Vier-Farben-Satz

******** Nguyen

Oktober 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **4**

2 Graphentheorie **5**

2.1 Der Eulersche Polyedersatz 5

2.2 Fünf Nachbarn oder weniger 6

3 Sechs-Farben-Satz **8**

3.1 Beweis 8

4 Fünf-Farben-Satz **9**

4.1 Beweis 9

5 Vier-Farben-Satz **12**

5.1 Beschreibung 12

5.2 Alltag 12

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Zuhilfenahme der angegeben Quellen und Hilfsmittel angefertigt zu haben. Aus den angegebenen Materialien entnommene Inhalte und Zitate sind als solche kenntlich gemacht. Ich erkläre, dass ich zu diesem Thema nicht schon einmal eine solche Arbeit angefertigt habe.

1 Einführung

Der Vier-Farben-Satz ist eines der am simpelsten zu erklärenden Probleme. Er besagt, dass man jede Karte mit vier Farben oder weniger einfärben kann, ohne dass sich dabei zwei Flächen gleicher Farbe berühren. Es ist insofern einfach, dass man den Vier-Farben-Satz einem acht-jährigem Kind schildern könnte und ihm die Grundaussage klar wäre. Es ist relativ einfach eine Karte zu finden, welche mehr als drei Farben benötigt, auch ist es relativ einfach einen Weg zu finden um eine Karte mit fünf einzufärben. Das wahrscheinlich Bekannteste am Vier-Farben-Satz ist nicht der Fakt, dass man jede Karte mit nur vier Farben einfärben kann, sondern dass das Problem im Verhältnis zur Komplexität des Beweises so leicht zu erklären ist.

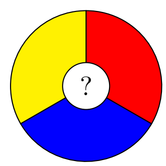
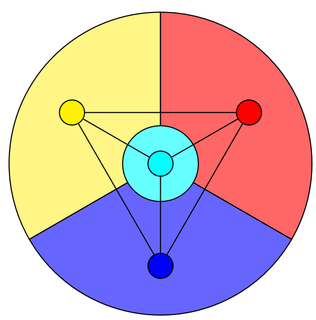


Abbildung 1: Beispiel für vier Farben

2 Graphentheorie

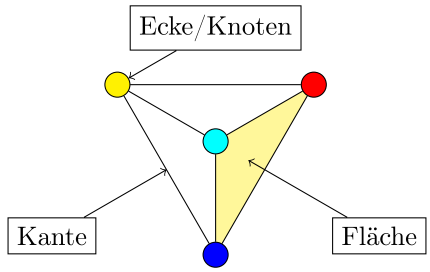
Mathematiker lieben es Probleme zu verallgemeinern. Um den Vier-Farben-Satz in ein Format zu bringen, mit dem gearbeitet werden kann, kann man jede Fläche einer Karte als einen Punkt (fachsprachlich: Knotenpunkt) auf einem planaren Graphen (planar bedeutet, dass sich keine Kante mit einer anderen schneidet) und jede Berührung zwischen jeder Fläche mit einer Linie (fachsprachlich: Kante) darstellen. Das macht es einfacher, denn somit werden Karten, die verschieden aussehen aber in der Graphentheorie an sich gleich sind, auch gleich dargestellt. Dadurch kann das Problem allgemeiner formuliert werden. Aus *"Flächen, bei denen sich die gleichen Farben nicht berühren dürfen"* wird *"Knoten, die nicht mit anderen gleichfarbigen Knoten verbunden werden dürfen"*. Im Allgemeinen lässt sich hier auch die Verbindung zu den Kameras und Stundenplänen ziehen, man bildet Knoten für jedes Objekt, verbietet bestimmte Arten von Verbindungen zwischen diesen Knoten und muss mit diesen Limitationen auf das effizienteste Ergebnis kommen.



