概率论大复盘

主讲人 夜雨

以主流模拟卷的核心题为载体，给概率论小题做一个复盘，这里总结了大量概率论小题的做题技巧，相信大家看完至少提高五分，或者做题时间至少缩短十五分钟

维恩图解抽象概率计算

超越卷三

(10) 设随机事件 A 与 B 互不相容，B 与 C 相互独立，且 $P(A)=P(B)=0.4$，$P(C)=0.5$，则 $P(C-A\mid A\cup BC)=$（　　）.

(A) $\frac{1}{5}$　　(B) $\frac{1}{6}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{4}$

答案　选(C)

解　由于 A 与 B 互不相容，即 $AB=\varnothing$，则 $ABC=\varnothing$，故 $P(ABC)=0$. 又 B 与 C 相互独立，则 $P(BC)=P(B)P(C)=0.2$，

$$P(C-A\mid A\cup BC)=\frac{P((C-A)(A\cup BC))}{P(A\cup BC)}=\frac{P(C\bar{A}A\cup C\bar{A}BC)}{P(A\cup BC)}=\frac{P(\bar{A}BC)}{P(A\cup BC)}$$

$$=\frac{P(BC)-P(ABC)}{P(A)+P(BC)-P(ABC)}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3}.$$

超越卷五

(8) 设 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.8$，则 $P(\bar{A}\ \bar{B})P(B\mid\bar{A})$ 的最大值为（　　）.

(A) 0.125　　(B) 0.12　　(C) 0.08　　(D) 0.15

答案　选(B).

解　由于 $P(\bar{A}\ \bar{B})P(B\mid\bar{A})=[1-P(A\cup B)]\frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}$

$$=[1+P(AB)-P(A)-P(B)]\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

$$=[P(AB)-0.3]\frac{0.8-P(AB)}{1-P(A)}=\frac{1}{2}[0.0625-(P(AB)-0.055)^2].$$

由于 $P(AB)\leqslant P(A)=0.5$，因此当 $P(AB)=0.5$ 时，$P(\bar{A}\ \bar{B})P(B\mid\bar{A})$ 取得最大值，最大值为 0.12，选项(B) 正确.

超越卷六

(8) 下列结论正确的个数为（　　）.

① 任意事件 A,B,C，均有 $P(ABC)\geqslant P(A)+P(B)+P(C)-2$.

② 若 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则 $P(B\mid A)>P(B\mid\bar{A})$ 的充要条件为 $P(A\mid B)>P(A\mid\bar{B})$.

③ $P(A-B)P(B-A)\geqslant P(A)P(B)-P(AB)$.

④ $P(A\cup B)P(AB)\leqslant P(A)P(B)$.

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

答案 选(D).

解 因 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,故

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1.$$

故

$$\begin{aligned}P(ABC)&=P(AB)+P(C)-P(AB\cup C)\geqslant P(A)+P(B)-1+P(C)-1\\&=P(A)+P(B)+P(C)-2,\end{aligned}$$

故 ① 正确;

$$\begin{aligned}P(B\mid A)>P(B\mid \overline{A})&\Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(A)}>\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}\\&\Leftrightarrow P(AB)(1-P(A))>P(A)(P(B)-P(AB))\\&\Leftrightarrow P(AB)>P(A)P(B),\end{aligned}$$

由对称性,$P(A\mid B)>P(A\mid \overline{B})\Leftrightarrow P(BA)>P(B)P(A)$,故 ② 正确;

$$\begin{aligned}&P(A-B)P(B-A)-P(A)P(B)+P(AB)\\&=(P(A)-P(AB))(P(B)-P(AB))-P(A)P(B)+P(AB)\\&=-P(A)P(AB)-P(B)P(AB)+P^2(AB)+P(AB)\\&=-P(AB)(P(A)+P(B)-P(AB)-1)\\&=-P(AB)(P(A\cup B)-1)\geqslant 0,\end{aligned}$$

故 ③ 正确;

$$\begin{aligned}P(A\cup B)P(AB)-P(A)P(B)&=[P(A)+P(B)-P(AB)]P(AB)-P(A)P(B)\\&=-(P(A)-P(AB))(P(B)-P(AB))\leqslant 0,\end{aligned}$$

故 ④ 正确

8. 设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布 $N(0,\sigma^2)(\sigma>0)$,且 $P\{X\leqslant 1,Y\leqslant -1\}=\frac{1}{4}$,则

$P\{X>1,Y>-1\}=$

A. 1. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

8. **答案** B

解析 记 $A=\{X\leqslant 1\}$,$B=\{Y\leqslant -1\}$,由已知得 $P(AB)=\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}P\{X>1,Y>-1\}&=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-P(A)-P(B)+P(AB).\end{aligned}$$

又 $P(A)=P\{X\leqslant 1\}=\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$,$P(B)=P\{Y\leqslant -1\}=\Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$,故

$$P\{X>1,Y>-1\}=1-\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)-1+\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

选项 B 正确.

余炳森卷一

8. 若 A 与 B 为任意两个随机事件，则(　　).

A. $P(AB)\geqslant\dfrac{P(A)+2P(B)}{3}$　　B. $P(AB)<\dfrac{P(A)+2P(B)}{3}$

C. $P(A\cup B)\geqslant\dfrac{P(A)+2P(B)}{3}$　　D. $P(A\cup B)<\dfrac{P(A)+2P(B)}{3}$

8.【答案】C

【解析】取 $A=\Omega, B=\varnothing$，易见选项 A 和 D 错误；

取 $B=A$，则 $P(AB)=P(A)=\dfrac{P(A)+2P(B)}{3}$，因此选项 B 也是错误的.

下面我们来证明选项 C：

由于 $P(A\cup B)\geqslant\max\{P(A),P(B)\}$，而 $\dfrac{P(A)+2P(B)}{3}\leqslant\max\{P(A),P(B)\}$，

因此 $P(A\cup B)\geqslant\dfrac{P(A)+2P(B)}{3}$.

分布函数的性质与判定

分布函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$ 的性质

性质一：$F(x)$ 是一个不减的非负函数

性质二：$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，其中 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

性质三：$F(x+0)=F(x)$ 即 $F(x)$ 是右连续的，其中 $F(x+0)=\lim\limits_{t\to x^+}F(t)$

超越卷十

(8) 下列函数中，为某随机变量 X 的分布函数的是(　　).

