特征值与特征向量

主讲人：夜雨

转置矩阵

1）$|\lambda E-A|=|\lambda E-A^T|$

2）若$\lambda\neq\mu$，则A的特征向量（对应特征值λ）和A^T的特征向量（对应特征值μ）正交

可逆矩阵

1）若$|\lambda A-E|=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$，则$|\lambda A^{-1}-E|=\left(\lambda-\dfrac{1}{\lambda_1}\right)\cdots\left(\lambda-\dfrac{1}{\lambda_n}\right)$

2）若α是A的特征向量，则α也是A^{-1}的特征向量（反之也成立）

误区：“$A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow\dfrac{1}{\lambda}\alpha=A^{-1}\alpha$”无法得到$A^{-1}$的所有特征值（因为特征值重数无法确定）

比如：A是三阶矩阵，A的特征值为2，2，3，其中2仅有一个线性无关的特征向量

$A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow\dfrac{1}{\lambda}\alpha=A^{-1}\alpha$只能得到$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$是$A^{-1}$的特征值，重数无法确定， A^{-1}的特征值可能是

$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$或$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}$

$kA\,(k\neq0)$

1）若$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$，则$|\lambda E-kA|=(\lambda-k\lambda_1)\cdots(\lambda-k\lambda_n)$

2）若α是A的特征向量，则α也是kA的特征向量（反之也成立）

$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$

1）若$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$，则$|\lambda E-f(A)|=(\lambda-f(\lambda_1))\cdots(\lambda-f(\lambda_n))$（记住）

2）若α是A的特征向量，则α也是$f(A)$的特征向量

（反之不成立，比如$f(A)=A^2$，$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$A$的所有特征向量为$k\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(k\neq0)$，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$是$A^2$的特征向量，但不是$A$的特征向量）

秩一矩阵

设$r(A)=1$，则A可表示为$\alpha\beta^T$，其中α,β是n维列向量，此时$tr(A)=\beta^T\alpha$

1）A的所有特征值是$tr(A)$，$\underbrace{0,\ \cdots,\ 0}_{n-1\text{个}}$

2）当$tr(A)=0$，A没有n个线性无关的特征向量；当$tr(A)\neq0$，A有n个线性无关的特征向量且α是$tr(A)$对应的一个特征向量

伴随矩阵

1)

若$r(A)<n-1$，则A^*的所有特征值都是0

若$r(A)=n-1$，则A^*的所有特征值是$tr(A^*)$，$\underbrace{0,\ \cdots,\ 0}_{n-1个}$

若$r(A)=n$，则A^*的所有特征值是$\dfrac{|A|}{\lambda_1}$，$\dfrac{|A|}{\lambda_2}$，$\cdots$，$\dfrac{|A|}{\lambda_n}$（设A的所有特征值是λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n）

2）若α是A的特征向量，则α也是A^*的特征向量

（反之不成立，例如$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$的特征向量为$\lambda=1$：$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\lambda=0$：$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$A^*=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$是$A^*$的特征向量，但不是$A$的特征向量）

正交矩阵

设A是正交矩阵

1）若A有实数特征值，则这个实数特征值只能是-1或1

注：正交矩阵不一定有实数特征值，比如$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$没有实数特征值

2）若$|A|<0$，则-1必是A的特征值

3）若A是偶数阶且$|A|<0$，则则-1和1必是A的特征值

4）若A是奇数阶且$|A|>0$，则1必是A的特征值

5）若A是奇数阶，则-1和1中必有一个是A的特征值

6）若A有特征值-1和1，则-1和1对应的特征向量正交

相似矩阵

设存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$

1）$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

2）若α是A的特征向量，则$P^{-1}\alpha$是B的特征向量（反之，若α是B的特征向量，则$P\alpha$是A的特征向量）

实对称矩阵

设A是实对称矩阵

1）A的特征值都是实数

2）A不同特征值对应的特征向量正交（可以利用转置矩阵的性质）

3）A有n个线性无关的特征向量

反对称矩阵

若矩阵A满足$A^T=-A$，则称矩阵A为反对称矩阵

1）奇数阶反对称矩阵必有零特征值

2）反对称矩阵的实特征值只能是零

AB 与 BA

1）设A,B均为n阶矩阵，则$|\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$（记住）

2）设A,B均为n阶矩阵，且A有n个互异的特征值，则A的特征向量都是B的特征向量$\Longleftrightarrow AB=BA$