中值问题

主讲人 夜雨

原函数法

原函数法（也叫还原法）是基于罗尔定理的一个找原函数的方法

原函数法原理：原函数法实际上就是运用罗尔定理的过程的逆过程

运用罗尔定理的过程：$F(a)=F(b)\Rightarrow F'(\xi)=0\Rightarrow s(\xi)-t(\xi)=0\Rightarrow s(\xi)=t(\xi)\Rightarrow r(\xi)s(\xi)=r(\xi)t(\xi)$

假设$r(\xi)s(\xi)=r(\xi)t(\xi)$就是我们欲证的结论，那么如何从$r(\xi)s(\xi)=r(\xi)t(\xi)$找出$F(x)$？

逆着操作！

首先将欲证结论$r(\xi)s(\xi)=r(\xi)t(\xi)$中的$\xi$换成$x$得到$r(x)s(x)=r(x)t(x)$

$r(x)s(x)=r(x)t(x)\Rightarrow s(x)=t(x)\Rightarrow s(x)-t(x)=0\Rightarrow\int[s(x)-t(x)]dx=C\Rightarrow F(x)=C$

其中$\int[s(x)-t(x)]dx$就是我们要构造的辅助函数$F(x)$

原函数法步骤：将欲证结论中的ξ换成x，等式两边同时除以（或乘以）一个式子，移项，积分最终化成$F(x)=C$这样的式子，这里的$F(x)$就是我们要构造的函数。

注：有时候需要对式子两边取指数。

设函数$f(x)$在$[0,1]$上有连续，在$(0,1)$内可导，且$\int_0^1 e^{-f(x)}\arctan x dx=1$，$f(1)=\ln\frac{\pi}{4}$

证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{1}{(1+\xi^2)\arctan\xi}$

设$f(x)$在$(-2,2)$内可导，证明：

（1）存在$\xi\in(-2,2)$，使得$\xi(1-\xi)f'(\xi)+1-2\xi=0$

（2）存在$\xi\in(-2,2)$，使得$\xi(1-\xi)f'(\xi)+1-3\xi=0$

设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上有二阶导数且$g(x)$，$g''(x)\neq 0$，又$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$

证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=g(b)=0,g'(x)<0$

证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\dfrac{\int_a^{\xi}f(t)dt}{\int_{\xi}^{b}g(t)dt}=0$

设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数且$f(0)=f'(0)=0$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{(1-\xi)^2}$

设$f(x)$在$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$上二阶可导，$f(0)=f'(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，证明：存在$\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，使得$f''(\xi)=\dfrac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$

设函数$f(x)$在$[0,1]$上具有连续导数，且$f(0)=0$，证明：

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$2\xi\int_0^1 f(x)dx-f(\xi)=0$

（这题你可能根本想不到原函数法，因为没有导数，但是把积分符号去掉后，导数就浮现出来了！）

（2）存在$\eta\in(0,\xi)$，使得$f'(\eta)=2\int_0^1 f(x)dx$

微分方程法： 只需要将通解化成$F(x)=C$这样的式子！

比如结论是$h'(x)+p(x)h(x)=0$

解微分方程得到通解$h(x)=Ce^{-\int p(x)dx}$；适当变形得到$h(x)e^{\int p(x)dx}=C$

比如结论是$h'(x)+p(x)h(x)=q(x)$

解微分方程得到通解$h(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$；

适当变形得到$h(x)e^{\int p(x)dx}-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx=C$

比如结论是$f''(\xi)+f(\xi)=0$

解微分方程得到通解$f(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$；

适当变形得到$f(x)\cos x-f'(x)\sin x=C$或$f(x)\sin x+f'(x)\cos x=C$

注一：通解有两个任意常数就要消去一个，消C_1或C_2

注二：由第三个例子可知原函数不是唯一的，到底找哪个就要根据题目的条件了！

设函数$f(x)$二阶可导，证明：

（1）若$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$，则存在$\xi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，使得$f(\xi)+f''(\xi)=0$

（2）若$f(0)=f(\pi)=0$，则存在$\xi\in(0,\pi)$，使得$f(\xi)+f''(\xi)=0$

形如$\varphi(f(x),f'(x),f''(x))=0$的微分方程可降阶处理

令$f(x)=y,f'(x)=p$，则$f''(x)=p\frac{dp}{dy}$

二阶微分方程$\varphi(f(x),f'(x),f''(x))=0$变成一阶微分方程$\varphi\left(y,p,\frac{dp}{dy}\right)=0$

设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上具有二阶导数，且$f'(0)=f'(1)=0$

证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)+[f(\xi)f'(\xi)]^2=0$（解二阶可降阶的微分方程或者运用万能构造）

设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上具有二阶导数，且$f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证明：

