2023级代数与几何期中考试(回忆版)

回忆:limbo,寅默,一块肥皂,群u,群u,群u群u,群u,群u,……

本试卷共14题,共30分,共2页.

注意事项:

1. 答题前,考生先将自己的学院、姓名、学号填写清楚.
2. 请按照题号在试卷各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸上答题无效.
3. 作图可先使用铅笔画出,确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.
4. 保持试卷清洁,不要弄破.
5. 考试结束后,将试卷交回.

注:

本试卷以det代指行列式,rank代指秩,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$代指矩阵的转置,$\boldsymbol{A}^{-1}$代指矩阵的逆,$\boldsymbol{A}^{*}$代指矩阵的伴随.

一、选择/填空题(本大题共10小题,每小题1分,共10分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1,0,1)$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$,则$\det(2\boldsymbol{E}_5-\boldsymbol{A}^2)=$ ______.

2. 已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&2&2&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$,则$\boldsymbol{A}^{-1}=$ ______.

3. 平面π与z轴平行,且$A(4,0,-1)$,$B(5,1,7)$两点在平面π上,则平面π的方程为 ______.

4. $\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&1\\32&16&8&4&2&1\\243&81&27&9&3&1\\1024&256&64&16&4&1\\3125&625&125&25&5&1\\7776&1296&216&36&6&1\end{vmatrix}=$ ______.

5. 将三阶方阵$\boldsymbol{A}$的第一列与第二列互换得到矩阵$\boldsymbol{B}$,将$\boldsymbol{B}$的第二列加到第三列上得到矩阵$\boldsymbol{C}$,若有$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{C}$,则可逆阵$\boldsymbol{P}=$ ______.

6. 已知n阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$\det(\boldsymbol{A})=0$,下列说法一定正确的是

   A. $\boldsymbol{A}$中存在两行或两列成比例　　B. $\boldsymbol{A}$经过初等变换一定能出现零行

   C. $\boldsymbol{A}$中有两行的和等于另一行　　D. $\boldsymbol{A}$中有零行或零列

7. 已知n阶方阵$\boldsymbol{A}$的秩为r,下列说法错误的是

   A. $\boldsymbol{A}$不为零矩阵　　B. $\boldsymbol{A}$的$r+1$阶子式都为0

   C. $\boldsymbol{A}$的r阶子式不都为0　　D. $\boldsymbol{A}$的$r-1$阶子式不都为0

8. 已知$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，$n>1$，下列说法错误的是

A. 若$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=n$，则$\boldsymbol{A}^*$可逆

B. 若$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=1$，则$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$

C. $\det(\boldsymbol{A}^*)=\det^{n-1}(\boldsymbol{A})$

D. $\boldsymbol{A}^*$与$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$

9. 已知矩阵$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$，其中$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$为$n$阶方阵，且$\boldsymbol{A}$可逆，则$\det(\boldsymbol{M})=$

A. $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^2)$

B. $\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^2)$

C. $\det[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})]$

D. $\det(\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C})$

10. 对于向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，下列说法错误的是

A. 若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

B. 若$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，则$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$任一都垂直

C. 若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$

D. 若$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$

二、解答题（本大题共4小题，每小题5分，共20分．解答应写出文字说明、证明过程和演算步骤）

11. 求直线L: $\begin{cases}x+y+z-1=0\\2x+2y+z+3=0\end{cases}$在平面$\pi$: $x+y-z+4=0$上的投影方程.

12. 已知三阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，三维列向量$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，且三维列向量$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}$，试求$\boldsymbol{X}$.

13. 回答下列问题：

（1）已知n阶方阵满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，求证：$\forall\, s\in\mathbf{R}$，$(s\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A})(s\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=s^2\boldsymbol{E}_n$；

（2）已知n维列向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$满足$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，实数$\lambda\neq0$，矩阵$\boldsymbol{M}=\lambda\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$．求证：$\boldsymbol{M}$可逆；并求$\boldsymbol{M}^{-1}$.

14. 已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & & 1 & 1 & 0\\ & & 0 & 1 & 0\\ & & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，且$\boldsymbol{A}^{10}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{10}+32\boldsymbol{E}_5$，试求：

（1）$\boldsymbol{B}$；

（2）$\operatorname{rank}[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*]$.