2

Introducción a las ecuaciones diferenciales parciales II

A grandes rasgos, una ecuación diferencial parcial (edp) es una ecuación que involucra una función desconocida (incógnita) que depende de dos o más variables, y sus derivadas parciales.

Al igual que ocurre con las ecuaciones diferenciales ordinarias (edo), es de suma importancia proporcionar una clasificación de las edp para resolverlas, en caso de ser posible, de la mejor manera; nos referimos a nociones como orden, grado, linealidad, homogeneidad, etc. Por lo antes dicho, una nueva característica es relevante: la cantidad de variables de la función incógnita y la región del plano o el espacio en la que se pretende resolver.

Si $u = u(x,t)$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

son ejemplos de EDP en la función incógnita $u(x,t)$. Más ejemplos

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \qquad \text{la incógnita es } u = u(x,y,z)$$

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = u_t \qquad \text{la incógnita es } u = u(r,\theta,t)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\cdot\nabla v\right) = -\nabla v + \mu\nabla^2 v + f \qquad \text{la incógnita es } v = v(x,y,z,t).$$

Ejemplo 2.0.1. Considere la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

donde $u = u(x,t)$ es la función incógnita. Si f es una función diferenciable de una variable y hacemos

$$u(x,t) = f(x-t)$$

resulta que u es solución de (1). Ciertamente, mediante la regla de la cadena, deducimos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -f'(x-t) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-t)$$

por lo que se cumple (1). Soluciones explícitas posibles son las siguientes,

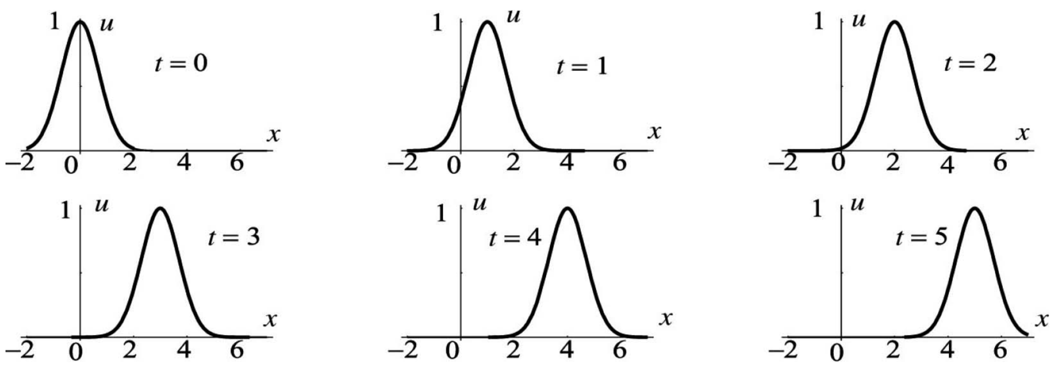
$$(x-t)^2, e^{-(x-t)^2}, 3\operatorname{sen}(x-t), 2\cos(x-t), e^{(x-t)}, \ldots$$

La ecuación recién dada aparece en dinámica de fluidos. Es una ecuación de primer orden, lineal, homogénea. Aquí, primer orden refiere a la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Ejemplo 2.0.2. De todas las soluciones de (1), ¿alguna satisface la condición $u = e^{-x^2}$ sobre el eje x? Buscamos una solución que satisfaga $u(x,0) = e^{-x^2}$. Usamos la solución $u(x,t) = f(x-t)$ del ejemplo 2.0.1,

$$u(x,0) = f(x) = e^{-x^2}.$$

Por tanto, la solución está dada por $u(x,t) = e^{-(x-t)^2}$. Otra forma de visualizar la solución es pensar que t como el tiempo. Para un valor fijo de t, la gráfica de $u(x,t)$, como función de x, representa una instantánea de forma de onda.



Instantáneas de ondas moviendose a la derecha sin cambiar su forma

Las ondas se mueven hacia la derecha sin cambiar su forma.

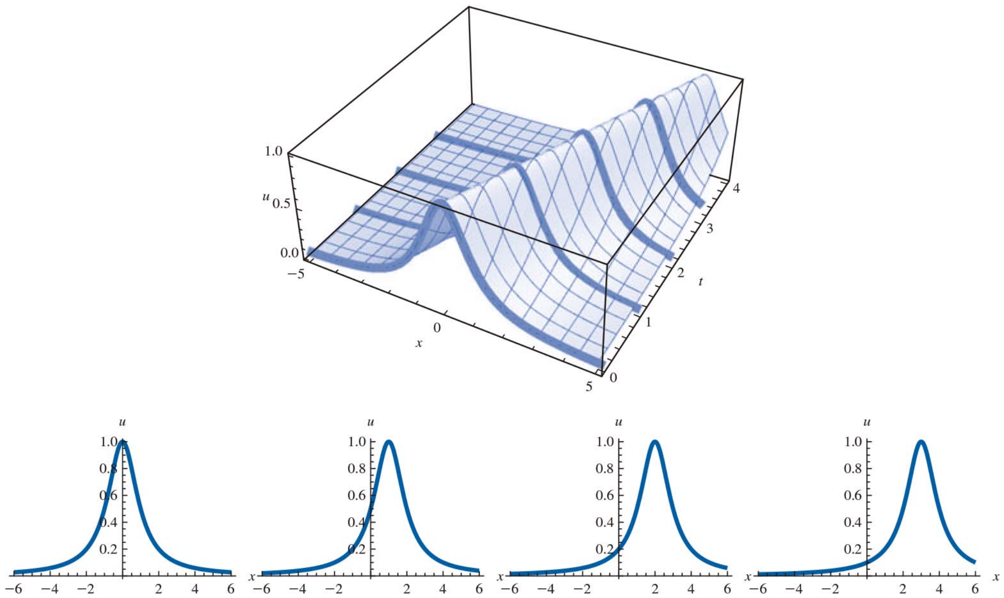
Ejemplo 2.0.3. ¿Alguna función satisface la ecuación (1) y $u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$?

