pi) + y'(\pi)$

    c) $y'' + \lambda y = 0, y(0 - y'(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0$.

17. Considere el problema con valores propios

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0 \qquad y'(1) = 0$$

Sin resolver explícitamente la ecuación, muestre que si $\varphi_m(x), \varphi_n(x)$ son funciones propias correspondientes a los valores propios λ_m, λ_n, respectivamente, con $\lambda_m \neq \lambda_n$, se cumple

$$\int_0^1 \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0$$

[Sugerencia: Observe que

$$\varphi_m'' + \lambda_m \varphi = 0, \qquad \varphi_n'' + \lambda_n \varphi_n = 0$$

Multiplique la primera por φ_n, la segunda por φ_m, reste las dos ecuaciones e integre el resultado de 0 a 1, usando integración por partes y teniendo en cuenta las CF.]

18. Determine los valores propios reales y las correspondientes funciones propias, suponga que sólo existen valores propios no negativos (ponga $\lambda = 0$ y $\lambda = k^4 > 0$)

    a) $y^{(4)} - \lambda y = 0, y(0) = y''(0) = 0, y(\pi) = y''(\pi) = 0$

    b) $y^{(4)} - \lambda y = 0, y'(0) = y'''(0) = 0, y'(1) = y'''(1) = 0$

    c) $y^{(4)} - \lambda y = 0, y(0) = y'(0) = 0, y(1) = y'(1) = 0$.