2023级微积分A
期末考试(回忆版)
参考答案

编写&排版:一块肥皂

答案速查:

1. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\dfrac{1}{2}\ln 3$

3. $\sin 1-\cos 1$

4. 3

5. D

6. B

7. A

8. C

9. $F(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 $F(0)=0$;

   曲线 $y=F(x)$ 的拐点对应的横坐标为 $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

   $\displaystyle\int x^2F'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^4}+C$

10. (1) $\displaystyle\int_2^3\frac{\ln(x+1)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\ln 3-\frac{11}{3}\ln 2$

    (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\arctan\frac{1}{2}$

    (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\mathrm{e}^x}\sin(\mathrm{e}^x-t)^2\mathrm{d}t}{x^2\ln(x+1)}=\frac{1}{3}$

11. $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^3+x^2+x+\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}-\ln(\mathrm{e}^x+1)+\ln 2+\dfrac{1}{2}, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$;

    $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,故在 $[-1,1]$ 上不可导(实际上 $x=\pm1$ 时也不可导)

12. $V=\dfrac{\pi}{2}$;

    $W=\dfrac{1}{6}\pi\rho_0 g$

13. 耗时1个月运至国内时剩余冰块的质量为 $\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}}M$

14. $\varphi(t)=t^3+\dfrac{3}{2}t^2$

15. 略;略

16. 略;

    $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nI_n=2(\sqrt{1+\mathrm{e}}-\sqrt{2})+\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}}+1}-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

详解：

1. $y'=1+\dfrac{-2x}{1-x^2}$，则 $y'\big|_{x=0}=1$；

$y''=\dfrac{-2(1-x^2)-(-2x)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\dfrac{-2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$，则 $y''\big|_{x=0}=-2$；

则曲线 $y=x+\ln(1-x^2)$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率 $K\big|_{x=0}=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{x=0}=\dfrac{2}{2^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 曲线 $y=\ln\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的弧长 $s=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\cos^2x}}\,\mathrm{d}x$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec x\,\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right|-\ln|1+0|=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3$.

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n}$

$=\displaystyle\int_0^1 x\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}(-\cos x)=-x\cos x\Big|_0^1-\int_0^1(-\cos x)\,\mathrm{d}x=-x\cos x\Big|_0^1+\sin x\Big|_0^1$

$=-(1\times\cos 1-0\times\cos 0)+(\sin 1-\sin 0)=\sin 1-\cos 1$.

4. 铅直渐近线：令 $\mathrm{e}^x-1=0$ 得铅直渐近线 $x=1$；

水平渐近线：由于 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$，故无水平渐近线；

斜渐近线：先分析正无穷，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\dfrac{1}{x(\mathrm{e}^x-1)}\right]=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}=0$，

故 $y=x+0$ 即 $x-y=0$ 是曲线 $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}$ 的一条斜渐近线；

再分析负无穷，由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1+\dfrac{1}{x(\mathrm{e}^x-1)}\right]=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}=-1$，

故 $y=x+(-1)$ 即 $x-y-1=0$ 是曲线 $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}$ 的另一条斜渐近线.

共 3 条.

5. 由于 $I_2-I_1=\displaystyle\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x$，在 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$\mathrm{e}^{x^2}>0$，$\sin x<0$，故 $\displaystyle\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x<0$ 即 $I_2<I_1$；

同理 $I_3-I_2=\displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x$，在 $x\in(2\pi,3\pi)$ 时，$\mathrm{e}^{x^2}>0$，$\sin x>0$，故 $\displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x>0$ 即 $I_3>I_2$；

而 $I_3-I_1=\displaystyle\int_\pi^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x=\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x\xlongequal{t=x-\pi}\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{(t+\pi)^2}\sin(t+\pi)\,\mathrm{d}t$

$=\displaystyle\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x-\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{(x+\pi)^2}\sin x\,\mathrm{d}x=\int_\pi^{2\pi}\left[\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{(x+\pi)^2}\right]\sin x\,\mathrm{d}x$，

在 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{(x+\pi)^2}<0$，$\sin x<0$，故 $\displaystyle\int_\pi^{2\pi}\left[\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{(x+\pi)^2}\right]\sin x\,\mathrm{d}x>0$ 即 $I_3>I_1$.

