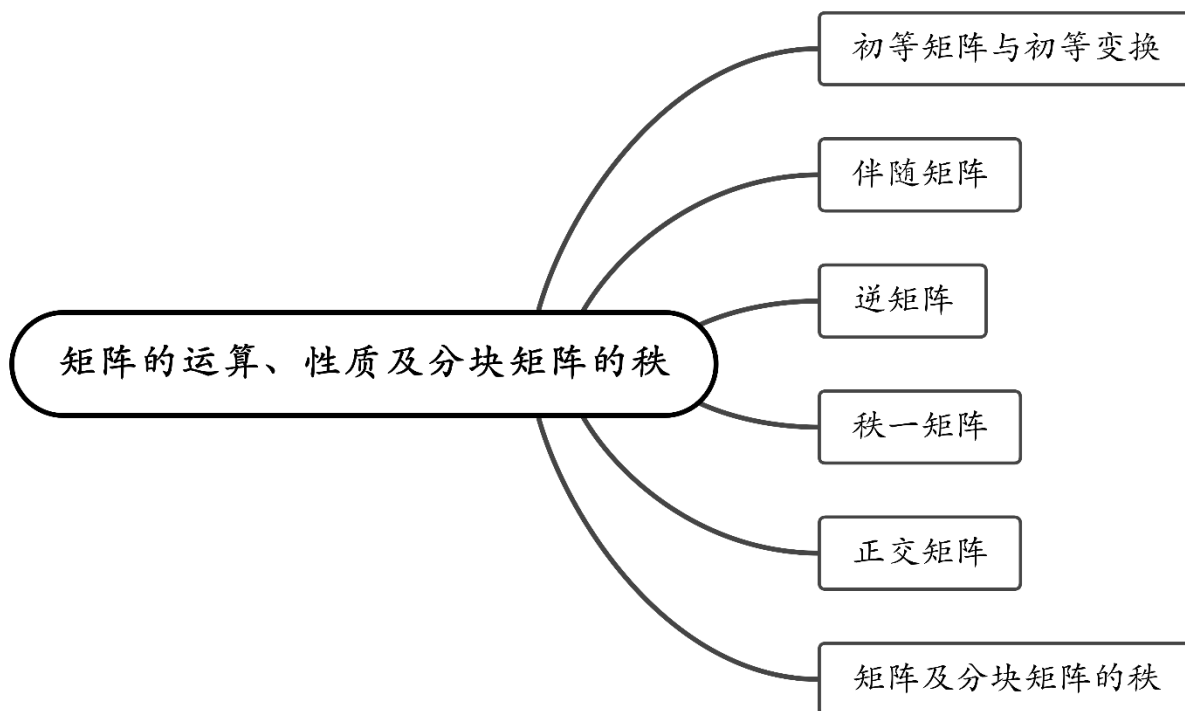


## 矩阵的运算、性质及分块矩阵的秩

主讲人 夜雨



### 初等矩阵与初等变换

三类初等矩阵：换法矩阵，消法矩阵，倍法矩阵

$$\text{换法矩阵 } E(i,j) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 \cdots 0 & 1 \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & & & 1 & 0 \\ & & & 1 & 0 \cdots 0 & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

$$\text{且 } |E(i,j)| = -1, \text{ 比如 } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

左乘  $E(i,j)$ ，交换第  $i, j$  行；右乘  $E(i,j)$ ，交换第  $i, j$  列

$$\text{消法矩阵换法矩阵 } E(ij(k)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & k \\ & & & & 1 & & & 0 \\ & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

$$\text{且 } |E(ij(k))| = 1, \text{ 比如 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

左乘  $E(ij(k))$ , 第  $j$  行的  $k$  倍加到  $i$  行; 右乘  $E(ij(k))$ , 第  $i$  行的  $k$  倍加到  $j$  行

$$\text{倍法矩阵 } E(i(k)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

$$\text{且 } |E(i(k))| = k, \text{ 比如 } \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

