第一章 函数与极限

习题一

1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

解 $1-x^2\neq 0 \Rightarrow x=\pm 1$

所以函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) $y=\sqrt{x^2-x}\arcsin x$.

解 $\begin{cases}x^2-x\geq 0\\ -1\leq x\leq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\text{或}\ x\leq 0\\ -1\leq x\leq 1\end{cases}$

所以函数的定义域为$[-1,0]\cup\{1\}$.

2. 计算函数值.

(1) 设 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(2)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(a+b)(a+b\neq -1)$；

解 $f(2)=\dfrac{|2-2|}{2+1}=0$，$f(-2)=\dfrac{|-2-2|}{-2+1}=-4$

$f(0)=\dfrac{|0-2|}{0+1}=2$，$f(a+b)=\dfrac{|a+b-2|}{a+b+1}$

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, |x|<1\\ 0, |x|\geq 1\end{cases}$，求 $f(1)$, $f(-2)$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解 $f(1)=0$，$f(-2)=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

(1) $y=\sin x-\cos x+1$；

解　$y=f(x)=\sin x-\cos x+1$

因为

$$f(-x)=-\sin x-\cos x+1\neq f(x)$$

所以$f(x)$既非偶函数又非奇函数.

(2)　$y=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$；

解　$y=f(x)=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

因为

$$f(-x)=\log_2\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\log_2\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$=-\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x)$$

所以$f(x)$是奇函数.

(3)　$y=2^{-x}\left(1+2^x\right)^2$.

解　$y=f(x)=2^{-x}\left(1+2^x\right)^2$

因为

$$f(-x)=2^x\left(1+2^{-x}\right)^2=2^x\cdot 2^{-2x}\left(2^x+1\right)^2=2^{-x}\left(1+2^x\right)^2=f(x)$$

所以$f(x)$是偶函数.

4. 下列函数中哪些是周期函数？并对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=|\sin x|$；

解　是周期函数，周期为π.

(2)　$y=\tan(\pi x)+10$；

解　是周期函数，周期为1.

(3)　$y=x\cos x$.

解　不是周期函数.

5. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；

解 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 得 $x=y^3-1$，所以反函数为 $y=x^3-1$.

(2) $y=\dfrac{2^x}{1+2^x}$；

解 由 $y=\dfrac{2^x}{1+2^x}$ 得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，所以反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

(3) $y=\begin{cases}-x, & -1\le x\le 0\\ x+1, & 0<x\le 1\end{cases}$.

解 当 $-1\le x\le 0$ 时，$0\le y\le 1, x=-y$；当 $0<x\le 1$ 时，$1<y\le 2, x=y-1$，所以反函数为

$$y=\begin{cases}-x, & 0\le x\le 1\\ x-1, & 1<x\le 2\end{cases}$$

6. 设 $f(x)$ 定义域 $D=[0,1]$，求下列函数的定义域.

(1) $f(\sin x)$；

解 $0\le \sin x\le 1 \Rightarrow 2n\pi\le x\le (2n+1)\pi, n\in Z$

所以函数的定义域为 $\bigcup\limits_{n\in Z}[2n\pi,(2n+1)\pi]$.

(2) $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$；

解 $\begin{cases}0\le x+a\le 1\\ 0\le x-a\le 1\end{cases}$

当 $0<a\le\dfrac{1}{2}$ 时，解得 $a\le x\le 1-a$，所以函数的定义域为 $[a,1-a]$.

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，不等式组无解，函数的定义域为空集 ϕ.

7. 下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的？

(1) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$；

解 $y=u^2, u=\cos v, v=\dfrac{1}{x}$

(2) $y=\lg\lg\lg\sqrt{x}$；

解 $y=\lg u, u=\lg v, v=\lg w, w=\sqrt{x}$

(3) $y=3^{\arctan x^2}$.

解 $y=3^u, u=\arctan v, v=x^2$

8. 设 $f(x)$ 是奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x-x^2$，求当 $x<0$ 时 $f(x)$ 的表达式.

解 当 $x<0$ 时，有 $-x>0$，所以

$$f(-x)=(-x)-(-x^2)=-x-x^2$$

又 $f(x)$ 是奇函数，所以当 $x<0$ 时，有

$$f(x)=-f(x)=-(-x-x^2)=x+x^2$$

9. 设 $f(x)=\sin x$，$f(g(x))=1-x^2$，且 $|g(x)|\le\dfrac{\pi}{2}$，求 $g(x)$ 及其定义域.

