线代小题大复盘

（以主流模拟卷核心题为载体）

主讲人：夜雨

集主流模拟卷（张宇八套卷、李林六套卷、李永乐六套卷、李永乐三套卷、李艳芳三套卷、汤家凤八套卷、余炳森五套卷、超越 5+5 套卷）之精华！助大家**用最短的时间拿下线代小题满分！**

向量组的线性相关性

从定义入手

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为$n$维非零列向量，已知$\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=\mathbf{0}$，则对任意$n$维列向量$\beta$，下列向量组必线性相关的是（B）（超越 5+5 卷二）

$(A)\beta+\alpha_1,3\beta+\alpha_2,5\beta+\alpha_3$

$(B)3\beta+\alpha_1,5\beta+\alpha_2,\beta+\alpha_3$

$(C)5\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,3\beta+\alpha_3$

$(D)1\beta+\alpha_1,5\beta+\alpha_2,3\beta+\alpha_3$

设A是三阶矩阵，三维列向量α满足$A^2\alpha\neq\mathbf{0}$，$A^3\alpha=\mathbf{0}$，则下列正确的是（D）（李林六套卷卷二）

$(A)\alpha,A\alpha$线性相关　$(B)\alpha,A^2\alpha$线性相关　$(C)A\alpha,A^2\alpha$线性相关　$(D)A\alpha,A^2\alpha$线性无关

从秩入手

设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是线性无关的n维向量，A是n阶矩阵，$A\alpha_1,\cdots,A\alpha_n$线性相关是$r(A)<n$的（A）

(A)充分必要条件　(B)充分非必要条件　(C)必要非充分条件　(D)非充分非必要条件

（超越 5+5 卷五）

$A\alpha_1,\cdots,A\alpha_n$线性相关 $\Longleftrightarrow r(A[\alpha_1,\cdots,\alpha_n])<n \Longleftrightarrow r(A)<n$

整体与部分

整体无关，则部分无关

部分相关，则整体相关

I 向量组线性无关，加入γ后线性相关，则γ可以由I向量组线性表示

I 向量组线性无关，加入γ后线性无关，则γ不可由I向量组线性表示

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma$线性相关，$k$为任意常数，则正确的是（D）（李林六套卷卷三）

$(A)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta+\gamma$线性相关　$(B)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta+\gamma$线性无关

$(C)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+k\gamma$线性相关　$(D)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+k\gamma$线性无关

β不可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

γ可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

延长与缩短

原来无关，延长也无关；原来相关，缩短也相关

比如：若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_s\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_s\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\alpha_{s-1}\\ \alpha_s\end{pmatrix}$线性无关（李永乐六套卷卷五）

向量组的线性表示

线性表示与方程解、秩的联系

1）$\boldsymbol{\beta}$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示$\Longleftrightarrow$ $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$有解

$\Longleftrightarrow$ $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$

2）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_f$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示$\Longleftrightarrow$ $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]X=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_f]$有解

$\Longleftrightarrow$ $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_f)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$

$\Longrightarrow$ $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_f)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$n\times r$矩阵$A$的列向量组，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$是$n$维列向量，若线性方程组$Ax=\beta_i,i=1,2,\cdots,s$均有解，则下列成立的是（C ）（余炳森五套卷卷二）

$(A)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，则$r\geqslant s$　$(B)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，则$r<s$

$(C)\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关，则$r\geqslant s$　$(D)\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性相关，则$r<s$

抽象线性方程组

线性方程组解的叠加原理

若$\boldsymbol{\alpha}_1$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$的解，$\boldsymbol{\alpha}_2$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$的解，则$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$的解

由此可推出如下结论

若$\boldsymbol{\alpha}_1$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，$\boldsymbol{\alpha}_2$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，则$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解（齐次解+齐次解=齐次解）

若$\boldsymbol{\alpha}_1$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，$\boldsymbol{\alpha}_2$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解，则$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解（齐次解+非齐次解=非齐次解）

已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是四元非齐次线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的三个解，且$r(A)=3$，若$\alpha_1+\alpha_2=(5,9,3,2)^T,\alpha_2-2\alpha_3=(8,13,-12,6)^T$，则方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的通解是（B）（李永乐六套卷卷六）

