Redes Neuronales - TP1

Ej 2

1. Comprobar estadísticamente la capacidad de la red de Hopfield ‘82 calculando la cantidad máxima de patrones pseudo-aleatorios aprendidos en función del tamaño de la red. Obtener experimentalmente los resultados de la siguiente tabla (los valores de la tabla corresponden a una iteración con actualización sincrónica).

P_{error}	p_{max}/N
0.001	0.105
0.0036	0.138
0.01	0.185
0.05	0.37
0.1	0.61

2. Proponga una manera de generar patrones con distintos grados de correlación. Utilice el método propuesto para analizar cómo varía la capacidad de la red de Hopfield en función de la correlación entre patrones.

Mi idea es crear una clase que reciba un set de probabilidades de error y un tamaño de red particular, y devuelva la capacidad para cada umbral de error.

En lo que respecta a patrones, siempre se va a evaluar con patrones con una correlación determinada. un método los va a generar aleatoriamente, otro debería poder hacerlos con una correlación "custom".

Una aclaración importante: el primer inciso va a parecer desprolijo en comparación con este, pero es porque en ese prioricé tener algo funcionando. Ahora que entendí un poco más es más fácil colocar todo en una clase y operar desde ahí.

Para el inciso que genera vectores correlacionados se hace lo siguiente. Se suponen vectores X e Y generados de tal forma que toman valores discretos -1 y 1 con probabilidad $1/2$. Así, sus medias son cero y las varianzas son unitarias. Se plantea el coeficiente de correlación de pearson como:

$$corr_{coef} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} = E[X \cdot Y] - E[X]E[Y] = E[X \cdot Y]$$

Y ahora $E[X \cdot Y]$ se abre por esperanza total en:

$$E[X \cdot Y] = P(X=1)P(Y=1)(1)(1) * P(X=1)P(Y=-1)(1)(-1) * P(X=-1)P(Y=1)(-1)(1$$

Denomino $p = P(X=Y)$ la probabilidad de que los vectores concuerden en algún bit.

$$E[X \cdot Y] = p - (1-p) = 2p - 1$$

Entonces:

$$corr_{coef} = 2p - 1 \Leftrightarrow p = \frac{corr_{coef} + 1}{2}$$

De esta manera se puede tomar un vector X generado como se generaría cualquier vector aleatorio y luego se genera un Y en base a la probabilidad de que concuerde con el X. Si $x = 1$ se tira una moneda de probabilidad p de que $y = x$.

In [1]:
```
# primero importamos numpy y algo para leer imágenes y hacer graficos
import numpy as np
from PIL import Image
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
```

