计算方法

Ch03 数值积分

程勇

buctcourse@163.com

http://www.buct.edu.cn

Dept. of Computer
Beijing University of Chemical Technology

Sept. 19, 2019

提纲

1. Ch01 概论
2. Ch02 插值方法
3. Ch03 数值积分
4. Ch04 方程求根的迭代法
5. Ch05 线性方程组的迭代法
6. Ch06 线性方程组的直接法
7. Ch07 常微分方程的差分法

本章提纲

机械求积

Newton-Cotes 公式

复化求积公式

龙贝格算法

Gauss 公式

传统求积方法

对于积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

如果知道 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$，则由 Newton-Leibniz 公式可求得：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\mid_a^b = F(b) - F(a)$$

但事实上，我们不难发现，微积分方法求积分也确有其局限性：

1. $f(x)$ 根本不存在，往往只是给出一张数据表来表示函数的关系；
2. 被积函数没有初等函数表示的原函数；
3. $f(x)$ 的表达式结构复杂，求原函数较困难；

数值积分求解方法

显然这些情况下将无法运用 Newton-Leibniz 来求积分，而需要建立定积分的近似计算公式。这类方法很多, 但最常用的一种方法是利用插值多项式来构造数值求积公式，具体步骤如下:

1. 构造一个多项式 $p(x)$ 逼近被积函数 $f(x)$；
2. 以 $p(x)$ 的积分近似代替 $f(x)$ 的积分；即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b p\left(x\right)\mathrm{d}x$$

多项式 $p(x)$ 的积分则是大家都会计算的，下面就根据这一想法构造计算定积分的各种近似计算公式。

机械求积

依据积分中值定理，对于连续函数 $f(x)$，在 $[a,b]$ 内存在一点 ξ，成立

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\,f(\xi)$$

即底为 $b-a$ 而高为 $f(\xi)$ 的矩形面积恰恰等于所求曲边梯形的面积。称 $f(\xi)$ 为区间 $[a,b]$ 上的平均高度，而这一平均高度是很难计算的，但可以采用另一类办法来解决这一问题，就是对平均高度 $f(\xi)$ 提供一种近似算法。

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

一般地，在求积分时，取 $[a,b]$ 内若干个节点 x_i 处的高度 $f(x_i)$ ，通过加权平均的方法得出平均高度 $f(\xi)$ 的近似值，这类求积方法称机械求积，式中 x_i 称为求积节点，λ_i 称为求积系数。

梯形求积公式

过两点 a, b 作直线 (两点 Lagrange 插值)

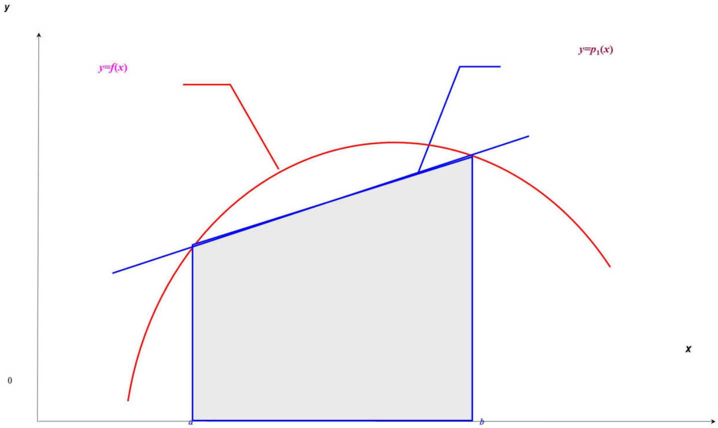
$$p_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

用 $p_1(x)$ 代替 $f(x)$ 得:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b p_1(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)\right)\mathrm{d}x \\
&= (b-a)\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right) \\
&= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))
\end{aligned}$$

称为梯形求积公式 (两点公式)。

梯形求积公式几何意义



梯形求积

梯形求积例子

例：利用梯形求积公式计算定积分：

$$\int_{0.5}^{1} \sqrt{x}\mathrm{d}x$$

解：依梯形求积公式有：

$$\begin{aligned}\int_{0.5}^{1} \sqrt{x}\mathrm{d}x &\approx \frac{1-0.5}{2}(\sqrt{0.5}+\sqrt{1}) \\ &= 0.4267767\end{aligned}$$