解 由 $f(g(x))=\sin g(x)=1-x^2$ 得

$$g(x)=\arcsin(1-x^2)$$

又 $|g(x)|\le\dfrac{\pi}{2}$，所以 $|1-x^2|\le 1$，即 $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$，故 $g(x)$ 的定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，从而

$$g(x)=\arcsin(1-x^2), x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$$

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 4\\ e^x, & x>4\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$，求 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$.

解

$$f(g(x))=\begin{cases}g^2(x), & g(x)\le 4\\ e^{g(x)}, & g(x)>4\end{cases}=\begin{cases}(1+x)^2, x\le 0\\ \ln^2 x,\ 0<x\le e^x\\ x, x>e^x\end{cases}$$

$$g(f(x))=\begin{cases}1+f(x), & f(x)\le 0\\ \ln f(x), & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}1, & x=0\\ \ln x^2, & x\le 4 \text{且} x\ne 0\\ x, & x>4\end{cases}$$

11．设 $f(x),g(x)$ 互为反函数，求下列函数的反函数．

(1) $f\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$；

解　由 $y=f\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ 得

$$1-\frac{1}{x}=g(y)\text{，即 } x=\frac{1}{1-g(y)}$$

所以反函数为

$$y=\frac{1}{1-g(x)}$$

(2) $f(2^x)$．

解　由 $y=f(2^x)$ 得

$$2^x=g(y)$$

$$x=\log_2 g(y)$$

所以反函数为

$$y=\log_2 g(x)$$

12. 设 $f(x)$ 对一切 x 都满足 $f(a-x)=f(x)$ 及 $f(b-x)=f(x),a\ne b$，证明：$f(x)$ 是周期函数．

证　因为

$$f(x+a-b)=f(a-(b-x))=f(b-x)=f(x)$$

所以 $f(x)$ 是周期为 $a-b$ 的周期函数．

13. 设函数 $y=f(g(x))$ 由 $y=f(u), u=g(x)$ 复合而成，试证：

⑴ 若 $g(x)$ 为偶函数，则 $f(g(x))$ 也是偶函数；

证 因为 $g(x)$ 是偶函数，所以

$$g(-x)=g(x)$$

于是

$$f(g(-x))=f(g(x))$$

故 $f(g(x))$ 是偶函数.

⑵ 若 $g(x)$ 为奇函数，则当 $f(u)$ 是奇函数时，$f(g(x))$ 为奇函数；当 $f(u)$ 是偶函数时， $f(g(x))$ 为偶函数；

证 因为 $g(x)$ 是奇函数，所以

$$g(-x)=-g(x)$$

当 $f(u)$ 是奇函数时，有

$$f(g(-x))=f(-g(x))=-f(g(x))$$

所以 $f(g(x))$ 是奇函数；当 $f(u)$ 是偶函数时，有

$$f(g(-x))=f(-g(x))=f(g(x))$$

所以 $f(g(x))$ 是偶函数.

⑶ 若 $g(x)$ 为周期函数，则 $f(g(x))$ 也是周期函数.

证 设 $g(x)$ 的周期为 T，则

$$g(x+T)=g(x)$$

所以

$$f(g(x+T))=f(g(x))$$

故 $f(g(x))$ 是周期为 T 的周期函数.

1.2

1. 预测下列数列$\{x_n\}$的极限a，指出从哪一项开始能使$|x-a|$永远小于0.01, 0.001.

(1) $x_n=\dfrac{1}{2n}$；

解 极限为$a=0$.

要使$\left|\dfrac{1}{2n}-0\right|=\dfrac{1}{2n}<0.01$，只需$n>50$，所以从第51项开始都有

$$\left|\frac{1}{2n}-0\right|<0.01$$

要使$\left|\dfrac{1}{2n}-0\right|=\dfrac{1}{2n}<0.001$，只需$n>500$，所以从第501项开始都有

$$\left|\frac{1}{2n}-0\right|<0.001$$

(2) $x_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

解 极限为$a=0$.

要使$\left|\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}-0\right|\le\dfrac{1}{n}<0.01$，只需$n>100$，所以从第101项开始都有

$$\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}-0\right|<0.01$$

要使$\left|\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}-0\right|\le\dfrac{1}{n}<0.001$，只需$n>1000$，所以从第1001项开始都有

$$\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}-0\right|<0.001$$

2. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$；

证 $\forall\varepsilon>0$, 要使

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$$

只要$n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，取$N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]+1$，则当$n>N$时，恒有

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$.

