Clase 9 - Realimentación de estados y anidamiento de controladores

Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires
Laboratorio de Control Automático (86.22)
Dr. Ing. Claudio D. Pose

Realimentación de estados

Recordando el modelo discreto de la representación en espacio de estados:

$$\mathbf{x}_{k+1} = A_d\mathbf{x}_k + B_d\mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{y}_k = C_d\mathbf{x}_k + D_d\mathbf{u}_k$$

$$A_d = \mathbf{I} + AT \ , \ B_d = BT \ , \ C_d = C \ , \ D_d = D \ (zoh)$$

Realimentación de estados

Se propone un controlador:

$$\mathbf{u}_k = K\mathbf{x}_k$$

Resultando en un sistema:

$$\mathbf{x}_{k+1} = A_d\mathbf{x}_k + B_dK\mathbf{x}_k$$
$$\mathbf{x}_{k+1} = (A_d + B_dK)\mathbf{x}_k$$

El cual es estable si los autovalores de $(A_d + B_dK)$ están dentro del círculo unitario.

Realimentación de estados

Si la salida y_k es la medición de todos los estados del sistema (o, análogamente, si la matriz C es la identidad), el controlador puede implementarse como:

$$\mathbf{u}_k = K\mathbf{y}_k$$

De lo contrario, deberán estimarse todos los estados y el controlador se implementará como:

$$\mathbf{u}_k = K\hat{\mathbf{x}}_k$$

donde $\hat{\mathbf{x}}_k$ será, por ejemplo, la salida del observador de Luenberger.

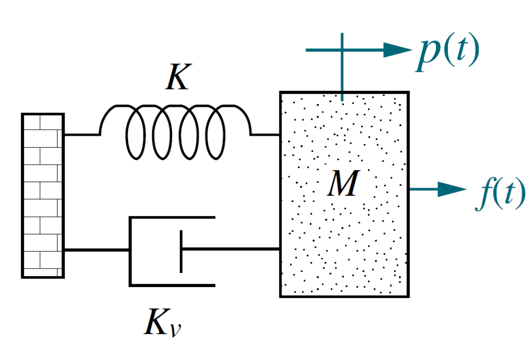
Realimentación de estados

- Si bien utilizamos múltiples variables para calcular la acción de control, el sistema bien podría seguir siendo SISO.
- Igualmente, esta formulación genérica es válida para sistemas MIMO.
- Incluso, el cálculo de la acción de control bien podría ser algo bastante intuitivo.

Ejemplo de realimentación de estados

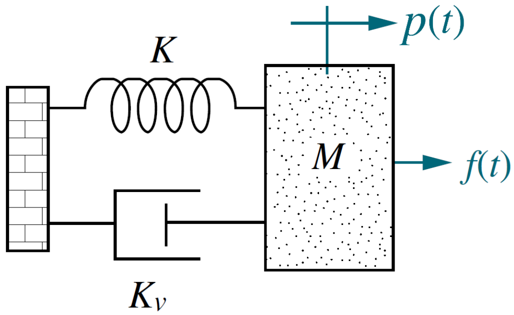
$$m\ddot{p} = f - Ky - K_v\dot{p}$$

$$\ddot{p} = f/m - (K/m)p - (K_v/m)\dot{p}$$



Ejemplo de realimentación de estados

$$x = \begin{bmatrix} p \\ \dot{p} \end{bmatrix}$$



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & -Kv/m \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Realimentación de estados

Dado que tengo dos variables de estado y una acción de control, la forma de la ganancia de realimentación K será:

$$u = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \dot{p} \end{bmatrix}$$

O, de igual manera:

$$u = k_1 p + k_2 \dot{p}$$

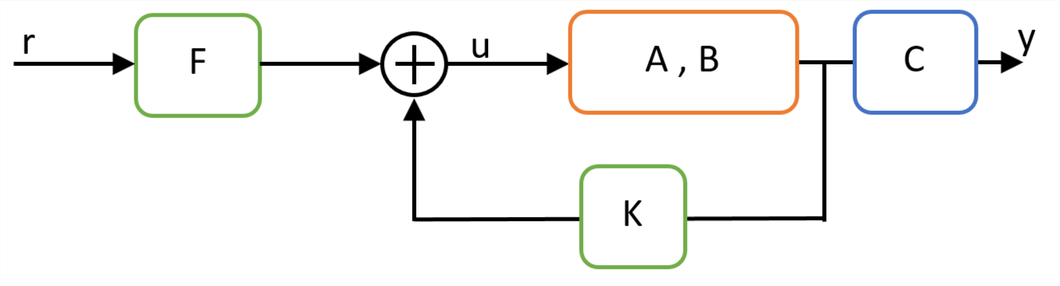
$$u = k_p p + k_d \dot{p}$$

Es decir, un controlador proporcional - derivativo.

Realimentación de estados

- Este controlador siempre intenta llevar el sistema a $x = 0$, no puede seguir referencias.
- Esto es porque la acción de control se vuelve cero cuando todas las variables del vector de estados son cero.
- Recordar que la representación en espacio de estados es la linealización en torno a un punto de equilibrio, no implica que haya un único punto del sistema donde se pueda implementar el controlador.
- Dado que en los estados no aparecen integrales, no se puede implementar directamente un control integral.

