第五章定积分

习题五

5. 1

1． 写出下列定积分的定义式.

(1) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$；

解 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\xi_i^2}\Delta x_i$

其中 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$.

(2) $\int_0^{\pi} \sin x\mathrm{d}x$；

解 $\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\xi_i\Delta x_i$

其中 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$.

2． 设 $\int_{-1}^{1} 3f(x)\mathrm{d}x = 18, \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 4, \int_{-1}^{3} g(x)\mathrm{d}x = 3$， 求：

(1) $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$；

解 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 4 - 6 = -2$

(2) $\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x$.

解 $\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x = \frac{4}{5}\int_{-1}^{3} f(x)dx + \frac{3}{5}\int_{-1}^{3} g(x)dx = \frac{4}{5}\times 4 + \frac{3}{5}\times 3 = 5$

3. 说明下列各对积分中哪一个的值较大.

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$？

解 在区间 $[0,1]$ 上， $x^2 \ge x^3$， 且 x^2不恒等于x^3， 所以

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x > \int_0^1 x^3\mathrm{d}x$$

(2) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$？

解 在区间$\left[0,1\right]$上，$\ln\left(1+x\right)\le x$，且$\ln\left(1+x\right)$不恒等于x，所以

$$\int_0^1 \ln\left(1+x\right)\mathrm{d}x < \int_0^1 x\mathrm{d}x$$

(3) $\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$还是$\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x$？

解 在区间$\left[\pi,2\pi\right]$上，$\sin x\le 0$，且$\sin x$不恒等于0，所以

$$\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x < 0$$

于是

$$\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x < \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x + 0 = \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$$

4. 设$f\left(x\right)$连续，且极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$存在，试证：$\lim\limits_{h\to+\infty}\int_h^{h+a}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=0$.

证 由积分中值定理得

$$\lim_{h\to+\infty}\int_h^{h+a}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x = \lim_{h\to+\infty}\frac{f\left(\xi\right)}{\xi}\left[\left(h+a\right)-h\right] = a\lim_{h\to+\infty}\frac{f\left(\xi\right)}{\xi} = a\times 0 = 0$$

其中ξ介于h和$h+a$之间，当$h\to+\infty$时，$\xi\to+\infty$，从而$\lim\limits_{h\to+\infty}\frac{f\left(\xi\right)}{\xi}=0$.

5. 设$f\left(x\right)$在闭区间$\left[0,1\right]$上可导，且满足条件$f(1)=\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x$，试证：存在$\xi\in\left(0,1\right)$，使得$f\left(\xi\right)+\xi f'\left(\xi\right)=0$.

证 由积分中值定理，存在$\eta\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，使得

$$f\left(1\right) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf\left(x\right)\mathrm{d}x = 2\eta f\left(\eta\right)\left(\frac{1}{2}-0\right) = \eta f\left(\eta\right)$$

令$F\left(x\right)=xf\left(x\right)$，则$F\left(x\right)$在闭区间$\left[\eta,1\right]$上连续，在开区间$\left(\eta,1\right)$内可导，且

$$F\left(\eta\right) = \eta f\left(\eta\right) = f\left(1\right) = F\left(1\right)$$

由罗尔定理，存在$\xi\in\left(\eta,1\right)\subset\left(0,1\right)$，使得

$$F'\left(\xi\right) = f\left(\xi\right) + \xi f'\left(\xi\right) = 0$$

得证.

5.2

1. 计算下列导数.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$；

解 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t\right) = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t = -\sqrt{1+x^4}$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x} \cos\left(\pi t^2\right)\mathrm{d}t$.

解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \cos\left(\pi\cos^2 x\right)\cdot(-\sin x) - \cos\left(\pi\sin^2 x\right)\cdot\cos x$$
$$= -\sin x\cdot\cos\left(\pi\cos^2 x\right) - \cos x\cos\left(\pi\sin^2 x\right)$$

2. 求由参数方程$\begin{cases} x = \int_0^{t^2} u\ln u\,\mathrm{d}u \\ y = \int_{t^2}^1 u^2\ln u\,\mathrm{d}u \end{cases}$所确定的函数对 x 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\left(\int_{t^2}^1 u^2\ln u du\right)'}{\left(\int_0^{t^2} u\ln u du\right)'} = \frac{-\left(t^2\right)^2\ln t^2\cdot(2t)}{t^2\ln t^2\cdot(2t)} = -t^2$$

3. 求 $\int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t + \int_0^x \cos t\mathrm{d}t = 0$ 由所确定的隐函数对 x 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 方程关于 x 求导得

$$\mathrm{e}^{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \cos x = 0$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-y^2}\cos x$$

4. 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x^2(1+x)$，求 $f(x)$.