(A) $F(x)=\dfrac{1+\operatorname{sgn}(x)}{2}$　　(B) $F(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$

(C) $F(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$　　(D) $F(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

答案　选(D).

解　$F(x)=\dfrac{1+\operatorname{sgn}(x)}{2}$ 在点 $x=0$ 处不右连续，故(A) 不正确.

$F(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$ 不是非负函数，如 $F(-1)=\dfrac{-1}{e-1}<0$. 另外，$F'(x)=\dfrac{(1+x)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$，

$x<-1$ 时，$F(x)$ 为单减函数，故(B) 不正确.

李永乐六套卷卷四

8. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，且 $F(0)=0$，则下列函数可作为分布函数的是

A. $G_1(x)=\begin{cases}1+F\left(\frac{1}{x}\right), & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1.\end{cases}$

B. $G_2(x)=\begin{cases}1-F\left(\frac{1}{x}\right), & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1.\end{cases}$

C. $G_3(x)=\begin{cases}F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right), & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1.\end{cases}$

D. $G_4(x)=\begin{cases}F(x)-F\left(\frac{1}{x}\right), & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1.\end{cases}$

8.【答案】 D

【分析】 由题设知 $F(x)$ 连续，得 $G_4(-\infty)=0, G_4(+\infty)=F(+\infty)-F(0)=1$.

当 $1<x_1<x_2$ 时，$G_4(x_1)=F(x_1)-F\left(\frac{1}{x_1}\right)\leqslant F(x_2)-F\left(\frac{1}{x_2}\right)=G_4(x_2)$.

又 $\lim\limits_{x\to1^+}G_4(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left[F(x)-F\left(\frac{1}{x}\right)\right]=F(1)-F(1)=0=G_4(1)$，故 $G_4(x)$ 为分布函数，应选 D.

随机变量的可加性

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，$X\sim P(\lambda_1), Y\sim P(\lambda_2)$，则 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，$X\sim \chi^2(n), Y\sim \chi^2(m)$，则 $X+Y\sim \chi^2(n+m)$

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，$X\sim \Gamma(\alpha,\theta), Y\sim \Gamma(\beta,\theta)$，则 $X+Y\sim \Gamma(\alpha+\beta,\theta)$

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，$X\sim B(n,p), Y\sim B(m,p)$，则 $X+Y\sim B(m+n,p)$

这些结论说明正态分布、泊松分布、χ 分布、Γ 分布、二项分布都具有可加性

特别地，正态分布还有如下性质

若随机变量 X 服从正态分布，则 $Y=aX+b(a\neq 0)$ 也服从正态分布

可得

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且都服从正态分布，则 $Y=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n$ 和

$Z=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n+b$($a_i$ 不全为0) 也服从正态分布

超越卷二

(10) 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，且 $E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=1-E(\overline{X})$，则 $P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\geqslant 2\right\}=($ $)$.

(A) e^{-1} (B) $2e^{-1}$ (C) $1-e^{-1}$ (D) $1-2e^{-1}$

答案 选(D).

解 由于样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，所以

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=E[(n-1)S^2]=(n-1)E[S^2]=(n-1)DX=(n-1)\lambda,$$

又 $E(\overline{X})=EX=\lambda$，由题意 $(n-1)\lambda=1-\lambda$，得 $n\lambda=1$.

又由 $X\sim P(\lambda)$，所以 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i\sim P(\lambda)$，故 $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim P(n\lambda)$，即 $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim P(1)$.

记 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$. 因此 $P\{Y=k\}=\frac{1^k}{k!}e^{-1}$，$k=0,1,2,\cdots$，从而

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\geqslant 2\right\}=P\{Y\geqslant 2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}=1-2e^{-1}.$$

故选(D).

超越卷三

(9) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1}$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$T=a(X_{n+1}-\overline{X})^2$，若使 $T\sim\chi^2(1)$，则 $a=($ $)$.

(A) $\frac{n}{(n+1)\sigma^2}$ (B) $\frac{n\sigma^2}{n+1}$ (C) $\frac{n}{(n+1)\sigma}$ (D) $\frac{n+1}{n\sigma}$

答案 选(A).

解 $X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，且 X_{n+1} 与 $\overline{X}$ 相互独立，故 $X_{n+1}-\overline{X}\sim N\left(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2\right)$，

则有

$$\left(\frac{X_{n+1}-\overline{X}-0}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}\right)^2=\frac{n}{(n+1)\sigma^2}(X_{n+1}-\overline{X})^2\sim\chi^2(1),$$

所以 $a=\frac{n}{(n+1)\sigma^2}$.

随机变量的无记忆性

几何分布具有“无记忆性”

$P(X>m+n|X>m)=P(X>n)$

$P(X<m+n|X>m)=P(X<n)$

$P(X=m+n|X>m)=P(X=n)$

指数分布具有“无记忆性”

$P(X>s+t|X>t)=P(X>s)$

$P(X<s+t|X>t)=P(X<s)$

余炳森卷三

8. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,3,\cdots$，其中 $0<p<1, m, n$ 为正整数，则 $P\{X>m+n \mid X>m\}$ (　　).

A. 与 m 无关，与 n 有关

B. 与 m 有关，与 n 无关

C. 与 m, n 均无关

D. 与 m, n 均有关

8.【答案】A

【解析】$P\{X>m+n \mid X>m\}=\dfrac{P\{X>m+n, X>m\}}{P\{X>m\}}=\dfrac{P\{X>m+n\}}{P\{X>m\}}$

$$=\frac{\sum\limits_{k=m+n+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}}{\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}}=\frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^{m}}=(1-p)^{n},$$

最值符号的处理

$\min\{x,y\}<\triangle \xrightarrow{\text{对立事件}} \min\{x,y\}>\triangle$

$\max\{x,y\}>\triangle \xrightarrow{\text{对立事件}} \max\{x,y\}<\triangle$

汤家凤卷二

8. 设 $X \sim N(1,1), Y \sim N(1,4)$，且 X, Y 相互独立，则 $P\{\min\{X,Y\} \leqslant 1\}=$ (　　).