$$u(x,0) = f(x-0) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

así que la solución que buscamos es

$$u(x,t) = f(x-t) = \frac{1}{1+(x-t)^2}$$

© Luis Miguel Villegas Silva



Arriba la superficie solución $u(x,t) = \frac{1}{1+(x-t)^2}$. Abajo, las correspondientes curvas cuando $t = 0, 1, 2, 3$.

Hemos impuesto una condición sobre la variable temporal t, por lo que la condición se llama condición inicial.

En cambio, si requerimos $u(0,t) = \operatorname{sen} t$,

$$\begin{aligned} u(0,t) &= f(0-t) = \operatorname{sen} t \\ f(-t) &= \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

la solución es

$$u(x,t) = f(x-t) = -\operatorname{sen}(x-t).$$

Este tipo de condición, donde se especifica el valor de una variable espacial, se llama condición de frontera.

En el ejemplo 2.0.1 hablamos de muchas soluciones, pero no dijimos como obtenerlas. Tampoco es claro que hayamos obtenido todas las soluciones. La siguiente derivación mostrará que realmente son todas e ilustraremos como se usa un cambio de variable juicioso para simplificar el problema.

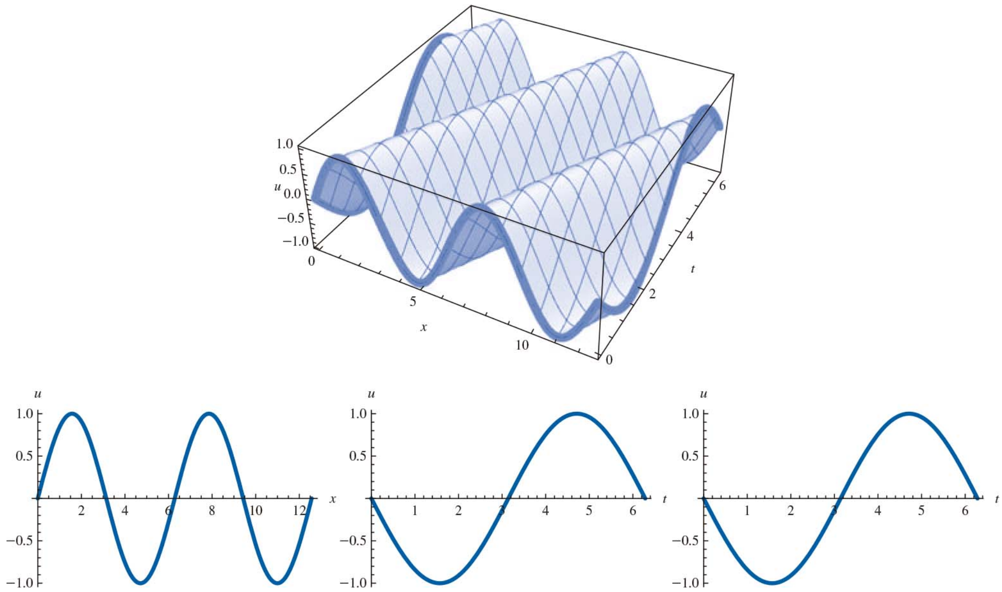
Ejemplo 2.0.4. La idea es reducir la edp (1) a una edo mediante un cambio de variable,

$$\alpha = ax + bt, \qquad \beta = cx + dt,$$

donde a, b, c, d se escogerán apropiadamente. Apelamos a la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} \\ &= a\frac{\partial u}{\partial \alpha} + c\frac{\partial u}{\partial \beta} \end{aligned}$$

© Luis Miguel Villegas Silva



Arriba la superficie solución $u(x,t) = -\operatorname{sen}(x-t)$ para $0 < x < 4\pi$, $0 < t < 2\pi$. Las curvas resaltadas a izquierda y derecha corresponden a las CF $u(0,t)$ y $u(4\pi,t)$. Abajo, la CI $u(x,0)$.

en forma similar

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t} \\ &= b\frac{\partial u}{\partial \alpha} + d\frac{\partial u}{\partial \beta}.\end{aligned}$$

Introducimos todo en (1) y simplificamos, para lograr

$$(a+b)\frac{\partial u}{\partial \alpha} + (c+d)\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0$$

Elegimos valores para a, b, c, d de tal suerte que nos quitemos de encima una de las derivadas parciales. Eliminamos $\frac{\partial u}{\partial \beta}$ con la selección

$$a = 1, b = 0, c = 1, d = -1$$

Para llegar a

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0.$$

Esta edp tiene como solución $u = C$, donde C es una función de β (que es constante respecto a α). La solución general es $u = C(\beta) = C(x-t)$, que coincide con nuestra respuesta dada en el ejemplo 2.0.1. Existen otras posibles elecciones de a, b, c, d.