$(A)\ \frac{1}{2}(5,9,3,2)^T+k(8,13,-12,6)^T$

$(B)\ (-8,-13,12,-6)^T+k(3,5,-3,2)^T$

$(C)\ (13,22,-9,8)^T+k(8,13,-12,6)^T$

$(D)\ (5,9,3,2)^T+k(3,5,-3,2)^T$

非齐次方程组解的情况

若非齐次方程$Ax=b$有解，则$Ax=b$线性无关的解的个数比$Ax=\boldsymbol{0}$线性无关的解的个数多一

设A是三阶非零矩阵，b为三维列向量，$A^2=O$，则非齐次线性方程组$A^TAx=A^Tb$线性无关的解向量个数为（C）（超越 5+5 卷二）

$(A)1\quad(B)2\quad(C)3\quad(D)4$

该题富含的知识点比较的多

1）$A^TAx=\boldsymbol{0}$与$Ax=\boldsymbol{0}$同解

2）若$A_{m\times n}B_{n\times k}=O_{m\times k}$，则$r(A)+r(B)\leqslant n$

正交就有方程

若β,α正交，则β是$\alpha^T x=0$的解，α是$\beta^T x=0$的解

设五维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$两两不成比例，且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$正交，且向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为（B）（汤家凤八套卷卷八）

$(A)1$

$(B)2$

$(C)3$

$(D)4$

$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$是方程$\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\end{bmatrix}x=\mathbf{0}$的解，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是方程$\begin{bmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\beta_3^T\\\beta_4^T\end{bmatrix}x=\mathbf{0}$的解

同解方程组

常见同解方程组

1）若B为列满秩矩阵，则$Ax=\mathbf{0}$与$BAx=\mathbf{0}$同解

2）$Ax=\mathbf{0}$与$A^TAx=\mathbf{0}$同解

3）若方程组$Ax=\mathbf{0}$的解均是$Bx=\mathbf{0}$的解，则$Ax=\mathbf{0}$与$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\mathbf{0}$同解

同解方程组的性质

设A是$m\times n$矩阵，B是$k\times n$矩阵，$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_m^T\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\vdots\\\beta_k^T\end{pmatrix}$

则$Ax=\mathbf{0}$和$Bx=\mathbf{0}$同解$\Longleftrightarrow r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\Longleftrightarrow A,B$的行向量等价

设A是n阶矩阵，b是n维列向量且与$A^Tx=\mathbf{0}$的解均正交，则（D）（张宇八套卷卷二）

$(A)A^Tx=\mathbf{0}$的解与A的行向量正交

$(B)Ax=\mathbf{0}$的解与A的列向量正交

$(C)A^Tx=b$有解

$(D)Ax=b$有解

正交就有方程：若β,α正交，则β是$\alpha^T x=0$的解，α是$\beta^T x=0$的解

$A^Tx=\mathbf{0}$的解均与b正交$\Rightarrow$ $A^Tx=\mathbf{0}$的解均是$b^Tx=0$的解

$\Rightarrow$ $A^Tx=\mathbf{0}$的解与$\begin{pmatrix}A^T\\b^T\end{pmatrix}x=\mathbf{0}$同解

下列命题正确的是（13）（汤家凤八套卷卷八）

1）设B为$m\times n$的矩阵且$r(B)=n$，则$BAx=\mathbf{0}$与$A^TAx=\mathbf{0}$同解

2）若$r(A)=r(B)$，则$Ax=\mathbf{0}$与$Bx=\mathbf{0}$同解

3）设A为$m\times n$的矩阵且$r(A)=n$，则$A^TAx=b$一定有唯一解

4）若方程组$Ax=\mathbf{0}$的解均是$Bx=\mathbf{0}$的解，则$r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(B)$

矩阵

反对称矩阵的性质

1）反对称矩阵的二次型恒为零

2）反对称矩阵的逆矩阵仍然是反对称矩阵

3）可逆的反对称矩阵只能是偶数阶

三阶反对称矩阵形式$\begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix}$

已知n阶矩阵A可逆且满足$A^T=-A$，则下列命题：

1）对任意的n维向量，$\boldsymbol{b}^TA\boldsymbol{b}=0$

2）对任意的n维向量，$\boldsymbol{b}^TA^{-1}\boldsymbol{b}=0$

3）对任意的n维向量，$r(A+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T)=n$（超纲跳过）

4）n可能为3

正确个数为 123? （张宇八套卷卷五）

设n阶非零实矩阵A满足$A^T+A=O$，则下列正确的是（C）（李林六套卷卷一）

$(A)\,Ax=x$有无穷多解

$(B)\,Ax=-x$有无穷多解

$(C)\,Ax=x$仅有零解

$(D)\,Ax=-x$无解

分析$0=x^TAx=x^Tx$

正交矩阵的性质

性质一：设A是正交矩阵，则$|A|=1$或-1

性质二：设A是正交矩阵，则A^{-1},A^T也是正交矩阵，且$A^{-1}=A^T$

性质三：两个正交矩阵A,B的乘积依旧是正交矩阵

性质四：A是正交矩阵$\Longleftrightarrow$ A的各列都是单位向量且两两正交$\Longleftrightarrow$ A的各行都是单位向量且两两正交