A. $\dfrac{1}{4}$

B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{1}{8}$

D. $\dfrac{3}{4}$

$$P\{\min\{X,Y\} \leqslant 1\}=1-P\{X>1\}P\{Y>1\}=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

应选 D.

李永乐六套卷卷二

9. 已知随机变量 X 与 Y 均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，如果存在常数 α，成立 $P\{\max(X,Y)>\alpha\}=P\{\min(X,Y)\leqslant\alpha\}$，则 α 必为

A. $\dfrac{\mu}{2}$.

B. $-\dfrac{\mu}{2}$.

C. μ.

D. $-\mu$.

9.【答案】 C

【分析】 $P\{\max(X,Y)>\alpha\}=P\{(X>\alpha)\cup(Y>\alpha)\}$

$$
\begin{aligned}
&= P\{X > a\} + P\{Y > a\} - P\{X > a, Y > a\} \\
&= P\{X > a\} + P\{Y > a\} - P\{\min(X,Y) > a\} \\
&= 2P\{X > a\} - 1 + P\{\min(X,Y) \leqslant a\}.
\end{aligned}
$$

由于 $P\{\max(X,Y) > a\} = P\{\min(X,Y) \leqslant a\}$，得到 $2P\{X > a\} - 1 = 0$，即 $P\{X > a\} = \frac{1}{2}$，故 $a = \mu$.

汤家凤卷四

10. 设 $X \sim E(2)$，$Y = \min\{X, 2\}$，Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则（　　）.

A. $F_Y(y)$ 为可导函数

B. $F_Y(y)$ 连续，但不可导

C. $F_Y(y)$ 有一个跳跃间断点

D. $F_Y(y)$ 有两个间断点

⑩» C.

【解】 $F_Y(y) = P\{\min\{X,2\} \leqslant y\} = 1 - P\{\min\{X,2\} > y\} = 1 - P\{X > y\}P\{2 > y\}$.

当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = 0$；

当 $0 \leqslant y < 2$ 时，$F_Y(y) = 1 - P\{X > y\} = P\{X \leqslant y\} = 1 - e^{-2y}$；

当 $y \geqslant 2$ 时，$F_Y(y) = 1$，即

$$
F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-2y}, & 0 \leqslant y < 2, \\ 1, & y \geqslant 2. \end{cases}
$$

因为 $\lim\limits_{y \to 0^-} F_Y(y) = F_Y(0) = \lim\limits_{y \to 0^+} F_Y(y) = 0$，$\lim\limits_{y \to 2^-} F_Y(y) = 1 - e^{-4} \neq \lim\limits_{y \to 2^+} F_Y(y) = 1$，所以 $y = 2$ 为 $F_Y(y)$ 的跳跃间断点，故 $F_Y(y)$ 有一个跳跃间断点，应选 C.

【备考策略】本题考查随机变量函数的分布，同时考查分段函数的性质，注意计算的准确性.

李永乐三套卷卷一

16. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且均服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$，且 $P\{X \leqslant -1\} = \frac{1}{4}$，则 $P\{\max(X, Y) \leqslant 2, \min(X,Y) \leqslant -1\} =$ ________.

【解析】 因为 $P\{\max(X,Y) \leqslant 2, \min(X,Y) \leqslant -1\}$

$$
\begin{aligned}
&= P\{(X \leqslant 2, Y \leqslant 2) \cap [(X \leqslant -1) \cup (Y \leqslant -1)]\} \\
&= P\{(X \leqslant -1, Y \leqslant 2) \cup (X \leqslant 2, Y \leqslant -1)\} \\
&= P\{X \leqslant -1, Y \leqslant 2\} + P\{X \leqslant 2, Y \leqslant -1\} - P\{X \leqslant -1, Y \leqslant -1\} \\
&= P\{X \leqslant -1\}P\{Y \leqslant 2\} + P\{X \leqslant 2\}P\{Y \leqslant -1\} - P\{X \leqslant -1\}P\{Y \leqslant -1\} \\
&= \Phi\left(-\frac{3}{\sigma}\right)\Phi(0) + \Phi(0)\Phi\left(-\frac{3}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{\sigma}\right)\Phi\left(-\frac{3}{\sigma}\right),
\end{aligned}
$$

其中 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，又

$$
P\{X \leqslant -1\} = \frac{1}{4}，即\ \Phi\left(-\frac{3}{\sigma}\right) = \frac{1}{4},
$$

故所求概率为 $\frac{3}{16}$.

独立同分布的最大值和最小值

当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立时且具有相同分布函数 $F(x)$ 时，有

$F_{\max}(z) = [F(x)]^n$，$F_{\min}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$

特别地：$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布于 $E(\lambda) \Longrightarrow \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \sim E(n\lambda)$

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布于$F(x)$

$F_{\max}(x)=P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\leqslant x\}=P\{X_1\leqslant x\}P\{X_2\leqslant x\}\cdots P\{X_n\leqslant x\}=[F(x)]^n$

$F_{\min}(x)=P\{\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\leqslant x\}=1-P\{\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}>x\}$

$=1-P\{X_1>x\}P\{X_2>x\}\cdots P\{X_n>x\}$

$=1-(1-P\{X_1\leqslant x\})(1-P\{X_2\leqslant x\})\cdots(1-P\{X_n\leqslant x\})$

$=1-[1-F(x)]^n$

李永乐六套卷卷二

8. 设随机变量 X 和 Y 均服从指数分布 $E(1)$，且 X,Y 相互独立，则 $P\{1\leqslant \min(X,Y)\leqslant 2\}=$

A. $e^{-1}(1-e^{-1})$. B. $e^{-1}(1-e^{-2})$. C. $e^{-2}(1-e^{-1})$. D. $e^{-2}(1-e^{-2})$.

8.【答案】 D

【分析】 $P\{1\leqslant \min(X,Y)\leqslant 2\}=P\{1\leqslant \min(X,Y)\}-P\{2<\min(X,Y)\}$

$$=P\{X\geqslant 1,Y\geqslant 1\}-P\{X>2,Y>2\}$$
$$=P\{X\geqslant 1\}P\{Y\geqslant 1\}-P\{X>2\}P\{Y>2\}$$
$$=e^{-1}e^{-1}-e^{-2}e^{-2}=e^{-2}-e^{-4}=e^{-2}(1-e^{-2}).$$

【评注】 由指数分布 $X\sim E(\lambda)$ 性质可知，$P\{X>t\}=e^{-\lambda t}$，$t>0$.