© Luis Miguel Villegas Silva

2.1. De donde surgen las EDP

2.1.1. Leyes de conservación y fluidos

Suponga que estamos interesados en una propiedad de un material (el contenido de calor o concentración de tinta) que varía continuamente en el espacio y tiempo. El principio detrás de las leyes de conservación es el cambio y lo que causa el cambio en la propiedad en un volumen, digamos V (puede ser iluminador pensar en una esfera) de material encerrado por una superficie S. Tenemos tres ingredientes clave: la cantidad Q de la propiedad por unidad de volumen, la taza F en la que se produce o destruye (esto es, producción neta) por unidad de volumen y el «flux» neto (o flujo) de la propiedad que entra/sale del volumen a través de sus superficie. Si $\vec{q}$ denota el flujo en cualquier punto en V, entonces el flujo que sale en un punto de la superficie es $\vec{q} \cdot \vec{n}$, donde $\vec{n}$ es el vector normal en el punto. Una ley de conservación es la afirmación la taza de cambio de Q es igual a la diferencia entre la producción neta y el flux saliente neto.

En forma matemática,

$$\frac{d}{dt} \iiint_V Q dV = \iiint_V F dV - \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS$$

La integral de superficie se puede convertir en una integral de volumen mediante el teorema de la divergencia. Más aún, la derivada temporal y la primera integral se puede intercambiar suponiendo que el volumen V no varía con t y que Q y Q_t son continuas. Con esta simplificaciones, deducimos

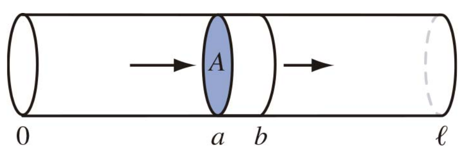
$$\iiint_V \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} - F \right) dV = 0.$$

Puesto que esta relación se cumple en cualquier volumen V, el integrando debe ser cero, y llegamos a

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} = F$$

Esta fue una deducción en cualquier número de dimensiones (aunque planteada para 3); es conveniente para iniciar el curso, reformular lo anterior en una dimensión.

Considere fluido que fluye en un dominio monodimensional (1D) (o flujo de calor en una barra muy delgada, o tinta en un fludio en un tubo delgado) de longitud l como se muestra en la figura. Sea $t > 0$ el tiempo y $0 < x < l$ la variable espacial. Definimos las siguientes cantidades.



Modelando el flujo de un fluido en 1D

* $u(x,t)$ = la densidad de la cantidad de interés (por ejemplo, calor o concentración de tinta) en el punto x al instante t.

* $\varphi(x,t)$ = el flux de la cantidad en el punto x al instante t (la cantidad de la magnitud fluyendo hacia la derecha por unidad de tiempo por unidad de área a través de la sección transversal en x).

* $f(x,t)$ = taza de generación interna de la magnitud en el punto x al instante t (cantidad por unidad de volumen por unidad de tiempo).

* A = área de sección transversal de una rebanada del dominio (suponemos qeu es la mismo para toda x).

Considere un subintervalo arbitrario $[a,b]$ del dominio $0 < x < l$ con área de sección transversal A constante. La ley de conservación es

Acumulación=Entrada-Salida+Generación

esto es

taza de cambio de la magnitud en la rebanada =taza de entrada-taza de salida
+taza de generación interna

Así,

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)A dx = A\varphi(a,t) - A\varphi(b,t) + \int_a^b f(x,t)A dx. \tag{2}$$

Aplicamos el teorema fundamental del cálculo a la diferencia en el lado derecho,

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx = -\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)dx + \int_a^b f(x,t)dx.$$

Transformamos esta ecuación como sigue,

$$\int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right] dx = \int_a^b f(x,t)dx.$$

Dado que estas integrales son iguales para subintervalos arbitrarios $[a,b]$ de $0 < x < l$, por continuidad y propiedades de la integral, los integrandos deben ser iguales, dando paso a ley fundamental de conservación, o ecuación de continuidad, o de estado,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = f(x,t). \tag{3}$$

El problema aquí es que aparecen dos incógnitas, u y φ (suponemos que f es conocida). Para salir avantes debemos apelar a leyes físicas que relacionen u y φ.

Las siguientes son ecuaciones físicas realistas que dan lugara a EDP bien estudiadas.

© Luis Miguel Villegas Silva

- $\varphi = cu$, $f \equiv 0$. En tal situación (3) es

$$u_t + cu_x = 0, \tag{4}$$

conocida como la ecuación de transporte porque modela el transporte de una sustancia (sin difusión) en un fluido.

- $\varphi = -ku_x$, $f \equiv 0$. En este caso,

$$u_t - ku_{xx} = 0, \qquad \text{equivalente} \qquad u_t = ku_{xx} \tag{5}$$

que es la ecuación de calor o de difusión ya que la prescripción dada se conoce como la ley de Fourier para el calor o ley de Fick para la difusión.