性质五：正交变换不改变向量之间的内积、向量的模长

设A是正交矩阵，则$(Ax,Ay)=(x,y)$且$\|Ax\|=\|x\|$

性质六：A是正交矩阵，若A有实数特征值，则这个实数特征值只能是-1或1

注：正交矩阵不一定有实数特征值，比如$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$没有实数特征值

性质七：关于$|A+E|$及$|A-E|$的性质（利用性质六证明，不要用行列式）

设A是正交矩阵且$|A|<0$，则$|A+E|=0$（1995 年考察过）

设A是偶数阶正交矩阵且$|A|<0$，则$|A+E|=0$且$|A-E|=0$

设A是奇数阶正交矩阵且$|A|>0$，则$|A-E|=0$

设A是奇数阶正交矩阵则$|A+E|$及$|A-E|$必有一个是零

性质八：设A是正交矩阵，若A有特征值-1和1，则-1和1对应的特征向量正交

性质九：

A是正交矩阵且$|A|=1\longrightarrow A_{ij}=a_{ij}$

A是正交矩阵且$|A|=1\xleftarrow{A\text{是非零矩阵}} A_{ij}=a_{ij}$

A是正交矩阵且$|A|=-1\longrightarrow A_{ij}=-a_{ij}$

A是正交矩阵且$|A|=-1\xleftarrow{A\text{是非零矩阵}} A_{ij}=-a_{ij}$

$A=(a_{ij})$为三阶非零矩阵，若$A_{ij}=-a_{ij}$，则（C）（余炳森合工大五套卷卷一）

(A) $(A+E)x=\mathbf{0}$只有零解

(B) $(A-E)x=\mathbf{0}$只有零解

(C) $(A+E)x=\mathbf{0}$有非零解

(D) $(A-E)x=\mathbf{0}$有非零解

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a_{11}&-a_{21}&-a_{31}\\-a_{12}&-a_{22}&-a_{32}\\-a_{13}&-a_{23}&-a_{33}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$A^*=-A^T$

秩一矩阵的性质

设A是n阶秩一矩阵，有如下性质

1） $A^n=[tr(A)]^{n-1}A$

2） A的所有特征值是$tr(A)$，$\underbrace{0,\ \cdots,\ 0}_{n-1个}$

3） 当$tr(A)=0$，A不可对角化，当$tr(A)\neq 0$，A可以对角化

$r(A)=1 \Leftrightarrow$ A可表示为$\alpha\beta^T$，其中α,β是n维非零列向量

$\alpha\beta^T$的性质，其中α,β是n维非零列向量

1） $(\alpha\beta^T)^n=(\alpha,\beta)^{n-1}\alpha\beta^T$ （注意$tr(\alpha\beta^T)=(\alpha,\beta)$）

2） $\alpha\beta^T$的所有特征值是(α,β)，$\underbrace{0,\ \cdots,\ 0}_{n-1个}$

3） $E+k\alpha\beta^T$的逆矩阵形如$E+l\alpha\beta^T$ （如果有逆矩阵）

设向量$\alpha=(a,0,a)^T,A=E-\alpha\alpha^T$，若$tr(A)=1$，则$A^{-1}=$ （B）（余炳森合工大五套卷卷一）

$(A)E+\alpha\alpha^T$

$(B)E-\alpha\alpha^T$

$(C)E+2\alpha\alpha^T$

$(D)E-2\alpha\alpha^T$

$E=(E-\alpha\alpha^T)(E+k\alpha\alpha^T)$

初等矩阵与初等变换

三类初等矩阵：换法矩阵，消法矩阵，倍法矩阵

换法矩阵$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

消法矩阵$\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

倍法矩阵$\begin{bmatrix}k&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}(k\neq 0)$

规则：左乘初等矩阵，作行变换；右乘初等矩阵，作列变换（左行右列）

消法矩阵中最容易混淆的两个矩阵$\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

A右乘$\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则第二列的$k$倍加到第一列

A 右乘 $\begin{bmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则第一列的 k 倍加到第二列

记忆：右乘意味着列变换，k 在第几列，就加到第几列！

A 左乘 $\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则第一行的 k 倍加到第二行

A 左乘 $\begin{bmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则第二行的 k 倍加到第一行

记忆：左乘意味着行变换，k 在第几行，就加到第几行！

初等矩阵的逆矩阵仍然是初等矩阵（并且是同类型的）

$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$，比如 $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$，比如 $\begin{bmatrix}k&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{k}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$，比如 $\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

设三阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3)$，若 $|A|=2$，求 $B^*A=$（超越 5+5 卷七）