（1）方程$f(x)=0$在区间$(0,1)$内至少有一个实根

（2）方程$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$在区间$(0,1)$内至少存在两个实根（2017）（解二阶可降阶的微分方程或者运用万能构造）

构造通法

一．万能构造（处理齐次）

将结论中的ξ换成x后如果形如$h'(x)+p(x)h(x)=0$，则构造辅助函数

$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}$

二．比万能构造更强的构造（处理非齐次）

将结论中的ξ换成x后如果形如$h'(x)+p(x)h(x)=q(x)$，则构造辅助函数

$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

运用这两个构造可以秒杀一大片题！

设$f(x)$在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可导，$f(2)=2$，$f(1)=\dfrac{1}{2}$

证明：存在$\xi\in(1,2)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$

设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导，$f(0)=0$

证明：存在$\xi\in(0,\pi)$，使得$2f'(\xi)=\tan\dfrac{\xi}{2}f(\xi)$

设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数，且$f(0)=f(1)=0$

证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

设函数$f(x)=\displaystyle\int_1^x e^{t^2}dt$，证明：

（1）存在$\xi\in(1,2)$，使得$f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$

（2）存在$\xi\in(1,2)$，使得$f(2)=\ln 2\cdot\eta\cdot e^{\eta^2}$（2020）

设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$g'(x)\neq 0$

证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0)=0$且当$x\in(0,1)$时，$f(x)>0$

证明：对于任意的$\alpha>0$，存在$\xi\in(0,1)$，使得$\dfrac{\alpha f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

设函数$f(x)$在(a,b)内可导，$a<c<b$，$\int_a^c f(x)dx=\int_c^b f(x)dx=0$，证明：

（1）存在$\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得$f(\xi_1)=\int_a^{\xi_1} f(x)dx$，$f(\xi_2)=\int_a^{\xi_2} f(x)dx$

（2）存在$\eta\in(a,b)$，使得$f'(\eta)=\int_a^{\eta} f(x)dx$

奇函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上具有二阶导数，且$f(1)=1$，证明：

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=1$

（2）存在$\xi\in(-1,1)$，使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$（2013）

设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导，$f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$

证明：存在$\xi\in(0,\pi)$，使得$f'(\xi)-f(\xi)=\sin\xi$

设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数，且$f(0)=0$，$f(1)=1$
求证：存在$\xi\in(0,1)$，使得$\xi f''(\xi)+(1+\xi)f'(\xi)=1+\xi$

万能构造在不等式和极限中的应用

若条件或结论中出现了形如$h'(x)+p(x)h(x)$的式子，则构造辅助函数$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}$
解题大方向：将关于$h(x)$的条件和结论转换成关于$G(x)$的条件和结论
这种处理手法的作用：简化条件或结论！联系条件和结论！
如何转换?
利用$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}$和$G'(x)=e^{\int p(x)dx}[h'(x)+p(x)h(x)]$（或$h'(x)+p(x)h(x)=G'(x)e^{-\int p(x)dx}$）

可导函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=A$，求$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

设$a>0$是常数，连续函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$，$y=y(x)$是微分方程$y'+ay=f(x)$的解，
求$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$

设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续可微，且$f(0)=1$，$f'(x)<f(x)$，求证：$f(x)<e^{x}(x>0)$
设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续可微，且$f(0)=1$，$-f(x)<f'(x)$，求证：$e^{-x}<f(x)\,(x>0)$
设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续可微，且$f(0)=1$，$|f'(x)|<f(x)$，求证：$e^{-x}<f(x)<e^{x}(x>0)$

设$f'(x)$在$[0,1]$上连续，$f(0)=0$，$f(1)=1$，求证：$\int_0^1|f'(x)-f(x)|dx\geqslant\frac{1}{e}$

设$f(x)$，$g(x)$为连续函数，对于任意的$x\geqslant0$，$f(x)\geqslant0$，$\int_0^x f(t)g(t)dt\geqslant g(x)$，证明：$g(x)\leqslant0$
（目标 140 以下可跳过此题）

设$f(x)$在R上非负连续，且$f(x)\leqslant\int_0^x f^{a}(t)dt$，求证：对于任意的$a\geqslant1$，有$f(x)\equiv0$
（目标 140 以下可跳过此题）

推广的罗尔定理

设$f(x)$在(a,b)内可导，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=s$或$+\infty$或$-\infty$，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=s$或$+\infty$或$-\infty$，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$

注：推广的罗尔定理可以用罗尔定理来证明，找函数值相等的两个点，那么想到作水平线与图像相交，找两个交点！

设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，且$0\leq f(x)\leq\dfrac{x}{1+x^2}$，证明：存在$\xi>0$，使得$f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

（目标 140 以下可跳过此题）

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，证明：存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得$f'(\xi)=\xi+\xi f^2(\xi)$

