

高数期末考答案

author: 潜伏

thanks to: 学术讨论群全体, 24 小登对答案群全体

答案速查

A	B	C	C	A	-2	$y = x + 1$	4048	0	0
---	---	---	---	---	----	-------------	------	---	---

一. 单选题

- 1 A 对于 A 选项求左右极限即可, 都是 0, 其他选项左右极限均为相反数
2 B b_n , 说明 c_n 单减, 所以 a_n 单减, $0 \leq a_n \leq a_1$, 所以 a_n 收敛
定理: 单调有界数列必收敛
3 C 简单的代换, 不做赘述
4 C $y'' = f(y, y')$, 直接代换即可. 而且就算你不会做也可以把选项带进去
5 A

以下极限符号省略: $\sum_{i=1}^n \frac{n^2+i}{n^3+i^3} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1+\frac{i}{n^2}}{1+(\frac{i}{n})^3} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{i}{n}}{1+(\frac{i}{n})^3} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx + \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx$, 因为 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx$ 有界, $\frac{1}{n}$ 为无穷小, 最后是 0, 选 A

二. 填空题

- 1 -2 tips: 注意分清拐点与驻点
2 $y = x + 1$ $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1$ $b = \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$
3 4048 第一个函数是奇函数, 请读者自证
4 0 连续问题转化为求极限问题, 洛必达加等价无穷小替换即可
5 0 $f(x) = -\sin(x)$ 分部积分即可, 不再赘述

三. 解答题

三: $a = b = 2$

思路: 先解出 $\int_0^{x^2} \cos(t^2) dt$ 同阶无穷小是 x^2 , 然后再对 $\sin(x)$ 和 $\ln(1+x)$ 进行泰勒展开到两阶即可

四. $\frac{17}{6}$

简单的积分, 不做赘述

五. $\frac{3}{2}a$

参数方程求弧长, 直接套公式即可, $C = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$, 此时注意第一象限即可

六. $(-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{n}$

先左右求导得到条件: $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$, 此时注意不要漏了条件 $f(0) = 0$, 解出 $f(x) = \ln(1+x^2)$, 然后就是经典的步骤: 泰勒展开. 此时只需要关注次数为 $2n$ 的项即可, 而且最后注意不要漏了求导出来的 $(2n)!$

七. 分部积分法证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \int_0^1 f(x) d(x^{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) x^{n+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx$$

$$\text{此时运用积分中值定理, 我们有原式} = f(1) - f'(\varepsilon) \int_0^1 x^{n+1} dx = f(1) - \frac{1}{n+2} f'(\varepsilon),$$

此时根据导函数在闭区间内连续, 我们可知导函数有界, 有界 \times 无穷小 $= 0$, 最后只剩下 $f(1)$, 证毕!

写于 2025.1.7 凌晨 2:07