高数选填做题技巧

主讲人 夜雨

以主流模拟卷的核心题为载体，给高数小题做一个做题技巧的总结，相信大家看完一定收获满满！

反常积分的判断

1）一般情况，将被积函数等价成p积分（$\dfrac{1}{(x-a)^p}$或$\dfrac{1}{x^p}$）

2）对于带$\ln x$的积分，将被积函数等价成等价成$\dfrac{1}{x^p\ln^q x}$

当$p\neq1$时，$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x^p\ln^q x}dx$与$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x^p}dx$同敛散，$\int_{\frac{3}{2}}^{+\infty}\dfrac{1}{x^p\ln^q x}dx$与$\int_{\frac{3}{2}}^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx$同敛散

也就是说$\ln^q x$不影响敛散性，可忽略！

当$p=1$时，$\dfrac{1}{x\ln^q x}dx=\dfrac{1}{\ln^q x}d\ln x=\begin{cases}\ln\ln x, q=1\\ \dfrac{\ln^{1-q}x}{1-q}, q\neq1\end{cases}$（直接可以积出来）

3）对于带e^x的积分，一般加绝对值放缩成x^α

$x\to+\infty$时，$e^x\gg x^\alpha$

4）带$\sin x$，$\cos x(x\to+\infty)$，一般加绝对值放缩成 1

注：瑕点的定义是“无穷间断点”，间断点不一定是瑕点，比如$\int_0^1\dfrac{\sin x}{x}dx$无瑕点，必收敛

汤八卷一

7. 下列反常积分发散的是(　　).

A. $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$

B. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}\frac{1}{1+x|x|}\mathrm{d}x$

C. $\displaystyle\int_0^1\ln^2 x\,\mathrm{d}x$

D. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{\sqrt{x^3-x}}\mathrm{d}x$

')» B.

【解】 方法一 因为$\lim\limits_{x\to0^+}(x-0)^{\frac{3}{4}}\cdot\dfrac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{4}}\cdot\ln x=0$ 且 $\alpha=\dfrac{3}{4}<1$.

又因为$\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ 且 $\alpha=\dfrac{1}{2}<1$,所以$\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ 收敛.

因为$\lim\limits_{x\to0^+}(x-0)^{\frac{1}{2}}\ln^2x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln^2x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}}=-4\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x=0$ 且 $\alpha=\dfrac{1}{2}<1$,

所以$\displaystyle\int_0^1\ln^2x\,dx$ 收敛.

因为 $x\in[1,+\infty)$,所以 $\arctan x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$,则 $0<\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x^3-x}}\leqslant\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^3-x}}$,因为

$\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^3-x}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\alpha=\dfrac{1}{2}<1$,$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{x^3-x}}=1$ 且 $x=\dfrac{3}{2}>1$,所以 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3-x}}dx$ 收敛,由比较判别法,得$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{\sqrt{x^3-x}}dx$ 收敛,排除法可知,应选 B.

方法二 直接法.因为$\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)\cdot\dfrac{1}{1+x|x|}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)\cdot\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}$ 且 $\alpha=1\geqslant1$,所以$\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}\frac{1}{1+x|x|}dx$ 发散,应选 B.

【备考策略】判断反常积分是否收敛的方法有很多,建议考生在冲刺阶段先集中使用一种方法,增加这种方法的熟练度.

汤八卷八

3. 下列反常积分发散的是(　　).

A. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}dx$

B. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^{-x^2}}{x+1}dx$

C. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}(1+2x)}dx$

D. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$

③» D.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x^x=\ln 1=0$ 且 $\alpha=\frac{1}{2}<1$,再由

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{4}}\cdot\frac{\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{4}}}=0 \text{ 且 } \alpha=\frac{5}{4}>1,$$

得 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

由 $\frac{x^2e^{-x^2}}{x+1}\geqslant0$,$\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^{-x^2}}{x+1}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x$ 且 $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛,得 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^{-x^2}}{x+1}\mathrm{d}x$ 收敛.

$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}(1+2x)}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}(1+2x)}$,由 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}(1+2x)}=1$ 且 $\alpha=\frac{1}{2}<1$,再由 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}(1+2x)}=\frac{1}{2}$ 且 $\alpha=\frac{3}{2}>1$,得 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+2x)}\mathrm{d}x$ 收敛,从而 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}(1+2x)}\right|\mathrm{d}x$ 收敛,即 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}(1+2x)}\mathrm{d}x$ 绝对收敛,故 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}(1+2x)}\mathrm{d}x$ 收敛.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^1\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}=1$ 且 $\alpha=1\leqslant1$,所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x}}$ 发散,应选 D.