2.1 Der Eulersche Polyedersatz

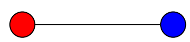
Sei E die Anzahl der Ecken (Knoten), K die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen. Dann gilt für jeden planaren Graphen $E - K + F = 2$.

Der Satz leitet sich eigentlich aus konvexen Körpern (Körper, die keine "Einbuchtungen" oder "Aushöhlungen" haben) hervor, aber da jeder konvexe Körper als planarer Graph dargestellt werden kann, passt dies wunderbar für unser Problem. Zufälligerweise ist unser planarer Graph genau der einer dreiseitigen Pyramide (Tetraeder). Man kann den Polyedersatz an unserem Beispiel anwenden und überprüfen, ob er stimmt:



$$E = 4, K = 6, F = 4$$

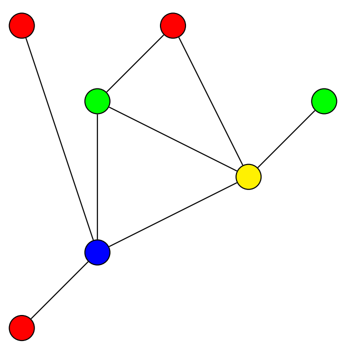
Damit wird aus $E - K + F = 2$ dann $4 - 6 + 4 = 2$. Wichtig: Der Platz um den Graphen herum zählt auch als Fläche. Somit trifft dieser zu. Dies kann man für jeden beliebigen planaren Graphen wiederholen, das Ergebnis wird immer zwei sein. Als simples Beispiel:



$$E = 2, K = 1, F = 1$$

$$E - K + F = 2 - 1 + 1 = 2$$

Ein etwas größeres Beispiel:



$$E = 7, K = 8, F = 3$$

$$E - K + F = 7 - 8 + 3 = 2$$

2.2 Fünf Nachbarn oder weniger

Damit der Sechs- und Fünf-Farben-Satz bewiesen werden kann, muss eine wichtige Feststellung gemacht werden: Auf jedem planaren Graphen befindet sich mindestens ein Punkt mit fünf oder weniger Verbindungen. Da dies ein fundamentaler Bestandteil unserer Beweise sein wird, folgt hier der Beweis.

Hypothese. *Jeder planare Graph besitzt einen Knotenpunkt mit fünf oder weniger Verbindungen.*

Beweis. Es wird ein Beweis durch Widerspruch durchgeführt. Wenn angenommen wird, dass es auf einem planaren Graphen für jeden Knotenpunkt sechs oder mehr Nachbarn gibt, dann gilt $2K \geq 6E \Rightarrow E \leq \frac{1}{3}K$, da eine Verbindung immer zwei Enden hat bzw. zwei Knoten verbindet. Grundlegend gilt für Graphen mit mehr als einer Kante, dass jede Fläche mindestens drei Seiten besitzt und jede Seite an maximal zwei Flächen grenzt. $3F \leq 2K \Rightarrow F \leq \frac{2}{3}K$. Nun gibt es neue Wege um E und F darzustellen, man kann diese in den Eulerschen Polyedersatz einfügen.

$$2 = E - K + F$$
$$E \leq \frac{1}{3}K \quad \text{und} \quad F \leq \frac{2}{3}K$$
$$\Rightarrow \quad 2 = E - K + F \leq \frac{1}{3}K - K + \frac{2}{3}K = 0$$

Alles wurde unter Annahme, dass alle Knoten mehr als 5 Nachbarn besitzen, hergeleitet, daher müssen alle Schritte stimmen. Aber es läuft auf $2 \leq 0$ hinaus, was eindeutig ein Widerspruch ist. Das bedeutet, dass die Annahme, dass alle Knoten mehr als 5 Nachbarn besitzen, falsch sein muss. $\square$

3 Sechs-Farben-Satz

Nur weil bewiesen wurde, dass es auf einem planaren Graphen einen Knotenpunkt mit weniger als sechs Verbindungen gibt, heißt das nicht, dass alles mit sechs Farben einfärbbar ist.