In [ ]:
```
class evaluacion_capacidad_red_neuronal:
    def __init__(self, cantidad_neuronas):
        self.N = cantidad_neuronas
        self.W = None
        self.seed_vector = None


    def estado_aleatorio(self,correlacion=0):
        """permite generar estados para entrenar una red. devuelve una matriz lista para ser u

        N =self.N # cantidad de neuronas
        rng = np.random.default_rng()  # generador de números aleatorios

        if correlacion == 0:
            # Caso sin correlación: generamos vector completamente aleatorio
            vector = np.asarray(rng.integers(2, size=N)).reshape(-1, 1)
            return vector * 2 - 1  # de -1 a 1

        else:
            # Caso con correlación: generamos vector correlacionado con seed_vector
            p = (1 + correlacion) / 2  # Probabilidad de coincidir con la semilla

            seed_flat = self.seed_vector.flatten()
            mascara = rng.random(size=N) < p

            # Aplicar la regla con arrays 1D
            vector_correlacionado = np.where(mascara, seed_flat, -seed_flat)

            # Reconvertir a forma de columna
            return vector_correlacionado.reshape(-1, 1)


    def calcular_W(self, patrones, eta = 1):
        """
        Para calcular la W correspondiente a los patrones recibidos. Se asume que el formato e
        Se supone un "eta" unitario por comodidad.
        """
        n_neuronas = self.N
        n_patrones = patrones.shape[1]

        X = patrones
        W = (X @ X.T - n_patrones*np.eye(n_neuronas)) * eta
        self.W = W

        return




    def step_red_neuronal(self, patron_inicial):
        """
        Patrón inicial debe ser vector columna.
        """
        estado = np.copy(patron_inicial)
```

```python
        estado = self.W @ estado
        estado = np.sign(estado)
        estado = np.where(estado == 0, 1, estado)  # Manejar ceros
        return estado


    def agregar_columna(self, datos,correlacion=0):
        """Esto lo uso para agregar de a 1 patron a la vez y no tener que hacer muchos randoms
        rnd = self.estado_aleatorio(correlacion=correlacion)
        datos = np.hstack((datos, rnd))
        return datos,rnd # debería ser cómodo para cuando itere para encontrar cuando fallan l

    def comprobar_memoria(self, original):
        salida = self.step_red_neuronal(original)
        cant_bits_erroneos = np.sum(np.abs(original-salida)/2) # si hago la diferencia y divid
        # la cantidad de bits diferentes porque 1+1 = 2 ,1-1 = 0 ,-1-1 = -2
        return cant_bits_erroneos

    def actualizar_W(self, nuevo_patron, eta=1):
        """
        Actualiza la matriz de pesos de una red de Hopfield con un nuevo patrón. para optimiza

        Parámetros
        ----------
        W_vieja : np.ndarray
            Matriz de pesos ya entrenada (N x N).
        nuevo_patron : np.ndarray
            Patrón nuevo en forma de vector columna (N x 1), con valores en {-1, +1}.
        eta : float
            Factor de aprendizaje (default=1).

        Retorna
        -------
        np.ndarray
            Nueva matriz de pesos W actualizada.
        """
        W_vieja = self.W
        n_neuronas = W_vieja.shape[0]
        x = nuevo_patron.reshape((n_neuronas, 1))

        # Hebb incremental con eliminación de autoconexiones
        W_nueva = W_vieja + eta * (x @ x.T - np.eye(n_neuronas))

        self.W = W_nueva
        return



    def _estimar_errores_vs_patrones_correlacionados(self,correlacion, max_patron = -1):
        """
        Se usa para patrones correlacionaas, no quise mezclarla con la de descorrelacionados p
        sino se vuelve muy voluminosa
        """
        if max_patron == -1:
            max_patron = self.N

        lista_cant_patrones = []
        lista_errores = []
        datos = None

        for i in range(max_patron):
            if i == 0:
                datos = self.estado_aleatorio(correlacion=0) # la semilla no requiere estar co
                self.seed_vector = datos # la semilla para los proximos estados, asi todo esto
                self.calcular_W(datos) # la mete en el self
            else:
```

```
            datos,rnd = self.agregar_columna(datos,correlacion=correlacion) # rnd es el nu
            self.actualizar_W(rnd)


        # acá tenemos una matriz que va a ir aumentando en cantidad de patrones con las it
        # ahora invoco el cálculo de W


        # ahora lo que quiero es iterar por la cantidad de patrones en i y sumar la cantid
        errores_totales_bits = 0
        for k in range(i):
            estado_original_actual = datos[:,k] # el patrón k-ésimo
            error_actual = self.comprobar_memoria(estado_original_actual) # vamos a ir sum
            error_actual = error_actual/(self.N * (i+1))
            errores_totales_bits = errores_totales_bits+error_actual

        lista_errores.append(errores_totales_bits)
        lista_cant_patrones.append(i+1)

    return lista_errores,lista_cant_patrones


def _estimar_errores_vs_patrones_descorr(self, max_patron = -1):
    """
    Separada de la de patrones descorrelacionados para que no sea muy grande.
    """
    if max_patron == -1:
        max_patron = self.N

    lista_cant_patrones = []
    lista_errores = []
    datos = None # para que no lo llame unbound
    for i in range(max_patron):

        if i == 0:
            datos = self.estado_aleatorio(correlacion=0)
            self.calcular_W(datos) # la mete en el self
        else:
            datos,rnd = self.agregar_columna(datos,correlacion=0) # rnd es el nuevo estado
            self.actualizar_W(rnd)


        # acá tenemos una matriz que va a ir aumentando en cantidad de patrones con las it
        # ahora invoco el cálculo de W


        # ahora lo que quiero es iterar por la cantidad de patrones en i y sumar la cantid
        errores_totales_bits = 0
        for k in range(i):
            estado_original_actual = datos[:,k] # el patrón k-ésimo
            error_actual = self.comprobar_memoria(estado_original_actual) # vamos a ir sum
            error_actual = error_actual/(self.N * (i+1))
            errores_totales_bits = errores_totales_bits+error_actual

        lista_errores.append(errores_totales_bits)
        lista_cant_patrones.append(i+1)

    return lista_errores,lista_cant_patrones


def estimar_errores_vs_patrones(self, max_patron = -1, correlacion = 0):
    """
    La función principal de la clase, calcula las capacidades y errores para una correlaci
    el default de cant de patrones "max_patron" es -1 porque internamente se interpreta co
    """
    if correlacion == 0:
```

```
            lista_errores,lista_cant_patrones = self._estimar_errores_vs_patrones_descorr()
        else:
            lista_errores,lista_cant_patrones = self._estimar_errores_vs_patrones_correlaciona



        return lista_errores,lista_cant_patrones

    def capacidad_dada_proba(self,lista_errores, lista_cant_patrones, prob_error_max):
        """
        Dada una curva de errores vs patrones, devuelve la máxima cantidad
        de patrones que se pueden almacenar sin superar un error dado.

        Parámetros
        ----------
        lista_errores : list[float]
            Lista de probabilidades de error acumuladas (salida de estimar_errores_vs_patrones
        lista_cant_patrones : list[int]
            Lista con la cantidad de patrones correspondientes.
        prob_error_max : float
            Probabilidad máxima de error permitida (ej: 0.05).

        Retorna
        -------
        int
            Cantidad máxima de patrones que cumple la condición.
        """
        capacidad = 0
        for err, cant in zip(lista_errores, lista_cant_patrones):
            if err <= prob_error_max:
                capacidad = cant
            else:
                break
        return capacidad


    def generar_patrones_correlacionados(self, cantidad, correlacion):
        """
        Genera 'cantidad' patrones binarios (-1,1) con una correlación aproximada 'correlacion
        correlacion: valor entre 0 (totalmente aleatorio) y 1 (idéntico al patrón base).
        """
        N = self.N
        rng = np.random.default_rng()
        patron_base = rng.choice([-1, 1], size=(N, 1))
        patrones = [patron_base]
        p = (1 - correlacion) / 2
        for _ in range(cantidad - 1):
            ruido = rng.random((N, 1)) < p
            nuevo_patron = np.where(ruido, -patron_base, patron_base)
            patrones.append(nuevo_patron)
        return np.hstack(patrones)
```

In [3]:
```
n_neuronas = 200
ERN = evaluacion_capacidad_red_neuronal(n_neuronas)
```

