线代大题大复盘（以模拟卷为载体）

主讲人：夜雨

本讲义集主流模拟卷（张宇八套卷、李林六套卷、李永乐六套卷、李永乐三套卷、李艳芳三套卷、汤家凤八套卷、余炳森五套卷、李擂八套卷）之精华，带大家讲一讲线代大题到底在考些什么！

二次型

求二次型矩阵

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$$

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}$$

设三阶实对称矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),A^2=A$且$r(A)=2,\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$

1）求矩阵A

2）求正交变换$x=Qy$，使得二次型x^TAx化为标准形（汤家凤八套卷卷一）

设A是三阶实对称矩阵，满足$A^2+8A^{-1}=9E$及$AB=B$，其中$B=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & a\end{bmatrix}$，$A\neq E$，

求A（李擂八套卷卷七）

设A是三阶实对称矩阵，x^TA^*x经过正交变换$x=Qy$化为$-y_1^2-y_2^2+y_3^2$，$|A|<0$且Q的第三列为$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

1）求矩阵A

2）求正交变换$x=Q_0y$，使得二次型x^TAx化为标准形（汤家凤八套卷卷四）

平方和形式的二次型

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$

1）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解

2）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形为$f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2+z_2^2$，求正交变换$x=Qy$，使得二次型化为标准形（汤家凤八套卷卷二）

第一问$f(x_1,x_2,x_3)=0\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1-2x_2=0\\x_2-x_3=0\\x_1+ax_3=0\end{cases}$

第二问

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}(1,0,-2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}(0,1,-1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}(1,0,a)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-2&-1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-2&-1&a\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & a \end{pmatrix}^T$秩为2，得$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & a \end{pmatrix}$秩为2

与单位矩阵合同（正定二次型变规范形）

设三阶实对称矩阵$A=(a_{ij})_{3\times 3}$有二重特征值1，且$\sum\limits_{i=1}^{3} a_{ij}=0(j=1,2,3)$

1）求正交矩阵Q，使得$Q^TAQ=\Lambda$

2）求可逆矩阵D，使得$2E-A=D^TD$（李林六套卷卷四）

第二问分析

$2E-A=D^TD \Longleftrightarrow (D^{-1})^T(2E-A)(D^{-1})=E$

设$x^T(2E-A)x \xlongequal{x=Pz} z_1^2+z_2^2+z_3^2$，有$P^T(2E-A)P=E$，取$D^{-1}=P$即可

不走二次型的另一思路

$2E-A=Q(2E)Q^T-Q\Lambda Q^T=Q(2E-\Lambda)Q^T=Q\Lambda_0^2Q^T=(\Lambda_0Q^T)^T(\Lambda_0Q^T)$

带约束条件下的二次型的最值

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，且$f(x_1,x_2,x_3)=0$有无穷多解，若$\eta_1$为二次型矩阵最大特征值对应的单位特征向量，且$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\eta}_1=0$，求

1）a的值

2）$\max\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}$ （张宇八套卷卷八）

如果没有这样$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\eta}_1=0$的约束，就是老掉牙的最值问题

$$\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}\xlongequal{\text{正交变换}x=Qy}\frac{\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\leqslant\lambda_{\max}$$

我们需要将“对$\boldsymbol{x}$的约束”转换成“对$\boldsymbol{y}$的约束”

$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\eta}_1=0\longrightarrow\boldsymbol{y}^TQ^T\boldsymbol{\eta}_1=0$，此时易知需要将$Q,\boldsymbol{\eta}_1$联系起来！

两个二次型比值的最值

设二次型$f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$，$g(x_1,x_2)$的二次型矩阵为$B=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}$

1）是否存在可逆矩阵D，使得$B=D^TD$？若存在，求出矩阵D，若不存在，说明理由

2）求$\max\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}$，其中$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ （张宇八套卷卷二）

第一问分析

$B=D^TD\Longleftrightarrow(D^{-1})^TB(D^{-1})=E$

就是问B是否与E是否合同（即问B是否是正定矩阵）

设$x^TBx\xlongequal{x=Py}y_1^2+y_2^2$，有$P^TBP=E$，取$D^{-1}=P$即可

第二问分析

$\max\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}$ 这个最值大家都会求

那么我们希望把$\max\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}$转化成$\max\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}$