（目标 140 以下可跳过此题）

两次构造辅助函数

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且$f(a)=f(b)=\int_a^b f(x)dx=0$，证明：

（1）存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=f(\xi)$

（2）存在$\eta\in(a,b)$，使得$f''(\eta)-5f'(\eta)+6f(\eta)=0$

思想篇 新旧函数转换

有时候，根据结论构造出的新函数利用不上条件，这个时候可以考虑将旧函数的条件转换成新函数的条件（如何实现转换？反解旧函数！）

$f(x)$在$[a,b]$上有连续导数，且$f'(c)=0$，$c\in(a,b)$

证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$ （目标140以下可跳过此题）

设$f(x)$在$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$上二阶可导，$f(0)=f'(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

证明：存在$\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，使得$f''(\xi)=\dfrac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$ （目标140以下可跳过此题）

设$f(x)$在$[0,1]$上具有连续导数，且$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=0$，证明：

（1）存在$\eta\in(0,1)$，使得$\int_0^\eta f(x)dx=0$

（2）$f(x)$在$(0,1)$内至少存在两个不同的零点ξ_1，ξ_2

（3）存在$\delta\in(0,1)$，使得$f'(\delta)=0$

设$f(x)$在$[0,\pi]$上具有连续导数，且$\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi f(x)\cos x dx=0$，证明：

（1）存在$\eta\in(0,\pi)$，使得$\int_0^\eta f(x)dx=0$

（2）$f(x)$在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的零点ξ_1，ξ_2（2000）

（3）存在$\delta\in(0,\pi)$，使得$f'(\delta)=0$（目标140以下可跳过此题）

设$f(x)$在$[0,\pi]$上具有连续导数，且$\int_0^\pi f(x)\sin x dx=\int_0^\pi f(x)\cos x dx=0$，证明：

（1）$f(x)$在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的零点ξ_1，ξ_2

（2）存在$\delta\in(0,\pi)$，使得$f'(\delta)=0$（目标140以下可跳过此题）

常数K值法：处理中值部分可分离的中值问题

常数K值法也是基于罗尔定理的一个找原函数的方法，该方法简单粗暴，有两类用法！

第一类常数K值法

使用条件：

（1）区间端点与中值可分离，即原式可化成这样一个等式：等式的一端只含有区间端点a,b，另一端只含有中值ξ

（2）可化为零式：如果把式子中的b换成a时，呈现$0=0$的形式，就称它是零式

构造步骤：

（1）把原式化成分离形式，令等式一端的常数等于K

（2）再将原式化为零式，在零式中，将含有中值的部分换成K，把b换成x，再将右端移到左端，把所得的式子记作$F(x)$，这就是构造的辅助函数。

（3）由K的取法及$F(x)$的作法便知，必有$F(b)=0$，由原式可化为零式便知，必有$F(a)=0$，所以有$F(a)=F(b)$

（4）对$F(x)$在(a,b)上运用罗尔定理

第二类常数K值法

使用条件：区间端点与中值可分离，即原式可化成这样一个等式：等式的一端只含有区间端点a,b，另一端只含有中值ξ

构造步骤：

（1）把原式化成分离形式，令等式一端的常数等于K

（2）在原式中，将含有中值的部分换成K，然后适当变形，将a,b分离，使得等式左端为由a构成的代数式，右端为由b构成的代数式

（3）若两端的代数式关于a,b对称，则将左端的代数式中的a换成x得到$F(x)$，这就是构造的辅助函数，此时有$F(a)=F(b)$

（4）对$F(x)$在(a,b)上运用罗尔定理

注：如果原式中含有二阶或二阶以上导数，运用一次罗尔定理得不到欲证的结果，需要再运用一次罗尔定理。

对$F(x)$运用一次罗尔定理得到$F'(\xi)=0$，一般会有$F'(a)=0$，进而又可以对$F'(x)$运用一次罗尔定理。

（1）证明拉格朗日中值定理：若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

（2）证明：若函数$f(x)$在$x=0$处连续，在$(0,\delta)\ (\delta>0)$内可导，且$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则$f'_+(0)$存在且$f'_+(0)=A$（2009）

证明开区间的积分中值定理：若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

$b>a>0$，设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：

（1）存在$\xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$

（2）存在$\xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\xi^2 f'(\xi)}{ab}$

设函数$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上有二阶导数且$g''(x)\neq 0$证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得
$$\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{g(b)-g(a)-g'(a)(b-a)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

设函数$f(x)$在$[a,b]$上三阶可导，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得
$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b))-\frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi)$$