积分准确值为：

$$\begin{aligned}\int_{0.5}^{1} \sqrt{x}\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}|_{0.5}^{1} \\ &= 0.43096441\end{aligned}$$

求积公式的代数精度

机械求积公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

具有 m 阶 (代数) 精度，如果它对于任意次数不超过 m 次多项式 $f(x) = p_k(x)(0 \le k \le m)$ 是准确的，但对于 $m+1$ 次多项式 $f(x) = p_{m+1}(x)$ 不准确。即有：

$$\int_a^b p_k(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_k(x_i) \quad k = 0, 1, 2, \cdots, m$$

$$\int_a^b p_{m+1}(x)\,\mathrm{d}x \neq (b-a)\sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_{m+1}(x_i)$$

求积公式的代数精度 (续)

求积公式代数精度的判断可以简化如下：如果求积公式对于任意次数不超过 m 次的幂函数 $f(x) = x^k (0 \le k \le m)$ 是准确的，但对于 $m+1$ 次幂函数 $f(x) = x^{m+1}$ 不准确，则可判定求积公式：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

具有 m 阶 (代数) 精度。

例：判断梯形求积公式的代数精度。

对梯形求积公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

求积公式的代数精度 (续)

当 $f(x)=1$ 时

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b 1\,dx=b-a$$

$$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))=\frac{b-a}{2}(1+1)=b-a$$

因此有：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

当 $f(x)=x$ 时

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b x\,dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))=\frac{b-a}{2}(a+b)=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

求积公式的代数精度 (续)

因此有：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

当 $f(x) = x^2$ 时

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

$$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = \frac{b-a}{2}(a^2+b^2)$$

因此：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \neq \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

由定义可知，梯形求积公式具有 1 次代数精度。

Newton-Cotes 公式

Newton-Cotes 公式是指在等距节点下使用 Lagrange 插值多项式建立的数值求积公式。

设将求积区间 $[a, b]$ 划分为 n 等分，选取等分点

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

作为求积节点构造求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

这种求积公式称为 Newton-Cotes 公式。

Simpson 求积公式

将求积区间 $[a, b]$ 两等分，过三点 $a, (a+b)/2, b$ 作抛物线 (三点 Lagrange 插值)

$$
\begin{aligned}
p_2(x) = {} & \frac{2}{(b-a)^2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,f(a) \\
& - 2\frac{2}{(b-a)^2}(x-a)(x-b)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& + \frac{2}{(b-a)^2}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)f(b)
\end{aligned}
$$

用 $p_2(x)$ 代替 $f(x)$ 得:

$$
\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)
$$

称为 Simpson 公式，这是 Newton-Cotes 公式的一个特例。

Simpson 公式计算例子

例：利用 Simpson 公式计算定积分：

$$\int_{0.5}^{1} \sqrt{x}dx$$

解：由 Simpson 公式：

$$\int_{0.5}^{1} \sqrt{x}dx \approx \frac{1-0.5}{6}(\sqrt{0.5}+4\sqrt{0.75}+\sqrt{1})$$
$$= 0.43093403$$

积分准确值为：

$$\int_{0.5}^{1} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}|_{0.5}^{1} = 0.43096441$$

同样可以证明 Simpson 求积公式具有三次代数精度。

Newton-Cotes 公式

将求积区间 $[a, b]$ 划分为 n 等分，选取等分点

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

构造 n 次 Lagrange 插值

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) f(x_i)$$

用 $L_n(x)$ 代替 $f(x)$ 得：

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) f(x_i)\,dx$$

Newton-Cotes 公式 (续)

$$= \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = (b-a) \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

其中

$$A_i = \int_a^b \left(\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) dx$$

称为 Newton-Cotes 公式。梯形求积公式和 Simpson 公式是 Newton-Cotes 公式当 $n=1$ 和 $n=2$ 时的两个特例。

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \quad \text{梯形公式}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right) \quad \text{Simpson 公式}$$

Newton-Cotes 公式求积系数

n	求积系数					
1	1/2	1/2				
2	1/6	4/6	1/6			
3	1/8	3/8	3/8	1/8		
4	7/90	16/45	2/15	16/45	7/90	
5	19/288	25/96	25/144	25/144	25/96	19/288

