

2025 年数学分析 A 及微积分 A 期中试题解析

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0; \\ x^2, & x \leq 0. \end{cases}$, 其中 α 为实数, 则下列说法错误的是 ()

- (A) 当 $\alpha > 0$ 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.
- (B) 当 $\alpha > 1$ 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.
- (C) 当 $\alpha \geq 2$ 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶导函数连续.
- (D) 当 $1 < \alpha < 2$ 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的一阶导函数不连续.

答案: C.

解析: (A) 当 $\alpha > 0$ 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2, \text{ 故 (A) 说法正确;}$$

(B) 当 $\alpha > 1$ 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0, \text{ 故 } f'(0) = 0 \text{ (B) 说法正确;}$$

(C) 当 $\alpha \geq 2$ 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶导函数连续.

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}, & x > 0; \\ 2x, & x \leq 0. \end{cases} \quad \text{当 } \alpha = 2 \text{ 时, 函数 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处一阶导函数}$$

不连续, 当 $\alpha > 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶导函数连续. (C) 说法错误;

(D) 当 $1 < \alpha < 2$ 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的一阶导函数不连续.

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}, & x > 0; \\ 2x, & x \leq 0. \end{cases} \quad \text{函数 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处的一阶导函数不连续, (D)}$$

说法正确.

综上所述, 选 (C) .

2. 设 $x \rightarrow 0$ 时, $\left(\frac{4-\cos x}{3}\right)^x - 1$ 与 $\ln^n(1+x)$ 是同阶无穷小量, 则 $n =$ ().

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

答案: C.

解析: 依题意, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\left(\frac{4-\cos x}{3}\right)^x - 1$ 与 $\ln^n(1+x)$ 是同阶无穷小量. 而

$$\left(\frac{4-\cos x}{3}\right)^x - 1 = e^{x\ln(\frac{4-\cos x}{3})} - 1 = e^{x\ln(1+\frac{1-\cos x}{3})} - 1 \sim x\ln(1+\frac{1-\cos x}{3}) \sim x\frac{1-\cos x}{3} \sim \frac{1}{6}x^3,$$

$$\ln^n(1+x) \sim x^n, \text{ 故 } n=3.$$

综上所述, 选 (C).

3. 设函数 $f(x) = \frac{x^2}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则 a 和 b 常数满足 ()

- (A) $a < 0, b < 0$. (B) $a > 0, b > 0$.
 (C) $a \leq 0, b > 0$. (D) $a \geq 0, b < 0$.

答案: D.

解析: 依题意, 函数 $f(x) = \frac{x^2}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. 由于 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$,

故 $b < 0$, 又 $a+e^{bx}$ 的值域为 $(a, +\infty)$, 函数 $f(x) = \frac{x^2}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 所以 $a \geq 0$.

综上所述, 选 (C).

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, 则().

- (A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
 (B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
 (C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.
 (D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

答案: B.

解析: 由于函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 则

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x). \text{ 选项 (B) 正确.}$$

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. 反例 $f(x) = \frac{1}{x} \sin x^2$ 满足题设条件且

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \sin x^2 + 2 \cos x^2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \text{ 不存在.}$$

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$. 反例 $f(x) = \frac{1}{x} \sin x^2$ 满足题设条件

$$\text{且 } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \sin x^2 + 2 \cos x^2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1.$$

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$. 反例 $f(x) = \arctan x$ 满足题设

$$\text{条件且 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1 \neq 0.$$

综上所述, 选 (B) .

5. 函数 $f(x) = \frac{(2^x + 2) \tan x}{x(2^x - 2)}$ 在 $(-2, 2)$ 上的第一类间断点为 $x = (\quad)$.

$$(A) 0. \quad (B) 1. \quad (C) \frac{\pi}{2}. \quad (D) -\frac{\pi}{2}.$$

答案: A.

$$\text{解析: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2^x + 2) \tan x}{(2^x - 2)x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2^x + 2)}{(2^x - 2)} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(2^x + 2) \tan x}{(2^x - 2)x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(2^x + 2)}{(2^x - 2)} = -1. \text{ 因此 } x=0 \text{ 为第一类间断点}$$

且是跳跃间断点.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2^x + 2) \tan x}{(2^x - 2)x} = \infty, \text{ 因此 } x=0 \text{ 为第二类间断点且是无穷间断点.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}} \frac{(2^x + 2) \tan x}{(2^x - 2)x} = \infty, \text{ 因此 } x=\pm\frac{\pi}{2} \text{ 为第二类间断点且是无穷间断点.}$$

综上所述, 选 (A) .

二、本题得分 _____ 填空题（每小题 1 分，共 5 小题，满分 5 分）

6. 设 $f(x) = (1 + \sin x)^x$, 则 $d f|_{x=\pi} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $-\pi d x$ 或者 $-\pi \Delta x$.