将三阶可逆矩阵 A 交换第一二列得到矩阵 B，则（B）（余炳森五套卷卷五）

(A) 将 A^* 交换第一二行得到 B^*　　(B) 将 A^* 交换第一二行得到 $-B^*$

(C) 将 A^* 交换第一二列得到 B^*　　(D) 将 A^* 交换第一二列得到 $-B^*$

初等变换

关于初等变换和初等矩阵一些重要结论（(1)（2）可推（3）(4)）

（1）任意一个可逆矩阵都可以表示为若干个初等矩阵的乘积（记）

（2）任意一个可逆矩阵都可以通过初等行（列）变换得到单位矩阵（记）

（3）单位矩阵可以通过初等行（列）变换得到任意一个可逆矩阵

（4）设A,B为同阶可逆矩阵，则A可以通过初等行（列）变换得到B

（5）任意一个$m\times n$的矩阵A可以通过初等变换变成$\begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix}$，其中$s=r(A)$，$\begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix}$被称为$A$的等价标准形（记）

（6）任意一个$m\times n$的矩阵A，存在可逆矩阵P,Q，使得$PAQ=\begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix}$，其中$s=r(A)$

（7）任意一个$m\times n$的行满秩矩阵A，存在可逆矩阵Q，使得$AQ=[E_m \quad O]$

（8）任意一个$m\times n$的列满秩矩阵A，存在可逆矩阵P，使得$PA=\begin{bmatrix} E_n \\ O \end{bmatrix}$

（7）（8）怎么记忆？我们只要知道P，Q乘在另外一边就是错的！下面是两个假命题

（1）任意一个$m\times n$的行满秩矩阵A，存在可逆矩阵Q，使得$QA=[E_m \quad O]$

（2）任意一个$m\times n$的列满秩矩阵A，存在可逆矩阵P，使得$AP=\begin{bmatrix} E_n \\ O \end{bmatrix}$

假设有$QA=[E_m \quad O] \Longrightarrow A=Q^{-1}[E_m \quad O]=[Q^{-1} \quad O]$一眼假！

下列结论正确的是（）（汤家凤八套卷卷二）

(A)设A为$m\times n$矩阵，且$r(A)=r$，则存在可逆矩阵P，使得$PA=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

(B)设A为$m\times n$矩阵，且$r(A)=m<n$，则存在可逆矩阵P，使得$PA=(E_m,O)$

假设有$PA=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \Longrightarrow A=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & \underline{O} \\ O & O \end{pmatrix}=(M,N)\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}=(M,O)$

、

分块矩阵的秩

设A,B均为n阶实对称矩阵，则下列结论不成立的是（无选项可选）（张宇八套卷卷六）

$(A)r(A,AB)=r(A)$ $\quad (B)r(AB^T,AB^TB)=r(AB^T)$ $\quad (C)r\begin{pmatrix} A^TA \\ B^TA \end{pmatrix}=r(A)$ $\quad (D)r\begin{pmatrix} BA \\ B^TBA \end{pmatrix}=r(AB^T)$

利用广义初等变换“打洞”变成$\begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix}$，再利用$r\begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix}=r(P)+r(Q)$

设A,B,C均为n阶方阵，且A可逆，则下列哪个矩阵的秩可能与$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$不相等的是（D）

(A)$\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}$ (B)$\begin{pmatrix} E & O \\ A & C \end{pmatrix}$ (C)$\begin{pmatrix} A & BC \\ O & C \end{pmatrix}$ (D)$\begin{pmatrix} A & O \\ O & BC \end{pmatrix}$（超越 5+5 卷一）

设$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m),B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$，若$A,B$的列向量组等价，则下列结论正确的是(23)（汤家凤八套卷卷三）

1） $Ax=\mathbf{0}$和$Bx=\mathbf{0}$同解 2） $r\begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}=2r(A)$

3） $A^Tx=\mathbf{0}$和$B^Tx=\mathbf{0}$同解 4） $r\begin{pmatrix} A & B^T \\ O & A \end{pmatrix}=2r(A)$

两个同型矩阵，列向量组等价$\Longleftrightarrow$列等价

矩阵高次方

万能求解通法（二阶）

设A是二阶矩阵，λ_1,λ_2是A的两个特征值

情形一：若$\lambda_1\neq\lambda_2$，则可待定二阶矩阵P,Q使得$A^n=\lambda_1^nP+\lambda_2^nQ$从$k$开始成立

其中P,Q由方程组$\begin{cases} A^k=\lambda_1^kP+\lambda_2^kQ \\ A^{k+1}=\lambda_1^{k+1}P+\lambda_2^{k+1}Q \end{cases}$确定，$k$为零特征值的重数

情形一：若$\lambda_1=\lambda_2$，则可待定二阶矩阵P,Q使得$A^n=\lambda_1^n(P+nQ)$从k开始成立

其中P,Q由方程组$\begin{cases} A^k=\lambda_1^k(P+kQ) \\ A^{k+1}=\lambda_1^{k+1}(P+(k+1)Q) \end{cases}$确定，$k$为零特征值的重数