张八卷三

3. 设常数 $m>0,n>0$,则 $\int_0^n\sqrt{x}\left[\frac{m}{x}\right]\mathrm{d}x$([·]是取整符号)的敛散性

A. 仅与 m 有关.

B. 仅与 n 有关.

C. 与 m,n 均有关.

D. 与 m,n 均无关.

3.【答案】 D

【分析】 令 $\frac{m}{x}=y$,则 $x=\frac{m}{y}$,$\mathrm{d}x=-\frac{m}{y^2}\mathrm{d}y$,故

$$\int_0^n\sqrt{x}\left[\frac{m}{x}\right]\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^{\frac{m}{n}}\sqrt{\frac{m}{y}}[y]\left(-\frac{m}{y^2}\right)\mathrm{d}y$$
$$=m^{\frac{3}{2}}\int_{\frac{m}{n}}^{+\infty}\frac{[y]}{y^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}y.$$

由于 $[y]\leqslant y$,故 $\frac{[y]}{y^{\frac{5}{2}}}\leqslant\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}$. 又 $\int_{\frac{m}{n}}^{+\infty}\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y$ 收敛,由比较判别法,有 $\int_{\frac{m}{n}}^{+\infty}\frac{[y]}{y^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}y$ 收敛,故 $\int_0^n\sqrt{x}\left[\frac{m}{x}\right]\mathrm{d}x$ 的敛散性与 m,n 均无关.

李艳芳卷二

4 设 q 为非零常数,若积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}\mathrm{d}x$ 收敛,则必有(　　)

(A) $q>0$.　　(B) $q<0$.　　(C) $\frac{1}{2}<p<2$.　　(D) $0<p<\frac{1}{2}$.

答案 C.

解 由于被积函数$\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}$在积分区间上有一个可能的瑕点 $x=1$,故将积分分成两部分.

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx=\int_1^2\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx+\int_2^{+\infty}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx.$$

若$\int_1^{+\infty}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx$收敛,则$\int_1^2\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx$与$\int_2^{+\infty}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx$均收敛.

先考虑$\int_1^2\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx$.

当 $p\leqslant 0$ 时,$\int_1^2\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx$为普通定积分. 当 $p>0$ 时,

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}\xlongequal{(1+x-1)^q-1\sim q(x-1)}\lim_{x\to1^+}\frac{q(x-1)}{x^p(x-1)^p}=q\lim_{x\to1^+}\frac{1}{(x-1)^{p-1}}.$$

于是,$\int_1^2\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx$与$\int_1^2\frac{1}{(x-1)^{p-1}}dx$同敛散. 由于当 $p-1\leqslant0$ 时,$\int_1^2\frac{1}{(x-1)^{p-1}}dx$是普通定积分,当且仅当 $0<p-1<1$ 时,反常积分$\int_1^2\frac{1}{(x-1)^{p-1}}dx$收敛,故当且仅当 $p<2$ 时,积分$\int_1^2\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx$收敛.

再考虑$\int_2^{+\infty}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx$.

当 $q<0$ 时,$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^q-1)=-1$,从而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x^2-x)^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2p}}{(x^2-x)^p}\cdot\frac{1}{x^{2p}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{2p}}.$$

于是,$\int_2^{+\infty}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx$与$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{2p}}dx$同敛散,而当且仅当 $p>\frac{1}{2}$ 时,反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{2p}}dx$收敛,故当 $q<0,p>\frac{1}{2}$ 时,$\int_2^{+\infty}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx$收敛,当 $q<0,p\leqslant\frac{1}{2}$ 时,$\int_2^{+\infty}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx$发散.

当 $q>0$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^q}}{x^{p-q}(x-1)^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2p-q}}{x^{p-q}(x-1)^p}\cdot\frac{1}{x^{2p-q}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{2p-q}}.$$

于是,$\int_2^{+\infty}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx$与$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{2p-q}}dx$同敛散,而当且仅当 $2p-q>1$ 时,反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{2p-q}}dx$收敛,故当 $q>0,2p-q>1$ 时,$\int_2^{+\infty}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx$收敛,当 $q>0,2p-q\leqslant1$ 时,$\int_2^{+\infty}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx$发散.

综合对两个积分的讨论可得,$\int_1^{+\infty}\frac{x^q-1}{(x^2-x)^p}dx$收敛有两种情况:① $q<0,\frac{1}{2}<p<2$,② $q>0$,$2p-q>1$ 且 $p<2$. 由 $q>0,2p-q>1$ 可得,$p>\frac{1+q}{2}>\frac{1}{2}$,故 $\frac{1}{2}<p<2$.

变上限积分函数奇偶性判断

定义判断稍微费时间，直接上技巧

偶函数×偶函数＝偶函数（＋×＋＝＋）

奇函数×偶函数＝奇函数（－×＋＝－）

奇函数×奇函数＝偶函数（－×－＝＋）

$\int_0^x$ 奇 $dt=$ 偶

$\int_0^x$ 偶 $dt=$ 奇

若干奇偶函数复合

若全部是奇函数，则复合的结果是奇函数

若有一个是偶函数，则复合的结果是偶函数

张八卷四

2. $f(x)=\int_0^{\sin x}|x|e^{t^2}dt(x\in\mathbf{R})$ 是

A. 有界函数.　　B. 单调函数.

C. 周期函数.　　D. 奇函数.

【分析】 $f(x)=|x|g[h(x)]$，其中 $h(x)=\sin x, g(u)=\int_0^u e^{t^2}dt$，由于 $|x|$ 是偶函数，$g[h(x)]$ 是奇函数，故 $f(x)$ 为奇函数.

