第二章导数与微分

习题二

2.1

1．设物体绕定轴旋转，在时间间隔$[0,t]$上转过角度θ，从而转角θ是时间t的函数$\theta=\theta(t)$. 如果旋转是匀速的，那么称$\omega=\dfrac{\theta}{t}$为该物体旋转的角速度. 如果旋转是非匀速的，应怎样定义该物体在时刻t_0的角速度？

解 物体在时间区间$[t_0,t_0+\Delta t]$内的平均角速度为

$$\overline{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t}$$

在时刻t_0的角速度为

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\overline{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\theta'(t_0)$$

2．按导数定义，求下列函数的导数.

(1) 设$f(x)=10x^2$，求$f'(-1)$；

解 $f'(-1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10(-1+\Delta x)^2-10(-1)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-20+10\Delta x)=-20$$

(2) 设$f(x)=x^2\sin(x-2)$，求$f'(2)$；

解 $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(2+\Delta x)^2\sin\Delta x-0}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)^2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=2^2\cdot 1=4$$

(3) 设$f(x)=\ln(2x+1)$，求$f'(x)$.

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(2x+2\Delta x+1)-\ln(2x+1)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2\Delta x}{2x+1}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2\Delta x}{2x+1}}{\Delta x}=\frac{2}{2x+1}$$

3. 若 $f'(a)$存在，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(a)-f\left(a+\frac{1}{n}\right)\right]$；

解 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(a)-f\left(a+\frac{1}{n}\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}}=f'(a)$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-2h)}{h}$.

解

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right]=2f'(a)+f'(a)=3f'(a)$$

4. 如果 $f(x)$为偶函数，且 $f'(0)$存在，试证：$f'(0)=0$.

证 因为$f(x)$是偶函数，所以$f(-x)=f(x)$，又 $f'(0)$存在，由导数定义得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}=-f'(0)$$

所以 $f'(0)=0$.

5. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

(1) $f(x)=|\sin x|$；

解 因为

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}|\sin x|=0=f(0)$$

所以 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

又因为

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{|\sin x|-0}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sin x}{x}=1$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$；

解 因为

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又因为

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$.

(3) $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\arctan\frac{1}{x}=0=f(0)$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又因为

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{x\arctan\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x\arctan\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+2x), -\dfrac{1}{2}<x\le 1\\ ax+b, x>1\end{cases}$，为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，问 a 和 b 应取何值？

解 要使 $f'(1)$ 存在，必须使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，因为

$$f(1^-)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\ln(1+2x)=\ln 3$$

$$f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$$

$$f(1)=\ln 3$$

令 $f(1^-)=f(1^+)=f(1)$ 得 $\ln 3=a+b$，此时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

又因为

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1+2x)-\ln 3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{3}(x-1)\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{2}{3}(x-1)}{x-1}=\frac{2}{3}$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-\ln 3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=a$$

令 $f'_-(1)=f'_+(1)$ 得 $a=\dfrac{2}{3}$，故当 $a=\dfrac{2}{3}$，$b=\ln 3-\dfrac{2}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1)=\dfrac{2}{3}$.

7. 求曲线 $y=\cos x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.

解 因为

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\sin x\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以切线方程为

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

即

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x+y-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)=0$$

法线方程为

$$y-\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

即

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}x-y+\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi=0$$

8. 当 a 取何值时，曲线 $y=a^x$ 和直线 $y=x$ 相切，并求出切点的坐标.

解 因为

$$y'=\left(a^x\right)'=a^x\ln a,\quad y'=(x)'=1$$

而曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=x$ 相切，所以

$$\begin{cases}a^x=x\\ a^x\ln a=1\end{cases}$$

解得 $x=\mathrm{e},a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$，故当 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=x$ 相切，切点坐标为 (e,e).

9. 求双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与抛物线 $y=\sqrt{x}$ 的交角.

解 曲线 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=\sqrt{x}$ 的交点坐标为 $(1,1)$.

因为

$$y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2},\quad y'=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

所以曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $(1,1)$ 处切线的斜率为

$$k_1 = y'\big|_{x=1} = -\frac{1}{x^2}\big|_{x=1} = -1$$

曲线 $y=\sqrt{x}$ 在点 $(1,1)$ 处切线的斜率为

$$k_2 = y'\big|_{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\big|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

设两条切线的倾角分别为 φ，θ，则 $\tan\varphi=-1, \tan\theta=\frac{1}{2}$，所以

$$\tan(\theta-\varphi) = \frac{\tan\theta\tan\varphi}{1+\tan\theta\tan\varphi} = \frac{\frac{1}{2}-(-1)}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

故两曲线的交角为 $\theta-\varphi=\arctan 3$.