左乘  $E(i(k))$ , 第  $i$  行乘  $k$ ; 右乘  $E(i(k))$ , 第  $i$  列乘  $k$

乘法规则: 左乘初等矩阵, 作行变换; 右乘初等矩阵, 作列变换 (左行右列)

初等矩阵的逆矩阵仍然是初等矩阵 (并且是同类型的)

$$E(i, j)^{-1} = E(i, j), \text{ 比如 } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E(i(k))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right), \text{ 比如 } \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k)), \text{ 比如 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设  $A$  是 3 阶方阵, 将  $A$  的第 1 列与第 2 列交换得到  $B$ , 再把  $B$  的第 2 列加到第 3 列得  $C$ , 则满足  $AQ = C$  的可逆矩阵  $Q$  为 ( ) (2004)

$$(A) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (C) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (D) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设  $A, P$  均为 3 阶矩阵, 且  $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 若  $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ ,  $Q = [\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3]$ , 则  $Q^T A Q$  为

( ) (2009)

$$(A) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (C) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (D) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

设  $A$  为  $n (n \geq 2)$  阶可逆矩阵, 交换  $A$  的第 1 行与第 2 行得到矩阵  $B$ , 则 ( ) (2005)

(A) 交换  $A^*$  的第 1 列与第 2 列得到  $B^*$

(B) 交换  $A^*$  的第 1 行与第 2 行得到  $B^*$

(C) 交换  $A^*$  的第 1 列与第 2 列得到  $-B^*$

(D) 交换  $A^*$  的第 1 行与第 2 行得到  $-B^*$

设  $A$  为 3 阶矩阵, 将  $A$  的第 2 行加到第 1 行得  $B$ , 再将  $B$  的第 1 列的  $-1$  倍加到第 2 列得  $C$ , 记

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } ( ) \quad (2006)$$

$$(A) C = P^{-1}AP \quad (B) C = PAP^{-1} \quad (C) C = P^TAP \quad (D) C = PAP^T$$

关于初等变换和初等矩阵一些重要结论 (记忆并学会适当推导)

- (1) 任意一个可逆矩阵都可以表示为若干个初等矩阵的乘积 (记)
- (2) 任意一个可逆矩阵都可以通过初等行 (列) 变换得到单位矩阵
- (3) 单位矩阵可以通过初等行 (列) 变换得到任意一个可逆矩阵
- (4) 设  $A, B$  为同阶可逆矩阵, 则  $A$  可以通过初等行 (列) 变换得到  $B$

若矩阵  $A$  经初等列变换化成  $B$ , 则 ( ) (2020)

$$(A) \text{ 存在矩阵 } P, \text{ 使得 } PA = B$$

$$(B) \text{ 存在矩阵 } P, \text{ 使得 } BP = A$$

$$(C) \text{ 存在矩阵 } P, \text{ 使得 } PB = A$$

$$(D) \text{ 方程 } Ax = \mathbf{0} \text{ 与 } Bx = \mathbf{0} \text{ 同解}$$

## 伴随矩阵

伴随矩阵的定义及核心公式

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A|E$$

$$AA^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A|E$$

为什么你学得不好, 因为你站在更高的位置

### 常见公式

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

$$(kA)^* = k^{n-1} A^* \quad (1998 \text{ 考察过})$$

### 对角矩阵的伴随矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \prod_{i \neq 1} a_i & & & \\ & \prod_{i \neq 2} a_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \prod_{i \neq n} a_i \end{pmatrix}$$

比如  $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} bc & & \\ & ac & \\ & & ab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \\ & & & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} bcd & & & \\ & acd & & \\ & & abd & \\ & & & abc \end{pmatrix}$

设  $A$  为  $n$  阶可逆矩阵, 则 ( ) (1996)

$$(A)(A^*)^* = |A|^{n-1} A \quad (B)(A^*)^* = |A|^{n+1} A$$

$$(C)(A^*)^* = |A|^{n-2} A \quad (D)(A^*)^* = |A|^{n+2} A$$

### 分块矩阵的伴随矩阵

设  $A, B$  是  $n$  阶可逆方阵, 则有如下公式

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = (-1)^n \begin{pmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{pmatrix} \quad (\text{已知 } A, B \text{ 为 } n \text{ 阶})$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*CB^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