3.1 Beweis

Hypothese. *Jeder planare Graph lässt sich mit sechs Farben oder weniger einfärben, ohne dass zwei Knotenpunkte gleicher Farbe verbunden sind.*

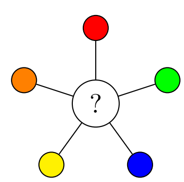
Beweis. Anders als zum vorherigen Beweis basiert dieser nicht auf einen Beweis durch Widerspruch, sondern durch Induktion. Das ist ein fundamental anderer Ansatz. Einen Beweis durch Induktion kann man sich als *"rekursive"* Bedingung vorstellen, die wie Dominos nacheinander umfallen. Dieser besteht aus zwei Bestandteilen. Zuerst muss bewiesen werden, dass eine Eigenschaft für eine natürliche Zahl $\mathbb{N}$ $(0, 1, 2, 3 \ldots)$ gilt (Induktionsanfang). Dann muss bewiesen werden, dass, falls sie für eine natürliche Zahl n gilt, sie auch für die nächste natürliche Zahl $n + 1$ gilt (Induktionsschritt). Angenommen wir haben einen Graph mit k Knoten. Falls $k \leq 6$, dann ist das Einfärben einfach, da jedem Knoten eine Farbe zugewiesen werden kann (Induktionsanfang). Falls aber $k > 6$, dann kann man nicht mehr einfach so Farben zuweisen. Das Ziel ist es jetzt unseren Graphen so zu verändern um auf die Situation $k \leq 6$ kommen. Wie bereits bewiesen, gibt es immer einen Knotenpunkt der weniger als sechs Nachbarn besitzt. Wenn ein Knotenpunkt mit fünf Nachbarn vorliegt, dann ist dieser Knotenpunkt und dessen fünf Nachbarn immer mit sechs Farben einfärbbar, indem man fünf Farben für die Nachbarn und eine sechste Farbe für den Knotenpunkt selbst nutzt. Dieser hat für uns erst mal keinen Belang, es steht uns frei ihn zu entfernen, denn es wurde gezeigt, dass er im Nachhinein korrekt einfärbbar ist. Nun hat man einen neuen planaren Graphen ohne den entfernten Knotenpunkt, der wiederum auch einen Knoten mit weniger als 6 Nachbarn besitzen muss. Damit befindet man sich in der gleichen Ausgangssituation wie vorher, nur mit $k - 1$. Das bedeutet, dass dies mit Hilfe der Induktion so weit fortgeführt werden kann, solange es noch Knoten zu entfernen gibt. Man wiederholt dies solange, bis man an $k = 6$ angekommen ist und weist dann jedem Knoten eine Farbe zu. Nun werden die Knoten in der umgekehrten Reihenfolge wieder an den Graphen angefügt. Da es immer ein Knoten war, der weniger als 6 Nachbarn hatte, kann er daher immer mit einer sechsten Farbe eingefärbt werden, mit der er nicht umgeben ist. Dies wird so lange wiederholt, bis man beim ursprünglichen k angekommen ist. Damit ist jeder Knoten eingefärbt. $\square$

4 Fünf-Farben-Satz

4.1 Beweis

Hypothese. *Jeder planare Graph lässt sich mit fünf Farben oder weniger einfärben, ohne dass zwei Knotenpunkte gleicher Farbe verbunden sind.*