综合上式，有 $I_2<I_1<I_3$.

6. 由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1>0$，且 $|x|\geqslant0$，则根据极限的保号性，可知 $\exists\,\delta>0,\ \forall\,x\in(-\delta,\delta)$，有 $f''(x)\geqslant0$，

故 0 不是 $f''(x)$ 的变号零点，故 $(0,f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

而由 $f''(x)\geqslant0$ 且 $f'(0)=0$ 可知，$f'(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内单调递增，且 0 是 $f'(0)$ 的变号零点，

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取到极小值 $f(0)$.

7. 对于选项 A，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x\sin x}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}\frac{1}{x\sin x}\mathrm{d}x$，由于 $0<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{x\sin x}$，而 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_0^1=+\infty$ 发散，根据比较审敛原理可知 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x\sin x}\mathrm{d}x$ 也发散；

对于选项 B，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x$，由于 e^{-x^3} 在 $(0,1)$ 上有界，故前一部分收敛；

而在 $x>1$ 时，$0<\mathrm{e}^{-x^3}<\mathrm{e}^{-x^2}$，而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 显然收敛，

根据比较审敛原理可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x$ 也收敛；

对于选项 C，$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2x}\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln^2x}\mathrm{d}\ln x=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=-\Big(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\ln2}\Big)=-\Big(0-\frac{1}{\ln2}\Big)=\frac{1}{\ln2}$

显然收敛；

对于选项 D，$\displaystyle\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1x\mathrm{d}\ln x=(0-\lim_{x\to0^+}x\ln x)-1=(0-0)-1=-1$ 显然收敛.

8. 对于选项 A,B,D，令 $f(x)=|\sin x|$，显然其都不是周期函数；

对于选项 C，设 $F(x)=\displaystyle\int_0^xf(t)\mathrm{d}t-\int_{-x}^0f(t)\mathrm{d}t$，

令 $g(x)=F(x+T)-F(x)=\displaystyle\int_0^{x+T}f(t)\mathrm{d}t-\int_{-x-T}^0f(t)\mathrm{d}t-\int_0^xf(t)\mathrm{d}t+\int_{-x}^0f(t)\mathrm{d}t$，

则 $g'(x)=f(x+T)-(-1)(-1)f(-x-T)-f(x)+(-1)(-1)f(-x)=f(x)-f(-x)-f(x)+f(-x)\equiv0$，

故 $g(x)=g(0)=\displaystyle\int_0^Tf(t)\mathrm{d}t-\int_{-T}^0f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{u=t+T}\int_0^Tf(t)\mathrm{d}t-\int_0^Tf(u-T)\mathrm{d}(u-T)$

$=\displaystyle\int_0^Tf(t)\mathrm{d}t-\int_0^Tf(t-T)\mathrm{d}t=\int_0^T[f(t)-f(t-T)]\mathrm{d}t=\int_0^T0\mathrm{d}t=0$，即 $F(x+T)=F(x)$，

故 $\displaystyle\int_0^xf(t)\mathrm{d}t-\int_{-x}^0f(t)\mathrm{d}t$ 必以 T 为周期.

9. (1) 令 $F'(x)=2x\mathrm{e}^{-(x^2)^2}=2x\mathrm{e}^{-x^4}=0$ 得 $x=0$，且 $x<0$ 时，$F'(x)<0$；$x>0$，$F'(x)>0$，

故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 $F(0)=0$；

(2) 令 $F''(x)=2\mathrm{e}^{-x^4}+2x\mathrm{e}^{-x^4}(-4x^3)=2\mathrm{e}^{-x^4}(1-4x^4)=0$ 得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

且 $x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$F''(x)<0$；$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$F''(x)>0$，

故 $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 是 $F''(x)$ 的变号零点，则曲线 $y=F(x)$ 的拐点对应的横坐标为 $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

(3) $\displaystyle\int x^2F'(x)\mathrm{d}x=\int2x^3\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}(-x^4)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^4}+C$.