- $\varphi = cu - ku_x$, $f \equiv 0$. Esta vez (3) es

$$u_t + cu_x - ku_{xx} = 0$$

es la ecuación de transporte-difusión.

- $\varphi = u^2/2$, $f \equiv 0$. La ecuación (3) es, entonces,

$$u_t + uu_x = 0,$$

la ecuación de Burger no viscosa

- $\varphi = u^2/2 - ku_x$, $f \equiv 0$. La ecuación (3) se reduce a

$$u_t + uu_x - ku_{xx} = 0,$$

la ecuación de Burger viscosa.

- $\varphi = -ku_x$, $f(u) = u(1-u)$. Esta vez,

$$u_t - ku_{xx} = u(1-u), \tag{6}$$

la ecuación de Fisher que aparece en biología, modela poblaciones.

2.2. La ecuación de onda 1D

Considere una cuerda perfectamente flexible de longitud l cuyos extremos están en posiciones fijas. Sea $t > 0$ el tiempo y $0 < x < l$ la variable espacial. Definimos las siguientes cantidades,

- $u(x,t)$ = posición vertical del punto en la cuerda a x unidades del extremos izquierdo en el instante t.
- $\rho(x)$ = densidad lineal de la cuerda en x.

© Luis Miguel Villegas Silva

⁕ $T(x,t)$ = vector tensión en x al tiempo t.

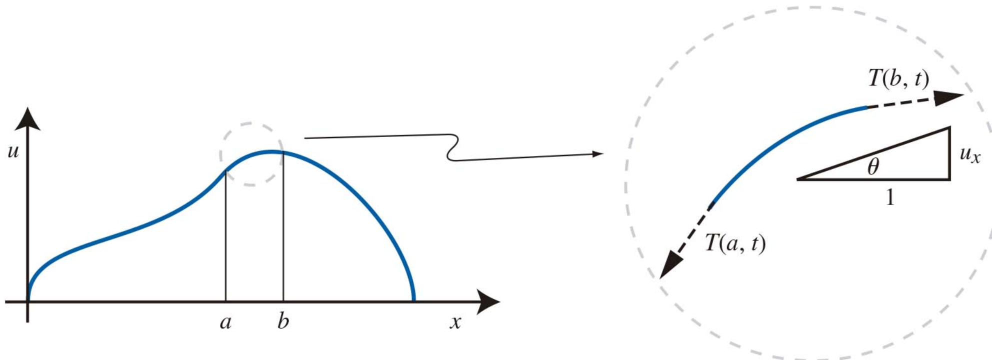
Haremos las siguientes consideraciones físicas, visiblemente plausibles.

✯ Las deflexiones de la cuerda son «pequeñas» de tal suere que $|u(x,t)|$ y $|u_x(x,t)|$ son «pequeñas».

✯ El único movimiento significativo tiene lugar verticalmente; los demás son despreciables. En particular, el movimiento está confinado al plano xu y el movimiento horizontal no se toma en cuenta.

✯ La única fuerza presente se debe a la tensión (ignoramos la fricción, fuerzas externas, etc.), que se dirige tangencialmente a la cuerda en x.

Considere una subintervalo arbitrario $[a,b]$ del dominio $0 < x < l$, como se aprecia en la figura,



Vibraciones pequeñas verticales en una cuerda flexible.

Primero obtenemos las componentes horizontal y vertical[1] de la tensión $T(x,t)$,

$$T_h(x,t) = \frac{|T(x,t)|}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}$$

$$T_v(x,t) = \frac{|T(x,t)|u_x(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}$$

Balanceamos las fuerzas horizontales en el segmento $[a,b]$

$$\frac{|T(b,t)|}{\sqrt{1+u_x^2(b,t)}} - \frac{|T(a,t)|}{\sqrt{1+u_x^2(a,t)}} = 0 \tag{7}$$

ecuación que afirma que la tensión es independiente de x (ya que a, b son arbitrarios), así que escribimos $|T(x,t)| = T(t)$. Si balanceamos las fuerzas verticales en $[a,b]$, la segunda ley de Newton da lugar a

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x)u_t(x,t)\sqrt{1+u_x^2(x,t)}dx = \frac{T(t)u_x(b,t)}{\sqrt{1+u_x^2(b,t)}} - \frac{T(t)u_x(a,t)}{\sqrt{1+u_x^2(a,t)}} \tag{8}$$

[1]Recuerde que la componente horizontal de un vector v está dada por $v_h = |v|\cos\theta$, mientras que la componente vertical es $v_v = |v|\operatorname{sen}\theta$.