Newton-Cotes 求积公式例子

例题：利用 Newton-Cotes 公式 (取 $n=4$，此时称为 Cotes 公式) 计算定积分：

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}dx$$

解：根据 Newton-Cotes 公式：

$$\begin{aligned}\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}dx &\approx \frac{1-0.5}{90}(7\sqrt{0.5}+32\sqrt{0.625}\\ &+12\sqrt{0.75}+32\sqrt{0.875}+7)\\ &=0.43096407\end{aligned}$$

积分准确值为：

$$\begin{aligned}\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0.5}^{1}\\ &=0.43096441\end{aligned}$$

Newton-Cotes 公式代数精度

可以证明 Newton-Cotes 公式的代数精度至少为 n。且当 n 为偶数时，代数精度可达 $n+1$。如：

$n=1$ 时 (梯形公式)，代数精度为 1；

$n=2$ 时 (Simpson 公式)，代数精度为 $2+1=3$；

$n=4$ 时 (Cotes 公式)，代数精度为 $4+1=5$，以此类推。

复化求积公式

为了提高求积公式的精度，又使算法简单易行，往往使用复合方法，即将积分区间 $[a,b]$ 分成若干个子区间，然后在每个小区间上使用低阶 Newton-Cotes 公式，最后将每个小区间上的积分的近似值相加作为积分的近似值，这种方法称为复化求积法。

复化梯形公式

将求积区间 n 等分，步长 $(b-a)/n$，分点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$，对每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 使用梯形求积公式，则

$$
\begin{aligned}
I = \int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1})) \\
&= \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right) = T_n
\end{aligned}
$$

复化梯形求积例子

例题：已知 $f(x)=x^3-2x+1$ 由表给出

x	1	3/2	2	5/2	3
$f(x)$	0	11/8	5	93/8	22

用复化梯形公式近似计算定积分 $\int_1^3 f(x)\,dx$。

解：此时 $n=4$

$$\begin{aligned}T_4 &= \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right)\\ &= \frac{3-1}{2\cdot 4}\left(f(1)+2(f(3/2)+f(2)+f(5/2))+f(3)\right)\\ &= \frac{1}{4}(0+2(11/8+5+93/8)+22)=14.5\end{aligned}$$

实际上 $\int_1^3 (x^3-2x+1)\,dx=14$

复化 Simpson 公式

将求积区间 n 等分的基础上，再将每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]2$ 等份，记内分点为 $x_{i+1/2}$
$x_i = a + ih, x_{i+1/2} = a + (i + 1/2)h, (i = 0, 1, 2, 3, \cdots, n)$。对小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 使用 Simpson 求积公式，得到：

$$
\begin{aligned}
I = \int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \\
&\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \left(f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1}) \right) \\
&= \frac{b-a}{6n} \left(f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right) \\
&= S_n
\end{aligned}
$$

复化 Cotes 公式

将求积区间 n 等分的基础上，再将每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 分为 4 等分，记内分点为 $x_{i+1/4}, x_{i+1/2}, x_{i+3/4}$，即：

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih \\ x_{i+\frac{1}{4}} &= a + (i + \frac{1}{4})h \\ x_{i+\frac{1}{2}} &= a + (i + \frac{1}{2})h \\ x_{i+\frac{3}{4}} &= a + (i + \frac{3}{4})h \\ x_{i+1} &= a + (i+1)h \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

复化 Cotes 公式 (续)

对小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 使用 Cotes 求积公式，则

$$
\begin{aligned}
I = \int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \\
&\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{90}\left(7f(x_i) + 32f\left(x_{i+\frac{1}{4}}\right)\right. \\
&\left. + 12f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 7f(x_{i+1})\right) \\
&= \frac{b-a}{90n}\left(7f(a) + 32\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_{i+\frac{1}{4}}\right) + 12\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})\right. \\
&\left. + 32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b)\right) = C_n
\end{aligned}
$$

复化求积例子

例题：用函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的数据表计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$。

x	$f(x)$
0	1.0000000
1/8	0.9973978
2/8	0.9896158
3/8	0.9767267
4/8	0.9588510
5/8	0.9361556
6/8	0.9088516
7/8	0.8771925
1	0.8414709