设$A=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，向量$\alpha$满足$A\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\alpha$，则$A^{2025}\alpha$不可能为（D）（超越 5+5 卷三）

(A) $\begin{pmatrix}2025\\2023\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}2026\\2024\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}2027\\2025\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}2027\\2026\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1$$

$$E-A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

不可相似对角化

$$A^n=P+nQ$$

$$\begin{cases}E=P\\ A=P+Q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P=E\\ Q=A-E\end{cases}$$

$$A^n=nA-(n-1)E$$

$$A^n\alpha=nA\alpha-(n-1)\alpha=n\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\alpha\right)-(n-1)\alpha=\begin{pmatrix}n\\n\end{pmatrix}+\alpha=\begin{pmatrix}n\\n\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

相似

相似对角化充要条件

设$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & a\\ 3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$与对角矩阵相似，则$a=$-2（汤家凤八套卷卷五）

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & -a\\ -3 & \lambda & -2\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)[(\lambda+2)\lambda-3]=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

$$A-E=\begin{pmatrix}-3 & 1 & a\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

相似小专题$(A-aE)(A-bE)=O(a\neq b)$，其中A是n阶矩阵

$n=r((A-aE)-(A-bE))\leqslant r(A-aE)+r(A-bE)\leqslant n$

$r(A-aE)+r(A-bE)=n\Longrightarrow n-r(A-aE)+n-r(A-bE)=n\Longrightarrow A$一定可以相似对角化

设A为n阶矩阵，且满足$A^2+2A-3E=O$，则必有（D）（超越 5+5 卷六）

$(A)A$ 有特征值 -1

$(B)A=-3E$

$(C)A$ 为实对称矩阵

$(D)A$ 可相似对角化

设三阶实矩阵A的秩为二，若A的列向量均为线性方程组$(A-2E)x=\mathbf{0}$的解，则A相似于（A）（李永乐六套卷卷四）

$(A)\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}$　　$(B)\begin{pmatrix}2&&\\1&2&\\&&0\end{pmatrix}$

$(C)\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}$　　$(D)\begin{pmatrix}1&&\\1&2&\\&&0\end{pmatrix}$

注意$(A-2E)A=O$

构造相似（经典套路题型）

$A\alpha_1=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3$，$A\alpha_2=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3$，$A\alpha_3=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3$

$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3]=[a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3,b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3,c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3]$

$=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$

当$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$可逆时，$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$

三维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，且$A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_3$，则$A_{11}+A_{22}+A_{33}=3$（李林六套卷卷一）

$$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

设三阶矩阵 A 不可逆，α,β 是两个线性无关的三维列向量，且 $A\alpha=\beta,A\beta=\alpha$，则 $tr[(A+2E)^*]=11$（超越 5+5 卷十）

$A\gamma=\mathbf{0}$

$$A[\alpha,\beta,\gamma]=[A\alpha,A\beta,A\gamma]=[\beta,\alpha,\mathbf{0}]=[\alpha,\beta,\gamma]\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$[\alpha,\beta,\gamma]^{-1}A[\alpha,\beta,\gamma]=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

相似对角化原理相关知识

如果三阶矩阵有三个两两正交的特征向量，则该矩阵一定是对称矩阵

设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$ 是三阶实矩阵 A 的三个互异特征值的特征向量，则“$(a,b)=(1,2)$”是“A 为对称矩阵”什么条件（充要条件）（张宇八套卷卷一）

$\alpha_1\perp\alpha_2,\alpha_1\perp\alpha_3\Longleftrightarrow(a,b)=(1,2)$

矩阵的相似合同关系及判定

实对称矩阵合同的充要条件“正、负特征值个数一致”

实对称矩阵相似的充要条件“特征值完全一致”

那么对于实对称矩阵相似一定合同！

对称矩阵只能和对称的矩阵合同，非对称矩阵只能和非对称矩阵合同

说明两个非对称矩阵合同或相似超过了线性代数的范畴，我们只能利用必要条件来说明它们不相似，不合同

相似的必要条件：特征值、行列式、秩、迹、$r(\triangle-kE)$ (k 一般取特征值) 一样

合同的必要条件：秩相等

设实矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2\\2&a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&b\\3&1\end{pmatrix}$ 合同，则（B）（李林六套卷卷二）

$(A)a>2\quad(B)a<2\quad(C)a>1\quad(D)a<1$

$|A| = 2a - 4$，$|B| = -5$

设$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，则 C（李林六套卷卷三）（可秒杀）

$(A)A$ 与 C 相似　$(B)A$ 与 B 合同　$(C)B$ 与 C 合同　$(D)B$ 与 C 相似

若(D)对，则(C)对

下列矩阵与$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$相似的是（C）（超越 5+5 卷九）（真题考过类似）

$(A)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　$(B)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　$(C)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　$(D)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$　$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$　$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$　$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6$

