高数大题复盘

主讲人 夜雨

中值问题
构造辅助函数的三个方法：万能构造、原函数法、微分方程法（掌握可解决 99%）

原函数法：将结论等式两边除以（或乘以）一个式子，移项，积分这样的操作，化成$F(x)=C$，这里的$F(x)$就是我们要构造的函数

微分方程法：将通解化成$F(x)=C$

万能构造：若结论形如$h'(x)+p(x)h(x)=0$，则构造辅助函数$h(x)e^{\int p(x)dx}$

汤三卷二（出题老头的小伎俩，隐藏导数）

21.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$.

证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=2\xi\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t$.

余五卷四

20.(本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=a^2$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$. 证明：

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi^2$；

(2) 在 (a,b) 内存在与(1)中相异的点 η，使得 $f'(\eta)+f(\eta)=\eta^2+2\eta$.

超越卷一

(21)(本题满分 12 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)<0$，$f(b)<0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 试证：

(Ⅰ)存在不同的 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$；

(Ⅱ)对任意的整数 $k(k>1)$，存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\eta)+[f(\eta)]^k=0$.

汤八卷五

18.(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 二阶可导,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=0$,$f(1)=\dfrac{3}{2}$,证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使得

$$\xi f''(\xi)+2f'(\xi)=3\xi.$$

汤八卷六

19.(本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$. 证明:

(1) 存在 $c\in(0,1)$,使得 $f(c)=0$;

(2) 存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f''(\xi)=f(\xi)$;

(3) 存在 $\eta\in(0,1)$,使得 $f''(\eta)-3f'(\eta)+2f(\eta)=0$.

汤八卷三

19.(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续,在$(0,2)$内可导,且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0,\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=0,f(1)=1$.

证明:

(1) 存在 $c\in(0,1)$,使得$(1-c)[1-f(0)]=f'(c)\mathrm{e}^{c-1}$;

(2) 存在 $\xi\in(0,2)$,使得 $f'(\xi)=\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$.

导数的几何意义（一条弦的斜率）

$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

左边是某一点的导数，右边是某一条弦的斜率

所以我们可以把某一点的导数看作某一条弦的斜率来分析问题，如何去找到这条弦呢？就是要找到弦的两个端点!

超越卷九

(21)(本题满分 12 分) 函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上有二阶导数,$f(0)=0$.若 $f(x)$ 在$[0,1]$上的最大值 $M>0$.证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $\xi f''(\xi)+2f'(\xi)>f(\xi)$.

汤八卷八

18.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，且 $f''(x)>0$，令 $m=\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=m$.

泰勒展开

将$f(\alpha)$在β处泰勒展开

其中α，β无非是这些点：区间端点a，b或区间中点的$\dfrac{a+b}{2}$或极值点c或任意点x

α，β要取什么，遵循下面两个原则

1）出现什么展开什么

2）不存在的式子要消去

李艳芳卷一

21 设函数$f(x)$在$[-1,1]$上有三阶连续导数，且$f(1)=f(-1)$. 证明：存在$\xi\in(-1,1)$，使得$f'''(\xi)=-6f'(0)$.

汤八卷二

18.(本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导,且 $f'(0)=f'(1)=0$,证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使得

$$|f''(\xi)|\geqslant 4|f(1)-f(0)|.$$

带积分的处理

令$G(x)=\int_a^x g(t)dt$，将原条件和结论转换成关于$G(x)$的条件和结论，这样积分就无形中消去了，

注意$G(x)=\int_a^x g(t)dt$这个函数“天生”有个零点$x=a$，大家做题千万不要漏了这个条件!

余五卷一

20.(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上具有三阶连续导数.

(1) 证明:存在 $\xi\in[0,1]$,使得$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{24}f''(\xi)$;

(2) 若$|f'''(x)|\leqslant 1$,证明$\left|f(1)-f(0)-f'\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\frac{1}{24}$.

汤三卷一

21.(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,令 $F(x)=\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$.

证明:存在 $\xi,\eta\in(0,1)$,使得 $F(1)=\dfrac{1}{6}f'(\xi)=\dfrac{1}{6}f''(\eta)\xi$.