两式差的等价量求法

1）若 $f/g\to1$，$f-g=g\left(\dfrac{f}{g}-1\right)\sim g\ln\dfrac{f}{g}=g(\ln f-\ln g)$（$f,g$ 带指数，根号都可以利用此方法去掉）

2）若 $f/g\nrightarrow1$，设 $f\sim ax^n,g\sim bx^n$，则 $f-g\sim(a-b)x^n$

3）若 f,g 不同阶，则高阶被低阶吸收，$f-g\sim-g$ 或 f

李艳芳卷二

1 设$\alpha_1 = \sin\sqrt{x} - \sin(2\sqrt{x})$，$\alpha_2 = e^{\sqrt[3]{x}} - e^{\sqrt{x}}$，$\alpha_3 = \sqrt[3]{8+x} - \sqrt[3]{8-x}$. 当$x \to 0^+$时，以上3个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是(　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　(B) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$.　(C) $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$.　(D) $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$.

答案 C.

解 当$x \to 0^+$时，

$$\alpha_1 = \sin\sqrt{x} - \sin(2\sqrt{x}) = \sin\sqrt{x} - 2\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x} = \sin\sqrt{x}(1 - 2\cos\sqrt{x})$$

$$\sim -\sin\sqrt{x} \sim -\sqrt{x}.$$

$$\alpha_2 = e^{\sqrt[3]{x}} - e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt[3]{x}}(1 - e^{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}) \sim \sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = x^{\frac{1}{3}}(1 - x^{\frac{1}{6}}) \sim x^{\frac{1}{3}}.$$

此外，

$$\alpha_3 = \sqrt[3]{8+x} - \sqrt[3]{8-x} = \frac{(\sqrt[3]{8+x} - \sqrt[3]{8-x})[\sqrt[3]{(8+x)^2} + \sqrt[3]{64-x^2} + \sqrt[3]{(8-x)^2}]}{\sqrt[3]{(8+x)^2} + \sqrt[3]{64-x^2} + \sqrt[3]{(8-x)^2}}$$

$$= \frac{8+x-8+x}{\sqrt[3]{(8+x)^2} + \sqrt[3]{64-x^2} + \sqrt[3]{(8-x)^2}} = \frac{2x}{\sqrt[3]{(8+x)^2} + \sqrt[3]{64-x^2} + \sqrt[3]{(8-x)^2}}.$$

于是，

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha_3}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{8+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{2}{\sqrt[3]{(8+x)^2} + \sqrt[3]{64-x^2} + \sqrt[3]{(8-x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{2}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{6}.$$

由此可得，当$x \to 0^+$时，$\alpha_3 \sim \frac{1}{6}x$.

比较$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的阶，只需要比较与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$等价的$-\sqrt{x}, x^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{6}x$中$x$的次数，次数越高，无穷小量的阶越高.

因此，正确的排序(阶从低到高)应当为$\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$，应选C.

张八卷五

2. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n^x\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right]$在$x=1$处

A. 左极限存在，右极限不存在.

B. 左极限不存在，右极限存在.

C. 左、右极限都存在，但不相等.

D. 连续.

2.【答案】 A

【分析】

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}n^x\left[e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-e\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^x\left[e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}-1\right]\cdot e$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^x\left\{e^{n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1}-1\right\}\cdot e$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^x\left[e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right]\cdot e$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^x\left[-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\cdot e$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{e}{2}\cdot\frac{1}{n^{1-x}}+o\left(\frac{1}{n^{1-x}}\right)\right]$$

$$=\begin{cases}0, & x<1,\\ -\frac{e}{2}, & x=1,\\ -\infty, & x>1,\end{cases}$$

易知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处，左极限存在，右极限不存在.

变上限积分的等价无穷小

李六卷三

1. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\cos x-1}=1$，当 $x\to0$ 时，$\int_0^{\sin^2 x}f(t)\mathrm{d}t$ 与 ax^n 是等价无穷小，则

A. $a=-1$，$n=5$.　B. $a=1$，$n=5$.　C. $a=-\frac{1}{6}$，$n=6$.　D. $a=\frac{1}{6}$，$n=6$.

1. **答案** C

解析 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{-\dfrac{1}{2}x^2}=1$，知 $f(x)\sim -\dfrac{1}{2}x^2\,(x\to 0)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}f(t)\mathrm{d}t}{ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x}{nax^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}(\sin^2 x)^2\cdot 2\sin x\cos x}{nax^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^5}{nax^{n-1}}=1,$$

张八卷五

1. 设 $x\to 0$ 时，$\int_0^x(\mathrm{e}^{t\cos t^2}-\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$ 与 ax^b 是等价无穷小量，则 $(a,b)=$

A. $\left(-\dfrac{1}{6},3\right)$.　　B. $\left(-\dfrac{1}{24},4\right)$.

C. $\left(-\dfrac{1}{2},5\right)$.　　D. $\left(-\dfrac{1}{12},6\right)$.

1.【答案】 D

【分析】 当 $t\to 0$ 时，

$$\mathrm{e}^{t\cos t^2}-\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^{t\cos t^2-t}-1)\sim t(\cos t^2-1)\sim t\left(-\frac{1}{2}t^4\right)=-\frac{1}{2}t^5,$$

故当 $x\to 0$ 时，

$$\int_0^x(\mathrm{e}^{t\cos t^2}-\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t\sim\int_0^x\left(-\frac{1}{2}t^5\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{12}x^6.$$

因此 $(a,b)=\left(-\dfrac{1}{12},6\right)$.