证 $\forall\varepsilon>0$, 要使

$$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\varepsilon$$

因为

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

所以只需$\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$，即$n>\frac{1}{\varepsilon^2}$，取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$，则当$n>N$时，恒有

$$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0\right|<\varepsilon$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$$

3. 设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证 因为$\{x_n\}$有界，所以$\exists M>0$，使得$\forall n\in N^+$都有$|x_n|\le M$.

$\forall\varepsilon>0$，因为$\lim_{n\to\infty}y_n=0$，所以$\exists N\in N^+$，当$n>N$时，恒有

$$|y_n-0|=|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$$

于是当$n>N$时，恒有

$$|x_n y_n - 0| = |x_n||y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$$

1.3

1. 当 $x\to 2$ 时， $y=x^2\to 4$， 问 δ 等于多少， 使得当$|x-2|<\delta$时， $|y-4|<0.001$?

解 要使

$$|y-4| = |x^2-4| < 0.001$$

限定$|x-2|<1$，即$1<x<3$，则

$$|x^2-4| = |x+2||x-2| < 5|x-2|$$

所以只要$5|x-2|<0.001$，即$|x-2|<0.0002$，取$\delta=\min\{1,0.0002\}=0.0002$，则当$|x-2|<\delta$时，恒有$|y-4|<0.001$.

2. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x}=2$;

证 $\forall\varepsilon>0$, 要使

$$\left|\frac{2x+3}{x}-2\right| = \frac{3}{|x|} < \varepsilon$$

只要$|x|>\frac{3}{\varepsilon}$，取$X=\frac{3}{\varepsilon}$，则当$|x|>X$时，恒有

$$\left|\frac{2x+3}{x}-2\right| < \varepsilon$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x}=2$$

(2) $\lim\limits_{x \to 2}(5x+2)=12$；

证 $\forall \varepsilon > 0$，要使

$$\left|(5x+2)-12\right| = 5\left|x-2\right| < \varepsilon$$

只要 $\left|x-2\right| < \dfrac{\varepsilon}{5}$，取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$，则当 $0 < \left|x-2\right| < \delta$ 时，恒有

$$\left|(5x+2)-12\right| < \varepsilon$$

所以

$$\lim_{x \to 2}(5x+2)=12$$

(3) $\lim\limits_{x \to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$；

证 $\forall \varepsilon > 0$，要使

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right| = \left|x+2\right| < \varepsilon$$

取 $\delta = \varepsilon$，则当 $0 < \left|x-(-2)\right| < \delta$ 时，恒有

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right| < \varepsilon$$

所以

$$\lim_{x \to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$$

3. 求 $f(x)=\dfrac{x}{x}, \varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x \to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x \to 0$ 时的极限是否存在.

解 因为

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}\frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

所以

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1$$

因为

$$\lim_{x\to 0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$不存在.

1.4

1.根据定义证明：

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$为当$x\to 3$时的无穷小；

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|<\varepsilon$$

取$\delta=\varepsilon$，则当$0<|x-3|<\delta$时，恒有

$$\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|<\varepsilon$$

即当$x\to 3$时$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$是无穷小：$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=0$.

(2) $f(x)=\dfrac{1+2x}{x}$为当$x\to 0$时的无穷大.

证明 $\forall M>0$，要使

$$\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$$

因为

$$\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}+2\right|\geq\left|\frac{1}{x}\right|-2$$

所以只需$\left|\frac{1}{x}\right|-2>M$，即$|x|<\frac{1}{M+2}$，取$\delta=\frac{1}{M+2}$，则当$0<|x|<\delta$时，恒有

$$\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$$

即当$x\to 0$时$f(x)=\frac{1+2x}{x}$是无穷大：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2x}{x}=\infty$.

2. 函数$f(x)=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内是否有界?当$x\to\infty$时，$f(x)$是否为无穷大？为什么？

解　$\forall M>0$，取$n\in N^{+}$使得$x_n=2n\pi>M$，则

$$f(x_n)=x_n\cos x_n=(2n\pi)\cos 2n\pi=2n\pi>M$$

所以$f(x)=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$上无界.

　$\forall X>0$，取$n\in N^{+}$使得$|x_n|=2n\pi+\frac{\pi}{2}>X$，则

$$f(x_n)=x_n\cos x_n=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

所以当$x\to\infty$时$f(x)=x\cos x$不是无穷大.