解 方程关于 x 求导得

$$f(x) = 2x + 3x^2$$

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t}{x}$；

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{\mathrm{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2}{1}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\mathrm{d}t}$；

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\mathrm{sinx}}\sqrt{\tan t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\tan\sin x}\cdot\cos x}{\sqrt{\sin\tan x}\cdot\sec^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\tan\sin x}}{\sqrt{\sin\tan x}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\cos^3 x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot 1=1$$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^x x^2 f(t)\mathrm{d}t}{x-a}$. 其中 $f(x)$ 连续.

解

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}=\lim_{x\to a}x^2\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}=a^2\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1}=a^2 f(a)$$

6. 计算下列定积分.

(1) $\int_0^3 2x\mathrm{d}x$；

解 $\int_0^3 2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^3=9-0=9$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$；

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$

(3) $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$；

$\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{2}\Big|_0^1=\arcsin\dfrac{1}{2}-0=\dfrac{\pi}{6}$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta$；

解 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)\mathrm{d}\theta=(\tan\theta-1)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\dfrac{\pi}{4}$

(5) $\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{x+x^3}$；

解

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x|\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_1^2 = \ln 2 - 0 - \frac{1}{2}\left(\ln 5 - \ln 2\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$$

(6) $\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x\ (a>0)$；

解　当 $a \geq 1$ 时，有

$$\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x = \int_0^1 x(a-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(ax - x^2\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}$$

当 $0 < a < 1$ 时，有

$$\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x = \int_0^a x(a-x)\mathrm{d}x + \int_a^1 x(x-a)\mathrm{d}x = \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right)\Big|_a^1 = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}$$

(7) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x) = \begin{cases} x+1, x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2, x > 1 \end{cases}$.

解

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{6}x^3\Big|_1^2 = \left(\frac{3}{2} - 0\right) + \frac{1}{6}(8-1) = \frac{8}{3}$$

7. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, 0 \leq x \leq \pi \\ 0, x < 0 或 x > 0 \end{cases}$，求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式.

解　当 $x < 0$ 时，有

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x 0\mathrm{d}t = 0$$

当 $0 \leq x \leq \pi$ 时，有

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{2}\sin t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^x = \frac{1-\cos x}{2}$$

当 $x > \pi$ 时，有

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin t\mathrm{d}t + \int_\pi^x 0\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^\pi + 0 = 1$$

于是

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \dfrac{1-\cos x}{2}, 0 \leq x \leq \pi \\ 1, x > \pi \end{cases}$$

8. 利用定积分的定义计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\right)$;

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sin a+\sin\left(a+\dfrac{b}{n}\right)+\cdots+\sin\left(a+\dfrac{(n-1)b}{n}\right)\right]\ (b\neq 0)$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin a+\sin\left(a+\frac{b}{n}\right)+\cdots+\sin\left(a+\frac{(n-1)b}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\left(a+\frac{i}{n}b\right)\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\sin(a+bx)\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\cos(a+bx)\Big|_0^1=\frac{1}{a}\left[\cos a-\cos(a+b)\right]$$

9. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\cdot\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

解　令 $A=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=3x-A\sqrt{1-x^2}$，所以

$$A=\int_0^1\left[3x-A\sqrt{1-x^2}\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left[9x^2-6Ax\sqrt{1-x^2}+A^2\left(1-x^2\right)\right]\mathrm{d}x$$
$$=\left[3x^3+2A\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+A^2\left(1-\frac{x^3}{3}\right)\right]\Big|_0^1=\left(3+\frac{2}{3}A^2\right)-2A=3-2A+\frac{2}{3}A^2$$

即 $2A^2-9A+9=0$，解得 $A=3\text{或}A=\dfrac{3}{2}$，故

$$f(x)=3x-3\sqrt{1-x^2}\ \text{或}\ f(x)=3x-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}$$

5.3

1．计算下列定积分.

