

# 2025年秋季学期微积分A模拟期末试题

题目设计：24-机器人与智能装备-张永智

审核：25-卓越优才-张淮洛，24-计算机与电子通信-陈佳横

## 一、选择题

1. 下列函数在  $x = 0$  处可导的是 ( )

- A.  $|e^x - \cos x|$
- B.  $e^{|x|} - \cos |x|$
- C.  $e^{|x|} - x \cos |x|$
- D.  $e^{|x|} - |x| \cos |x|$

2. 函数  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-1}$  的渐近线数量为 ( )

- A. 0 条
- B. 1 条
- C. 2 条
- D. 3 条

3. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1 + x)]^{\frac{1-\cos x}{f(x)}} = e$ , 则  $f(x)$  的等价无穷小为 ( )

- A.  $\tan x - x$
- B.  $e^x - 1 - x$
- C.  $x(1 - \cos x)$
- D.  $\frac{1}{2}x^2$

4. 方程  $y'' + y = 0$  的通解形式为 ( )

- A.  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- B.  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
- C.  $y = (C_1 + C_2 x)e^x$
- D.  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

5. 若函数  $f(x)$  连续, 则  $\frac{d}{dx} [\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt] = ( )$

- A.  $x f(x^2)$
- B.  $-x f(x^2)$
- C.  $2x f(x)$
- D.  $-2x f(x^2)$

## 二、填空题

1. 参数方程  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ , 则  $t = \frac{\pi}{4}$  时,  $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$
2. 曲线  $x^2 + xy + y^2 = 3$  在点  $(1, 1)$  处的曲率半径为  $\underline{\hspace{2cm}}$
3. 计算  $\int_0^\pi \frac{\cos x}{1 + e^{\sin x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$
4. 曲线  $y = x^2 + 2 \ln x$  在拐点处的法线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$
5. 已知  $f(x) + e^x \sin x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ , 则  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

## 三、计算极限

计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln(1 + \sin t) dt}{\cos x^2 - 1}.$

## 四、积分计算

已知  $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \leq 0 \\ \tan x, & x > 0 \end{cases}$ , 求  $\int_{-1}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx.$

## 五、解答题

已知  $xf'(x) = f(x) + x^2$ ,  $f'(0) = 1$ , 求:

(1)  $f(x)$  的表达式;

(2) 曲线  $y = f(x)$  与 x 轴围成一个封闭图形, 令其绕 x 轴旋转形成一个回转体, 求回转体的体积.

## 六、证明题

已知  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1 + x^2) + \cos \frac{\pi}{2} x}$  的定义域为  $[-1, 1]$ , 证明:

(1)  $f(x)$  为奇函数;

(2) 存在  $a \in (0, 1)$ , 使得  $f'(a) = \frac{e - e^{-1}}{\ln 2}$ ;

(3) 存在  $b \in (-1, 1)$ , 使得  $f''(b) + f'(b) = \frac{e - e^{-1}}{\ln 2}$ .