2.2

1. 求下列函数的导数.

(1) $y = x^3 + \frac{7}{x^4} - \frac{2}{x} + 12$;

解 $y' = 3x^2 + 7\cdot(-4)\cdot x^{-5} - 2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2 - \frac{28}{x^5} + \frac{2}{x^2}$

(2) $y = 2\lg x - 3\arctan x$;

解 $y' = 2\cdot\frac{1}{x\ln 10} - 3\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{\ln 10}\cdot\frac{1}{x} - \frac{3}{1+x^2}$

(3) $y = 2^x\tan x + \sec x$;

解 $y' = (2^x\ln 2)\tan x + 2^x\sec^2 x + \sec x\tan x = 2^x(\ln 2\tan x + \sec^2 x) + \sec x\tan x$

(4) $y = x^2\ln x\cos x$;

解

$$y' = (2x)\ln x\cos x + x^2\cdot\frac{1}{x}\cos x + x^2\ln x(-\sin x) = 2x\ln x\cos x + x\cos x - x^2\ln x\sin x$$

(5) $y=\dfrac{e^x}{x^2}+\ln 3$.

解 $y'=\dfrac{e^x x^2-e^x\cdot(2x)}{\left(x^2\right)^2}+0=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$

2. 矩形的长为$x(t)$，宽为$y(t)$，都是时间t的可导函数，求矩形面积$S(t)$的变化速度.

解 因为$S(t)=x(t)y(t)$，所以$S(t)$的变化率为

$$S'(t)=x'(t)y(t)+x(t)y'(t)$$

3. 设$x=g(y)$与$y=f(x)$互为反函数，$g(2)=1$，且$f'(1)=3$，求$g'(2)$.

解 $g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{3}$

4. 求下列函数的导数.

(1) $y=e^{\sin 3x}$；

解 $y'=e^{\sin 3x}\cdot\cos 3x\cdot 3=3e^{\sin 3x}\cos 3x$

(2) $y=\sin\cos\dfrac{1}{x}$；

解 $y'=\cos\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\cos\cos\dfrac{1}{x}$

(3) $y=\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^2$；

解

$$y'=2\arcsin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$$

(4) $y=\log_2\log_3\log_5 x$；

解 $y'=\dfrac{1}{(\log_3\log_5 x)\ln 2}\cdot\dfrac{1}{\log_5 x\ln 3}\cdot\dfrac{1}{x\ln 5}=\dfrac{1}{\ln 2\ln 3\ln 5}\dfrac{1}{x(\log_3 x)(\log_3\log_5 x)}$

(5) $y=\ln(\csc x-\cot x)$；

解 $$y'=\frac{1}{\csc x-\cot x}\left[-\csc x\cot x-\left(-\csc^2 x\right)\right]=\csc x$$

(6) $y = x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$ ；

解 $$y'=\arcsin\frac{x}{2}+x\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)$$

$$=\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}$$

(7) $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$；

解 $$y'=\frac{(2\sin x\cos x)\sin x^2-\sin^2 x\left(\cos x^2\cdot 2x\right)}{\sin^2 x^2}=\frac{2\sin x\left(\cos x\sin x^2-x\sin x\cos x^2\right)}{\sin^2 x^2}$$

(8) $y=\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)$；

解 $$y'=\frac{1}{x+\sqrt{4+x^2}}\cdot\left[1+\frac{1}{2\sqrt{4+x^2}}\cdot(2x)\right]=\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$$

(9) $y=a^{b^x}+x^{a^b}+b^{x^a}\left(x,a,b>0,a,b\text{为常数}\right)$；

解 $$y'=\left(a^{b^x}\cdot\ln a\right)\left(b^x\ln b\right)+a^b x^{a^b-1}+\left(b^{x^a}\cdot\ln b\right)\left(ax^{a-1}\right)$$
$$=a^{b^x}b^x\ln a\ln b+a^b x^{a^b-1}+(a\ln b)x^{a-1}b^{x^a}$$

(10) $y=\begin{cases}1-x, x\le 0\\ \mathrm{e}^{-x}\cos 3x, x>0\end{cases}$.