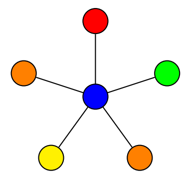
Beweis. Man beginnt erneut mit einem Graphen mit k Knotenpunkten. Genauso wie beim Sechs-Farben-Satz ist es trivial, dass, falls $k \leq 5$, jedem Knotenpunkt eine Farbe zugewiesen werden kann. Und wenn es keinen Knoten gibt der fünf Nachbarn hat, dann wird keine sechste Farbe benötigt und der Graph ist mit fünf Farben einfärbbar (Induktionsanfang). Auch wurde im Beweis des Sechs-Farben-Satzes gezeigt, dass man immer einen Knoten vom Graphen entfernen kann, bis man zu $k \leq 6$ angelangt. Wenn angenommen wird, dass ein Knotenpunkt mit fünf Nachbarn immer mit fünf Farben einfärbbar ist, dann wäre der Beweis abgeschlossen, da wir bei jedem Schritt bis zu $k \leq 6$ immer einen Knotenpunkt entfernen, der fünf Nachbarn oder weniger hat. Im Umkehrschluss kann man dann, wenn sie wie im Sechs-Farben-Satz wieder hinzugefügt werden, auch bewiesen mit fünf Farben entsprechend einfärben. Daher muss nur bewiesen werden, dass ein Knotenpunkt mit fünf Nachbar auch mit fünf Farben einfärbbar ist. Wenn angenommen wird, dass am der Graph einen Knotenpunkt mit 5 Nachbarn besitzt, dann sieht der entsprechende Graph bis $k = 6$ eingefärbt wie folgt aus.



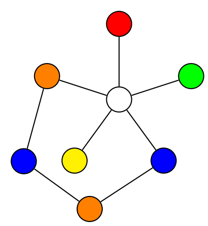
Es ist direkt erkennbar, dass bei dieser Konstellation die äußeren Knoten niemals unterschiedliche Farben besitzen dürfen, da sonst für den mittleren Knoten eine sechste Farbe benötigt wird. Daher müssen mindestens zwei Knotenpunkte die gleiche Farbe besitzen. Um zu beweisen, dass alles mit fünf Farben einfärbbar ist, wird von von zwei verschiedenen Fällen ausgegangen. Als Beispiel werden hier der orangefarbene und blaue Knoten als Referenz genommen, aber das dient nur zum Zweck der Veranschaulichung. Es kann jeder andere Knoten ebenfalls als Referenz genutzt werden.

1. Der orangefarbene Knoten und der blaue Knoten sind **nicht** durch eine Verbindung verknüpft, die abwechselnd Orange und Gelb ist. Wenn das

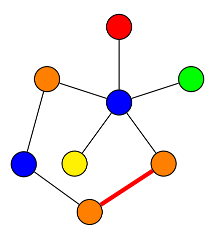
der Fall ist, dann kann man den blauen Knoten mit einem orangefarbenen ersetzen. Damit ist unsere Bedingung erfüllt und es wurde alles mit fünf Farben eingefärbt.



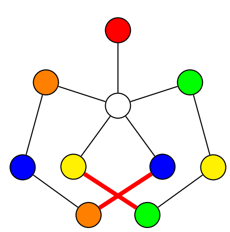
2. Der orangefarbene Knoten und der blaue Knoten sind durch eine Verbindung verknüpft, die abwechselnd orange und blau ist.



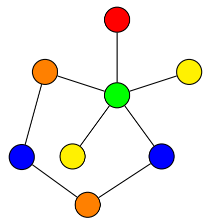
Das heißt, man kann den einen nicht einfach mit dem anderen ersetzen, da sonst ein Konflikt entstehen würde.



Man beachte, dass sich der gelbe Knoten innerhalb der Fläche, welche durch die orange/blaue Verbindungskette gebildet wird, befindet. Es gibt keinen Weg um eine Verbindung zum gelben Knoten zu zeichnen, ohne die Verbindungskette zu durchqueren. Dies würde mit der planaren Natur des Graphen im Konflikt stehen.



Daher kann man Fall 1 anwenden, den grünen Knoten mit dem gelben ersetzen und die Mitte entsprechend einfärben.



