第一章:函数极限

1.夹逼法:找准主体,合理放缩,验证为零.

3【例 1(四初)】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_{x}^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$.

4【变式 1】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{n}x}{1+x}\mathrm{d}x$.

5【例 2(六初)】设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负连续、严格单调增加,且对任意 $n\in\mathbf{N}$,存在 $x_n\in[a,b]$ 使得 $[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}[f(x)]^n\mathrm{d}x$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

4【变式 1】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n+1-k)(nC_n^k)^{-1}$.

4【变式 2】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\sqrt{x^2+k^2}$.

2.先对后指法:针对于幂指函数的专用处理思路

3【例 3】设 $g(x)=\lim\limits_{r\to0^+}\left((x+1)^{r+1}-x^{r+1}\right)^{\frac{1}{r}}$,求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=$.

3.5【变式 1】求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{x^2}=$______.

3.泰勒估阶法:对于形式复杂的极限,可利用泰勒公式快速估计阶数,计算结果.

4【例 4】求极限:$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_{0}^{x}[\mathrm{e}^{(x-t)^2}-1]\sin t\,\mathrm{d}t}{x^4}$.

3【变式 1】已知函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$,求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{f(x)}\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)\mathrm{d}t}{x^6}$.

4【变式 2】求极限$\lim\limits_{x\to +\infty}\left((2x)^{1+\frac{1}{2x}}-x^{1+\frac{1}{x}}-x\right)$.

4【例 5】求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^n\dfrac{\arctan\frac{x}{n}}{(1+x)(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

3【变式 1(四决)】求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x\ln a)\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)$.

3【变式 2(二决)】设函数$f(x)$在$x=0$的某邻域内具有二阶连续导数$f(0),f'(0),f''(0)$均不为零,求证:存在唯一的一组实数k_1,k_2,k_3,使得:$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)}{h^2}=0$.

4.洛必达法:对于变限积分函数极限的固定处理步骤.

3【例 6】求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{\sin x\int_0^1\tan(xt)^2\mathrm{d}t}$

3.5【变式 1】求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2^n(2n+1)!}\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{x^3\left(\sqrt[3]{1+x}-\mathrm{e}^x\right)}$.

5.四则运算法:从复杂极限中剥离极限存在的部分,从而一步步简化极限形式.

4【例 7】设函数$y=f(x)$的二阶导数连续,且$f''(x)>0$,$f(0)=0$,$f'(0)=0$.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3u}$,其中$u$是曲线$y=f(x)$在点$P(x,f(x))$处的切线在$x$轴上的截距.

4【变式 1(一决)】设函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上连续,且广义积分$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛,求极限

$\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{1}{y}\displaystyle\int_0^y xf(x)\,\mathrm{d}x$.

4【变式 2】求极限:$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^x [\mathrm{e}^{(x-t)^2}-1]\sin t\,\mathrm{d}t}{x^4}$.

第二章:数列极限

1.求和泰勒放缩法:将近似于定积分定义的求和极限通过泰勒展开快速找到积分主体,从而简化计算,.

3.5【例 1(七初)】求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)$.

4【变式 1】求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\sin\dfrac{k\pi}{n^2}$.

4【例 2(七初)】求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$,其中 $a>0$.

4【变式 1】求极限 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

2.stolz 定理法:针对特殊形式如 n,lnn,$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$,通过简化或减少变量的处理方法.

3【例 3】求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\displaystyle\int_0^n \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x}{\ln n}$.

4【变式 1】求极限:$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\ln n}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x$.

3.5【变式 2(九决)】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)$

4【例 4(十三补初)】设 $x_0=1, x_n=\ln(1+x_{n-1}), n=1,2\ldots$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

4【变式 1(十决)】设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 三阶连续可导, $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0$,

$f'''(0)=-1$,又设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1\in(0,1), a_{n+1}=f(a_n),(n=1,2,3\ldots),\{a_n\}$ 严格单调减少,且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n^2$.

4【变式 2】设 $0<x_1<1, x_{n+1}=x_n(1-x_n), n=1,2\ldots$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

3.递推数列的裂项法:通过条件给出的递推关系式,将求和或累乘极限裂项为可前后抵消的结果,从而简化形式得出结果.

4.5【例 5】设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\dfrac{1}{2}, x_n=\dfrac{\sqrt{x_{n-1}^2+4x_{n-1}}+x_{n-1}}{2}, n=2,3,\cdots$,求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x_n^2}$ 收敛并求其值.

4.5【变式 1】设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=1, a_1=\dfrac{1}{2}\ a_{n+1}=\dfrac{na_n^2}{1+(n+1)a_n}, n\geqslant 1$,求证 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ 收敛并求值.

4【变式 2】设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$,数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}, n\geqslant 0$,求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$.

5【例 6】已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\sqrt{5}, x_{n+1}=x_n^2-2$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}}$.

5【变式 1】设 $a_0=\dfrac{5}{2}, a_k=a_{k-1}^2-2, k=1,2,\cdots$,求 $\prod\limits_{k=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{a_k}\right)$.

4.递推归纳,统一变量法:通过递推关系式,归纳数列的单调性或所处范围从而证明极限存在.针对抽象极限,将变量统一,化为一般极限计算结果.

4【例 7】设$f(x)$定义域为$[a,b]$,值域为$y\in[a,b]$满足$f(x)-f(y)\leq|x-y|$.设

$x_{n+1}=\dfrac{x_n+f(x_n)}{2}$,$n=1,2,\cdots$,且$x_1\in[a,b]$,求证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

4【变式 1】已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+n$,$a_1=\dfrac{1}{2}$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$.

5【例 8】已知数列$\{x_n\}$满足等式$e^{x_n}+x_n^{2n+1}=0$,求$A,B\neq0$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}n(x_n-A)=B$

(1)证明方程$e^x+x^{2n+1}=0$有唯一的实根$x_n(n=0,1,2,\cdots)$;

(2)证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求其值$A,B$.

4【变式 1】:设$a>0$,$f_n(x)=x^n+nx-a(n=1,2,\cdots)$.依次求解下列问题:

(1)求证:$f_n(x)$在$(0,+\infty)$有唯一零点x_n;

(2)求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^n$.

5.分段法:对于无穷型与被积函数为周期型积分的常用化简思路.

5【例 9】设$s_n=\int_0^1\sin^n(nx)\mathrm{d}x$,$n\in\mathbb{N}$ (1)求证:$s_n\leq\dfrac{2}{n}$,对于任意$n\in\mathbb{N}$且n为奇数.(2)求$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$

4【变式 1】设$y=f(x)$是微分方程$y''+2y'-3y=e^{-x}\sin x$满足$y(0)=0,y'(0)=-\dfrac{1}{5}$的解.$g(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{5(n+1)^2}(n\pi\leq x<(n+1)\pi,n=0,1,2,\cdots)$.求积分$\int_0^\infty\min\{f(x),g(x)\}\mathrm{d}x$.

5【例 10】设函数$f(x)$在闭区间$[-1,1]$上具有连续导数,$f(0)=0$,$f(1)=1$.求

证:$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}$.

5【变式 1】设$A_n=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)$

6.积分法:(1)将求和换成积分,化为积分计算(2)将求和内部的数换成积分,交换积分求和顺序计算结果.

5【例 11(一初)】当$x\to 1^-$时,求$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$等价无穷大量.

4【例 12】求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{2}{3k}\right)$