解 当 $x<0$ 时，有

$$y'=(1-y)'=-1$$

当 $x>0$ 时，有

$$y'=\left(\mathrm{e}^{-x}\cos 3x\right)'=\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\cos 3x+\mathrm{e}^{-x}(-\sin 3x\cdot 3)=-\mathrm{e}^{-x}(\cos 3x+3\sin 3x)$$

当 $x=0$ 时，因为

$$y'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(1-x)-1}{x}=-1$$

$$y'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos 3x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\cos 3x-1}{x}-\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}\right]\mathrm{e}^{-x}=(0-1)\cdot 1=-1$$

所以 $y'(0)=-1$，故

$$y'=\begin{cases}-1, x\le 0\\ -\mathrm{e}^{-x}(\cos 3x+3\sin 3x), x>0\end{cases}$$

5. 若 $f(x)=\sin x$，求 $f'(a),[f(a)]',f'(2x),[f(2x)]',f'(f(x))$ 和 $[f(f(x))]'$.

解

$f'(a)=\cos a,\quad [f(a)]'=(\sin a)'=0,\quad f'(2x)=\cos 2x,\quad [f(2x)]'=\cos 2x\cdot 2=2\cos 2x,$

$f'(f(x))=\cos f(x)=\cos\sin x,\quad [f(f(x))]'=f'(f(x))f'(x)=\cos\sin x\cdot\cos x$

6. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均可导，且下列函数有定义，求它们的导数.

(1) $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ $\left(f^2(x)+g^2(x)\neq 0\right)$；

解

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot[2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)]=\frac{1}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot[f(x)f'(x)+g(x)g'(x)]$$

(2) $y=f(\sin^2 x)+g(\cos^2 x)$.

解

$$y'=f'(\sin^2 x)(2\sin x\cos x)+g'(\cos^2 x)[2\cos x(-\sin x)]=[f'(\sin^2 x)-g'(\cos^2 x)]\sin 2x$$

7. 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right),f'(x)=\arctan x^2$，求 $y'|_{x=0}$.

解 $y'=f'\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\dfrac{3(3x+2)-(3x-2)\cdot 3}{(3x+2)^2}=\dfrac{12}{(3x+2)^2}\arctan\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^2$

令 $x = 0$ 得

$$y'|_{x=0}=3\arctan 1=3\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

2.3

1.求下列函数的二阶导数.

(1) $y=2x^2+\ln x$；

解 $y'=4x+\dfrac{1}{x},\quad y''=4-\dfrac{1}{x^2}$

(2) $y=\ln\left(1-x^2\right)$；

解 $y'=\dfrac{1}{1-x^2}\cdot(-2x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$

$$y''=\frac{2\left(x^2-1\right)-(2x)\cdot(2x)}{\left(x^2-1\right)^2}=-\frac{2\left(1+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$$

(3) $y=\dfrac{e^x}{x}$；

解 $y'=\dfrac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

$$y''=\frac{\left[e^x+(x-1)e^x\right]x^2-(x-1)e^x\cdot(2x)}{\left(x^2\right)^2}=\frac{e^x\left(x^2-2x+2\right)}{x^3}$$

(4) $y=\sin f\left(x^2\right)$ （$f''(x)$存在）.

解 $y'=\cos f\left(x^2\right)\cdot f'\left(x^2\right)\cdot(2x)$

$$y''=\left[-\sin f\left(x^2\right)\cdot f'\left(x^2\right)\cdot(2x)\right]\left[f'\left(x^2\right)\cdot(2x)\right]+\cos f\left(x^2\right)\cdot\left[f''\left(x^2\right)\cdot(2x)\right](2x)+\cos f\left(x^2\right)f'\left(x^2\right)\cdot 2$$
$$=-4x^2\left(f'\left(x^2\right)\right)^2\sin f\left(x^2\right)+4x^2 f''\left(x^2\right)\cos f\left(x^2\right)+2f''\left(x^2\right)\cos f\left(x^2\right)$$

2.试从 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$ 导出 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

解 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{y'}\right)=-\dfrac{1}{(y')^2}\cdot y''\cdot\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{1}{(y')^2}\cdot y''\cdot\dfrac{1}{y'}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$

3.密度大的陨星进入大气层时，当它离地心为 s km时的速度与 $\sqrt{s}$ 成反比，试证：陨星的加速度与 s^2 成反比.

证　由题设得

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{\sqrt{s}}\quad（k\text{为比例系数}）$$

所以

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{k}{\sqrt{s}}\right)=k\left(-\frac{1}{2}\right)s^{-\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{k}{\sqrt{s}}\right)=-\frac{k^2}{2s^2}$$

可知陨星的加速度与s^2成反比.

4. 设$P(x)=x^5-2x^4+3x-2$，将$P(x)$化为$(x-1)$的幂的多项式.