渐近线的快速求法

给定曲线 $y=f(x)$

斜渐近线和水平渐近线求法：若 $f(x)$ 可以表示为 $ax+b+o(1)\ (x\to\infty)$，则 $y=ax+b$ 就是水平或斜渐近线

竖直渐近线求法：找 $f(x)$ 的无穷间断点（从无定义的点找）

李六卷一

1. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1+ax^3}+x)=0$，则曲线 $y=\sqrt[3]{1+ax^3}$ 有斜渐近线为

A. $y=x$.　　B. $y=-x$.　　C. $y=\dfrac{1}{3}x$.　　D. $y=-\dfrac{1}{3}x$.

1. **答案** B

解析 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1+ax^3}+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+a}+1\right)=0$，故

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+a}+1\right)=0.$$

又由泰勒公式，有 $\left(a+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}+\frac{1}{3a^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\ (x\to+\infty)$，故

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+a}+1=\sqrt[3]{a}+\frac{1}{3a^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{1}{x^3}+1+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\quad(x\to+\infty).$$

所以，$a=-1$，即有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{1-x^3}-(-x)\right]=0$.

故 $y=\sqrt[3]{1+ax^3}=\sqrt[3]{1-x^3}$ 有斜渐近线为 $y=-x$. 选项 B 正确.

超越卷一

(2) 曲线 $y=\ln|1-e^{2x}|$ 有(　　)条渐近线.

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

答案 选(D).

解 $\lim\limits_{x\to0}\ln|1-e^{2x}|=-\infty$，故直线 $x=0$ 为垂直渐近线.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln|1-e^{2x}|}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{2x}-1)}{x}=2.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln|1-e^{2x}|-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}=0$，故有一条斜渐近线 $y=2x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln|1-e^{2x}|=0$，故直线 $y=0$ 为水平渐近线.

李六卷四

2. 曲线 $y=\sqrt{1+x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线条数为

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

2. **答案** D

解析 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1+x^2}\,e^{\frac{1}{x}}=\infty$，知 $x=0$ 为铅直渐近线.

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+x^2}\,e^{\frac{1}{x}}=\infty$，知没有水平渐近线.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}\,e^{\frac{1}{x}}}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}\,e^{\frac{1}{x}}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

$$\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t\sqrt{1+t^2}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\left(e^t\sqrt{1+t^2}+\frac{te^t}{\sqrt{1+t^2}}\right)=1,$$

故有斜渐近线 $y=x+1$. 同理可求得

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}\,e^{\frac{1}{x}}}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}\,e^{\frac{1}{x}}+x\right)=-1,$$

故 $y=-x-1$ 为斜渐近线.

综上所述，有 3 条渐近线. 选项 D 正确.

极限判断极值点，拐点

已知$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=A(A\neq 0)$

1）若点a不是$g(x)$的极值点，则点a也不是$f(x)$的极值点

2）若点a是$g(x)$的极值点，则点a也是$f(x)$的极值点，且$A>0$时，结论相同，$A<0$时，结论相反

当$A>0$时，若点a是$g(x)$的极小（大）值点，则点a是$f(x)$的极小（大）值点

当$A<0$时，若点a是$g(x)$的极小（大）值点，则点a是$f(x)$的极大（小）值点

李四卷一

6. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，则

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$ 存在.

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$ 不存在.

C. $f'(0)=0, f''(0)=2$.

D. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

6. **答案** D

解析 由 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，知 $f(0)=0$.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}=1$，知 $f'(0)=0$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1>0$，根据极限的保号性，知在 $x=0$ 的去心邻域内，有 $f(x)>0=f(0)$.

故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值. D 正确.

对于选项 A,B：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$ 不一定存在，如

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$f(x)$ 是可导函数，且

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$ 不一定存在，知 $f''(0)=2$ 不一定成立，排除 C 选项.

汤三卷二

7. 设函数 $f(x)$ 连续，且$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln^2 x}{f(x)-2}=-1$，则(　　).

A. $f'(1)=0$ 且 $x=1$ 为极小值点

B. $f'(1)=0$ 且 $x=1$ 为极大值点

C. $f'(1)$ 不存在且 $x=1$ 为极小值点

D. $f'(1)$ 不存在且 $x=1$ 为极大值点

7» B.

【考点】 本题考查一元函数极值的判断，为必考题.

【解析】 由$\lim\limits_{x\to1}\ln^2 x=0$，得$\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$，再由 $f(x)$ 连续，得 $f(1)=2$；由

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln^2 x}{f(x)-2}=\lim_{x\to1}\frac{\ln^2[1+(x-1)]}{f(x)-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{f(x)-2}=-1,$$

得$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{(x-1)^2}=-1$，即

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x-1}=-1,$$

注意到$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$，故$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$，即 $f'(1)=0$；

因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{f(x)-2}=-1<0$，所以存在 $\delta>0$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$\dfrac{(x-1)^2}{f(x)-2}<0$，

从而有 $f(x)<2=f(1)$，即 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点，应选 B.

