4

Teoría de Sturm-Liouville

Definición 4.0.1. Una EDO de segundo orden y homogénea esta en forma auto adjunta si tiene la forma

$$p(x)y'' + p'(x)y' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0. \qquad x_1 < x < x_2$$

o , en forma equivalente

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0, \qquad x_1 < x < x_2$$

donde $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en (x_1, x_2), $p'(x), q(x)$ y $r(x)$ son continuas en $[x_1, x_2]$.

A pesar de que parece muy restrictiva, la forma auto adjunta es suficientemente general para incluir a la mayoría de las EDO de segundo orden. Por ejemplo, la ecuación general con valores propios es de la forma

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + [A_0(x) + \lambda]y = 0 \tag{60}$$

donde $A_0(x), A_1(x)$ y $A_2(x)$ son continuas en $[x_1, x_2]$, y $A_2(x) > 0$ en este intervalo. Esta EDO no está en forma auto adjunta, a menos que $A_1(x) = A_2'(x)$. Sin embargo, podemos transformar (60) en forma auto adjunta, si la multiplicamos por $\mu(x) = p(x)/A_2(x)$, dando lugar a

$$p(x)y'' + \mu(x)A_1(x)y' + \mu(x)[A_0(x) + \lambda]y = 0 \tag{61}$$

La ecuación (61) está en forma auto adjunta si escogemos $p(x)$ de tal suerte que

$$p'(x) = \mu(x)A_1(x) = \frac{p(x)A_1(x)}{A_2(x)} \tag{62}$$

Si resolvemos esta EDO en $p(x)$, obtenemso

$$p(x) = \exp\left[\int \frac{A_1(x)}{A_2(x)}dx\right] \tag{63}$$

Si comparamos (61) con la forma auto adjunta, identificamos las funciones

$$q(x) = \mu(x)A_0(x) = \frac{p(x)A_0(x)}{A_2(x)} \tag{64}$$

y

$$r(x) = \mu(x) = \frac{p(x)}{A_2(x)} \tag{65}$$

Por convenienci, introducimos el operador diferencial (otra vez, $D = d/dx$)

$$L = D[p(x)D] + q(x) \tag{66}$$

llamado el operador auto adjuto. En términos de L, expresamos la EDO en forma auto adjunta en forma compacta

$$L[y] + \lambda r(x)y = 0 \tag{67}$$

Ejemplo 4.0.2. Ponga la EDO $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$, $x > 0$ en forma auto adjunta.

Por (63), primero determinamos

$$p(x) = \exp\left(\frac{1}{x}dx\right) = x$$

Así, $\mu(x) = p(x)/A_2(x) = 1/x$, y multiplicamos la EDO por $\mu(x)$ para obtener

$$xy'' + y' + \left(\frac{\lambda}{x}\right) = 0$$

o, en forma equivalente

$$\frac{d}{dx}(xy') + \left(\frac{\lambda}{x}\right)y = 0.$$

Definición 4.0.3. Una operador auto adjunto L es simétrico en $[x_1, x_2]$ si

$$\int_{x_1}^{x_2}(uL[v] - vL[u])dx = 0$$

para cualesquier funciones u, v con segunda derivada continua en el intervalo y que satisfagan las CF asociadas con L.

Aunque la definición de operador simétrico se relaciona al operador L, después veremos que está propiedad está estrechamente relacionada a la clase de CF prescritas con L. En este sentido, un operador L puede ser simétrico respecto a unas CF y no serlo respecto a otras.

Ejemplo 4.0.4. Determine si el operador auto adjunto $L = D^2$ es simétrico en $[0, 1]$ respecto a las siguientes CF.

(a) $y(0) = 0 = y(1)$.

(b) $y(0) - y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.

Sustituimos $L = D^2$ en la integral de la definición y usamos integración por partes,

$$\begin{aligned}\int_0^1 [u(x)v''(x) - v(x)u''(x)]dx &= u(x)v'(x) - v(x)u'(x)\Big|_0^1 \\ &= [u(1)v'(1) - v(1)u'(1)] \\ &\quad - [u(0)v'(0) - v(0)u'(0)].\end{aligned}$$

Para las CF en (a), se sigue que u, v satisfacen $u(0) = v(0) = 0$ y $u(1) = v(1) = 0$, por lo que el lado derecho de la integral arriba se anula y concluimos que $L = D^2$ es simétrico en este caso.

