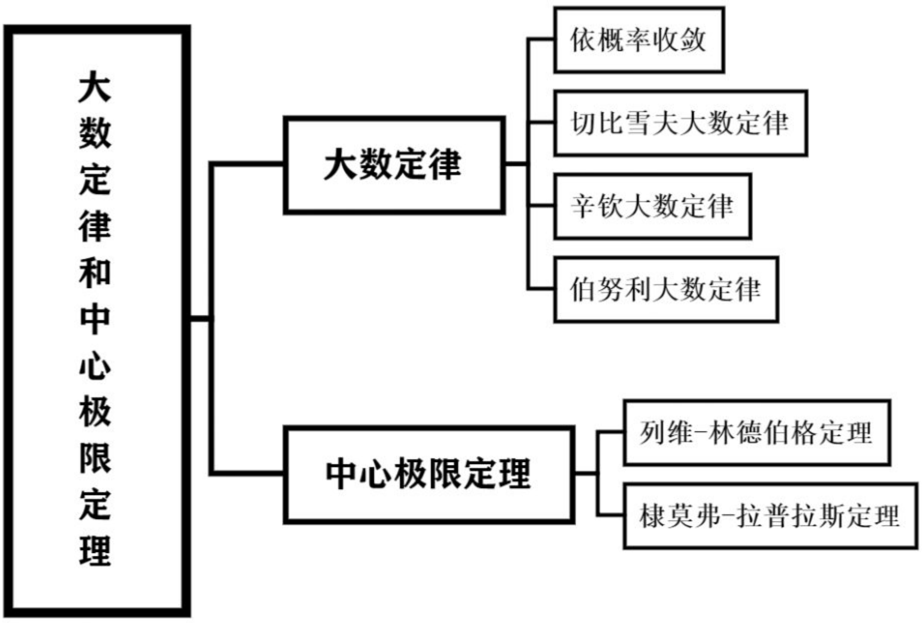
# 第五章 大数定律和中心极限定理

## 知识图解




## 知识讲解

### 一、 大数定律

**1. 依概率收敛**

**定义** 设$\{X_n\}$是一随机变量序列，$a$是常数，若对任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|X_n-a\right|\ge\varepsilon\right\}=0,$$

或等价地有$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|X_n-a\right|<\varepsilon\right\}=1$,则称随机变量序列$\{X_n\}$依概率收敛于$a$,并记作$X_n\xrightarrow{P}a$.

**依概率收敛的性质：**

1) 若$X_n\xrightarrow{P}a$，且$g(x)$在点$a$连续，则$g(X_n)\xrightarrow{P}g(a)$.

2) 若 $X_n\xrightarrow{P}a$ ， $Y_n\xrightarrow{P}b$ ， 且 $g(x,y)$ 在 点 $(a,b)$ 连 续 ， 则 $g(X_n,Y_n)\xrightarrow{P}g(a,b)$.

**2. 切比雪夫大数定律：**

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是一列两两不相关的随机变量序列，期望方差均存在，且方差 $DX_i$ 一致有界，即 $DX_i \le c, i=1,2,\cdots$ 则对 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

特别地，若 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 有相同的期望 $EX_i = \mu$，则有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1 .$$

证明：由 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 两两不相关，有 $D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i \le \frac{c}{n}$.

又由切比雪夫不等式，对 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2} \to 1\left(n \to \infty\right)$$

即 $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$ .

**3. 辛钦大数定律：**设 $\{X_n\}$ 为一独立同分布的随机变量序列，且数学期望存在，$E(X_i) = \mu$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，都有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

**4. 伯努利大数定律：**设 $f_A$ 是 $n$ 重伯努利试验中事件 $A$ 发生的次数，$p$ 是 $A$ 在每次试验中发生的概率，则对任意的 $\varepsilon > 0$，都有：

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{f_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

【例5.1】 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且均服从于参数为2的指数分布,则当 $n \to \infty$时，$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于________.

【例5.2】 设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$为独立同分布的随机变量序列，且概率密度

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases},(i=1,2,\ldots)$$

问是否存在实数$a$，使得对任意$\forall\varepsilon>0$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-a|<\varepsilon\}=1$？若存在，求$a$的值；若不存在，请说明理由

## 二、 中心极限定理

**1. 列维-林德伯格定理：**设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是一列独立同分布的随机变量，且$EX_k=\mu$，$DX_k=\sigma^2>0$，$k=1,2,\cdots$则对任意$x\in R$有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le x\right)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

注：可以简化为如下形式记忆

若$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$独立且服从同一分布$F\left(\mu,\sigma^2\right)$，$EX=\mu,DX=\sigma^2$，则当$n\to\infty$时，________近似服从于$N($\_\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_\_$)$.

**2. 棣莫弗-拉普拉斯定理：**在$n$重伯努利试验中，事件$A$在每次试验中出现的概率为$p\ (0<p<1)$，$X_n$为$n$次试验中事件$A$发生的次数，则对任意$x\in R$有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

**等价定理：**设随机变量序列$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$独立同分布于(0-1)分布，则对任意$x\in R$有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

【例5.3】 某公司有200名员工参加一种资格证书考试，按往年经验，考试通过率为0.8. 试计算这200名员工至少有150人考试通过的概率.

（$\Phi\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right) = 0.9616$）

【例5.4】 某地区运进一批棉花1500包，已知这批棉花每包期望重量为100公斤，标准差为5公斤，现独立重复抽样100包，求这批样本平均重量小于99.5公斤的概率.（$\Phi(1) = 0.8413$）

【例5.5】 （练习）据以往经验，某种电子设备的寿命服从均值为100小时的指数分布. 现随机地取16台，设它们的寿命是相互独立的. 试用中心极限定理求这16台设备的寿命总和大于1920小时的概率. （$\Phi(0.8) = 0.7881$）