中值部分可分离的中值问题（这类问题除了常数K值法，还可以运用柯西中值定理来做）

如果结论中的区间端点与中值可分离，即原式可化成这样一个等式：等式的一端只含有区间端点a,b，另一端只含有中值ξ，可以考虑运用拉格朗日中值定理和柯西中值定理。

解题步骤

第一步：将ξ与a,b分离

第二步：可以从两个角度入手

从含有a,b的式子入手：将含有a,b的式子化成$\dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}$或$\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$（即局部分离$a,b$）

从含有ξ的式子入手：将含有ξ的式子化成$\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$或$F'(\xi)$

$b>a>0$，设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：

（1）存在$\xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$

（2）存在$\xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\xi^2 f'(\xi)}{ab}$

当含有两个中值ξ,η时（并且不要求$\xi\neq\eta$），将含有ξ的放一起，然后化成$\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$或$F'(\xi)$，将含有η的放一起，然后化成$\dfrac{F'(\eta)}{G'(\eta)}$或$F'(\eta)$，然后在区间$[a,b]$上运用柯西中值定理或拉格朗日中值定理即可！

注：不要求$\xi\neq\eta$的中值问题不是真正的双中值问题！这类问题一般都很简单！

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f'(x)\neq 0$，证明：存在$\xi,\eta\in(a,b)$，使得$\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b<\frac{\pi}{2}$，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\eta)\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi)\frac{\sin\eta}{\cos\xi}$

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f'(\eta)+f(\eta)]=1$

当结论中出现有二阶或二阶以上导数时，需要多次运用柯西中值定理

处理手法的核心就是下面这个结论

若 $L(x),H(x)$ 具有 $(n+1)$ 阶导数，且 $L(a)=L'(a)=\cdots=L^{(n)}(a)=0,H(a)=H'(a)=\cdots=H^{(n)}(a)=0$

则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{L(b)}{H(b)}=\frac{L^{(n+1)}(\xi)}{H^{(n+1)}(\xi)}$

解题步骤

第一步：分离中值部分

第二步：设函数

泰勒中值定理2：如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内具有 $(n+1)$ 阶导数，那么对任一 $x\in U(x_0)$，

有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+R_n(x)$，

其中 $R_n(x)=f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+!}}{(n+1)!}$，这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值

泰勒中值定理2：如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内具有3阶导数，那么对任一 $x\in U(x_0)$，有

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+f'''(\xi)\frac{(x-x_0)^3}{3!}$，这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值

设函数$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上有二阶导数且$g''(x)\neq 0$证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{g(b)-g(a)-g'(a)(b-a)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

设函数$f(x)$在$[a,b]$上三阶可导，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b))-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi)$$

设$f(x)$在点a的某个邻域内具有2阶导数，证明：对充分小的h，存在$\theta\in(0,1)$，使得

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{f''(a+\theta h)+f''(a-\theta h)}{2}$$

拉格朗日中值定理的几何意义

$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

左边是某一点的导数，右边是某一条弦的斜率

所以我们可以**把某一点的导数看作某一条弦的斜率**来分析问题！

如何去找到这条弦呢？就是要找到弦的两个端点！

设函数$f(x)$在区间$[0,2]$上有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$，证明：

（1）存在$\xi\in(0,2)$，使得$|f'(\xi)|\geq M$

（2）若对任意$x\in(0,2)$，使得$|f'(x)|\leq M$，则$M=0$（2020）

证明：若函数$\varphi(x)$具有二阶导数，且满足$\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，则至少存在一点$\xi\in(1,3)$，使得$\varphi''(\xi)<0$（2013）

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，又$f(x)$不是线性函数，且$f(b)>f(a)$，试证：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$（目标 140 以下可跳过此题）

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，又$f(x)$不是线性函数，试证：存在$\xi\in(a,b)$，使得$|f'(\xi)|>\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$（目标 140 以下可跳过此题）

$G(x)$在$[a,b]$上有连续导数，$G'(c)+\dfrac{1}{b-a}G(c)=0$，$c\in(a,b)$且$G(a)=0$

证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$G'(\xi)=0$

虐杀双中值问题（杀它个三遍）

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f'(x)\neq 0$，证明：存在$\xi,\eta\in(a,b)$，使得$\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$0<a<b<\dfrac{\pi}{2}$，证明：存在$\xi,\eta\in(a,b)$，使得$f'(\eta)\tan\dfrac{a+b}{2}=f'(\xi)\dfrac{\sin\eta}{\cos\xi}$

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)=1$，证明：存在$\xi,\eta\in(a,b)$，使得$e^{\eta-\xi}[f'(\eta)+f(\eta)]=1$

前面讲的这三道题目不要求$\xi\neq\eta$，不是真正的双中值问题！这类问题一般都很简单！**在整个区间上**运用柯西中值定理和拉格朗日中值定理就可以做出来！