Para (b), las CF conducen a $u(0) - u(1) = 0$, $v(0) - v(1) = 0$, y $u'(1) = v'(1) = 0$; con estas relaciones, la integral arriba se reduce a

$$\int_0^1 [u(x)v''(x) - v(x)u''(x)]dx = v(0)u'(0) - u(0)v'(0).$$

Como el lado derecho no es necesariamente cero, deducimos que $L = D^2$ no es simétrico en este caso.

Lema 4.0.5 (Identidad de Lagrange). *Si $L = D[p(x)D] + q(x)$ está definido en el intervalo $[x_1, x_2]$ y si u, v son funciones con segunda derivada continua en $[x_1, x_2]$, entonces*

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx}[p(x)W(u,v)(x)],$$

donde $W(u, v) = uv' - u'v$ es el Wronskiano.

Demostración. Dado que $L = D[p(x)D] + q(x)$, se cumple

$$\begin{aligned}uL[v] - vL[u] &= u\frac{d}{dx}(pv') + uqv - v\frac{d}{dx}(pu') - vqu \\ &= \frac{d}{dx}(pv'u - pu'v) \\ &= \frac{d}{dx}[p(x)W(u,v)(x)]\end{aligned}$$

lo que se quería demostrar.

A partir de la identidad de Lagrange, deducimos lo siguiente,

$$\int_{x_1}^{x_2} (uL[v] - vL[u])dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}[p(x)W(u,v)(x)]dx,$$

de donde se desprende

$$\int_{x_1}^{x_2} (uL[v] - vL[u])dx = p(x)W(u,v)(x)\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{68}$$

que se conoce como la fórmula de Green, una especie de versión 1D del teorema de Green en el plano. El siguiente resultado es una consecuencia de la fórmula de Green.

Teorema 4.0.6. *Un operador auto adjunto $L = D[p(x)D] + q(x)$ es simétrico en $[x_1, x_2]$ si y sólo si*

$$p(x)W(u,v)(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

para cualesquier funciones u, v que satisfagan las CF prescritas asociadas a L y tengan segunda derivada continua en $[x_1, x_2]$.

Existen varias propiedades relevantes de un operador simétrico, en particular, respecto a valores propios y funciones propias, donde destaca la ortogonalidad de tales operadores.

Definición 4.0.7. Si f, g son funciones integrables en (x_1, x_2), diremos que ellas son ortogonales en este intervalo si

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx = 0;$$

y decimos que son ortogonales respecto a la función $r(x) > 0$ (función peso) si

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x)f(x)g(x)dx = 0$$

El intervalo en esta definición puede ser infinito, o con algún extremo (o ambos) cerrados.

Ejemplo 4.0.8. Muestre que $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ y $g(x) = \cos x$ son otogonales en $(-\pi, \pi)$ con función peso $r(x) = 1$.

Usamos la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, para obtener

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2x \cos x dx &= 2\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos^2 x dx \\ &= -\frac{2}{3}\cos^3 x\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo que queríamos comprobar.

Ejemplo 4.0.9. Muestre que $f(x) = 1$ y $g(x) = 1 - x$ son ortogonales en $(0, \infty)$ con función peso $r(x) = e^{-x}$.

Usamos integración por partes,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x}(1-x)dx &= -(1-x)e^{-x}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-x}dx \\ &= 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

La enorme importancia de la ortogonalidad se hará visible cuando estudiemos series de Fourier y series generalizadas de Fourier. En lo que sigue, concerniente a funciones ortogonales, el interés principal es en la ortogonalidad de las funciones propias $\{\varphi_n(x)\}$ de un operador simétrico de Sturm-Liouville.