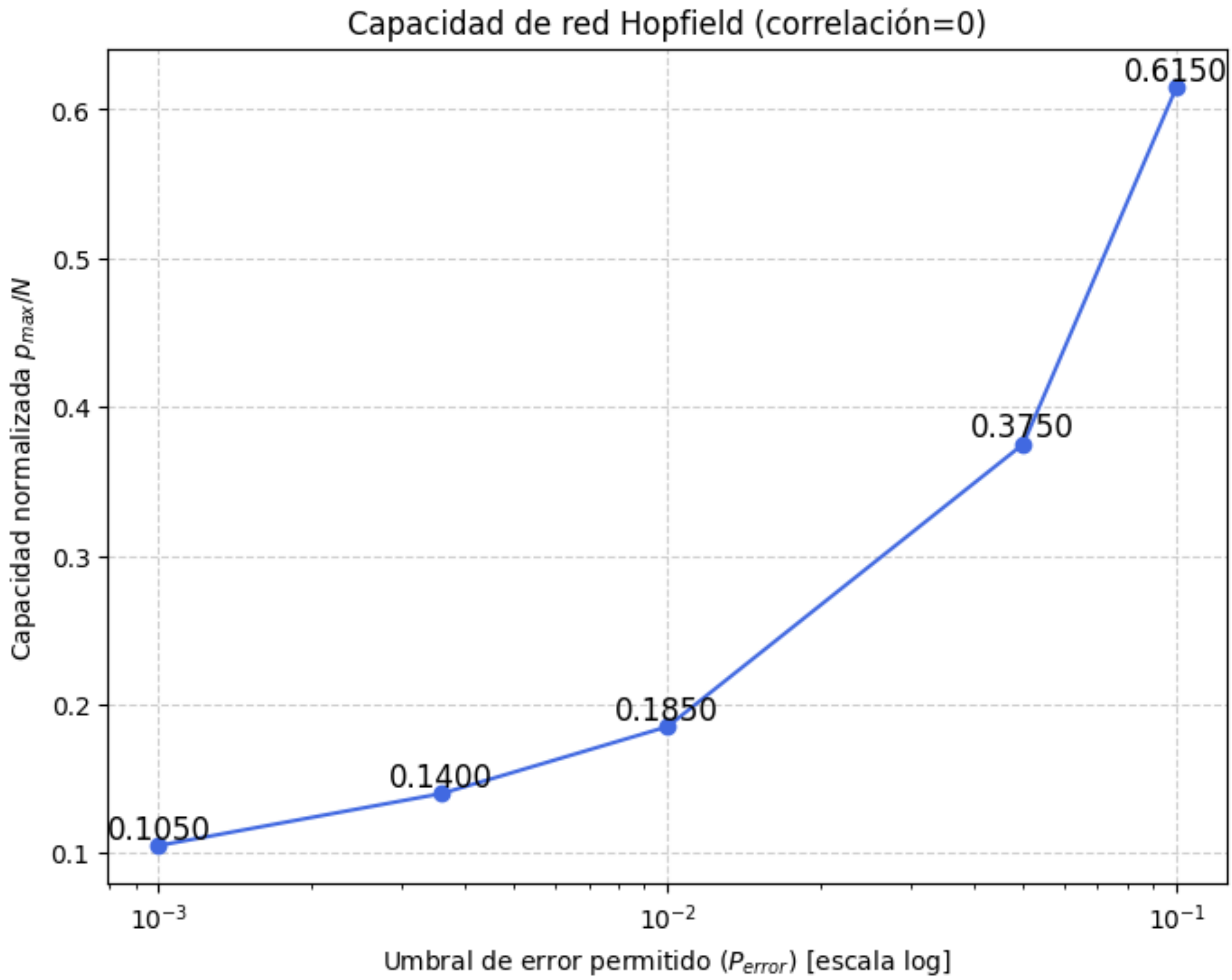
In [ ]:
```
def experimento(modelo:evaluacion_capacidad_red_neuronal,correlacion, umbrales =  [0.001,0.003
    """
    Esta función hace el experimento de barrer varios umbrales de capacidad.
    """
    n_neuronas = modelo.N
    if correlacion == 0:
        errores, n_patrones = modelo.estimar_errores_vs_patrones()
    else:
        errores, n_patrones = modelo.estimar_errores_vs_patrones(correlacion=correlacion)
```