$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　$C - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$P - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

设$A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} b & b & a \\ b & a & b \\ a & b & b \end{pmatrix}$,$C=\begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，则 B（李艳芳三套卷卷三）

$(A)A,B$不相似但合同　$(B)C,B$既相似又合同

$(C)A,C$不相似但合同　$(D)B,C$不相似但合同

$A{:}a+2b,a-b,a-b$

$B{:}a+2b,a-b,b-a$

$C{:}a+2b,a-b,b-a$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -b & -b \\ -b & \lambda-a & -b \\ -b & -b & \lambda-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-a-2b & \lambda-a-2b & \lambda-a-2b \\ -b & \lambda-a & -b \\ -b & -b & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-a-2b & 0 & 0 \\ -b & \lambda-a+b & 0 \\ -b & 0 & \lambda-a+b \end{vmatrix}$$

$=(\lambda-a-2b)(\lambda-a+b)(\lambda-a+b)$

$a+2b,a-b,a-b$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix} \lambda-b & -b & -a \\ -b & \lambda-a & -b \\ -a & -b & \lambda-b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-a-2b & \lambda-a-2b & \lambda-a-2b \\ -b & \lambda-a & -b \\ -a & -b & \lambda-b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-a-2b & 0 & 0 \\ -b & \lambda-a+b & 0 \\ -b & a-b & \lambda+a-b \end{vmatrix}$$

$=(\lambda-a-2b)(\lambda-a+b)(\lambda+a-b)$

$a+2b,a-b,b-a$

$$|\lambda E-C|=\begin{vmatrix} \lambda-b & -a & -b \\ -a & \lambda-b & -b \\ -b & -b & \lambda-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-a-2b & \lambda-a-2b & \lambda-a-2b \\ -a & \lambda-b & -b \\ -b & -b & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-a-2b & 0 & 0 \\ -b & \lambda+a-b & a-b \\ -b & 0 & \lambda-a+b \end{vmatrix}$$

$=(\lambda-a-2b)(\lambda-a+b)(\lambda+a-b)$

$a+2b,a-b,b-a$

二次型

正定和半正定二次型

从特征值入手

x^TAx是正定二次型 $\Longleftrightarrow$ A的所有特征值大于零

x^TAx是半正定二次型 $\Longleftrightarrow$ A的所有特征值大于或等于零

设A为n阶的实对称矩阵，则“$|A|<0$”是“存在n维非零列向量α，使得$\alpha^T A\alpha<0$”的什么条件？（张宇八套卷卷五）

存在维非零列向量α，使得$\alpha^T A\alpha$ $\Longleftrightarrow$ $x^T Ax$不是半正定二次型 $\Longleftrightarrow$ A有一个特征值小于零

设A为二阶实对称矩阵，若对于任意的二维非零列向量x，都有$|x^T Ax|<|x^T x|$，则二次型$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}A+E & O\\ O & A-E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}$（其中$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$为二维列向量）的规范形为$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$？（李林六套卷卷一）

$y_1^2+y_2^2$

$$\left|\lambda\begin{pmatrix}E & O\\ O & E\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}A+E & O\\ O & A-E\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda E-(A+E) & O\\ O & \lambda E-(A-E)\end{vmatrix}=|\lambda E-(A+E)|\,|\lambda E-(A-E)|$$

设$A=\begin{pmatrix}a & -1\\ -1 & a\end{pmatrix}$，若对于任意的二维列向量$\alpha$，均有$\alpha^T A^{-1}\alpha\geqslant\dfrac{(\beta^T\alpha)^2}{\beta^T A\beta}$，其中$\beta=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，则$a$的取值范围为$(-1,1)\cup(1,+\infty)$　（张宇八套卷卷三）

$$\alpha^T A^{-1}\alpha-\frac{(\beta^T\alpha)^2}{\beta^T A\beta}=\alpha^T A^{-1}\alpha-\frac{\alpha^T\beta\beta^T\alpha}{2a-2}=\alpha^T\left(\begin{pmatrix}\dfrac{a}{a^2-1} & \dfrac{1}{a^2-1}\\ \dfrac{1}{a^2-1} & \dfrac{a}{a^2-1}\end{pmatrix}-\frac{1}{2a-2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)\alpha$$

$$=\alpha^T\frac{1}{2(a+1)}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\alpha$$

从定义入手

设A是n阶正定矩阵，B是$n\times m$的矩阵，则B^TAB是正定矩阵的充要条件是（A）（余炳森五套卷卷二）

$(A)r(B)=m \quad (B)r(B)=n \quad (C)r(B)<m \quad (D)r(B)<n$

$x^TB^TABx=(Bx)^TA(Bx)\geq 0$

$x^TB^TABx>0(\forall x\neq \mathbf{0}) \Longleftrightarrow Bx\neq \mathbf{0}(\forall x\neq \mathbf{0})$