解　设

$$P(x)=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3+a_4(x-1)^4+a_5(x-1)^5$$

则

$$P'(x)=a_1+2a_2(x-1)+3a_3(x-1)^2+4a_4(x-1)^3+5a_5(x-1)^4$$

$$P''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-1)+4\cdot 3a_4(x-1)^2+5\cdot 4a_5(x-1)^3$$

$$P'''(x)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4(x-1)+5\cdot 4\cdot 3a_5(x-1)^2$$

$$P^{(4)}(x)=4\cdot 3\cdot 2a_4+5\cdot 4\cdot 3\cdot 2a_5(x-1)$$

$$P^{(5)}(x)=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2a_5$$

令$x=1$得

$$a_0=P(1)=0,\ a_1=P'(1)=0,\quad a_2=\frac{P''(1)}{2}=-2,$$
$$a_3=\frac{P'''(1)}{3!}=2,\quad a_4=\frac{P^{(4)}(1)}{4!}=3,\ a_5=\frac{P^{(5)}(1)}{5!}=1$$

所以

$$P(x)=-2(x-1)^2+2(x-1)^3+3(x-1)^4+(x-1)^5$$

5. 求下列函数的n阶导数.

(1)　$y=\sin^2 x$；

解 $y=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

求 n 阶导得

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{(n)}-\frac{1}{2}(\cos 2x)^{(n)}=0-\frac{1}{2}\cdot 2^n\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)=-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

(2) $y=\dfrac{x^2}{x^2-x-2}$.

解 $y=1+\dfrac{x+2}{x^2-x-2}=1+\dfrac{\frac{4}{3}}{x-2}-\dfrac{\frac{1}{3}}{x+1}$

求 n 阶导得

$$y^{(n)}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{4}{3}\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{3}\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}=(-1)^n n!\left[\frac{4}{3}\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

6. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$ $(n\geq 3)$.

解 因为

$$[\ln(1+x)]^{(k)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$$

所以

$$\begin{aligned}
&f^{(n)}(x)=\left[\ln(1+x)\cdot x^2\right]^{(n)}\\
&=[\ln(1+x)]^{(n)}\cdot x^2+n[\ln(1+x)]^{(n-1)}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}[\ln(1+x)]^{(n-2)}\cdot 2\\
&=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\cdot x^2+n\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}\cdot(2x)+\frac{n(n-1)}{2}\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}\cdot 2 \quad (n\geq 3)
\end{aligned}$$

令 $x=0$ 得

$$f^{(n)}(0)=\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-3}(n-3)!\cdot 2=\frac{(-1)^{n-3}n!}{n-2} \quad (n\geq 3)$$

2.4

1. 求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1) $y^2-2xy+9=0$；

解 方程关于 x 求导得

$$2yy'-2y-2xy'=0$$

解得

$$y'=\frac{y}{y-x}$$

(2) $\arctan\frac{y}{x}=\sqrt{x^2+y^2}$.

解 方程关于 x 求导得

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x+2yy')$$

解得

$$y'=\frac{x+y}{x-y}$$

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程.

解 方程关于 x 求导得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$$

解得

$$y'=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处，有

$$y'\Big|_{\substack{x=\frac{\sqrt{2}}{4}a\\ y=\frac{\sqrt{2}}{4}a}}=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\Bigg|_{\substack{x=\frac{\sqrt{2}}{4}a\\ y=\frac{\sqrt{2}}{4}a}}=-1$$

所以切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=(-1)\cdot\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$$

即

$$x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

法线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=1\cdot\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$$

即

$$y=x$$

3. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$；

解 方程关于 x 求导得

$$b^2\cdot(2x)+a^2\cdot(2yy')=0$$

解得

$$y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

求二阶导得

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x}{y}\right)' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{y - x\left(-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$= -\frac{b^2\left(a^2y^2 + b^2x^2\right)}{a^4y^3} = -\frac{b^2\left(a^2 \cdot b^2\right)}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

(2) $y = 1 + xe^y$.

解 方程关于 x 求导得

$$y' = e^y + xe^y y'$$

解得

$$y' = \frac{e^y}{1 - xe^y} = \frac{e^y}{2 - y}$$

求二阶导得

$$y'' = \left[\frac{e^y}{2 - y}\right]' = \frac{e^y y' \cdot (2 - y) - e^y(-y')}{(2 - y)^2} = \frac{e^y(3 - y)y'}{(2 - y)^2} = \frac{e^y(3 - y)\frac{e^y}{2 - y}}{(2 - y)^2} = \frac{e^{2y}(3 - y)}{(2 - y)^3}$$

4. 求下列函数的导函数或指定点处的导数.