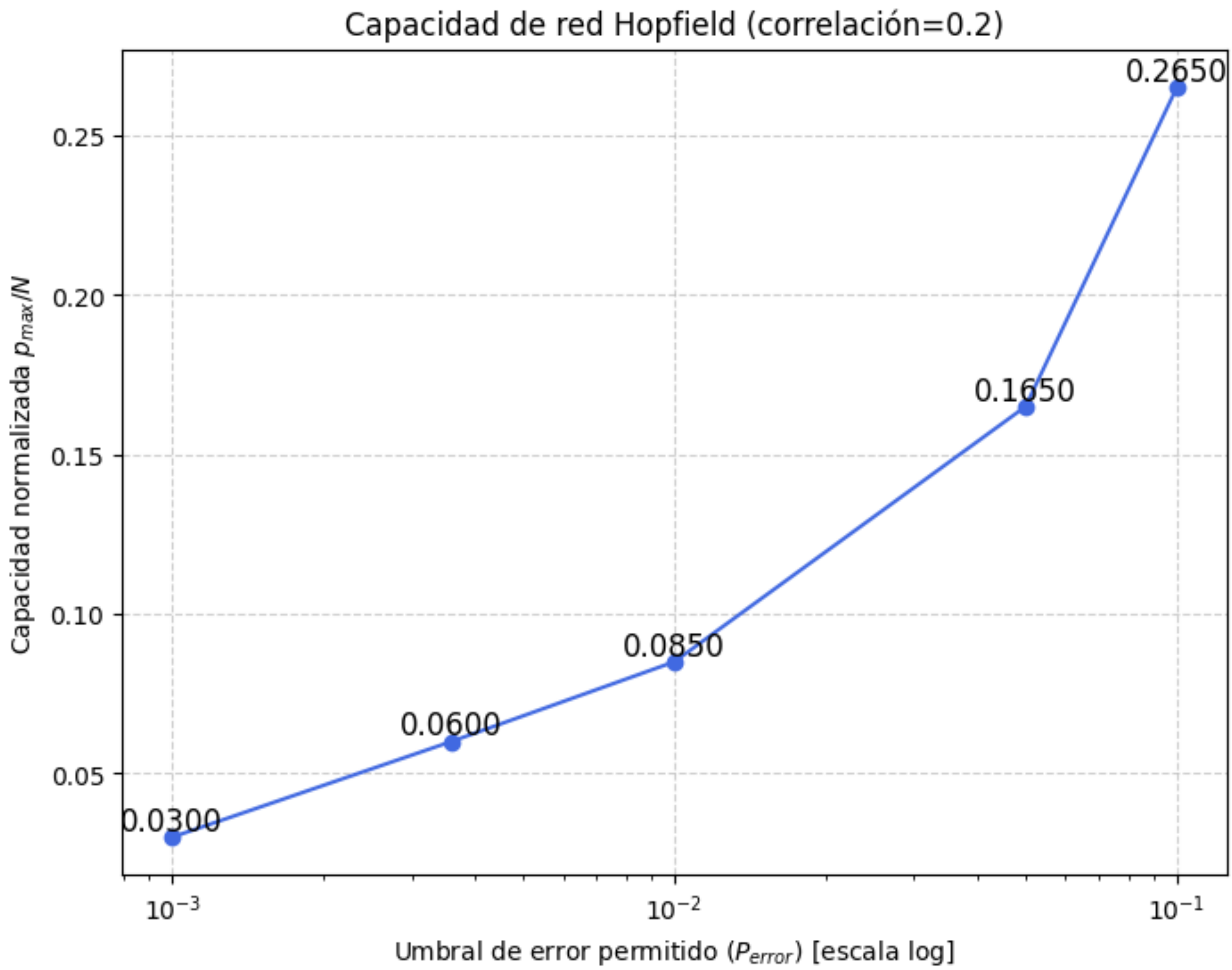
```
    errores = np.array(errores)
    for _ in range(cant_redes-1):
        err2,_ = modelo.estimar_errores_vs_patrones(correlacion=correlacion)
        errores += np.array(err2)
    errores_promediado = errores / cant_redes # promedio del error

    capacidades = []
    capacidades_norm = []
    for umbral in umbrales:
        cap = modelo.capacidad_dada_proba(errores_promediado, n_patrones, umbral)
        capacidades.append(cap)
        capacidades_norm.append(cap/n_neuronas)



    return errores_promediado,n_patrones,capacidades,capacidades_norm, umbrales
```

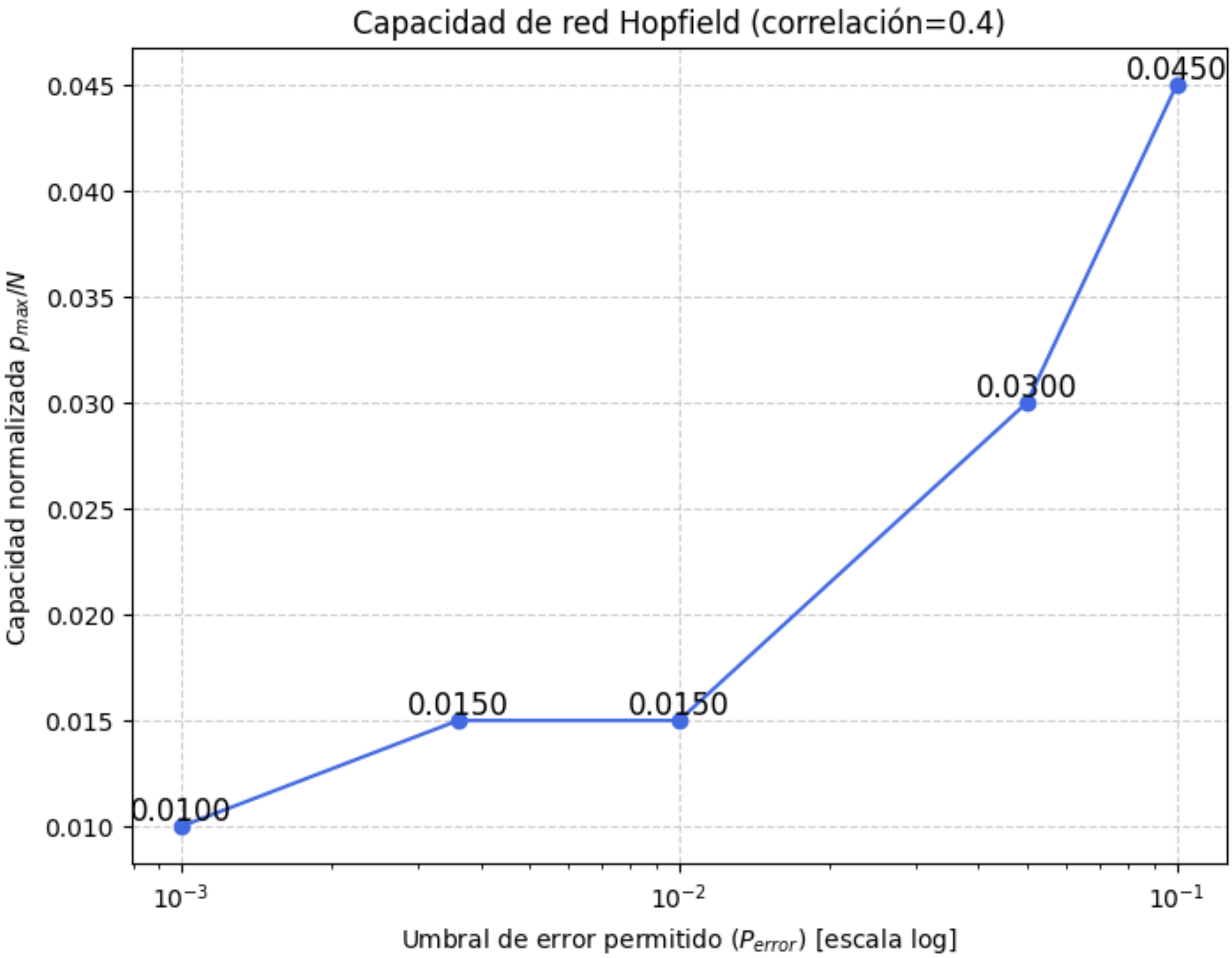
In [5]:
```
# Con paso de 0.2 (menos ejecuciones, más representativo)
resultados_00, n_patrones_00, _, capacidades_00, umbrales_00 = experimento(ERN, correlacion=0)
resultados_02, n_patrones_02, _, capacidades_02, umbrales_02 = experimento(ERN, correlacion=0.
resultados_04, n_patrones_04, _, capacidades_04, umbrales_04 = experimento(ERN, correlacion=0.
resultados_06, n_patrones_06, _, capacidades_06, umbrales_06 = experimento(ERN, correlacion=0.
resultados_08, n_patrones_08, _, capacidades_08, umbrales_08 = experimento(ERN, correlacion=0.
resultados_10, n_patrones_10, _, capacidades_10, umbrales_10 = experimento(ERN, correlacion=1.
```