要求$\xi\neq\eta$，才是真正的双中值问题！这类问题又该如何去处理呢？

方法一：利用拉格朗日中值定理几何意义

方法二：在整个区间插入分点，分成两个小区间，分别运用拉格朗日中值定理或柯西中值定理

方法三：利用拉格朗日中值定理或柯西中值定理去掉一个中值，**双中值问题**变成**单中值问题**（一招把它打回原形）

三种方法的比较

方法一是**几何法**，更加直观，但是没法深入（结论比较复杂就处理不了了），方法二和方法三是**代数法**，缺少直观，但是更加细腻，能够处理更复杂的结论！

方法一和方法二使得两个中值不相等的原理是一样的（只不过方法一是借助图形来找分点，方法二是通过代数式来找分点），但是方法三的原理不一样。

方法一和方法二中ξ_1,ξ_2的产生是没有先后顺序的，在(a,c)和(c,b)上运用拉格朗日中值定理或柯西中值定理得到ξ_1,ξ_2，从而有$\xi_1<c<\xi_2$。

而方法三中ξ_1,ξ_2的产生是有先后顺序的，ξ_1先产生，然后在(a,ξ_1)上运用拉格朗日中值定理或柯西中值定理得到ξ_2，从而有$a<\xi_2<\xi_1$。

（或者在(ξ_1,b)上运用拉格朗日中值定理或柯西中值定理得到ξ_2，从而有$\xi_1<\xi_2<b$）

方法一：根据拉格朗日中值定理几何意义，某一点的导数可以看作某一条弦的斜率

当有两个中值时，我们把$f'(\xi_1),f'(\xi_2)$看作首尾相连的两条弦的斜率，第一条弦连接**条件已知点（固定点）**$(a,f(a))$**（最左边的）**，第二条弦连接**条件已知点（固定点）**$(b,f(b))$**（最右边的）**，要确定这两条弦实际上就是要确定中间的一个点！

更一般地

当有n个中值时，我们把$f'(\xi_1),f'(\xi_2),\cdots,f'(\xi_n)$看作首尾相连的$n$条弦的斜率，第一条弦连接**条件已知点（固定点）**$(a,f(a))$**（最左边的）**，最后一条弦连接**条件已知点（固定点）**$(b,f(b))$**（最右边的）**，要确定这n条弦实际上就是要确定中间的$n-1$个点

注：这些弦不能有重合的区间，这样是为了确保中值互不相等！

函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且$f(-b)=a$，$f(a)=b$，$f(0)=0$（其中$a,b>0$），证明：存在两个不同的点ξ，$\eta\in(-b,a)$，使得$f'(\xi)f'(\eta)=-1$

$f(x)$在$[-1,1]$上连续，在$(-1,1)$内可导，且$f(-1)=f(1)$，证明：存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$，使得$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=\dfrac{1}{3}$，证明：存在$\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$（2010）

$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得$\dfrac{a}{f'(\xi_1)}+\dfrac{b}{f'(\xi_2)}=a+b$（其中$a,b>0$）

$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得$af'(\xi_1)+bf'(\xi_2)=a+b$（其中$a,b>0$）

$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得$\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=2$

$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$

$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在n个不同的点$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\in(0,1)$，使得$\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\cdots+\dfrac{\lambda_n}{f'(\xi_n)}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$（其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$）

$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在n个不同的点$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\in(0,1)$，使得$\lambda_1f'(\xi_1)+\lambda_2f'(\xi_2)+\cdots+\lambda_nf'(\xi_n)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$（其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$）

$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在n个不同的点$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\in(0,1)$，使得$\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}+\cdots+\dfrac{1}{f'(\xi_n)}=n$

$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在n个不同的点$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\in(0,1)$，使得$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+\cdots+f'(\xi_n)=n$

设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在两个不同的点$\xi,\eta\in(0,1)$，使得$f'(\xi)f'(\eta)=1$

设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：
存在$\xi,\eta\in(0,1)$，且$\xi\neq\eta$，使得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$（第十二届初赛）

方法二：在区间(a,b)上插入区间分点c，分成两个区间(a,c)和(c,b)，接下来去确定分点$(c,f(c))$。
将结论中$f'(\xi_1)$换成$\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$，$f'(\xi_2)$换成$\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$，得到**关于$f(c)$的等式**或**关于c的等式**或**$f(c)$与c的关系式**，从而确定出分点$(c,f(c))$。
确定出分点$(c,f(c))$后，对两个区间(a,c)和(c,b)分别运用拉格朗日中值定理即可。

注：该方法二般用于两个中值的题目，对于多个中值的题，分点一般就确定不了了（因为只有一个等式）。

设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在两个不同的点$\xi,\eta\in(0,1)$，使得$f'(\xi)f'(\eta)=1$

设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：
存在$\xi,\eta\in(0,1)$，且$\xi\neq\eta$，使得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$（第十二届初赛）

