2022 秋微积分 A 期中试题答案

一、填空题（每小题 1 分，共 4 小题，满分 4 分）

1. 3； 2. $f'\left(\ln^2 x-\mathrm{e}^{-x}\right)\left(\dfrac{2\ln x}{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$ 或 $f'\left(\ln^2 x-\mathrm{e}^{-x}\right)\left(\dfrac{2\ln x}{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)\Delta x$；

3. 342； 4. $\dfrac{\pi}{12}\left(2d_0h_0v_1+d_0^2v_2\right)$.

二、选择题（每小题 1 分，共 4 小题，满分 4 分）

1. B； 2. A； 3. B； 4. C.

三、(5 分) 找出函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{\left|x^2+x-2\right|}\sin x$ 的间断点，并判断其类型.

解 间断点为 $x=-2, x=0, x=1$

因为

$$\lim_{x\to-2}\frac{\ln|x|}{\left|x^2+x-2\right|}\sin x=-\infty$$

所以 $x=-2$ 是第二类间断点（无穷间断点）. 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\left|x^2+x-2\right|}\sin x=\lim_{x\to0}\frac{x\ln|x|}{\left|x^2+x-2\right|}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\left|x^2+x-2\right|}\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x=0$$

所以 $x=0$ 是可去间断点. 因为

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\ln|x|}{\left|x^2+x-2\right|}\sin x=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(1+x-1)}{|x+2||x-1|}\sin x=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{(x+2)(x-1)}\sin x=\lim_{x\to1^+}\frac{\sin x}{x+2}=\frac{\sin1}{3}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\ln|x|}{\left|x^2+x-2\right|}\sin x=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln(1+x-1)}{|x+2||x-1|}\sin x=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{-(x+2)(x-1)}\sin x=-\lim_{x\to1^+}\frac{\sin x}{x+2}=-\frac{\sin1}{3}$$

所以 $x=1$ 是跳跃间断点.

四、(4 分) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y\cos x-y=1$ 所确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cos x+\mathrm{e}^y(-\sin x)-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^y\sin x}{\mathrm{e}^y\cos x-1}$$

求二阶导数得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^y\sin x}{\mathrm{e}^y\cos x-1}\right)\\&=\frac{\left(\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\sin x+\mathrm{e}^y\cos x\right)\left(\mathrm{e}^y\cos x-1\right)-\left(\mathrm{e}^y\sin x\right)\left(\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cos x-\mathrm{e}^y\sin x\right)}{\left(\mathrm{e}^y\cos x-1\right)^2}\\&=\frac{\mathrm{e}^{3y}\cos x-2\mathrm{e}^{2y}+\mathrm{e}^y\cos x}{\left(\mathrm{e}^y\cos x-1\right)^3}\end{aligned}$$

五、(4 分) 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\arcsin x}}{x^2\ln(1+x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\arcsin x}}{x^2\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\mathrm{e}^{x-\arcsin x}-1\right)\mathrm{e}^{\arcsin x}}{x^2\cdot x}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\arcsin x}\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}x}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{-\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}}{6}=-\frac{1}{6}$$

六、(3 分) 设数列 $\{a_n\}$ 由 $0<a_1<\frac{1}{3},a_{n+1}=a_n(2-3a_n),n=1,2,\cdots$ 所确定，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限.

证 首先证数列 $\{a_n\}$ 的有界性. 用数学归纳法证 $0<a_n<\frac{1}{3},n=1,2,\cdots$，当 $n=1$ 时，有 $0<a_1<\frac{1}{3}$，假设当 $n=k$ 时，有 $0<a_k<\frac{1}{3}$，则当 $n=k+1$ 时，有

$$0<a_{k+1}=a_k(2-3a_k)=\frac{1}{3}-3\left(a_k-\frac{1}{3}\right)^2<\frac{1}{3}$$

得证．因此数列$\{a_n\}$有界．

再证数列$\{a_n\}$的单调性．因为$0<a_n<\frac{1}{3}, n=1,2,\cdots$，所以

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2-3a_n=3\left(\frac{2}{3}-a_n\right)>3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=1,\quad n=1,2,\cdots$$

即数列$\{a_n\}$单调增加．

综上可知，数列$\{a_n\}$单调有界，由单调有界定理知，数列$\{a_n\}$收敛，设$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，对$a_{n+1}=a_n(2-3a_n)$取极限得$a=a(2-3a)$，解得$a=0$（舍），$a=\frac{1}{3}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$．

七、 (4 分) 设奇函数$f(x)$在闭区间$[-1,1]$上有二阶导数，且$f(1)=1$，证明：（1）存在$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=1$；（2）存在$\eta\in(-1,1)$使得$f''(\eta)=2f'(\eta)-2$．

证 （1）因为$f(x)$是奇函数，所以$f(0)=0$，于是由拉格朗日中值定理知，存在$\xi\in(0,1)$使得

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{1-0}{1-0}=1$$

（2）方法一．因为$f(x)$是奇函数，所以$f'(x)$是偶函数，于是

$$f(-1)=-1, f(1)=1, f'(-1)=f'(1)$$

设$F(x)=f'(x)-2f(x)+2x$，则$F(x)$在闭区间$[-1,1]$上连续，在开区间$(-1,1)$内，且

$$F(-1)=f'(-1)=f'(1)=F(1)$$

由罗尔定理知，存在$\eta\in(-1,1)$使得

$$F'(\eta)=f''(\eta)-2f'(\eta)+2=0$$

即

$$f''(\eta)=2f'(\eta)-2$$

方法二. 因为$f(x)$是奇函数，所以$f'(x)$是偶函数，于是

$$f'(-\xi)=f'(\xi)=1$$

设$F(x)=\left(f'(x)-1\right)\mathrm{e}^{-2x}$，则$F(x)$在闭区间$[-\xi,\xi]$上连续，在开区间$(-\xi,\xi)$内，且

$$F(-\xi)=0=F(\xi)$$

由罗尔定理知，存在$\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$使得

$$F'(\eta)=f''(\eta)\mathrm{e}^{-2\eta}+\left(f'(\eta)-1\right)\left(-2\mathrm{e}^{-2\eta}\right)=0$$

又$\mathrm{e}^{-2\xi}\neq 0$，简化整理得

$$f''(\eta)=2f'(\eta)-2$$

八、(2 分) 设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上可导，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=L>0$（$L$是常数），证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

证 取$\varepsilon=\dfrac{L}{2}$，因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=L$，所以$\exists X_1>0$，当$x>X_1$时，恒有

$$\left|f'(x)-L\right|<\frac{L}{2}$$

从而

$$f'(x)>\frac{L}{2}$$

取固定的$x_0>X_1$，当$x>x_0$时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+\frac{L}{2}(x-x_0)$$

$\forall M>\max\{0,f(x_0)\}$，取$X=x_0+\dfrac{2}{L}\left(M-f(x_0)\right)$，则$x>X$时，恒有

$$f(x)>f(x_0)+\frac{L}{2}(x-x_0)>f(x_0)+M-f(x_0)=M$$

因此，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.