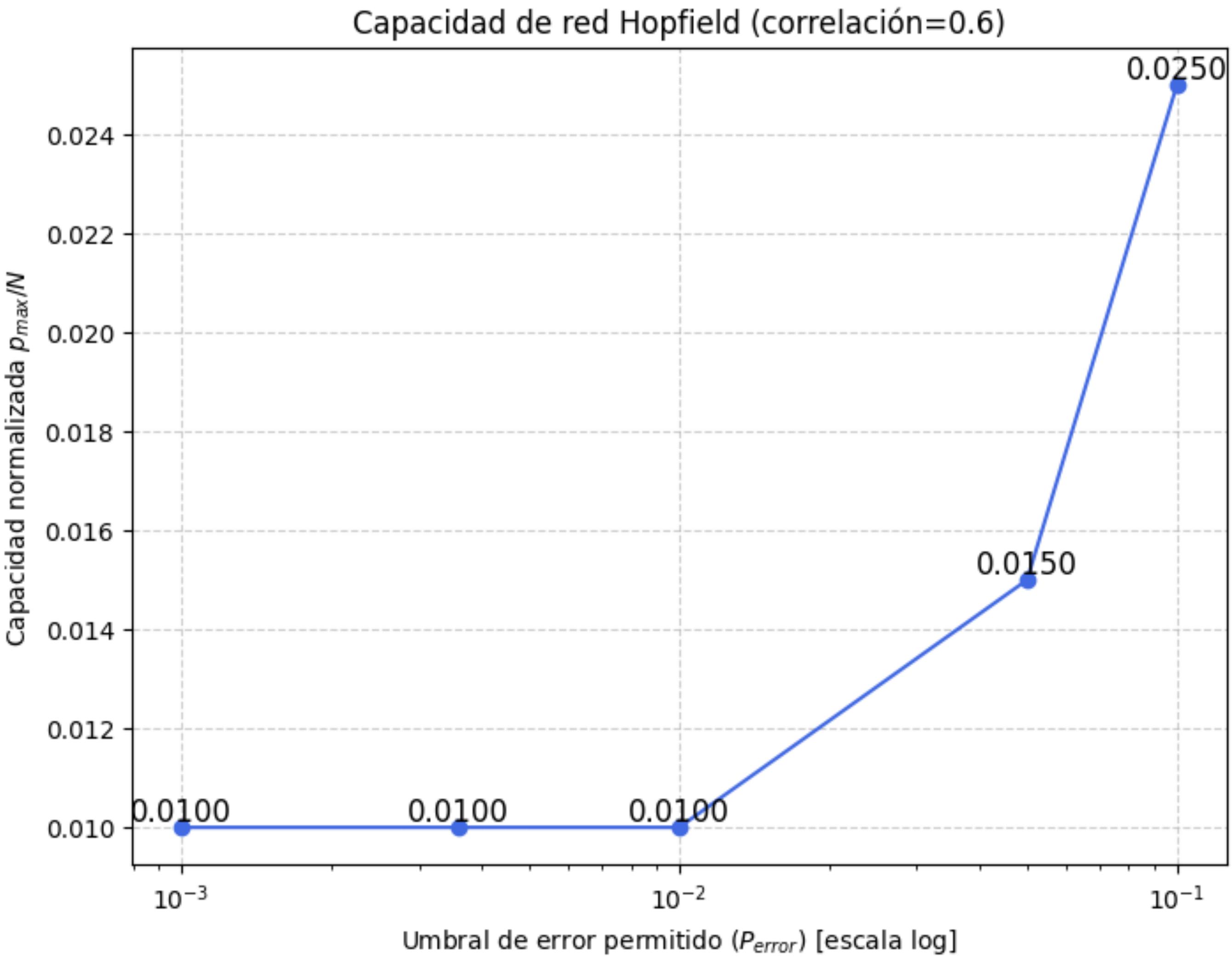
In [6]:
```
def graficar_capacidades(umbrales, capacidades_norm, n_neuronas, correlacion=0):
    """
    Grafica la capacidad en función del umbral de error elegido.

    umbrales: lista de probabilidades de error (ej: [0.001, 0.0036, ...])
    capacidades: lista de capacidades absolutas (cantidad de patrones)
    n_neuronas: cantidad de neuronas de la red
    correlacion: valor de correlación usado (solo para título)
    """



    plt.figure(figsize=(8,6))
    plt.plot(umbrales, capacidades_norm, color="royalblue", marker='o')

    # etiquetas sobre cada punto
    for u, c in zip(umbrales, capacidades_norm):
        plt.text(u, c, f"{c:.4f}", ha='center', va='bottom', fontsize=12)

    plt.ylabel("Capacidad normalizada $p_{max}/N$")
    plt.title(f"Capacidad de red Hopfield (correlación={correlacion})")
    plt.grid(True, linestyle="--", alpha=0.6)
    plt.xscale("log")
    plt.xlabel("Umbral de error permitido ($P_{error}$) [escala log]")
    plt.show()
```