$f(x)$在$[-1,1]$上连续，在$(-1,1)$内可导，且$f(-1)=f(1)$，证明：存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$，使得$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得$\dfrac{a}{f'(\xi_1)}+\dfrac{b}{f'(\xi_2)}=a+b$（其中$a,b>0$）

$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得$af'(\xi_1)+bf'(\xi_2)=a+b$（其中$a,b>0$）

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(x)\neq0$，$f(a)=0$，$f(b)=2$
证明：存在$\xi\neq\eta\in(a,b)$，使得$f'(\eta)[f(\xi)+\xi f'(\xi)]=f'(\xi)[bf'(\eta)-1]$

方法三：将结论中$f'(\xi_2)$直接换成$\dfrac{f(\xi_1)-f(a)}{\xi_1-a}$（或者$\dfrac{f(\xi_1)-f(b)}{\xi_1-b}$），这样结论中就只有一个中值了（**双中值问题**变成**单中值问题**），去解这个**单中值问题**即可！利用原函数法或微分方程法或构造通法构造出辅助函数！去产生ξ_1！

ξ_1,ξ_2的产生是有**先后顺序**的：先产生ξ_1，然后在(a,ξ_1)上运用拉格朗日中值定理得到ξ_2

$f(x)$在$[-1,1]$上连续，在$(-1,1)$内可导，且$f(-1)=f(1)$，证明：存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$，使得$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得$\dfrac{a}{f'(\xi_1)}+\dfrac{b}{f'(\xi_2)}=a+b$（其中$a,b>0$）（提问：能用方法三吗？为什么不能？）

$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得$af'(\xi_1)+bf'(\xi_2)=a+b$（其中$a,b>0$）（注意：可以用方法三，视频说错了）

设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在两个不同的点$\xi,\eta\in(0,1)$，使得$f'(\xi)f'(\eta)=1$

设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在$\xi,\eta\in(0,1)$，且$\xi\neq\eta$，使得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$（第十二届初赛）

设$f(x)$，$g(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$\int_0^1 f(x)dx=3\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx$，试证：存在两个不同的点$\xi,\eta\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=g'(\xi)\,[f(\eta)-f(\xi)]$（方法失效，不过让两个中值不相等的原理和方法三一样）

有时候出题人为了提升题目难度，故意**隐藏导数**，给我们设置障碍！
出题人是如何隐藏导数的呢？
把函数$F(x)$取成$\int_0^x f(t)dt$或者取成$g(x)\times\int_0^x f(t)dt$（其中$g(x)$是某个具体的函数，比如$x$，$\sin x$）
大家首先要做的事情就是要把$F(x)$找出来！那么导数自然就浮现出来了！

设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，且$I=\int_0^1 f(x)dx\neq 0$，证明：在$(0,1)$内存在两个不同的点x_1,x_2，使得$\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}=\dfrac{2}{I}$（第八届初赛）

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)dx \neq 0$，证明：在$[0,1]$上存在三个不同的点x_1,x_2,x_3，使得

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)dt + f(x_1)\arctan x_1\right]x_3 = \left[\frac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)dt + f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3)$$

（第九届决赛）

运用泰勒中值定理求解中值问题（因为一些不等式也可以用这个方法来解，所以顺便把一些不等式也讲了）

运用泰勒中值定理就是：将$f(\alpha)$在β处泰勒展开

其中α，β无非是这些点：区间端点a，b或区间中点的$\frac{a+b}{2}$或极值点（包括最值点）c或任意点x。（极少情形是其他点）

事实上，α，β要取什么点，都是可以分析和计算出来的！

大家在泰勒展开的时候要遵循下面两个原则

一．α，β怎么取，要根据题目的条件和结论，要取条件和结论中出现的点！

二．展开后要将结论和条件中不存在的式子消去！

函数$f(x)$在$[-1,1]$上有三阶连续导数，且$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：存在$\xi\in(-1,1)$，使得$f'''(\xi)=3$

设函数$f(x)$在$[a,b]$上有二阶连续导数，且$f'(a)=f'(b)=f''(a)=f''(b)=0$，证明：

（1）存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(b)-f(a)=\frac{1}{24}(b-a)^3 f'''(\xi)$

（2）存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(b)-f(a)=\frac{1}{18}(b-a)^3 f'''(\xi)$

注：由这题第二问可知“因为对称性所以取中点”这个说法不一定正确（当然也不能说它完全错了，做题的时候确实是可以拿中点去试一试），要取什么点，都是可以分析和计算出来的！

许多老师喜欢用“因为对称性所以取中点”这个说法，我个人觉得不能用这个说法来教学生，应该教学生更可靠的更深入的东西！

设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且满足$|f''(x)|\leqslant 1$，$f(x)$在$(0,1)$内取到最大值$\frac{1}{4}$，证明：$|f(0)|+|f(1)|\leqslant 1$

