概率论大复盘

主讲人 夜雨

以主流模拟卷的核心题为载体，给概率论小题做一个复盘，这里总结了大量概率论小题的做题技巧，相信大家看完至少提高五分，或者做题时间至少缩短十五分钟

维恩图解抽象概率计算

超越卷三

(10) 设随机事件 A 与 B 互不相容，B 与 C 相互独立，且 $P(A)=P(B)=0.4$，$P(C)=0.5$，则 $P\left(C-A \middle| A\cup BC\right)=($ $)$.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

超越卷五

(8) 设 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.8$，则 $P(\bar{A}\ \bar{B})P(B\mid\bar{A})$ 的最大值为( ).

(A)0.125 (B)0.12 (C)0.08 (D)0.15

超越卷六

(8) 下列结论正确的个数为(　　).

① 任意事件 A,B,C,均有 $P(ABC) \geqslant P(A)+P(B)+P(C)-2$.

② 若 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$,则 $P(B \mid A)>P(B \mid \bar{A})$ 的充要条件为 $P(A \mid B)>P(A \mid \bar{B})$.

③ $P(A-B)P(B-A) \geqslant P(A)P(B)-P(AB)$.

④ $P(A \cup B)P(AB) \leqslant P(A)P(B)$.

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

8. 设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布 $N(0,\sigma^2)(\sigma>0)$,且 $P\{X \leqslant 1, Y \leqslant -1\}=\frac{1}{4}$,则

$P\{X>1, Y>-1\}=$

A. 1.　　B. $\frac{1}{4}$.　　C. $\frac{1}{2}$.　　D. $\frac{3}{4}$.

余炳森卷一

8. 若 A 与 B 为任意两个随机事件,则(　　).

A. $P(AB) \geqslant \frac{P(A)+2P(B)}{3}$　　B. $P(AB) < \frac{P(A)+2P(B)}{3}$

C. $P(A \cup B) \geqslant \frac{P(A)+2P(B)}{3}$　　D. $P(A \cup B) < \frac{P(A)+2P(B)}{3}$

分布函数的性质与判定

分布函数$F(x)=P\{X\leqslant x\}$的性质

性质一：$F(x)$是一个不减的非负函数

性质二：$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，其中$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

性质三：$F(x+0)=F(x)$即$F(x)$是右连续的，其中$F(x+0)=\lim\limits_{t\to x^+}F(t)$

超越卷十

(8) 下列函数中，为某随机变量 X 的分布函数的是(　　).

(A) $F(x)=\dfrac{1+\operatorname{sgn}(x)}{2}$　　(B) $F(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$

(C) $F(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$　　(D) $F(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

李永乐六套卷卷四

8. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，且 $F(0)=0$，则下列函数可作为分布函数的是

A. $G_1(x)=\begin{cases}1+F\left(\dfrac{1}{x}\right), & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1.\end{cases}$　　B. $G_2(x)=\begin{cases}1-F\left(\dfrac{1}{x}\right), & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1.\end{cases}$

C. $G_3(x)=\begin{cases}F(x)+F\left(\dfrac{1}{x}\right), & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1.\end{cases}$　　D. $G_4(x)=\begin{cases}F(x)-F\left(\dfrac{1}{x}\right), & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1.\end{cases}$

随机变量的可加性

设X和Y是两个相互独立的随机变量，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

设X和Y是两个相互独立的随机变量，$X\sim P(\lambda_1),Y\sim P(\lambda_2)$，则$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

设X和Y是两个相互独立的随机变量，$X\sim\chi^2(n),Y\sim\chi^2(m)$，则$X+Y\sim\chi^2(n+m)$

设X和Y是两个相互独立的随机变量，$X\sim\Gamma(\alpha,\theta),Y\sim\Gamma(\beta,\theta)$，则$X+Y\sim\Gamma(\alpha+\beta,\theta)$

设X和Y是两个相互独立的随机变量，$X\sim B(n,p),Y\sim B(m,p)$，则$X+Y\sim B(m+n,p)$

这些结论说明正态分布、泊松分布、χ分布、Γ分布、二项分布都具有可加性

特别地，正态分布还有如下性质

若随机变量X服从正态分布，则$Y=aX+b(a\neq 0)$也服从正态分布

可得

若$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且都服从正态分布，则$Y=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n$和

$Z=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n+b$($a_i$不全为0)也服从正态分布

超越卷二

(10) 设总体X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，$X_1,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$为来自总体$X$的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，且$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=1-E(\overline{X})$，则$P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\geqslant 2\right\}=($　　$)$.

