第一章 行列式

【问题解答】

行列式定义是如此抽象，我该怎么记忆?

首先，笔者要指出，想理解行列式的定义是怎么来的这回事，建议在对线性映射有一定程度的了解后搜集相关的代数学资料。笔者要指出的是: 课本自始至终都是以工具的观点学习线性代数的相关知识。因此笔者在今后的讨论中更侧重于这东西有一个什么好的解释方便留下印象以及如何运用这个工具解题。

行列式定义 $\sum_{p_1p_2\ldots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\ldots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\ldots a_{np_n}$ 的实际含义是取出 n 个元素，它们不同行不同列，再在前面乘一个符号系数，对所有取法求和。对初始定义而言就是：第一行取某一列，第二行取某一列，... ，第 n 行取某一列，取的列各不相同，再乘上由列标排列的逆序数的奇偶性所决定的符号。因此在操作上，我们只需要记住不同行不同列还有个符号这一事实即可，即每当我们取了一个元素，该元素所在行列都不能选了，要划掉。

行列式的性质看上去好多，要背下来以及知道证明吗?

作为工具而言，不需要知道它是怎么证明的，这些性质实际上是一些对逆序数的操作和求和号的操作，笔者的建议是：有兴趣的话可以过一遍。而要不要背下来，笔者认为，只要做上三四道题，一部分性质就能滚瓜烂熟了。

这里指出一个学到后面后可能被遗忘的性质 $|A|=|A^T|$

行列式有什么意义?

在线性变换中，行列式实际上有"面积放大率"的含义。推荐如下的视频，可以让初学者对线性代数有一个大致了解。

[【官方双语/合集】线性代数的本质 - 系列合集*哔哩哔哩*bilibili]

【典型例题】

【例1】已知多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}$ **，则** x^4 **的系数为(),** x^3**的系数为()**

解析：熟悉定义即可。定义所说的是选取不同行不同列的元素，要出现 x^4 ，必须选到4个x

第一行如果选 $x,1,2$，他们所在列的 x 都不能选，从而最多只有x^3 ，因此只能选 $2x$,同理可以得到第二行只能选 x ，第三行、第四行只能选 x ，得到一项 $2x^4$ ，在前面加上符号 $(-1)^{\tau(1234)}=1$，即可得到对应系数。用同样的选取观点可以得到 x^3 的系数为-1 ，读者自行尝试。

在大多数情况下，我们不需要写出行列式的定义式，只要根据不同行不同列+符号的原则就可以完成计算。

【例2】设 $D=\begin{vmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}$ **,求** $A_{11}+A_{12}+A_{13}$ **及** $M_{11}+M_{21}+M_{31}$

解析：常见的考察行列式展开定理的题目。行列式按一行展开的写法为 $|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ ，因此调整 a_{ij} 的值就可以将某一行替换掉重新得到一个行列式，在这里我们将第一行替换掉，有 $A_{11}+A_{12}+A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=4$ ，而对余子式，我们只需要调整一下符号就可以得到代数余子式，即 $M_{11}+M_{21}+M_{31}=A_{11}-A_{21}+A_{31}$ ，这是按第一列展开，替换得到

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}=A_{11}+A_{12}+A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -5 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=-12$$

【例3】已知 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2\\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0\end{vmatrix}=27$ **，求** $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ **及** $A_{44}+A_{45}$

解析：这是部分代数余子式之和问题，笔者建议把行列式按一行展开的定义记住。在这里按第四行展开可以得到：

$D=A_{41}+A_{42}+A_{43}+2A_{44}+2A_{45}=27$，找到了一个方程。而我们知道行列式的某一行乘上另一行对应的代数余子式为0（两行相等），从而我们选取第二行可以得到 $D=2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+A_{44}+A_{45}=0$，运用这两个方程可以得到结果。

$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9, A_{44}+A_{45}=18$

我们希望读者能够熟练地在行列式展开的算式表示和 $|A|$ 的表示之间切换思考。

【例4】证明奇数阶反对称行列式为0.

解析：反对称行列式的定义为 $A=-A^T$,两边取行列式可以得到 $|A|=(-1)^n|A^T|=(-1)^n|A|$，又 n 是奇数，可以得到 $|A|=-|A|$,从而行列式为0.

如果还不知道矩阵的数乘，考虑反对称矩阵定义 $a_{ij}=-a_{ji}$ ，写出行列式后提取每一列的 (-1) 即可。

这个结论在有些场合会使用。

【例5】计算 $D_n=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2\end{vmatrix}$

解析：通过这道题讲述递推法。递推法是利用行列式的展开定理实现对行列式的降阶运算，得到同形式的低阶行列式，建立递推公式。对此题而言，按第一列展开即有 $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$ ，或许各位在高中有涉及过二阶递推式的特征方程计算，下面简单阐述一下。特征方程为 $x^2=2x-1$ ，得到 $x=1$ ，从而有 $D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}=\dots=D_2-D_1$ ，从而可以往下求解。一般地，对方程 $D_n=pD_{n-1}+qD_{n-2}$ 有如下讨论：

$q=0$ 时，这是个等比数列。

$q\neq 0$ 时，令 α,β 是方程 $x^2=px+q$ 的两根 则有 $D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$, 从而有 $D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$ ，依次下去即可得到结果。

