2025年秋季学期微积分A模拟期末试题答案

题目设计：24-机器人与智能装备-张永智

审核：25-卓越优才-张淮洺，24-计算机与电子通信-陈佳横

答案速查

一					二				
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
D	D	C	A	A	$-\dfrac{\pi}{6}$	$3\sqrt{2}$	0	$x+4y-5=0$	$\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{\pi-2}-e^x\sin x$

三、-1.

四、$-e^{-1}+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

五、(1) $f(x)=x^2+x$；(2) $\dfrac{\pi}{30}$.

六、证明见详解.

详解

一、选择题

1. 分析： 可导需左、右导数存在且相等。对含绝对值的函数，通常分段计算左右导数。

- **A.** $|e^x-\cos x|$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+\sin x}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x-e^x}{x}=-1$$

  左右导数不等，不可导。

- **B.** $e^{|x|}-\cos|x|$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+\sin x}{1}=1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-x} - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-e^{-x} + \sin x}{1} = -1$$

左右导数不等，不可导。

- C. $e^{|x|} - x\cos|x|$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x} - x\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x} - \cos x + x\sin x}{1} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-x} - x\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-e^{-x} - \cos x + x\sin x}{1} = -2$$

左右导数不等，不可导。

- D. $e^{|x|} - |x|\cos|x|$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x} - x\cos x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-x} + x\cos x - 1}{x} = 0$$

左右导数相等，可导。

答案： D

2. **分析：** 渐近线分垂直、水平和斜渐近线。

- **垂直渐近线**
  i. $x = 1$：分母为零，$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$。
  ii. $x = 0$：虽然 $x = 0$ 不在定义域，但 $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$（右侧趋于负无穷），左侧极限为 0，仍属垂直渐近线（单侧无穷）。
- **水平渐近线**
  $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$，故 $y = 0$ 为水平渐近线。
- **斜渐近线**
  无，因已有水平渐近线。

合计： 3条（$x = 0$，$x = 1$，$y = 0$）。

答案： D

3. **分析：** 极限为 e，等价于 $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)\cdot\frac{1-\cos x}{f(x)}=1$。

代入等价无穷小：$\ln(1+x)\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{f(x)}=1\quad\Rightarrow\quad f(x)\sim\frac{1}{2}x^3.$$

对照选项：

- A. $\tan x-x\ \sim\frac{1}{3}x^3$
- B. $e^x-1-x\ \sim\frac{1}{2}x^2$
- C. $x(1-\cos x)\ \sim x\cdot\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^3$
- D. $\frac{1}{2}x^2\ \sim\frac{1}{2}x^2$

答案： C

4. **分析：** 特征方程 $r^2+1=0$，根 $r=\pm i$，通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

答案： A

5. **分析：** 令 $u=x^2-t^2$，则 $t\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\mathrm{d}u$，积分限变为 u 从 x^2 到 0，故

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\,\mathrm{d}u.$$

对 x 求导：$\frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x=xf(x^2)$.

答案： A

二、填空题

1. $-\dfrac{\pi}{6}$

   计算：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{t\sin t}{-3\cos^2 t\sin t}=-\dfrac{t}{3\cos^2 t}$，代入 $t=\frac{\pi}{4}$ 得 $-\frac{\pi}{6}$。
2. $3\sqrt{2}$

   计算：隐函数求导得

$$2x+y+xy'+2yy'=0$$

$$2+2y'+xy''+2(y')^2+2yy''=0$$

代入得 $y'|_{(1,1)}=-1$，$y''|_{(1,1)}=-\frac{2}{3}$，曲率 $\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}$，故半径 $R=3\sqrt{2}$。

3. 0

   计算：令 $u=\sin x$，积分转化为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+e^{\sin x}}\mathrm{d}x=\int_0^0\frac{1}{1+e^u}\mathrm{d}u=0$$

4. $x+4y-5=0$（或 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$）

   计算：由 $y''=2-\frac{2}{x^2}=0$ 得拐点 $(1,1)$，该点切线斜率 $y'(1)=4$，法线斜率 $-\frac{1}{4}$，方程为 $y-1=-\frac{1}{4}(x-1)$。

5. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{\pi-2}-e^x\sin x$

   计算：设 $C=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $f(x)=C-e^x\sin x$，两边同时积分得

$$C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(C-e^x\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}C-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$$

   解得 $C=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{\pi-2}$。

三、计算极限

解：[变限积分换元+洛必达法则+等价无穷小]

令 $u=x^2$，则原极限化为

$$\lim_{u\to 0}\frac{\int_0^u\ln(1+\sin t)\,\mathrm{d}t}{\cos u-1}$$

由洛必达法则，

$$\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+\sin u)}{-\sin u}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{-\sin u}=-1.$$

故极限为 -1。

四、积分计算

解：[分段函数积分]

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0}(e^x-1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[e^x - x\Big]_{-1}^{0} + \Big[-\ln|\cos x|\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= (1-0)-(e^{-1}+1)+\left(-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= -e^{-1}+\frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}
$$

五、解答题

解：

(1) 由 $xf'(x)=f(x)+x^2$ 得

$$
\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=1 \quad (x\neq 0),
$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=1$。积分得

$$
\frac{f(x)}{x}=x+C \quad \Rightarrow \quad f(x)=x^2+Cx.
$$

由 $f'(0)=1$ 得 $C=1$，故

$$
f(x)=x^2+x.
$$

(2) 曲线 $y=x^2+x$ 与 x 轴交于 $x=-1,0$，在 $[-1,0]$ 上 $y\leq 0$。旋转体体积为

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{0} (x^2+x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{0} (x^4+2x^3+x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{0} = \pi \left(0 - \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right) \\
&= \pi \cdot \frac{1}{30} = \frac{\pi}{30}.
\end{aligned}
$$

六、证明题

证明：

(1) 首先，f 定义域为 $[-1,1]$，关于原点对称。

对任意 $x \in [-1,1]$,

$$
f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{\ln(1+x^2) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}x\right)} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{\ln(1+x^2) + \cos\frac{\pi}{2}x} = -f(x),
$$

故 f 为奇函数。

(2) 易得 $f(0)=0$，$f(1) = \dfrac{e-e^{-1}}{\ln 2}$。因 f 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，由拉格朗日中值定理，存在 $a \in (0,1)$ 使得

$$
f'(a) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{e-e^{-1}}{\ln 2}.
$$

(3) 令 $\psi(x) = e^{x}\left(f'(x) - \frac{e-e^{-1}}{\ln 2}\right)$。由 (2) 知 $f'(a) = \frac{e-e^{-1}}{\ln 2}$，又 f' 为偶函数，故 $f'(-a) = f'(a)$，从而 $\psi(a) = \psi(-a) = 0$。由罗尔定理，存在 $b \in (-a,a) \subset (-1,1)$ 使得 $\psi'(b) = 0$。而

$$
\psi'(x) = e^{x}\left(f'(x) + f''(x) - \frac{e-e^{-1}}{\ln 2}\right),
$$

故 $f'(b) + f''(b) = \dfrac{e-e^{-1}}{\ln 2}$，得证。