二次型的规范形

计算规范形主要两个方法：计算特征值、配方法

二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-x_3)(x_1+2x_2+3x_3)$的规范形为（B）（超越 5+5 卷一）

$(A)y_1^2+y_2^2 \quad (B)y_1^2-y_2^2 \quad (C)y_1^2-y_2^2+y_3^2 \quad (D)y_1^2+y_2^2+y_3^2$

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-x_3)(x_1+2x_2+3x_3)=y_1y_2$

$y_1=x_1+x_2-x_3$

$y_2=x_1+2x_2+3x_3$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2=0$是（A）（张宇八套卷卷五）

(A)锥面$z^2=ax^2+by^2(a,b>0)$

(B)单页双曲面$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

(C)双页双曲面$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2+y^2}{c^2}=1$

(D)柱面$x^2+y^2=R^2(R>0)$

双曲面由双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$绕坐标轴旋转得到

二次型恒为零问题

若$x^TAx\equiv 0(A=A^T)$，则$A=O$

设A为n阶矩阵，“对任意的向量α,β，均有$\alpha^TA^TA\beta=\alpha^T\beta$”是“$A$为正交矩阵”的什么条件(充要条件)（张宇八套卷卷八）

线代条件挖掘

1）若A的行和为k，则A^*的行和为$\frac{|A|}{k}$，k是A的特征值，$(1,\cdots,1)^T$为对应的特征向量

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\\k\\k\end{bmatrix}\Rightarrow |A|\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=A^*\begin{bmatrix}k\\k\\k\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{|A|}{k}\\\frac{|A|}{k}\\\frac{|A|}{k}\end{bmatrix}=A^*\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

2）若A的列和为k，则A^*的列和为$\frac{|A|}{k}$

A的列和为$k\implies A^T$的行和为$k\implies (A^T)^*$的行和为$\frac{|A|}{k}\implies A^*$的列和为$\frac{|A|}{k}$

设三阶矩阵A的各列元素之和为2，且$A_{11}+A_{12}+A_{13}=2$，则$|A^*-2A^{-1}|=2$（超越 5+5 卷五）

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

3）形如$AB=O$，$AB=2B$，α是$Ax=\mathbf{0}$或$Ax=\boldsymbol{b}$的解

$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,3)^T$或$\mathbf{0}$这类条件，就是在告诉你$A$的特征向量

4）形如$f(A)=O$类条件，就是在告诉你A的特征值只能是哪几个

设A,B为三阶方阵，$Ax=\mathbf{0}$有非零解，$B\neq O,tr(A)=1$且$AB+B=O$，则与$(A-E)^*$相似的对角矩阵是（C）（汤家凤八套卷卷六）

$(A)\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$　　$(B)\begin{pmatrix}-2&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}$

$(C)\begin{pmatrix}-2&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$　　$(D)\begin{pmatrix}-2&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$

设三阶实对称矩阵$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$且$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^T$又存在$a$使得$A^3+(a^5-1)A^2+2a^3A+aE=O,tr(A)=1$，则下列结论中正确的是 123

1）$r(A)=1$　　2）A的特征值为$0,0,1$

3）A与矩阵$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}$合同　　3）$\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$为$Ax=\mathbf{0}$的解（超越 5+5 卷三）

四小专题

利用公式$[a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma，a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma，a_3\alpha+b_3\beta+c_3\gamma]=[\alpha,\beta,\gamma]\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$

设向量$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m(m>1),\beta_1=\alpha-\alpha_1,\beta_2=\alpha-\alpha_2,\cdots,\beta_m=\alpha_m-\alpha_m$，则（C）（李永乐三套卷卷二）

(A)向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的秩小于向量组$\beta_1,\cdots,\beta_n$的秩

(B)向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的秩大于向量组$\beta_1,\cdots,\beta_n$的秩

(C)向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的秩等于向量组$\beta_1,\cdots,\beta_n$的秩

(D)不能确定

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]\begin{bmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&&1\\\vdots&&\ddots&\\1&1&\cdots&0\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&&1\\\vdots&&\ddots&\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}$$

设A为三阶矩阵，且$A^2\alpha\neq\mathbf{0}$，$A^3\alpha=\mathbf{0}$，若向量组

$\alpha+2A\alpha-A^2\alpha,2\alpha+3A\alpha+A^2\alpha,A\alpha+aA^2\alpha$ 线性相关，则$a=$ （汤家凤八套卷卷六）

$$[\alpha+2A\alpha-A^2\alpha,2\alpha+3A\alpha+A^2\alpha,A\alpha+aA^2\alpha]=[\alpha,A\alpha,A^2\alpha]\begin{bmatrix}1&2&0\\2&3&1\\-1&1&a\end{bmatrix}$$

