

2025年秋季学期微积分A模拟期末试题

题目设计：24-机器人与智能装备-张永智

审核：25-卓越优才-张淮洺，24-计算机与电子通信-陈佳横

一、选择题

- 下列函数在 $x = 0$ 处可导的是 ()
 - $|e^x - \cos x|$
 - $e^{|x|} - \cos |x|$
 - $e^{|x|} - x \cos |x|$
 - $e^{|x|} - |x| \cos |x|$
- 函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-1}$ 的渐近线数量为 ()
 - 0 条
 - 1 条
 - 2 条
 - 3 条
- 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{1-\cos x}{f(x)}} = e$, 则 $f(x)$ 的等价无穷小为 ()
 - $\tan x - x$
 - $e^x - 1 - x$
 - $x(1 - \cos x)$
 - $\frac{1}{2}x^2$
- 方程 $y'' + y = 0$ 的通解形式为 ()
 - $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
 - $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
 - $y = (C_1 + C_2 x)e^x$
 - $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$
- 若函数 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} [\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt] = ()$
 - $xf(x^2)$
 - $-xf(x^2)$
 - $2xf(x)$
 - $-2xf(x^2)$

二、填空题

1. 参数方程 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$, 则 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{dy}{dx} =$ _____
2. 曲线 $x^2 + xy + y^2 = 3$ 在点 $(1, 1)$ 处的曲率半径为 _____
3. 计算 $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1 + e^{\sin x}} dx =$ _____
4. 曲线 $y = x^2 + 2 \ln x$ 在拐点处的法线方程为 _____
5. 已知 $f(x) + e^x \sin x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$, 则 $f(x) =$ _____

三、计算极限

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln(1 + \sin t) dt}{\cos x^2 - 1}$.

四、积分计算

已知 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \leq 0 \\ \tan x, & x > 0 \end{cases}$, 求 $\int_{-1}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$.

五、解答题

已知 $xf'(x) = f(x) + x^2$, $f'(0) = 1$, 求:

- (1) $f(x)$ 的表达式;
- (2) 曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴围成一个封闭图形, 令其绕 x 轴旋转形成一个回转体, 求回转体的体积.

六、证明题

已知 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1 + x^2) + \cos \frac{\pi}{2} x}$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 证明:

- (1) $f(x)$ 为奇函数;
- (2) 存在 $a \in (0, 1)$, 使得 $f'(a) = \frac{e - e^{-1}}{\ln 2}$;
- (3) 存在 $b \in (-1, 1)$, 使得 $f''(b) + f'(b) = \frac{e - e^{-1}}{\ln 2}$.