

主管  
领导  
审核  
签字

哈尔滨工业大学（深圳）2021 年秋季学期

# 高等数学 A（期中）试题

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得 分											
阅卷人											

考生须知：本次考试为闭卷考试，考试时间为 90 分钟，总分 30 分。

姓名

学号

班号

学院

密

封

线

## 一、本题得分\_\_\_\_\_

填空题（每小题 1 分，共 4 小题，满分 4 分）

1. 设  $0 < a < b$ ，则数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} =$ \_\_\_\_\_.
2. 若记曲线  $3x + 2y^3 - 2x^2 \sin y = 2$  与  $y$  轴的交点为  $P$ ，则曲线在点  $P$  处的法线方程为\_\_\_\_\_.
3. 设  $f(x)$  与  $g(x)$  互为反函数， $f(x)$  二阶可导，且  $f(1) = 3, f'(1) = -2$ ， $f''(1) = 4$ ，则  $g''(3) =$ \_\_\_\_\_.
4. 已知函数  $f(x) = x^2 e^{-x+3}$ ，则  $f^{(20)}(1) =$ \_\_\_\_\_.

## 二、本题得分\_\_\_\_\_

选择题（每小题 1 分，共 4 小题，满分 4 分，每小题中给出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1. 设函数  $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ， $g(x) = \begin{cases} 2-ax, & x \leq -1, \\ x, & -1 < x < 0, \\ x-b, & x \geq 0 \end{cases}$ ，若  $f(x) + g(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上连续，则( )  
(A)  $a=3, b=1$ ; (B)  $a=3, b=2$ ; (C)  $a=-3, b=1$ ; (D)  $a=-3, b=2$ 。
2. 设函数  $g(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内可导且只有一个零点  $x=-3$ ，则函数  $f(x) = |x^3 + 2x^2 - 3x|g(x)$  的不可导点的个数是( )  
(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4。

---

3. 设  $k \neq 0$  为常数, 函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处的增量  $\Delta y|_{x=x_0} = k(\Delta x)^{\frac{1}{3}} + o(\Delta x)$ , 则函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处( )

(A) 连续, 不可微;            (B) 可微且  $f'(x_0) = k$ ;

(C) 可微且  $f'(x_0) = 0$ ;    (D) 可微且  $f'(x_0) = 1$ 。

4. 有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为  $2 \text{ cm/s}$ ,  $-3 \text{ cm/s}$ , 当底半径为  $10 \text{ cm}$ , 高为  $5 \text{ cm}$  时, 圆柱体的体积与侧表面积 (即圆柱面上的那部分面积) 随时间变化的速率分别为( )

(A)  $125\pi \text{ cm}^3/\text{s}, 40\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ ;    (B)  $125\pi \text{ cm}^3/\text{s}, -40\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ ;

(C)  $-100\pi \text{ cm}^3/\text{s}, 40\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ ;    (D)  $-100\pi \text{ cm}^3/\text{s}, -40\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ 。

三、 本题得分\_\_\_\_\_

(4 分) 求函数  $f(x) = \frac{(1+x)\sin x \cos \frac{x}{2-x}}{|x|(x+1)(x-1)}$  的间断点, 并判断间断点的类型。

姓名

学号

班号

学院

密

封

四、本题得分\_\_\_\_\_

(4 分) 设参数方程  $\begin{cases} x = t + \arctan t + 1, \\ y = t^3 + 6t - 2 \end{cases}$  确定函数  $y = y(x)$ , 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 。

五、本题得分\_\_\_\_\_

(4 分) 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$ 。

---

六、 本题得分\_\_\_\_\_

(3 分) 设函数  $f(x)$  当  $|x| \leq 1$  时具有二阶导数, 且满足  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{f(x)}{\tan x}} - 1}{\ln(e^{\sin x} + 4x)} = -3$ , 求  $f(0), f'(0)$  及  $f''(0)$ 。

七、 本题得分\_\_\_\_\_

(3 分) 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 2]$  上连续, 在开区间  $(0, 2)$  内可导, 且  $f(2) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5$ , 证明: (1) 存在  $\eta \in (1, 2)$ , 使得  $f(\eta) = \eta$ ; (2) 存在  $\xi \in (0, \eta)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{2\xi - f(\xi)}{\xi}$ 。

姓名

学号

班号

学院

密

封

八、本题得分\_\_\_\_\_

(4 分) 设数列  $\{x_n\}$  满足关系式  $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n=1,2,\cdots)$ , (1) 证明极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

存在, 并计算此极限; (2) 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ 。



学院	班号	学号	姓名
.....	.....	.....	.....





学院	班号	学号	姓名
.....	.....	.....	.....