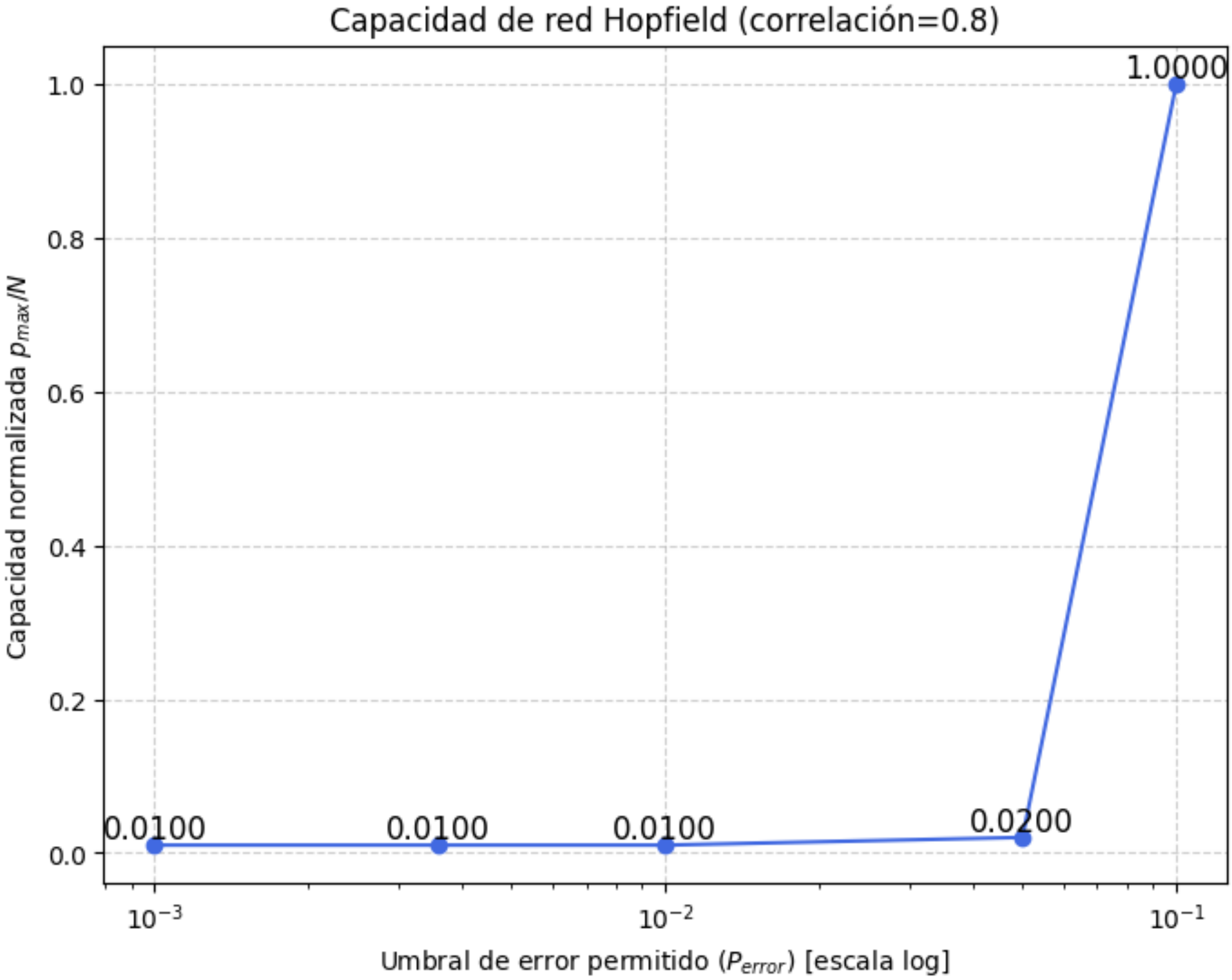
In [7]:
```
graficar_capacidades(umbrales_00, capacidades_00, n_neuronas, correlacion=0)
graficar_capacidades(umbrales_02, capacidades_02, n_neuronas, correlacion=0.2)
graficar_capacidades(umbrales_04, capacidades_04, n_neuronas, correlacion=0.4)
graficar_capacidades(umbrales_06, capacidades_06, n_neuronas, correlacion=0.6)
graficar_capacidades(umbrales_08, capacidades_08, n_neuronas, correlacion=0.8)
graficar_capacidades(umbrales_10, capacidades_10, n_neuronas, correlacion=1.0)
graficar_capacidades(umbrales_10, capacidades_10, n_neuronas, correlacion=0.99)
```