(1) $y = (\sin x)^{\cos x}(0 < x < \pi)$;

解 取对数得

$$\ln y = \cos x \ln \sin x$$

上式关于 x 求导得

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (-\sin x)\ln \sin x + \cos x \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

解得

$$y' = (\sin x)^{\cos x}\left[-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right]$$

(2) $y=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$， 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}$；

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left[\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}\right]'=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}\right]'=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}\frac{\frac{2x}{1+x^2}\cdot x-\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}$$

令 $x=1$ 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}\frac{\frac{2x^2}{1+x^2}\cdot x-\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\Big|_{x=1}=2\cdot\frac{1-\ln 2}{1}=2\left(1-\ln 2\right)$$

(3) $y=\sqrt{\frac{x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}}$；

解 取对数得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\ln\left|x^2-1\right|$$

上式关于 x 求导得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\cdot(2x)-\frac{1}{x^2-1}\cdot(2x)$$

解得

$$y'=\sqrt{\frac{x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}}\left(\frac{1}{2x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1}\right)$$

(4) $x^y+y^x=3$， 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}$．

解 方程关于 x 求导得

$$x^y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[y\ln x]+y^x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x\ln y]=0$$

$$x^y\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\ln x+y\cdot\frac{1}{x}\right]+y^x\left[\ln y+x\frac{1}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]=0$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x^{y-1}y+y^x\ln y}{y^{x-1}x+x^y\ln x}$$

在 $x^y+y^x=3$ 中，令 $x=1$ 得 $y=2$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=-\frac{x^{y-1}y+y^x\ln y}{y^{x-1}x+x^y\ln x}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=-2(1+\ln 2)$$

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1) $\begin{cases} x=t^3+1 \\ y=t^2 \end{cases}$；

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2t}{3t^2}=\frac{2}{3}\frac{1}{t}$$

(2) $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=\frac{t}{2}$$

6. 设 $x=f(t)-\pi, y=f\left(\mathrm{e}^{3t}-1\right)$，其中 f 可导，且 $f'(0)\neq 0$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{f'\left(\mathrm{e}^{3t}-1\right)\cdot\left(3\mathrm{e}^{3t}\right)}{f'(t)}$$

令 $t=0$ 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=\frac{f'\left(\mathrm{e}^{3t}-1\right)\cdot\left(3\mathrm{e}^{3t}\right)}{f'(t)}\Big|_{t=0}=\frac{f'(0)\cdot 3}{f'(0)}=3$$

7. 求曲线 $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^2} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$ 在 $t=2$ 时相应点处的切线方程和法线方程.

解
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{3a\frac{2t\left(1+t^2\right)-t^2\cdot(2t)}{\left(1+t^2\right)^2}}{3a\frac{1\cdot\left(1+t^2\right)-t\cdot(2t)}{\left(1+t^2\right)^2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

当$t=2$时，$(x,y)=\left(\frac{6}{5}a,\frac{12}{5}a\right)$，且$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=2}=-\frac{4}{3}$，所以切线方程为

$$y-\frac{12}{5}a=-\frac{4}{3}\cdot\left(x-\frac{6}{5}a\right)$$

即

$$4x+3y-12a=0$$

法线方程为

$$y-\frac{12}{5}a=\frac{3}{4}\left(x-\frac{6}{5}a\right)$$

即

$$3x-4y+6a=0$$

8. 求对数螺线$r=e^{\theta}$在$(r,\theta)=\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$处的切线的直角坐标方程.

解 利用$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$将$r=\mathrm{e}^{\theta}$写成参数形式

$$\begin{cases}x=\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta\\y=\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta\end{cases}$$

求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta+\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta}{\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta+\mathrm{e}^{\theta}(-\sin\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$(x,y)=\left(0,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right)$，且$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$，所以切线方程为

$$y-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}=-1\cdot(x-0)$$

即

$$y=-x+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$$

9. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) $\begin{cases} x=3\mathrm{e}^{-t} \\ y=2\mathrm{e}^{t} \end{cases}$;

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2\mathrm{e}^{t}}{-3\mathrm{e}^{-t}}=-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t}\cdot 2}{-3\mathrm{e}^{-t}}=\frac{4}{9}\mathrm{e}^{3t}$$

(2) $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$ （$f''(t)$存在且不为零.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{f''(t)}$$

