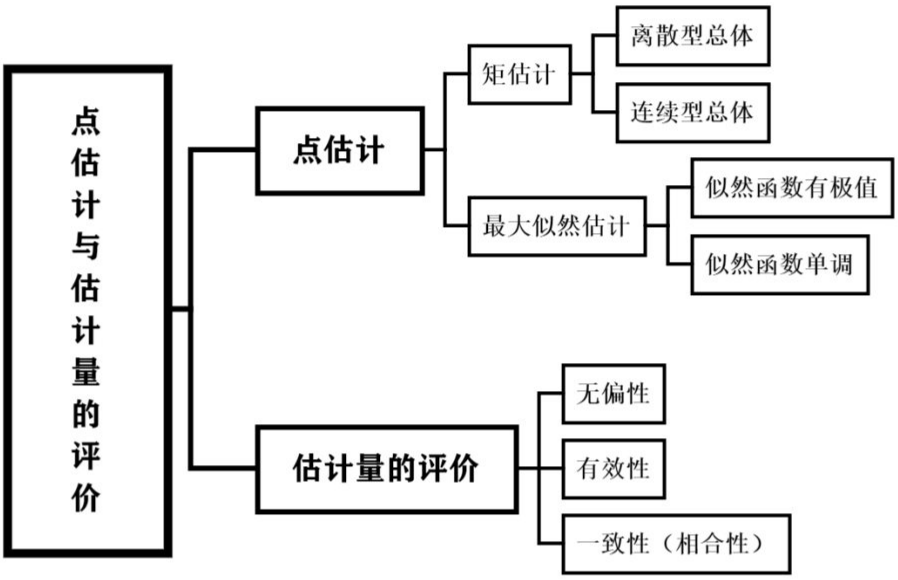
第七章 点估计与估计量的评价

知识图解



知识讲解

一、 点估计

定义： 设总体分布函数$F(x;\theta)$的形式为已知，θ是待估参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体X的一个样本，其样本值为$x_1,x_2,\cdots,x_n$. **点估计**即构造一个适当的统计量$\hat{\theta}=\theta(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，用它的观察值$\hat{\theta}=\theta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$作为未知参数$\theta$的近似值. 称$\hat{\theta}=\theta(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为$\theta$的**估计量**，$\hat{\theta}=\theta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为$\theta$的**估计值.**

二、 矩估计法

定义 用样本矩估计同阶的总体矩，用样本矩的函数估计总体矩的函数，这种估计法称为参数的**矩估计**.

步骤 估计k个未知参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X$样本，令

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l=EX^l(l=1,2,...,k),$$

解得$\hat{\theta}_l=\theta\left(X_1,...,X_n\right)$，$l=1,2,...,k$.

注：

1) 矩估计使用前提是有关的总体矩存在；使用中心矩和原点矩均可.

2) 用样本一阶原点矩 $\overline{X}$ 估计期望 EX，用样本二阶中心矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 估计方差 DX.

三、 最大似然估计法

1. 似然函数

离散型总体 X 设 $P\{X=a_i\}=p(a_i;\theta),\ i=1,2,...,\ \theta\in\Theta$，则称

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

为该总体的似然函数.

连续型总体 X 设 $X\sim f(x;\theta),\ \theta\in\Theta$, 则称

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$$

为该总体的似然函数.

注：将似然函数 $L(\theta)$ 理解为"恰好取到样本值 $x_1,\cdots,x_n$"的概率.

2. 最大似然估计

固定样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，在 $\theta\in\Theta$ 内使似然函数 $L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$ 达到最大的参数值 $\theta(x_1,\cdots,x_n)$，作为参数 θ 的估计值.

最大似然估计不变性原理： 设 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的最大似然估计，函数 $g(\theta)$ 具有单值反函数，则 $g(\hat{\theta})$ 是参数 $g(\theta)$ 的最大似然估计量.

注：设总体 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$（$\mu,\sigma^2$ 都未知），则 $EX=\mu$ 最大似然估计为 $\overline{X}$，$DX=\sigma^2$ 的最大似然估计为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

3. 步骤（以连续型总体 $X\sim f(x;\theta)$ 为例）

1) 构造似然函数 $L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$；

2) 取对数 $\ln L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta)$；

3) **一个参数** 解似然方程 $\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=0$，若有解，即为最大似然估计 $\hat{\theta}$.

两个参数 解似然方程 $\begin{cases}\frac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}=0\\ \frac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}=0\end{cases}$，若有解，即为最大似然估计 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$.

【例7.1】 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}},x>0\\ 0,\text{ 其他}\end{cases},$$

其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自总体X的简单随机样本.

（I）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$，并证明 $\hat{\theta}_M\xrightarrow{P}\theta$；

（II）求 θ 的最大似然估计量.

【例7.2】 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta(0<\theta<\frac{1}{2})$ 是未知参数，利用总体 X 的如下样本值 $3,1,3,0,3,1,2,3$，求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

【例7.3】 设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中$\mu,\sigma^2$是未知参数，$X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自总体$X$的一个简单随机样本，求$\mu,\sigma^2$的矩估计量.

【例7.4】 设总体X的概率密度为

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\alpha, & -1<x<0,\\ \beta, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中α,β为未知参数，总体X的一组样本值为$-0.5, 0.3, -0.2, -0.6, -0.1, 0.4, 0.5, -0.8$, 求$\alpha$的最大似然估计值.

【例7.5】 设某种元件的使用寿命X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)} & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

其中$\theta>0$为未知参数. 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是X的一组样本观测值，求θ的最大似然估计量.

【例7.6】 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是来自总体$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$（$\mu,\sigma^2$均未知）的简单随机样本的观测值，求$\mu$和$\sigma^2$的最大似然估计值.

四、 估计量的评价标准

1．无偏性：设$\hat{\theta}=\theta\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$是未知参数$\theta$的估计量，若$E\left(\hat{\theta}\right)$存在，且对$\forall\theta\in\Theta$有$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$，则称$\hat{\theta}$是$\theta$的无偏估计量，称$\hat{\theta}$具有无偏性.

2. 有效性：设$\hat{\theta}_1=\theta_1\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$与$\hat{\theta}_2=\theta_2\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$都是$\theta$的无偏估计量，若有$D\left(\hat{\theta}_1\right)<D\left(\hat{\theta}_2\right)$，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$更有效.

3. 一致性：设$\hat{\theta}$是θ的估计量，若对$\forall\theta\in\Theta$，有$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\varepsilon\right\}=1$，即$\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta$，则称$\hat{\theta}$是$\theta$的一致估计量.

【例7.7】 设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x),0<x<\theta,\\ 0,\qquad 其他,\end{cases}$$

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的一个简单随机样本，求未知参数θ的矩估计量$\hat{\theta}$，并判断$\hat{\theta}$是否为θ的无偏估计.

【例7.8】 取容量$n=3$的样本X_1,X_2,X_3，证明总体均值μ的三个无偏估计量

$\hat{\mu}_1=\overline{X}=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}X_i$，$\hat{\mu}_2=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3$，$\hat{\mu}_3=X_1$中，$\hat{\mu}_1=\overline{X}$比$\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3$都有效.