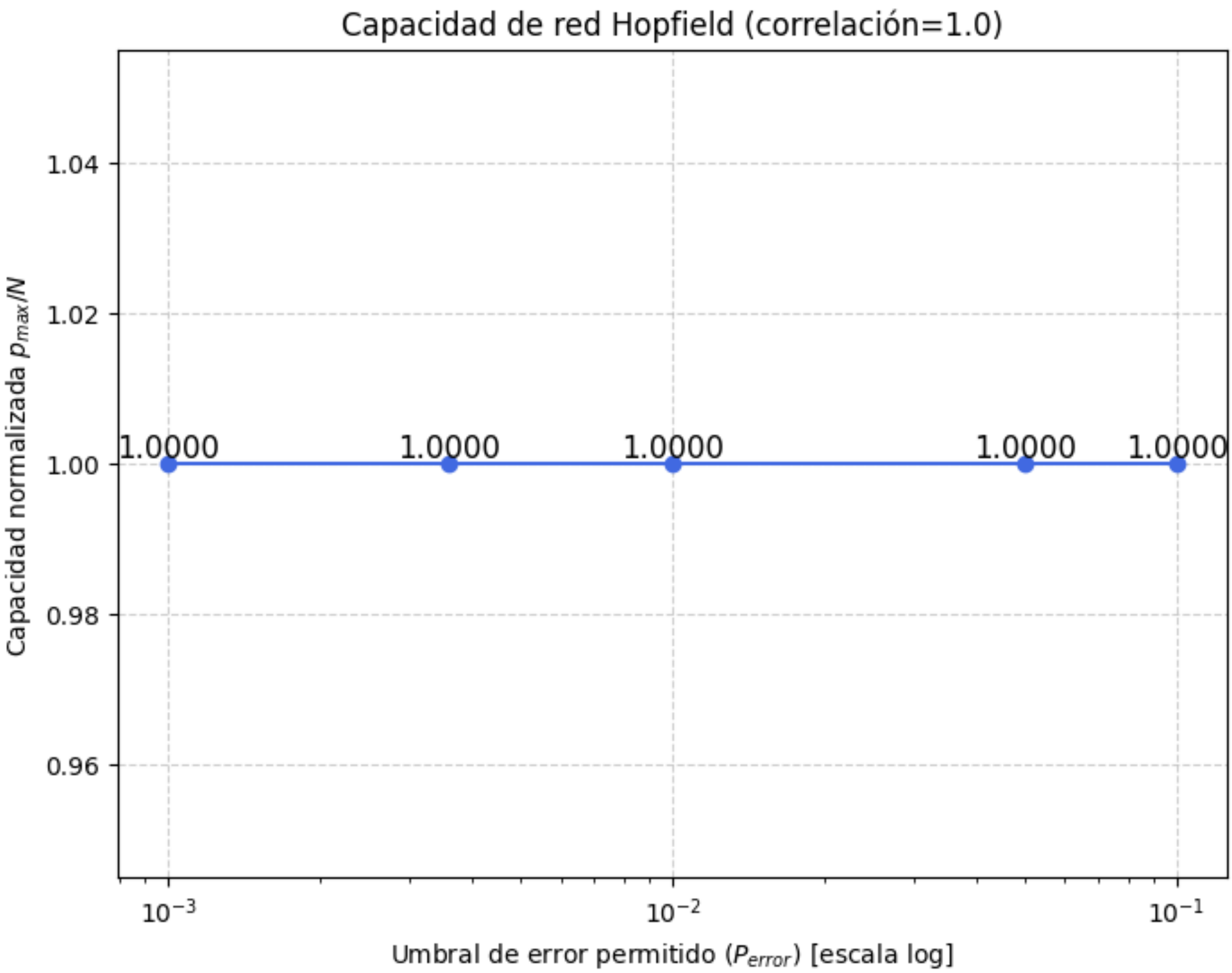

Capacidad de red Hopfield (correlación=0)
Capacidad normalizada p_{max}/N
Umbral de error permitido (P_{error}) [escala log]
0.1050
0.1400
0.1850
0.3750
0.6150
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}

