计算方法

Ch04 方程求根的迭代法

程勇

buctcourse@163.com

http://www.buct.edu.cn

Dept. of Computer
Beijing University of Chemical Technology

Sept. 19, 2019

提纲

本章提纲

迭代法

绪论中已经介绍过算法设计的校正思想。迭代法是求解方程近似根的一种方法，这种方法的关键是确定迭代函数 $\varphi(x)$(将方程 $f(x)=0$ 变换为 $x=\varphi(x)$)，建立迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，然后从给定的初值 x_0 出发迭代出一系列的近似值 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$，直到逼近方程的根 x^*，直到满足精度要求 $|x_{k+1}-x_k|<\epsilon$ 为止。

简单迭代法又称逐次迭代法，基本思想是构造不动点方程，以求得近似根。即由方程 $f(x)=0$ 变换为 $x=\varphi(x)$, 然后建立迭代格式：

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)$$

当给定初始值 x_0 后，由迭代格式可求得数列 $\{x_k\}$。如果 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*，则它就是方程的根。因为

$$x^*=\lim_{k\to\infty} x_{k+1}=\lim_{k\to\infty} x_k=\varphi(\lim_{k\to\infty} x_k)=\varphi(x^*)$$

迭代法例子

例题：求方程

$$f(x) = x - 10^x + 2 = 0$$

的一个根，取 $x_0 = 0$。

解：由于

$$10^x = x + 2, \quad x = \frac{\log(x+2)}{\log 10}, \quad \varphi(x) = \frac{\log(x+2)}{\log 10}$$

得到迭代格式为 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

$x_1 = 0.30102999566398114$
$x_2 = 0.36192228006214167$
$\cdots$
$x_6 = 0.37579652288649 38$
$x_7 = 0.3758092423816728$

开方公式

对于给定的 $a>0$，求开方值 $\sqrt{a}$ 就是要求解二次方程

$$x^2-a=0 \tag{1}$$

为此可使用校正技术从预报值生成校正值来逐步逼近方程的解。

设给定某个预报值 x_k，希望借助于某种简单方法确定校正量 Δx，使校正值

$$x_{k+1}=x_k+\Delta x \tag{2}$$

更好的满足方程，即：

$$x_k^2+2x_k\Delta x+(\Delta x)^2\approx a \tag{3}$$

成立。设校正值 Δx 是个小量，舍去高阶小量 $(\Delta x)^2$ 后令：

$$x_k^2+2x_k\Delta x=a$$

开方公式 (续)

从中解出 Δx，得：

$$\Delta x = \frac{a - x_k^2}{2x_k}$$

代入上式，即可求出开方公式：

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}) \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

上述演绎过程表明开方法的设计思想是逐步线性化，即将二次方程的求解化归为一次方程求解过程的重复。

开方算法

开方算法

任给初值 $x_0 > 0$，反复利用迭代公式即可获得满足精度要求的开方值：

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right) \quad k = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

直到 $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$($\varepsilon$ 为给定的精度) 为止，x_{k+1} 即为所求。

开方法例子

例题：用开方算法求 $\sqrt{2}$，取 $x_0 = 1$，$\varepsilon = 10^{-6}$
解：求解过程如下：

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{a}{x_0}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{1}) = 1.5, \quad x_2 = 1.41666667, \quad \cdots$$

k	x_k
1	1.500000
2	1.416667
3	1.414216
4	1.414214
5	1.414214

因此，$\sqrt{2} \approx 1.414214$，精确值为 1.41421356。

开方公式的收敛性

开方公式收敛性定理

开方公式

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}) \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

对于任意给定的初值 $x_0 > 0$ 均收敛，即

$$\lim_{k \to \infty} x_k \to \sqrt{a}$$

或表示为迭代误差

$$\lim_{k \to \infty} e_k = \lim_{k \to \infty} |x_k - \sqrt{a}| \to 0$$

开方公式的收敛性证明

证明：由

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k})$$

可得

$$x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_k}(x_k - \sqrt{a})^2$$

同理

$$x_{k+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2x_k}(x_k + \sqrt{a})^2$$

