



# 计算方法

## Ch02 插值方法

程勇

buctcourse@163.com  
<http://www.buct.edu.cn>

Dept. of Computer  
Beijing University of Chemical Technology

Sept. 19, 2019



# 提纲

- ① Ch01 概论
- ② Ch02 插值方法
- ③ Ch03 数值积分
- ④ Ch04 方程求根的迭代法
- ⑤ Ch05 线性方程组的迭代法
- ⑥ Ch06 线性方程组的直接法
- ⑦ Ch07 常微分方程的差分法



# 本章提纲

问题的提出

拉格朗日 (Lagrange) 插值

Newton 插值公式

埃尔米特插值

分段插值



# 什么是插值?

在初等微积分中, 我们用函数  $y = f(x)$  来描述一个平面曲线, 但在实际问题中, 函数  $y = f(x)$  往往是通过实验观测得到的一组数据来给出的, 即在某个区间  $[a, b]$  上给出一系列节点的函数值:

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

或者给出一张函数表:

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\dots\dots\dots$	$x_n$
$y$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$\dots\dots\dots$	$y_n$

Table: 函数表

如何通过这些对应的关系去找出函数  $f(x)$  的一个近似表达式或求某个不在期间的给定点  $x$  的函数值呢?



## 例子: PM2.5 指数计算

某日北京市昌平区南环东路某地点 PM2.5 随时间变化如下表:

时间 ( $t$ )	0	4	8	12	16	20
PM2.5 值	63	54	146	181	172	95

**Table:** 南环东路某地点 PM2.5 测量值

要想知道 PM2.5 随时间变化的情况  $PM = f(t)$ , 或某一时刻  $t = 10$  的 PM2.5 指数值应该如何计算?

最简单实用的方法就是插值。简单地说, 插值的目的是根据给定的数据表, 寻找一个解析形式的函数  $p(x)$  近似代替  $f(x)$ , 根据  $p(x)$  值计算来对  $f(x)$  值进行估计。



## 基本概念

已知  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上一组  $n+1$  个不同点  
 $a \leq x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \leq b$  上的函数值  $y_i = f(x_i)$ ,  
( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ), 寻找一个  $f(x)$  的近似函数  $p(x)$ , 且满足

$$p(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

称  $f(x)$  为被插函数;

称函数  $p(x)$  为插值函数 (公式);

若  $p(x)$  为多项式函数, 称  $p(x)$  为插值多项式;

称数据表中给出的已知节点  $x_i$  为插值节点; 其对应的函数  
值  $y_i$  为样本点;

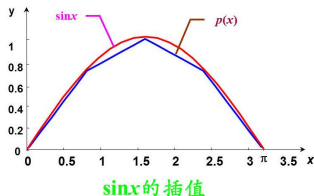
称待求函数值的节点为插值点;

称插值节点所界定的范围  $\Delta = [\min x_i, \max x_i]$  为插值区间。



## $\sin x$ 插值的例子

例如，对函数  $y = \sin x$ ，若给定  $[0, \pi]$  的 5 个等分点，可构造插值函数如下：



对于插值函数  $p(x)$  与被插函数  $f(x)$  在节点处的函数值相等，但在节点外  $p(x)$  与  $f(x)$  可能会有偏离，因此  $p(x)$  代替  $f(x)$  必然存在误差。函数  $p(x)$  的类型有各种不同的选择，但最常用的类型是代数多项式，因为代数多项式具有一些很好的性质，如它具有各阶导数，计算多项式比较方便等，本章讨论的就是代数插值多项式。



# 代数插值多项式的存在及唯一性

设函数  $y = f(x)$  在区间上的插值多项式为

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

且满足

$$p_n(x_i) = y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

即多项式  $p_n(x)$  的系数  $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$  满足方程组:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$





## 代数插值多项式的存在及唯一性 (续)

上述方程组系数行列式为  $n+1$  阶 Vandermond 行列式:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n (x_j - x_i) \begin{matrix} x_i \neq x_j \\ \neq 0 \end{matrix}$$

根据克莱姆 (Cramer) 法则, 上述线性方程组具有唯一解。

### 命题

已知函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上一组  $n+1$  个不同点  $a \leq x_0, x_1, \cdots, x_n \leq b$  上的函数值, 并且  $y_i = f(x_i)$  ( $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ )。则满足插值条件  $p(x_i) = y_i$  ( $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ ) 的插值多项式  $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$  存在且唯一。