李六卷六

20.(本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有连续的二阶导数,证明:

(Ⅰ)存在一点 $\xi\in[-1,1]$,使得 $\int_{-1}^{1}xf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}[2f'(\xi)+\xi f''(\xi)]$;

(Ⅱ)若 $f(x)$ 在$(-1,1)$内取得极值,则存在一点 $\eta\in(-1,1)$,使得

$$|2f'(\eta)+\eta f''(\eta)|\geqslant\frac{1}{2}|f(1)-f(-1)|.$$

常数k值法（处理中值部分可分离的中值问题）

张八卷七

19.（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在$[0,x]$上具有三阶连续导数.

(1) 证明:存在 $\xi\in(0,x)$,使$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x[f(0)+f(x)]}{2}-\frac{x^3}{12}f''(\xi)$;

(2) 由(1),计算$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\xi}{x}$.

推广的罗尔定理

1）设$f(x)$在(a,b)内可导，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(b)$，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$

2）设$f(x)$在(a,b)内可导，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$

超越卷十

(18)(本题满分 12 分) 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导,满足$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(1)}{x^2}=2$. 证明:

(Ⅰ) 存在 $\xi\in(0,1)$,有 $f''(\xi)=0$;

(Ⅱ) 存在 $\eta\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)=\frac{f(\eta)-f(0)}{\eta}$.

柯西中值定理（处理中值部分可分离的中值问题）

解题步骤

第一步：将ξ与a,b分离

第二步：可以从两个角度入手

从含有a,b的式子入手：将含有a,b的式子化成$\dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}$或$\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$（即局部分离$a,b$）

从含有ξ的式子入手：将含有ξ的式子化成$\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$或$F'(\xi)$

汤八卷三

19.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0,\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=0,f(1)=1.$

证明：

(1) 存在 $c\in(0,1)$，使得$(1-c)[1-f(0)]=f'(c)\mathrm{e}^{c-1}$；

(2) 存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$.

汤三卷三

21.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 可导且 $f(1)=0$，证明：存在 $\xi,\eta\in(1,2)$，使得

$$4f(2)=[2\xi^2 f(\xi)+\xi^3 f'(\xi)]\ln 2=4f'(\eta).$$

数列极限

压缩映射

压缩映射原理

数列$\{x_n\}$满足：$m \leqslant x_n \leqslant M$，$x_{n+1}=f(x_n)$，当$x \in [m, M]$，$|f'(x)|<k<1$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

利用压缩映射原理求极限就是先斩后奏：先把极限值求出来，再证明它是极限值。

超越卷六

(21)（本题满分 12 分） 设$x_1=2, x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n+1}$，$n=1,2,\cdots$. 证明：

（Ⅰ）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}$；

（Ⅱ）当$n\to\infty$时，$|x_n-\sqrt{2}|$是$\dfrac{1}{2^n}$的高阶无穷小.

单调有界准则

单调性判断方法 1）递推函数的导数 2）作差法 3）蛛网图

递推函数的导数

结论 1：数列$\{x_n\}$满足：$m \leqslant x_n \leqslant M$，$x_{n+1}=f(x_n)$，如果在$[m, M]$上，$f'(x)>0$，则$\{x_n\}$单调

结论 2：数列$\{x_n\}$满足：$m \leqslant x_n \leqslant M$，$x_{n+1}=f(x_n)$，如果在$[m, M]$上，$f'(x)<0$，则$\{x_{2n}\},\{x_{2n+1}\}$分别单调（这种情形在真题中应用比较少，了解即可）

(21)（本题满分 12 分） 设函数$f(x)$在$[0,2]$上有连续导数，且满足$0<f(x)<2$，$|f'(x)|<1$.

（Ⅰ）证明存在唯一的$x_0\in(0,2)$，使得$f(x_0)=x_0$；

（Ⅱ）设$0<x_1<2$，$2x_{n+1}=x_n+f(x_n)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$.

作差法

作差，看$x_{n+1}-x_n$的正负

18.(本题满分 12 分)

(1) 证明:方程 $e^{x-1}=1+\ln x$ 在$(0,+\infty)$内只有一个根;

(2) 设$a_1>1$,且 $e^{a_{n+1}-1}=1+\ln a_n$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,并求此极限.

