2022 秋微积分 A 期末试题答案

一、填空题（每小题 2 分，共 4 小题，满分 8 分）

1. $-\dfrac{8}{3}$；　**2.** $\cos 1-\mathrm{e}^{-1}$；　**3.** 8400；　**4.** $2x-\dfrac{1}{x}$或$\dfrac{2x^2-1}{x}$.

二、选择题（每小题 2 分，共 4 小题，满分 8 分）

1. C；　2. C；　3. D；　4. B.

三、**(5 分)** 求函数 $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的单调区间与极值，并求对应曲线的凹凸区间、拐点以及渐近线.

解　$y'=\dfrac{3(x-1)^2(x+1)^2-(x-1)^3\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$

令 $y'=0$ 得 $x=-5, x=1$，当 $x<-5, x>-1$ 时 $y'>0\left(x\neq 1\right)$，所以单调增区间为 $(-\infty,-5),(-1,+\infty)$，当 $-5<x<-1$ 时 $y'<0$，所以单调减区间为 $(-5,-1)$，极大值为 $y\big|_{x=-5}=-\dfrac{27}{2}$.

$y''=\dfrac{3(x-1)(x+3)\cdot(x+1)^3-(x-1)^2(x+5)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6}=\dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$

令 $y''=0$ 得 $x=1$，当 $x<-1,-1<x<1$ 时 $y''>0$，所以凸区间为 $(-\infty,-1),(-1,1)$，当 $x>1$ 时 $y''<0$，所以凹区间为 $(1,+\infty)$.

因为

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=-\infty$$

所以 $x=-1$ 是垂直渐近线. 因为

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}}{x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right)=-5$$

所以 $y=x-5$ 是斜渐近线.

四、计算下列各题（共 4 题，每题 3 分，满分 12 分）

1. 计算反常积分 $\int_0^{e^4}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

解 $\int_0^{e^4}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int_0^{e^4}\ln x\,d(2\sqrt{x})=2\sqrt{x}\ln x\Big|_{0^+}^{e^4}-\int_0^{e^4}2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=2\sqrt{x}\ln x\Big|_{0^+}^{e^4}-\int_0^{e^4}2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx=8e^2-2\int_0^{e^4}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=8e^2-4\sqrt{x}\Big|_0^{e^4}=8e^2-4e^2=4e^2$$

2. 计算定积分 $\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

解 令 $x=\sin t, 0\le t<\frac{\pi}{2}, dx=\cos t dt$，则

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t dt}{(1+\sin^2 t)\cos t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\sin^2 t}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\sin^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 t}dt}{\frac{1}{\cos^2 t}+\tan^2 t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sqrt{2}\tan t)}{1+(\sqrt{2}\tan t)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}^-}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

3. 计算不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{1-e^x}\,dx$.

解 令 $t=\sqrt{1-e^x}, x=\ln(1-t^2), dx=\frac{-2t}{1-t^2}dt$，则

$$\int e^{2x}\arctan\sqrt{1-e^x}\,dx=\int(1-t^2)^2\arctan t\cdot\frac{-2t}{1-t^2}dt=\int-2t(1-t^2)\arctan t dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\arctan t\,d(1-t^2)^2=\frac{1}{2}(1-t^2)^2\arctan t-\frac{1}{2}\int(1-t^2)^2\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}(1-t^2)^2\arctan t-\frac{1}{2}\int\left(\frac{4}{1+t^2}-3+t^2\right)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}(1-t^2)^2\arctan t-2\arctan t+\frac{3}{2}t-\frac{1}{6}t^3+C$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{1-\mathrm{e}^x}-2\arctan\sqrt{1-\mathrm{e}^x}+\frac{3}{2}\sqrt{1-\mathrm{e}^x}-\frac{1}{6}(1-\mathrm{e}^x)\sqrt{1-\mathrm{e}^x}+C$$

4. 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$**.**

解

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\mathrm{e}^x+1}{(\mathrm{e}^x-1)\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\mathrm{e}^x+1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{1}+\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^x}{2x}=1+\lim_{x\to0}\frac{-\sin x-\mathrm{e}^x}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

五、解方程（共 2 题，每题 3 分，满分 6 分）

1. 求连续函数 $f(x)$ **使其满足方程** $f(x)+2\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=x^2$**.**

解 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\overset{u=x-t}{=}\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$

代入原方程得

$$f(x)+2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=x^2$$

求导得

$$f'(x)+2f(x)=2x$$

所以

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int2\mathrm{d}x}\left(\int2x\mathrm{e}^{-\int2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-2x}\left(x\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C\right)$$

由 $f(0)=0$ 得，$C=\frac{1}{2}$，所以

$$f(x)=x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}$$

2. 设函数$y(x)$具有二阶导数，且曲线$y=y(x)$与直线$y=x$切于原点，记α为曲线$y=y(x)$在点(x,y)处切线的倾角，若$\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，求$y(x)$.