## 拉格朗日 (Lagrange) 插值形式

虽然线性方程组推出的插值多项式存在且唯一，但通过解线性方程组求插值多项式却不是好方法，而需采用其他的方法。

现将插值多项式表示成如下形式：已知  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上一组  $n+1$  个不同点

$$a \leq x_0, x_1, \dots, x_n \leq b$$

上的函数值

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

构造满足插值条件  $L_n(x_i) = y_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$  的次数不超过  $n$  次的多项式

$$f(x) \approx L_n(x) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(x) f(x_i)$$

其中  $\varphi_i(x) (i = 0, 1, 2, \dots, n)$  是次数不超过  $n$  次的多项式。

## 两点拉格朗日插值

两点插值也称线性插值。设已知两个不同节点  $x_0, x_1$  上的函数值 (样本值)

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1$$

构造满足插值条件  $L_1(x_i) = y_i (i = 0, 1)$  的次数不超过一次多项式  $L_1(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1$ 。其中  $\varphi_i(x) (i = 0, 1)$  是次数为 1 次的多项式。

实际上就是构造一次的多项式  $\varphi_0(x)$  和  $\varphi_1(x)$  并满足:

$$L_1(x_0) = \varphi_0(x_0)y_0 + \varphi_1(x_0)y_1 = y_0$$

$$L_1(x_1) = \varphi_0(x_1)y_0 + \varphi_1(x_1)y_1 = y_1$$

令  $\varphi_0(x)$  和  $\varphi_1(x)$  满足如下的条件:

	$x_0$	$x_1$
$\varphi_0(x)$	1	0
$\varphi_1(x)$	0	1



## 两点拉格朗日插值 (续)

由于  $\varphi_0(x)$  和  $\varphi_1(x)$  均为一次多项式, 因此可求得:

$$\varphi_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad \varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

因此有

$$L_1(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1$$

这就是两点 Lagrange 插值 (线性插值) 公式, 用它来作为函数  $y = f(x)$  的近似。

显然  $L_1(x)$  是次数不超过一次的多项式, 且满足:

$$L_1(x_0) = \varphi_0(x_0)y_0 + \varphi_1(x_0)y_1 = 1 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 = y_0$$

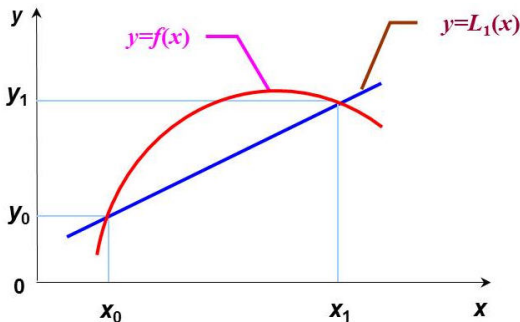
$$L_1(x_1) = \varphi_0(x_1)y_0 + \varphi_1(x_1)y_1 = 0 \cdot y_0 + 1 \cdot y_1 = y_1$$

即  $L_1(x)$  满足问题 1 中所要求的条件,  $L_1(x)$  即为所求。



## 两点拉格朗日插值 (续)

我们称  $\varphi_0(x)$  和  $\varphi_1(x)$  为 Lagrange 插值基函数。  
实际上  $L_1(x)$  就是这两个插值基函数的线性组合。



两点插值



## 两点拉格朗日插值例子

例 1 设  $y = f(x) = x^{1/2}$  在  $x = 100, 121$  处的函数值为 10, 11, 试以这两点建立  $y = x^{1/2}$  的 Lagrange 一次插值多项式, 并由此计算  $f(115)$  处的近似值。

解: 取  $x_0 = 100, x_1 = 121$ , 则  
 $y_0 = f(x_0) = 10, y_1 = f(x_1) = 11$ ,

$$\varphi_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 121}{100 - 121}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 100}{121 - 100}$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 \\ &= \frac{x - 121}{100 - 121} \cdot 10 + \frac{x - 100}{121 - 100} \cdot 11 \\ &= \frac{x + 110}{21} \end{aligned}$$



## 两点拉格朗日插值例子 (续)

当  $x = 115$  时,

$$\begin{aligned} L_1(115) &= \frac{115 - 121}{100 - 121} \cdot 10 + \frac{115 - 100}{121 - 100} \cdot 11 \\ &= 10.71428 \end{aligned}$$