李六卷二

4. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内连续，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[f(x+1)+e^{x^2}]}{x^2}=2$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的

A. 驻点且为极大值点.　　B. 驻点且为极小值点.

C. 不可导点.　　D. 可导点但不是驻点.

4. **答案** B

解析 由
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[f(x+1)+e^{x^2}\right]}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[f(x+1)+e^{x^2}+1-1\right]}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)+e^{x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x^2}+1=2,$$
知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)}{x^2}=1>0$，且 $f(1)=0$. 又
$$f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x^2}\cdot x=0,$$
所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的驻点，且在 $x=0$ 的某去心邻域内，有$\dfrac{f(x+1)}{x^2}>0$.
故 $f(x+1)>0=f(1)$，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点. 选项 B 正确.

余五卷一

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内三阶可导，且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{(x-1)^2\ln x}=\dfrac{1}{3}$，则(　　).

A. $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点　　B. 点(1,2) 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

C. $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点　　D. 点(1,2) 不为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

1.【答案】B

【解析】由$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{(x-1)^2\ln x}=\dfrac{1}{3}$ 知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{(x-1)^3}=\dfrac{1}{3}$，由极限和无穷小之间的关系可知：

当 $x\in \mathring{U}(1,\delta)$ 时，

$$\frac{f(x)-2}{(x-1)^3}=\frac{1}{3}+\alpha(x),\text{其中}\lim_{x\to 1}\alpha(x)=0.$$

即当 $x\in U(1,\delta)$ 时，

$$f(x)=2+\frac{1}{3}(x-1)^3+o(x-1)^3,$$

故 $f(1)=2,f'(1)=f''(1)=0,f'''(1)=2$，因此点$(1,2)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

余五卷四

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数，$f(0)=0$ 且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}=2$，则(　　).

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点　　D. 以上都不正确

2.【答案】B

【解析】由极限的性质知$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f'(x)]=0$，故 $f(0)+f'(0)=0$，从而 $f'(0)=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\right]=f'(0)+f''(0)=2,$$

得 $f''(0)=2$. 所以 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

极值点、拐点的判断除了根据“一阶、二阶两侧是否异号”，还可以根据第三充分条件

核心就是要看到几阶导数不为零!

极值的第三充分条件

设函数$f(x)$在$x=x_0$处$n(n\geqslant 2)$阶可导，且$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$

若n是偶数，则$x=x_0$是$f(x)$的极值点

若n是奇数，则$x=x_0$不是$f(x)$的极值点（无需记忆）

拐点的第三充分条件

设函数$f(x)$在$x=x_0$处$n(n\geqslant 3)$阶可导，且$f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$

若n是奇数，则点$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

若n是偶数，则点$(x_0,f(x_0))$不是曲线$y=f(x)$的拐点（无需记忆）

超越卷六

(2) 设函数 $f(x)$ 在R上二阶连续可导,满足

$$x^2f''(x)-3xf'(x)=e^x-x-1,且\ f'(x_0)=0,x_0\in R.$$

则下列说法正确的是(　　).

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $f(x_0)$ 可能是 $f(x)$ 的极大值也可能是极小值

(D) $(x_0,f(x_0))$ 是 $f(x)$ 的拐点

答案　选(C).

解 ① 当 $x_0\neq 0$ 时,由方程得 $f''(x_0)=\dfrac{e^{x_0}-x_0-1}{x_0^2}>0$,由充分条件知,$f(x_0)$ 是极小值.

② 当 $x_0=0$ 时,由 $x\neq 0$ 得 $f''(x)-\dfrac{3f'(x)}{x}=\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$,两边取极限得

$$\lim_{x\to 0}f''(x)-3\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2},$$

即 $f''(0)-3f''(0)=\dfrac{1}{2}$,得 $f''(0)=-\dfrac{1}{4}$,故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

汤八卷七

2. 设函数 $f(x)$ 连续二阶可导,且 $f(0)=2$,又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2f'(x)-2}{\ln(1+x)-x^2}=2$,则(　　).

A. $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极大值 2

B. $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值 2

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处不取极值

D. $(0,2)$ 为 $y=f(x)$ 的拐点

②» A.

【解】 当 $x\to 0$ 时,$\ln(1+x)-x^2\sim x$,由

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2f'(x)-2}{\ln(1+x)-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2f'(x)-2}{x}=2,$$

得$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-2f'(x)-2]=0$,从而 $f'(0)=0$;

再由

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2f'(x)-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=f'(0)-2f''(0)=-2f''(0)=2,$$

得 $f''(0)=-1<0$,从而 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点,应选 A.

【备考策略】判断抽象函数的极值优先考虑第二充分条件,若第二充分条件失效再考虑定义法.

极值点、拐点、驻点个数判断

设$f(x)$是多项式函数，若a是$f(x)$的k重根，则a是$f'(x)$的$k-1$重根（k是正整数）

李六卷二

12. 函数 $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的驻点个数为________.

