# 概率论大题复盘

主讲人：夜雨

集主流模拟卷（张宇八套卷、李林六套卷、李艳芳三套卷、余炳森五套卷、超越 5+5 套卷）之精华！ 讲一讲概率论大题有哪些考法！

求随机变量的分布

作全集拆分的类型

类型一：在不同条件下，$X$ 与 $Y$ 的关系不一样

（超越 5+5 卷三）

(22)(**本题满分 12 分**) 设 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & |x|\leqslant 1,\\ \frac{1}{8}, & 1<|x|\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

令 $Y=g(X)=\begin{cases}X^2, & X<1,\\ X^2-1, & X\geqslant 1.\end{cases}$ 求：(Ⅰ) $P\{-1<Y<2 \mid X<1\}$；(Ⅱ) $Y$ 的分布函数 $F_Y(y)$.

类型二：离散型连续型变量的混合

（超越 5+5 卷十）

(22)(**本题满分 12 分**) 设随机变量 $X$ 在 $(0,\pi)$ 上服从均匀分布，$Y$ 的分布律为 $P\{Y=i\}=\dfrac{|i|}{2}$，$i=-1,1$，且 $X$ 和 $Y$ 相互独立，记 $U=\sin X$，$V=Y+U$.

(Ⅰ) 求 $U$ 的概率密度函数 $f_U(u)$；

(Ⅱ) 求 $V$ 的概率密度函数 $f_V(v)$；

(Ⅲ) 求协方差 $\operatorname{cov}(U,V)$。

（超越 5+5 卷四）

(22)(本题满分 12 分) 设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

令 $Y=\begin{cases}-1, & 0\leqslant X<1,\\ 1, & 1\leqslant X\leqslant 2,\end{cases}$，求(Ⅰ)$Z=XY$ 的概率密度 $f_Z(z)$；(Ⅱ)$\mathrm{cov}(X,Z)$.

（超越 5+5 卷一）

(22)(本题满分 12 分) 已知随机变量 $(X,Y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布，$Z=\begin{cases}1, & X\geqslant Y,\\ -1, & X<Y,\end{cases}$ $T=(X^2+Y^2)Z$.

(Ⅰ)求 $T$ 的概率密度函数 $f_T(t)$； (Ⅱ)求 $\mathrm{cov}(X^2+Y^2,Z)$.

最值符号的处理

张宇八套卷卷七

22.（本题满分 12 分）

在长度为 1 的直杆上任取一点，将直杆分成两段，设 $X,Y$ 分别是较短与较长的部分的长度，令 $Z=\frac{X}{Y}$.

(1) 求 $Z$ 的概率密度；

(2) 求 $Z$ 和 $\frac{1}{Z}$ 的数学期望.

已知联合概率密度 $f(x,y)$，求 $F(x,y)$ 及 $g(X,Y)$ 的分布

核心：分情况求二重积分

（李林六套卷卷六）

**22.（本题满分 12 分）**

设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(x+y)}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ) 求 $(X,Y)$ 的联合分布函数 $F(x,y)$；

(Ⅱ) 求 $P\left\{X+Y>1 \,\middle|\, X<\frac{1}{2}\right\}$；

(Ⅲ) 求 $E(Y-X)$.

已知联合概率密度$f(x,y)$，求$X,Y$的分布

（余丙森五套卷卷一）

22.（本题满分 12 分）

设二维随机变量$(X,Y)$的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\lambda^2 x^{\lambda-1}y^{\lambda-1}, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中$\lambda>0$为未知参数.

(1) 求条件概率密度$f_{X|Y}(x\mid y)$；

(2) 设$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$是来自总体$(X,Y)$的简单随机样本，求参数$\lambda$的最大似然估计量.

参数估计

最大似然估计

参数有范围的情形：那么就绝对不是求出似然函数的极值点就万事大吉了，得考虑似然函数的单调性

（张宇八套卷卷七）

22.（本题满分 12 分）

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X$的简单随机样本，总体$X$的概率密度为

$$f(x;\theta)=\frac{1}{2}(1+\theta x),-1<x<1,|\theta|\leqslant 1,$$

因观测设备精度不高，观察不到$X_1,X_2,\cdots,X_n$的具体取值，只能观测到每个$X_i$是否大于 0，

记$Y_i=\begin{cases}1, & X_i>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $i=1,\cdots,n,\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$. 求$\theta$的最大似然估计量.

没法求导的情形：只能借助其他方法求最值

(张宇八套卷卷七)

10. 已知总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x-\theta|},-\infty<x<+\infty,$$

$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{10}$ 是来自该总体的简单随机样本的观察值，则 $\theta$ 的最大似然估计值为

A. $\frac{x_5}{2}$.　　B. $\frac{x_6}{2}$.　　C. $\frac{x_5+x_6}{2}$.　　D. $\frac{x_6-x_5}{2}$.

不用求导的情形：直接利用单调性求最值

(余丙森五套卷卷五)

10. 设总体 $X\sim U(-\theta,\theta)$，其中未知参数 $\theta>0$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本，则 $\theta$ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=($　　$)$.

A. $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$　　B. $-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$

C. $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|$　　D. $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|$

矩估计

两个参数$\begin{cases} E(X)=\dfrac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n) \\ E(X^2)=\dfrac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n) \end{cases}$

（李艳芳三套卷卷二）

**22** 设总体 $X$ 服从$(\theta,\lambda\theta)$ 上的均匀分布，其中 $\theta>0,\lambda>1,X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本.

（Ⅰ）利用样本的一阶原点矩与二阶原点矩求 $\theta,\lambda$ 的矩估计量；

（Ⅱ）求 $\theta,\lambda$ 的最大似然估计量.

张宇八套卷卷一

9. 设总体 $X\sim U(a,b)$，$a,b$ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本，$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，$X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$S_1^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，令$L=b-a$，则 $L$ 的矩估计量与最大似然估计量分别为

A. $\overline{X}+\sqrt{3}S_1,X_{(n)}-X_{(1)}$.

B. $\overline{X}+\sqrt{3}S_1,\dfrac{X_{(n)}-X_{(1)}}{2}$.

C. $2\sqrt{3}S_1,X_{(n)}-X_{(1)}$.

D. $2\sqrt{3}S_1,\dfrac{X_{(n)}-X_{(1)}}{2}$.