两式相除

$$\frac{x_{k+1} - \sqrt{a}}{x_{k+1} + \sqrt{a}} = \frac{(x_k - \sqrt{a})^2}{(x_k + \sqrt{a})^2} = \left(\frac{x_k - \sqrt{a}}{x_k + \sqrt{a}}\right)^2$$

开方公式的收敛性证明 (续)

这样有:

$$\frac{x_k-\sqrt{a}}{x_k+\sqrt{a}}=\left(\frac{x_{k-1}-\sqrt{a}}{x_{k-1}+\sqrt{a}}\right)^2$$
$$=\left(\frac{x_{k-2}-\sqrt{a}}{x_{k-2}+\sqrt{a}}\right)^{2^2}=\cdots=\left(\frac{x_0-\sqrt{a}}{x_0+\sqrt{a}}\right)^{2^k}$$

令 $q=|\frac{x_0-\sqrt{a}}{x_0+\sqrt{a}}|$，显然当 $x_0>0$ 时，有 $0<q<1$，则有 $\frac{x_k-\sqrt{a}}{x_k+\sqrt{a}}=q^{2^k}$，因此:

$$\lim_{k\to\infty} x_k=\frac{1+q^{2^k}}{1-q^{2^k}}\sqrt{a}=\sqrt{a}$$

Newton 法

Newton 牛顿迭代公式构建的基本思想是通过 Taylor 展开将非线性方程线性化。

设 x_k 是 $f(x)=0$ 的一个近似根，把 $f(x)$ 在 x_k 处作泰勒展开

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(x_k)}{2!}(x-x_k)^2+\cdots+$$

若取前两项来近似代替 $f(x)$(称为 $f(x)$ 的线性化)，则得近似的线性方程：

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

设 $f'(x_k)\neq 0$，令其解为 x_{k+1}，得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Newton 法 (续)

这称为 $f(x)=0$ 的牛顿迭代公式。它的迭代函数为：

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

显然是 $f(x)=0$ 的同解方程，故其迭代函数为：

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (f'(x) \neq 0)$$

由

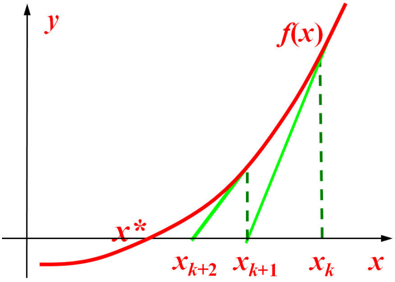
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

知 x_{k+1} 是点 $(x_k, f(x_k))$ 处 $y=f(x)$ 的切线：

$$\frac{y - f(x_k)}{x - x_k} = f'(x_k)$$

与 x 轴的交点的横坐标，如下图所示。

Newton 的几何解释



也就是说，新的近似值 x_{k+1} 是用曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_k, f(x_k))$ 的切线与 x 轴相交得到的。

继续取点 $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$，再做切线与 x 轴相交，又可得 $x_{k+2}, \cdots$。由图可见，只要初值取的充分靠近根 x^* ，这个序列就会很快收敛于根 x^*。Newton 迭代法又称切线法。

牛顿法的收敛性

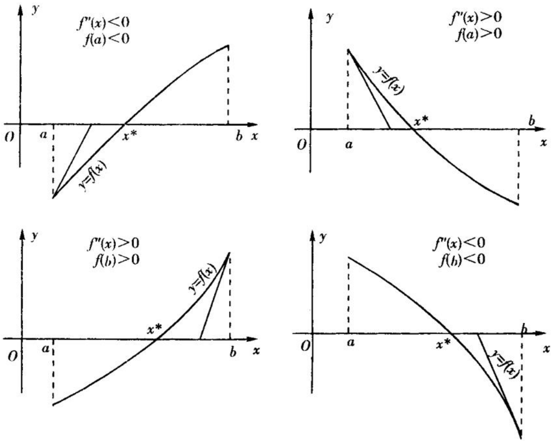
定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足下列条件：

