

一、1. $\frac{1}{2}$; 2. $y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x-1)$; 3. $-\frac{\sin x + y e^{xy}}{2y + x e^{xy}}$; 4. $-\pi dx$ 或 $-\pi \Delta x$; 5. 6050

二、1. (B); 2. (B); 3. (C); 4. (A); 5. (B)

三、解: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{1 + e^t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{(-\sin t)(1+e^t) - (\cos t)(e^t)}{(1+e^t)^2}}{1+e^t} = -\frac{\sin t + e^t \sin t + e^t \cos t}{(1+e^t)^3}$$

四、解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2-2\cos x} (e^{x^2-2+2\cos x} - 1)}{x^4}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{2-2\cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sin x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{12x} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

五、解: $x = -1$ 是分段点, 当 $x > -1$ 时, $x = 0, x = 1$ 是间断点, 当 $x < -1$ 时, $x = -2$ 是间断点。

因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\ln|x|)(\sin x)}{(x+1)|x-1|} = -\frac{\sin 1}{2} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = -\frac{\sin 1}{2} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{1} = -\frac{\sin 1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\ln|x|)(\sin x)}{(x+1)|x-1|} = \frac{\sin 1}{2} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{\sin 1}{2} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{\sin 1}{2}$$

所以 $x = 1$ 是跳跃间断点。

因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln|x|)(\sin x)}{(x+1)|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln|x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

所以 $x = 0$ 是可去间断点。

因为

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{\frac{x+2}{e^{x+1}} - 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(\ln|x|)(\sin x)}{(x+1)|x-1|} = -\frac{\sin 1}{2} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(-x)}{x+1} = -\frac{\sin 1}{2} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = -\frac{\sin 1}{2}$$

所以 $x = -1$ 是跳跃间断点。

因为

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\frac{x+2}{e^{x+1}} - 1} = \infty$$

所以 $x = -2$ 是第二类间断点（或无穷间断点）。

由初等函数的连续性知， $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, +\infty)$ 内连续。

六、解：

(1) 当 $x \neq 0$ 时，求导得

$$f'(x) = \frac{(g'(x) + e^{-x})x - (g(x) - e^{-x})}{x^2}$$

当 $x = 0$ 时，由导数定义得

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x) - e^{-x}}{x} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x) - e^{-x}}{2} = \frac{g''(0) - 1}{2} \end{aligned}$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g'(x) + e^{-x})x - (g(x) - e^{-x})}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g''(x) - e^{-x})x + (g'(x) + e^{-x}) - (g'(x) + e^{-x})}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x) - e^{-x}}{2} = \frac{g''(0) - 1}{2} = f'(0) \end{aligned}$$

所以 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，又当 $x \neq 0$ 时 $f'(x)$ 连续，故 $f'(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续。

七、证：

(1) 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$ 知， $f(0) = 0$ ，且存在 $0 < x_1 < 1$ 使得 $f(x_1) < 0$ 。对 $f(x)$ 在闭区间

$[x_1, 1]$ 上应用零点存在定理，存在 $\xi \in (x_1, 1) \subset (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = 0$ ，即方程 $f(x) = 0$ 在

$(0, 1)$ 内至少存在一个实根。

(2) 对 $f(x)$ 在闭区间 $[0, \xi]$ 上应用罗尔定理, 存在 $\xi_1 \in (0, \xi)$ 使得 $f'(\xi_1) = 0$ 。

设 $F(x) = f(x)f'(x)$, 则 $F'(x) = f(x)f''(x) + (f'(x))^2$, 对 $F(x)$ 在区间 $[0, \xi_1]$ 和 $[\xi_1, \xi]$ 上分别应用罗尔定理, 存在 $\eta_1 \in (0, \xi_1)$, $\eta_2 \in (\xi_1, \xi)$ 使得

$$F'(\eta_1) = F'(\eta_2) = 0$$

即方程 $f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少存在两个实根。