24秋季学期高数期中考试（回忆版）

整理：菜鸡 混子 潜伏 卡基米 天赐 老汉 离谱

一、选择题

1. 设$\alpha(x)$，$\beta(x)$为当$x \to 0$时的非零无穷小,下列说法正确的有(　　).

①若$\alpha(x) \sim \beta(x)$,则$\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$
②若$\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$,则$\alpha(x) \sim \beta(x)$
③若$\alpha(x) \sim \beta(x)$,则$\alpha(x) - \ln(1+\beta(x)) = o(\alpha(x))$
④若$\alpha(x) - \tan\beta(x) = o(\alpha(x))$,则$\alpha(x) \sim \beta(x)$
$A.$①②　　$B.$①④　　$C.$①③④　　$D.$②③④

2. 设函数$f(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2-ax, x \leq -1 \\ x, -1 < x < 0 \\ x-b, x \geq 0 \end{cases}$，若$f(x)+g(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上连续，则(　　).

$A.\, a=3, b=1;$　　$B.\, a=3, b=2;$　　$C.\, a=-3, b=1;$　　$D.\, a=-3, b=2$。

3. 设$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}\right)$，则(　　).

$A.$不存在间断点
$B.$只存在可去间断点
$C.$只存在跳跃间断点
$D.$只存在无穷间断点

4. $f(x)$在$x=a$的邻域内有定义,则$f(x)$在$x=a$处可导与下列哪个选项等价(　　).

$A.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x(1-\cos x))-f(a)}{\sin^3 x}$

$B.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{2x}$

$C.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+e^{x^2}-1)-f(a)}{e^{x^2}-1}$

$D.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+1-\cos x)-f(a)}{1-\cos x}$

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{3}, x \geq 0 \\ -x\sin x, x \leq 0 \end{cases}$，则(　　).

$A.\, f'(0)$不存在, $f(x)$在$x=0$处连续.

$B.\, f'(0)$存在, $f'(x)$在$x=0$处连续.

$C.\, f''(0)$存在, $f''(x)$在$x=0$处不连续.

$D.\, f''(0)$存在, $f''(x)$在$x=0$处连续.

二、填空题

6. $f(x) = x^2 \cdot 3^x$,求$f^{(n)}(0) =$ ________.

7. 已知$y^3+xy+x^2-2x-1=0$，求$(1,1)$处的法线方程________.

8. $y=y(x)$连续，且自变量在点x处取增量Δx时相应的函数增量Δy满足$\Delta y=xy^2\Delta x+x^2y\Delta x\Delta y+o(\Delta x)$，则$dy_{|_{x=1}}=$________.

9. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\sin x}-1}{x^3}=6$，则$a=$________.

10. 已知函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶导数，且$f'(x)>0, f(1)=2, f'(1)=3, f''(1)=a, y=f^{-1}(x)$为$y=f(x)$的反函数，则$g(x)=f^{-1}(3x-1)$在$x=1$处的二阶导数$g''(1)=$________.

三、求数列极限

(1). $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\cos x}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x})$.

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6\times 1}{n^2+2\times 1}+\dfrac{6\times 2}{n^2+2\times 2}+\ldots+\dfrac{6\times n}{n^2+2\times n}\right)$.

四、设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$用极限的定义证明

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{2}=\dfrac{a+b}{2}$

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

五、求导

(1).已知$y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

(2).$\begin{cases}x=3t^3+3t+1\\ y=3t^3-3t+1\end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

六、已知$f(x)$的在$[0,1]$上一阶导数存在，$f(1)=0, f(0)=1$，证明

(1). $\exists a\in(0,1), f(a)=a$

(2). $\exists 0<\xi<\eta<1, f'(\xi)f'(\eta)=1$

七、数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{e}{x_{n+1}}<2$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求出其极限值.