(A)e^{-1}　　(B)$2e^{-1}$　　(C)$1-e^{-1}$　　(D)$1-2e^{-1}$

超越卷三

(9) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1}$为来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$T=a(X_{n+1}-\overline{X})^2$，若使$T\sim\chi^2(1)$，则$a=($　　$)$.

(A) $\frac{n}{(n+1)\sigma^2}$　　(B) $\frac{n\sigma^2}{n+1}$　　(C) $\frac{n}{(n+1)\sigma}$　　(D) $\frac{n+1}{n\sigma}$

随机变量的无记忆性

几何分布具有“无记忆性”

$P(X>m+n|X>m)=P(X>n)$

$P(X<m+n|X>m)=P(X<n)$

$P(X=m+n|X>m)=P(X=n)$

指数分布具有“无记忆性”

$P(X>s+t|X>t)=P(X>s)$

$P(X<s+t|X>t)=P(X<s)$

余炳森卷三

8. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,3,\cdots$，其中 $0<p<1$，m,n 为正整数，则 $P\{X>m+n \mid X>m\}$（　　）.

A. 与 m 无关，与 n 有关

B. 与 m 有关，与 n 无关

C. 与 m,n 均无关

D. 与 m,n 均有关

最值符号的处理

$\min\{x,y\}<\triangle \xrightarrow{\text{对立事件}} \min\{x,y\}>\triangle$

$\max\{x,y\}>\triangle \xrightarrow{\text{对立事件}} \max\{x,y\}<\triangle$

汤家凤卷二

8. 设 $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(1,4)$，且 X,Y 相互独立，则 $P\{\min\{X,Y\}\leqslant 1\}=$（　　）.

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{3}{4}$

李永乐六套卷卷二

9. 已知随机变量 X 与 Y 均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，如果存在常数 α，成立 $P\{\max(X,Y)>\alpha\}=P\{\min(X,Y)\leqslant\alpha\}$，则 α 必为

A. $\frac{\mu}{2}$.

B. $-\frac{\mu}{2}$.

C. μ.

D. $-\mu$.

汤家凤卷四

10. 设 $X \sim E(2)$，$Y=\min\{X,2\}$，Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则（　　）.

A. $F_Y(y)$ 为可导函数

B. $F_Y(y)$ 连续，但不可导

C. $F_Y(y)$ 有一个跳跃间断点

D. $F_Y(y)$ 有两个间断点

李永乐三套卷卷一

16. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且均服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，且 $P\{X\leqslant -1\}=\frac{1}{4}$，则 $P\{\max(X,Y)\leqslant 2,\min(X,Y)\leqslant -1\}=$ ______.

独立同分布的最大值和最小值

当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立时且具有相同分布函数 $F(x)$ 时，有

$F_{\max}(z)=[F(x)]^n$，$F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^n$

特别地：$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布于 $E(\lambda)\Longrightarrow \min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\sim E(n\lambda)$

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布于 $F(x)$

$F_{\max}(x)=P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\leqslant x\}=P\{X_1\leqslant x\}P\{X_2\leqslant x\}\cdots P\{X_n\leqslant x\}=[F(x)]^n$

$F_{\min}(x)=P\{\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\leqslant x\}=1-P\{\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}>x\}$

$=1-P\{X_1>x\}P\{X_2>x\}\cdots P\{X_n>x\}$

$=1-(1-P\{X_1\leqslant x\})(1-P\{X_2\leqslant x\})\cdots(1-P\{X_n\leqslant x\})$

$=1-[1-F(x)]^n$

李永乐六套卷卷二

8. 设随机变量 X 和 Y 均服从指数分布 $E(1)$，且 X,Y 相互独立，则 $P\{1 \leqslant \min(X,Y) \leqslant 2\} =$

A. $e^{-1}(1-e^{-1})$.　　B. $e^{-1}(1-e^{-2})$.　　C. $e^{-2}(1-e^{-1})$.　　D. $e^{-2}(1-e^{-2})$.

超越卷二

(9) 设总体 $X \sim E(1)$，(X_1,X_2,X_3) 为来自总体 X 的简单随机样本. 记 $T_1 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} X_i$，$T_2 = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} X_i$. 则 $E(T_1 - T_2) = ($　　$)$.