## 逆矩阵

可逆的定义: 对于  $n$  阶矩阵  $A$ , 若存在一个矩阵  $B$ , 使得  $AB = E$  (或  $BA = E$ ), 则称  $A$  是可逆的, 并把  $B$  称为  $A$  的逆矩阵, 记为  $A^{-1}$  (且此时  $B = \frac{A^*}{|A|}$ )

设  $n$  阶矩阵  $A, B, C$  满足  $ABC = E$ , 则必有 ( ) (1991)

(A)  $ACB = E$  (B)  $CBA = E$

(C)  $BAC = E$  (D)  $BCA = E$

可逆的充要条件:  $A$  可逆  $\iff |A| \neq 0 \iff A$  所有特征值不为零  $\iff Ax = 0$  仅有零解

设  $A$  为  $n$  阶非零矩阵, 若  $A^3 = O$ , 则 ( ) (2008)

(A)  $E - A$  不可逆,  $E + A$  不可逆 (B)  $E - A$  不可逆,  $E + A$  可逆

(C)  $E - A$  可逆,  $E + A$  可逆 (D)  $E - A$  可逆,  $E + A$  不可逆

常见公式

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ , 则  $(A^*)^{-1}$  (1995)

逆矩阵的求法:

方法一: 利用伴随矩阵  $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$  (适用二三阶, 三阶以上容易算错)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (\text{口诀: 主对调, 副换号})$$

方法二: 作初等变换

$$[A | E] \xrightarrow{r} [E | A^{-1}] \quad (\text{行变换就是左乘 } A^{-1})$$

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{c} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{列变换就是右乘 } A^{-1})$$

$$[A | B] \xrightarrow{r} [E | A^{-1}B] \quad (\text{行变换就是左乘 } A^{-1})$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow{c} \begin{bmatrix} E \\ BA^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{列变换就是右乘 } A^{-1})$$

方法三: 利用分块矩阵的逆矩阵

已知  $A, B$  可逆, 则有

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{记})$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} \quad (\text{记})$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{得知道怎么来的, 2023 年考察过})$$

可得

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = (-1)^n \begin{pmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*CB^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

方法四: 利用对角矩阵的逆矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_1 & & & \\ & 1/a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/a_n \end{pmatrix}$$

设矩阵  $A$  和  $B$  满足  $AB = A + 2B$ , 其中  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ , 求矩阵  $B$  (1987)

设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ , 且  $B = (E + A)^{-1}(E - A)$ , 则  $(E + B)^{-1} =$  (2000)

设矩阵  $A$  满足  $A^2 - 3A - 2E = O$ , 则  $A^{-1} =$  (1988)

设矩阵  $A$  满足  $A^2 + A - 4E = O$ , 则  $(A - E)^{-1} =$  (2001)

设  $n$  阶矩阵  $A, B$  满足  $A + B = AB$

1) 证明  $A - E$  是可逆矩阵

2) 已知  $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 求矩阵  $A$  (1991)

设四阶矩阵  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 则  $A^{-1} =$  (1991)

设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ , 则逆矩阵  $(A - 2E)^{-1} =$  (1989)

设  $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ , 其中  $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ , 则  $A^{-1} =$  (1994)

设三阶矩阵  $A, B$  满足关系式  $A^{-1}BA = 6A + BA$ , 其中  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ , 则  $B =$  (1995)

设  $A, B$  是二阶方阵, 若  $|A|=2, |B|=3$ , 则分块矩阵  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$  的伴随矩阵为 ( ) (2009)

- (A)  $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$  (B)  $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$  (C)  $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$  (D)  $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

设  $A, B$  是  $n$  阶可逆方阵, 则  $\begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}^* =$  ( ) (2023)

- (A)  $\begin{pmatrix} |A|B^* & -B^*A^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$  (B)  $\begin{pmatrix} |A|B^* & -A^*B^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$  (D)  $\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