3. 根据函数极限与无穷小的关系解答：

(1) 把$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x+1}$表示为一个常数与一个当$x\to 0$时的无穷小之和的形式；

解　因为

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x^2+x+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

所以

$$f(x)-(-1) = \frac{x^2-1}{x^2+x+1} + 1 = \frac{2x^2+x}{x^2+x+1}$$

其中 $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+x}{x^2+x+1} = 0$，即 $\frac{2x^2+x}{x^2+x+1}$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小，所以 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x+1}$ 可表示为

$$f(x) = -1 + \frac{2x^2+x}{x^2+x+1}$$

(2) 把 $f(x) = \frac{x^3}{2x^3-1}$ 表示为一个常数与一个当 $x\to\infty$ 时的无穷小之和的形式.

解 因为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{2}$$

所以

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x^3}{2x^3-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(2x^3-1)}$$

其中 $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2(2x^3-1)} = 0$，即 $\frac{1}{2(2x^3-1)}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小，所以 $f(x) = \frac{x^3}{2x^3-1}$ 可表示为

$$f(x) = \frac{x^3}{2x^3-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2x^3-1)}$$

4. 求函数 $f(x)=\dfrac{4}{2-x^2}$ 的图形的渐近线.

解　因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{2-x^2}=0$$

所以直线 $y=0$ 是水平渐近线.

因为

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}}\frac{4}{2-x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{4}{2-x^2}=\infty$$

所以直线 $x=-\sqrt{2}$ 和 $x=\sqrt{2}$ 是垂直渐近线.

1.5

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$；

解　$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}=\dfrac{(-1)^2+2\cdot(-1)+5}{(-1)^2+1}=2$

(2) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；

解　$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}(2x+h)=2x$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=(1+0)\cdot(2-0)=2$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$；

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-0}{\frac{1}{2}}=2$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$；

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x-1)^{25}(2x-1)^{20}}{(2x+1)^{45}}$；

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x-1)^{25}(2x-1)^{20}}{(2x+1)^{45}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(3-\frac{1}{x}\right)^{25}\left(2-\frac{1}{x}\right)^{20}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{45}}=\frac{3^{25}\cdot 2^{20}}{2^{45}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{25}$

(7) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$；

解 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-2-2)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=2\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}=2\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{3+3}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$；

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{2}{1+1}=1$$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

解 令 $t=\sqrt[6]{\cos x}$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{1-\cos^2 x}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^2(t-1)}{(1-t)(1+t+\cdots+t^{11})}=-\lim_{t\to 1}\frac{t^2}{1+t+\cdots+t^{11}}=-\frac{1}{12}$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right]=0$，求常数 a,b.

解 由

$$0=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x-(a+b)+\frac{1-b}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

知 $1-a=0$，即 $a=1$，所以

$$0=\lim_{x\to\infty}\frac{-(1+b)+\frac{1-b}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{-(1+b)+0}{1+0}=-(1+b)$$

解得 $b=-1$.

3. 已知 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$ 存在，且 $f(x)=\cos x+2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$，求函数 $f(x)$.

解 设 $A=\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$，则 $f(x)=\cos x+2\sin\dfrac{x}{2}\cdot A$，所以

$$A=\lim_{x\to\pi}\left(\cos x+2A\sin\frac{x}{2}\right)=-1+2A$$

解得 $A=1$，故

$$f(x)=\cos x+2\sin\frac{x}{2}$$

1.6

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$;

解　因为

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \le \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}} \le \frac{n}{n+1}$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

由两边夹挤准则知，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)=1$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2+\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)\pi}\right)$；

解　因为

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+(n-1)\pi} \le \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2+\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)\pi} \le \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+(n-1)\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+(n-1)\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\pi}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

由两边夹挤准则知，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2+\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)\pi}\right)=\frac{1}{2}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right], 0<\alpha<1$.