(A) $\frac{3}{2}$　　(B)3　　(C) $\frac{4}{3}$　　(D)1.

巧用正态分布的绝对值期望

若$X \sim N(0,1)$，则$E(|X|)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$（记），$D(|X|)=E(|X|^2)-E^2(|X|)=1-\dfrac{2}{\pi}$（不记）

最值符号也可以和绝对值联系到一起

$$\min\{X,Y\}=\frac{X+Y-|X-Y|}{2}$$

$$\max\{X,Y\}=\frac{X+Y+|X-Y|}{2}$$

李林卷六

10. 设(X,Y)服从二维正态分布$N(0,0;1,1;0)$，则$E(|X-Y|)=$

A. 0.　　　　B. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

C. $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.　　　　D. $\dfrac{1}{\pi}$.

余炳森卷四

9. 设随机变量X与Y相互独立，$X \sim N\left(1,\dfrac{1}{4}\right)$，$Y \sim N(3,1)$，令$Z=2X-Y+1$，则$D|Z|=$（　　）.

A. $1-\dfrac{2}{\pi}$　　B. $2-\dfrac{4}{\pi}$　　C. 2　　D. 3

汤家凤卷一

9. 设 $X \sim N(1,1)$，$Y \sim N(1,1)$，X，Y 相互独立，则 $E(\min\{X,Y\})=$（　　）.

A. $1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}$　　B. $1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

C. $1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}$　　D. $1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}$

二维正态分布的性质

性质一：若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

注：X 和Y 均服从正态分布 $\nRightarrow$ (X,Y)服从二维正态分布

性质二：若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则$X$ 与Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $\rho=0$（即X 与Y 不相关）

性质三：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$且$X$ 与Y 相互独立，则$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;0)$

性质四：若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\rho\sigma_1\sigma_2)$（其中$a,b$ 不全为零）

性质五：若(X,Y)服从二维正态分布，且$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，则$(aX+bY,cX+dY)$服从二维正态分布

超越卷四

(16) 设随机变量$(X,Y)\sim N\left(0,0;1,1;\frac{1}{2}\right)$，则 $P\{X^2>Y^2\}=$ ______.

答案　填“$\frac{1}{2}$”.

超越卷六

(10) 设二维随机变量$(X,Y)\sim N(0,0;2,2;0)$，$\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数，则$p=P\{0<X-Y<2\mid X+Y=1\}=($　　).

(A)$\Phi(1)$　　(B)$\Phi(2)$　　(C)$\Phi(1)-\Phi(0)$　　(D)$\Phi(2)-\Phi(0)$.

离散型和连续型的混合作全集拆分

汤家凤卷七

8. 设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim N(0,4)$，$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则$P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}=($　　).

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}&=P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2},Y=0\right\}+P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2},Y=1\right\}\\&=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},Y=0\right\}+P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},Y=1\right\}\\&=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}P\{Y=0\}+P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}P\{Y=1\}\end{aligned}$$

李林卷五

10. 设随机变量X与Y相互独立，且$X\sim B\left(1,\frac{1}{2}\right)$，$Y\sim N(0,1)$，则$P\{XY\leqslant E(XY)\}=$

A. 0.　　B. $\frac{1}{4}$.　　C. $\frac{1}{2}$.　　D. $\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned}P\{XY\leqslant 0\}&=P\{XY\leqslant 0,X=0\}+P\{XY\leqslant 0,X=1\}\\&=P\{0\leqslant 0,X=0\}+P\{Y\leqslant 0,X=1\}\\&=P\{X=0\}+P\{X=1\}P\{Y\leqslant 0\}\end{aligned}$$

均匀分布的一个特别结论

若$F(x)$是X的分布函数，则$F(X)\sim U(0,1)$

余炳森卷四

16. 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1, \\ 0, & 其他,\end{cases}$ $F(x)$为X的分布函数，EX为X的数学期望，则$P\{F(X)<1-EX\}=$______.

李永乐六套卷卷二

16. 设随机变量X服从正态分布$N(0,1)$，其分布函数为$\Phi(x)$，则$P\{2\Phi(X)\leqslant 1\}=$______.

