线性代数模拟考试·参考答案与解析

一、填空题参考答案

1. **答案：** $\dfrac{33}{16}$
   解析：
   化简为 $|2\boldsymbol{A}^{-1}|+|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}|$，利用伴随矩阵和逆矩阵的关系可得
   $2+\dfrac{1}{16}=\dfrac{33}{16}$。
2. **答案：** $\left(\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\right)^2+1$
   解析：
   设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{x}$。
   由此 $(\boldsymbol{A}^*)^2\boldsymbol{x}=\left(\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\right)^2\boldsymbol{x}$，进而 $((\boldsymbol{A}^*)^2+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\left[\left(\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\right)^2+1\right]\boldsymbol{x}$。
   因此 $(\boldsymbol{A}^*)^2+\boldsymbol{E}$ 必具有特征值 $\left(\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\right)^2+1$。
3. **答案：** $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$
   解析：
   化为

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}$$

   由范德蒙德行列式直接得结果 $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$。

4. **答案：**

$$\begin{cases} x - 8y + 6z + 9 = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

解析：

$\boldsymbol{L}$ 在 π 上的投影可视为平面 π 与过直线 $\boldsymbol{L}$且垂直于 π 的平面 Π 的交线。
设 Π 的方程为 $2x - 4y + 2z + \lambda(3x - 2z - 9) = 0$，其法向量 $\boldsymbol{n}_1 = (2 + 3\lambda, -4, 2 - 2\lambda)$。
由 $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0$（$\boldsymbol{n} = (2, 1, 1)$ 为 π 的法向量）得 $\lambda = \dfrac{1}{2}$，故 Π 的方程为 $x - 8y + 6z + 9 = 0$。
所以投影方程为：

$$\begin{cases} x - 8y + 6z + 9 = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

5. **答案：** 1

解析：

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{0}$ 知 $\lambda_1 = 0$。设 $\boldsymbol{\xi} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 为属于 λ_2 的特征向量，则
$\lambda_2\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = k_2(2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$。
比较系数得：

$$\begin{cases} \lambda_2 k_1 - 2k_2 = 0 \\ \lambda_2 k_2 - k_2 = 0 \end{cases}$$

由 $k_2 \neq 0$（否则 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$）得 $\lambda_2 - 1 = 0$，即 $\lambda_2 = 1$。

二、单选题解析

1. **【答案】B**

   解析： 正定矩阵的特征值均大于0，根据惯性定理，其正惯性系数为 n，负惯性系数为0。A项需要 $\boldsymbol{P}$ 可逆才成立；C项合同变换不改变特征值符号但不保证特征值相同；D项正定矩阵乘方后，他的特征值也相应乘方，必大于零，则其必正定。
2. **【答案】C**

   解析： 齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解空间维数为 $n-r(\boldsymbol{A})=4-3=1$。由已知解作差 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 可得到基础解系。通解结构为 $k(\text{基础解系})+\text{特解}$，代入特解 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 即可。
3. **【答案】C**

   解析： C项矩阵满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，为实对称矩阵。实对称矩阵必然可以相似对角化。A、B、D项均存在重特征值且其几何重数小于代数重数的情况，故不可相似对角化。
4. **【答案】C**

   解析： 线性相关性不具有传递性。例如取 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0)^{\mathrm{T}}$（零向量），$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1)^{\mathrm{T}}$。可见 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 线性相关，$\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性相关，但 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关。
5. **【答案】C**

   解析： 利用平面束方程：$(x+2y-z-3)+\lambda(x-y-2z-4)=0$。将点 $P(1,2,-1)$ 代入得 $(1+4+1-3)+\lambda(1-2+2-4)=3-3\lambda=0$，解得 $\lambda=1$。整理得 $2x+y-3z-7=0$。

三、计算与证明题解析

问题1

题目：

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$。

解：

将方程改写为

$$\boldsymbol{AB} - 2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$$

计算

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

其行列式为

$$|\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

故可逆。求得逆矩阵为

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

答：

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

问题2

题目：
设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示。

(1) 求 a 的值；
(2) 将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

解：
(1) 由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关（行列式不为 0），若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 也线性无关，则它们也构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，此时任何向量均可由 $\boldsymbol{\beta}$ 组线性表示，这与 $\boldsymbol{\alpha}$ 组不能由 $\boldsymbol{\beta}$ 组线性表示矛盾。因此 $\boldsymbol{\beta}$ 组必须线性相关。计算 $\boldsymbol{\beta}$ 组构成的行列式：

$$|\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = a - 5$$

令 $a - 5 = 0$，得 $a = 5$。当 $a = 5$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 组线性相关，秩为 2。进一步，$\boldsymbol{\beta}$ 组张成的子空间为平面 $x - 2y + z = 0$。检验 $\boldsymbol{\alpha}$ 组中的向量：
$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$，代入得 $1 - 0 + 1 = 2 \neq 0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不在该平面上；
$\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$，代入得 $0 - 2 + 1 = -1 \neq 0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 也不在该平面上；
$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,5)^{\mathrm{T}}$，代入得 $1 - 6 + 5 = 0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在平面上。
因此至少 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}$ 组线性表示，满足题目条件。故 $a = 5$。

(2) 当 $a = 5$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 组具体为：

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\beta}_3 = (3,4,5)^{\mathrm{T}}$$

设矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$，则存在矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$。计算得：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&4&-3\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&4&-3\\-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&5\\4&2&10\\-1&0&-2\end{bmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$$