Realimentación de estados con seguimiento de referencias



Realimentación de estados

Siendo el sistema (en este caso con $D = 0$):

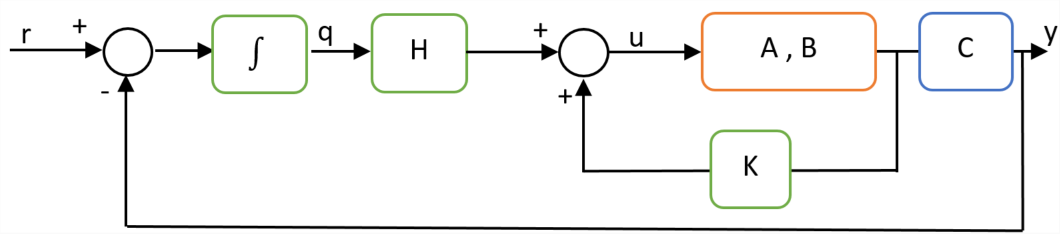
$$\dot{\mathbf{x}} = (A + BK)\mathbf{x} + BF\mathbf{r}$$
$$\mathbf{y} = C\mathbf{x}$$

Y la ganancia F debe elegirse tal que la transferencia de r a y sea unitaria:

$$F = (C(s\mathbf{I} - (A + BK))^{-1}B)^{-1} \quad \text{(Continuo)}$$
$$F = (C(\mathbf{I} - (A_d + B_dK))^{-1}B_d)^{-1} \quad \text{(Digital)}$$

Pero es muy sensible a variaciones de la planta, y al modelo obtenido de la misma.

Realimentación de estados con acción integral



Realimentación de estados con acción integral

Para el cual el sistema aumentado (con $r = 0$, con lo cual $\dot{q} = -y = -Cx$) es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}$$

Con la acción de control:

$$u = \begin{bmatrix} K & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}$$

Realimentación de estados con acción integral

Y el sistema a lazo cerrado queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & H \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}$$

Con lo cual se diseñan K y H de forma tal que el sistema sea estable, sea en continuo o en discreto, el cual tiene una representación análoga:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ q_{k+1} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A_d & 0 \\ -C_d T & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & H \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_k \\ q_k \end{bmatrix}$$

Realimentación de estados con acción integral

Entonces, en cada paso la acción de control:

$$u_k = \begin{bmatrix} K & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ q_k \end{bmatrix} = Kx_k + Hq_k$$

Siendo (por ejemplo en backwards difference):

$$e_k = r_k - y_k$$
$$q_k = q_{k-1} + Te_k$$

Resumiendo:

$$u_k = Kx_k + H(q_{k-1} + Te_k)$$

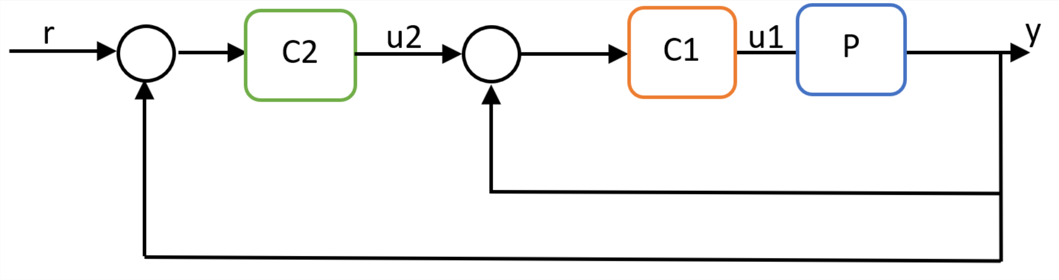
Anidamiento de controladores

- Puede observarse de los controladores anteriores, que, luego de diseñar un lazo para estabilizar el sistema, se agrega otro por fuera para agregar un comportamiento deseado.
- En el caso de la realimentación de estados con acción integral, puede pensarse que la matriz K estabiliza internamente el sistema de acuerdo a los estados x, y la matriz H agrega convergencia a la referencia en función de la salida medida y.
- Pero también puede pensarse que el sistema es una única cosa, con una dinámica definida por la unión de todas sus partes que se diseñan en conjunto.

Anidamiento de controladores

- El uso de varios controladores en conjunto para un mismo sistema es una práctica conveniente en algunos casos.
- En general, se diseña un lazo para controlar un sistema, y ese sistema controlado a lazo cerrado se utiliza para diseñar un nuevo controlador, y el procedimiento puede repetirse.
- Se los conoce comúnmente como controladores anidados o en cascada.
- Tiene aplicaciones útiles, por ejemplo, en plantas inestables difíciles de modelar, donde primero se estabiliza al sistema, y luego se diseña un controlador externo para darle la dinámica deseada.
- También son útiles para controlar más de una variable sin recurrir a un diseño por realimentación de estados.

Anidamiento de controladores



Anidamiento de controladores

$$T_2 = \frac{y_2}{u_2} = \frac{C_1 P}{1 + C_1 P}$$

$$T = \frac{y}{r} = \frac{C_2 T_2}{1 + C_2 T_2}$$

$$T = \frac{C_2 \frac{C_1 P}{1+C_1 P}}{1 + C_1 \frac{C_2 P}{1+C_1 P}} \frac{1 + C_1 P}{1 + C_1 P}$$

$$T = \frac{C_2 C_1 P}{1 + C_1 P + C_1 C_2 P}$$

Anidamiento de controladores

- No se puede tratar el sistema como un todo, desde el punto de vista de diseño de C_1 y C_2 al mismo tiempo por loop shaping, utilizando los métodos conocidos.
- Pueden tratarse ambos sistemas individualmente, primero diseñando el controlador del lazo interno, y luego el del externo.

Anidamiento de controladores

- Existen casos especiales que pueden interpretarse de manera particular.
- Por ejemplo, cuando la variable realimentada en ambos lazos es la misma.
- También cuando la variable a controlar interna es la derivada de la variable a controlar externa.
- No necesariamente ambas variables tienen que ser la misma pero de diferente orden, puede ser cualquier variable del sistema.

Bibliografía

- Goodwin, Graebe y Salgado Capítulo V Sección 18, 18.2, 18.4 y 18.8