© Luis Miguel Villegas Silva

Hemos supuesto que las deflexiones son pequeñas, $u_x^2 \approx 0$, por lo que $\sqrt{1+u_x^2(x,t)} \approx 1$, y la última ecuación se simplifica a

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x)u_t(x,t)dx = T(t)[u_x(b,t) - u_x(a,t)].$$

Metemos la derivada y reformulamos la diferencia a la derecha como una integral para llegar a

$$\int_a^b \rho(x)u_{tt}(x,t)dx = \int_a^b T(t)u_{xx}(x,t)dx.$$

Dado que esta integrales son iguales para un intervlo arbitrario $[a,b]$ en $0 < x < l$, por continuidad, los integrandos deben ser iguales

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = T(t)u_{xx}(x,t) \tag{9}$$

Si hacemos la suposiciónde que la densidad de la cuerda no varía con x y la tensión no varía con el tiempo, es decir, $\rho(x) = \rho$ y $T(t) = T$, llegamos a la ecuación de onda 1D,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{10}$$

Aquí, $c = \sqrt{T/\rho}$ es la velocidad ondulatoria de la cuerda. Se obtienen variantes de está ecuación si modificamos las hipótesis.

- Una forma de involucrar fricción (amortiguamiento) es suponer que la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad u_t. Esto da lugar a la ecuación de onda amortiguada,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - r u_t, \qquad r > 0$$

- Si existe una fuerza restauradora, elástica, pensamos que es proporcional al desplazamiento u (por ejemplo, en un resorte), construimos la ecuación

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - ku, \qquad k > 0$$

2.3. Condiciones de frontera en 1D

Problemas en 1D tienen la variable espacial definida, generalmente, en intervalos de la forma $0 < x < l$. Así, la frontera del dominio consiste en los extremos $x = 0$, $x = l$.

Las EDP requieren, con frecuencia, que su solución satisfaga alguna condición en la frontera del dominio, llamadas condiciones de frontera, que desempeñan un papel decisivo en la solución. Ahora consideramos algunos tipos de ellas.

Condiciones de frontera de Dirichlet

Una condición de frontera de Dirichlet (también llamada un condición de frontera de primera clase) especifica el valor de la función incógnita u en la frontera física del dominio.

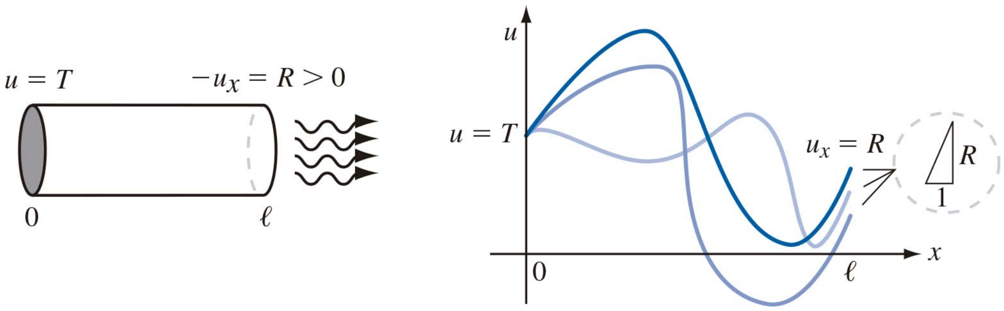
© Luis Miguel Villegas Silva

Por ejemplo, una condición de Dirichlet en $x = 0$ toma la forma $u(0, t) = T$. En el contexto 1D, la ecuación de calor, la interpretación física es que la temperatura u en el extremo izquierdo de la barra $(x = 0)$ se mantiene a una temperatura fija T todo el tiempo. Para la ecuación de onda, esto significa que el extremo izquierdo de la cuerda se mantiene fijo a una altura de T unidades.

Condiciones de Neumann

Una condición de Neumann (también llamada condición de segunda clase) especifica el valor de la derivada espacial $\frac{\partial u}{\partial x}$ en la frontera física del dominio.

Existen dos formas estándar de escribir una condición de Neumann: en forma matemática o en forma física. La matemática especifica $\frac{\partial u}{\partial x}$ en la frontera del dominio, por ejemplo, en la ecuación de calor 1D para una barra de longitud l, escribimos $u_x(0, t) = R$ en el extremo izquierdo, o $u_x(l, t) = R$ el el derecho. Son condiciones matemáticas impuestas en la frontera del dominio, no se afirma ninguna situación física.



Condición de Dirichlet a la izquierda; condición de Neumann a la derecha; algo correspondiente para una cuerda.

Por otra parte, la forma física de una condición de Neumann en el contexto de flujo de fluidos (por ejemplo, transferencia de calor, dinámica de fluidos, etc.) trata de expresar el flux saliente normal (perpendicular) de la cantidad. En el caso de la ecuación de calor 1D en $0 < x < l$, se especifica el flux saliente de R unidades normal a la frontera en el extremo izquierdo $(x = 0)$, se escibe $u_x(0, t) = R > 0$. Recuerde que el término flux en la ecuación involucra el flujo de calor es $\varphi = -ku_x$, $k > 0$, y por convención, un flux positivo significa flujo hacia la derecha. En el extremo izquierdo $(x = 0)$ de la barra, flujo saliente normal a la frontera sería flujo hacia la izquierda, por lo que $\varphi < 0$ en $x = 0$. Entonces, $-ku_x(0, t) < 0$, así $u_x(0, t) > 0$ representa flux saliente normal a la frontera en el extremo izquierdo. Como $u_x(0, t) = R > 0$ tiene una interpretación física específica en términos del flux saliente, la llamamos la forma física de la condición de Neumann.