解析: $f(x) = (1 + \sin x)^x = e^{x \ln(1 + \sin x)}$, $f'(x) = e^{x \ln(1 + \sin x)} [\ln(1 + \sin x) + x \frac{\cos x}{1 + \sin x}]$,

故 $f'(\pi) = e^{\pi \ln(1 + \sin \pi)} [\ln(1 + \sin \pi) + \pi \frac{\cos \pi}{1 + \sin \pi}] \Big|_{x=\pi} = -\pi$, $d f|_{x=\pi} = -\pi d x$.

7. 参数曲线 $\begin{cases} x = e^t + t \\ y = 4 \sec t + t \end{cases}$ 在 $t=0$ 对应点的切线方程为 _____.

答案: $y = \frac{x}{2} + \frac{7}{2}$ 或者 $2y - x - 7 = 0$ 或者 $\frac{1}{2}x - y - \frac{7}{2} = 0$.

解析: 当 $t=0$, $x = e^t + t|_{t=0} = 1$, $y = 4 \sec t + t|_{t=0} = 4$, 切线的斜率为

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\Bigg|_{t=0} = \frac{4 \sec t \tan t + 1}{e^t + 1}\Bigg|_{t=0} = \frac{1}{2}, \text{ 则所求切线为 } y = \frac{1}{2}(x - 1) + 4.$$

8. 设 $y = \ln(2x+3)$, 则 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $y^{(n)}(0) = \frac{2^n (-1)^{n-1} (n-1)!}{3^n}$.

解析: 由于 $y = \ln(2x+3)$, $y' = \frac{2}{2x+3} = \frac{1}{x + \frac{3}{2}}$, $y^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x + \frac{3}{2})^n}$,

$$\text{故 } y^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x + \frac{3}{2})^n} \Bigg|_{x=0} = \frac{2^n (-1)^{n-1} (n-1)!}{3^n}.$$

9. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - (x+1)e^y$ 决定, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2}|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $\frac{3}{8}$.

解析: 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - (x+1)e^y$ 决定, 当 $x=0$, 则 $y=0$. 对方程

$y = 1 - (x+1)e^y$ 两边关于 x 求导, 得 $y' = -e^y - (x+1)e^y y'$, 故 $y' = -\frac{e^y}{1 + (x+1)e^y}$, 从而,

$$y'(0) = -\frac{e^y}{1+(x+1)e^y} \Big|_{x=0, y=0} = -\frac{1}{2}, \text{ 又 } y'' = -\frac{e^y y' [1+(x+1)e^y] - e^y [e^y + (x+1)e^y y']}{[1+(x+1)e^y]^2},$$

$$\text{所以 } \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} = -\frac{e^y y' [1+(x+1)e^y] - e^y [e^y + (x+1)e^y y']}{[1+(x+1)e^y]^2} \Big|_{x=0, y=0, y'=-\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}.$$

10. 设 正 数 数 列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单 调 下 降 , $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \left(\frac{1}{a_n}\right)^n + n^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案: $\max\{a_1, \frac{1}{a}\}$, $\max\{a_1, \frac{1}{a}, 1\}$.

解析: 若 $1 > a_1$, 则 $\frac{1}{a} > 1 > a_1$, 那么 $\frac{1}{a_n} > 1$,

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \left(\frac{1}{a_n}\right)^n + n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} \sqrt[n]{a_1^n a_n^{-n} + 1 + n^3 a_n^{-n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}.$$

若 $a_1 > 1$, 则

$$1) \text{ 当 } a_1 \geq \frac{1}{a} \text{ 时, 则 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \left(\frac{1}{a_n}\right)^n + n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_1 \sqrt[n]{1 + \left(\frac{1}{a_1 a_n}\right)^n + \frac{n^3}{a_1^n}} = a_1.$$

$$2) \text{ 当 } \frac{1}{a} > a_1 \text{ 时, 则 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \left(\frac{1}{a_n}\right)^n + n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} \sqrt[n]{a_1^n a_n^{-n} + 1 + n^3 a_n^{-n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}.$$

若 $a_1 = 1$, 则 $\frac{1}{a} \geq 1$,

$$1) \text{ 当 } \frac{1}{a} = 1 \text{ 时, 则 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \left(\frac{1}{a_n}\right)^n + n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1 + 1 + n^3} = 1.$$

$$2) \text{ 当 } \frac{1}{a} > 1 \text{ 时, 则 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \left(\frac{1}{a_n}\right)^n + n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} \sqrt[n]{a_1^n a_n^{-n} + 1 + n^3 a_n^{-n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}.$$

综上所述, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \left(\frac{1}{a_n}\right)^n + n^3} = \max\{a_1, \frac{1}{a}\}$.

三、解答题: 本题得分 (本题满分 20 分)

11. (4 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3}$.