Teorema 4.0.10 (Ortogonalidad). *Sea L un operador simétrico en el intervalo $[x_1, x_2]$ asociado con la ecuación propia*

$$L[y] + \lambda r(x)y = 0, \qquad x_1 < x < x_2$$

Si λ_n, λ_k son valores propios distintos de L con funciones propias correspondientes $\varphi_n(x), \varphi_k(x)$, respectivamente, entonces $\varphi_n(x), \varphi_k(x)$ son ortogonales, es decir,

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x)\varphi_n(x)\varphi_k(x)dx = 0, \qquad n \neq k$$

Demostración. Las funciones propias $\varphi_n(x), \varphi_k(x)$ satisfacen las relaciones

$$L[\varphi_n(x)] = -\lambda_n r(x)\varphi_n(x)$$
$$L[\varphi_k(x)] = -\lambda_k r(x)\varphi_k(x)$$

Si multiplicamos la primera por $\varphi_k(x)$ y la segunda $\varphi_n(x)$, restamos la expresión resultante, e integramos en el intervalo de interés, llegamos a

$$\int_{x_1}^{x_2} (\varphi_k(x)L[\varphi_n(x)] - \varphi_n(x)L[\varphi_k(x)])dx =$$
$$(\lambda_k - \lambda_n)\int_{x_1}^{x_2} r(x)\varphi_n(x)\varphi_k(x)dx.$$

Ya que L es simétrico, la integral a la izquierda es cero, por lo que

$$(\lambda_k - \lambda_n)\int_{x_1}^{x_2} r(x)\varphi_n(x)\varphi_k(x)dx = 0.$$

Por hipótesis, $\lambda_n \neq \lambda_k$, de donde se deduce que la integral se anula.

Antes supusimos que los valores propios son reales, ahora formulamos esta afirmación para operadores simétricos.

Teorema 4.0.11. *Los valores propios de un operador simétrico son reales.*

Demostración. Supongamos que la afirmación del teorema es falsa, que existe un valor propio λ_k complejo con función propia asociada $\varphi_k(x)$, es decir,

$$L[\varphi_k(x)] + \lambda_k r(x)\varphi_k(x) = 0$$

Ya que el operador L consiste en funciones reales, su conjugado complejo $\overline{L}$ es L. Por tanto, si tomamos el conjugado complejo de la ecuación arriba, obtenemos

$$\overline{L[\varphi_k(x)] + \lambda_k r(x)\varphi_k(x)} = L\overline{[\varphi_k(x)]} + \overline{\lambda}_k r(x)\overline{\varphi_k(x)} = 0$$

Se desprende que $\varphi_k(x)$ y $\overline{\varphi_k(x)}$ corresponden a valores propios distintos λ_k, $\overline{\lambda_k}$, respectivamente, por lo que son necesariamente ortogonales debido a la simetría de L. Esto significa que

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x)\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(x)}dx = \int_{x_1}^{x_2} r(x)|\varphi_k(x)|^2 dx = 0$$

pero el integrando es positivo, así que la integral no puede ser cero, una contradicción. Se sigue que no pueden existir valores propios complejos.

Sabemos que, en caso de existir, los valores propios de un operador simétrico son reales; pero ¿existe alguno?

Teorema 4.0.12. *Los valores propios de un operador simétrico conforman una sucesión creciente en magnitud,*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \cdots$$

y $\lambda_n \to \infty$ *conforme* $n \to \infty$.

4.0.1. Sistemas de Sturm-Liouville regulares

Aquellos problemas que involucran CF no mezcladas o separadas están caracterizadas por

$$\begin{aligned} L[y] + \lambda r(x)y = 0, &\qquad x_1 < x < x_2 \\ B_1[y] \equiv a_{11}y(x_1) + a_{12}y'(x_1) = 0 &\qquad a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0 \\ B_2[y] \equiv a_{21}y(x_2) + a_{22}y'(x_2) = 0 &\qquad a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0 \end{aligned} \tag{69}$$

donde $L = D[p(x)D] + q(x)$. Un problema que pertenece a esta clase se llama un sistema de Sturm-Liouville regular.

Las condiciones de frontera separadas ocurren en tres formas,

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ y' &= 0 \\ hy + y' &= 0 \qquad h \text{ constante} \end{aligned}$$

que se conocen como CF de primera, segunda y tercera clase, respectivamente. Cada clase de CF corresponde a un tipo diferente de restricción física en el extremo.