超越卷二

(9) 设总体 $X\sim E(1)$，(X_1,X_2,X_3) 为来自总体 X 的简单随机样本. 记 $T_1=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i$，$T_2=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i$. 则 $E(T_1-T_2)=($ $)$.

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B)3 (C) $\dfrac{4}{3}$ (D)1.

答案 选(A).

解 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 由于(X_1,X_2,X_3)为来自总体 X 的简单随机样本，所以(X_1,X_2,X_3)相互独立，且 X_i 与总体 X 同分布，$i=1,2,3$，故

$$f_{T_1}(x)=3[F_X(x)]^2f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 3(1-e^{-x})^2e^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

$$f_{T_2}(x)=3[1-F_X(x)]^2f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

$$ET_1=\int_0^{+\infty}xf_{T_1}(x)dx=3\int_0^{+\infty}x(1-e^{-x})^2e^{-x}dx=3\int_0^{+\infty}x(1-2e^{-x}+e^{-2x})e^{-x}dx$$
$$=3\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\right)=\frac{11}{6},ET_2=\frac{1}{3},\text{故 }E(T_1-T_2)=\frac{3}{2}.$$

巧用正态分布的绝对值期望

若 $X \sim N(0,1)$，则 $E(|X|)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$（记），$D(|X|)=E(|X|^2)-E^2(|X|)=1-\dfrac{2}{\pi}$（不记）

最值符号也可以和绝对值联系到一起

$$\min\{X,Y\}=\frac{X+Y-|X-Y|}{2}$$

$$\max\{X,Y\}=\frac{X+Y+|X-Y|}{2}$$

李林卷六

10. 设 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0;1,1;0)$，则 $E(|X-Y|)=$

A. 0.　　B. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

C. $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.　　D. $\dfrac{1}{\pi}$.

10. **答案** C

解析 由已知，$\rho_{XY}=0$，故 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$.

记 $Z=X-Y$，则 $Z\sim N(0,2)$，故

$$E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\times2}}dz$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{4}}dz=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}d\left(e^{-\frac{z^2}{4}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

选项 C 正确.

余炳森卷四

9. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim N\left(1,\dfrac{1}{4}\right)$，$Y\sim N(3,1)$，令 $Z=2X-Y+1$，则 $D|Z|=$（　）.

A. $1-\dfrac{2}{\pi}$　　B. $2-\dfrac{4}{\pi}$　　C. 2　　D. 3

9.【答案】B

【解析】由 $E(Z)=2E(X)-E(Y)+1=0$，$D(Z)=4D(X)+D(Y)=2$，故 $Z\sim N(0,2)$，

Z 的密度函数

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}},-\infty<z<+\infty.$$

又 $$D|Z|=E(|Z|^2)-(E|Z|)^2=E(Z^2)-(E|Z|)^2,$$

其中

$$E(Z^2)=D(Z)+[E(Z)]^2=2+0=2,$$

$$E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}dz=2\int_0^{+\infty}z\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}dz=\frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

$$(E|Z|)^2=\frac{4}{\pi},$$

故 $D|Z|=2-\frac{4}{\pi}$.

汤家凤卷一

9. 设 $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(1,1)$，X,Y 相互独立，则 $E(\min\{X,Y\})=($　　$)$.

A. $1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}$　　B. $1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

C. $1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}$　　D. $1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}$

9» B.

【解】$\min\{X,Y\}=\frac{X+Y}{2}-\frac{|X-Y|}{2}$.

由 $X-Y\sim N(0,2)$，得 $Z=\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，则

$$\begin{aligned}E(\min\{X,Y\})&=\frac{1}{2}[E(X)+E(Y)]-\frac{1}{2}E(|X-Y|)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}E(|Z|)\\&=1-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz\\&=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}d\left(\frac{z^2}{2}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

应选 B.

【备考策略】本题最小值函数的形式需要着重积累，同理，考生要能写出最大值函数的表示形式，期望的相关公式也要记忆准确.

二维正态分布的性质

性质一：若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

注：X 和 Y 均服从正态分布 $\nRightarrow$ (X,Y) 服从二维正态分布

性质二：若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则$X$与$Y$相互独立$\Leftrightarrow \rho=0$（即$X$与$Y$不相关）

性质三：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$且$X$与$Y$相互独立，则$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;0)$

性质四：若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\rho\sigma_1\sigma_2)$（其中$a,b$不全为零）

性质五：若(X,Y)服从二维正态分布，且$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，则$(aX+bY,cX+dY)$服从二维正态分布

超越卷四

(16) 设随机变量$(X,Y)\sim N\left(0,0;1,1;\frac{1}{2}\right)$，则$P\{X^2>Y^2\}=$______.

答案 填“$\frac{1}{2}$”.

解 由题意知$X\sim N(0,1),Y\sim N(0,1),\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.

$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$，$\operatorname{cov}(X+Y,X-Y)=DX-DY=0$，

故$X+Y$与$X-Y$不相关. 记$U=X+Y,V=X-Y$. 由于$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\neq 0$，故$(U,V)$服从二维正态分布. 又由于$U$和$V$不相关，所以$U$和$V$独立. 即$X+Y$与$X-Y$独立.

$$\begin{aligned} P\{X^2>Y^2\} &= P\{(X+Y)(X-Y)>0\} \\ &= P\{X+Y>0,X-Y>0\}+P\{X+Y<0,X-Y<0\} \\ &= P\{X+Y>0\}\cdot P\{X-Y>0\}+P\{X+Y<0\}\cdot P\{X-Y<0\}, \end{aligned}$$

又

$$E(X+Y)=EX+EY=0,\quad D(X+Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)=1+1+2\times\frac{1}{2}=3,$$

$$E(X-Y)=EX-EY=0,D(X-Y)=DX+DY-2\operatorname{cov}(X,Y)=1+1-2\times\frac{1}{2}=1,$$

所以$X+Y\sim N(0,3),X-Y\sim N(0,1)$. 故

$$P\{X+Y>0\}=P\{X+Y<0\}=\frac{1}{2},\quad P\{X-Y>0\}=P\{X-Y<0\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X^2>Y^2\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

超越卷六

(10) 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0;2,2;0)$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则 $p=P\{0<X-Y<2 \mid X+Y=1\}=(\quad)$.

