第五章 线性方程组的解法

【问题解答】

解方程组的步骤是什么?

答：从教材或任意一本辅导书随便找一道例题，相信你看完后就知道怎么解方程了。但这里还是简要说明一下，以非齐次线性方程组为例，解方程的步骤是：
写出增广矩阵→初等行变换化行阶梯型矩阵→系数矩阵秩$R(A)$,增广矩阵秩$R(A|\beta)$，判断相等→把 | 左边的矩阵写成方程，给自由未知量赋值$(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,0,1)$得到导出组的基础解系→找一个特解→写通解。

这一章是不是只要会解方程就行了?

答：错误的。解方程确实是这一章的重点，但是熟记线性方程组解的理论并熟练地使用线性方程组的视角看问题也是需要一定的练习的。例如，对于$AB=0$，如果有A,B均非零，那么一方面有方程$AX=0$有非零解，它是B的某一个列向量，因此可以得到A不满秩，从而A的列向量组线性相关。另一方面，对两边取转置有$B^TA^T=0$，同样的讨论可以得到B^T的列向量组线性相关，也就是说B的行向量组线性相关。

有什么易错点要注意吗?

答：看列看列看列！！！唯一解和无穷多解是看系数矩阵的列向量，因为几列对应了有几个未知量。行满秩只代表没有多余的方程，并不代表方程有唯一解。

【典例精析】

【例1】若$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$为$AX=0$的一个基础解系，$k_1,\dots,k_m$为任意常数，则方程组$AX=0$的通解为（ ）

(A)$\sum_{i=1}^{m-1}k_i(\alpha_{i+1}-\alpha_i)$

(B)$\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i$

(C)$\sum_{i=1}^{m-1}k_i(\alpha_{i+1}+\alpha_i)$

(D)$\sum_{i=1}^{m-1}k_i(\alpha_{i+1}-2\alpha_i)+k_m\alpha_1$

解析：答案为D

齐次线性方程组的解的核心在于：基础解系的每个向量都是解向量，并且满足线性无关的条件，通解中还包含（n-r）个任意常数k_i，因此B选项是显然错误的。

对于A、C，任意常数只有m-1个，而基础解系中应有m个任意常数，排除。

对D，令$\beta_i=\alpha_{i+1}-2\alpha_i$，考察$(\beta_1,...,\beta_{m-1},\alpha_1)$的线性相关性（矩阵判别法），结合他们都是方程的解可得该向量组为一个基础解系。

【例2】设A是n阶矩阵，α是n维列向量，若

$$R\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}=R(A)$$

则有（　）

(A)$AX=\alpha$必有无穷多解

(B)$AX=\alpha$必有唯一解

(C)$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}=0$只有零解

(D)$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}=0$必有非零解

解析：答案为D

首先我们看看条件：由分块矩阵的第一行可以知道$R(A|\alpha)=R(A)$，否则由矩阵的秩大于等于子矩阵的秩可以得到矛盾。由此可以得到$AX=\alpha$有解，但是$R(A)$的信息是不知道的，因此A、B无法判断

而对于矩阵$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}$，他的列数比A多1，秩和A相等，肯定列不满秩，由此可以得到D正确。

【例3】已知β_1,β_2是非齐次线性方程组$AX=\beta$的两个不同的解，α_1,α_2是对应其次线性方程组$AX=0$的基础解系，k_1,k_2为任意常数，则$AX=\beta$的通解为（）

(A)$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$

(B)$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$

(C)$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$

(D)$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$

解析：答案为B

非齐次线性方程组的解为 特解+导出组基础解系

A、C中$\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$是导出组的解，不是特解，排除

D中$\beta_1-\beta_2$和α无法判断线性相关性，排除

以上三题是关于线性方程组解的判定和通解形式的复习题，希望能够使大家对判定定理记得更熟。

[拓展练习]设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是四元非齐次线性方程组$AX=b$的四个解向量，且
$\alpha_1+\alpha_2=(2,4,6,8)^T,\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=(3,5,7,9)^T,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=(2,0,0$
$R(A)=2$，求方程组$AX=b$的通解

【例4】证明：若A，B为n阶方阵，且$AB=0$.则$R(A)+R(B)\le n$.

解析：若$R(A)=r$,齐次线性方程组$AX=0$的基础解系含有 n-r 个线性无关解，B的列向量都是方程的解，所以可以由这 n-r 个向量表示，因此$R(B)\le n-r$，即有$R(A)+R(B)\le n$.

线性方程组理论为我们看待矩阵乘法又多了一个视角。等式$A_{m\times n}B_{n\times r}=0$可以看作是以A为系数矩阵的r个线性齐次线性方程组，其中B的每一个列向量都是方程的解，使用线性方程组理论可以帮助我们解决一些问题。

【例5】设$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\-1&a&4-a\end{bmatrix}$, $R(A)=2$，求$A^*X=0$的通解.