设函数$f(x)$二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=2$，证明：$\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f''(x)\leqslant -16$

设函数$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$f'(a)=f'(b)=0$，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得
$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f(0)=f(1)$，$|f''(x)|\leq 2$，证明：　$|f'(x)|\leq 1$

设函数$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$f(a)=f(b)=0$，$|f''(x)|\geq 1$，证明：　$\max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|\geq\frac{1}{8}(b-a)^2$

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内三阶可导，且$|f(x)|\leq M_0$，$|f'''(x)|\leq M_3$，证明：
（1）$f'(x)$，$f''(x)$有界
（2）$|f'(x)|\leq\frac{\sqrt[3]{9M_0^2M_3}}{2}$，$|f''(x)|\leq 2\sqrt[3]{9M_0^2M_3}$

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内二阶可导，且$|f(x)|\leqslant M_0$，$|f''(x)|\leqslant M_2$，证明：

（1）$f'(x)$有界

（2）$|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$

（3）$|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$

如果遇到积分符号怎么办呢？很简单！遇到积分符号先消去积分符号！

令$G(x)=\int_a^x g(t)dt$，将原条件和结论转换成关于$G(x)$的条件和结论！注意$G(x)=\int_a^x g(t)dt$这个函数“天生”有个零点$x=a$，大家做题千万不要漏了这个条件！

设函数$f(x)$在$[0,1]$上具有连续导数，且$f(0)=0$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)dx$$

设函数$f(x)$在$[-1,1]$上有二阶连续导数，且$f(0)=0$，证明：存在$\xi\in(-1,1)$，使得

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx=\frac{2}{3}f'(\xi)+\frac{1}{3}\xi f''(\xi)$$

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上有二阶连续导数，且$f(0)=0$，证明：存在$\xi\in[-a,a]$，使得
$a^3f''(\xi)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx$

设函数$f(x)$在$[0,1]$上可导，$f(0)=0$，

（1）设$G(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$，求$G'''(x)$

（2）证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$\int_0^1 tf(1-t)dx=\frac{1}{6}f'(\xi)$

注：一部分带有积分符号的不等式也可以运用该方法求解，在后面再专门来讲

利用泰勒中值定理求中值极限

万能解题模版一

如果**条件等式**中的中值部分是$f^{(n)}(a+\theta x)$且有条件$f^{(m)}(a)\neq 0$

则可按下面步骤解题

步骤一：将**条件等式**中的$f(a+x)$和$f^{(n)}(a+\theta x)$在a处展开到$f^{(m)}(a)$（带佩亚诺余项的展开）

步骤二：等式两边除以x^m，然后等式两端求极限

万能解题模版二（全新解法）

条件等式中的中值部分是$f^{(n)}(a+\theta x)$且有条件$f^{(n+1)}(a)\neq 0$

$\theta=\dfrac{f^{(n)}(a+\theta x)-f^{(n)}(a)}{x}\Big/\dfrac{f^{(n)}(a+\theta x)-f^{(n)}(a)}{\theta x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{(n)}(a+\theta x)-f^{(n)}(a)}{\theta x}$的计算：把$\theta x$视为一个整体得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{(n)}(a+\theta x)-f^{(n)}(a)}{\theta x}=f^{(n+1)}(a)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{(n)}(a+\theta x)-f^{(n)}(a)}{x}$的计算：利用条件替换$\dfrac{f^{(n)}(a+\theta x)-f^{(n)}(a)}{x}$中$f^{(n)}(a+\theta x)$，然后再计算

更一般的

条件等式中的中值部分是$f^{(n)}(a+\theta x)$且有条件$f^{(n+1)}(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$，$f^{(m)}(a)\neq 0$

$\theta^{m-n}=\dfrac{f^{(n)}(a+\theta x)-f^{(n)}(a)}{x^{m-n}}\Big/\dfrac{f^{(n)}(a+\theta x)-f^{(n)}(a)}{(\theta x)^{m-n}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{(n)}(a+\theta x)-f^{(n)}(a)}{(\theta x)^{m-n}}$的计算：把$\theta x$视为一个整体，可多次运用洛必达法则加一次导数定义求出

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{(n)}(a+\theta x)-f^{(n)}(a)}{x^{m-n}}$的计算：利用条件替换$\dfrac{f^{(n)}(a+\theta x)-f^{(n)}(a)}{x^{m-n}}$中$f^{(n)}(a+\theta x)$，然后再计算

设$f(x)=f(0)+xf'(\theta x)\ (0<\theta<1)$，$f''(x)$连续，且$f''(0)\neq 0$，求$\lim\limits_{x\to 0}\theta$