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2} + \sin x}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

或者

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$$

12. (4分) 设函数 $f(x) = \arcsin x + e^{\sec x}$, 求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$.

$$\text{解: 由于 } f(x) = \arcsin x + e^{\sec x}, \text{ 故 } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + e^{\sec x} \sec x \tan x,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) + e^{\sec x} \sec^2 x \tan^2 x + e^{\sec x} \sec x \tan^2 x + e^{\sec x} \sec^3 x.$$

13. (4分) 设直圆锥底面半径为 $r = t+1$, 高度 $h = e^t + t$, 体积 $V = g(t)$, 求 $g(t)$ 的表达

$$\text{式及直圆锥高度 } h \text{ 对体积 } V \text{ 的一阶导数 } \left. \frac{dh}{dV} \right. \text{ 和二阶导数值 } \left. \frac{d^2 h}{dV^2} \right|_{t=0}.$$

解: 由于直圆锥底面半径为 $r = t+1$, 高度 $h = e^t + t$, 故体积

$$V = g(t) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(t+1)^2(e^t+t), \text{ 从而}$$

$$\frac{dh}{dV} = \frac{\frac{dh}{dt}}{\frac{dV}{dt}} = \frac{\frac{e^t+1}{3}[2(t+1)(e^t+t)+(t+1)^2(e^t+1)]}{\frac{\pi}{3}[2(t+1)(e^t+t)+(t+1)^2(e^t+1)]},$$

$$\left. \frac{d^2 h}{dV^2} \right|_{t=0} = \frac{\frac{e^t[2(t+1)(e^t+t)+(t+1)^2(e^t+1)]-(e^t+1)[2(e^t+t)+4(t+1)(e^t+1)+(t+1)^2e^t]}{3}\{[2(t+1)(e^t+t)+(t+1)^2(e^t+1)]\}^2}{\frac{\pi}{3}[2(t+1)(e^t+t)+(t+1)^2(e^t+1)]} \Big|_{t=0} =$$

$$= -\frac{81}{32\pi^2}.$$

或者 $h'(t) = e^t + 1$, $h'(0) = 2$, $h''(t) = e^t$;

$$V'(t) = g'(t) = \frac{1}{3}\pi[2(t+1)(e^t+t)+(t+1)^2(e^t+1)],$$

$$V'(0) = g'(0) = \frac{1}{3}\pi[2(t+1)(e^t+t)+(t+1)^2(e^t+1)]\Big|_{t=0} = \frac{4}{3}\pi,$$

$$V''(t) = g''(t) = \frac{1}{3}\pi[2(e^t+t)+4(t+1)(e^t+t)+(t+1)^2e^t],$$

$$V''(0) = g''(0) = \frac{1}{3}\pi[2(e^t+t)+4(t+1)(e^t+1)+(t+1)^2e^t]\Big|_{t=0} = \frac{11}{3}\pi,$$

$$\left.\frac{d^2 h}{d V^2}\right|_{t=0} = \frac{h''(t)g'(t)-h'(t)g''(t)}{\left[g'(t)\right]^3}\Big|_{t=0} = \frac{\frac{4}{3}\pi - 2 \times \frac{11}{3}\pi}{\left[\frac{4}{3}\pi\right]^3} = -\frac{81}{32\pi^2}.$$

14. (4分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续, 在 $(0,1)$ 上可导且 $f(0)=0$, $f(1)=1$.

证明: (1) 存在 $0 < x_0 < 1$, 使得 $f(x_0) = 2 - 3x_0$.

证明: (2) 存在 $0 < \xi < \eta < 1$, 使得 $[1 + f'(\xi)][1 + f'(\eta)] = 4$.

证明: (1) 由于函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续, 在 $(0,1)$ 上可导且 $f(0)=0$, $f(1)=1$.

令 $g(x) = f(x) + 3x - 2$, 则函数 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续且 $g(0) = f(0) - 2 = -2 < 0$,

$g(1) = f(1) + 3 - 2 = 2 > 0$, 故存在 $0 < x_0 < 1$, 使得 $f(x_0) = 2 - 3x_0$.

(2) 存在 $0 < \xi < x_0 < \eta < 1$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{2 - 3x_0}{x_0}$,

$f'(\eta) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{1 - 3x_0}{x_0 - 1}$, 故 $[1 + f'(\xi)][1 + f'(\eta)] = 4$.

或者考察函数 $F(x) = f(x) + x$, 则 $F(x_0) = f(x_0) + x_0 = 2 - 2x_0$,

函数 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续, 在 $(0,1)$ 上可导且 $F(0) = f(0) + 0 = 0$,

$F(1) = f(1) + 1 = 2$, 且 $F'(x) = f'(x) + 1$. 存在 $0 < \xi < x_0 < \eta < 1$, 使得

$F'(\xi) = 1 + f'(\xi) = \frac{F(x_0) - F(0)}{x_0 - 0} = \frac{2 - 2x_0}{x_0}$,

$F'(\eta) = 1 + f'(\eta) = \frac{F(1) - F(x_0)}{1 - x_0} = \frac{2x_0}{1 - x_0}$, 因此 $[1 + f'(\xi)][1 + f'(\eta)] = 4$.