解析:

$$R(A^*)=\begin{cases}n, & R(A)=n\\1, & R(A)=n-1\\0, & R(A)<n-1\end{cases}$$

可知$R(A^*)=1$，因此解空间的维数为$3-1=2$，由A不满秩有$|A|=0$,因此有$A^*A=|A|E=0$,因此，A的列向量是方程的解，找到两个线性无关的列向量即可。

我们将后两个列向量相加得到$(5,3,4)^T$，由于第二个分量不为0，显然和$(1,0,-1)^T$线性无关，因此通解为$k_1(1,0,-1)^T+k_2(5,3,4)^T$

当然，a由行列式为0是可以解出的，但是我们的目的只是找到两个线性无关的解向量，如果能通过不求a的方式得到，那必然是首选。

【例6】已知4阶方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4),\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$均为4维列向量，其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，如果$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组$AX=\beta$的通解。

解析：前两个条件表明$R(A)=3$，因此$AX=0$的解空间维数为$4-3=1$，所以只要找到一个解向量即可，根据$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$可以找到解向量为$(-1,2,-1,0)^T$。而条件$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$则说明$(1,1,1,1)^T$是方程的特解。至此，我们已经解完了这道题。

由此可以看出，当我们对线性方程组的理论十分熟悉，以及对

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\rightarrow\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

的脑内切换十分熟练时，许多题目在分析时就已经解决。

【例7】

已知线性方程组

$$(\mathrm{I})\qquad\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1,2n}x_{2n}=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2,2n}x_{2n}=0\\\qquad\qquad\ldots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{n,2n}x_{2n}=0\end{cases}$$

的一个基础解系为$(b_{11},b_{12},\ldots,b_{1,2n})^T,(b_{21},b_{22},\ldots,b_{2,2n})^T,\ldots,(b_{n1},b_{n2},\ldots,b_{n,2n})^T$

试写出线性方程组

$$(\mathrm{II})\qquad\begin{cases}b_{11}y_1+b_{12}y_2+\ldots+b_{1,2n}y_{2n}=0\\b_{21}y_1+b_{22}y_2+\ldots+b_{2,2n}y_{2n}=0\\\qquad\qquad\ldots\\b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\ldots+b_{n,2n}y_{2n}=0\end{cases}$$

的通解，并说明理由。

解析：记（Ⅰ）的系数矩阵为A，记（Ⅱ）的系数矩阵为B。

对方程组（Ⅰ）有解空间的维数为基础解系解向量个数n，因此 $R(A)=2n-n=n$,且有$R(B)=n$，这是因为B的列向量构成了一个基础解系，显然线性无关。因此有：

$AB^T=0\rightarrow BA^T=0$，做了两边取转置的操作后我们得到了$BX=0$ 的n个线性无关的解——A^T的n个列向量，而该方程解空间的维数为 $2n-R(B)=n$，因此我们可以写出通解。

我们用下一道例题来看看这道题阐述了一个什么事实。

【例8】设$AX=b$的通解为 $c_1(1,1,0,-1)^T+c_2(0,2,1,1)^T+(1,0,1,0)^T$，求矩阵A和b.

解析：这是一个反问题：告诉了$AX=0$的基础解系求A，将基础解系写成矩阵$X=(\xi_1,\xi_2)$，对$AX=0$两边取转置就有$X^TA^T=0$，这又是一个线性方程组，因此我们考察线性方程组

$$\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&2&1&1\end{bmatrix}Y=0$$

解这个方程组得到的基础解系拼成一个矩阵，取一下转置，就得到了A.

A不唯一，这里给出一个$A=\begin{bmatrix}1&-1&2&0\\3&-1&0&2\end{bmatrix}$将特解代入可得 $b=(3,3)^T$，b也不唯一。

本题的抽象形式见上一道题。

【例9】设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&3&2\\2&1&t\\-2&1&1\end{bmatrix}$,B是三阶非零矩阵，且$AB=0$，求参数t.

解析：由$AB=0$可以写出$R(A)+R(B)\leq 3$，由B非零可知$R(A)\leq 2$，结合A左上角的二阶子式不为0可知$R(A)=2$,往后不难。给出答案 t=3

【例10】设方程组（Ⅰ）和（Ⅱ）都是四元齐次方程组，方程组（Ⅰ）的系数矩阵为

$A=\begin{bmatrix}2&3&-1&0\\1&2&1&-1\end{bmatrix}$,方程组（Ⅱ）的一个基础解系由两个向量构成，他们为

$\eta_1=(2,-1,a+2,1)^T,\eta_2=(-1,2,4,a+8)^T$

(1)求方程组（Ⅰ）的一个基础解系；

(2)a为什么值时，两个方程组有公共非零解？此时，求出它们的全部公共非零解

解析：(1)将系数矩阵化为行阶梯型矩阵

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

得到同解方程组$\begin{cases} x_1 = 5x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 2x_4 \end{cases}$令自由未知量$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$得到基础解系