(A)$\Phi(1)$　　(B)$\Phi(2)$　　(C)$\Phi(1)-\Phi(0)$　　(D)$\Phi(2)-\Phi(0)$.

答案　选(C).

解　令 $U=X+Y, V=X-Y$，因为 $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\neq 0$，所以 (U,V) 服从二维正态分布.

$$\mathrm{Cov}(U,V)=\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)=DX-DY=0,$$

可知 U 与 V 不相关，进而 U 与 V 相互独立. 所以

$$p=P\{0<V<2 \mid U=1\}=P\{0<V<2\}.$$

又

$$EV=EX-EY=0;\quad DV=DX+DY=2+2=4,$$

所以 $V\sim N(0,4)$，$\frac{V}{2}\sim N(0,1)$，故 $p=P\left\{0<\frac{V}{2}<1\right\}=\Phi(1)-\Phi(0)$.

离散型和连续型的混合作全集拆分

汤家凤卷七

8. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,4)$，$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则 $P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}=(\quad)$.

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}&=P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2},Y=0\right\}+P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2},Y=1\right\}\\&=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},Y=0\right\}+P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},Y=1\right\}\\&=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}P\{Y=0\}+P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}P\{Y=1\}\end{aligned}$$

⑧» B.

【解】 $P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|Y=0\right\}\cdot P\{Y=0\}+$

$$P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|Y=1\right\}\cdot P\{Y=1\}$$

$$=\frac{1}{2}P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{2}P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\frac{1}{2}-0}{2}\right)+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{-\frac{1}{2}-0}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{1}{4}\right)+\Phi\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2},$$

应选 B.

李林卷五

10. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $X\sim B\left(1,\frac{1}{2}\right)$,$Y\sim N(0,1)$,则 $P\{XY\leqslant E(XY)\}=$

A. 0. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

$$P\{XY\leqslant 0\}=P\{XY\leqslant 0,X=0\}+P\{XY\leqslant 0,X=1\}$$
$$=P\{0\leqslant 0,X=0\}+P\{Y\leqslant 0,X=1\}$$
$$=P\{X=0\}+P\{X=1\}P\{Y\leqslant 0\}$$

10. **答案** D

解析 由 $X\sim B\left(1,\frac{1}{2}\right)$,知 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$. 又由 X 与 Y 相互独立,知

$$E(XY)=EX\cdot EY=\frac{1}{2}\times 0=0.$$

由全概率公式,有

$$P\{XY\leqslant E(XY)\}=P\{XY\leqslant 0\}$$
$$=P\{X=0\}P\{XY\leqslant 0\mid X=0\}+P\{X=1\}P\{XY\leqslant 0\mid X=1\}$$
$$=P\{X=0\}+P\{X=1\}P\{Y\leqslant 0\}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(0).$$

均匀分布的一个特别结论

若 $F(x)$ 是 X 的分布函数,则 $F(X)\sim U(0,1)$

余炳森卷四

16. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数,EX 为 X 的数学期望,则 $P\{F(X)<1-EX\}=$ ________.

李永乐六套卷卷二

16. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$,其分布函数为 $\Phi(x)$,则 $P\{2\Phi(X)\leqslant 1\}=$ ________.

样本均值，样本方差的数字特征

样本平均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$

设 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，有 $E\left(\overline{X}\right)=E(X)=\mu$，$D\left(\overline{X}\right)=\frac{D(X)}{n}=\frac{\sigma^2}{n}$，$E(S^2)=D(X)=\sigma^2$

超越卷六

(16) 设总体 X 的期望 $EX=0$ 和方差 $DX=\sigma^2$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，$S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 为二阶中心矩，若 $a(n\overline{X}^2+S_2^2)$ 为总体方差 σ^2 的无偏估计量，则 $a=$______.

答案 填“$\frac{n}{2n-1}$”.

解 由题意知，

$$\begin{aligned}E[a(n\overline{X}^2+S_2^2)]&=an\mathrm{E}(\overline{X}^2)+a\mathrm{E}(S_2^2)=an[\mathrm{E}^2(\overline{X})+\mathrm{D}(\overline{X})]+a\mathrm{E}(S_2^2)\\&=\frac{2n-1}{n}a\sigma^2.\end{aligned}$$

当 $a=\frac{n}{2n-1}$ 时，$a(n\overline{X}^2+S_2^2)$ 为总体方差 σ^2 的无偏估计量.

三大分布的判断

χ^2 分布：设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且都服从标准正态分布 $N(0,1)$，则称统计量 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $\chi^2\sim\chi^2(n)$

可加性：设 $\chi_1^2\sim\chi^2(n_1)$，$\chi_2^2\sim\chi^2(n_2)$，并且 χ_1^2,χ_2^2 相互独立，则有 $\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2)$

期望和方差：$E(\chi^2(n))=n$，$D(\chi^2(n))=2n$

F 分布：设 $U\sim\chi^2(n_1)$，$V\sim\chi^2(n_2)$，且 U,V 相互独立，则称随机变量 $F=\frac{U/n_1}{V/n_2}$ 服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布，记为 $F\sim F(n_1,n_2)$

性质：若 $F\sim F(n_1,n_2)$，则 $1/F\sim F(n_2,n_1)$

t 分布：设 $X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，则称随机变量 $t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记为 $t\sim t(n)$

特别地，若 $X,Z\sim N(0,1)$ 且相互独立，$\frac{X}{|Z|}\sim t(1)$（经常考察）

通常结合正态分布的样本均值与样本方差的分布一起考察

正态分布的样本均值与样本方差的分布

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$\overline{X},S^2$ 分别是样本均值和样本方差，则有如下结论

一：$\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$（可得 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$）（记）

二：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$（记）

三：$\overline{X}$ 与 S^2 相互独立（可得 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 与 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 相互独立）（记）

四：$\dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S}\sim t(n-1)$（可得 $\dfrac{n\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$）（不记）

(10) 设变量 X_1,X_2,X_3 为来自正态总体 $X\sim N(0,3)$ 的简单随机样本，则下列结论正确的个数是(　　).