而  $f(115) = \sqrt{115} = 10.723805$ ,  $f(115) \approx L_1(115)$ 。该近似值有三位有效数字。

由上面的例子可见, 两点插值的精度很低。原因是我们用线性函数来代替非线性函数, 不可能有很好的效果。为了进一步改进插值精度, 下面考察三点情况下的拉格朗日插值公式。



## 三点拉格朗日插值

问题 2 设已知三个不同节点  $x_0, x_1, x_2$  上的函数值 (样本值)

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$$

构造满足插值条件  $L_2(x_i) = y_i (i = 0, 1, 2)$  的次数不超过 2 次多项式

$$L_2(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2$$

其中  $\varphi_i(x) (i = 0, 1, 2)$  是次数为 2 次的多项式。实际上就是构造二次的多项式  $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$  和  $\varphi_2(x)$ , 满足:

$$L_2(x_0) = \varphi_0(x_0)y_0 + \varphi_1(x_0)y_1 + \varphi_2(x_0)y_2 = y_0$$

$$L_2(x_1) = \varphi_0(x_1)y_0 + \varphi_1(x_1)y_1 + \varphi_2(x_1)y_2 = y_1$$

$$L_2(x_2) = \varphi_0(x_2)y_0 + \varphi_1(x_2)y_1 + \varphi_2(x_2)y_2 = y_2$$





## 三点拉格朗日插值 (续)

令  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_1(x)$  和  $\varphi_2(x)$  满足如下的条件:

	$x_0$	$x_1$	$x_2$
$\varphi_0(x)$	1	0	0
$\varphi_1(x)$	0	1	0
$\varphi_2(x)$	0	0	1

显然可以使上面三式成立。由于  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_1(x)$  和  $\varphi_2(x)$  均为二次多项式, 因此可求得:

$$\varphi_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$



## 三点拉格朗日插值 (续)

因此有:  $L_2(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2$

这就是三点 Lagrange 插值公式, 用它来作为函数  $y = f(x)$  的近似。显然  $L_2(x)$  是次数不超过二次的多项式, 且满足:

$$\begin{aligned} L_2(x_0) &= \varphi_0(x_0)y_0 + \varphi_1(x_0)y_1 + \varphi_2(x_0)y_2 \\ &= 1 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(x_1) &= \varphi_0(x_1)y_0 + \varphi_1(x_1)y_1 + \varphi_2(x_1)y_2 \\ &= 0 \cdot y_0 + 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(x_2) &= \varphi_0(x_2)y_0 + \varphi_1(x_2)y_1 + \varphi_2(x_2)y_2 \\ &= 0 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = y_2 \end{aligned}$$

即  $L_2(x)$  满足问题 2 中所要求的条件,  $L_2(x)$  即为所求。称  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_1(x)$  和  $\varphi_2(x)$  为 Lagrange 插值基函数。实际上  $L_2(x)$  就是这三个插值基函数的线性组合。



## 三点拉格朗日插值例子

例 2 设  $y = f(x) = x^{1/2}$  在  $x = 100, 121, 144$  处的函数值为 10, 11, 12, 试以这三点建立  $y = x^{1/2}$  的二次 Lagrange 插值多项式, 并由此计算  $f(115)$  处的近似值。

解: 取  $x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$ , 则  
 $y_0 = f(x_0) = 10, y_1 = f(x_1) = 11, y_2 = f(x_2) = 12$ 。

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 121)(x - 144)}{(100 - 121)(100 - 144)} \\ \varphi_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 100)(x - 144)}{(121 - 100)(121 - 144)} \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 100)(x - 121)}{(144 - 100)(144 - 121)}\end{aligned}$$



## 三点拉格朗日插值例子 (续)

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2 \\ &= \frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)} \cdot 10 \\ &\quad + \frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)} \cdot 11 \\ &\quad + \frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)} \cdot 12 \end{aligned}$$

当  $x = 115$  时,

$$L_2(115) = \varphi_0(115) \cdot 10 + \varphi_1(115) \cdot 11 + \varphi_2(115) \cdot 12 = 10.7228$$

而  $f(115) = \sqrt{115} = 10.723805$ ,  $f(115) \approx L_2(115)$ 。可见近似值具有四位有效数字。



## 多点拉格朗日插值

我们可以用同样的方法建立多点的插值公式。

问题 3 设已知  $n+1$  个不同节点  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  上的函数值  $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n$  构造满足插值条件  $L_n(x_i) = y_i (i = 0, 1, \dots, n)$  的次数不超过  $n$  次多项式

$$L_n(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 + \dots + \varphi_n(x)y_n$$