Sin embargo, la forma física de una condición de Neumann en el extremo derecho $(x = l)$ de la barra parece diferente que a la izquierda ya que las normales salientes apuntan en direcciones opuestas, porque queremos el flujo saliente hacia la derecha $\varphi = -ku_x > 0$ en $x = l$. Por tanto, el flux saliente de R unidades en el extremos derecho se escrbe $-u_x(l, t) = R > 0$.

En la forma física de una condición de Neumann, el lado izquierdo debe representar flux saliente normal a la frontera.

Las formas matemática y física se pueden transformar una en la otra. Por ejemplo, una condición de Neumann en $x = 0$ tiene la forma

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = R}_{\text{forma matemática}}$$

en forma equivalente

$$\underbrace{\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)}^{\text{flujo saliente en } x=0} \qquad = R}_{\text{forma física (preferida)}}.$$

Por otro lado, una condición de Neumann en $x = l$ tiene la forma

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = R}_{\text{forma matemática}}$$

en forma equivalente

$$\underbrace{\overbrace{-\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)}^{\text{flujo saliente en } x=l} \qquad = -R}_{\text{forma física (preferida)}}.$$

Una discusión sobre flux en la ecuación de onda no tiene sentido. En cambio, para ésta, una condición de Neumann tal como $u_x(l,t) = R$ significa que se especifica la pendiente de la cuerda (no su posición).

Condiciones de Robin

Una condición de Robin (condición de tercera clase) especifica una combinación lineal de la derivada espacial $\frac{\partial u}{\partial x}$ y de la función incógnita u en la frontera física del dominio.

Por ejemplo, en $x = l$ toma la forma

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + Ku(l,t) = T}_{\text{forma matemática}}$$

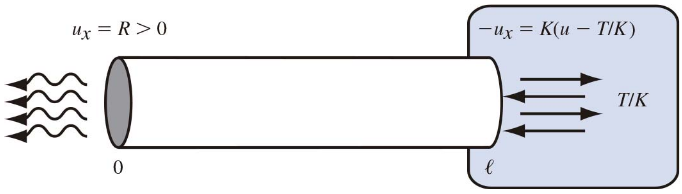
o en forma equivalente

$$\underbrace{\overbrace{-\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)}^{\text{flux saliente en } x=l} \qquad = K(u(l,t) - T/K)}_{\text{forma física (preferida)}}$$

donde K es una constante de proporcionalidad.

© Luis Miguel Villegas Silva

Para la ecuación de calor, este es un tipo de ley de enfriamiento de Newton, la taza en la que calor se intercambia en el extremo derecho es proporcional a la diferencia entre la temperatura en el extremo derecho de la barra, $u(l,t)$, y la temperatura T/K del medio circundante. Para problemas reales de conducción de calor (aquellos que obedecen la ley de Fourier), debe ocurrir $K > 0$.



A la izquierda condición de Neumann. A la derecha condición de Robin.

En la forma física de una condición de Robin, el lado izquierdo siempre representa flux saliente normal a la frontera. El lado derecho debe ser proporcional a la diferencia entre u y el medio ambiente. La convección cobra sentido si K es positiva.

No cualquier combinación lineal de u y u_x en los extremos tienen significado físico. Por lo tanto, debemos especificar una condición de Robin con cuidado, si tratamos un modelo físico.

	Dirichlet	Neumann	Robin $K > 0$
Forma matemática	$u = T$	$u_x = R$	$u_x + Ku = T$
Forma física	$u = T$	$u_x = R$ (izquierda)	$u_x = K(u - T/K)$ (izquierda)
Forma física	$u = T$	$-u_x = R$ (derecha)	$-u_x = K(u - T/K)$ (derecha)

2.4. Condiciones de frontera periódicas

Las condiciones de frontera periódicas son una pareja de condiciones en cada extremo que requieren que la función u y su derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$ coincidan en los extremos; esto es,

$$u(0,t) = u(l,t) \qquad \text{y} \qquad u_x(0,t) = u_x(l,t)$$

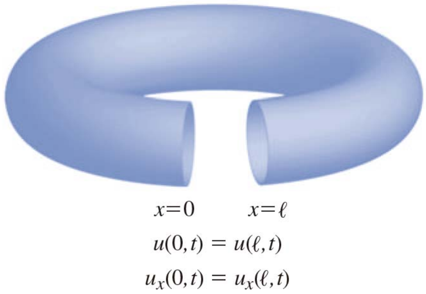
Para la ecuación (5), modelar la difusión de tinta en un tubo de longitud l, pensando que el tubo se dobla para formar un círculo. En $x = 0$ coincide $x = l$; por tanto, el valor de la solución u debe ser el mismo en $x = 0$ y $x = l$; el valor de u_x en $x = 0$ es igual a su valor en $x = l$.

2.5. Funciones hiperbólicas

Seguramente el lector ya encontró estas funciones en el curso de EDO, pero vale la pena recordarlas pues serán una compañia persistente durante este curso.