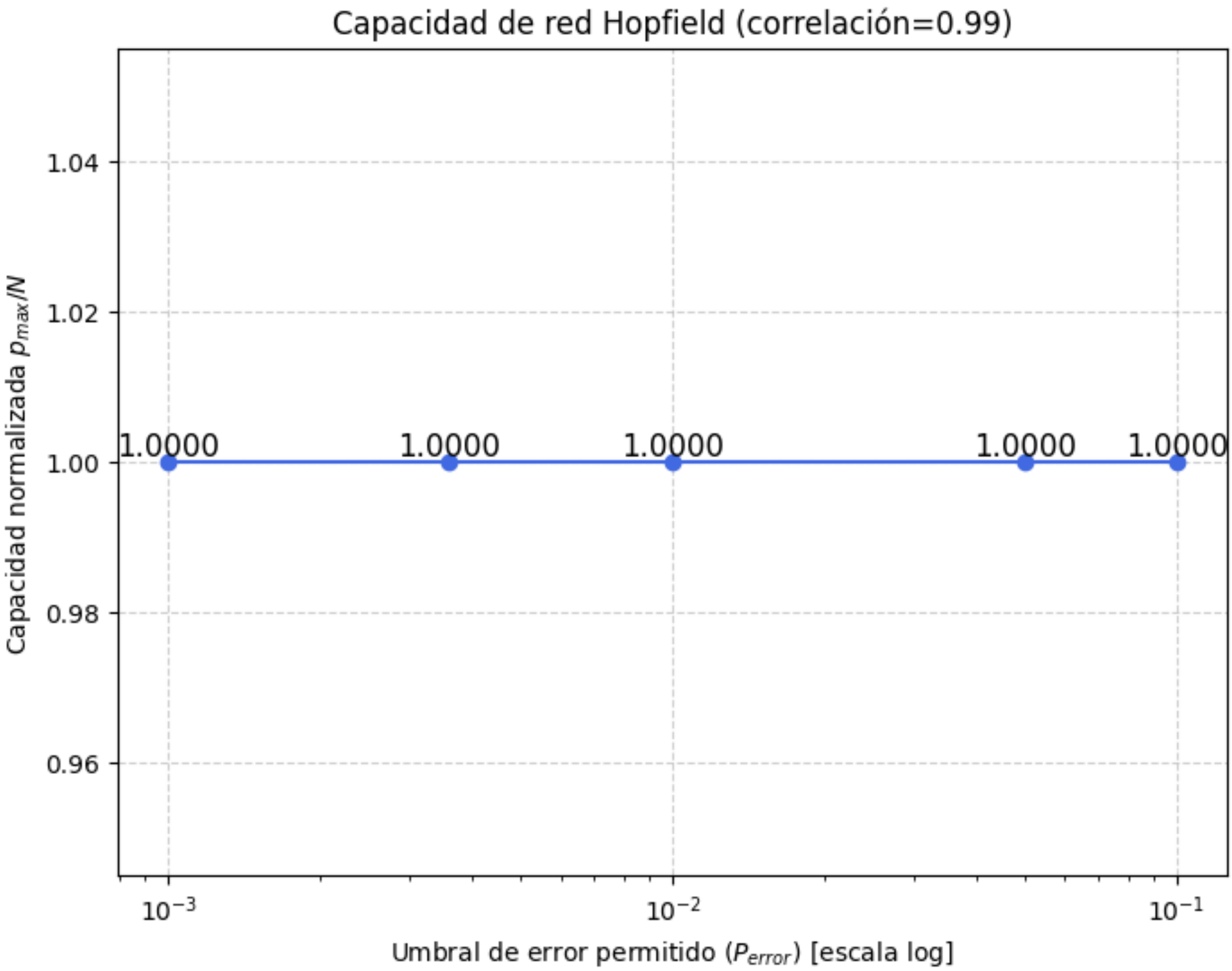

Capacidad de red Hopfield (correlación=0.2)
Capacidad normalizada p_{max}/N
Umbral de error permitido (P_{error}) [escala log]
0.0300
0.0600
0.0850
0.1650
0.2650
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}


Capacidad de red Hopfield (correlación=0.4)
Capacidad normalizada p_{max}/N
Umbral de error permitido (P_{error}) [escala log]
0.0100
0.0150
0.0150
0.0300
0.0450
0.010
0.015
0.020
0.025
0.030
0.035
0.040
0.045
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}


Capacidad de red Hopfield (correlación=0.6)
Capacidad normalizada p_{max}/N
Umbral de error permitido (P_{error}) [escala log]
0.0100
0.0100
0.0100
0.0150
0.0250
0.010
0.012
0.014
0.016
0.018
0.020
0.022
0.024
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}


Capacidad de red Hopfield (correlación=0.8)
Capacidad normalizada p_{max}/N
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
1.0000
0.0100
0.0100
0.0100
0.0200
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
Umbral de error permitido (P_{error}) [escala log]


Capacidad de red Hopfield (correlación=1.0)
Capacidad normalizada p_{max}/N
1.04
1.02
1.00
0.98
0.96
1.0000
1.0000
1.0000
1.0000
1.0000
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
Umbral de error permitido (P_{error}) [escala log]



Análisis de los resultados: Sobre el primer inciso: Los resultados del primer gráfico, correspondiente a las capacidades por tamaño de red en función de los umbrales, es, a fines prácticos, idéntico a los datos de la tabla provistos, que son para redes con un número de neuronas tendiendo a infinito. El número no es perfectamente coincidente por un tema del tamaño de las redes que se están evaluando, aun habiendo implementado un sistema que promedia las capacidades entre muchas redes.

Se nota que la capacidad aumenta con el umbral, lo que tiene sentido porque un aumento en el umbral equivale a mayor tolerancia de errores.

Para el inciso 2: Se observa la misma tendencia de antes: la capacidad aumenta con el umbral. Sin embargo, la tendencia se degenera hasta que, con correlación unitaria, el resultado indicaría que la memoria es perfecta. En realidad, lo que sucede es que las matrices W empeizan a ser entrenadas con más y más patrones repetidos, que causa que la capacidad aumente ficticiamente. Para el caso de correlación unitaria sucede que la forma de generación de vectores correlacionados termina copiandolos, la probabilidad de que los estados sean iguales termina siendo unitaria.

Aparte, cuando todos los estados memorizados son similares (difieren por pocos bits), la red va a recordar su "esencia", y podría haber un umbral para el que los errores entre el estado que se debería haber memorizado y lo que aprendió la red (la "esencia") sean tolerables, aumentando la capacidad. Esto se ve bien para las correlaciones de 0.8 y 0.6.

En sí, se considera que con redes más grandes los datos deberían converger a los teóricos.