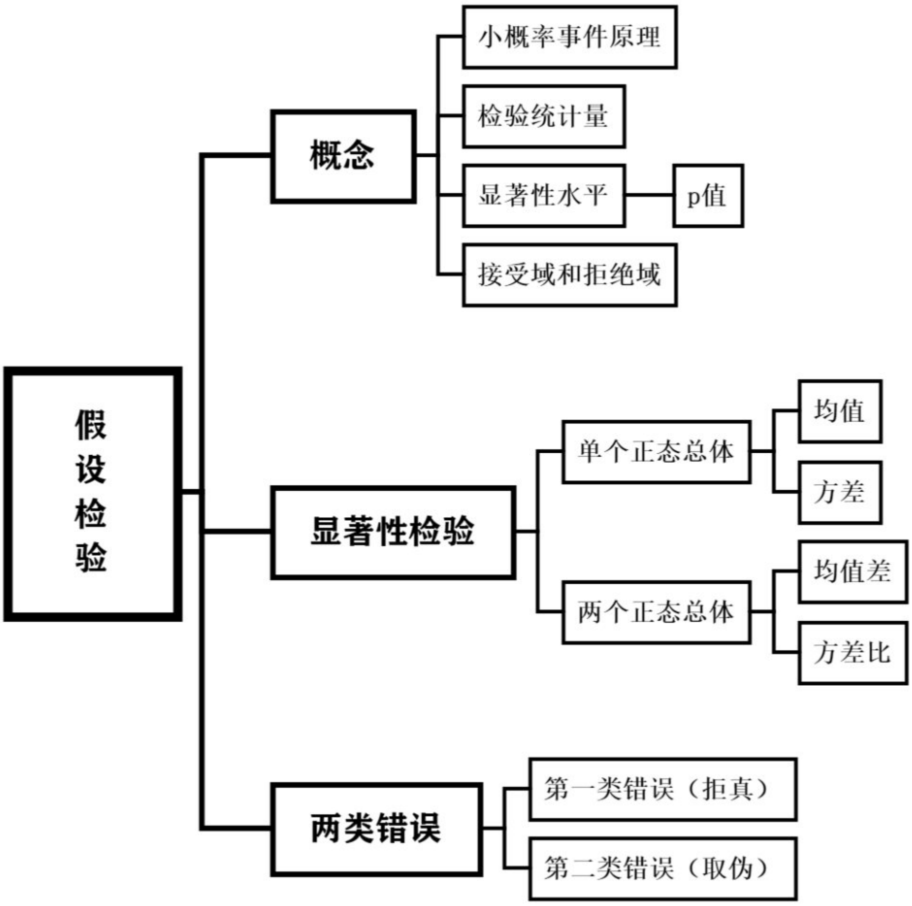
第九章 假设检验

知识图解



知识讲解

一、假设检验

1. 假设检验问题：

先对总体分布中某些未知参数作某种假设，然后由所抽取的样本构造合适的统计量，对假设的真伪进行判断，并作出接受或拒绝决定的问题，称为**假设检验**. 提出的假设称为**原假设**，记作 H_0，与原假设对立的假设称为**备择假设**，记作 H_1.

2. 假设检验的基本思想（"女士品茶"）：

"小概率事件原理"，即小概率事件在一次试验中几乎不可能发生，如果发生，则有理由认为假设不成立，从而拒绝假设.

3. 两类错误：

第一类错误（拒真错误）：H_0 实际正确，拒绝 H_0；

第二类错误（取伪错误）：H_0 实际错误，接受 H_0.

4. 显著性检验：

给定样本容量，控制犯第一类错误的概率，使它不大于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，这种检验问题称为**显著性检验问题**，给定的 α 称为**显著性水平.**

5. 假设检验的步骤：

1) 提出原假设 H_0 和备择假设 H_1；
2) 选取适当的检验统计量 T，在 H_0 成立的条件下求出其分布；
3) 根据给出的显著性水平 α 求出拒绝域；
4) 用样本观测值计算 T 的统计值，若落在拒绝内，则拒绝原假设 H_0，否则接受原假设 H_0.