样本均值，样本方差的数字特征

样本平均值$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

样本方差$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$

设$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，有$E\left(\overline{X}\right)=E(X)=\mu$，$D\left(\overline{X}\right)=\frac{D(X)}{n}=\frac{\sigma^2}{n}$，$E(S^2)=D(X)=\sigma^2$

超越卷六

(16) 设总体X的期望$EX=0$和方差$DX=\sigma^2$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，$S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$为二阶中心矩，若$a(n\overline{X}^2+S_2^2)$为总体方差$\sigma^2$的无偏估计量，则$a=$______.

三大分布的判断

χ^2 分布：设$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且都服从标准正态分布$N(0,1)$，则称统计量$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$服从自由度为$n$的$\chi^2$分布，记为$\chi^2\sim\chi^2(n)$

可加性：设$\chi_1^2\sim\chi^2(n_1)$，$\chi_2^2\sim\chi^2(n_2)$，并且χ_1^2,χ_2^2相互独立，则有$\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2)$

期望和方差：$E(\chi^2(n))=n$，$D(\chi^2(n))=2n$

F 分布：设$U\sim\chi^2(n_1)$，$V\sim\chi^2(n_2)$，且U,V相互独立，则称随机变量$F=\dfrac{U/n_1}{V/n_2}$服从自由度为(n_1,n_2)的F分布，记为$F\sim F(n_1,n_2)$

性质：若$F\sim F(n_1,n_2)$，则$1/F\sim F(n_2,n_1)$

t 分布：设$X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$，且$X$与$Y$相互独立，则称随机变量$t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为$n$的$t$分布，记为$t\sim t(n)$

特别地，若$X,Z\sim N(0,1)$且相互独立，$\dfrac{X}{|Z|}\sim t(1)$（经常考察）

通常结合正态分布的样本均值与样本方差的分布一起考察

正态分布的样本均值与样本方差的分布

设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的一个样本，$\overline{X},S^2$分别是样本均值和样本方差，则有如下结论

一：$\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$（可得$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$）（记）

二：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$（记）

三：$\overline{X}$与S^2相互独立（可得$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$与$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$相互独立）（记）

四：$\dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S}\sim t(n-1)$（可得$\dfrac{n\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$）（不记）

(10) 设变量X_1,X_2,X_3为来自正态总体$X\sim N(0,3)$的简单随机样本，则下列结论正确的个数是(　　).

① $\dfrac{1}{3}(X_1^2+X_2^2+X_3^2)\sim\chi^2(3)$，　② $\dfrac{1}{9}(X_1+X_2+X_3)^2\sim\chi^2(1)$，　③ $\dfrac{X_1+X_2}{|X_1-X_2|}\sim t(1)$，

④ $\dfrac{2X_1^2}{X_2^2+X_3^2}\sim F(1,2)$。

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

张宇卷三

10. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则下列结论：

① $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}\sim t(1)$；

② $\dfrac{4(\overline{X}-1)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$；

③ $\dfrac{4(\overline{X}-1)^2}{S^2}\sim F(1,3)$.

正确结论的个数为

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

李林卷六

16. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)(\sigma>0)$，$X_1,X_2,X_3$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$Y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X_1}{X_3}+\dfrac{X_2}{X_3}\right)^2$，若 $P\{Y>a\}=0.05(a\neq0)$，则 $P\left\{Y>\dfrac{1}{a}\right\}=$________.

卡方分布的数字特征

超越卷五

(9) 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(2,1)$，则 $D[(2X-Y)^2]=($ $)$.

(A)50 (B)10 (C)18 (D)9

(16) 设总体 $X \sim N(\mu,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，令 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$，则 Y^2 的期望 $E(Y^2)=$ ______.

分位点问题

16. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(1,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值. 对任意的常数 $\alpha(0<\alpha<1)$，自由度为 n 的 χ^2 分布的上侧 α 分位点 $\chi_\alpha^2(n)$ 定义为 $P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\alpha$，则 $P\{\chi_{0.9}^2(n-1)<\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2<\chi_{0.2}^2(n-1)\}=$ ______.