其中  $\varphi_i(x) (i = 0, 1, \dots, n)$  是次数为  $n$  的多项式。

同前述方法, 令  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  满足如下的条件:

	$x_0$	$x_1$	$\dots$	$x_n$
$\varphi_0(x)$	1	0	$\dots$	0
$\varphi_1(x)$	0	1	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\varphi_n(x)$	0	0	$\dots$	1



## 多点拉格朗日插值 (续)

可求得:

$$\begin{aligned}\varphi_i(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \\ &= \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n)\end{aligned}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(x) y_i = \sum_{i=0}^n \left( \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right) y_i$$

这就是  $n+1$  点 Lagrange 插值 ( $n$  次插值) 公式, 用它来作为函数  $y=f(x)$  的近似。  $L_n(x)$  满足问题 3 中所要求的条件。我们称  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  为 Lagrange 插值基函数。  $L_n(x)$  就是这  $n+1$  个插值基函数的线性组合。



## 拉格朗日插值法分析

- ① 插值点要求等距;
- ② 插值基函数形式简单, 但计算比较复杂;
- ③ 当有新的插值点加入时, 基函数要重新计算;
- ④ 高次插值的精度不一定高;



## Newton 插值公式思想

我们知道 Lagrange 插值多项式的插值基函数为：

$$\varphi_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

上述基函数形式上比较复杂、计算量大，并且重复计算很多，由线性代数可知任何一个  $n$  次多项式都可以表示成：

$$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

共  $n + 1$  个多项式的线性组合。那么，是否可以将这  $n + 1$  个多项式作为插值基函数呢？答案是肯定的。多项式组

$$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

线性无关，因此可以作为插值基函数。





## Newton 插值公式

问题 4 设已知  $n+1$  个不同节点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  上的函数值

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$$

构造满足插值条件  $p_n(x_i) = f(x_i) = y_i (i = 0, 1, \dots, n)$  的次数不超过  $n$  次多项式

$$\begin{aligned} p_n(x) = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ & + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots \\ & + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

为了便于计算系数值  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , 我们引入差商的概念。



# 差商

设  $f(x)$  在不同节点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  上的函数值为:

$$f(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

称  $f(x_i)$  为  $f(x)$  关于节点  $x_i$  的零阶差商。

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, n, i \neq j)$$

为  $f(x)$  关于节点  $x_i, x_j$  的一阶差商。

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i} \quad (i, j, k = 0, 1, 2, \dots, n, i \neq j \neq k)$$

为  $f(x)$  关于节点  $x_i, x_j, x_k$  的二阶差商。



## 差商 (续)

依此类推,  $f(x)$  关于节点  $x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$  的  $k$  阶差商为:

$$f(x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = \frac{f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) - f(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}})}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

显然有:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k) - f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_0}$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$



## 差商的性质

差商具有如下性质：

- ① **对称性**。任意调整节点的次序，差商的值不变，如：

$$f(x_0, x_1) = f(x_1, x_0)$$
$$f(x_i, x_j, x_k) = f(x_j, x_k, x_i) = f(x_i, x_k, x_j) = \cdots$$

- ②  $f(x)$  的  $k$  阶差商  $f(x_0, x_1, \cdots, x_k)$  可以由函数值  $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_k)$  的线性组合来表示。即：

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_k)$$
$$= \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_k)}$$



# 差商的计算方法 (表格法)

使用表格法计算差商:

节点	样本值	一阶差商	二阶差商	...	$n$ 阶差商
$x_0$	$f(x_0)$				
$x_1$	$f(x_1)$	$f(x_0, x_1)$			
$x_2$	$f(x_2)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2)$		
$x_3$	$f(x_3)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	...	
.	.	.	.	...	
.	.	.	.	...	
.	.	.	.	...	
$x_n$	$f(x_n)$	$f(x_{n-1}, x_n)$	$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$	...	$f(x_0, x_1, \dots, x_n)$



## 差商计算例子

例：已知节点 0, 2, 3, 5 对应的函数值为 1, 3, 2, 5，试使用表格法计算差商值。

节点	样本值	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	1			
2	3	1		
3	2	-1	$-\frac{2}{3}$	
5	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{10}$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{3 - 1}{2 - 0} = 1$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{5 - 2}{5 - 3} = \frac{3}{2}$$

.....