增加问题求极值点个数，拐点个数

12.【答案】 6

【分析】 注意到

$$f'(x)=(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4+2(x-1)(x-2)(x-3)^3(x-4)^4+3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2(x-4)^4+4(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^3$$
$$=[(x-2)(x-3)^2(x-4)^3]\cdot[(x-2)(x-3)(x-4)+2(x-1)(x-3)(x-4)+3(x-1)(x-2)(x-4)+4(x-1)(x-2)(x-3)],$$

记 $p(x)=(x-2)(x-3)(x-4)+2(x-1)(x-3)(x-4)+3(x-1)(x-2)(x-4)+4(x-1)(x-2)(x-3)$,

则
$$f'(x)=[(x-2)(x-3)^2(x-4)^3]\cdot p(x).$$

由于 $p(1)=-6$, $p(2)=4$, $p(3)=-6$, $p(4)=24$，根据零点定理，$p(x)=0$ 至少有 3 个非整数根，结合 $p(x)$ 是一个三次多项式，得 $p(x)=0$ 恰有 3 个非整数根.

综上所述，$f'(x)=[(x-2)(x-3)^2(x-4)^3]\cdot p(x)=0$ 恰有 6 个根，亦即函数 $f(x)$ 有 6 个驻点.

最值计算

小题用拉乘有时比较浪费时间，可借助参数方程或柯西不等式快速得到答案

张八卷一

4. 函数 $f(x,y)=x+4y$ 在条件$\frac{x^2}{2}-x+y^2=1$下的最大值是

A. $2+2\sqrt{2}$.　　B. $1+3\sqrt{2}$.

C. $2+2\sqrt{3}$.　　D. $1+3\sqrt{3}$.

4.【答案】 D

【分析】 构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=x+4y+\lambda\left(\frac{x^2}{2}-x+y^2-1\right)$，令

$$\begin{cases}L'_x=1+\lambda(x-1)=0, & ①\\ L'_y=4+2\lambda y=0, & ②\\ L'_\lambda=\frac{x^2}{2}-x+y^2-1=0. & ③\end{cases}$$

由式 ② 可知 $\lambda=-\frac{2}{y}$，将其代入到式 ①，有

$$1-\frac{2}{y}(x-1)=0,$$

即 $y=2(x-1)$，将其代入到式 ③，便有

$$\frac{x^2}{2}-x+4(x-1)^2-1=0,$$

解得 $x=1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以上述方程组的解为

$$(x,y,\lambda)=\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\mp\sqrt{3}\right).$$

计算可知

$$f\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=1+3\sqrt{3},f\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=1-3\sqrt{3},$$

所以最大值是 $1+3\sqrt{3}$.

积分比大小

1）积分区域一致，直接比较被积函数的大小

2）积分区域不一致，先化成一致，再比较被积函数的大小

3）积分区域具有包含关系，可以考虑作差法

4）积分区域一致，被积函数无法比较大小，可以考虑作差法

李艳芳卷三

3 设 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x}dx, J=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx, K=\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{e^x}dx$, 则(　　)

(A) $I>J>K$.　　(B) $J>I>K$.　　(C) $I>K>J$.　　(D) $J>K>I$.

答案 B.

解 首先比较 I,J.

$$I-J=\int_0^1\ln(1+x)\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int_0^1\frac{(x^2-x)\ln(1+x)}{(1+x)(1+x^2)}dx.$$

由于在 $(0,1)$ 内, $\ln(1+x)>0, x^2-x<0$, 故由定积分的性质可知 $I-J<0$, 即 $J>I$.

再比较 I,K.

我们先证明当 $x>0$ 时, $e^x>1+x$.

记 $f(x)=e^x-x-1$, 则 $f(0)=0, f'(x)=e^x-1$. 当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调增加, 故 $f(x)>f(0)=0$, 即 $e^x>1+x$. 进一步可得, $\frac{1}{e^x}<\frac{1}{1+x}$.

由此可得, 当 $x\in(0,1)$ 时,

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{\ln(1+x^2)}{e^x}>\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{\ln(1+x^2)}{1+x}=\frac{\ln(1+x)-\ln(1+x^2)}{1+x}.$$

由于在 $(0,1)$ 内, $x>x^2$, 从而 $\ln(1+x)>\ln(1+x^2)$, 故 $\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{\ln(1+x^2)}{e^x}>0$. 于是,

$$I-K=\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{\ln(1+x^2)}{e^x}\right]dx>0.$$

因此, $I>K$.

余五卷一

7. 设 $D=\left\{(x,y)\left|0\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}},0\leqslant y\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right.\right\}$,

$$I_1=\iint_D\sin(\max\{x^2,y^2\})dxdy, I_2=\iint_D\sin(\min\{x^2,y^2\})dxdy,$$

$$I_3=\frac{1}{2}\iint_D(\sin x^2+\sin y^2)dxdy,$$

则有(　　).