Para mostrar que el operador L asociado a un sistema SL regular es simétrico consideramos dos funciones u, v con segunda derivada continua que satisfacen las CF dadas en (69). En $x = x_1$, esto implica que

$$\begin{aligned} a_{11}u(x_1) + a_{12}u'(x_1) = 0 \\ a_{11}v(x_1) + a_{12}v'(x_1) = 0 \end{aligned}$$

dado que a_{11} y a_{12} no pueden ser cero simultáneamente, se desprende que el determinante de coeficientes se anula, es decir,

$$\begin{vmatrix} u(x_1) & u'(x_1) \\ v(x_1) & v'(x_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u(x_1) & v(x_1) \\ u'(x_1) & v'(x_1) \end{vmatrix} = W(u,v)(x_1) = 0$$

Ahora consideramos la CF en $x = x_2$, procedemos en forma similar y confirmamos que $W(u,v)(x_2) = 0$. Esto corrobora que

$$p(x)W(u,v)(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

lo que de acuerdo con el teorema 4.0.6 indica que L es simétrico.

En virtud de que un sistema SL regular tiene un operador simétrico, los valores y las funciones propias de tal sistema tienen las propeidades de los teoremas 4.0.10, 4.0.11 y 4.0.12.

Teorema 4.0.13. *Los valores propios de un sistema SL regular son simples, es decir, sólo una función propia corresponde a cada valor propio.*

Demostración. Suponga que $\varphi_n(x)$ y $\varphi_k(x)$ son funciones propias diferentes correspondientes al valor proio λ_n. En $x = x_1$, cada función propia debe satisfacer la CF prescrita, así que

$$a_{11}\varphi_n(x) + a_{12}\varphi_n'(x) = 0$$
$$a_{11}\varphi_k(x_1) + a_{12}\varphi_k'(x) = 0.$$

En vista de que a_{12}, a_{11} no pueden ser cero simultáneamente, el determinante de los coeficientes del sistema se debe anular, y como antes

$$W(\varphi_n, \varphi_k)(x) = 0.$$

Si el Wronskiano de dos soluciones se anula en algún punto de un intervalo, debe ser identicamente cero en este intervalo. Por tanto, $\varphi_n(x)$ y $\varphi_k(x)$ son linealmente dependientes, representan a la misma función.

4.0.2. Sistemas SL periódicos

La segunda clase de sistemas SL es de la forma

$$\begin{aligned} L[y] + \lambda r(x)y = 0, &\qquad x_1 < x < x_2 \\ y(x_1) = y(x_2), &\qquad y'(x_1) = y'(x_2) \end{aligned} \tag{70}$$

donde $L = D[p(x)D] + q(x)$ y

$$p(x_1) = p(x_2).$$

Tales problemas se llaman sistemas SL periódicos. El lector debe verificar que el operador L asociado es simétrico.

Una primera diferencia entre los sistemas SL regulares y periódicos es que en estos últimos las funciones propias correspondientes a un valor propio no necesarimente son únicas.

Ejemplo 4.0.14. En un instante de tiempo, las deflexiones transversales de una mebrana circular vibrando a una distancia fija del centro de la mebrana están relacionadas a la solución de la ecuación,

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad -\pi < \theta < \pi$$

donde $y = y(\theta)$ es una función del ángulo polar θ. Para asegurar que las deflexiones se comportan adecuadamente fisícamente, se establecen las CF

$$y(-\pi) = y(\pi), \qquad y'(-\pi) = y'(\pi).$$

Aquí, $p(\theta) = 1$, por lo que $p(-\pi) = p(\pi)$. cuando $\lambda = 0$, la solución general de la ED es

$$y = C_1 + C_2\theta$$

para satisfacer las CF periódicas, requerimos que

$$\begin{aligned} y(-\pi) - y(\pi) &= -2C_2\pi = 0 \\ y'(-\pi) - y'(\pi) &= C_2 - C_2 = 0 \end{aligned}$$