注：假设检验只通过一组样本值进行，在数学上并不能证明一个命题一定成立，但可以作为反例推翻一个命题.当检验统计量 T 落入拒绝域而拒绝原假设 H_0 时，我们把握是比较大的.而当检验统计量 T 未落入拒绝域，严格意义上称为"没有充分理由拒绝"，所以认为 H_0 成立.

【例9.1】 （双侧检验）设总体$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$\sigma$已知，$x_1,x_2,\ldots,x_n$为来自$X$的样本值，现对$\mu$进行假设检验. 试说明在显著性水平$\alpha=0.05$下，关于$\mu$的检验问题$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$的拒绝域为$|z|=\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>z_{\alpha/2}$.

【例9.2】 （单侧检验）设一批零件的长度X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中$\sigma^2$未知，$\mu$未知. 现从中随机抽取 n 个零件，测得样本均值为$\overline{x}$，样本方差为s^2，则在显著性水平α下，关于μ的检验问题$H_0:\mu\leq\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$的拒绝域为________________.

【例9.3】 设总体X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中$\mu$未知，$X_1,X_2,\ldots,X_n$为其样本，若假设检验问题为$H_0:\sigma^2=1,H_1:\sigma^2\neq1,$ 则采用的检验统计量应为________.

【例9.4】 在一个确定的假设检验中，与判断结果相关的因素有（ ）

（A）样本值与样本容量 （B）显著性水平α

（C）检验统计量 （D）A,B,C 同时成立

【例9.5】 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2未知，$x_1,x_2,\ldots,x_n$为来自X的样本值，现对μ进行假设检验. 若在显著性水平$\alpha = 0.05$下拒绝了$H_0:\mu=\mu_0$，则当显著性水平改为$\alpha = 0.01$时，下列结论正确的是（ ）

（A）必须拒绝H_0 （B）必须接受H_0

（C）犯第一类错误的概率更大 （D）可能接受，也可能拒绝H_0

注：显著性水平α越小，则拒绝域越小，检验统计值落入拒绝域的概率越小，故更难以拒绝原假设H_0而接受它.

6. 假设检验的 p 值：在一个假设检验问题中，利用样本观测值能够作出拒绝原假设H_0的最小显著性水平称为检验的p值.

注：

1)α是要求的/希望的显著性水平. 因此，若$\alpha \ge p$，即在显著性p下拒绝H_0，则显著性α下必拒绝H_0；若$\alpha < p$，在显著性p下拒绝H_0，则显著性α下不一定拒绝H_0，从而接受H_0.

2) 统计软件中通常输出假设检验的p值，与显著性水平α比较大小而做判断；也可通过检验统计值是否落入拒绝域判断. 实际中，p很小时（如$p \le 0.001$）即拒绝H_0，p很大时（如$p > 0.5$）即接受H_0. 只有p与α才作比较.

二、正态总体参数的显著性检验汇总表（显著性水平为α）

	条件	原假设H_0	备择假设H_1	检验统计量	拒绝域
一个正态总体	σ已知	$\mu=\mu_0$ $\mu\le\mu_0$ $\mu\ge\mu_0$	$\mu\ne\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ $\sim N(0,1)$	$\lvert z\rvert>z_{\alpha/2}$ $z>z_\alpha$ $z<-z_\alpha$
	σ未知	$\mu=\mu_0$ $\mu\le\mu_0$ $\mu\ge\mu_0$	$\mu\ne\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ $\sim t(n-1)$	$\lvert t\rvert>t_{\alpha/2}(n-1)$ $t>t_\alpha(n-1)$ $t<-t_\alpha(n-1)$
	μ已知	$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\le\sigma_0^2$ $\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2\ne\sigma_0^2$ $\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$ $\sim\chi^2(n)$	$\chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n)$或 $\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$； $\chi^2>\chi^2_{\alpha}(n)$； $\chi^2<\chi^2_{1-\alpha}(n)$
	μ未知	$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\le\sigma_0^2$ $\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2\ne\sigma_0^2$ $\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ $\sim\chi^2(n-1)$	$\chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$或 $\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$； $\chi^2>\chi^2_{\alpha}(n-1)$； $\chi^2<\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
两个正态总体	σ_1^2,σ_2^2已知	$\mu_1=\mu_2$ $\mu_1\le\mu_2$ $\mu_1\ge\mu_2$	$\mu_1=\mu_2$ $\mu_1>\mu_2$ $\mu_1<\mu_2$	$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ $\sim N(0,1)$	$\lvert z\rvert>z_{\alpha/2}$ $z>z_\alpha$ $z<-z_\alpha$
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知	$\mu_1=\mu_2$ $\mu_1\le\mu_2$ $\mu_1\ge\mu_2$	$\mu_1=\mu_2$ $\mu_1>\mu_2$ $\mu_1<\mu_2$	$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ $\sim t(n_1+n_2-2)$	$\lvert t\rvert>t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$ $t>t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t<t_\alpha(n_1+n_2-2)$
	-	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\le\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$ $\sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ $\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$F>F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或 $F<F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$； $F>F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$； $F<F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