## 秩一矩阵

设  $A$  是  $n$  阶矩阵

性质一:  $r(A)=1 \Leftrightarrow A$  可表示为  $\alpha\beta^T$ , 其中  $\alpha, \beta$  是  $n$  维非零列向量

注: 当  $A$  可表示为  $\alpha\beta^T$ , 有  $tr(A)=(\alpha, \beta)=\beta^T\alpha=\alpha^T\beta$

性质二:  $r(A)=1 \Rightarrow A^n=[tr(A)]^{n-1}A$

性质三:  $r(A)=1 \Rightarrow A$  的所以特征值是  $tr(A), \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ 个}}$

已知  $\alpha=(1, 2, 3)^T, \beta=\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)^T$ , 设  $A=\alpha\beta^T$ , 则  $A^n=$  (1994)

设  $\alpha$  为  $n$  维单位列向量,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 则 ( ) (2017)

- (A)  $E-\alpha\alpha^T$  不可逆 (B)  $E+\alpha\alpha^T$  不可逆  
(C)  $E+2\alpha\alpha^T$  不可逆 (D)  $E-2\alpha\alpha^T$  不可逆

## 正交矩阵

正交矩阵定义: 满足  $A^T A = E$  (或者  $AA^T = E$ ) 的矩阵  $A$  称之为正交矩阵

正交矩阵的性质

性质一: 设  $A$  是正交矩阵, 则  $|A| = 1$  或  $-1$

性质二: 设  $A$  是正交矩阵, 则  $A^{-1}, A^T$  也是正交矩阵, 且  $A^{-1} = A^T$

性质三: 两个正交矩阵  $A, B$  的乘积依旧是正交矩阵

性质四:  $A$  是正交矩阵  $\iff A$  的各列 (行) 都是单位向量且两两正交

性质五: 正交变换不改变向量之间的内积、向量的模长

设  $A$  是正交矩阵, 则  $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$  且  $\|Ax\| = \|x\|$

性质六:  $A$  是正交矩阵, 若  $A$  有实数特征值, 则这个实数特征值只能是  $-1$  或  $1$

注: 正交矩阵不一定有实数特征值, 比如  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  没有实数特征值

性质七: 关于  $|A + E|$  及  $|A - E|$  是否为零? (即判断  $-1$  和  $1$  是否是特征值)

设  $A$  是正交矩阵且  $|A| < 0$ , 则  $-1$  必是特征值 (1995 年考察过)

设  $A$  是偶数阶正交矩阵且  $|A| > 0$ , 则  $-1$  和  $1$  都是特征值

设  $A$  是奇数阶正交矩阵且  $|A| > 0$ , 则  $1$  必是特征值

设  $A$  是奇数阶正交矩阵则  $-1$  和  $1$  必有一个是特征值

性质八: 设  $A$  是正交矩阵, 若  $A$  有特征值  $-1$  和  $1$ , 则  $-1$  和  $1$  对应的特征向量正交

性质九:

$A$  是正交矩阵且  $|A| = 1 \implies A_{ij} = a_{ij}$

$A$  是正交矩阵且  $|A| = 1 \xleftarrow{A \text{ 是非零矩阵}} A_{ij} = a_{ij}$

$A$  是正交矩阵且  $|A| = -1 \implies A_{ij} = -a_{ij}$

$A$  是正交矩阵且  $|A| = -1 \xleftarrow{A \text{ 是非零矩阵}} A_{ij} = -a_{ij}$  (2013 考察过)

设  $A = (a_{ij})$  是三阶非零矩阵, 若  $A_{ij} + a_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ , 则  $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$  (2013)

$A$  是正交矩阵且  $|A| < 0$ , 求  $|A + E|$  (1995)

## 矩阵及分块矩阵的秩

### 常见公式

$$1) r(A_{m \times n}) \leq m, n$$

$$2) r(A) \leq r(A, B); r(A) \leq r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$3) r(A+B) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$$

$$4) r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

$$5) r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B); r\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$$

$$6) r(A^T A) = r(AA^T) = r(A)$$

$$7) \text{若 } A_{m \times n} B_{n \times s} = O, \text{ 则 } r(A) + r(B) \leq n$$

$$8) r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$$

9) 若  $A$  为列满秩矩阵, 则  $r(AB) = r(B)$ ; 若  $A$  为行满秩矩阵, 则  $r(BA) = r(B)$  (左乘列满秩, 右乘行满秩, 秩不改变)