① $\dfrac{1}{3}(X_1^2+X_2^2+X_3^2)\sim\chi^2(3)$，　② $\dfrac{1}{9}(X_1+X_2+X_3)^2\sim\chi^2(1)$，　③ $\dfrac{X_1+X_2}{|X_1-X_2|}\sim t(1)$，

④ $\dfrac{2X_1^2}{X_2^2+X_3^2}\sim F(1,2)$。

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

答案　选(D).

解　由于 $\dfrac{X_1^2}{3},\dfrac{X_2^2}{3},\dfrac{X_3^2}{3}$ 相互独立，且 $\dfrac{X_i^2}{3}\sim\chi^2(1)$，所以 ① 正确。

由于 $\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}\sim N(0,1)$，所以 $\dfrac{1}{9}(X_1+X_2+X_3)^2\sim\chi^2(1)$，故 ② 正确。

由于 X_1,X_2 相互独立，所以 $(X_1,X_2)\sim N(0,0;3,3;0)$，

由 $\operatorname{cov}(X_1+X_2,X_1-X_2)=0$，得 X_1+X_2,X_1-X_2 相互独立，并且 $X_1+X_2\sim N(0,6)$，$X_1-X_2\sim N(0,6)$，因此 $\dfrac{X_1+X_2}{|X_1-X_2|}\sim t(1)$，故 ③ 正确.

由 $\dfrac{X_1^2}{3}\sim\chi^2(1)$，$\dfrac{X_2^2+X_3^2}{3}\sim\chi^2(2)$，且 X_1^2 与 $X_2^2+X_3^2$ 相互独立，所以 $\dfrac{2X_1^2}{X_2^2+X_3^2}\sim F(1,2)$，故 ④ 正确。因此选项(D) 正确.

张宇卷三

10. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则下列结论：

① $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}\sim t(1)$；

② $\dfrac{4(\overline{X}-1)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$；

③ $\dfrac{4(\overline{X}-1)^2}{S^2}\sim F(1,3)$.

正确结论的个数为

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

10.【答案】 C

【分析】 对于①:由已知得,

$$X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2),X_3+X_4-2\sim N(0,2\sigma^2).$$

故

$$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1),\frac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1),$$

从而$\left(\frac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$,且$X_1-X_2$与$X_3+X_4-2$相互独立,所以

$$\frac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}{1}}}=\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}\sim t(1).$$

对于②:

$$\overline{X}\sim N\left(1,\frac{\sigma^2}{4}\right),\frac{\overline{X}-1}{\frac{\sigma}{2}}\sim N(0,1),$$

所以

$$\left(\frac{\overline{X}-1}{\frac{\sigma}{2}}\right)^2=\frac{4(\overline{X}-1)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1).$$

对于③:

$$\frac{(4-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{3S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(3),$$

所以

$$\frac{\frac{4(\overline{X}-1)^2}{\sigma^2}}{\frac{3S^2}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{4(\overline{X}-1)^2}{S^2}\sim F(1,3).$$

李林卷六

16. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)(\sigma>0)$,$X_1,X_2,X_3$ 为来自总体 X 的简单随机样本,$Y=\frac{1}{2}\left(\frac{X_1}{X_3}+\frac{X_2}{X_3}\right)^2$,若 $P\{Y>a\}=0.05(a\neq0)$,则 $P\left\{Y>\frac{1}{a}\right\}=$________.

16. 答案 0.95

解析 先确定 Y 的分布.

$$Y=\frac{1}{2}\frac{(X_1+X_2)^2}{X_3^2},\quad X_1+X_2\sim N(0,2\sigma^2),$$

$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，$\frac{X_3}{\sigma}\sim N(0,1)$，且 X_1+X_2 与 X_3 相互独立，故

$$Y=\frac{1}{2}\frac{(X_1+X_2)^2}{X_3^2}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{X_1+X_2}{\sigma}\right)^2}{\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2}\sim F(1,1).$$

由 F 分布的定义，知 $\frac{1}{Y}\sim F(1,1)$，即 Y 与 $\frac{1}{Y}$ 都服从 $F(1,1)$，则 $P\{Y>a\}=P\left\{\frac{1}{Y}>a\right\}$.

所以

$$P\left\{Y>\frac{1}{a}\right\}=P\left\{\frac{1}{Y}<a\right\}=1-P\left\{\frac{1}{Y}>a\right\}$$
$$=1-P\{Y>a\}=1-0.05=0.95.$$

卡方分布的数字特征

超越卷五

(9) 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(2,1)$，则 $D[(2X-Y)^2]=(\quad)$.

(A)50 (B)10 (C)18 (D)9

答案 选(A).

解 由于 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(2,1)$，所以 $2X-Y\sim N(0,5)$，于是 $\frac{(2X-Y)^2}{5}\sim\chi^2(1)$，因此 $D\left[\frac{(2X-Y)^2}{5}\right]=2$，故 $D[(2X-Y)^2]=50$，选项(A)正确.

(16) 设总体 $X\sim N(\mu,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，令 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$，则 Y^2 的期望 $E(Y^2)=$ ________.

解 设 $Z_1=X_1+X_{n+1},Z_2=X_2+X_{n+2},\cdots,Z_n=X_n+X_{2n}$，$Z\sim N(2\mu,2)$，则 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 相互独立且均与 Z 同分布. 故 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 可看作来自总体 Z 的样本，

样本均值 $\overline{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\overline{X}.$

样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}Y.$

由 $\frac{(n-1)S^2}{2}\sim\chi^2(n-1)$，知 $\frac{Y}{2}\sim\chi^2(n-1)$. 故 $E\left(\frac{Y}{2}\right)=n-1$，$D\left(\frac{Y}{2}\right)=2(n-1)$，从而

$$EY=2(n-1),\ DY=8(n-1). \text{故 } E(Y^2)=DY+(EY)^2=4n^2-4.$$

分位点问题

16. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(1,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值. 对任意的常数 $\alpha(0<\alpha<1)$，自由度为 n 的 χ^2 分布的上侧 α 分位点 $\chi^2_\alpha(n)$ 定义为 $P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=\alpha$，则 $P\{\chi^2_{0.9}(n-1)<\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2<\chi^2_{0.2}(n-1)\}=$______.