que implican $C_2 = 0$, mientras que C_1 es arbitraria. En consecuencia,

$$\lambda_0 = 0, \qquad \varphi_0(\theta) = 1$$

Para $\lambda = k^2 > 0$, la solución general toma la forma

$$y = C_1 \cos k\theta + C_2 \operatorname{sen} k\theta$$

Esta vez, las CF conducen a

$$C_1 \operatorname{sen} k\pi = 0, \qquad C_2 \operatorname{sen} k\pi = 0$$

Por consiguiente, para $k = n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ tanto C_1 como C_2 son arbitrarias. Concluimos que para cada valor propio

$$\lambda_n = n^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

corresponden dos funciones propias, que en el caso general podemos escribir como

$$\varphi_n(\theta) = C_1 \cos n\theta + C_2 \operatorname{sen} n\theta, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

y

$$\psi_n(\theta) = C_3 \cos n\theta + C_4 \operatorname{sen} n\theta, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes tales que $\varphi_n(\theta)$ y $\psi_n(\theta)$ son linealmente independientes. Queda como ejercicio verificar que no existen valores propios negativos.

En situaciones como las del ejemplo previo, se elige la combinación lineal más simple de funciones propias linealmente independientes. Por ejemplo, si elegimos $C_2 = C_3 = 0$ (y $C_1 = C_4 = 1$), obtenemos las funciones propias linealmente independientes

$$\begin{aligned} \varphi_n(\theta) &= \cos n\theta \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\ \psi_n(\theta) &= \operatorname{sen} n\theta, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Más aún, habiendo hecho esta elección se observa que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta \operatorname{sen} n\theta d\theta = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

que se verifica mediante técnicas simples de integración. En consecuencia, $\operatorname{sen} n\theta$ y $\cos n\theta$ no sólo son una combinación linealmente independiente simple sino que son ortogonales.

4.0.3. Sistemas SL singuares

Muchos problemas interesantes dan lugar a sistemas SL singulares (abajo se definen). Esta singularidad cambia la naturaleza del sistema, especialmente en las CF.

Definición 4.0.15. Un sistema SL es singular si ocurren una o más de las siguientes condiciones en el intervalo $[x_1, x_2]$.

(a) $p(x_1) = 0$ y/o $p(x_2) = 0$.

(b) $p(x), q(x)$ o $r(x)$ tienden a infinito en $x = x_1$ o $x = x_2$ (o ambas)

(c) x_1 o x_2 son infinito (o ambos).

Ejemplo 4.0.16. Algunos ejemplos de ED que corresponden a sistemas singulares.

- Ecuación de Legendre $\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] + \lambda y = 0$, $-1 < x < 1$ que es singular porque $p(x) = 1 - x^2$ es cero en ambos extremos $x = \pm 1$.

- Ecuación de Bessel $\frac{d}{dx}(xy') - \frac{\nu^2}{x}y + \lambda xy = 0$, $0 < x < b$. Es singular pues $p(x) = x$ se anula en $x = 0$ y para la función $\nu \neq 0$, la función $q(x) = -\nu^2/x$ se vuelve infinita en $x = 0$.

- Ecuación de Laguerre $\frac{d}{dx}(xe^{-x}y') + \lambda e^{-x}y = 0$, $0 < x < \infty$. Esta vez es singular en $x = 0$ porque $p(x) = xe^{-x}$ tiende a cero y uno de los extremos es infinito. Note que $p(x) = xe^{-x} \to 0$ conforme $x \to \infty$.

- Ecuación de Hermite $\frac{d}{dx}(e^{-x^2}y') + \lambda e^{-x^2}y = 0$, $-\infty < x < \infty$. La singularidad se debe enteramente a los extremos infinitos del intervalo, donde $p(x) = e^{-x^2} \to 0$ conforme $|x| \to \infty$.