根据第一问 $\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}\xlongequal{x=Py}\dfrac{\boldsymbol{y}^T(P^TAP)\boldsymbol{y}}{y_1^2+y_2^2}$

再去求 $\dfrac{\boldsymbol{y}^T(P^TAP)\boldsymbol{y}}{y_1^2+y_2^2}$ 的最值已经是常规题了

两二次型变同一规范形

已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&4&0\\2&0&a\end{bmatrix}$与矩阵$B=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\-2&8&4\\-2&4&4\end{bmatrix}$合同，求数$a$的值，并求可逆矩阵$P$，使

得$P^TAP=B$（李永乐六套卷卷一）

第一问求a

可以利用实对称矩阵合同的充要条件“正负零特征值个数一致”

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&2\\2&\lambda-8&-4\\2&-4&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-13\lambda+20)$$

得$\begin{vmatrix}1&0&2\\0&4&0\\2&0&a\end{vmatrix}=0$

也可以用矩阵合同的必要条件“秩相等”

$$B=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\-2&8&4\\-2&4&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-2&-2\\0&4&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

第二问核心是将x^TAx和x^TBx变成同一规范形y^TCy（已知A，B合同，则x^TAx和x^TBx有同一规范形）

设$x^TAx\xlongequal{x=My}y^TCy$且$x^TBx\xlongequal{x=Ny}y^TCy$
则有$M^TAM=C=N^TBN$
则有$(MN^{-1})^TA(MN^{-1})=B$，其中MN^{-1}就是我们要求的P
将二次型变成规范形主要有两个方法“配方法和正交变换法”
明显配方法要快得多！

一个二次型变到另外一个二次型
设二次型$f=x^TAx$通过正交变换$x=Qy$化为$g=y^TBy$，其中

$$A=\begin{bmatrix}a&2&2\\2&2&4\\2&4&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}b+c&0&b-c\\0&2b&0\\b-c&0&b+c\end{bmatrix}$$

1）求a,b,c
2）求Q（李擂八套卷卷一）

$$x^TAx\xrightarrow{x=Mz}\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\lambda_3z_3^2\xleftrightarrow[y=Nz]{y=Nz}y^TBy$$

联合$x=Mz$，$y=Nz$得$x=(MN^{-1})y$

$$x^TAx\xrightarrow{(MN^{-1})y}y^TBy$$

二次型等于零的方程解

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1-a & 2a & -1\\ 2 & 1-a & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$的秩为2

1）求常数a的值

2）求一个正交变换$x=Qy$化二次型为标准形

3）求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解（余炳森五套卷卷三）

第一问：注意$\begin{pmatrix}1-a & 2a & -1\\ 2 & 1-a & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$不是二次型的矩阵，$\begin{pmatrix}1-a & a+1 & 0\\ a+1 & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$才是

$$\begin{vmatrix}1-a & a+1 & 0\\ a+1 & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=2[(1-a)^2-(a+1)^2]=-8a$$

第二问常规题为第三问铺垫

$$f\xlongequal{x=Qy}2y_1^2+2y_2^2+0y_3^2$$

$$f=0\Longleftrightarrow 2y_1^2+2y_2^2+0y_3^2=0\Longleftrightarrow y_1=y_2=0$$

相似问题

相似对角化的充要条件

已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 3 & a\end{bmatrix}$的特征多项式有重根，求$a$的值，并判断$A$能否相似对角矩阵，若不能，说明理由；若能，求出可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵（李永乐六套卷卷二）

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ -2 & \lambda-1 & 0\\ -3 & -3 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a)[(\lambda-1)^2-4]=(\lambda-a)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

所有特征值为$a,3,-1$，所以$a=3$或-1

当$a=3$时，就看3是否有两个线性无关的特征向量，即看方程$(3E-A)x=\mathbf{0}$是否有两个线性无关的解

设三阶实矩阵A满足$A^2-A-2E=O$，$|A|=2$

1）证明A可以相似对角化

2）如果A为实对称矩阵，且$\xi=(1,1,-1)^T$是方程组$(A-2E)x=\mathbf{0}$的一个解，求一个对称矩阵B，使得$B^2=A+E$（余炳森五套卷卷五）