大数定律和中心极限定理

切比雪夫大数定律

设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，数学期望 EX_k 和方差 DX_k 都存在，并且方差有公共上界（即 $DX_k\leqslant M$，$k=1,2,\cdots$）则对于任意正数 ε，$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\right|<\varepsilon\right\}=1$

（即 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{P}E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\overset{P}{=}E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)$）

注：伯努利大数定律和辛钦大数定律都是切比雪夫大数定律的特殊情形，故只需记住切比雪夫大数定律

切比雪夫不等式

设随机变量 X 具有数学期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2$，则对于任意正数 ε，不等式 $P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 成立

注：由 $P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 可得 $P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

列维—林德伯格定理：设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立，服从同一分布，且具有数学期望和方差$E(X_k)=\mu,D(X_k)=\sigma^2>0(k=1,2,\cdots)$，则对于任意的$x$，恒有$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-n\mu\right)\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

当n很多大时，$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-n\mu\right)$近似地服从$N(0,1)$，由此得到$\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$近似地服从$N(n\mu,n\delta^2)$

注：棣莫弗—拉普拉斯定理是列维—林德伯格定理的特殊情形，故只需记住列维—林德伯格定理

超越

(9) 设总体$X\sim B(1,p)$，$X_1,\cdots,X_{1000}$是来自总体X的简单随机样本．$\overline{X}$为样本均值，则下列结论不正确的是(　　)．

(A) $\sum\limits_{i=1}^{1000}X_i\sim B(1000,p)$　　(B) $\sum\limits_{i=1}^{1000}X_i\overset{\text{近似}}{\sim}N(1000p,1000p(1-p))$

(C) $\overline{X}\overset{\text{近似}}{\sim}N(p,p(1-p))$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{X}\overset{P}{=}p$

李林卷二

9. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本，X服从参数为$\lambda=\frac{1}{2}$的泊松分布，$\Phi(x)$为$N(0,1)$的分布函数，则$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{2\sqrt{n}}\leqslant 1\right\}=$

A. $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$.　　B. $\Phi(\sqrt{2})$.　　C. $\Phi(\sqrt{3})$.　　D. $\Phi(1)$.

李永乐六套卷卷一

9. 将一枚骰子抛掷 100 次，根据切比雪夫不等式奇数点出现的次数在 35 到 60 之间的概率 P

A. 不大于$\frac{1}{4}$.　　B. 不大于$\frac{1}{9}$.　　C. 不小于$\frac{3}{4}$.　　D. 不小于$\frac{8}{9}$.

假设检验与置信区间

设X_1,X_2,X_3是来自总体$N(\mu,4^2)$的一个样本

根据样本值$x_1=1.1,x_2=1.2,x_3=1.5$

来检验H_0： $\mu=1$，H_1： $\mu\neq1$

如果$|\bar{x}-1|$足够小，可以认为H_0： $\mu=1$为真

需要建立一个标准

衡量$|\bar{x}-1|$大小，可变为衡量$\left|\frac{\bar{x}-1}{4/\sqrt{3}}\right|$大小

选取k，当$\left|\frac{\bar{x}-1}{4/\sqrt{3}}\right|\geqslant k$，就拒绝$H_0$；当$\left|\frac{\bar{x}-1}{4/\sqrt{3}}\right|<k$，就接受$H_0$

令$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-1}{4/\sqrt{3}}\right|\geqslant k\right\}=\alpha$，这里的$\alpha$为显著水平，得$k=z_{\frac{\alpha}{2}}$

接受域$\left|\frac{\overline{X}-1}{4/\sqrt{3}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}\Longleftrightarrow\overline{X}-\frac{4}{\sqrt{3}}z_{\frac{\alpha}{2}}<1<\overline{X}+\frac{4}{\sqrt{3}}z_{\frac{\alpha}{2}}$

得双侧置信区间$\left(\overline{X}-\frac{4}{\sqrt{3}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\frac{4}{\sqrt{3}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，$1-\alpha$为置信度

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本

情形一：σ^2为已知，$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$作为统计量

双边检验H_0：$\mu=\mu_0$，H_1：$\mu\neq\mu_0$

选取k，使得$\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geqslant k$，就拒绝$H_0$；$\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<k$，就接受$H_0$

令$P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geqslant k\right\}=\alpha$，这里的$\alpha$为显著水平，得$k=z_{\frac{\alpha}{2}}$

接受域$\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}\Longleftrightarrow\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}<\mu_0<\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$