10.（1）$\int_2^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx = -\int_2^3 \ln(x+1)d\frac{1}{x} = -\frac{\ln(x+1)}{x}\Big|_2^3 + \int_2^3 \frac{1}{x}d\ln(x+1)$

$= -\left(\frac{\ln 4}{3} - \frac{\ln 3}{2}\right) + \int_2^3 \frac{1}{x(x+1)}dx = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2 + \int_2^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2 + \ln x\Big|_2^3 - \ln(x+1)\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2 + \ln 3 - \ln 2 - \ln 4 + \ln 3$

$= \frac{5}{2}\ln 3 - \frac{11}{3}\ln 2$；

（2）$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}dx \xlongequal{x=\tan t} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sec^2 t}{(2\tan^2 t+1)\sec t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{2\sin^2 t + \cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin^2 t + 1}d\sin t$

$= \arctan\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \arctan\sin\frac{\pi}{6} - \arctan\sin 0 = \arctan\frac{1}{2}$；

（3）分子$= \int_1^{e^x} \sin(e^x - t)^2 dt \xlongequal{u=e^x-t} \int_{e^x-1}^0 \sin u^2 d(e^x - u) = \int_0^{e^x-1} \sin u^2 du$；

对于分母，当 $x \to 0$ 时，$x^2\ln(x+1) \sim x^3$；

故原极限$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{e^x-1}\sin u^2 du}{x^3} \xlongequal{\text{L'hospital}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x \sin(e^x-1)^2}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}e^x \cdot \lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$.

11.（1）当 $-1 \leqslant x \leqslant 0$ 时，$F(x) = \int_{-1}^x \left(\frac{3}{2}t^2 + 2t + 1\right)dt = \int_{-1}^x \left(\frac{3}{2}t^2 + 2t + 1\right)dt = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + t\Big|_{-1}^x$

$= \frac{1}{2}x^3 + x^2 + x - \frac{1}{2}(-1)^3 - (-1)^2 - (-1) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{2}$；

当 $0 < x \leqslant 1$ 时，$F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt = \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = F(0) + \int_0^x \frac{te^t}{(e^t+1)^2}dt$

$= \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{te^t}{(e^t+1)^2}dt = \frac{1}{2} - \int_0^x td\frac{1}{e^t+1} = \frac{1}{2} - \frac{t}{e^t+1}\Big|_0^x + \int_0^x \frac{1}{e^t+1}dt = \frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \int_0^x \frac{1}{e^t(e^t+1)}de^t$

$= \frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \int_0^x \left(\frac{1}{e^t} - \frac{1}{e^t+1}\right)de^t = \frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \ln e^t\Big|_0^x - \ln(e^t+1)\Big|_0^x$

$= \frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + x - \ln(e^x+1) + \ln 2 = \frac{xe^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1) + \ln 2 + \frac{1}{2}$；

综上，$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{2}, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{xe^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1) + \ln 2 + \frac{1}{2}, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$.

（2）显然，当 $-1 < x < 0$ 或 $0 < x < 1$ 时，$F'(x) = f(x)$ 在 $(-1,0)$ 或 $(0,1)$ 内连续，$F(x)$ 是可导的；

但当 $x = 0$ 时，$F'_-(0) = f_-(0) = 1$，$F'_+(0) = f_+(0) = 0$，故 $F'_-(0) \neq F'_+(0)$ 即 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导；

事实上，$F(x)$ 在 $x = \pm 1$ 时，由于缺少 $x < -1$ 或 $x > 1$ 的定义，自然也是不可导的.

综上，$F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上不可导.

12.（1）对于 $y \in [0,1]$，$dV = \pi x^2 dy = \pi y dy$，

两边积分得 $V = \int_0^1 \pi y dy = \frac{\pi x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$；

（2）对于 $y \in [0,1]$，$dW = \rho_0(\pi x^2 dy)g \cdot (1-y) = \pi\rho_0 g(y - y^2)dy$，

两边积分得 $W = \pi\rho_0 g\int_0^1 (y - y^2)dy = \pi\rho_0 g\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^1 = \pi\rho_0 g\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}\pi\rho_0 g$.

13. 依题意得：$-\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=km$，其中 $k=0.9\sqrt{t}$，即 $\dfrac{\mathrm{d}m}{m}=-\dfrac{9}{10}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$，

两边积分有：$\ln m=-\dfrac{3}{5}t^{\frac{3}{2}}+C_0$，

取以 e 为底的指数：$m=\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}t^{\frac{3}{2}}+C_0}=\mathrm{e}^{C_0}\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}t^{\frac{3}{2}}}$，

不妨令 $C=\mathrm{e}^{C_0}$，则 $m=C\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}t^{\frac{3}{2}}}$.