Comenzamos con su definición, del coseno y seno hiperbólicos.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{19}$$

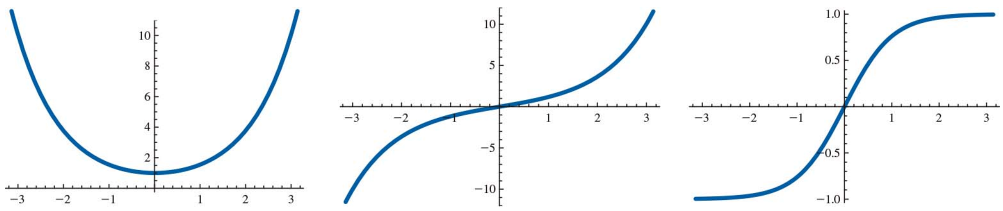


Condiciones periódicas

Se comportan, en buena medida, como las funciones trigonométricas usuales.

$$
\begin{aligned}
\tanh x &= \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \\
\cosh(-x) &= \cosh x \\
\operatorname{senh}(-x) &= -\operatorname{senh} x \\
\tanh(-x) &= -\tanh x \\
\cosh(0) &= 1 \\
\sinh(0) &= 0 \\
\frac{d\cosh x}{dx} &= \sinh x \\
\frac{d\sinh x}{dx} &= \cosh x
\end{aligned}
$$

Debe reconocer que siempre ocurre que $\cosh x \neq 0$, mientras que $\sinh x = 0$ y $\tanh x = 0$ cuando $x = 0$.



Gráfica de $\cosh x$, $\sinh x$ y $\tanh x$

Quizá su mayor utilidad es al resolver ciertos problemas con valores en la frontera. Por ejemplo, $y''(x) - 4y(x) = 0$. La ecuación característica es $r^2 - 4 = 0$, $r = \pm 2$, por lo que la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \tag{20}$$

Si usamos (19), podemos escribir esta solución como

$$y(x) = c_3 \cosh(2x) + c_4 \sinh(2x) \tag{21}$$

© Luis Miguel Villegas Silva

En ocasiones, será mejor trabajar con la solución (21) que con (20).

En esta primera lectura hemos introducido a las EDP y varias nociones asociadas a ello. Sería natural continuar el estudio de las mismas desarrollando métodos de solución. Por poco que hayamos visto, debe ser visible para el lector, que si los métodos de solución de las EDO son complicados y en ocasiones inexistentes, algo similar ocurre para las EDP. Dado que el tiempo del curso es muy limitado, es importante concentrarnos en aspectos que podamos llevar a buen término. Para empezar se debe reconocer que en la práctica, en ingeniería y en física, difícilmente se emplean métodos analíticos de solución. Generalmente se recurre a los métodos numéricos, por lo que estos son de suma importancia. Por ello merecen un estudio minucioso que sería imposble alcanzar en este curso; es poco juicioso tratar un tema así, sólo de pasada.

Hemos dejado de lado la parte matemática. Ésta es igualmente importante y también requeire de métodos muy avanzados que estan muy lejos de cubrirse en uno o dos cursos. Pero en el fundamento de ambas áreas, las aplicadas y las formales, están diversas construcciones, métodos, técnicas y resultados que veremos en este curso. No se debe caer en el exceso de formalismo, si se pretenden hacer aplicaciones, pero tampoco desdeñar, como lamentablemente se hace con frecuencia, los métodos elementales de solución de las EDP, como son separación de variables, transformadas integrales y el uso de funciones especiales. Concoer estos contenidos no sólo es recomendable, si no indispensable antes de abordar cualquier método numérico, pues proporcionan perspectivas y guías que impiden el mal uso de respuestas numéricas.

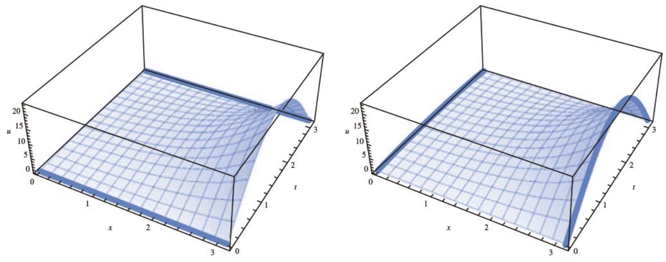
Nuestro estudio se concentrará mayormente en la solución de ciertas EDP de segundo orden, llamadas las ecuaciones de la física matemática: la ecuación de calor (parabólica), de Laplace (elíptica) y de onda (hiperbólica), así como las correspondientes ecuaciones no homogéneas. Los métodos de solución serán escencialmente separación de variables y transformadas integrales.

El método de separación de variables involucra dos técnicas o teorías que en sí mismas son importantes. No referimos a los problemas con valores propias (teoría de Sturm-Liouville) y las series de Fourier. Por ello, continuaremos el curso revisando ambas disciplinas.

Ejercicios

1. Suponga que u_1, u_2 son soluciones de la ecuación (1). Muestre que $c_1u_1 + c_2u_2$ también es solución, donde c_1, c_2 son constantes.
2. ¿Qué solución de (1) es igual a xe^{-x^2} en el eje x? Encuentre una solución de (1) que sea igual a t en el eje t.
3. Refiérase al ejemplo 2.0.4. Resuelva (1) usando $a = 1, b = 1, c = 1, d = -1$.
4. Derive la solución general de la ecuación dada usando un cambio de variable apropiado como en el ejemplo 2.0.4.