10. 溶液自深 $18\mathrm{cm}$ 顶直径 $12\mathrm{cm}$ 的正圆锥形漏斗中漏入一直径 $10\mathrm{cm}$ 为的圆柱形筒中，开始时漏斗中盛满了溶液，已知当溶液在漏斗中深为 $12\mathrm{cm}$ 时，其表面下降的速率为 $1\mathrm{cm/min}$. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少？

解 设 t 时刻漏斗中溶液深为 $h=h(t)$，液面圆半径为 $r=r(t)$，圆柱形筒中溶液深为 $H=H(t)$，则 h 和 H 满足关系

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h+\pi\cdot 5^2\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 6^2\cdot 18$$

因为 $r=\frac{1}{3}h$ ，所以

$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 h+\pi\cdot 5^2\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 6^2\cdot 18$$

即

$$\frac{1}{27}h^3+25H=216$$

上式关于时间 t 求导得

$$\frac{1}{9}h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+25\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{9\times 25}h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

当 $h=12$，$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-1$ 时，圆柱形筒中液面上升速率为

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\Big|_{h=12}=-\frac{1}{9\times 25}\cdot 12^2\cdot(-1)=0.64\mathrm{cm/min}$$

2.5

1. 已知 $y=x^3-x$ ，计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 $1, 0.1, 0.01$ 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$.

解 $\Delta y=\left[(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)\right]-(x^3-x)=(3x^2-1)\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$

所以

$$\mathrm{d}y=(3x^2-1)\Delta x$$

当 $x=2$，$\Delta x=1$ 时，有

$$\Delta y=(3\times 2^2-1)\times 1+3\times 2\times 1^2+1^3=18$$

$$\mathrm{d}y=(3\times 2^2-1)\times 1=11$$

当 $x=2$，$\Delta x=0.1$ 时，有

$$\Delta y=\left(3\times 2^2-1\right)\times 0.1+3\times 2\times(0.1)^2+(0.1)^3=1.161$$

$$\mathrm{d}y=\left(3\times 2^2-1\right)\times 0.1=1.1$$

当 $x=2$，$\Delta x=0.01$ 时，有

$$\Delta y=\left(3\times 2^2-1\right)\times 0.01+3\times 2\times(0.01)^2+(0.01)^3=0.110601$$

$$\mathrm{d}y=\left(3\times 2^2-1\right)\times 0.01=0.11$$

2. 求下列函数的微分.

(1) $y=x\ln x-x$；

解 $$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x=\ln x\mathrm{d}x$$

(2) $y=\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$；

解

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)+\mathrm{e}^{-x}(-\sin(3-x))\cdot(-1)\right]\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x}\left[\sin(3-x)-\cos(3-x)\right]\mathrm{d}x$$

(3) $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}$；

解 方程关于 x 求导得

$$y'=\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}\left[-\frac{y-xy'}{y^2}\right]=y\left[-\frac{y-xy'}{y^2}\right]$$

解得

$$y'=\frac{y}{x-y}$$

所以

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\frac{y}{x-y}\mathrm{d}x$$

(4) $y=\arctan\dfrac{u(x)}{v(x)}$ （u',v' 存在）.

解

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)^2}\cdot\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\mathrm{d}x = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{u^2(x)+v^2(x)}\mathrm{d}x$$

3. 将适当的函数填入括号内，使下列各式成为等式.

(1) $\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\ln|x| + C)$

(2) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\arcsin\ x + C)$

(3) $\sec^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x + C)$

(4) $\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + C\right)$

(5) $x^2\mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x^3}\right)\mathrm{d}(-x^3)$

(6) $\mathrm{d}(\sin\sqrt{\cos x}) = \frac{\cos\sqrt{\cos x}}{2\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}(\cos x)$

4. 若 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$，则当 $\Delta x \to 0$ 时，$f(x)$ 在点 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是 Δx 的（C）.

（A）高阶无穷小

（B）低阶无穷小

（C）同阶但不等价无穷小

（D）等价无穷小

解 因为

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{2}\Delta x$$

所以 $\mathrm{d}y$ 是 Δx 的同阶但不等价无穷小，故选（C）.

总习题二

1. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)\ (n\geq 2)$，求 $f'(0)$.

解
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}[(x+1)(x+2)\cdots(x+n)]=1\times 2\times\cdots\times n=n!$$

2. 求下列函数 $f(x)$ 的 $f'_-(0)$ 及 $f'_+(0)$，又 $f'(0)$ 是否存在？

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, x<0\\ \ln(1+x), x\geq 0\end{cases}$；

解 因为
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-0}{x}=1$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-0}{x}=1$$

所以 $f'_-(0)$, $f'_+(0)$ 都存在，且 $f'_-(0)=f'_+(0)$，故 $f'(0)$ 存在，且
$$f'(0)=f'_-(0)=f'_+(0)=1$$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$；

解 因为
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1+0}=1$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=0$$

所以 $f'_-(0)$ 和 $f'_+(0)$ 都存在，但 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，故 $f'(0)$ 不存在.