解 解法一 由$y'=\tan\alpha$得

$$y''=\sec^2\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\left(1+(y')^2\right)y'$$

即

$$y''=y'+(y')^3$$

令$p=y'$，则$y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p(1+p^2)$$

由于$p\neq 0$，所以得

$$\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=\mathrm{d}y$$

积分得

$$\arctan p=y+C_1$$

因为曲线$y=y(x)$与直线$y=x$切于原点，所以$y(0)=0,y'(0)=1$，推出$C_1=\dfrac{\pi}{4}$，于是

$$y'=\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)$$

分离变量

$$\cot\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$$

积分得

$$\ln\left|\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\right|=x+C_2$$

即

$$\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=\hat{C}_2\mathrm{e}^x$$

将 $y(0)=0$ 代入得 $\hat{C}_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故

$$\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^x}{2}$$

即

$$y=\arcsin\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^x}{2}-\frac{\pi}{4}$$

解法二 由 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha$ 得

$$\ln\left|\sin\alpha\right|=x+C_1$$

即

$$\sin\alpha=\hat{C}_1\mathrm{e}^x$$

由于 $\alpha\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\hat{C}_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，于是

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^x}{2}$$

又 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以 $\mathrm{d}\alpha=\mathrm{d}y$，积分得

$$\alpha=y+C_2$$

由 $\alpha\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4},y\big|_{x=0}=0$ 得 $C_2=\dfrac{\pi}{4}$，故

$$\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^x}{2}$$

即

$$y=\arcsin\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^x}{2}-\frac{\pi}{4}$$

六、应用题（共 2 题，每题 3 分，满分 6 分）

1. 求心脏线$r=a(1+\cos\theta)$（$a>0$常数）的弧长与所围图形的面积.

解 弧长为

$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8a$$

面积为

$$S=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$$
$$=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}4a^2\cos^4\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{2}a^2$$

2. 设D_1是由抛物线$y=2x^2$和直线$x=a,x=2,y=0$所围成的图形，D_2是由抛物线$y=2x^2$和直线$x=a,y=0$所围成的图形，其中$0<a<2$，(1) 求由D_1绕x轴旋转一周所成旋转体体积V_1和由D_2绕y轴旋转一周所成旋转体体积V_2；(2) 问当a为何值时，V_1+V_2取最大值？并求此最大值.

解 **(1)** $V_1=\int_a^2\pi y^2\mathrm{d}x=\int_a^2 4\pi x^4\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}x^5\Big|_a^2=\frac{4\pi}{5}(2^5-a^5)$

$$V_2=\int_0^a 2\pi xy\mathrm{d}x=\int_0^a 4\pi x^3\mathrm{d}x=\pi x^4\Big|_0^a=\pi a^4$$

或

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\int_0^{2a^2}\pi x^2\mathrm{d}y=2\pi a^4-\int_0^{2a^2}\frac{\pi}{2}y\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4$$

(2) $V=V_1+V_2=\frac{4\pi}{5}(2^5-a^5)+\pi a^4$

令

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=-4\pi a^4+4\pi a^3=0$$

得$a=1$,所以

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}\Big|_{a=1}=\left(-16\pi a^3+12\pi a^2\right)\Big|_{a=1}=-4\pi<0$$

故最大值为

$$V_{\max}=\frac{4\pi}{5}(2^5-1^5)+\pi 1^4=\frac{129\pi}{5}$$

七、 **(3 分)** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$. 若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明：

（1）在区间 (a,b) 内 $f(x)>0$；

（2）在区间 (a,b) 内存在点 ξ，使得 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$；

（3）在区间 (a,b) 内存在与 ξ 相异的点 η，使得 $f'(\eta)\left(b^2-a^2\right)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

解 （1）因为 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，所以 $\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=f(a)=0$，由 $f'(x)>0$ 知在区间 (a,b) 内

$$f(x)>f(a)=0$$

（2）对函数 $F(x)=x^2, G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在区间 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-0}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$$

即

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$$

（3）由拉格朗日中值定理，存在 $\eta\in(a,\xi)$，使得

$$f(\xi)=f(\xi)-f(a)=f'(\eta)(\xi-a)$$

代入（2）中的等式得

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}$$

即

$$f'(\eta)\left(b^2-a^2\right)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

八、 **(2 分)** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，又 $f(x)$ 不恒为零，证明 $\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x \ge 4\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f(x)\right|$.

证 由题设知，存在 $x_0\in(0,1)$ 使得

$$\max_{0\le x\le 1}\left|f(x)\right|=\left|f(x_0)\right|,\ f'(x_0)=0$$

由拉格朗日中值定理，存在 ξ,η 满足 $0<\xi<x_0<\eta<1$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{f(x_0)}{x_0},\ f'(\eta)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=-\frac{f(x_0)}{1-x_0}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x \ge \int_\xi^\eta\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x=\int_\xi^{x_0}\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{x_0}^\eta\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\\
&\ge\left|\int_\xi^{x_0}f''(x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_0}^\eta f''(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|f'(x_0)-f'(\xi)\right|+\left|f'(\eta)-f'(x_0)\right|\\
&=\left|f'(\xi)\right|+\left|f'(\eta)\right|=\frac{\left|f(x_0)\right|}{x_0}+\frac{\left|f(x_0)\right|}{1-x_0}=\frac{\left|f(x_0)\right|}{x_0(1-x_0)}\ge 4\left|f(x_0)\right|=4\max_{0\le x\le 1}\left|f(x)\right|
\end{aligned}$$