Para asegurar que un sistema SL singular tenga un operador simétrico, requerimos que

$$\int_{x_1}^{x_2} (uL[v] - vL[u])dx = p(x)W(u,v)(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{71}$$

donde u, v son continuas con segunda derivada y que satisfacen las CF prescritas. Por ejemplo, si existe una singularidad en $x = x_1$, imponemos la CF

$$\lim_{x \to x_1^+} p(x)W(u,v)(x) = 0 \tag{72}$$

y

$$p(x_2)W(u,v)(x_2) = 0 \tag{73}$$

Cuando la singularidad aparece para $p(x_1) = 0$, entonces (72) se satisface, por ejemplo, si prescribimos

$$y(x), y'(x) \text{ son finitas conforme } x \to x_1^+ \tag{74}$$

y (73) se satisface si se impone una condición de la forma

$$a_{21}y(x_2) + a_{22}y'(x_2) = 0 \tag{75}$$

Por supuesto, se puede establecer otra CF distinta de (74) para satisfacer (72), pero generalmente otras condiciones son más restrictivas para permitir soluciones no triviales.

Para el caso de singularidad en $x = x_2$, se desarrollan observaciones similares. Por ejemplo, si $p(x_2) = 0$, requerimos que $y(x), y'(x)$ permanecen finitas conforme $x \to x_2$. Finalmente, si $p(x_1) = p(x_2) = 0$, imponemos las CF

$$y(x), y'(x) \text{ son finitas conforme } x \to x_1^+ \text{ y } x \to x_2 \tag{76}$$

Las singularidades aparecen con frecuencia cuando un punto frontera del problema no es realmente una frontera física. Por ejemplo, dentro de un dominio circular de radio b restringimos la variable r a $0 \leq r \leq b$. El punto $r = 0$ no es una CF física, pero es una frontera matemática. En tales casos, generalmente imponemos la condición de que la solución del problema esté acotada en $r = 0$.

En ocasiones, un sistema singular no involucra un operador simétrico. Por ejemplo, cuando consideramos la distribución de temperaturas en una barra muy larga que se modela matemáticamente como una barra infinita. En este caso, no es de esperarse que las funciones propias (si existen) y que los valores propios satisfagan las condiciones de los teoremas 4.0.10-4.0.12.

Ejemplo 4.0.17. Determine los valores propios y las funciones propias de

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad 0 < x < \infty, \qquad y(0) = 0 \quad y, y' \text{ son finitas conforme } x \to \infty$$

Para $\lambda = k^2 > 0$, la solución general es

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \operatorname{sen} kx$$

La primera CF requiere que $C_1 = 0$, así que

$$y = C_2 \operatorname{sen} kx$$

Tanto $y = C_2 \operatorname{sen} kx$ como $y' = kC_2 \cos kx$ son finitas conforme $x \to \infty$, por lo que concluimos que $\lambda = k^2$ es un valor propio para cualquier número real positivo k. La función correspondiente es

$$\varphi(x) = \operatorname{sen} kx$$

Queda como ejercicio mostrar que no hay valores propios $\lambda \leq 0$.

Este ejemplo ilustra que operadores no simétricos pueden dar lugar a resultados muy diferentes de aquellos asociados a operadores simétricos. Por ejemplo, los valores propios no son discretos como en el caso simétrico, si no que forman un continuo de valores propios. En el ejemplo el operador no es simétrico porque las CF no son apropiadas para satisfacer (71). Esto es, como $p(x) = 1$ para toda x, no se anula conforme $x \to \infty$.

Ejercicios

1. Transforme la ecuación a forma auto adjunta.

    a) $xy'' + \lambda y = 0,\ x > 0$
    b) $y'' - y' + \lambda y = 0$
    c) $(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0,\ -1 < x < 1$
    d) $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - n^2)y = 0,\ x > 0$
    e) $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0\ x > 0$

2. Verifique que un sistema SL periódico tiene un operador simétrico.

3. Si $r(x) \equiv 1$, verifique que las siguientes funciones conforman un sistema ortogonal en el intervalo $(0, \pi)$.

    a) $\varphi_n(x) = \operatorname{sen} nx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$
    b) $\varphi_n(x) = \cos nx,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

4. Un conjunto ortogonal de funciones $\{\varphi_n(x)\}$ que satisface a relación

$$\int_{x_1}^{x_2} [\varphi_n(x)]^2 dx = 1, n = 1, 2, 3, \ldots$$

    se llama normalizado en el intervalo dado. Determine las constantes C_n, de tal suerte que ocurre lo siguiente.

    a) $\varphi_n(x) = C_n \operatorname{sen} nx$ está normalizado en $(0, \pi)$.
    b) $\varphi_n(x) = C_n \cos nx$ está normalizado en $(0, \pi)$.