解 因为

$$0\le(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}=n^{\alpha}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right]\le n^{\alpha}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=n^{\alpha-1}$$

及

$$\lim_{n\to\infty}0=0，\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}=0$$

由两边夹挤准则知，

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]=0$$

2.计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^{2}}{\tan 2x}$；

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^{2}}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^{2}}{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left[(1+x)\cos 2x\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}\right]$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}(1+x)\lim_{x\to0}\cos 2x\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}$$

(2) $\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{\sin x}{x-n\pi}$（$n$为正整数）；

解 令$t=x-n\pi$，则

$$\lim_{x\to n\pi}\frac{\sin x}{x-n\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(n\pi+t)}{t}=\lim_{t\to0}(-1)^{n}\frac{\sin t}{t}=(-1)^{n}\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=(-1)^{n}\cdot1=(-1)^{n}$$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；

解

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\left[\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2}\right]=1\cdot\cos a=\cos a$$

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$；

解 令 $t=x-\dfrac{\pi}{3}$，则 $x=t+\dfrac{\pi}{3}$，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{1-2\cos\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}{\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{t}{2}+\sqrt{3}\sin t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\left[\sin\frac{t}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{t}{2}}{\dfrac{t}{2}}\frac{t}{\sin t}+\sqrt{3}\right]=0\cdot 1\cdot 1+\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{2}\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3．计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-x)^{\frac{1}{-x}}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$；

解 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(1-\dfrac{2}{2x+1}\right)^{-\frac{2x+1}{2}}\right]^{-\frac{2x}{2x+1}}=\mathrm{e}^{-1}$

其中

$$\lim_{x\to +\infty}-\frac{2x}{2x+1}=-\lim_{x\to +\infty}-\frac{1}{1+\dfrac{1}{2x}}=-1$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{-n}$；

解 当 $x=0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

当 $x\neq 0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}\right)^{\frac{1}{\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}}}\right]^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}=\mathrm{e}^{-x}$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2\sin x+\cos x-1)^{\frac{1}{2\sin x+\cos x-1}}\right]^{\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=\mathrm{e}^2$

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[2\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{x}{2}\right]=2\cdot 1-1\cdot 0=2$$

4. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，求常数 a.

解 因为

$$9=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{2a}$$

所以 $\ln 9=2a$，即 $a=\ln 3$.

5. 设数列 $\{x_n\}$ 由关系式 $x_1=\sqrt{2},x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\,(n=1,2,\cdots)$ 所确定，证明：数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求出极限值.

证 用数学归纳法证明 $0<x_n<2,n=1,2,\cdots$ 成立. 当 $n=1$ 时，有 $0<x_1=\sqrt{2}<2$，假设当 $n=k$ 时，有 $0<x_k<2$，则当 $n=k+1$ 时，有

$$0 < x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2+2} = 2$$

得证. 又

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - x_n = \frac{2 + x_n - x_n^2}{\sqrt{2 + x_n} + x_n} = \frac{(2 - x_n)(x_n + 1)}{\sqrt{2 + x_n} + x_n} > 0, n = 1,2,\cdots$$

因此，数列$\{x_n\}$单调有界. 由单调有界准则知，极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，设 $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$，对$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$取极限得$a = \sqrt{2 + a}$，解得$a = 2$，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

1.7

1. 当$x \to 1$时，无穷小$1 - x$和（1）$1 - x^3$，（2）$2(1 - \sqrt{x})$是否同阶，是否等价？

解 因为

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - x}{1 - x^3} = \lim_{x\to 1} \frac{1 - x}{(1 - x)(1 + x + x^2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1 + x + x^2} = \frac{1}{3}$$

所以$1 - x$与$1 - x^3$是同阶但不等价的无穷小.

因为

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - x}{2(1 - \sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2}(1 + \sqrt{x}) = 1$$

所以$1 - x$与$2(1 - \sqrt{x})$是等价无穷小.

2. 证明：当$x \to 0$时，有$\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$.

证 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x}}{\frac{x^2}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos x}\right]=1^2\cdot 1=1$$

所以

$$\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}\ (x\to 0)$$

3. 当$x\to 0$时，试确定下列各无穷小对x的阶数，并写出其幂函数形式的主部.（若两个无穷小α和β满足关系式$\beta=\alpha+o(\alpha)$，则称α是β的主部）

(1) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}$；

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to 0}\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)=-1$$

所以当$x\to 0$时，$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}$是$x$的$\frac{1}{3}$阶无穷小，其幂函数形式的主部是$-x^{\frac{1}{3}}$.

(2) $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}\ (a>0)$

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+x^3}+\sqrt{a}\right)}{x^3\left(\sqrt{a+x^3}+\sqrt{a}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3\left(\sqrt{a+x^3}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+x^3}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

所以当$x\to 0$时，$\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}$ 是x的3阶无穷小，其幂函数形式的主部是$\frac{1}{2\sqrt{a}}x^3$.