设$f(x)=f(0)+xf'(0)+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)\ (0<\theta<1)$，$f^{(n+1)}(x)$连续，且$f^{(n+1)}(0)\neq 0$，求$\lim\limits_{x\to 0}\theta$

设$f(x)$在区间$(-\delta,\delta)$内有n阶连续导数，且$f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，$f^{(n)}(0)\neq 0$，当$0<|h|<\delta$时，$f(h)-f(0)=hf'(\theta h)\ (0<\theta<1)$，求$\lim\limits_{h\to 0}\theta$

设$f(x)$在$[a,b]$内有$n+1$阶导数，且$f^{(n)}(a)\neq 0$，证明

$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\dfrac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta h)$中的$\theta\ (0<\theta<1)$满足

$\lim\limits_{h\to 0^+}\theta=1-\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

注：实际上前面三题的 “连续”二字都可以去掉！

多项式拟合法

解题模版：

第一步：将条件和结论中的$f(x)$全部换成多项式函数$p(x)$，从而计算出多项式函数$p(x)$的各项系数

第二步：将含有$f(x)$的式子与含有$p(x)$的式子对应做差，得到$g(x)=f(x)-p(x)$这个新函数的式子！

通过此方法可以将关于$f(x)$的条件和结论变成关于$g(x)$的条件和结论，将原条件和结论变成**理想的简化的**条件和结论！

多项式拟合法的作用就是简化条件和结论！

若结论是$f'(\xi)=k$，则$p(x)$设为$ax+b$，将结论变成$g'(\xi)=0$

若结论是$f''(\xi)=k$，则$p(x)$设为ax^2+bx+c，将结论变成$g''(\xi)=0$

若结论是$f'''(\xi)=k$，则$p(x)$设为ax^3+bx^2+cx+d，将结论成变$g'''(\xi)=0$

设$f(x)$在$[0,1]$上具有连续导数，且$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=0$，证明：

（1）存在$\eta\in(0,1)$，使得$\int_0^{\eta} f(x)dx=0$

（2）$f(x)$在$(0,1)$内至少存在两个不同的零点ξ_1，ξ_2

（3）存在$\delta\in(0,1)$，使得$f'(\delta)=0$

设函数$f(x)$在$[0,1]$上具有连续导数，且$\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{2}$，$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{3}{2}$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=3$（第十一届决赛）

设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数，且$f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=-8$

设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶连续导数，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)dx=1$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=-6$（由这题立刻解决了 2019 年真题第二问）

设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)dx=1$，证明：

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$

（2）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)<-2$（2019）（这题讲了八种方法大家可以去 b 站看看）

设$f(x)$在$[0,1]$上具有三阶导数，且$f(1)=f(0)+1$，$f'(0)=f'(1)=1$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'''(\xi)=0$

利用分部积分公式（目标140以下可跳过此部分）

一阶情形

$\int_a^b f'(x)p(x)dx = f(x)p(x)|_a^b - \int_a^b f(x)p'(x)dx$（利用分部积分公式）

$\int_a^b f'(x)p(x)dx = f'(\xi)\int_a^b p(x)dx$（利用积分第一中值定理）

利用上面的两个式子可以将$f'(\xi)$与$\int_a^b f(x)p'(x)dx$联系起来，从而将$f'(\xi)$与$\int_a^b xf(x)dx$及$\int_a^b f(x)dx$联系起来（因为$p'(x)=2ax+b$），其中$p(x)=ax^2+bx+c$是一个**工具人**一样的存在，根据条件来进行确定!

设函数$f(x)$在$[0,1]$上具有连续导数，且$\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{2}$，$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{3}{2}$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=3$（第十一届决赛）

二阶情形（两次利用分部积分公式）

$\int_a^b f''(x)p(x)dx = \int_a^b f(x)p''(x)dx + f'(x)p(x)|_a^b - f(x)p'(x)|_a^b$

$\int_a^b f''(x)p(x)dx = f''(\xi)\int_a^b p(x)dx$（利用积分第一中值定理）

利用上面的两个式子可以将$f''(\xi)$与$\int_a^b f(x)p''(x)dx$联系起来，从而将$f''(\xi)$与$\int_a^b f(x)dx$联系起来（因为$p''(x)=2a$是常数），其中$p(x)=ax^2+bx+c$是一个**工具人**一样的存在，根据条件来进行确定!

设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶连续导数，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)dx=1$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=-6$

设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶连续导数，且$f'(0)=f'(1)=0$，$f(0)+f(1)=0$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=-12\int_0^1 f(x)dx$

设$f(x)$在$[a,b]$上具有二阶连续导数，且$f(a)=f(b)=0$，$M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$，证明：

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\frac{(b-a)^2}{12}M$$

这题需要用到开区间的积分第一中值定理：若$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$在(a,b)内都不等于0，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$