【例6】计算 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1\end{vmatrix}$

解析：通过这道题展示行和相等的行列式。注意到从第二行开始，每一行的行和都为0，因此将第二列到第n列全都加到第一列即可得到 $D_n=\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \dots & n-1 & n\\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n\\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1\end{vmatrix}$,然后按第一列展开得到 $D_n=\dfrac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1 & 1-n\\ 1 & 1 & \dots & 1-n & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1-n & 1 & \dots & 1 & 1\end{vmatrix}$，行和均相等，全部加到第一列即有 $\begin{vmatrix}-1 & 1 & \dots & 1 & 1-n\\ -1 & 1 & \dots & 1-n & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -1 & 1 & \dots & 1 & 1\end{vmatrix}$，可以看到第一列都是 -1，用第一列把其他列的 1 都消掉即可得到 $\begin{vmatrix}-1 & 0 & \dots & 0 & -n\\ -1 & 0 & \dots & -n & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0\end{vmatrix}$这是三角行列式，可以直接得到结果。

【例7】计算 $D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0\\ a_{31} & 0 & a_{33} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$

解析：这里将箭型行列式单列出来说明他的处理方法，因为实在是太常见了。

处理方法为用第二列的 a_{22} 消去 a_{21} ,用第二列的 a_{33} 消去 a_{31}，…, 从而化成三角行列式。考虑将第二列乘 $-\dfrac{a_{21}}{a_{22}}$，加到第一列, 第三列乘 $-\dfrac{a_{31}}{a_{33}}$ 加到第一列，…，从而可以化成上三角行列式。

【例8】计算 $D_n=\begin{vmatrix}a_1+\lambda_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ a_1 & a_2+\lambda_2 & a_3 & \dots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+\lambda_3 & \dots & a_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+\lambda_n\end{vmatrix}$

解析：这里说明行列式可拆性的一种看法。原行列式可以写成

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1+\lambda_1 & a_2+0 & a_3+0 & \dots & a_n+0\\ a_1+0 & a_2+\lambda_2 & a_3+0 & \dots & a_n+0\\ a_1+0 & a_2+0 & a_3+\lambda_3 & \dots & a_n+0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_1+0 & a_2+0 & a_3+0 & \dots & a_n+\lambda_n\end{vmatrix}$$

，这可以拆成 2^n 项之和，每一项为从原行列式每一列的两种列选出一列构成的行列式，比如每一列都选前一种，就得到

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\end{vmatrix}$$

，显然这个行列式为0，因为各列成比例。实际上，如果选了某一列的前一种，就不能选另一列的前一种，否则两列成比例行列式为0，因此只能有如下的 $n+1$ 项不为0

$$\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ a_1 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0\\ a_1 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_1 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_1 & a_2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_2 & \lambda_3 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & a_2 & 0 & \dots & \lambda_n\end{vmatrix}\dots\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \dots\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots\\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots\end{vmatrix}$$

都很容易计算，以下忽略。

【例9】计算 $D=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 8 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0\end{vmatrix}$

解析：通过这道题介绍拉普拉斯展开的使用方法，读者只需掌握如何计算，对定理有兴趣可自行搜索。

展开行列式既可以按一行展开，也可以按两行，三行，...，k行展开，我们以按两行展开为例介绍拉普拉斯展开的操作。

首先选取要展开的两行，这里我们选取前两行（原因等一会就知道）。然后在这两行中写出所有的二阶子式，即在这两行中选取所有可能的两列，构成 2×2 的行列式，主要有以下几个：

$$\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 5\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}$$

可以看到在前两行中，若选了0列，则对应的二阶子式为0。我们考虑不为0的二阶子式，也就是最后一个。

把它所在行所在列划掉得到它的余子式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 8\\ 3 & 4 & 6\end{vmatrix}$，在前面乘上符号 $(-1)^{1+2+4+5}$ 就是二阶子式的代数余子式，可以看到符号是由二阶子式的行标和列标决定的，因此，原行列式等于前两行的所有二阶子式和它对应的代数余子式的乘积之和，这里要注意的是所有，因为只有一个二阶子式不为0，故有

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}(-1)^{1+2+4+5}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 8\\ 3 & 4 & 6\end{vmatrix}=1$$

实际上，分块矩阵行列式 $\begin{vmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{vmatrix}=|A||B|$ 也是用拉普拉斯展开定理推导的。

【例10】计算 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$

解析：这是缺项范德蒙行列式，可以看到缺了三次方项，我们补上之后看看

$D'=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\a&b&c&d&x\\a^2&b^2&c^2&d^2&x^2\\a^3&b^3&c^3&d^3&x^3\\a^4&b^4&c^4&d^4&x^4\end{vmatrix}$，这是一个范德蒙行列式，我们看到所求的行列式其实是 x^3 的代数余子式的相反数，根据$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$ 可以知道是新行列式 D' 的 x^3 的系数取负，往后不难。

【例11】计算 $D=\begin{vmatrix}3&2&12&8\\6&5&150&125\\9&8&576&512\\10&9&810&729\end{vmatrix}$

解析：这是范德蒙行列式，但不是直接的范德蒙。实际上有 $8=2^3,125=5^3,512=8^3,729=9^3$，因此我们考虑凑出范德蒙行列式。用第一列减去第二列，第三列减去第四列即可得到结果。

这里要指出的是：涉及高次方或者较大的数，要尝试往范德蒙行列式考虑。

【附】

这一章还有皇帝写的八大行列式的解法，可以康康。