4. 利用等价无穷小代换法求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}$；

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}-1}$；

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{2}x}=2$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^n}{(\sin x)^m}$ $(n,m为正整数)$；

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^n}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0, n>m\\1, n=m\\\infty, n<m\end{cases}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x^3\tan x(1-\cos x)}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[6]{x^5}\sin^5 x\right)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x^3\tan x(1-\cos x)}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[6]{x^5}\sin^5 x\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^3\cdot x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^{\frac{1}{6}}\cdot x^{\frac{5}{6}}\cdot x^5}=\frac{1}{2}$

1.8

1. 下列函数在指出的点处间断，说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点，那么补充或改变函数的定义使它连续.

(1) $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}, x=1, x=2$

解 函数 $y=f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 在 $x=1, x=2$ 处无定义，因为

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$$

所以$x=1$是可去间断点，$x=2$是第二类间断点（无穷间断点），

补充定义$f(1)=-2$，则函数$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}, & x\neq 1, x\neq 2\\ -2, x=1\end{cases}$在$x=1$处连续.

(2) $y=\dfrac{x}{\tan x}, x=k\pi, x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$；

解 因为$y=f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$在$x=k\pi, x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$处无定义，及

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$
$$\lim_{x\to k\pi} f(x)=\lim_{x\to k\pi}\frac{x}{\tan x}=\infty$$
$$\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}=0$$

所以$x=0, x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$都是可去间断点，$x=k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$都是第二类间断点（无穷间断点），若补充定义

$$f(0)=1，\quad f(0)=1, f\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0\,(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

则函数

$$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, & x\neq k\pi, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\,(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)\\ 1, x=0 \\ 0, x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)\end{cases}$$

在点 $x=0, x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$处连续.

(3) $y=\cos^2\frac{1}{x}, x=0$;

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos^2\frac{1}{x}$不存在，所以 $x=0$是第二类间断点（振荡间断点）.

(4) $y=\begin{cases}x-1, x\le 1\\ 3-x, x>1\end{cases}$, $x=1$.

解 $y=f(x)=\begin{cases}x-1, x\le 1\\ 3-x, x>1\end{cases}$. 因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-1)=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3-x)=2$$

所以 $x=1$是跳跃间断点.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, x<0\\ a, x=0\\ \frac{\sin bx}{x}, x>0\end{cases}$，试问：(1)当 a,b为何值时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在？(2)当 a,b为何值时，$f(x)$在 $x=0$处连续?

解 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x^2)=1$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x}=b$

$f(0)=a$

(1) 要使 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在，必须有 $f(0^-)=f(0^+)$，即 $b=1$，所以当 a任意，$b=1$时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在；

(2) 要使 $f(x)$在 $x=0$处连续，必须有 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$，即 $a=b=1$，所以当 $a=b=1$时 $f(x)$在 $x=0$处连续.

3. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$的连续性，若有间断点，则判别其类型.

解　$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}-x, |x|>1\\ 0, |x|=1\\ x, |x|<1\end{cases}$

所以函数 $f(x)$ 在 $|x|\neq 1$ 的点处处连续，$x=\pm 1$ 是分段点.

在 $x=-1$ 处，因为

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}-x=1$$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}x=-1$$

所以 $x=-1$ 是跳跃间断点.

在 $x=1$ 处，因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}-x=-1$$

所以 $x=1$ 也是跳跃间断点.

1.9

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求极限 $\lim_{x\to 0}f(x), \lim_{x\to -3}f(x)$ 及 $\lim_{x\to 2}f(x)$.

解　$x=-3$，$x=2$ 是间断点，由初等函数的连续性，$f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,-3),(-3,2),(2,+\infty)$.

极限为

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -3}f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-1}{x-2}=\frac{(-3)^2-1}{-3-2}=-\frac{8}{5}$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-2}=\infty$$

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$；

解 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln 1=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+a)-\ln a}{x}$；

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+a)-\ln a}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\left[\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right]^{\frac{1}{a}}\right)=\ln e^{\frac{1}{a}}=\dfrac{1}{a}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$；

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\alpha x}{m}}{x}=\frac{\alpha}{m}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\beta x}{n}}{x}=\frac{\beta}{n}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-\sqrt[m]{1+\alpha x}+\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}=1\cdot\frac{\beta}{n}+\frac{\alpha}{m}=\frac{\beta}{n}+\frac{\alpha}{m}$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(a^x+b^x+c^x\right)^{\frac{1}{x}}}{3}\,(a,b,c>0)$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(a^x+b^x+c^x\right)^{\frac{1}{x}}}{3}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}\right]^{\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}}=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}$$

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\ln\sqrt[3]{abc}$$

3. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，且有间断点，则下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，试说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点；

解 错，例如，$\varphi(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, x>0\\0, x=0,\\-1, x<0\end{cases}$ $f(x)=\mathrm{e}^x$，则 $\varphi[f(x)]\equiv 1$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续.