2. n 在什么条件下，函数 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处：(1) 连续；

(2) 可导；(3) 导数连续.

解 (1) 因为

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^n \sin\frac{1}{x} = \begin{cases} 0 = f(0), n > 0 \\ \text{不存在，} n \le 0 \end{cases}$$

所以当 $n>0$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 因为

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n \sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1}\sin\frac{1}{x} = \begin{cases} 0, n > 1 \\ \text{不存在，} n \le 1 \end{cases}$$

所以当 $n>1$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$

(3) 当 $x \neq 0$ 时，有

$$f'(x) = nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} - x^{n-2}\cos\frac{1}{x}$$

因为

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} - x^{n-2}\cos\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} 0 = f'(0), n > 2 \\ \text{不存在，} n \le 2 \end{cases}$$

所以当 $n>2$ 时，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

4. 设 $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，且 $f'(0)=1$，求 $f'(x)$.

解 令 $x=y=0$ 得 $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1-f^2(0)}$，解得 $f(0)=0$.

由导数定义得

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)f(\Delta x)} - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+f^2(x))f(\Delta x)}{(1-f(x)f(\Delta x))\Delta x} = (1+f^2(x))\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{1-f(x)f(\Delta x)}$$

$$= (1+f^2(x))f'(0)\cdot\frac{1}{1-0} = 1+f^2(x)$$

5. 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件为（B）

（A） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$存在

（B） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{2h}f\left(1-\mathrm{e}^h\right)$存在

（C） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(\tan h-\sin h)$存在

（D） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(h)-f(-h)]$存在

解 因为

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}f\left(1-\mathrm{e}^h\right)&=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1-\mathrm{e}^h\right)-f(0)}{1-\mathrm{e}^h}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^h}{2h}\\&=-\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1-\mathrm{e}^h\right)-f(0)}{1-\mathrm{e}^h}\overset{t=1-\mathrm{e}^h}{=}-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\end{aligned}$$

所以（B）成立的充要条件是$f'(0)$存在，故选（B）.

6. 设$y=y(x)$由$\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0\end{cases}$确定，求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}$.

解 第一式关于t求导得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t+2$$

第二式关于t求导得

$$\left(\mathrm{e}^y\frac{dy}{dt}\right)\sin t+\mathrm{e}^y\cos t-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{1-\mathrm{e}^y\sin t}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{1-\mathrm{e}^y\sin t}}{6t+2}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(6t+2)\left(1-\mathrm{e}^y\sin t\right)}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(6t+2)(2-y)}$$

求二阶导得

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\frac{\left[e^y\frac{dy}{dt}\cos t+e^y(-\sin t)\right](6t+2)(2-y)-e^y\cos t\left[(2-y)+(6t+2)\left(-\frac{dy}{dt}\right)\right]}{[(6t+2)(2-y)]^2}}{6t+2}$$

令 $t=0$ 得 $y=1$， $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=e$，代入上式得

$$\frac{d^2 y}{dx^2}\Big|_{t=0}=\frac{e(2e-3)}{4}$$

7. 设 $u=f\left(\varphi(x)+y^2\right)$，其中 $y=y(x)$ 由方程 $y+e^y=x$ 确定，且 f,φ 均有二阶导数，求 $\frac{du}{dx}$ 和 $\frac{d^2u}{dx^2}$.

解 方程 $y+e^y=x$ 关于 x 求导得

$$\frac{dy}{dx}+e^y\frac{dy}{dx}=1$$

解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+e^y}$$

求二阶导得

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^y}\right)=-\frac{1}{\left(1+e^y\right)^2}\cdot e^y\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\left(1+e^y\right)^2}\cdot e^y\cdot\frac{1}{1+e^y}=-\frac{1}{\left(1+e^y\right)^3}$$