又由于 $m\Big|_{t=0}=M=C\times\mathrm{e}^0=C$，故 $C=M$，回代得到 $m=M\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}t^{\frac{3}{2}}}$.

则 $m\Big|_{t=1}=M\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}\times1^{\frac{3}{2}}}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}}M$.

综上，耗时 1 个月运至国内时剩余冰块的质量为 $\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}}M$.

14. 由于 $\mathrm{d}y=\varphi'(t)\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}x=(2t+2)\mathrm{d}t$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\varphi'(t)}{2(t+1)}$，

进而 $\mathrm{d}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(t+1)\varphi''(t)-\varphi'(t)}{(t+1)^2}\mathrm{d}t$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(t+1)\varphi''(t)-\varphi'(t)}{4(t+1)^3}=\dfrac{3}{4(t+1)}$，

即 $\varphi''(t)-\dfrac{1}{t+1}\varphi'(t)=3(t+1)$，这是一关于 $\varphi'(t)$ 的一阶线性微分方程，

其中 $P(t)=-\dfrac{1}{t+1}$，$Q(t)=3(t+1)$，$\mathrm{e}^{\int P(t)\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-\ln(t+1)}=\dfrac{1}{t+1}$，$\mathrm{e}^{\int-P(t)\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{1}{t+1}\right)^{-1}=t+1$.

则 $\varphi'(t)=\left(\displaystyle\int\mathrm{e}^{\int P(t)\mathrm{d}t}Q(t)\mathrm{d}t+C_1\right)\cdot\mathrm{e}^{\int-P(t)\mathrm{d}t}=\left(\displaystyle\int\frac{1}{t+1}\cdot3(t+1)\mathrm{d}t+C_1\right)\cdot(t+1)=(3t+C_1)(t+1)$，

由于 $\varphi'(1)=(3+C_1)(1+1)=6+2C_1=6$，故 $C_1=0$，即 $\varphi'(t)=3t(t+1)=3t^2+3t$，

两边积分，有 $\varphi(t)=\displaystyle\int(3t^2+3t)\mathrm{d}t=t^3+\frac{3}{2}t^2+C_2$，由于 $\varphi(1)=1+\dfrac{3}{2}+C_2=\dfrac{5}{2}+C_2=\dfrac{5}{2}$，故 $C_2=0$.

综上，$\varphi(t)=t^3+\dfrac{3}{2}t^2$.

15. (1) 由于 $f(0)=0$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为 $f(x)=f'(0)x+f''(\zeta)\dfrac{x^2}{2}$，$\zeta\in(0,x)$ 或 $\zeta\in(x,0)$，

令 $x=a$，有 $f(a)=f'(0)a+f''(\xi_1)\dfrac{a^2}{2}$，$\xi_1\in(0,a)$；

令 $x=-a$，有 $f(-a)=-f'(0)a+f''(\xi_2)\dfrac{a^2}{2}$，$\xi_2\in(-a,0)$，

两式相加，得：$f(a)+f(-a)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}a^2$ 即 $\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}=\dfrac{f(a)+f(-a)}{a^2}$.

不妨设 $m=\min\limits_{-a<x<a}f''(x)$，$M=\max\limits_{-a<x<a}f''(x)$，则 $m\leqslant f''(\xi_1)\leqslant M$，$m\leqslant f''(\xi_2)\leqslant M$，

两式相加，得：$2m\leqslant f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\leqslant 2M$ 即 $m\leqslant\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\leqslant M$，

根据介值定理，$\exists\,\xi\in(-a,a)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$，

进而有：$f''(\xi)=\dfrac{f(a)+f(-a)}{a^2}$，证毕；

(2)若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 有极值，则 $\exists\, b\in(-a,a)$，使得 $f'(b)=0$，

则根据拉格朗日中值定理，$\exists\,\eta\in(-a,b)$ 或 (b,a) 即 $\exists\,\eta\in(-a,a)$，使得 $f'(x)-f'(b)=f''(\eta)(x-b)$，