李艳芳卷三

21 设数列$\{x_n\}$满足$x_1=\frac{1}{2}$,且对所有正整数n,$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x_n}+\frac{1}{3-x_n}\right)$.

(Ⅰ) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求其值;

(Ⅱ) 求$\lim\limits_{n\to\infty}2^{-n}\prod\limits_{i=1}^{n}(3-x_i)$.

蛛网图

非常强大的工具，我们可以把数列在数轴绘制出来，直观地数列的变化，引导我们的证明!

余五卷三

20.(本题满分 12 分)

(1) 证明方程 $x=2-2e^{-x}$ 在$(0,+\infty)$内有且仅有一个根 $x=\xi$;

(2) 若$x_1>\xi$,令$x_{n+1}=2-2e^{-x_n}$,$n=1,2,\cdots$,证明数列$\{x_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

不定积分

有理函数的积分

任意一个有理真分式 $\frac{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}(n > m)$ 都可分解成 $\frac{A}{x-a}$，$\frac{A}{(x-a)^k}(k=2,3,\cdots)$，$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}(p^2-4q<0)$，$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}(l=2,3,\cdots)$这四类分式的和！ $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}(l=2,3,\cdots)$真题没考过，所以大家可以不用考虑！

$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$的求法

$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$一定是$\ln'(x^2+px+q)$，$\frac{1}{x^2+px+q}$的线性组合

$\int_0^2 \frac{2x-4}{x^2+2x+4}dx$ （2022）

余五卷一

13. $\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+1}\mathrm{d}x =$ ______ .

超越卷三

(12) $\int \frac{x^3}{1-x+x^2-x^3}\mathrm{d}x =$ ______ .

无理函数的积分（该类积分的处理思想就是去根号变成有理函数的积分或三角有理函数的积分）
类型一：积函数中含有$\sqrt[n]{ax+b}$，直接令$\sqrt[n]{ax+b}=t$
张八卷一

18.（本题满分 12 分）

求不定积分$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{x}+1)(x+3)}$.

类型二：如果被积函数中含有$\sqrt{ax^2+bx+c}$，此时有两种处理方法去根号有理化！
欧拉代换（可以只掌握欧拉第三代换，欧拉第一二代换可以不掌握）
欧拉第一代换（不用掌握）
若$a>0$，令$\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}\,x$或$t-\sqrt{a}\,x$
欧拉第二代换（不用掌握）
若$c>0$，令$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}$或$tx-\sqrt{c}$
欧拉第三代换（掌握）
若$\Delta=b^2-4ac>0$，则$ax^2+bx+c=0$有两个不同的根$\alpha\neq\beta$，令$\sqrt{a\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}}=t$
张八卷四

18.（本题满分 12 分）

求定积分$\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

三角代换（重点掌握）

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ 通过配方可变成 $\sqrt{x^2-a^2}$，$\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{x^2+a^2}(a>0)$ 之一

若为 $\sqrt{x^2-a^2}$，则令 $x=a\sec\theta$ （其中 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$），有 $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan\theta$

若为 $\sqrt{a^2-x^2}$，则令 $x=a\sin\theta$ （其中 $\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$），有 $\sqrt{x^2-a^2}=a\cos\theta$

若为 $\sqrt{x^2+a^2}$，则令 $x=a\tan\theta$ （其中 $\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$），有 $\sqrt{x^2+a^2}=a\sec\theta$

12. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=$________.

张八卷二

12. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=$________.

三角有理函数的积分

该类积分的处理思想就是去三角变成有理函数的积分

方法一

被积函数是$R(\sin x,\cos x)$，其中$R(x,y)$为x，y的二元有理函数

若$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则原积分可化为$\int f(\sin x)d(\sin x)$

若$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则原积分可化为$\int f(\cos x)d(\cos x)$

若$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，则原积分可化为$\int f(\tan x)d(\tan x)$

$$\int\frac{dx}{\sin^2x+\cos^2x}$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2x\cos x}$$

方法二：万能代换（适合一次的情形）

令$\tan\frac{x}{2}=t$

$dx=\frac{2dt}{t^2+1}$，$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

张八卷八（此题有陷阱）

12. $\int_0^{2\pi}\frac{1}{5-3\cos x}\mathrm{d}x=$ ________.