注：其中$S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

7. 假设检验与区间估计的关系：检验统计量与枢轴量相同. 置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间与显著性水平为α的双侧检验问题是一一对应的.

【例9.6】 设α为显著性水平，β为置信水平，若λ为T统计量的临界值，则$\alpha = P\{_______\}$, $\beta = P\{\_\_\_\_\_\_\_\}$.

【例9.7】 某糖厂用自动打包机装糖，已知每袋糖的重量(单位：千克)服从正态总体分布$N(\mu, 4)$，今随机地抽查了 9 袋，称出它们的重量如下：

50，48，49，52，51，47，49，50，50

问在显著性水平$\alpha = 0.05$下能否认为袋装糖的平均重量为 50 千克？

【例9.8】 某批矿砂的 5 个样本的含金量为：

3.25, 3.27, 3.24, 3.26, 3.24

设测定值总体服从正态分布，问在显著性水平$\alpha = 0.1$ 下能否认为这批矿砂的金含量的均值为3.25？

【例9.9】 某部门对当前市场的鸡蛋价格情况进行调查. 所抽查的全省 19 个集市上，算得平均售价为 3.399 元 / 500 克. 根据以往经验，鸡蛋售价服从正态分布. 已知往年的平均售价一直稳定在 3.25 元 / 500 克左右，标准差为 0.262 元 / 500 克. 问在显著性水平 0.05 下，能否认为全省当前的鸡蛋售价明显高于往年？

【例9.10】 某种螺丝的直径 $X \sim N(\mu,64)$，先从一批螺丝中抽取10个测量其直径，其样本均值 $\bar{x} = 575.2$，方差 $s^2 = 68.16$。问能否认为这批螺丝直径的方差仍为64（$\alpha = 0.05$）？

【例9.11】 某厂生产的电池的寿命长期以来服从方差 $\sigma^2 = 5000$ 的正态分布。现从一批产品中随机抽取26个电池，测得其寿命的样本方差 $s^2 = 9200$，问能否推断这批电池寿命的波动性较以前有显著的增大（$\alpha = 0.02$）？

【例9.12】 某厂铸造车间为提高铸件的耐磨性而试制了一种镍合金铸件以取代铜合金铸件，为此，从两种铸件中各取一个容量分别为 8 和 9 的样本，测定并计算得其硬度均值为镍合金 $\overline{x}=73.39$，铜合金 $\overline{y}=68.2756$，且 $\sum_{i=1}^{8}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=191.7958$，$\sum_{i=1}^{9}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=91.1548$. 根据经验，硬度服从正态分布，且方差保持不变，试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下判断镍合金的硬度是否有明显提高.

【例9.13】 甲乙两家作坊生产某种餐盘，餐盘的直径服从正态分布，总体方差反映了制作精度，现从各自生产的餐盘中分别抽取 7 只和 8 只，测得其直径为

X（作坊甲）：15.6 16.2 16.7 15.8 15.5 15.8 16.8

Y（作坊乙）：15.0 15.9 16.1 16.5 16.4 15.8 15.7 16.0

试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下判断两家作坊的制作精度有无差别.