A. $I_1=I_2=I_3$　　B. $I_1=I_3>I_2$

C. $I_1>I_2=I_3$　　D. $I_1>I_3>I_2$

超越卷一

(4) 设 $M=\int_0^1 e^x dx, N=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} dx, P=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\tan x} dx$，则(　　)

(A) $P<M<N$　　(B) $P<N<M$　　(C) $M<P<N$　　(D) $N<P<M$

答案　选(A)

解　$N=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} dx \overset{\sin x=t}{=} \int_0^1 e^t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt=\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$,

$P=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\tan x} dx \overset{\tan x=t}{=} \int_0^1 e^t \cdot \frac{1}{1+t^2} dt=\int_0^1 \frac{e^x}{1+x^2} dx$,

因为 $\frac{e^x}{1+x^2}<e^x<\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\ (0<x<1)$，所以 $P<M<N$. 故选(A).

李六卷一

6. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^\alpha} dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^\alpha} dx(\alpha>0)$，则

A. $I_1<I_2$.　　B. $I_1>I_2$.

C. $I_1=I_2$.　　D. I_1, I_2 的大小与 α 有关.

6.【答案】 B

【分析】

$$\begin{aligned}
I_1-I_2&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^\alpha}(\cos x-\sin x) dx \\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^\alpha}(\cos x-\sin x) dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^\alpha}(\cos x-\sin x) dx \\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{1+x^\alpha} dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin x-\cos x}{1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^\alpha}(-dx) \\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{1+x^\alpha}-\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^\alpha}\right](\cos x-\sin x) dx.
\end{aligned}$$

当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}-x<\frac{\pi}{2}$，从而 $\frac{1}{1+x^\alpha}>\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^\alpha}$，且 $\cos x>\sin x$，于是知 $I_1>I_2$，即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^\alpha} dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^\alpha} dx.$$

李六卷六

5. 设$I_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x^2}\cos^2x\,dx\,(k=1,2,3,4)$，则$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=$

A. I_1.　　B. I_2.　　C. I_3.　　D. I_4.

5. **答案** A

解析

$$I_2=\int_{\pi}^{2\pi}e^{-x^2}\cos^2x\,dx\xlongequal{x=\pi+u}\int_0^{\pi}e^{-(\pi+u)^2}\cos^2(\pi+u)\,du$$
$$=\int_0^{\pi}e^{-(\pi+u)^2}\cos^2u\,du.$$

当$0\leqslant x\leqslant\pi$时，$e^{-x^2}>e^{-(x+\pi)^2}$，故

$$I_1=\int_0^{\pi}e^{-x^2}\cos^2x\,dx>\int_0^{\pi}e^{-(x+\pi)^2}\cos^2x\,dx=I_2,$$

$$I_3=\int_{2\pi}^{3\pi}e^{-x^2}\cos^2x\,dx\xlongequal{x=2\pi+u}\int_0^{\pi}e^{-(2\pi+u)^2}\cos^2(2\pi+u)\,du$$
$$=\int_0^{\pi}e^{-(2\pi+u)^2}\cos^2u\,du.$$

当$0\leqslant x\leqslant\pi$时，$e^{-(x+\pi)^2}>e^{-(x+2\pi)^2}$，故$I_2>I_3$.

同理，$I_3>I_4$，所以$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=I_1$，选项 A 正确.

超越卷二

(6) 设 $I_k=\iint\limits_{D_k}(xy^2e^{-x^2}+x^2\sin(x^2+y^2))\,d\sigma, k=1,2,3$,其中

$D_1:x^2+y^2\leqslant\frac{\pi}{2}$, $D_2:x^2+y^2\leqslant\pi$, $D_3:x^2+y^2\leqslant 2\pi$,则 I_1,I_2,I_3 三者的大小关系为(　　).

(A)$I_1\leqslant I_2\leqslant I_3$　　(B)$I_3\leqslant I_2\leqslant I_1$　　(C)$I_1\leqslant I_3\leqslant I_2$　　(D)$I_3\leqslant I_1\leqslant I_2$

线性微分方程解的叠加原理

y_1^*是$y'+q(x)y=f_1(x)$的解，y_2^*是$y'+q(x)y=f_2(x)$的解

则$ay_1^*+by_2^*$是$y'+q(x)y=af_1(x)+bf_2(x)$的解（可推广到任意阶情形）

由此可以得到

1）非齐次解＋齐次解＝非齐次解

2）非齐次解－非齐次解＝齐次解

3）齐次解＋齐次解＝齐次解

若y_1,y_2及ay_1+by_2是$y'+p(x)y=q(x)$的解，ay_1-by_2是$y'+p(x)y=0$的解，求a,b

李艳芳卷三

(5) 设函数$y_1(x),y_2(x),y_3(x)$分别为一阶非齐次线性微分方程$y'+p(x)y=q(x)$的三个不同的解,已知$y_1(0)=a,y_2(0)=b,y_3(0)=c$,则下列说法中,正确的是(　　)

(A) $\dfrac{y_3(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}$是否为常数与$p(x),q(x)$有关.

(B) $\dfrac{y_3(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}$是否为常数与$a,b,c$的取值有关.

(C) 若$a<b<c$,则$\dfrac{y_3(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}$必为大于0的常数.

(D) 若$a<b<c$,则$\dfrac{y_3(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}$必为小于0的常数.

答案 C.