设三阶矩阵可逆矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，且$B=(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2+\lambda\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1)$，若$|A|=|B|$，则$\lambda=0$（超越 5+5 卷一）

$$(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2+\lambda\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&1&0\\0&\lambda&1\end{pmatrix}$$

$AB=kA+lB\,(kl\neq0)$ 类问题

$$(kE-B)\,(lE-A)=klE\Longrightarrow kE-B \text{ 与 } \frac{lE-A}{kl} \text{ 互逆}$$

$$(kE-B)\frac{lE-A}{kl}=\frac{lE-A}{kl}(kE-B)\Longrightarrow AB=BA$$

三阶实矩阵A,B满足$AB=A+2B$，则（B）（余炳森五套卷卷三）

(A)1 是B的特征值

(B)1 不是B的特征值

(C)2 是B的特征值

(D)2 不是B的特征值

AB,A,B 的关系（$AB=C$）

向量组的关系

$A_{m\times n}B_{n\times s}$ 的行向量组可以由 $B_{n\times s}$ 的行向量组线性表示

$A_{m\times n}B_{n\times s}$ 的列向量组可以由 $A_{m\times n}$ 的列向量组线性表示

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}\beta_1^T+\cdots+a_{1n}\beta_n^T \\ \vdots \\ a_{m1}\beta_1^T+\cdots+a_{mn}\beta_n^T \end{bmatrix}$$

乘的矩阵在左就是行，乘的矩阵在右就是列（左行右列）

设 A,B 分别为 $m\times n$ 与 $n\times s$，且 $r(A)=n$，则正确的是（B）（李林六套卷卷二）

(A) AB 的列向量组与 B 的列向量组等价

(B) AB 的行向量组与 B 的行向量组等价

(C) AB 的列向量组与 A 的列向量组等价

(D) AB 的行向量组与 A 的行向量组等价

此题不难选出正确选项

(A) 错，乘的 A 在左，则是行

(C) 错，乘的 B 无限制

(D) 错，乘的 B 在右，则是列

参考答案是利用方程组的知识来说明的，但是不够直观

我们简单说明一下 (B) 选项

AB 的行向量组可以由 B 的行向量组线性表示

把 B 表示成 $\triangle\times AB$

$B=[(A^TA)^{-1}A^T]AB$

B 的行向量组可以由 AB 的行向量组线性表示

设 n 维列向量 α 满足 $\alpha^T\alpha=1$ 且 $(E-2\alpha\alpha^T)A=B$，则（B）（李林六套卷卷二）

(A) B 的列向量组与 A 的列向量组等价

(B) B 的行向量组与 A 的行向量组等价

(C) B 的列向量组与 $E-2\alpha\alpha^T$ 的列向量组等价

(D) B 的行向量组与 $E-2\alpha\alpha^T$ 的行向量组等价

秩的关系

1） $r(AB)\leqslant r(A),r(B)$

2） 左乘以列满秩矩阵，或右乘行满秩矩阵，秩不改变

设A,B分别为$m\times n$与$n\times s$，且$AB=C$，则正确的是（D）（李林六套卷卷五）

(A)若$r(C)=m,$则$r(A)\leqslant m$　　(B)若$r(C)=s,$则$r(B)\leqslant s$

(C)若$r(A)=n,$则$r(B)\leqslant r(C)$　　(D)若$r(A)=n,$则$r(B)=r(C)$

$A^*A=O$延伸出来的考法（$A^*A=O,AA^*=O,|A|=0$同时成立）

A^*的列向量都是方程$Ax=\mathbf{0}$的解

A的列向量都是方程$A^*x=\mathbf{0}$的解

$$r(A^*)=\begin{cases} n\,, & r(A)=n \\ 1\,, & r(A)=n-1 \\ 0\,, & (\text{此时}A^*=O),r(A)<n-1 \end{cases}$$

设三阶矩阵A的第一行元素的余子式均为一，且$AA^*=O$，则方程$Ax=\mathbf{0}$的通解为$k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$,$k$为任意常数（李永乐六套卷卷一）

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$为四阶非满秩矩阵，且$A_{22}\neq 0$，下列向量组为$A^*x=\mathbf{0}$的基础解系的是（A）（汤家凤八套卷卷七）

$(A)\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　$(B)\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

$(C)\alpha_2,\alpha_3$　　$(D)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & (\text{此时} A^*=O), r(A)<n-1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

在条件$r(A)=n-1$下，求A^*

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & (\text{此时} A^*=O), r(A)<n-1 \end{cases}$$

设三阶实对称矩阵A满足$A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$，且$r(A)=2$，求$A^*\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

（李永乐六套卷卷六）

可得$r(A^*)=1$，得A^*各列成比列，且都是$Ax=\mathbf{0}$的解

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2i-2j-2k$$