2024年秋季学期代数与几何期末考试（回忆版）参考答案

整理：24学术讨论群（syhanjin 老汉 离谱 潜伏 混子 浮萍 東牆 天赐 卡基米 黄鹂 Yasumi Speculator Schwarz Fun10165 Jaaack）

答案速查

一、填空题

题号	1	2	3	4	5
答案	5	$\sqrt{2}$	9	$3x^2+5z^2=6$	$\begin{pmatrix}-65\\-131\end{pmatrix}$

二、单选题

题号	1	2	3	4	5
答案	A	B	B	A	B

三、多选题

题号	1	2
答案	ACD	ABCD

答案详解

一、填空题

1. 按第一行（列）展开，直接计算即可.

$$\begin{vmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=2(2^3-2-2)-(2^2-1)=5.$$

2. 利用点到平面距离坐标公式直接计算即可.

$$d=\frac{|5\times 2-4+4|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\sqrt{2}.$$

3. 由题意知 $\boldsymbol{B}^{-1}-2\boldsymbol{E}$ 的特征值为

$$\lambda_1 = 1^{-1} - 2 = -1, \lambda_2 = (-1)^{-1} - 2 = -3, \lambda_3 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} - 2 = 3.$$

故有

$$|\boldsymbol{B}^{-1} - 2\boldsymbol{E}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 9.$$

4. 用第一个式子加上第二个式子的两倍，消去 y 得

$$3x^2 + 5z^2 = 6.$$

此即为所求方程.

5. 取 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -2 & \\ & 1 \end{pmatrix}$，由题意知 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$.

故有

$$\boldsymbol{A}^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{PD}^5\boldsymbol{P}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^5 & \\ & 1^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -65 \\ -131 \end{pmatrix}.$$

二、选择题

1. A

由 $R(\boldsymbol{A}) = 2$ 得 $\dim N(\boldsymbol{A}) = 3 - 2 = 1$.

则方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3) - \frac{3}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$ 的特解为

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故原方程组的解为

$$\boldsymbol{X} = k\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} (k \in \mathbb{R}).$$

2. B

B的反例：$\boldsymbol{A} = (1), k = -1.$

3. B

首先，对称矩阵与非对称矩阵不可能合同.

计算可得, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值且特征值各不相同,

因此 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 与同一个对角阵（由三个不同特征值构成的对角阵）相似, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

综上, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似但不合同.

4\. A

两条直线的方程可以改写为 $L_1:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, L_2:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t_2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,

联立可得 $t_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=t_2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 即 $t_1\boldsymbol{\alpha}_1+(1-t_2)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$.

由 L_1,L_2 只有一个交点知 (t_1,t_2) 唯一, 进而 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$ 有唯一解.

5\. B

由题意知 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$, 将选项代入检验即可.

三、多选题

1\. ACD

A. $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 可能对应同一特征值.

B. 正确.

C. 只要存在三个线性无关的特征向量, 仍可以相似对角化.

D. $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 可能线性相关, 此时不能表达所有的特征向量.

2\. ABCD

A. 反例：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1),\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2=(1)$.

B. 反例：$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

C. 反例：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

D. 反例：向量组中含有零向量.

四、

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}-\dfrac{6}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

则 $\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\beta}|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

(2) 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2)$, 过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{pmatrix}$,

则有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}$, 即 $\boldsymbol{\gamma}_1=p_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{21}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\gamma}_2=p_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{22}\boldsymbol{\alpha}_2$,

由(1)知 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\sqrt{6}}{6}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\gamma}_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{\alpha}_2$,

对比系数可得过渡矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{3}}{3}\\0&\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

五、

易知 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{E}$.

记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&3&-1\\-1&-2&0\\2&6&-1\end{pmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{B}|=1\neq 0$, 故 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

因此 $\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{B}^{-1}=2\begin{pmatrix}2&-3&-2\\-1&1&1\\-2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-6&-4\\-2&2&2\\-4&0&2\end{pmatrix}$.

六、

记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&a\\1&a&0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\b\end{pmatrix}$.

显然 $R(\boldsymbol{A})\geq 2$.

由 $|\boldsymbol{A}|=2a-1-a^2=-(a-1)^2$ 得 $R(\boldsymbol{A})=\begin{cases}2, a=1,\\3, a\neq 1.\end{cases}$

① 当 $a\neq 1$ 时, $R(\boldsymbol{A})=3$.

易知 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta})=3$, 则原方程组有解.

又由 $\dim N(\boldsymbol{A})=3-R(\boldsymbol{A})=0$ 知原方程组有唯一解.

② 当 $a=1$ 时,

$$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&2\\1&1&0&b\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1&-3\\0&1&1&2\\0&0&0&b+1\end{pmatrix}.$$

(i) 当 $b\neq -1$ 时, $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta})$, 原方程组无解.

(ii)当 $b=-1$ 时, $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta})=2$, 原方程组有解.

又 $\dim N(\boldsymbol{A})=3-R(\boldsymbol{A})=1$, 则原方程有无穷多解.

此时, 与原方程组同解的方程组为 $\begin{cases}x_1=x_3-3,\\x_2=-x_3+2.\end{cases}$

故原方程组导出组的基础解系 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, 特解 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$.

则原方程组的解为 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ (k 为任意常数).

七、

(1) 由题意知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,

所以 $\lambda_1=2, \lambda_2=1$.

又 $tr(\boldsymbol{A})=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=8$, 所以 $\lambda_3=5$.
即 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为 $2,1,5$.

(2) 依题意设正交矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & x\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & y\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & z\end{pmatrix}$, 则 $\begin{cases}x+y+z=0,\\ x-z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{6}}{6},\\ y=-\frac{\sqrt{6}}{3},\\ z=\frac{\sqrt{6}}{6},\end{cases}$ 即 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$.

此时, $f=2y_1^2+y_2^2+5y_3^2$.

(3) 记 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & & 5\end{pmatrix}$,

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 4 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

八、
记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m)$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$.
(1) 正确. 证明:
由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则 $R(\boldsymbol{B})<m$,
进而 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{B})<m$.
因此 $|\boldsymbol{A}|=0$.
(2) 正确. 证明:
易知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵.
由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $R(\boldsymbol{B})=m$.
对于任意非零 n 维向量 $\boldsymbol{X}$, 有

$$1=R(\boldsymbol{X})+R(\boldsymbol{B})-m\le R(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})\le 1.$$

所以

$$R(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})=1.$$

则

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X},\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})>0.$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 进而 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2...\lambda_m>0$.