15. (微积分 A) (4 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 \in (0, 3)$, 当 $n \geq 1$, 则 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$. 证

明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 并求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ 的值.

证明: 由于 $x_1 \in (0, 3)$, 当 $n \geq 1$, 则 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$, 故

$$0 < x_2 = \sqrt{x_1(3-x_1)} \leq \left(\frac{x_1 + 3 - x_1}{2} \right) = \frac{3}{2} < 3, \text{ 易证 } 0 \leq x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{当 } n > 1, \text{ 则 } x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n = \frac{x_n(3-x_n) - x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} = \frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} \geq 0.$$

因此数列 $\{x_n\}_{n=2}^\infty$ 单调上升且有上界, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 记 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 则

$$a = \sqrt{a(3-a)} \text{ 且 } 0 < a \leq \frac{3}{2}, \text{ 可解得 } a = \frac{3}{2}.$$

15. (数学分析 A) (4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上有连续的导数, 且满足当 $x \in [0, 2]$ 时,

$$0 < f(x) < 2, |f'(x)| < 1.$$

(1) 证明: 存在唯一的 $a \in (0, 2)$, 使得 $f(a) = a$.

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 \in (0, 2)$, 当 $n \geq 1$, 则 $x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a.$$

(1) 证明: (先证存在性) 令 $g(x) = f(x) - x$, 则由于函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上有连续的导数,

且满足当 $x \in [0, 2]$ 时, $0 < f(x) < 2$, $|f'(x)| < 1$. 故函数 $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上有连续的导数, 且

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0, g(2) = f(2) - 2 < 0, \exists a \in (0, 2), \text{ 使得 } g(a) = f(a) - a = 0,$$

即 $f(a) = a$.

(再证唯一性) (用反证法) 假设存在的 $b \in (0, 2)$ 且 $b \neq a$, 使得 $f(b) = b$. 则存在 ξ 介于 a, b

之间使得 $b - a = f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$, 从而

$$|b-a| = |f(b)-f(a)| = |f'(\xi)(b-a)| < |b-a|, \text{ 矛盾.}$$

故存在唯一的 $a \in (0, 2)$, 使得 $f(a) = a$.

(2) 证明: (方法一) 由于数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 \in (0, 2)$, 当 $n \geq 1$, 则 $x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$,

函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上有连续的导数, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $0 < f(x) < 2$, $|f'(x)| < 1$. 用数学归纳法易证 $0 < x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2} < 2$. 记 $m = \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$, 则 $0 \leq m = \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| < 1$.

$$x_{n+1} - a = \frac{f(x_n) + x_n}{2} - a = \frac{f(x_n) - f(a) + x_n - a}{2} = \frac{f'(\eta_n)(x_n - a) + x_n - a}{2}.$$

$$\text{因此 } |x_{n+1} - a| = \left| \frac{f'(\eta_n)(x_n - a) + x_n - a}{2} \right| \leq \frac{m+1}{2} |x_n - a|,$$

故 $0 \leq |x_n - a| \leq \frac{m+1}{2} |x_{n-1} - a| \leq \cdots \leq \left(\frac{m+1}{2} \right)^{n-1} |x_1 - a|$. 注意到, $\frac{1}{2} \leq \frac{m+1}{2} < 1$. 因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{m+1}{2} \right)^{n-1} |x_1 - a| = 0. \text{ 从而 } \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - a| = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - a = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a.$$

(方法二) 由于数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 \in (0, 2)$, 当 $n \geq 1$, 则 $x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$, 函数 $f(x)$ 在

$[0, 2]$ 上有连续的导数, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $0 < f(x) < 2$, $|f'(x)| < 1$. 用数学归纳法易证

$$0 < x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2} < 2.$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + f(x_n)}{2} - \frac{x_{n-1} + f(x_{n-1})}{2} = \frac{x_n - x_{n-1} + f(x_n) - f(x_{n-1})}{2}$$

$$= \frac{x_n - x_{n-1} + f'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})}{2} = \frac{[1 + f'(\xi_n)](x_n - x_{n-1})}{2}, \text{ 由于 } 1 + f'(\xi_n) > 0, \text{ 因此}$$

$x_{n+1} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ 同号, 数列 $\{x_n\}$ 为单调有界数列, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 记 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$, 则

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + f(x_n)}{2} = \frac{x_0 + f(x_0)}{2}.$$

因此 $f(x_0) = x_0$, 由 (1) 可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 = a$.