复化求积例子 (续)

解：此时 $n=8$

$$
\begin{aligned}
T_8 &= \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right)\\
&= \frac{1-0}{2\cdot 8}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{8-1} f(x_i)+f(b)\right)\\
&= 0.945690806
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_4 &= \frac{b-a}{6n}\left(f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right)\\
&= \frac{1-0}{6\cdot 4}\left(f(a)+4\sum_{i=0}^{4-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{4-1} f(x_i)+f(b)\right)\\
&= 0.946083254
\end{aligned}
$$

复化求积例子 (续)

同理，应用复合 Cotes 公式可求得 C_2 值如下：

$$C_2 = 0.94608307$$

该积分的“精确值”为

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 0.9460831$$

对上述三个结果进行比较可以看出，T_8 精度最低、S_4 精度次高，C_2 精度最高。上述积分都需要提供 9 个节点上的函数值，工作量基本相同，然而精度却相差很大，同积分的精确值比较，复化梯形法的结果有 3 位有效数值，而复化 Simpson 法和 Cotes 的结果有 8 位有效数值。

梯形法加速

复化梯形法的算法简单但精度低。能否加工梯形值来提高精度呢？考查二分前后的梯形公式：

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \\
T_2 &= \frac{1}{2}T_1 + \frac{b-a}{2}f(\frac{a+b}{2}) \\
&= \frac{b-a}{4}(f(a)+2f(\frac{a+b}{2})+f(b)) \\
S_1 &= \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))
\end{aligned}
$$

因此，我们得到

$$
S_1 = \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1
$$

Romberg 算法

推广到复合求积公式，有：

$$S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

同理，我们可以得到：

$$C_n = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n$$
$$R_n = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n$$

此方法称为 Romberg 公式，它是由复化梯形公式、复化 Simpson 公式依次递推求得的，松弛因子是 $\omega = 1/63$。它能将粗糙的梯形公式逐步加工成高精度的 Romberg 公式，称这种算法为 Romberg 算法。综合表示如下：

Romberg 算法 (续)

$$
\begin{cases}
T_1 = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \\
T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\
S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n \\
C_n = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n \\
R_n = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n
\end{cases}
$$

$n = 2^k, k = 0, 1, 2, 3, \cdots$，以上整个过程称为 Romberg 算法。

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	T_1			
1	T_2	S_1		
2	T_4	S_2	C_1	
3	T_8	S_4	C_2	R_1
4	T_{16}	S_8	C_4	R_2

Romberg 算法例子

例题：利用 Romberg 算法计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

解：计算求得

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3	0.9456909	0.9460834	0.9460831	0.9460831

得到 $R_1 = 0.9460831$。

Gauss 公式

Newton-Cotes 公式在构造时，限定积分区间的等分点作为求积节点，这样做在简化处理的同时也限制了代数精度。如果求积节点也可自由选择，即机械求积公式：

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

中的 λ_i, x_i 共 $2n+2$ 个均为待定参数，适当选取这些参数可以使公式具有 $2n+1$ 次代数精度。这种高精度的求积公式称为 Gauss 公式。

积分区间变换

不失一般性，把积分区间取成 $[-1,1]$，这是因为利用变换：

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

总可将区间 $[a,b]$ 变换成 $[-1,1]$，而积分变为：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$$

其中

$$g(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)$$

一点 Gauss 公式

对于一点 Gauss 公式 ($n=0$，具有一次代数精度)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\sum_{i=0}^{0} \lambda_i f(x_i) = 2\lambda_0 f(x_0)$$

因此当 $f(x)=1, f(x)=x$ 时上式精确成立，有：

$$\begin{cases} 2\lambda_0 = 2 \\ 2\lambda_0 x_0 = 0 \end{cases}$$

解得：$\lambda_0 = 1, x_0 = 0$，因此得到：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx G_1 = 2f(0)$$

两点 Gauss 公式

对于两点 Gauss 公式 ($n=1$，具有三次代数精度)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\sum_{i=0}^{1} \lambda_i f(x_i) = 2(\lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1))$$

