

主管 领导 审核 签字

高等数学 A 试 题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意行为规范 遵守考场纪律

授课教师

姓名

学号

班号

学院

一、填空题（每小题 2 分，共 4 小题，满分 8 分）

- 曲线 $y = \frac{2x^3}{1+x^2}$ 的渐近线方程是_____.
- 曲线 $y = e^{2(x-1)} + x$ 在点 (1,2) 处的曲率 $K =$ _____.
- 定积分 $\int_{-1}^1 \left(x e^{\sqrt{1+x^4} (\sin x)^2} + x^2 \right) dx =$ _____.
- 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续，且满足 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + x \left(\int_0^1 f(x) dx \right)$ ，则 $f(x) =$ _____.

二、选择题（每小题 2 分，共 4 小题，满分 8 分，每小题中给出的四个选项中只有一个符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

- 设 $\alpha(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt$, $\beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$ ，则当 $x \rightarrow 0$ 时， $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 ().
 (A) 高阶无穷小; (B) 低阶无穷小;
 (C) 同阶但不等价无穷小; (D) 等价无穷小.
- 设 $f(x)$ 是连续函数，则曲线段 $y = \int_a^x f(t) dt$ ($a \leq x \leq b$) 的弧长 s 的计算公式为().
 (A) $s = \int_a^b \sqrt{x^2 + (f(x))^2} dx$; (B) $s = \int_a^b \sqrt{x^2 + (f'(x))^2} dx$;
 (C) $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f(x))^2} dx$; (D) $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.
- 已知反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{x^\alpha} dx$ 收敛，则常数 α 的取值区间是().

(A) $1 < \alpha < 2$; (B) $\frac{3}{2} < \alpha < 2$; (C) $1 < \alpha < \frac{3}{2}$; (D) $\frac{3}{2} \leq \alpha \leq 2$.

4. 设 $F(x) = \int_0^x xf(x-t)dt$, $f(x)$ 为连续函数, $f(0) = 0, f'(x) > 0$, 则 $y = F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内是().

(A) 单调减少且为向上凸的; (B) 单调增加且为向上凸的;

(C) 单调减少且为向下凸的; (D) 单调增加且为向下凸的.

(注: 向上凸又称为凸, 向下凸又称为凹)

三、解答下列各题 (共五小题, 满分 18 分)

1. (4 分) 求函数 $f(x) = xe^{x^2+3x+1}$ 的单调区间与极值, 并求出该函数在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值.

2. (5 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x+x^2, & x < 0, \\ xe^{x^2}, & x \geq 0, \end{cases}$ 计算定积分 $\int_1^3 f(x-2)dx$, 并计算由曲线段 $y = f(x)$

$(-1 \leq x \leq 0)$ 与直线 $y = x+1$ 及 y 轴所围成图形的面积.

授课教师

姓名

学号

班号

学院

3. (3 分) 计算不定积分 $\int \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x} dx$.

4. (3 分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right)$.

5. (3 分) 设函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $xy' = xe^x - y$, 且 $y(1) = 2$, 求 $y = y(x)$.

四、(4 分) 证明等式 $\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx$ ，其中 $f(x)$ 连续， $a > 0$ ，并计算

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \sin(x^2) dx .$$

五、(5 分) 一容器的内侧是由曲线段 $x^2 + y^2 = a^2$ ($x \geq 0, y \leq \frac{a}{2}, a > 0$) 绕 y 轴旋转一周而成的曲面，

(1) 求容器的容积；

(2) 若将容器内盛满的水从容器中全部抽出，至少需要作多少功？

(长度单位：m，重力加速度 $g \text{ m/s}^2$ ，水的密度 $\rho \text{ kg/m}^3$)

授课教师

姓名

学号

班号

学院

六、(4 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0)=1$, 且满足等式

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0,$$

(1) 求导数 $f'(x)$ 的表达式;

(2) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 不等式 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$ 成立.

七、(3 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有连续二阶导数, 且 $f''(x) \leq 0$, 又已知 $\varphi(x)$

是在区间 $[a, b]$ 上连续的非负函数, 且满足 $\int_a^b \varphi(x) dx = 1$, 证明:

(1) $a \leq \int_a^b x \varphi(x) dx \leq b$;

(2) $\int_a^b \varphi(x) f(x) dx \leq f\left(\int_a^b x \varphi(x) dx\right).$