(2) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点；

解 错，例如，$\varphi(x)=\begin{cases}1, x\geq 0\\-1, x<0\end{cases}$，则 $\varphi^2(x)\equiv 1$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续.

(3) $f[\varphi(x)]$ 未必有间断点；

解 对，例如，$\varphi(x)=\begin{cases}1, x\geq 0\\-1, x<0\end{cases}$，$f(x)=|x|+1$，则 $f[\varphi(x)]\equiv 2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续.

(4) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

解 对，反证：假设 $F(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续，则 $\varphi(x)=F(x)f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内也处处连续，与 $\varphi(x)$ 有间断点矛盾.

4. 若 $f(x)$ 连续，$|f(x)|$，$[f(x)]^2$ 是否也连续？又若 $|f(x)|$，$[f(x)]^2$ 连续时，$f(x)$ 是否也连续？

解 若 $f(x)$ 连续，由连续函数的四则运算和复合运算法则知，函数

$|f(x)|=\sqrt{(f(x))^2}$，$[f(x)]^2=f(x)\cdot f(x)$均连续；反之，若$|f(x)|$，$[f(x)]^2$连续，则$f(x)$不一定连续，例如，$f(x)=\begin{cases}1, x\geq 0\\ -1, x<0\end{cases}$在$x=0$处不连续，但$|f(x)|$，$[f(x)]^2$在$x=0$处连续.

1.10

1. 证明：方程$x^5-3x=1$至少有一个根介于1和2之间.

证 设$f(x)=x^5-3x-1$，则$f(x)$在闭区间$[1,2]$上连续，且

$$f(1)=-3<0,\ f(2)=25>0$$

由零点存在定理，存在$\xi\in(1,2)$使

$$f(\xi)=\xi^5-3\xi-1=0$$

即方程$x^5-3x=1$有介于1和2之间的根ξ.

2. 证明：任一最高次幂的指数为奇数的代数方程$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$至少有一个实根，其中$a_0,a_1,\cdots,a_{2n+1}$均为实常数，$n\in N$.

证 设$f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续

不妨设$a_0>0$，因为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^{2n+1}\left(a_0+a_1\frac{1}{x}+\cdots+a_{2n+1}\frac{1}{x^{2n+1}}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^{2n+1}\left(a_0+a_1\frac{1}{x}+\cdots+a_{2n+1}\frac{1}{x^{2n+1}}\right)=+\infty$$

所以存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$使得

$$f(\xi)=a_0\xi^{2n+1}+a_1\xi^{2n}+\cdots+a_{2n}\xi+a_{2n+1}=0$$

即ξ是方程$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$的一个实根.

3. 证明：若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b(n\ge 3)$，则在开区间 (x_1,x_n) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

证　由题设知 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_n]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上有最大值 M，最小值 m，于是有

$$m\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le M$$

若上式不等式中为严格不等式，由介值定理，$\exists\xi\in(x_1,x_n)$ 使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

若上式不等式中出现在等号，不妨设

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=m$$

则 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=m$，任取 $x_2,x_3\cdots x_{n-1}$ 中一点作为 ξ，便有 $\xi\in(x_1,x_n)$ 且

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

得证.

4. 证明：若 $f(x)$ 在开区间 $(a,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 必在 $(a,+\infty)$ 内有界.

证　设 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$，则取 $\varepsilon=1,\ \exists\delta>0$ 使得当 $a<x<a+\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<1$$

于是

$$|f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|<1+|A|$$

又设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$，则对于 $\varepsilon=1,\ \exists X>0$ 使得当 $x>X$ 时，恒有

$$|f(x)-B|<1$$

于是

$$\left|f(x)\right|=\left|f(x)-B+B\right|\le\left|f(x)-B\right|+\left|B\right|<1+\left|B\right|$$

因为$f(x)$在$[a+\delta,X]$上连续，所以$f(x)$在$[a+\delta,X]$上有界，故$\exists M_1>0$使得

$$\left|f(x)\right|\le M_1$$

取$M=\max\{1+|A|,1+|B|,M_1\}$，则当$x\in(a,+\infty)$时，恒有

$$\left|f(x)\right|\le M$$

即$f(x)$在$(a,+\infty)$上有界.