5. Sea $\{p_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$, un conjunto de polinomios que satisfacen las siguientes condiciones.

    a) $p_n(x)$ tiene grado n
    b) $p_n(1) = 1,\ n \in \mathbb{N}$
    c) $\int_{-1}^{1} p_n(x)p_k(x)dx = 0,\ n \neq k.$

    Determine los tres primeros miembros de este conjunto. [Sugerencia: ponga $p_0(x) = a_1$, $p_1(x) = b_1 + b_2x$, $p_2(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$ y descubra el valor de las constantes usando las propiedades recién dadas de los polinomios.]

6. Repita el ejercicio 5 para un conjunto de polinomios que satisface las siguientes propiedades.

    a) $p_n(x)$ tiene grado n

b) $\int_0^\infty e^{-x} p_n(x) p_k(x) dx = 0$, $n \neq k$

c) $\int_0^\infty e^{-x} [p_n(x)]^2 dx = 1$.

7. Si $L = D^4$, confirme que la identidad de Lagrange toma la forma

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx}(uv''' - u'''v - u'v'' + u''v').$$

Use este hecho para mostrar que si $\varphi_n(x)$, $\varphi_k(x)$ son funciones propias del problema (cuarto orden)

$$y^{(iv)} - \lambda y = 0, \qquad y(0) = y''(0) = 0, \qquad y(1) = y''(1) = 0$$

correspondientes a valores propios distintos λ_n, λ_k, entonces $\varphi_n(x)$, $\varphi_k(x)$ son ortogonales en $(0, 1)$. Aquí, un operador L de cuarto orden es auto adjunto si tiene la forma

$$L \equiv D^2[s(x)D^2] + D[p(x)D] + q(x).$$

8. Considere el problema

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(1) = 0.$$

Sin resolverlo explícitamente, muestre que si $\varphi_m(x)$ y $\varphi_n(x)$ son funciones propias correspondientes a λ_n, λ_n, respectivamente, $\lambda_m \neq \lambda_n$, entonces

$$\int_0^1 \varphi_m(x)\varphi_n(x) dx = 0.$$

[Sugerencia: Observe que

$$\varphi_m'' + \lambda_m \varphi_m = 0, \qquad \varphi_n'' + \lambda_n \varphi_n = 0$$

Multiplique la primera por φ_n, la segunda por φ_m, reste las dos e integre de 0 a 1 usando integración por partes y considerando las CF.]

9. En los siguientes incisos, muestre directamente que las funciones propias son ortogonales sin resolver explícitamente la EDO y establezca las condiciones de ortogonalidad.

a) $y'' + \lambda(1 + x)y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

b) $x^2 y'' + \lambda y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(2) = 0$.

c) $xy'' + y' + \lambda xy = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

10. Determine los valores propios y las funciones propias del sistema SL regular dado.

a) $y'' - 3y' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$

b) $x^2 y'' + 3xy' + \lambda y = 0$, $y(1) = 0$, $y(5) = 0$.

c) $\frac{d}{dx}[(x^2+1)y'] + \frac{\lambda}{x^2+1}y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$. [Sugerencia: haga $x = \tan\theta$.]

11. Confirme que $\lambda = 0$ es un valor propio del sistema SL regular

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + \lambda r(x)y = 0, \qquad y'(0) = 0 = y'(1).$$

12. Establezca los valores propios y las funciones propias del sistema SL periódico dado.

    a) $y'' + \lambda y = 0$, $y(-1) = y(1)$, $y'(-1) = y'(1)$.
    b) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$
    c) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.

13. Determine los valores propios y las funciones propias del sistema SL singular dado.

    a) $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$, y, y' finitas conforme $x \to 0^+$, $y(1) = 0$.
    b) $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, y, y' finitas conforme $x \to \infty$.

14. Establezca CF adecuadas para asegurar la ortogonalidad de las funciones propias resultantes.

    a) $\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] + \lambda y = 0, \qquad -1 < x < 1$
    b) $\frac{d}{dx}(xy') + \lambda xy = 0$, $0 < x < 1$