因此当 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ 时上式精确成立，有：

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 = 1 \\ \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 = 0 \\ \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 = \frac{1}{3} \\ \lambda_0 x_0^3 + \lambda_1 x_1^3 = 0 \end{cases}$$

解得：$\lambda_0 = \lambda_1 = \frac{1}{2}, x_1 = -x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$，因此得到：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx G_2 = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

三点 Gauss 公式

对于三点 Gauss 公式 ($n=2$，具有五次代数精度)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\sum_{i=0}^{2}\lambda_i f(x_i) = 2(\lambda_0 f(x_0)+\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2))$$

因此当 $f(x)=1,x,x^2,x^3,x^4,x^5$ 时上式精确成立，有：

$$\begin{cases}\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1\\ \lambda_0x_0+\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=0\\ \lambda_0x_0^2+\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2=\frac{1}{3}\\ \lambda_0x_0^3+\lambda_1x_1^3+\lambda_2x_2^3=0\\ \lambda_0x_0^4+\lambda_1x_1^4+\lambda_2x_2^4=\frac{1}{5}\\ \lambda_0x_0^5+\lambda_1x_1^5+\lambda_2x_2^5=0\end{cases}$$

三点 Gauss 公式 (续)

解得:

$$\begin{cases} \lambda_0 = \frac{5}{18} \\ \lambda_1 = \frac{4}{9} \\ \lambda_2 = \frac{5}{18} \\ x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \\ x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} \end{cases}$$

因此得到:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx G_3 = \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

一般高斯求积公式

取积分区间为 $[-1,1]$，考察如下形式的求积公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

使其成为 Gauss 型的，具有 $2n+1$ 次代数精度。即满足：

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot 1 \\ \int_{-1}^{1} x dx = 2\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i \\ \int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i^2 \\ \cdots \\ \int_{-1}^{1} x^{2n+1}\,dx = 2\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i^{2n+1} \end{cases}$$

一般高斯求积公式 (续)

对上述积分计算可得如下的 $2n+2$ 个方程组:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i^2 = \frac{1}{3} \\ \cdots \\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i^{2n+1} = 0 \end{cases}$$

其中,

$$\int_{-1}^{1} x^k dx = 0, \quad k = 1, 3, \cdots, 2n+1$$

因此,可解出 λ_i 和 x_i 共 $2n+2$ 个未知数。

一般积分区间的高斯公式

一般情况下，对于积分区间 $[a, b]$，则可由

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt$$

得：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx G_1 = 2f(0)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx G_1 = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx G_2 = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx G_2 = \frac{b-a}{2}\left(f(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}})\right)$$

一般积分区间的高斯公式 (续)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx G_3 = \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx G_3 = \frac{b-a}{2}\Bigg(\frac{5}{9}f(\frac{a+b}{2} - \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{b-a}{2}) + \frac{8}{9}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{5}{9}f(\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{b-a}{2})\Bigg)$$

例题：试构造如下形式的 Gauss 型求积公式：

$$\int_{0}^{1} \sqrt{x} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

高斯公式例子

解：此时 $n=1$，另它对于 $f(x)=1,x,x^2,x^3$ 精确成立，得到如下方程组：

$$\begin{cases} A_0+A_1=\frac{2}{3} \\ A_0x_0+A_1x_1=\frac{2}{5} \\ A_0x_0^2+A_1x_1^2=\frac{2}{7} \\ A_0x_0^3+A_1x_1^3=\frac{2}{9} \end{cases}$$

求得：

$$x_0=0.821163, x_1=0.289949,$$
$$A_0=0.389111, A_1=0.277556$$

因此，求得的高斯积分公式为：

$$\int_0^1 \sqrt{x}f(x)\,dx \approx 0.389111\cdot f(0.821163)+0.277556\cdot f(0.289949)$$

本章小结

- 机械求积;
- Newton-Cotes 公式;
- 复化求积公式;
- 龙贝格算法;
- Gauss 公式;

练习题

1. 编程实现 Newton-Cotes 求积算法。
2. 编程实现 Simpson 复化求积公式。
3. 编程实现 Gauss 求积算法。

谢谢!

AUTHOR: Cheng Yong
ADDRESS: Dept. of Computer
Beijing University of Chemical Technology
Beijing, 100029, China
EMAIL: buctcourse@163.com