$\xi_1 = (5, -3, 1, 0)^T, \xi_2 = (-3, 2, 0, 1)^T$

(2)方法一：将通解$c_1\eta_1 + c_2\eta_2$代入方程$AX = 0$,得到$(a+1)(c_1 - c_2) = 0, (a+1)c_1 = 0$，若存在公共非零解，则$c_1, c_2$不全为0，显然，

当$a = -1$时，c_1, c_2可以任意取值，也就是说$c_1\eta_1 + c_2\eta_2$都是$AX = 0$的解，当$a \neq -1$时，$c_1 = c_2 = 0$，因此没有公共非零解。

这是常用解法：将通解代入另一个方程，看系数有没有不全为0的组合

方法二：存在公共非零解即存在不全为零的$c_1, c_2, A(c_1\eta_1 + c_2\eta_2) = 0$,即可得到$c_1A\eta_1 + c_2A\eta_2 = 0$,也就是说$A\eta_1, A\eta_2$线性相关，因此只要算一下这两个向量，看什么时候线性相关即可。

可以看到，对于矩阵乘法的理解始终有两种角度：线性方程组和向量的线性相关性

【例11】设有两个四元齐次线性方程组：

(Ⅰ)$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$　　(Ⅱ)$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

求：(1)线性方程组Ⅰ的基础解系；

(2)两个方程组是否有非零公共解？若有，求出所有非零公共解.

解析：第一问不作解析

　　第二问只需将两个方程组联立即可。

这里要指出的是：当两个方程组比较简短时，直接联立两个方程组更自然。

【例12】已知齐次方程组

(Ⅰ)$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3+2x_4=0\\x_1-x_3+ax_4=0\end{cases}$与(Ⅱ)$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+x_4=0\\x_1+bx_2+x_3+x_4=0\end{cases}$同解，求a,b，并求他们的解.

【例13】设有齐次线性方程组$AX=0,BX=0$,其中A，B均为m×n矩阵，现有四个命题:

(1)若$AX=0$的解均是$BX=0$的解，则$R(A)\geq R(B)$;

(2)若$R(A)\geq R(B)$,则若$AX=0$的解均是$BX=0$的解;

(3)若$AX=0$与$BX=0$同解，则$R(A)=R(B)$;

(4)若$R(A)=R(B)$，则$AX=0$与$BX=0$同解;

以上命题正确的是（ ）（双选）

解析：(1)表明前者的基础解系可以被后者的基础解系表出，被表出的无关组秩不大，因此有$n-R(A)\leq n-R(B)$,从而命题成立。

(2)只能说明解空间的维数谁比较大，但不代表包含关系。直观的理解可以用三维空间：xOy平面是二维平面，z轴是一维直线，前者维数大但不包含后者。

举个反例，方程组$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$和$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\end{cases}$验证不难.

同理可得(3)正确，(4)错误

【例14】设$A_{m\times n},B_{n\times l}$,证明$ABX=0$和$BX=0$是同解方程组当且仅当$R(AB)=R(B)$.

解析：若$ABX=0$和$BX=0$是同解方程组,则他们有相同的基础解系，因此有$l-R(AB)=l-R(B)$,从而命题成立。

若$R(AB)=R(B)$，可知两个方程组基础chu含向量个数相同，又$BX=0$的解都是$ABX=0$的解，因此两个方程组同解。

可以看出，考察方程组的解关键在解空间的维数和基础解系，同解代表着这一个方程组的基础解系是另一个方程组的基础解系。

【例15】已知两个三元线性方程组(1)，(2)的通解分别为$\xi_1+c_1\eta_1+c_2\eta_2$和$\xi_2+c\eta$，其中$\xi_1=(1,0,1)^T,\eta_1=(1,1,0)^T,\eta_2=(1,2,1)^T,\xi_2=(0,1,2)^T,\eta=(1,1,2)^T$，求这两个方程组的公共解。

解析：公共解即代表存在c_1,c_2，$\xi_2+c\eta=\xi_1+c_1\eta_1+c_2\eta_2$,移项即得$\xi_2-\xi_1+c\eta=c_1\eta_1+c_2\eta_2$,即左边能被右边线性表示，因此有

$R(\eta_1,\eta_2,\xi_2-\xi_1+c\eta)=R(\eta_1,\eta_2)=2$由此可以解出c=$\frac{1}{2}$从而只有一个公共解为

$\xi_2+\frac{1}{2}\eta=(\frac{1}{2},\frac{3}{2},3)$

本题是求非齐次线性方程组的公共解，上面的方法为常用方法。