## 差商形式的 Newton 插值公式

设已知  $n+1$  个不同节点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  上的函数值

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$$

构造满足插值条件  $p_n(x_i) = f(x_i) = y_i (i = 0, 1, \dots, n)$  的次数不超过  $n$  次多项式

$$\begin{aligned} p_n(x) = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ & + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

由插值条件可得:

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f(x_0, x_1)$$

...

$$a_n = f(x_0, x_1, \dots, x_n)$$



## 差商形式的 Newton 插值公式 (续)

这样可得到差商形式的 Newton 插值公式如下：  
一次插值多项式：

$$p_1(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0)$$

二次插值多项式：

$$p_2(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)$$

.....

$n$  次插值多项式：

$$p_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$





## Newton 插值多项式例子

例：已知节点 0, 2, 3, 5 对应的函数值为 1, 3, 2, 5，构造三次 Newton 插值多项式，当  $x = 2.5$  时，计算 Newton 多项式插值结果。

解：由前面计算的差商值，我们很容易写出三次 Newton 插值多项式如下：

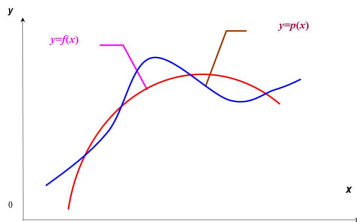
$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 1 + 1 \cdot (x - 0) - \frac{2}{3}(x - 0)(x - 2) + \frac{3}{10}(x - 0)(x - 2)(x - 3) \\ &= \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1 \end{aligned}$$

当  $x = 2.5$  时，Newton 多项式插值结果为：

$$p_3(2.5) = \frac{3}{10}(2.5)^3 - \frac{13}{6}(2.5)^2 + \frac{62}{15}(2.5) + 1 = 2.479167$$

## 埃尔米特插值

Lagrange 插值、Newton 插值虽然构造比较简单，但仅要求他们的函数值与被插函数的函数值在节点上相同，但没有考虑到导数值。



Hermite 插值 (切触插值) 是要构造一个插值函数，不但在给定的节点上取已知函数值，而且取已知导数值，使插值函数与被插函数的密合程度更好。



## 待定系数法例子

待定系数法是构造多项式最基本的方法。这种方法原理简明并且原则上总是可行的，只是处理过程往往比较繁琐。

例：求作二次式  $\varphi_0(x)$ ，使分别满足插值条件：

$$\varphi_0(0) = 1, \varphi_0(1) = 0, \varphi'_0(0) = 0.$$

解：由于  $\varphi_0(1) = 0$ ，可知它有一个零点  $x_0 = 1$ ，故二次式  $\varphi_0(x)$  具有形式：

$$\varphi_0(x) = (cx + d)(x - 1)$$

$$\text{因此：} \varphi'_0(x) = c(x - 1) + (cx + d)$$

由条件  $\varphi_0(0) = 1, \varphi'_0(0) = 0$  可得：

$$\varphi_0(0) = (c \cdot 0 + d)(0 - 1) = 1$$

$$\varphi'_0(0) = c(0 - 1) + (c \cdot 0 + d) = 0$$

因此得到：  $c = d = -1$ 。从而有：  $\varphi_0(x) = -x^2 + 1$



## 待定系数法例子

例：求作三次式  $\varphi_0(x)$ ，使分别满足插值条件：

$$\varphi_0(0) = 1, \varphi_0(1) = 0, \varphi'_0(0) = 0, \varphi'_0(1) = 0$$

解：由于  $\varphi_0(1) = \varphi'_0(1) = 0$ ，可知它有一个二阶零点  $x_0 = 1$ ，故三次式  $\varphi_0(x)$  具有形式

$$\varphi_0(x) = (ax + b)(x - 1)^2$$

$$\varphi'_0(x) = a(x - 1)^2 + 2(ax + b)(x - 1)$$

$$\text{再由 } \varphi_0(0) = 1, \varphi'_0(0) = 0$$

$$\varphi_0(0) = (a \cdot 0 + b)(0 - 1)^2 = 1$$

$$\varphi'_0(0) = a(0 - 1)^2 + 2(a \cdot 0 + b)(0 - 1) = 0$$

求解得到：  $a = 2, b = 1$ 。因此：  $\varphi_0(x) = (2x + 1)(x - 1)^2$ 。



# Hermite 插值的基函数方法

基函数方法是所有的插值多项式表达为某些简单函数—基函数的线性组合。这些基函数满足某些特定的插值条件，比较容易构造。基函数方法主要针对如下—类问题：

问题：给定  $[a, b]$  区间上  $n+1$  个节点和相应的函数值和导数值

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_n$
$y$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$\cdots$	$y_n$
$y'$	$y'_0$	$y'_1$	$y'_2$	$\cdots$	$y'_n$

