Matemáticas Discretas II
Tarea 1

13 de Junio, 2025

Nombre del alumnx: Martínez Buenrostro Jorge Rafael

Ejercicio 1: Criterio de la Integral

a) Serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$
Función: $f(x) = \frac{x}{e^x}$ (positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$).
Integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{e^x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}(x+1)\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{b+1}{e^b} + \frac{2}{e}\right) = \frac{2}{e}.$$

Conclusión: La serie converge.

b) Serie: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$
Función: $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ (positiva, continua y decreciente para $x \geq 2$).
Integral:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to\infty} [\ln|\ln x|]_2^b = \lim_{b\to\infty} (\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)) = \infty.$$

Conclusión: La serie diverge.

c) Serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{50}{n(n+1)}$
Función: $f(x) = \frac{50}{x(x+1)}$ (positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$).
Integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{50}{x(x+1)}\,dx = 50\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = 50 \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^b = 50 \ln 2.$$

Conclusión: La serie converge.

d) Serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$
Función: $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x+2)}$ (positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$).
Descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2}.$$

Integral:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\ln(x+1) + 2\ln(x+2)\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left(\frac{(b+2)^2}{b+1}\right) - \ln\left(\frac{9}{2}\right)\right] = \infty.$$

Conclusión: La serie diverge.

Ejercicio 2: Criterio de Comparación

a) Serie: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-1}$
Comparación con $\frac{1}{n^3}$: Para $n \geq 2$, $n^3 - 1 > \frac{n^3}{2}$, entonces $\frac{1}{n^3-1} < \frac{2}{n^3}$.
Conclusión: La serie converge.

b) Serie: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$
Comparación con $\frac{1}{n}$: Para $n \geq 3$, $\ln n > 1$, entonces $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$.
Conclusión: La serie diverge.

c) Serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$
Comparación con $\frac{1}{3^n}$: $3^n + 1 > 3^n$, entonces $\frac{1}{3^n+1} < \frac{1}{3^n}$.
Conclusión: La serie converge.

d) Serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4-5}{n^5}$
Simplificación: $\frac{n^4-5}{n^5} = \frac{1}{n} - \frac{5}{n^5}$.
Conclusión: La serie diverge.

Ejercicio 3: Criterio del Cociente

a) Serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$
Cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+3}{(n+1)^2}.$$

Límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+2n+1} = 0.$$

Conclusión: La serie converge.

b) Serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$
Cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e.$$

Conclusión: La serie diverge.

c) Serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n-1}$
Cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{2^n} = 2 \cdot \frac{2n-1}{2n+1}.$$

Límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2.$$

Conclusión: La serie diverge.

d) Serie: $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n$
Cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{3}{4}.$$

Límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{4}.$$

Conclusión: La serie converge.

Ejercicio 4: $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ es Contable

Argumento: $\mathbb{Z}$ es contable, y el producto cartesiano de dos conjuntos contables es contable. Se puede construir una biyección entre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ mediante una enumeración diagonal.

Ejercicio 5: $A = \{2^n \cdot 3^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es Contable

Observación: $2^n \cdot 3^n = 6^n$, entonces $A = \{6^n : n \in \mathbb{Z}\}$.
Función sobreyectiva: $f : \mathbb{Z} \to A$ definida por $f(n) = 6^n$.
Conclusión: $\mathbb{Z}$ es contable, entonces A es contable.

Ejercicio 6: $(0,1) \sim \mathbb{R}$

Función biyectiva: $f(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$.
Justificación: f es continua y estrictamente creciente en $(0,1)$, con $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

Ejercicio 7: Verdadero o Falso

a) $\mathbb{Q}$ es numerable. **Verdadero.**
Argumento: $\mathbb{Q}$ puede ponerse en correspondencia uno a uno con $\mathbb{N}$ mediante una enumeración diagonal de fracciones $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, y $\gcd(p,q) = 1$.

b) $\mathbb{Q} \cap [0,1)$ no es contable. **Falso.**
Contraejemplo: $\mathbb{Q} \cap [0,1)$ es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ (que es contable), por lo tanto es contable. Puede enumerarse como $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$.

c) Si A y B son contables, entonces $A \cup B$ es contable. **Verdadero.**
Argumento: Si $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$, entonces $A \cup B$ se enumera como $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ (eliminando duplicados).

d) Si A y B son contables, entonces $A \cap B$ es contable. **Verdadero.**
Argumento: $A \cap B \subseteq A$, y todo subconjunto de un conjunto contable es a lo más contable.

e) $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es contable. **Verdadero.**
Argumento: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Si $\mathbb{I}$ fuera contable, $\mathbb{R}$ sería contable (uniÃ³n de dos contables), contradiciendo el argumento diagonal de Cantor.

f) Sean A y B conjuntos con $A \subset B$. Si A no es contable, entonces B tampoco es contable.
Verdadero.
Argumento: Si B fuera contable, entonces $A \subseteq B$ serÃ-a contable, contradiciendo la hipótesis.