16.【答案】0.7

【解析】因为 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，所以

$$P\{\chi^2_{0.9}(n-1)<\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2<\chi^2_{0.2}(n-1)\}=0.9-0.2=0.7.$$

大数定律和中心极限定理

切比雪夫大数定律

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，数学期望 EX_k 和方差 DX_k 都存在，并且方差有公共上界（即 $DX_k \leqslant M$，$k=1,2,\cdots$）则对于任意正数 ε，$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)\right|<\varepsilon\right\}=1$

（即 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{P}E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\overset{P}{=}E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)$）

注：伯努利大数定律和辛钦大数定律都是切比雪夫大数定律的特殊情形，故只需记住切比雪夫大数定律

切比雪夫不等式

设随机变量 X 具有数学期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2$，则对于任意正数 ε，不等式 $P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 成立

注：由 $P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 可得 $P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geqslant1-\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

列维—林德伯格定理：设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，服从同一分布，且具有数学期望和方差 $E(X_k)=\mu, D(X_k)=\sigma^2>0(k=1,2,\cdots)$，则对于任意的 x，恒有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-n\mu\right)\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

当n很多大时，$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu\right)$近似地服从$N(0,1)$，由此得到$\sum_{k=1}^{n}X_k$近似地服从$N(n\mu,n\delta^2)$

注：棣莫弗—拉普拉斯定理是列维—林德伯格定理的特殊情形，故只需记住列维—林德伯格定理超越

(9) 设总体$X\sim B(1,p)$，$X_1,\cdots,X_{1000}$是来自总体X的简单随机样本．$\overline{X}$为样本均值，则下列结论不正确的是(　　)．

(A) $\sum_{i=1}^{1000}X_i\sim B(1000,p)$

(B) $\sum_{i=1}^{1000}X_i\overset{\text{近似}}{\sim}N(1000p,1000p(1-p))$

(C) $\overline{X}\overset{\text{近似}}{\sim}N(p,p(1-p))$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{X}\overset{P}{=}p$

答案　选(C)．

解　总体$X\sim B(1,p)$，故$X_1,\cdots,X_{1000}$相互独立且$X_i\sim B(1,p)$，$i=1,\cdots,1000$，$EX_i=p$，　$DX_i=p(1-p)$，　$i=1,\cdots,1000$．

由二项分布可加性知$\sum_{i=1}^{1000}X_i\sim B(1000,p)$，故(A)正确．

$$E\left(\sum_{i=1}^{1000}X_i\right)=\sum_{i=1}^{1000}EX_i=1000p;\quad D\left(\sum_{i=1}^{1000}X_i\right)=\sum_{i=1}^{1000}DX_i=1000p(1-p).$$

由列维-林德伯格中心极限定理知(B)正确．

由$E(\overline{X})=EX=p$，$D(\overline{X})=\frac{DX}{1000}=\frac{p(1-p)}{1000}$，由列维-林德伯格中心极限定理知$\overline{X}\overset{\text{近似}}{\sim}N\left(p,\frac{p(1-p)}{1000}\right)$，故(C)错误．

由辛钦大数定律，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\overset{P}{=}EX_i=p$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{X}\overset{P}{=}p$，故(D)正确．

李林卷二

9. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本，X服从参数为$\lambda=\frac{1}{2}$的泊松分布，$\Phi(x)$为$N(0,1)$的分布函数，则$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{2\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{2\sqrt{n}}\leqslant 1\right\}=$

A. $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$．　　B. $\Phi(\sqrt{2})$．　　C. $\Phi(\sqrt{3})$．　　D. $\Phi(1)$．

李永乐六套卷卷一

9. 将一枚骰子抛掷 100 次，根据切比雪夫不等式奇数点出现的次数在 35 到 60 之间的概率 P

A. 不大于$\frac{1}{4}$.　　B. 不大于$\frac{1}{9}$.　　C. 不小于$\frac{3}{4}$.　　D. 不小于$\frac{8}{9}$.

9.【答案】 C

【分析】 设奇数点出现的次数为 X，则 $X \sim B(100,0.5)$，$EX = 50$，$DX = 25$.

由切比雪夫不等式得

$$P\{35 \leqslant X \leqslant 60\} > P\{40 \leqslant X \leqslant 60\} = P\{|X-50| \leqslant 10\} \geqslant 1-\frac{25}{10^2} = \frac{3}{4}.$$

故应选 C.

假设检验与置信区间

设X_1, X_2, X_3是来自总体$N(\mu, 4^2)$的一个样本

根据样本值$x_1 = 1.1, x_2 = 1.2, x_3 = 1.5$

来检验H_0：$\mu = 1$，H_1：$\mu \neq 1$

如果$|\bar{x}-1|$足够小，可以认为H_0：$\mu = 1$为真

需要建立一个标准

衡量$|\bar{x}-1|$大小，可变为衡量$\left|\frac{\bar{x}-1}{4/\sqrt{3}}\right|$大小

选取k，当$\left|\frac{\bar{x}-1}{4/\sqrt{3}}\right| \geqslant k$，就拒绝$H_0$；当$\left|\frac{\bar{x}-1}{4/\sqrt{3}}\right| < k$，就接受$H_0$

令$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-1}{4/\sqrt{3}}\right| \geqslant k\right\} = \alpha$，这里的$\alpha$为显著水平，得$k = z_{\frac{\alpha}{2}}$

接受域$\left|\frac{\overline{X}-1}{4/\sqrt{3}}\right| < z_{\frac{\alpha}{2}} \Longleftrightarrow \overline{X} - \frac{4}{\sqrt{3}} z_{\frac{\alpha}{2}} < 1 < \overline{X} + \frac{4}{\sqrt{3}} z_{\frac{\alpha}{2}}$

得双侧置信区间$\left(\overline{X} - \frac{4}{\sqrt{3}} z_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X} + \frac{4}{\sqrt{3}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，$1-\alpha$为置信度

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本

情形一：σ^2为已知，$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$作为统计量

双边检验H_0：$\mu=\mu_0$，H_1：$\mu\neq\mu_0$

选取k，使得$\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geqslant k$，就拒绝$H_0$；$\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<k$，就接受$H_0$

令$P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geqslant k\right\}=\alpha$，这里的$\alpha$为显著水平，得$k=z_{\frac{\alpha}{2}}$