构造满足条件  $p_{2n+1}(x_i) = y_i, p'_{2n+1}(x_i) = y'_i$  的次数不超过  $2n+1$  次的插值多项式  $p_{2n+1}(x)$ 。



## 两点三次 Hermite 插值

设  $f(x)$  在节点  $x_0, x_1$  处的函数值为  $y_0, y_1$ , 在节点  $x_0, x_1$  处的一阶导数值为  $y'_0, y'_1$ , 构造次数不超过三次的多项式  $p_3(x)$  并满足插值条件:

$$\begin{aligned}p_3(x_0) &= y_0, p_3(x_1) = y_1 \\p'_3(x_0) &= y'_0, p'_3(x_1) = y'_1\end{aligned}$$

根据 Lagrange 方法, 它应该具有如下的形式:

$$p_3(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y'_0\psi_0(x) + y'_1\psi_1(x)$$

其中  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$  为待定的三次多项式。



## 两点三次 Hermite 插值 (续)

实际上是在每个节点上构造两个插值基函数,  $x_0$  点对应  $\varphi_0(x), \psi_0(x)$ ,  $x_1$  点对应  $\varphi_1(x), \psi_1(x)$ , 其取值情况如下:

	函数值		导数值	
	$x_0$	$x_1$	$x_0$	$x_1$
$\varphi_0(x)$	1	0	0	0
$\varphi_1(x)$	0	1	0	0
$\psi_0(x)$	0	0	1	0
$\psi_1(x)$	0	0	0	1



## 两点三次 Hermite 插值 (续)

这样可由待定系数法或 Lagrange 中构造基函数的方法直接解得:

$$\varphi_0(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\varphi_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

$$\psi_0(x) = (x - x_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\psi_1(x) = (x - x_1) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$





## 两点三次 Hermite 插值 (续)

即三次 Hermite 插值多项式为:

$$p_3(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y'_0\psi_0(x) + y'_1\psi_1(x)$$

其中:

$$\varphi_0(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\varphi_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

$$\psi_0(x) = (x - x_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\psi_1(x) = (x - x_1) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$



## Hermite 插值例子

例题：已知  $f(x)$  在节点 1, 2 处的函数值为  $f(1) = 2, f(2) = 3$ ,  $f(x)$  在节点 1, 2 处的导数值为  $f'(1) = 0, f'(2) = -1$ , 求  $f(x)$  的两点三次插值多项式及  $f(x)$  在  $x = 1.5, 1.7$  处的函数值。

解：

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 1, x_1 = 2, y_0 = 2, y_1 = 3, y'_0 = 0, y'_1 = -1 \\
 p_3(x) &= y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y'_0\psi_0(x) + y'_1\psi_1(x) \\
 &= y_0 \left( 1 + 2 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2 \\
 &\quad + y_1 \left( 1 + 2 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2 \\
 &\quad + y'_0(x - x_0) \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2 + y'_1(x - x_1) \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2
 \end{aligned}$$



## Hermite 插值例子 (续)

分别代入并化简, 可求得 Hermite 插值公式为:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 2(1 + 2(x-1))(x-2)^2 + 3(1 - 2(x-2))(x-1)^2 \\ &\quad - (x-2)(x-1)^2 \\ &= -3x^3 + 13x^2 - 17x + 9 \end{aligned}$$

$$f(1.5) \approx p_3(1.5) = 2.625$$

$$f(1.7) \approx p_3(1.7) = 2.931$$

对于高次的 Hermite 插值, 可采用类似的方法来进行构造。作为多项式插值, 三次已是较高的次数, 次数再高就有可能发生 Runge 现象, 下面采用被称为分段插值的办法来解决多条件插值问题。



## 分段插值概念

分段插值，就是将被插值的函数逐段进行多项式化，选取分段多项式作为插值多项式。

分段插值方法的处理过程分两步，先将所考察区间  $[a, b]$  作划分

$$\Delta: a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

并在每个子区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上构造插值多项式；然后将每个区间上的插值多项式拼接到一起，形成区间  $[a, b]$  上的插值多项式。这样构造的插值多项式称为分段插值多项式。