解 由于$y'+p(x)y=q(x)$是一阶非齐次线性微分方程,故由微分方程的解的结构的性质可知,$y_3(x)-y_1(x)$,$y_2(x)-y_1(x)$均为一阶齐次线性微分方程$y'+p(x)y=0$的解,而该齐次方程为一阶方程,仅有一个线性无关的解,从而$y_3(x)-y_1(x)$,$y_2(x)-y_1(x)$必线性相关,即存在不全为0的常数k_1,k_2,使得对任意x,均有

$$k_1[y_3(x)-y_1(x)]+k_2[y_2(x)-y_1(x)]=0. \tag{1}$$

若$k_1=0,k_2\neq 0$则$y_2(x)-y_1(x)\equiv 0$,与$y_1(x),y_2(x)$是不同的解矛盾. 同理可得$k_1\neq 0,k_2=0$不成立. 由此可得k_1,k_2均不为0. 由(1)式可得$\frac{y_3(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}=-\frac{k_2}{k_1}$. 于是,$\frac{y_3(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}$是否为常数与$p(x),q(x)$,以及$a,b,c$的取值均无关. 选项A、B均不正确.

由于$\frac{y_3(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}$为常数,故$\frac{y_3(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}=\frac{y_3(0)-y_1(0)}{y_2(0)-y_1(0)}=\frac{c-a}{b-a}$.若$a<b<c$,则$\frac{c-a}{b-a}>0$,从而$\frac{y_3(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}>0$. 选项C正确,选项D不正确.

因此,应选C.

求参数范围（参数分离）

李六卷三

1. 若方程$\ln x=ax(a>0)$有且只有2个实根,则

A. $0<a<\frac{1}{e}$.　　B. $a=\frac{1}{e}$.

C. $\frac{1}{e}<a<1$.　　D. $a>1$.

1.【答案】 A

【分析】 记$F(x)=\ln x-ax$,则$F'(x)=\frac{1}{x}-a$,所以当$0<x<\frac{1}{a}$时,$F(x)$严格单调递增;当$x>\frac{1}{a}$时,$F(x)$严格单调递减. $F\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a-1$为函数$F(x)$在$(0,+\infty)$的最大值.

$\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$. 所以当且仅当$F\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a-1>0$时,方程$\ln x=ax$有且只有2个实根,此时$0<a<\frac{1}{e}$. 故A为正确选项.

汤八卷四

3. 设$\ln x=ax^2$有且仅有两个实根,则(　　).

A. $a<0$　　B. $0<a<\frac{1}{2e}$　　C. $a=\frac{1}{2e}$　　D. $a>\frac{1}{2e}$

③» B.

【解】 $\ln x = ax^2$ 等价于 $\frac{\ln x}{x^2}=a$，令 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}-a$，由 $f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}=0$，得 $x=\sqrt{e}$.

当 $0<x<\sqrt{e}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\sqrt{e}$ 时，$f'(x)<0$. 故 $x=\sqrt{e}$ 为 $f(x)$ 的最大值点，最大值为 $f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}-a$，$f(0+0)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-a$，由题意，得 $\begin{cases}\frac{1}{2e}-a>0,\\ -a<0,\end{cases}$ 解得 $0<a<\frac{1}{2e}$，应选 B.

【备考策略】本题是已知方程有两个根需要求未知参数，关键在于将未知参数分离出来，转换为一个函数后，根据与 x 轴的交点考虑参数的取值范围.

李六卷三

4. 设常数 $a>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x\leqslant x^a$，则 a 的取值范围为

A. $(0, e]$.　　B. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.　　C. $[e, +\infty)$.　　D. $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

解析 当 $x>1$ 时，原不等式等价于 $\ln\ln x\leqslant a\ln x$，即 $a\geqslant\frac{\ln\ln x}{\ln x}$.

记 $f(x)=\frac{\ln\ln x}{\ln x}$，现求 $f(x)$ 的最大值.

由 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\ln\ln x}{(\ln x)^2}=0$，得 $x=e^e$ 为唯一驻点.

当 $1<x<e^e$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e^e$ 时，$f'(x)<0$.

故 $f(e^e)=\frac{1}{e}$ 为 $f(x)$ 的极大值，也是 $f(x)$ 的最大值. 选项 D 正确.

幂级数的收敛半径

设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nq^n$ 条件收敛，则收敛半径为 $|q|$

张八卷六

2. 设常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，r 是实数，则

A. 当 $|r| \geqslant 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} r^{2n-1}$ 发散.

B. 当 $|r| \leqslant 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散.

C. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} r^{2n-1}$ 发散时，$|r| \geqslant 1$.

D. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时，$|r| \leqslant 1$.

2.**【答案】** C

【分析】 由题意，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R=1$，故当 $|r|<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 绝对收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n r^n|$ 收敛. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n r^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n-1} r^{2n-1}| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n} r^{2n}|$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} r^{2n-1}$ 收敛. 于是，当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} r^{2n-1}$ 发散时，$|r| \geqslant 1$.

李六卷六

4. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+1)^n$ 的收敛区间为

A. $(-3,1)$.　　B. $(-4,2)$.　　C. $(-2,0)$.　　D. $(0,2)$.