基于如下结论

结论一: 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$  是  $n$  维列向量, 有  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$

结论二: 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  可以由向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$  表示, 则  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$

结论三: 方程  $AX = B$  有解  $\iff r(A) = r(A, B)$

结论四:  $Ax = 0$  和  $Bx = 0$  同解  $\iff r(A) = r(B) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

结论五: 初等变换不改变矩阵的秩

若  $A_{m \times n} B_{n \times m} = E_m$ , 则 ( ) (2010)

$$(A) r(A) = m, r(B) = m$$

$$(B) r(A) = m, r(B) = n$$

$$(C) r(A) = n, r(B) = m$$

$$(D) r(A) = n, r(B) = n$$

设三阶矩阵  $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$ , 若  $r(A^*) = 1$ , 则必有 ( ) (2003)

$$(A) a = b \text{ 或 } a + 2b = 0$$

$$(B) a = b \text{ 或 } a + 2b \neq 0$$

$$(C) a \neq b \text{ 且 } a + 2b = 0$$

$$(D) a \neq b \text{ 且 } a + 2b \neq 0$$

设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $\alpha$  是  $n$  维列向量, 若  $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = r(A)$ , 则线性方程组 ( ) (2001)

(A)  $AX = \alpha$  必有无穷多解 (B)  $AX = \alpha$  必有唯一解

(C)  $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$  仅有零解 (D)  $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$  必有非零解

### 广义消法变换的应用 (重点)

广义消法变换和消法变换一样, 都不改变矩阵的秩, 把“矩阵”看作“数”, 广义消法变换就是消法变换, 但是与消法变换不同的是, 广义消法变换需要注意  $P$  矩阵的位置!

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + P \times r_2} \begin{pmatrix} A + PC & B + PC \\ C & D \end{pmatrix} \quad (\text{行变换, } P \text{ 在左})$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_2 \times P} \begin{pmatrix} A + BP & B \\ C + DP & D \end{pmatrix} \quad (\text{列变换, } P \text{ 在右})$$

设  $A, B$  为  $n$  阶实矩阵, 下列不成立的是 ( ) (2021)

(A)  $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T A \end{pmatrix} = 2r(A)$

(B)  $r\begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$

(C)  $r\begin{pmatrix} A & BA \\ O & AA^T \end{pmatrix} = 2r(A)$

(D)  $r\begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$

已知  $n$  阶矩阵  $A, B, C$  满足  $ABC = O$ ,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 记矩阵  $\begin{pmatrix} O & A \\ BC & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} AB & C \\ O & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & AB \\ AB & O \end{pmatrix}$  的秩分别为

$r_1, r_2, r_3$ , 则 ( ) (2023)

(A)  $r_1 \leq r_2 \leq r_3$

(B)  $r_1 \leq r_3 \leq r_2$

(C)  $r_3 \leq r_1 \leq r_2$

(D)  $r_2 \leq r_1 \leq r_3$

设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵, 若方程组  $Ax = \mathbf{0}$  与  $Bx = \mathbf{0}$  同解, 则 ( ) (2022)

(A) 方程组  $\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix} y = \mathbf{0}$  只有零解

(B) 方程组  $\begin{pmatrix} E & A \\ O & AB \end{pmatrix} y = \mathbf{0}$  只有零解

(C) 方程组  $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} y = \mathbf{0}$  与  $\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} y = \mathbf{0}$  同解

(D) 方程组  $\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix} y = \mathbf{0}$  与  $\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix} y = \mathbf{0}$  同解

设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵, 则 ( ) (2018)

(A)  $r(A \ AB) = r(A)$

(B)  $r(A \ BA) = r(A)$

(C)  $r(A \ B) = \max\{r(A), r(B)\}$

(D)  $r(A \ B) = r(A^T \ B^T)$