- $f(a)\cdot f(b)<0$；
- $f'(x)\neq 0$；
- $f''(x)$ 存在且不变号；
- 取 $x_0\in[a,b]$，使得 $f''(x)\cdot f(x_0)>0$；

则由迭代公式确定的牛顿迭代法序列 $\{x_k\}$ 收敛于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的唯一根 x^*。

牛顿法的收敛性 (续)



Newton 迭代法的收敛性依赖于 x_0 的选取。

牛顿法例子

例题：用牛顿法求下面方程的根：

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

解：因

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$$

所以迭代公式为

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &= x_k - \frac{x_k^3 + 2x_k^2 + 10x_k - 20}{3x_k^2 + 4x_k + 10} \end{aligned}$$

取 $x_0 = 1$，

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 + 2x_0^2 + 10x_0 - 20}{3x_0^2 + 4x_0 + 10}$$

牛顿法例子 (续)

接上

$$x_1 = 1 - \frac{1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 20}{3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 10} = 1.411764706$$

同理，可求 $x_2, x_3, \cdots$，计算结果列于下表。

k	x_k
1	1.411764706
2	1.369336471
3	1.368808189
4	1.368808108

从计算结果可以看出，牛顿法的收敛速度是很快的，进行了四次迭代就得到了较满意的结果，精度为 10^{-7}。

迭代过程的收敛速度

定义：p 阶收敛

如果迭代误差 $e_k = x^* - x_k$ 当 $k \to \infty$ 时成立：

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p} \to c \quad (c \neq 0\text{的常数})$$

则称迭代过程是 p 阶收敛的。当 $p = 1$ 时称线性收敛，当 $p = 2$ 时称平方收敛，当 $1 < p < 2$ 时称方法为超线性收敛。

定理

Newton 迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

在 $f(x) = 0$ 的单根 x^* 临近为平方收敛。

Newton 迭代法分析

Newton 迭代法优缺点：

Newton 迭代法逻辑结构简单、收敛速度很快 (平方收敛)，但它通常依赖初值 x_0 的选取，如果初值 x_0 选择不当，将导致迭代发散或产生无限循环；此外，每一步迭代都需要计算导数值 $f'(x)$，有时计算 $f'(x)$ 是不方便的。

基于这两点，产生了几种 Newton 迭代法的变形形式。

1. 牛顿下山法；
2. 弦截法；
3. 快速弦截法；

牛顿法例子

一般地说，Newton 法的收敛性依赖于初值 x_0 的选取，如果 x_0 偏离解 x^* 较远，则 Newton 法可能发散或产生无限循环。

例题：用 Newton 求方程

$$x^3 - x - 1 = 0$$

在 $x = 1.5$ 附近的一个根。解：因

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

可得牛顿迭代公式：

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &= x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1} \end{aligned}$$

牛顿法例子 (续)

分别取 $x_0 = 1.5$ 和 $x_0 = 0.6$，计算结果如下表。

k	x_k	x_k
0	1.5	0.6
1	1.34783	17.90000
2	1.32520	11.94680
3	1.32472	7.985519
4	1.32472	

由上表可知道，当 $x_0 = 0.6$ 时结果偏离所求的根，不收敛 (发散) 或收敛较慢。

Newton 下山法

为了防止迭代发散，通常对迭代过程再附加一项要求，即保证函数值单调下降：

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$$

满足这项要求的算法称下山法。将 Newton 法与下山法结合使用，即在下山法保证迭代函数值稳定下降的前提下，用 Newton 法加快速度，即可得到如下 Newton 下山法：