得双侧置信区间$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，$1-\alpha$为置信度

情形二：σ^2为未知，$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$作为统计量

双边检验H_0：$\mu=\mu_0$，H_1：$\mu\neq\mu_0$

选取k，使得$\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geqslant k$，就拒绝$H_0$；$\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|<k$，就接受$H_0$

令$P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geqslant k\right\}=\alpha$，这里的$\alpha$为显著水平，得$k=t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

接受域$\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\Longleftrightarrow\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\mu_0<\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

得置信区间$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$，$1-\alpha$为置信度

情形一：σ^2为已知，$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$作为统计量

单边检验H_0：$\mu\leqslant\mu_0$，H_1：$\mu>\mu_0$

选取k，使得$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geqslant k$，就拒绝$H_0$；$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<k$，就接受$H_0$

令$P\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geqslant k\right\}=\alpha$，这里的$\alpha$为显著水平，得$k=z_\alpha$

接受域$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<z_\alpha\Longleftrightarrow\overline{X}-z_\alpha\sigma/\sqrt{n}<\mu_0$

得单侧置信区间$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ +\infty\right)$

情形二：σ^2 为已知，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 作为统计量

单边检验 H_0：$\mu \leq \mu_0$，H_1：$\mu > \mu_0$

选取 k，使得 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \geq k$，就拒绝 H_0；$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < k$，就接受 H_0

令 $P\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \geq k\right\} = \alpha$，这里的 α 为显著水平，得 $k = t_\alpha(n-1)$

接受域 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1) \Longleftrightarrow \overline{X} - t_\alpha(n-1)S/\sqrt{n} < \mu_0$

得单侧置信区间 $\left(\overline{X} - t_\alpha(n-1)S/\sqrt{n},\ +\infty\right)$

两类错误

第一类错误：H_0 为真，拒绝 H_0（犯第一类错误的概率就是在拒绝域的概率）（弃真）

第二类错误：H_0 为假，接受 H_0（犯第二类错误的概率就是不在拒绝域的概率）（取伪）

超越卷九

(10) 设总体 $X \sim N(\mu,1)$，$X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 检验假设 $H_0:\mu \leqslant 0$，$H_1:\mu > 0$，取拒绝域 $W=\{\overline{X} \geqslant c\}$，其中 $\overline{X}$ 为样本均值，那么对固定的样本容量 n，当 $\mu = 1$ 时，犯第二类错误的概率 β(　　).

(A) 随 c 的增大而减少　　(B) 随 c 的增大而增大

(C) 随 c 的增大而保持不变　　(D) 无法判定

超越卷一

(10) 设 $\overline{X}$ 为来自总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$(σ^2 已知) 的一个容量为 n 的简单随机样本的样本均值，若已知在置信水平 $1-2\alpha$ 下 μ 的置信区间的长度为 2，则在显著性水平 α 下，对于假设检验问题 $H_0:\mu \geqslant 1$，$H_1:\mu < 1$，若检验结果拒绝 H_0，则应有(　　).

(A) $\overline{x} \in (-\infty,1)$　　(B) $\overline{x} \in (-\infty,-1)$　　(C) $\overline{x} \in (-\infty,0)$　　(D) $\overline{x} \in (0,+\infty)$

情形一：σ^2 为已知，$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 作为统计量

得双侧置信区间 $\left(\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，$1-\alpha$ 为置信度

余炳森卷三

10. 设总体 $X \sim N(\mu,1)$. 数 $U_\alpha(0<\alpha<1)$ 为标准正态分布的上侧 α 分位点，则 μ 的置信度分别为 90% 和 95% 的置信区间长度之比为(　　).

A. $\frac{0.90}{0.95}$　　B. $\frac{0.95}{0.975}$　　C. $\frac{U_{0.10}}{U_{0.05}}$　　D. $\frac{U_{0.05}}{U_{0.025}}$

李永乐三套卷卷一

10. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 未知，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的样本观测值，现对 μ 进行假设检验，若在显著水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝了 $H_0:\mu=\mu_0$，则当显著水平改为 $\alpha=0.01$ 时，下列说法正确的是

A. 必接受 H_0.　　B. 必拒绝 H_0.

C. 犯第一类错误的概率必变大.　　D. 可能接受，也可能拒绝 H_0.