相似对角化原理的应用

设$A=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 10\\ -4 & 3 & a\\ -3 & 1 & 7\end{bmatrix}$，且$A$的所有特征向量中只有一个线性无关的特征向量，$B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

1)求a的值

2）是否存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$？若存在求出矩阵P，若不存在，说明理由（张宇八套卷卷七）

分析：A 的所有特征向量中只有一个线性无关的特征向量，可知 A 有三重特征值

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+4 & -2 & -10\\ 4 & \lambda-3 & -a\\ 3 & -1 & \lambda-7\end{vmatrix}=\lambda^3-6\lambda^2+(19-a)\lambda+2a-22$$

带参数 a 如何分解?

令 a 的系数为零，可得多项式的一个零点2

$$\lambda^3-6\lambda^2+(19-a)\lambda+2a-22=(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+11-a)$$

第二问其实和“相似对角化求 P”本质一样

回顾一下

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$$，将 P 按列分块 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$

$$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$$

$$[A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3]=[\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\lambda_3\alpha_3]$$

回到原题中来

$$P^{-1}AP=B$$

$$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$[A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3]=[2\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3]$$

两个矩阵与同一对角矩阵相似

设 $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$（汤家凤八套卷卷一）

$$P_1^{-1}AP_1=\Lambda=P_2^{-1}BP_2\Longrightarrow(P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1})=B$$

设三阶矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，且满足$\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_3\\-\alpha_1+2\alpha_2\\\alpha_2+\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-2&-1\\1&0&-1\end{bmatrix}$

1）证明：x^TA^2x为正定的二次型

2）求可逆矩阵，使得$P^{-1}AP=A^T$（李林六套卷）

若$A\sim\Lambda$，则$A^T\sim\Lambda$

可相似对角化矩阵的性质

若A可以相似对角化，且特征值非负，则存在B使得$A=B^2$

若A可以相似对角化，则存在B使得$A=B^3$

设三阶实矩阵A满足$A^2-A-2E=O$，$|A|=2$

1）证明A可以相似对角化

2）如果A为实对称矩阵，且$\xi=(1,1,-1)^T$是方程组$(A-2E)x=\mathbf{0}$的一个解，求一个对称矩阵B，使得$B^2=A+E$（余炳森五套卷卷五）

经典套路题型：构造相似

$A\alpha_1=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3$，$A\alpha_2=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3$，$A\alpha_3=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3$

$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3]=[a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3,b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3,c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3]$

$=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$

当$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$可逆时，$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$

一般题目的第一问就是要你证明$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$可逆（即证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关）

另一个经典套路题型

$A^3\alpha=a\alpha+bA\alpha+cA^2\alpha$

$A[\alpha,A\alpha,A^2\alpha]=[A\alpha,A^2\alpha,A^3\alpha]=[A\alpha,A^2\alpha,a\alpha+bA\alpha+cA^2\alpha]$

$=[\alpha,A\alpha,A^2\alpha]\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$

当$[\alpha,A\alpha,A^2\alpha]$可逆时，$[\alpha,A\alpha,A^2\alpha]^{-1}A[\alpha,A\alpha,A^2\alpha]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$

设A是三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三维列向量，其中$\alpha_3\neq\mathbf{0}$，若$A\alpha_1=\alpha_2$，$A\alpha_2=\alpha_3$，$A\alpha_3=\mathbf{0}$

1）证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

2）求矩阵A的特征值和特征向量

3）求行列式$|A+2E|$的值（李永乐六套卷卷六）

$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3]=[\alpha_2,\alpha_3,\mathbf{0}]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

设三阶矩阵A与非零向量α满足$A\alpha=\alpha$，不同于α的向量β满足$A\beta=\alpha$，向量γ满足$A\gamma=\alpha+\beta$，求与$A^n(n\geqslant 2)$相似的对角矩阵（李艳芳三套卷卷三）

$$A[\alpha,\beta,\gamma]=[A\alpha,A\beta,A\gamma]=[\alpha,\alpha,\alpha+\beta]=[\alpha,\beta,\gamma]\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