即 $f'(x)=f''(\eta)(x-b)$.

$$\text{则 } |f(a)-f(-a)|=\left|\int_{-a}^{a}f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{-a}^{a}|f'(x)|\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}|f''(\eta)(x-b)|\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}|f''(\eta)||(x-b)|\mathrm{d}x$$

$$=|f''(\eta)|\int_{-a}^{a}|(x-b)|\mathrm{d}x=|f''(\eta)|\left[\int_{-a}^{b}(b-x)\mathrm{d}x+\int_{b}^{a}(x-b)\mathrm{d}x\right]$$

$$=|f''(\eta)|\left[b(b+a)-\frac{b^2-a^2}{2}-b(a-b)+\frac{a^2-b^2}{2}\right]=|f''(\eta)|(a^2+b^2)$$

$$\leqslant|f''(\eta)|(a^2+a^2)=2a^2|f''(\eta)|,$$

即 $|f''(\eta)|\geqslant\dfrac{|f(a)-f(-a)|}{2a^2}$，证毕.

16.(1)由于当 $x\in\left(1,1+\dfrac{1}{n}\right)$ 时，有 $0<1=\sqrt{1}\leqslant\sqrt{1+x^n}\leqslant1+x^n$，

$$\text{积分有：}\frac{1}{n}=\int_{1}^{1+\frac{1}{n}}1\mathrm{d}x\leqslant I_n\leqslant\int_{1}^{1+\frac{1}{n}}(1+x^n)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}+\frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{1}^{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=0-0+0\times\mathrm{e}=0$，

则根据夹逼准则，有 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$，证毕.

(2)由于 $nI_n=n\displaystyle\int_{1}^{1+\frac{1}{n}}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x\xlongequal{t=n(x-1)}n\int_{0}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{t}{n}+1\right)^n}\mathrm{d}\left(\frac{t}{n}+1\right)=\int_{0}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{t}{n}+1\right)^{\frac{n}{t}\cdot t}}\mathrm{d}t$，

令 $u=\dfrac{t}{n}\in(0,1)$，现在固定 t 的值，下证明在 n 增加时 $\sqrt{1+\left(\dfrac{t}{n}+1\right)^{\frac{n}{t}\cdot t}}=\sqrt{1+(u+1)^{\frac{1}{u}\cdot t}}$ 单调.

设 $f(u)=(1+u)^{\frac{1}{u}}>1>0$，则 $\ln f(u)=\dfrac{1}{u}\ln(1+u)$，

$$\text{两边求导得：}\frac{f'(u)}{f(u)}=\frac{\frac{u}{u+1}-\ln(u+1)}{u^2}=\frac{1-\frac{1}{u+1}+\ln\frac{1}{u+1}}{u^2}\leqslant\frac{1-\frac{1}{u+1}+\frac{1}{u+1}-1}{u^2}=0,$$

故 $f'(u)\leqslant0$，即 $f(u)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，即在 $n\to\infty$时，$u\to0$，$f(u)$ 增加.

进而 $nI_n=\displaystyle\int_{0}^{1}\sqrt{1+[f(u)]^t}\,\mathrm{d}t$ 单调增加，由(1)易知 $nI_n\leqslant\dfrac{n}{n}-\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{n}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{n}-\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{n}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]=\mathrm{e}$，故 nI_n 有界，综合可知 $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n$ 存在.

$$\text{则 }\lim_{n\to\infty}nI_n=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \frac{n}{t}\to\infty}}\int_{0}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{t}{n}+1\right)^{\frac{n}{t}\cdot t}}\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}\sqrt{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t\xlongequal{p=\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}}}p\,\mathrm{d}\ln(p^2-1)=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}}}\frac{2p^2}{p^2-1}\mathrm{d}p$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}}}\left(2+\frac{2}{p^2-1}\right)\mathrm{d}p=2(\sqrt{1+\mathrm{e}}-\sqrt{2})+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}}}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)\mathrm{d}p$$

$$=2(\sqrt{1+\mathrm{e}}-\sqrt{2})+\ln\frac{p-1}{p+1}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}}}=2(\sqrt{1+\mathrm{e}}-\sqrt{2})+\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}}+1}-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$