Da in beiden Fällen alles mit fünf Farben eingefärbt werden kann, wirkt sich das rekursiv durch Induktion auf das Hinzufügen der Knoten an den Graphen aus. Somit kann jeder planare Graph mit fünf Farben oder weniger eingefärbt werden. □

5 Vier-Farben-Satz

5.1 Beschreibung

Der Vier-Farben-Satz ist komplex, viel komplexer als der Beweis vom Sechs- und Fünf-Farben-Satz, er ist aber ähnlich aufgebaut. Ihn zu beweisen würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Es wurde schon gegen Ende 19. Jahrhunderts versucht ihn zu beweisen, oftmals aber leider ein ungültiger Beweis mit Fehlern und Gegenbeispielen [1]. Er wurde schlussendlich in 1976 von Kenneth Appel und Wolfgang Haken bewiesen. Der Vier-Farben-Satz war außerdem auch der erste Satz, der mit einem Computer bewiesen wurde, was aber damals kritisiert und hinterfragt wurde [2]. Danach wurde er in 1997 nochmal einfacher bewiesen, basiert aber trotzdem noch auf Computern [3]. Außerdem wurde er in 2005 mit Hilfe eines mathematischen Beweisassistenten bewiesen [4]. *"The Journey of the Four Colour Theorem Through Time"* von Andreea S. Calude bietet außerdem einen tollen Einblick um mehr Details über die Geschichte des Vier-Farben-Satzes zu bekommen. [5]. Sobald man den Vier-Farben-Satz bewiesen hat, kann man auch die effizienteste Methode finden um alles in vier Farben einzufärben [6].

5.2 Alltag

Wie kann der Vier-Farben-Satz für den Alltag nützlich werden? Ein Beispiel wäre Platzierung von Funktürmen, die aufgrund von technischen Gründen nicht mit der gleichen Frequenz nebeneinander stehen dürfen. Wenn sie zu nah stehen, dann überlappen sich die Funkbereiche und ein Turm muss eine andere Frequenz nutzen. Das Verwalten von Funkfrequenzen kostet Geld, daher wird versucht so wenige Frequenzen wie möglich zu nutzen. In der Graphentheorie benutzt man Knoten für Türme, Verbindungen falls sich die Funkbereiche der Türme überlappen und Farben für die verschiedenen Frequenzen. Dadurch, dass sich alles auf einen planaren Graphen darstellen lassen lässt, kann man davon ausgehen dass nicht mehr als vier Frequenzen genutzt werden müssen. Generell lässt eine Anwendung des Vier-Farben-Satzes finden, solange man die Ausgangssituation auf einen planaren Graphen übertragen kann.

Literatur

[1] Padraic Bartlett. „Minilecture 3: A (false) Proof of the Four-Color Theorem". In: (2014). URL: http://web.math.ucsb.edu/~padraic/ucsb_2014_15/math_honors_f2014/math_honors_f2014_lecture4.pdf. (accessed: 2019-10-04).

[2] Edward Reinier Swart. „The Philosophical Implications of the Four-Color Problem". In: (1950). URL: https://www.maa.org/programs/maa-awards/writing-awards/the-philosophical-implications-of-the-four-color-problem. (accessed: 2019-10-04).

[3] Neil Robertson u. a. „A new proof on the four color theorem". In: (1996). URL: http://people.math.gatech.edu/~thomas/PAP/npfc.pdf. (accessed: 2019-10-03).

[4] Georges Gonthier. „Formal Proof — The Four Color Theorem". In: (2008). URL: https://www.ams.org/notices/200811/tx081101382p.pdf. (accessed: 2019-10-03).

[5] Andreea S. Calude. „The Journey of the Four Colour Theorem Through Time". In: (1996). URL: https://researchspace.auckland.ac.nz/handle/2292/5162. (accessed: 2019-10-03).

[6] Neil Robertson u. a. „Efficiently four-coloring planar graphs". In: (). URL: http://people.math.gatech.edu/~thomas/PAP/fcstoc.pdf. (accessed: 2019-10-04).