分部积分法

$$\int f(x)g(x)dx=\int f(x)dG(x)=f(x)G(x)-\int f'(x)G(x)dx$$

分部积分法的**本质作用**在于将原积分$\int f(x)g(x)dx$转换成一个新积分$\int f'(x)G(x)dx$

将被积函数拆分成两个函数的乘积（即$f(x)g(x)$），一部分$f(x)$求导得到$f'(x)$，一部分$g(x)$积分得到$G(x)$

那么哪一部分求导，哪一部分积分呢?

一般来讲，求导优先次序是“反三角函数对数函数、幂函数、指数函数三角函数”，简称“反对幂指三”

为什么呢?

反三角函数与对数函数求一次导就没了，并且不消去一般很难处理，所以它们最优先求导；幂函数（指数为正整数）求一次导次数降低（x求一次导变1），求导有意义，但没有反三角函数与对数函数求导的意义大；指数函数与三角函数求导后仍然是指数函数与三角函数，求导意义不大，所以它们是最后的。

李六卷四

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan x\sec^2 x\,dx=$ ________.

超越卷一

(18)(**本题满分 12 分**)　**计算**$\int \dfrac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx$.

利用分部积分产生递推式

设$a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,dx\ (n=1,2,3,\cdots)$

（1）证明：数列$\{a_n\}$单调递减，且$a_n = \dfrac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n=2,3,\cdots)$

（2）求极限$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ （2019 数一、三）

带指数函数的积分

$\int g(e^x)dx = \int \dfrac{g(e^x)e^x dx}{e^x} \overset{e^x=t}{=\!=} \int \dfrac{g(t)dt}{t}$，达到去指数的作用

张八卷四

12. 已知$\int_a^{2\ln 2} \dfrac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \dfrac{\pi}{6}$，则$a =$ ________.

二重积分

对称性问题（两点法）

超越卷三

(20)(本题满分 12 分) 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}\frac{x^{3}y+x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}\mathrm{d}\sigma$,其中区域 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\geqslant 1,x^{2}+y^{2}\leqslant 1,x\geqslant 0\}$.

曲线的对称性

1）$r=g(\theta)$ 与 $r=g(\pi-\theta)$ 关于 y 轴对称

2）$f(x,y)=f(-x,y)$，则 $f(x,y)=0$ 关于 y 轴对称；$f(x,y)=f(x,-y)$，则 $f(x,y)=0$ 关于 x 轴对称

3）$f(x,y)=f(y,x)$，则 $f(x,y)=0$ 关于 $y=x$ 对称（即如果曲线的表达式 y,x 对称，则曲线关于 $y=x$ 对称）

超越卷九

(20)(本题满分 12 分) 区域 D 由 $r=1-\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 以及 $r=1+\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 所围,计算二重积分

$$I=\iint\limits_{D}\frac{xy^{2}+y}{1+x^{2}+y^{2}}\mathrm{d}\sigma.$$

李四卷四

20.（本题满分 12 分）

设平面曲线 $(x+y)^3=xy$ 在第一象限所围区域为 D. 计算

$$I=\iint_D\left[(x-y)^3+1\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

张四卷二

19.(本题满分 12 分)

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^4\leqslant 1\right\}$，计算 $\iint\limits_D |x|(y+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

参数方程类型

21.(本题满分12分)

设平面区域D由曲线$\begin{cases}x=1-\cos t,\\ y=t-\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与$y$轴围成，计算$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma$.

超越卷四

(20)**(本题满分12分)** 计算二重积分 $I=\iint\limits_D (|x|+|y|)\mathrm{d}\sigma$,其中$D$是星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$所围成的区域.

极坐标角度定限问题

当积分区域手画不出来，没法从图形上来确定角度的上下限时，可以直接从积分区域边界曲线的表达式来确定上下限。

求伯努利双纽线$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$所围面积$(a>0)$

求伯努利双纽线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$所围面积$(a>0)$

求曲线$(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)$所围面积$(a>0)$

曲线$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2(x,y\geqslant 0)$与$x$轴围成的区域为$D$，计算二重积分$\iint\limits_D xydxdy$（2021）

带绝对值的（分区间去绝对值+补形）
超越卷六

(20)(本题满分 12 分) 已知 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-2y|\,dxdy$.