(1) $\int_{-1}^{1}\dfrac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x$;

解　令 $t=\sqrt{5-4x}$，则 $x=\dfrac{5-t^2}{4},\mathrm{d}x=-\dfrac{t}{2}\mathrm{d}t$，所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x=\int_3^1\frac{\frac{5-t^2}{4}}{t}\cdot\left(-\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_3^1\left(5-t^2\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(5t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^3=\frac{1}{8}\left(6-\frac{14}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

(2) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$；

解　令 $t=\sqrt{e^x-1}$，则 $x=\ln\left(1+t^2\right), dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$，所以

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=\int_0^1 t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=2\left(t-\arctan t\right)\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}$$

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$；

解　令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos t\,dt$，所以

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=\left(-\cot t-t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}+1+\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$$

(4) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

解　令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，所以

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\left(\frac{1}{t}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}}=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt=\sqrt{1+t^2}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1=\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

2. 证明积分等式.

(1) $\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}\ (x>0)$；

证　令 $t=\frac{1}{u}$，则 $dt=-\frac{1}{u^2}du$，所以

$$\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{-\frac{1}{u^2}du}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{du}{1+u^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}$$

(2) $\int_0^a x^3 f\left(x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2}xf(x)dx\ \left(a>0, f(x)\text{连续}\right)$；

证　$\int_0^a x^3 f\left(x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^a x^2 f\left(x^2\right)d\left(x^2\right)$

令 $t=x^2$，则 $d\left(x^2\right)=dt$，所以

$$\int_0^a x^3 f\left(x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2}tf(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{a^2}xf(x)dx$$

(3) $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x$ $(f(x)$连续$)$，并求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

证 令 $x=a-t$ ，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$ ， 所以

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(a-t)(-\mathrm{d}t)=\int_0^a f(a-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

3. 若 $f(t)$是连续的奇函数，证明：$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数；若 $f(t)$是连续的偶函数，证明：$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数.

证 令 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ，则

$$\Phi(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t$$

令 $t=-u$ ，则 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$ ，所以

$$\Phi(-x)=\int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)=-\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t$$

若 $f(-t)=-f(t)$，则

$$\Phi(-x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\Phi(x)$$

即 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数. 若 $f(-t)=f(t)$，则

$$\Phi(-x)=-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=-\Phi(x)$$

即 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数.

4. 计算下列定积分.

(1) $\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x$；

解

$$\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 \arctan x\mathrm{d}\left(x^2\right)=\frac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}\left(\arctan x\right)$$
$$=\frac{1}{2}\arctan 1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(x-\arctan x\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

(2) $\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

解

$$\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_1^4\ln x\,\mathrm{d}\sqrt{x}=2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^4-2\int_1^4\sqrt{x}\,\mathrm{d}\ln x$$
$$=8\ln 2-2\int_1^4\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=8\ln 2-4\sqrt{x}\Big|_1^4=8\ln 2-4$$

(3) $\int_0^\pi\left(x\sin x\right)^2\mathrm{d}x$；

解

$$\int_0^\pi\left(x\sin x\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^\pi x^2\sin^2 x\mathrm{d}x=\int_0^\pi x^2\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_0^\pi x^2\mathrm{d}\sin 2x=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^\pi-\frac{1}{4}\left[x^2\sin 2x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\sin 2x\cdot 2x\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}\cos 2x=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\left[x\cos 2x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\cos 2x\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}\sin 2x\Big|_0^\pi=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x$；

解

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,de^{2x}=\frac{1}{2}\left[e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}(-\sin x)dx\right.$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x dx=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\, de^{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left[e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx\right]=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{\pi}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$$

解得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx=\frac{1}{5}\left(e^{\pi}-2\right)$$

(5) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$.

解

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}-\ln x dx+\int_1^{e}\ln x dx=-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}x\cdot\frac{1}{x}dx+x\ln x\Big|_1^{e}-\int_1^{e}x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=-\frac{1}{e}+\left(1-\frac{1}{e}\right)+e-(e-1)=2-\frac{2}{e}$$

5．计算下列定积分.