答：

(1) $a=5$;

(2) $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$。

问题3

题目：

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2a&1&&\\a^2&2a&\ddots&\\&\ddots&\ddots&1\\&&a^2&2a\end{bmatrix}_{n\times n}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=(1,0,\dots,0)^{\mathrm{T}}$。

(1) 求证 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$;

(2) a 为何值时，方程组有唯一解，求 x_1;

解:

(1) 记 $D_n = |\boldsymbol{A}|$，按第一行展开得递推关系

$$D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$

易算得 $D_1 = 2a$，$D_2 = 3a^2$，符合公式 $D_n = (n+1)a^n$。假设对 $k \leq n-1$ 成立，则

$$D_n = 2a \cdot na^{n-1} - a^2 \cdot (n-1)a^{n-2} = (2n-(n-1))a^n = (n+1)a^n$$

由归纳法，结论成立。

(2) 方程组有唯一解当且仅当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，即 $(n+1)a^n \neq 0$，故 $a \neq 0$。此时，由克莱姆法则，

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 的第一列换为 $\boldsymbol{B}$。计算得 $|\boldsymbol{A}_1| = na^{n-1}$，故

$$x_1 = \frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n} = \frac{n}{(n+1)a}$$

(3) 当 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 即 $a = 0$ 时，方程组可能有无穷多解。此时

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

增广矩阵 $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}]$ 的秩为 $n-1$，与系数矩阵秩相同，故有无穷多解。方程组等价于

$$x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0$$

而 x_1 未出现在方程中，为自由变量。因此通解为

$$\boldsymbol{x} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

(2) $a \neq 0$，$x_1 = \dfrac{n}{(n+1)a}$；
(3) $a = 0$，通解为 $\boldsymbol{x} = (k, 1, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}$，$k$ 任意。

问题4

题目：
设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\,(n > 1)$ 阶矩阵，$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_n$ 是 n 维列向量。若 $\boldsymbol{\xi}_n \neq \mathbf{0}$，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\xi}_3$，…，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_{n-1} = \boldsymbol{\xi}_n$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_n = \mathbf{0}$，证明：

(1) $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_n$ 线性无关；
(2) $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵。

证明：
(1) 设存在常数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 使得

$$c_1\boldsymbol{\xi}_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{\xi}_n = \mathbf{0}$$

左乘 $\boldsymbol{A}^{n-1}$，注意到

$$\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_n, \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\xi}_i = \mathbf{0}\ (i \geq 2)$$

故得 $c_1\boldsymbol{\xi}_n = \mathbf{0}$。由 $\boldsymbol{\xi}_n \neq \mathbf{0}$ 知 $c_1 = 0$。类似地，依次左乘 $\boldsymbol{A}^{n-2}, \dots, \boldsymbol{A}^0$，可得 $c_2 = 0, \dots, c_n = 0$。因此向量组线性无关。

(2) 以 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_n$ 为基，$\boldsymbol{A}$ 的矩阵表示为

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

即特征值 0 的 n 阶 Jordan 块。当 $n > 1$ 时，Jordan 块不可对角化，故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵。

问题5

题目：

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} ijx_ix_j$。

(I) 写出 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵；

(II) 求正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形；

(III) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解。

解：

(I) 由 $b_{ij} = i \cdot j$，且 $b_{ij} = b_{ji}$，得二次型矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{3\times3}$，其中 $a_{ij} = ij$。于是

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

(II) 由于 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1（各行成比例），特征多项式为

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = -\lambda^2(\lambda - 14)$$

特征值为 $\lambda_1 = 14$，$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$。

对于 $\lambda_1 = 14$，解 $(\boldsymbol{A} - 14\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$。单位化得

$$\boldsymbol{q}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}}\right)^{\mathrm{T}}$$

对于 $\lambda = 0$，解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$，得方程 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$。取两个线性无关解：

$$\boldsymbol{v}_2 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{v}_3 = (-3, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

施密特正交化：

1. 令 $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，单位化得

$$\boldsymbol{q}_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 0\right)^{\mathrm{T}}$$

2. 将 $\boldsymbol{v}_3$ 投影到 $\boldsymbol{u}_2$：

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{v}_3=\frac{\boldsymbol{v}_3\cdot\boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{u}_2=\frac{6}{5}(-2,1,0)^{\mathrm{T}}=\left(-\frac{12}{5},\frac{6}{5},0\right)^{\mathrm{T}}$$

则 $\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{v}_3-\operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{v}_3=\left(-\frac{3}{5},-\frac{6}{5},1\right)^{\mathrm{T}}$，取 $\boldsymbol{u}_3=(-3,-6,5)^{\mathrm{T}}$。单位化得

$$\boldsymbol{q}_2=\left(-\frac{3}{\sqrt{70}},\ -\frac{6}{\sqrt{70}},\ \frac{5}{\sqrt{70}}\right)^{\mathrm{T}}$$

取 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3]$，则正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型化为标准形

$$f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=14y_3^2$$

(III) 由标准形 $14y_3^2=0$ 得 $y_3=0$，此时 $\boldsymbol{x}$ 位于 $\boldsymbol{A}$ 的零特征值对应的特征空间，即由方程 $x_1+2x_2+3x_3=0$ 确定的空间。基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

故通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix},\quad k_1,k_2\in\mathbb{R}$$

答：

(I) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$。

(II) 正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{Q}$ 如上，标准形为 $14y_3^2$。

(III) 解为 $k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数。