总习题一

1. 以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论.

⑴设$f(x)=2^x+3^x-2$，则当$x\to 0$时，有（B）

（A）$f(x)$与x是等价无穷小

（B）$f(x)$与x同阶但非等价无穷小

（C）$f(x)$是比x高阶的无穷小

（D）$f(x)$是比x低阶的无穷小

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}\right)=\ln 2+\ln 3=\ln 6$$

所以当$x\to 0$时，$f(x)=2^x+3^x-2$与x是同阶但不等价无穷小，故选（B）.

⑵ 设$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则$x=0$是$f(x)$的（B）

（A）可去间断点　　　（B）跳跃间断点

（C）第二类间断点　　（D）连续点

解　因为

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{1}{x}}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

所以 $x=0$ 是跳跃间断点，故选（B）.

2.求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+20}+x\right)$；

解　$\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+20}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+20}+x\right)\left(\sqrt{x^2+20}-x\right)}{\sqrt{x^2+20}-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{20x}{\sqrt{x^2+20}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{20x}{-\sqrt{1+\frac{20}{x^2}}-1}=\frac{20}{-1-1}=-10$$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$；

解　令 $t=\dfrac{\pi}{4}-x$，则

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\lim_{t\to 0}\cot 2t\tan t=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t}{\sin 2t}\cdot\frac{\sin t}{\cos t}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t}{\cos t}\cdot\frac{2t}{\sin 2t}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)\ (x>0)$；

解　令 $t=1-x^{\frac{1}{n}}$，则 $n=\dfrac{\ln x}{\ln(1-t)}$，于是

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\ln x}{\ln(1-t)}\cdot t\right)=-\ln x\lim_{t\to 0}\ln(1-t)^{\frac{1}{-t}}=-\ln x\cdot\ln e=-\ln x$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-\mathrm{e}^x}{2+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$；

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-\mathrm{e}^x}{2+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{1-x-\mathrm{e}^x}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{1-x-\mathrm{e}^x}}\right]^{\frac{1-x-\mathrm{e}^x}{(2+x)\sin x}}=\mathrm{e}^{-1}$

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x-\mathrm{e}^x}{(2+x)\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}\lim_{x\to 0}\frac{1-x-\mathrm{e}^x}{\sin x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-x-\mathrm{e}^x}{x}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}+1\right)=-\frac{1}{2}(1+1)=-1$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

解 因为$\sin^2 x$是周期为π的周期函数，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

3. 已知$x\to 0$时$\left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{3}}-1$，与$\cos x-1$是等价无穷小，求常数$a$.

解 因为

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{2}{3}a$$

所以$a=-\dfrac{3}{2}$.

4. 设$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-a}{x(x-1)}$，问常数$a$取何值时，$x=1$是可去间断点，此时$x=0$是哪类间断点？

解 因为$x=1$是可去间断点，所以

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}^x-a}{x(x-1)}$$

存在，故$\mathrm{e}-a=0$，即$a=\mathrm{e}$. 此时，有

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}{x(x-1)}=\infty$$

所以$x=0$是第二类间断点（无穷间断点）.

5. 设$f(x)$在$x=0$附近连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，求$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解 由$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$知

$$\lim_{x\to 0}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=3$$

简化得

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x^2}\right)$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2$，于是

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}=\mathrm{e}^2$$

6. 设$f(x)$对任何实数x_1,x_2满足$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，且$f(x)$在点$x=a$处连续，证明：$f(x)$是连续函数.

证 因为$f(x)$在$x=a$处连续，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(a+\Delta x)-f(a)]=0$$

故对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)-f(x)]=\lim_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}[f(a)+f(\Delta x)-f(a)]=\lim_{\Delta x\to 0}[f(a+\Delta x)-f(a)]=0\end{aligned}$$

由此知函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

7. 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f[f(x)]=x$，证明：必存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$.

证 若 $f(x_0)=x_0$，取 $\xi=x_0$，则有 $f(\xi)=\xi$.

若 $f(x_0)\neq x_0$，设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且

$$F(x_0)=f(x_0)-x_0$$

$$F(f(x_0))=f(f(x_0))-f(x_0)=x_0-f(x_0)$$

所以 $F(x_0)F(f(x_0))<0$，由零点存在定理，存在介于 x_0 和 $f(x_0)$ 之间的 ξ 使得

$$F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$$

即 $f(\xi)=\xi$.