声明：1.本人不知道也不可能知道试题的标准答案。以下解答为本人书写，仅供参考。
2.本人绝对未在考试中实施任何作弊行为，绝对未将试卷带出考场，也绝对未在考试结束前将试题和答案透露给任何人，也绝对不会将试题和答案透露给工大以外的学生。
3.仅凭记忆整理，可能不尽准确。有些题目具体数据不记得了，只记得大致方法。

哈尔滨工业大学（深圳）2021 学年秋季学期

代数与几何（期中）试题 A（含答案与提示）

【2021.11.13 16:00—17:30】（此卷满分 30 分）

一、填空题(每题 1 分，共 5 分)

1. $A_{11}-A_{12}=\underline{-4}$（提示：清楚代数余子式的计算方法即可求解）

2. L 与 π 的位置关系：L 在面上（不要写重合）

3. $\alpha\alpha^T=(3)$ [提示：$\alpha^T\alpha\alpha^T\alpha=\alpha^T(\alpha\alpha^T)\alpha=(\alpha\alpha^T)\alpha^T\alpha$]

4. $A^*=\mathbf{0}$（提示：A 为 4 阶方阵但其秩小于 3）

5. $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$(提示：初等变换法)

二、选择题(每题 1 分，共 5 分)

1.已知四阶行列式第一行元素为……，第三行元素的余子式为……，求 $x=\underline{3}$（C）

(提示：乘串行得到结果为 0，注意余子式和代数余子式的区别。本题易误选 $x=\underline{-3}$)

2. $B=CA$，C 为可逆方阵，则(B)

(A) $R(A)>R(B)$　　(B) $R(A)=R(B)$

(C) $R(A)<R(B)$　　(D) $R(A)$与 $R(B)$关系不能确定

3. 以下属于反对称矩阵的是(D)

（1）$\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix}1&3\\-3&1\end{pmatrix}$　（3）$\begin{pmatrix}0&3\\3&0\end{pmatrix}$　<u>（4）</u>$\begin{pmatrix}0&3\\-3&0\end{pmatrix}$

4.$|(A^*)^{-1}|$=(C. $\dfrac{1}{|A|^{n-1}}$)

5.两条直线的位置关系是

（A）相交　　（B）平行　　（C）垂直　　**（D）异面**

判断可用参数式方程（将一条直线的参数式方程代到另一条直线里去，看参数 t 是否有解），也可以用混合积（取两个方向向量，再在两直线上分别找一点构成第三个向量，计算判断这三个向量混合积是否为 0）

三、(5 **分**) 求过点 $M\ (2,0,-3)$ 且过直线 $L: \begin{cases} x-2y+4z=7 \\ 3x+5y-2z=-1 \end{cases}$ 的平面方程。

解： 设平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$，则由平面过M点知 $2A-3C+D=0$

直线L的方向向量为$\vec{s}=(a,b,c)$，$\vec{s}_1=(1,-2,4)$，$\vec{s}_2=(3,5,-2)$

则可取$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=(-16,14,11)$，因而由平面法向量垂直于$\vec{s}$可得 $-16A+14B+11C=0$

取直线上一点$N(-1,\dfrac{3}{2},\dfrac{11}{4})$，因而由平面过$N$有 $-A+\dfrac{3}{2}B+\dfrac{11}{4}C+D=0$

$\overrightarrow{MN}=(-3,\dfrac{3}{2},\dfrac{23}{4})$，因而由平面垂直于 $\overrightarrow{MN}$ 有 $-3A+\dfrac{3}{2}B+\dfrac{23}{4}C=0$

联立解得$\begin{cases} B=\dfrac{59}{18}C \\ A=\dfrac{64}{18}C \\ D=\dfrac{-74}{18}C \end{cases}$，因此平面方程为$64x+59y+18z-74=0$

四、(5 **分**)已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，计算:

（1）$C=A^{-1}B$;

（2）$\left|2E+(CC^T)^3\right|$，其中 E 为阶数合适的单位矩阵。

解：（1）法一：$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$(提示：初等变换法)，得 $C=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

法二：$(A\mid B)\xrightarrow{\text{行}}(E\mid A^{-1}B)$ 同理可得 C

（2）易得$C^TC=9$，则 $\left|2E+(CC^T)^3\right|=\left|2E+(C^TC)^2CC^T\right|=\left|2E+81CC^T\right|$

由降阶公式，上式$=2^3\left|2E_1+9C^TC\right|=2^3(2+9^3)=5848.$

五、(5 **分**)已知 A为n阶方阵.