带最值符号的（找分界线）
超越卷五

(20)(本题满分 12 分) 计算二重积分 $I=\int_0^2 dx\int_0^3 \frac{1}{[1+\max\{3x,2y\}]^2}dy$.

曲面积分（对面积的一般比较简单，而且真题很少考，所以我们只讲对坐标的）
优先利用对称性简化问题（两点法）
张四卷四

19.(本题满分 12 分)

设 Σ 为 $z=y(0\leqslant z\leqslant 1)$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面外侧，计算

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+(z^2-2z)dxdy.$$

补面再利用高斯公式
张四卷四

19.(本题满分 12 分)

设 Σ 为 $z=y(0\leqslant z\leqslant 1)$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面外侧，计算

$$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

统一到 dS，再投影计算（核心问题：需要确定单位法向量的方向）
张四卷四

19.(本题满分 12 分)

设 Σ 为 $z=y(0\leqslant z\leqslant 1)$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面外侧，计算

$$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

统一到 $dxdy$，再投影计算（不需要确定单位法向量的方向）
张四卷四

19.(本题满分 12 分)

设 Σ 为 $z=y(0\leqslant z\leqslant 1)$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面外侧，计算

$$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如果曲面内含奇点，不能直接利用高斯公式，需要挖点

注：$\dfrac{\partial\left(\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}{\partial x}+\dfrac{\partial\left(\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}{\partial y}+\dfrac{\partial\left(\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}{\partial z}=0$

李林卷四

18.（本题满分 12 分）

设直线段 $L:\begin{cases} y+z=-1, \\ x=0 \end{cases}$ $(-1\leqslant z\leqslant 0)$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面为 S_1，曲面 S_2 为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，S_1 与 S_2 所围立体 V 的全表面为 S。取内侧，计算

$$I=\oint\!\!\!\!\oint_S \frac{x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

曲线积分
斯托克斯公式转曲面积分
核心问题：法向量如何确定
张八卷三

20.（本题满分 12 分）

计算

$$I=\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z,$$

其中 L 是平面 $2x-4y+z-4=0$ 和曲面 $z=x^2+y^2$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

张四卷一

19.(本题满分12分)

设曲线 Γ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $y=z$ 的交线，从 z 轴正向看下去为逆时针方向，计算 $\oint_\Gamma y^2\sin x\mathrm{d}x+xyz\mathrm{d}z$.

参数方程
直击痛点：角度上下限如何确定
张八卷三

20.（本题满分 12 分）

计算

$$I=\oint_{L}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z,$$

其中 L 是平面 $2x-4y+z-4=0$ 和曲面 $z=x^2+y^2$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

级数的和函数
求导法
方法一：将常见级数求导化成目标级数
方法二：将目标级数求导化成常见级数
注：方法一是处理分子的n，方法二是处理分母的n

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$的收敛域及和函数$S(x)$（2006）（母

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$的和函数（子

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$的收敛域及其和函数（2010）（母

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^{n+1}}{n!}$的和函数（子

拆法

余五卷五（和张八卷八同题）

18.（本题满分 12 分）

求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n$的收敛域及级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n6^n}$的和.

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$在区间$(-1,1)$内的和函数$S(x)$（2005）

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^{n+1}}{n!}$的和函数

微分方程法
根据系数递推式建立和函数的微分方程，再解微分方程
李六卷六

19.（本题满分 12 分）

设$a_0=0,a_1=1,a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}(n=1,2,\cdots)$,

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n,\qquad x\in(-\infty,+\infty),$$

求$S(x)$满足的二阶微分方程，并求$S(x)$及a_n的表达式.

设$a_0=4,a_1=1,a_{n-2}=n(n-1)a_n,n=2,3,\cdots$，求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数

设$a_0=0,a_1=1,n(n+1)a_{n+1}=na_n+a_{n-1},n=1,2,\cdots$，求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的和函数