于是

$$\frac{du}{dx}=f'\left(\varphi(x)+y^2\right)\cdot\left(\varphi'(x)+2y\frac{dy}{dx}\right)=f'\left(\varphi(x)+y^2\right)\cdot\left[\varphi'(x)+2y\left(\frac{1}{1+e^y}\right)\right]$$

$$=f'\left(\varphi(x)+y^2\right)\cdot\left[\varphi'(x)+\frac{2y}{1+e^y}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f'\left(\varphi(x)+y^2\right)\cdot\left(\varphi'(x)+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right]$$

$$=\left[f''\left(\varphi(x)+y^2\right)\left(\varphi'(x)+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right]\left(\varphi'(x)+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+f'\left(\varphi(x)+y^2\right)\left[\varphi''(x)+2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+2y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right]$$

$$=f''\left(\varphi(x)+y^2\right)\cdot\left[\varphi'(x)+2y\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^y}\right)\right]^2+f'\left(\varphi(x)+y^2\right)\left[\varphi''(x)+2\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^y}\right)^2+2y\left(-\frac{\mathrm{e}^y}{\left(1+\mathrm{e}^y\right)^3}\right)\right]$$

$$=f''\left(\varphi(x)+y^2\right)\left[\varphi'(x)+\frac{2y}{\left(1+\mathrm{e}^y\right)^2}\right]+f'\left(\varphi(x)+y^2\right)\left[\varphi''(x)+\frac{2}{\left(1+\mathrm{e}^y\right)^2}-\frac{2y\mathrm{e}^y}{\left(1+\mathrm{e}^y\right)^3}\right]$$

8. 设 $y=y(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有二阶导，且满足 $\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a^2y=0$，作变换 $x=\sin t$，证明：这时 y 满足 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+a^2y=0$．

证 因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\cos t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\cos t}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$=\left[\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{1}{\cos t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\left(-\frac{1}{\cos^2t}\right)(-\sin t)\right]\cdot\frac{1}{\cos t}=\frac{1}{\cos^2t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\sin t}{\cos^3t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$0=\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a^2y$$

$$=\left(1-\sin^2t\right)\left[\frac{1}{\cos^2t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\sin t}{\cos^3t}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]-\sin t\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\cos t}+a^2y$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\sin t}{\cos t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\frac{\sin t}{\cos t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a^2y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+a^2y$$

故

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+a^2y=0$$

9. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\varphi(\sin x)+\sin\varphi(y)=\varphi(x+y)$ 所确定，其中 φ 可导，求 $\mathrm{d}y$.

解 方程关于 x 求导得

$$\varphi'(\sin x)\cos x+\cos\varphi(y)\cdot\varphi'(y)\cdot y'=\varphi'(x+y)(1+y')$$

解得

$$y'=\frac{\varphi'(x+y)-\varphi'(\sin x)\cos x}{\varphi'(y)\cos\varphi(y)-\varphi'(x+y)}$$

所以

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\frac{\varphi'(x+y)-\varphi'(\sin x)\cos x}{\varphi'(y)\cos\varphi(y)-\varphi'(x+y)}\mathrm{d}x$$

10. 设 $f(u)$ 可导，函数 $y=f(x^2)$ 在 $x=-1$ 处取增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，求 $f'(1)$.

解 因为

$$\mathrm{d}y=y'\Delta x=2xf'(x^2)\Delta x$$

已知当 $x=-1$，$\Delta x=-0.1$ 时，$\mathrm{d}y=0.1$，所以有

$$0.1=2\cdot(-1)f'(1)\cdot(-0.1)$$

解得 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

11. 水流入半径为 $10\mathrm{m}$ 的半球形蓄水池，求水深 $h=5\mathrm{m}$ 时，水的体积 V 对深度的变化率. 如果注水速度是 $5\sqrt{3}\,\mathrm{m}^3/\min$，问 $h=5\mathrm{m}$ 时水面半径的变化速度是多少？（球缺体积 $V=\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)$）

解 因为

$$V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=\pi Rh^2-\frac{\pi}{3}h^3$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}=2\pi Rh-\pi h^2$$

当 $h=5$ 时，体积 V 对深度 h 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}\Big|_{h=5}=20\cdot\pi\cdot h-\pi\cdot 5^2=75\pi\ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}$$

又

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\left(20\pi h-\pi h^2\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}}{20\pi h-\pi h^2}$$

设水面圆半径为 r，则

$$r^2=10^2-(10-h)^2=20h-h^2$$

上式关于时间 t 求导得

$$2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=20\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}-2h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{10-h}{r}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{10-h}{\sqrt{20h-h^2}}\cdot\frac{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}}{20\pi h-\pi h^2}$$

当 $h=5$，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=5\sqrt{3}$ 时，水面半径的变化速度为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\Big|_{h=5}=\frac{10-5}{\sqrt{20\times 5-5^2}}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{20\pi\cdot 5-\pi\cdot 5^2}=\frac{1}{15\pi}\mathrm{m}/\mathrm{min}$$