24线代期中答案

制作人：学术讨论群全体成员

撰写者：Jaccck 混子 天赐 卡基米 寒金 Yasumi 潜伏 speculator 黄鹂 离谱 老汉 饭饭 牧博

对此试卷的点评（by:潜伏）:这张卷子相比前两年难度有较大的提升，难点在证明题，同时考验了解题思维和计算能力。考完之后也是哀鸿遍野：这张卷秩考的少，是弱秩卷😜 不过只要知识点牢固，熟悉一些做题技巧，拥有一点数学思维，还是可以拿到高分的。

以下每道题的tips都来自本人的在考场上的做法和本人的知识点总结。

填空题

1. 0

> $R(AB) \leq min\{R(A), R(B)\}$
>
> $r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) \leq n-2 \end{cases}$
>
> 根据以上两个公式解题即可

2.

$$(n+1)^{(n-1)^2}$$

> 知识点：
>
> $$|A^*| = |A|^{n-1}$$

3. 24

4.

$$|A|^{n-2}a_{nn}$$

5.

$$11x - 14y - 13z + 3 = 0$$

选择题

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.C

线性方程组的解的充要条件:$B^TX=0$ 等价于 $R(B^T)<n$

3.C

易错点：次数为偶数，所以det(A)不一定等于det(B);

知识点：任何可逆的矩阵均可以表示成E进行一系列初等行列变换的样式

4.A

克拉默法则，其次就是注意或和且

5.C

解答题

三.

直线 L_1 的方向向量

$$\vec{s_1}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=(0,3,3),$$

直线 L_2 的方向向量 $\vec{s_2}=(-2,1,0)$.

$$\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&3&3\\-2&1&0\end{vmatrix}=(-3,-6,6).$$

在 L_1 上取一点 $A(0,0,1)$，L_2 上取一点 $B(0,0,-2)$，$\overrightarrow{AB}=(0,0,-3)$ 则 L_1 与 L_2 之间的距离

$$d=\left|\overrightarrow{AB}\cdot\frac{\vec{s_1}\times\vec{s_2}}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}=2\right|.$$

知识点：异面直线的距离

第一步：先对两条直线做叉乘得到 $\vec{n}$

第二步：在两条直线分别找一点得到$\vec{m}$

第三步：用公式：$d=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{\vec{n}}$

四.

(1)

$$\because (A\quad B)=\begin{pmatrix}1&2&2&1&1\\1&2&3&2&-1\\3&2&1&0&-1\\-1&2&3&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-2\\0&1&0&0&4\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}=(E\quad A^{-1}B),$$

$$\therefore C=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-2\\4\\-3\\1\end{pmatrix}.$$

(2)

$$\because C^{\mathrm{T}}C=30,$$

$$\therefore (CC^{\mathrm{T}})^3=900CC^{T}.$$

$$\therefore |-E+(CC^{\mathrm{T}})^3|=\begin{vmatrix}-E+900CC^{\mathrm{T}}&0\\C^{\mathrm{T}}&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-900Cr_2}\begin{vmatrix}-E&-900C\\C^{\mathrm{T}}&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+C^{\mathrm{T}}r_1}\begin{vmatrix}-E&-900C\\0&1-900C^{\mathrm{T}}C\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^4(1-900C^{\mathrm{T}}C)=-26999.$$

第一问:就是写出 (A,B)的增广矩阵即可，然后暴力变换，最后不放心可以乘上A进行验算

第二问：降阶公式(重要考点)每年必考

五.

五、解析

(1)证明:

$$\because \alpha^{\mathrm{T}}A\alpha=(\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha)^{\mathrm{T}}=\alpha^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\alpha=-\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha,$$

$$\therefore \alpha^{\mathrm{T}}A\alpha=0.$$

又 $(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(-A)^{-1}=-A^{-1}$,

则 A^{-1} 也为反对称矩阵.

同上可得 $\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha=0$.

$$\therefore \alpha^{\mathrm{T}}A\alpha=\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha=0.$$

(2)

$$\because M=\begin{vmatrix}A&\alpha\\\alpha^{\mathrm{T}}&b\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}r_1}\begin{vmatrix}A&\alpha\\0&b-\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&\alpha\\0&b\end{vmatrix}=b\,|A|\neq 0,$$

$\therefore M$ 可逆.

$$\because (M\quad E_{n+1})=\begin{pmatrix}A&\alpha&E_n&0\\\alpha^{\mathrm{T}}&b&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}r_1}\begin{pmatrix}A&\alpha&E_n&0\\0&b&-\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-\frac{1}{b}\alpha r_2}\begin{pmatrix}A&0&E_n+\frac{\alpha\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}}{b}&-\frac{1}{b}\alpha\\0&b&-\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{b}r_2]{A^{-1}r_1}\begin{pmatrix}E_n&0&A^{-1}+\frac{A^{-1}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}}{b}&-\frac{1}{b}A^{-1}\alpha\\0&1&-\frac{1}{b}\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}&\frac{1}{b}\end{pmatrix}=(E_{n+1}\quad M^{-1}),$$

$$\therefore M^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}+\frac{A^{-1}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}}{b}&-\frac{1}{b}A^{-1}\alpha\\-\frac{1}{b}\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}&\frac{1}{b}\end{pmatrix}$$

$$\therefore X=M^{-1}e_{n+1}=\begin{pmatrix}A^{-1}+\frac{A^{-1}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}}{b}&-\frac{1}{b}A^{-1}\alpha\\-\frac{1}{b}\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}&\frac{1}{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0_{n\times 1}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{b}A^{-1}\alpha\\\frac{1}{b}\end{pmatrix}.$$

本题的要点在于注意到$a^TA\alpha$为一个数，用取转置的公式再使用用题目条件即可

第三问其实考的是分块矩阵初等变换，可逆和求X均可以使用。本答案的编写者是选择先求M^-1,不过其实可以直接把e_{n+1}放到右边形成增广矩阵，再进行初等行变换即可

六.

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)^T$. 如果 $a=0$，那么 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.
这方程组存在非零解，因此 $|\mathbf{A}|=0$. 这与 $\mathbf{A}$ 可逆矛盾，因此必有 $a=0$.
(2) 在等式 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{\alpha}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得 $\boldsymbol{\alpha}=a\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$，则 $\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$，这说明 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 每行元素和为 $\frac{1}{a}$.

第一问：善用反证法

第二问：这个算是一个技巧性的东西

关于最后一题笔者还有一个做法：

$$\text{对于第}i\text{行，设和为}S=\frac{A_{1i}+\ldots+A_{ni}}{|A|}\text{(逆矩阵与伴随矩阵的关系)}$$

$$|A|S=\begin{pmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & 1 & a_{1i+1}\ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & 1 & a_{ni+1}\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{将其他列的项统统加到第}i\text{列我们不难注意到式子会变成}:\begin{pmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & (a+1)-a_{1i} & a_{1i+1}\ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & (a+1)-a_{ni} & a_{ni+1}\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{拆开之后我们发现}|A|S=(a+1)|A|S-|A|,\text{最后解得和为}\frac{1}{a}$$

对于这个做法,只有一句话:attention is all you need! 😜