如果多项式  $p_k(x)$  在划分  $\Delta$  的每个子区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上都是次数不超过  $k$  次的多项式，则称  $p_k(x)$  为具有划分  $\Delta$  的分段  $k$  次插值多项式。



## 线性分段插值

问题：给定  $[a, b]$  区间上  $n+1$  个节点  
( $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ ) 和相应的函数值

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_n$
$y$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$\cdots$	$y_n$

构造满足上述条件的次数不超过一次的分段插值多项式  $p_1(x)$ ，满足插值条件： $p_1(x_i) = y_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 。

解：构造多项式  $p_1(x) = y_i \varphi_0(x) + y_{i+1} \varphi_1(x)$ ， $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 。  
其中  $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$  为一次多项式且满足插值条件：

$$p_1(x_i) = y_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

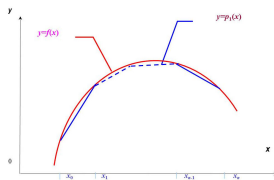


## 线性分段插值 (续)

可得插值基函数:

$$\varphi_0(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$



分段一次插值

分段插值的特点是算法简单, 计算量小, 但精度不高, 插值曲线也不光滑。



## 分段线性插值例子

例题：已知  $y = x^2$  在  $x = 1, 2, 3$  点的值为 1, 4, 9。构造分段线性插值多项式，并求在  $x = 1.2$  和 2.5 处的近似值。

解：令  $p_1(x) = y_i\varphi_0(x) + y_{i+1}\varphi_1(x)$ ，得插值基函数：

$$\varphi_0(x) = \frac{x-2}{1-2}, \quad \varphi_1(x) = \frac{x-1}{2-1}, \quad x \in [1, 2]$$

$$\varphi_0(x) = \frac{x-3}{2-3}, \quad \varphi_1(x) = \frac{x-2}{3-2}, \quad x \in [2, 3]$$

当  $x \in [1, 2]$  时， $p_1(x) = 1 \cdot \frac{x-2}{1-2} + 4 \cdot \frac{x-1}{2-1} = 3x - 2$

当  $x \in [2, 3]$  时， $p_1(x) = 4 \cdot \frac{x-3}{2-3} + 9 \cdot \frac{x-2}{3-2} = 5x - 6$

所以

$$p_1(1.2) = 3 \cdot 1.2 - 2 = 1.6, \quad \text{实际上 } 1.2^2 = 1.44$$

$$p_2(2.5) = 5 \cdot 2.5 - 6 = 6.5, \quad \text{实际上 } 2.5^2 = 6.25$$



## 分段三次 Hermite 插值

下面介绍分段三次 Hermite 插值以进一步改进逼近效果。

问题：给定  $[a, b]$  区间上  $n+1$  个节点

$(a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b)$  和相应的函数值及导数值，如下表所示。

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_n$
$y$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$\cdots$	$y_n$
$y'$	$y'_0$	$y'_1$	$y'_2$	$\cdots$	$y'_n$

试构造次数不超过 3 次的分段插值多项式  $p_3(x)$ ，满足插值条件：

$$p_3(x_i) = y_i \quad p'_3(x_i) = y'_i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

我们构造多项式

$$p_3(x) = y_i \varphi_0(x) + y_{i+1} \varphi_1(x) + y'_i \psi_0(x) + y'_{i+1} \psi_1(x)$$





## 分段三次 Hermite 插值 (续)

可得插值基函数:

$$\varphi_0(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\varphi_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right) \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\psi_0(x) = (x - x_i) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\psi_1(x) = (x - x_{i+1}) \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$



## 本章小结

本章主要介绍了数值计算中常用的插值方法，主要包括 Lagrange 插值、Newton 插值公式、Hermite 插值和分段插值，并使用例子对各种插值进行了详细分析。

- 问题的提出；
- 拉格朗日 (Lagrange) 插值；
- Newton 插值公式；
- 埃尔米特插值；
- 分段插值；



## 练习题

- 1 编程实现拉格朗日插值算法。
- 2 编程实现牛顿插值算法。



# 谢谢!

AUTHOR: Cheng Yong

ADDRESS: Dept. of Computer  
Beijing University of Chemical Technology  
Beijing, 100029, China

EMAIL: [buctcourse@163.com](mailto:buctcourse@163.com)