接受域$\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}\Longleftrightarrow\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}<\mu_0<\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$

得双侧置信区间$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}，\ \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，$1-\alpha$为置信度

情形二：σ^2为未知，$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$作为统计量

双边检验H_0：$\mu=\mu_0$，H_1：$\mu\neq\mu_0$

选取k，使得$\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geqslant k$，就拒绝$H_0$；$\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|<k$，就接受$H_0$

令$P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geqslant k\right\}=\alpha$，这里的$\alpha$为显著水平，得$k=t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

接受域$\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\Longleftrightarrow\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\mu_0<\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

得置信区间$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)，\ \overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$，$1-\alpha$为置信度

情形一：σ^2为已知，$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$作为统计量

单边检验H_0：$\mu\leqslant\mu_0$，H_1：$\mu>\mu_0$

选取k，使得$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geqslant k$，就拒绝$H_0$；$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<k$，就接受$H_0$

令$P\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geqslant k\right\}=\alpha$，这里的$\alpha$为显著水平，得$k=z_\alpha$

接受域$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<z_\alpha\Longleftrightarrow\overline{X}-z_\alpha\sigma/\sqrt{n}<\mu_0$

得单侧置信区间$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}，\ +\infty\right)$

情形二：σ^2 为已知，$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$作为统计量

单边检验H_0：$\mu \leqslant \mu_0$，H_1：$\mu > \mu_0$

选取k，使得$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \geqslant k$，就拒绝$H_0$；$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < k$，就接受$H_0$

令$P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \geqslant k\right\}=\alpha$，这里的$\alpha$为显著水平，得$k=t_\alpha(n-1)$

接受域$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1) \Longleftrightarrow \overline{X}-t_\alpha(n-1)S/\sqrt{n} < \mu_0$

得单侧置信区间$\left(\overline{X}-t_\alpha(n-1)S/\sqrt{n},\ +\infty\right)$

两类错误

第一类错误：H_0为真，拒绝H_0（犯第一类错误的概率就是在拒绝域的概率）（弃真）

第二类错误：H_0为假，接受H_0（犯第二类错误的概率就是不在拒绝域的概率）（取伪）

超越卷九

(10) 设总体 $X \sim N(\mu,1)$，$X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 检验假设 $H_0:\mu \leqslant 0$，$H_1:\mu > 0$，取拒绝域 $W=\{\overline{X} \geqslant c\}$，其中 $\overline{X}$ 为样本均值，那么对固定的样本容量 n，当 $\mu = 1$ 时，犯第二类错误的概率 β(　　).

(A) 随 c 的增大而减少　　(B) 随 c 的增大而增大

(C) 随 c 的增大而保持不变　　(D) 无法判定

答案　选(B).

解　当 $\mu=1$ 时，总体 $X \sim N(1,1)$，此时 $\overline{X} \sim N\left(1,\frac{1}{n}\right)$，即$\sqrt{n}(\overline{X}-1) \sim N(0,1)$. 故

$$\beta = P\{\overline{X} < c\} = P\{\sqrt{n}(\overline{X}-1) < \sqrt{n}(c-1)\} = \Phi(\sqrt{n}(c-1)).$$

对于固定的 n，Φ 关于 c 单增，即 β 关于 c 单增，故选(B).

超越卷一

(10) 设 $\overline{X}$ 为来自总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$(σ^2 已知) 的一个容量为 n 的简单随机样本的样本均值，若已知在置信水平 $1-2\alpha$ 下 μ 的置信区间的长度为 2，则在显著性水平 α 下，对于假设检验问题 $H_0:\mu \geqslant 1$，$H_1:\mu < 1$，若检验结果拒绝 H_0，则应有(　　).

(A)$\bar{x} \in (-\infty,1)$　(B)$\bar{x} \in (-\infty,-1)$　(C)$\bar{x} \in (-\infty,0)$　(D)$\bar{x} \in (0,+\infty)$

情形一：σ^2 为已知，$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$作为统计量

得双侧置信区间$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，$1-\alpha$为置信度

答案 选(C).

解 因为σ^2已知,即$2U_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2$,即$U_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1$.故在显著性水平$\alpha$下,对于假设检验问题$H_0$:$\mu\geqslant 1$,$H_1$:$\mu<1$,的拒绝域为$\frac{\overline{X}-1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<-U_\alpha$,即

$(\bar{x}-1,\bar{x}+1)$ $(3+\infty)$

$$\overline{X}\in\left(-\infty,1-U_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(-\infty,0).$$ 故选(C).

余炳森卷三

10. 设总体$X\sim N(\mu,1)$.数$U_\alpha(0<\alpha<1)$为标准正态分布的上侧α分位点,则μ的置信度分别为90%和95%的置信区间长度之比为(　　).

A. $\frac{0.90}{0.95}$　　B. $\frac{0.95}{0.975}$　　C. $\frac{U_{0.10}}{U_{0.05}}$　　D. $\frac{U_{0.05}}{U_{0.025}}$

10.【答案】D

【解析】设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体X的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值,则μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\overline{X}\pm U_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,其长度为$2U_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n}}$.置信度为90%时$\alpha=0.10$,置信度为95%时$\alpha=0.05$,所以$\mu$的置信度分别为90%和95%的置信区间长度之比为

$$\frac{2U_{0.05}\frac{1}{\sqrt{n}}}{2U_{0.025}\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{U_{0.05}}{U_{0.025}}.$$

李永乐三套卷卷一

10. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,σ^2未知,$x_1,x_2,\cdots,x_n$为来自总体X的样本观测值,现对μ进行假设检验,若在显著水平$\alpha=0.05$下拒绝了$H_0:\mu=\mu_0$,则当显著水平改为$\alpha=0.01$时,下列说法正确的是

A. 必接受H_0.　　B. 必拒绝H_0.

C. 犯第一类错误的概率必变大.　　D. 可能接受,也可能拒绝H_0.

10.【答案】 D

【解析】 此时的拒绝域为

$$\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \geqslant t_{\alpha/2}(n-1),$$

其中 $t_{\alpha/2}(n-1)$ 表示 t 分布的上 $\alpha/2$ 分位数. 由于 $t_{0.005}(n-1) > t_{0.025}(n-1)$. 故选 D.