可得A与$B=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$相似

想法一：$B\sim\Lambda$，则$B^n\sim\Lambda^n$，则$A^n\sim B^n\sim\Lambda^n$（先找出B相似的对角矩阵）

想法二：$B^n\sim\Lambda$，则$A^n\sim\Lambda$（先求B^n，再找出B^n相似的对角矩阵）

已知$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$是三阶可逆矩阵，$B$是三阶矩阵，$BA=[\alpha_1,-4\alpha_3,-\alpha_2]$

1）求B所有的特征值

2）求可逆矩阵P及对角矩阵Λ，使得$P^{-1}AP=\Lambda$（李林六套卷卷六）

线性方程组

反求系数矩阵（找到满足的方程）

设$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$是$4\times 3$的矩阵，$\beta=[1,2,-1,3]^T$是$A^Tx=\mathbf{0}$的一个基础解系，求一个矩阵$A$（李永乐六套卷卷五）

矩阵方程（解多个线性方程组）

已知向量组$(I)\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$与向量组

$(II)\beta_1=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}2\\4\\a\end{pmatrix}$，问$a$为何值时，向量组$(I)$与$(II)$等价？求此时满足$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]K$的所有矩阵$K$（李永乐六套卷卷三）

第一问$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2\Longrightarrow r(I)<3\Longrightarrow r(II)<3\Longrightarrow a=-2$

将K按列进行分块$[k_1,k_2,k_3]$

$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]\,[k_1,k_2,k_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$

$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]k_1=\alpha_1$，$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]k_2=\alpha_2$，$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]k_3=\alpha_3$

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&1&1\\4&1&4&2&3&1\\1&1&2&-1&0&-2\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&1&1\\0&1&-4&-2&-1&-3\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

同解方程组的性质

若方程组$Ax=\mathbf{0}$的解均是$Bx=\mathbf{0}$的解，则$Ax=\mathbf{0}$与$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\mathbf{0}$同解

设矩阵$A=\begin{bmatrix}a&1&1\\0&a-1&0\\1&1&a\end{bmatrix}$不可逆，$\beta=\begin{bmatrix}b\\1\\1\end{bmatrix}$，已知方程组$A^Tx=\mathbf{0}$的解均是$\beta^Tx=0$的解

1）求a,b的值

2）求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda$（李林六套卷卷五）

$A^Tx=\mathbf{0}$与$\begin{pmatrix}A^T\\\beta^T\end{pmatrix}x=\mathbf{0}$同解

$r(A^T)=r\begin{pmatrix}A^T\\\beta^T\end{pmatrix}\Longrightarrow r(A)=r(A,\beta)$

正交就有方程

若β,α正交，则β是$\alpha^Tx=\mathbf{0}$的解，α是$\beta^Tx=\mathbf{0}$的解

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为四维线性无关的向量组，又非零向量$\beta_1,\beta_2$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$正交

1）证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$线性无关，但$\beta_1,\beta_2$线性相关

2）令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，且$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix}$，求矩阵$A$（不唯一）（汤家凤八套卷卷八）

β_1,β_2是方程$\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\end{bmatrix}x=\mathbf{0}$的解，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是方程$\begin{bmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\end{bmatrix}x=\mathbf{0}$的解

隐藏的方程

设$\alpha_1=\begin{bmatrix}1-a\\a\\a+1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\a+1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}0\\1\\2(a-1)\end{bmatrix},\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，若$\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且$\beta^T\alpha_i=\gamma^T\alpha_i(i=1,2)$，求

1）a的值

2) γ（张宇八套卷卷五）

$\beta^T\alpha_i=\gamma^T\alpha_i\Longleftrightarrow\langle\alpha_i,\beta\rangle=k_1\langle\alpha_i,\alpha_1\rangle+k_2\langle\alpha_i,\alpha_2\rangle+k_3\langle\alpha_i,\alpha_3\rangle$

$$\begin{cases}\langle\alpha_1,\beta\rangle=k_1\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle+k_2\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle+k_3\langle\alpha_1,\alpha_3\rangle\\\langle\alpha_2,\beta\rangle=k_1\langle\alpha_2,\alpha_1\rangle+k_2\langle\alpha_2,\alpha_2\rangle+k_3\langle\alpha_2,\alpha_3\rangle\end{cases}$$