（1）B 为 $m\times n$ 矩阵。若 BA=0，B≠0，证明 A 不可逆；

（2）C 为方阵，若 CA 可用有限个初等矩阵的乘积表示，证明 A 可逆；

（3）若对任意的 $n\times 1$ 矩阵α，AX=α都有解，证明对任意的 $n\times 1$ 矩阵β，$A^*X=\beta$ 都有解，且解是唯一的。

证明：

（1） 由 $BA=0$，有 $R(BA)=0$，因此 $R(A)+R(B)\leqslant n$，由于$B\neq 0$,则有$R(B)>0$，故 $R(A)<n$，故 A 不可逆。

（2） $CA=P_1...P_n$,两边取行列式得:$|A||C|=|P_1||P_2|\cdots|P_n|$

由$P_1,...,P_n$都是可逆的，因此$|P_1||P_2|\cdots|P_n|\neq 0$，因此$|A||C|\neq 0$

因此$|A|\neq 0$，所以A可逆。

（3） 解一：($Cramer$ 法则)

因为对任意的 $n\times 1$ 矩阵α，AX=α都有解，所以$|A|\neq 0$，所以A可逆。所以A^{-1}存在

所以$A^*=|A|A^{-1},|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$,所以方程组$A^*X=\alpha$的系数行列式不为0

因此，对任意的 $n\times 1$ 矩阵β，$A^*X=\beta$ 都有解，且解是唯一的。

解二：

因为对任意的 $n\times 1$ 矩阵 α，$AX=\alpha$ 都有解，所以 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。所以 A^{-1} 存在

所以 $A^* = |A|\,A^{-1}$，所以方程组 $A^*X = \beta$ 可化为 $|A|\,A^{-1}X = \beta$，两边同时左乘 A 和除以 $|A|$ 得

$X = \dfrac{A\beta}{|A|}$，所以对于一个确定的 β，X 由 A 唯一确定。因此，对任意的 $n\times 1$ 矩阵 β，$A^*X=\beta$ 都有解，且解是唯一的。

六、(5 **分**)已知 A 为 $n\times m$ 矩阵，证明：

存在非零列向量 X_0，$X_0 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_m \end{pmatrix}$，$AX_0=0$，当且仅当 $R(A) < m$。

证明:(可自行对照课本第 4 章,以下仅供参考)首先，由 $R(A) \le min(m, n)$，必有 $R(A) \le m$.

再证明 $R(A) = m$ 时不成立：假设 $R(A) = m$，由 $AX_0=0$，有 $R(AX_0)=0$，因此 $R(A)+R(X_0) \le m$，由于 $R(A) = m$，故 $R(X_0)=0$，与题设矛盾。故只能 $R(A) < m$。

接下来，我们证明 $R(A) < m$ 时，总能找到一个符合题意的 X_0：

由 $R(A) < m$，可知存在有限个初等矩阵 $P_1, ..., P_n, Q_1, ..., Q_s$，使得 $P_1 ... P_n A Q_1 ... Q_s = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

由 $P_1, ..., P_n, Q_1, ..., Q_s$ 都是可逆矩阵，因此令 $P = P_1, ..., P_n, Q = Q_1, ..., Q_s$，则 P、Q 也可逆.

即存在可逆矩阵 P、Q，$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。设 X 为一 $m\times 1$ 矩阵，$X = \begin{pmatrix} 0_{r\times 1} \\ \alpha_{(m-r)\times 1} \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{m-r} \end{pmatrix}$,

且 $a_1, a_2, \dots, a_{m-r}$ 至少有一个不为0.在 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的左右两边同时右乘 X,

得 $PAQX = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, 再在该式左右两边同时左乘 P^{-1}, 得 $AQX = 0$.

下面证明 QX 非零：由于 X 非零，故 $R(X) > 0$.则 $R(QX) \ge R(X) + R(Q) - m = R(X)$,

因此 $R(QX) > 0$，故 QX 非零. 则 QX 即为所求的 X_0. □