(1) $\int_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx$；

解 $\int_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx=0$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{1+\cos x}dx$；

解

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{1+\cos x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}+0$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right)=2\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\tan\frac{\pi}{4}-0=2$$

(3) $\int_{-2}^{3}(|x|+x)e^{|x|}dx$；

解

$$\int_{-2}^{3}(|x|+x)e^{|x|}dx=\int_{-2}^{3}|x|e^{|x|}dx+\int_{-2}^{3}xe^{|x|}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}|x|e^{|x|}dx+\int_{2}^{3}xe^{x}dx+\int_{-2}^{2}xe^{|x|}dx+\int_{2}^{3}xe^{x}dx=2\int_{0}^{2}xe^{x}dx+2\int_{2}^{3}xe^{x}dx=2\int_{0}^{3}xe^{x}dx$$

$$=2\int_{0}^{3}xde^{x}=2\left[xe^{x}\Big|_{0}^{3}-\int_{0}^{3}e^{x}dx\right]=6e^{3}-2e^{x}\Big|_{0}^{3}=6e^{3}-2(e^{3}-1)=4e^{3}+2$$

(4) $\int_{100}^{100+2\pi}\sin^4 x dx$.

解

$$\int_{100}^{100+2\pi}\sin^4 x\,dx=\int_{0}^{2\pi}\sin^4 xdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 xdx=2\int_{0}^{\pi}\sin^4 xdx$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$$

5.4

1. 判定下列反常积分的收敛性，如果收敛，计算反常积分的值.

(1) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$；

解 $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=-\frac{1}{3x^3}\Big|_{1}^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)+\frac{1}{3}=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$；

解

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2+1}d(x+1)=\arctan(x+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\arctan(x+1)-\lim_{x\to-\infty}\arctan(x+1)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

(3) $\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

解 $\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)=-\sqrt{1-x^2}\Big|_{0}^{1^-}=1$

(4) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(1-x)^2}$.

解 $\int_{0}^{1}\frac{1}{(1-x)^2}dx=-\int_{0}^{1}\frac{1}{(1-x)^2}d(1-x)=\frac{1}{1-x}\Big|_{0}^{1^-}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{1-x}-1=+\infty$

所以反常积分发散.

3. 计算反常积分 $\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x$.

解

$$\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x = x\ln x\Big|_{0^+}^{1} - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 0 - \lim_{x\to 0^+} x\ln x - x\Big|_0^1$$

$$= -\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} - 1 = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} - 1 = 0 - 1 = -1$$

总习题五

1. 设 $I = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$，则估计 I 值的大致范围为（ ）

（A） $0 \le I \le \frac{\sqrt{2}}{10}$

（B） $\frac{\sqrt{2}}{10} \le I \le \frac{1}{5}$

（C） $\frac{1}{5} < I < 1$

（D） $I \ge 1$

解 在区间 $[0,1]$ 上，有

$$\frac{x^4}{\sqrt{2}} \le \frac{x^4}{\sqrt{1+x}} \le x^4$$

由定积分性质得

$$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{2}}\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^4 \mathrm{d}x$$

于是

$$\frac{\sqrt{2}}{10} \le \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x \le \frac{1}{5}$$

故选（B）.

2. 设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$， $F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n)\mathrm{d}t$，求 $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}$.

解　令 $u=x^n-t^n$，则 $\mathrm{d}u=-nt^{n-1}\mathrm{d}t, t^{n-1}\mathrm{d}t=-\frac{1}{n}\mathrm{d}u$，所以

$$F(x)=\int_{x^n}^{0} f(u)\left(-\frac{1}{n}\mathrm{d}u\right)=\frac{1}{n}\int_{0}^{x^n} f(u)\mathrm{d}u$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}\int_0^{x^n} f(u)\mathrm{d}u}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}f(x^n)\cdot nx^{n-1}}{2nx^{2n-1}}$$
$$=\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)}{x^n}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)-f(0)}{x^n}=\frac{1}{2n}f'(0)$$

3. 求极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{\frac{1}{n}}$；

解

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]}$$
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln(1+x)dx}=\mathrm{e}^{2\ln 2-1}=\mathrm{e}^{\ln\frac{4}{\mathrm{e}}}=\frac{4}{\mathrm{e}}$$

其中

$$\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\ln 2-\left[x-\ln(1+x)\right]\Big|_0^1=\ln 2-(1-\ln 2)=2\ln 2-1$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

解　因为

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x dx=-\frac{1}{n}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

由两边夹挤定理知

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]=\frac{2}{\pi}$$

4. 计算下列积分.