5. Establezca si las curvas resaltadas en la figura representan CI o CF.



Ejercicio 5

6. Considere la EDP $u_t + cu_x = 0$, donde $c > 0$ es una constante. Muestre que $u(x,t) = f(x - ct)$ es solución de la EDP, donde f es cualquier función diferenciable de una variable.

7. La EDP, $u_{tt} = u_{xx}$ aparece al modelar fenómenos ondulatorios, es la ecuación de onda. Confirme que $u(x,t) = (x+t)^4$ es solución.

8. Verifique que $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)$ es solución de la ecuación de calor $u_t = ku_{xx}$.

9. Corrobore que $u(x,y) = e^{-y}(\operatorname{sen} x + \cos x)$ satisface la EDP $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y las condiciones $u(x,0) = \operatorname{sen} t + \cos x$, $u(0,y) = u_x(0,y)$.

10. Considere la EDP en coordenadas polares para $u = u(r,\theta)$ dada por
$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$
Constate que $u(r,\theta) = \ln r$ y $u(r,\theta) = r\cos\theta$ son soluciones.

11. Escriba las siguientes EDP en la forma $u_t + \varphi_x = f$ e identifique el término flux.

    a) $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$

    b) $u_t - u_x e^{-u} = 0.$

    c) $u_t + \frac{u_x}{1+u^2} = |t|.$

12. (Ecuación del telegrafo) Mediante teoría de electricidad básica, se puede mostrar que la corriente $I(x,t)$ y el voltaje $V(x,t)$ en una línea de transmisión (por ejemplo, una línea de potencia o de telefono) en la posición x en la línea y tiempo t obedece las ecuaciones
$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial x} + C\frac{\partial V}{\partial t} + GV = 0,\\ \frac{\partial V}{\partial x} + L\frac{\partial I}{\partial t} + RI = 0,\end{aligned} \tag{$\circledast$}$$

© Luis Miguel Villegas Silva

donde C es la capacitancia por unidad de longitud, G son las pérdidas por unidad de longitud, y L es la inductancia por unidad de longitud.

a) Suponga que C, G, R, L on constantes. Elimine V en las ecuaciones para obtener la EDP

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (CR + GL)\frac{\partial I}{\partial t} + GRI.$$

[Sugerencia: Derive la primera ecuación con respecto a x, la segunda respecto a t, y combínelas para eliminar las derivadas mixtas V_{xt} y V_{tx}. Use la segunda ecuación para eliminar el término V_x restante.]

b) Como en el inciso previo, determine la EDP para el voltaje si se elimina I.

c) Si $R = 0$ y $G = 0$, este caso ideal se llama línea de transmisión sin pérdidas. Para líneas sin pérdidas, muestre que (✻) se reduce a las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

donde $c = \sqrt{\frac{1}{CL}}$.

13. Considere la ecuación de calor 1D para una barra de longitud l. Suponga que el extremos izquierdo está aislado, por lo que no fluye energía calorífica en ese extremo. Escriba las CF que modelen el escenario.

14. Construya la EDP y las CF que modelen la siguiente situación. La temperatura $u = y(x, t)$ en una barra de longitud l, donde el extremo izquierdo tiene convección con el entorno cuya temperatura es $M(t)$. El extremo derecho tiene un termostato adosado que lo mantiene a temperatura $f(t)$.

15. En el contexto de la ecuación de calor 1D para una barra de longitud l, haga coincidir las siguientes CF con la correspondiente situación física. Los incisos romanos se pueden usar más de una vez.

a) $u(0, t) = 1$

b) $-u(0, t) = 1$

c) $u_x(0, t) = 1$

d) $-u_x(0, t) = 1$

e) $u_x(l, t) = 1$

f) $-u_x(l, t) = 1.$

g) $u_x(0, t) = u(0, t) - 1$

h) $u_x(l, t) = u(l, t) - 1.$

© Luis Miguel Villegas Silva

(I) Temperatura fija igual a 1

(II) Flujo saliente fijo igual a 1.

(III) Convección real con entorno a temperatura 1

(IV) Convección no real con entorno a a temperatura 1

(V) Temperatura de fija de -1

(VI) Flujo entrante de 1

(VII) ninguna de las anteriores.

16. Sin resolver la EDP, usando tan sólo intuición, conteste lo siguiente.

    (a) Determine $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ para $u_t = u_{xx}$, $u(0,t) = T_1$, $u_x(l,t) = T_2$;

    (b) Determine $lim_{t\to\infty} u(x,t)$ para $u_t = u_{xx}$, $u_x(0,t) = 0$, $-u_x(l,t) = u(l,t) - 100$.

17. Interprete las condiciones periódicas para la ecuación de onda 1D

18. Resuelva la edo $y'' - 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 1$.

    a) Escriba la solución general como combinación lineal de funciones exponenciales.

    b) Encuentre la solución particular usando las condiciones dadas.

    c) Escriba la solución general como combinación lineal de coseno y seno hiperbólicos.

    d) Determine la solución particular a partir del inciso previo usando las condiciones dadas.

    e) reflexione sobre qué fue más fácil.

© Luis Miguel Villegas Silva