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

其中 $0 < \lambda < 1$，称下山因子，在迭代过程中通过适当地选取 λ 以使下山条件 $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$ 满足。下山因子的选择是个逐步探索的过程，从 $\lambda = 1$ 开始反复将因子 λ 的值减半进行试算，一旦单调条件 $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$ 满足，则称为“下山成功”。反之，如果在上述过程中找不到使下山条件 $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$ 成立的下山因子 λ，则称“下山失败”，这时需另选初值 x_0 重算。

下山法例子

例题：使用下山法求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 的根，取 $x_0=0.6$。

解：迭代公式如下：

$$x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\lambda\frac{x_k^3-x_k-1}{3x_k^2-1}$$

牛顿下山法的计算结果：

k	λ	x_k
0	1	0.6
1	$\frac{1}{2^5}$	1.14063
2	1	1.36681
3	1	1.32628
4	1	1.32472

弦截法

牛顿法要计算 $f'(x)$，现用 $f(x)$ 的值近似 $f'(x)$：
认为切线斜率近似等于割线斜率。

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$$

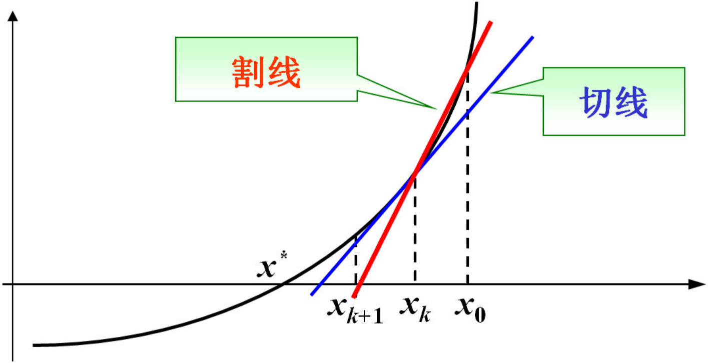
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_0)}(x_k - x_0)$$

迭代函数为：

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f(x) - f(x_0)}(x - x_0)$$

单点弦截法为线性收敛。

弦截法几何意义



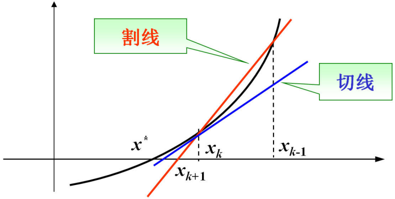
快速弦截法

快速弦截法也称为两点弦截法。
认为切线斜率近似等于割线斜率。

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

快速弦截法需要 2 个初值 x_0 和 x_1，其收敛阶 1.618。



快速弦截法例子

例题：使用 Newton 法和快速弦截法求方程 $xe^x-1=0$ 的根。
解：使用 Newton 法和快速弦截法，迭代公式分别如下：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k e^{x_k} - 1}{e^{x_k} + x_k e^{x_k}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

k	x_k	x_k
0	0.5	0.5
1	0.57102	0.6
2	0.56716	0.565315
3	0.56714	0.567094
4	0.56714	0.567143

埃特金迭代公式

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_{k+1} &= \varphi(x_k) \\
\tilde{x}_{k+1} &= \varphi(\bar{x}_{k+1}) \\
x_{k+1} &= \tilde{x}_{k+1} - \frac{(\tilde{x}_{k+1} - \bar{x}_{k+1})^2}{\tilde{x}_{k+1} - 2\bar{x}_{k+1} + x_k}
\end{aligned}
$$

本章小结

- 迭代法思想；
- 开方法；
- Newton 法；
- Newton 法的改进；
- 迭代过程的加速；

练习题

1. 编程实现开方法。
2. 编程实现 Newton 法。

谢谢!

AUTHOR: Cheng Yong
ADDRESS: Dept. of Computer
Beijing University of Chemical Technology
Beijing, 100029, China
EMAIL: buctcourse@163.com