(1) $\int_{-2}^{2}\max\left\{1,x^2\right\}\mathrm{d}x$；

解

$$\int_{-2}^{2}\max\left\{1,x^2\right\}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{2}\max\left\{1,x^2\right\}\mathrm{d}x=2\left[\int_0^1 1\,\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2\mathrm{d}x\right]$$

$$=2\left[x\Big|_0^1+\frac{x^3}{3}\Big|_1^2\right]=2\left[(1-0)+\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)\right]=6\frac{2}{3}$$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}}$；

解

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2+1}+\mathrm{e}^{3-x}}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x-3}}{\mathrm{e}^{2x-2}+1}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)^2}\mathrm{d}\mathrm{e}^{x-1}$$

$$=\mathrm{e}^{-2}\arctan\mathrm{e}^{x-1}\Big|_0^{+\infty}=\mathrm{e}^{-2}\left[\lim_{x\to+\infty}\arctan\mathrm{e}^{x-1}-\arctan\mathrm{e}^{-1}\right]=\mathrm{e}^{-2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\mathrm{e}^{-1}\right)$$

(3) $\int_0^{\pi}x^2\left|\cos x\right|\mathrm{d}x$；

解

$$\int_0^{\pi}x^2\left|\cos x\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x^2\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x^2\mathrm{d}\sin x$$

$$=x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot 2x\mathrm{d}x-\left[x^2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\cdot 2x\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\,\mathrm{d}\cos x+\frac{\pi^2}{4}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2x\,\mathrm{d}\cos x$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\left[2x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x\right]-\left[2x\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{\pi^2}{2}-2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\pi+2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}+2\pi-4$$

(4) $\int_0^{a}\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\ \ (a>0)$；

解 令 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，所以

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos t\mathrm{d}t}{a\sin t + a\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

(5) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2-x|}}$.

解

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2-x|}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1^-} + \ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right|\Bigg|_{1^+}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}-0\right) + \left[\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{2} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

4. （积分第一中值定理）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续， $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且不变号，证明：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

证 不妨设 $g(x)\ge 0$. 若 $g(x)\equiv 0, x\in[a,b]$，则对任意 $\xi\in[a,b]$ 都有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0 = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

若 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不恒等于零，则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$ ，又因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M ，最小值 m ，于是

$$m\le f(x)\le M, x\in[a,b]$$

由定积分性质得

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \le M$$

由介值定理，存在$\xi \in [a,b]$，使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

得证.

6. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导数，且 $g(x) \ne 0$，证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

证　令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x), G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $G'(x) = g(x) \ne 0$，由柯西中值定理，存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

所以

$$\frac{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - 0}{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t - 0} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

即

$$\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

得证.

7. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导数，且 $f(a) = f(b) = 0$，证明：$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \dfrac{(b-a)^2}{4}\max\limits_{a \le x \le b}|f'(x)|$.

证　由题设 $|f'(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，所以 $|f'(x)|$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 $M=\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|$，于是

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}(f(x)-f(a))\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b (f(x)-f(b))\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(\xi_1)(x-a)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f'(\xi_2)(x-b)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(\xi_1)(x-a)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f'(\xi_2)(b-x)\mathrm{d}x$$

$$\le M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\mathrm{d}x+M\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)\mathrm{d}x=M\frac{(b-a)^2}{8}+M\frac{(b-a)^2}{8}$$

$$=\frac{M}{4}(b-a)^2=\frac{(b-a)^2}{4}\max_{a\le x\le b}|f'(x)|$$

8. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，证明：函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，故存在 $M>0$ 使得

$$|f(x)|\le M,x\in[a,b]$$

对任意 $x,x+\Delta x\in[a,b]$，有

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t$$

所以

$$0\le|\Delta\Phi|=\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t\right|\le\left|\int_x^{x+\Delta x}|f(t)|\mathrm{d}t\right|\le\left|\int_x^{x+\Delta x} M\mathrm{d}t\right|=M|\Delta x|$$

而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} M|\Delta x|=0$，由两边夹挤定理知，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta\Phi|=0$，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi\equiv 0$$

即 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.