主管领导审核签字

姓名________ 学号________ 院系（大类）________

密 封 线

2023 学年 秋 季学期

《微积分》系列课程期末试题

注意事项：

（1）本卷满分 50 分，适用于《数学分析》、《微积分 A》、《微积分 B》、《微积分 C》、《微积分 D》、《微积分 F》课程；

（2）本题签共一大页，请勿缺损，否则按作弊处理；

（3）考试结束后题签与演草纸及答题卡一起上交.

一、选择题（每题 2 分，共计 10 分）

1.下列函数中在 $x=0$ 在处不可导的是（　　）.

（A）$f(x)=|x|\sin|x|$；　　（B）$f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$；

（C）$f(x)=\cos|x|$；　　（D）$f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

2.如果等式 $\int f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+C$，则函数 $f(x)=$（　　）.

（A）$-\dfrac{1}{x}$；　（B）$\dfrac{1}{x}$；　（C）$-\dfrac{1}{x^2}$；　（D）$\dfrac{1}{x^2}$.

3. 已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则（　　）.

（A）$k=1,c=4$；　　（B）$k=1,c=-4$；

（C）$k=3,c=4$；　　（D）$k=3,c=-4$.

4. 函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的最小值为（　　）.

（A）1；　（B）$1+\mathrm{e}^{-2}$；　（C）-1；　（D）0.

5. 设 $f(x)$ 是连续函数，当 $x\in(-1,1)$ 时，$f''(x)>0$，且 $|f(x)|\le x^4$，记 $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则（　　）.

（A）$I=0$；　（B）$I>0$；　（C）$I<0$；　（D）无法判断.

二、填空题（每题 2 分，共计 10 分）

6. 已知 $x^2y+xy^2=2$，则 $\mathrm{d}y\big|_{\substack{x=1\\y=1}}=$__________；

7. 曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点横坐标 $x=$__________；

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\mathrm{d}x=$__________；

9. 曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}\ (x>0)$ 的斜渐近线为__________；

10. 曲线 $r=\mathrm{e}^{\theta}$ 在 $[\pi,2\pi]$ 上弧长为__________.

三、解答题（共 5 题，合计 30 分）

11.（10 分）计算题（**注：《数学分析》做（1），微积分 A 做（2），微积分 B 做（3），微积分 C 做（4），微积分 D 做（5），微积分 F 做（6），每个类别均有两道题**）

（1） (i) 设$\begin{cases} x = 2t \\ y = \int_0^t \arctan \mathrm{e}^{u+2023} \mathrm{d}u \end{cases}$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}\right|_{t=-2023}$.　　(ii)计算$\int_{-2023\pi}^{2023\pi} x \sin x \mathrm{d}x$.

（2） (i) 设$y = \int_0^x \arctan \mathrm{e}^{u+2023} \mathrm{d}u$，求$y'''|_{x=-2023}$.　　(ii)计算$\int_{-2023\pi}^{2023\pi} x \sin x \mathrm{d}x$.

（3） (i) 设$y = \int_x^0 \arctan \mathrm{e}^{u+2023} \mathrm{d}u$，求$y'''|_{x=-2023}$.　　(ii)计算$\int_{-2023\pi}^{2023\pi} x \sin x \mathrm{d}x$.

（4） (i) 设$y = \int_0^x \arctan \mathrm{e}^{u+2023} \mathrm{d}u$，求$y'''|_{x=-2023}$.　　(ii)计算$\int_{-3\pi}^{3\pi} x \sin x \mathrm{d}x$.

（5） (i)设$\begin{cases} x = 2t \\ y = \arctan \mathrm{e}^{t+2023} \end{cases}$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=-2023}$.　　(ii)计算$\int_{-3\pi}^{3\pi} x \sin x \mathrm{d}x$.

（6） (i)设$y = \arctan \mathrm{e}^{x+2023}$，求$y''|_{x=-2023}$.　　(ii)计算$\int_{-3\pi}^{3\pi} x \sin x \mathrm{d}x$.

12.（7 分）已知抛物线$y = \sqrt{3x+1}$与y轴交于点P，过点P作抛物线的法线，该法线与x轴交于点C．求抛物线与x轴及法线PC所围成的平面图形面积S，及平面图形绕x轴旋转所得旋转体体积V．

13.（5 分）计算$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}\int_0^{x^2} \ln(1+\sqrt{t})\mathrm{d}t + x^2 \int_{-2}^{2} x \arctan \mathrm{e}^{x^2+2024} \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2} \cdot \arcsin \sqrt[3]{x^2}}$.

14.（5 分）设$f(x), g(x)$均在$(-\infty, +\infty)$内连续，且满足$f(x) = \int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t + x$，

$g(x) = f(x) + 2\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$，求$g(x)$的表达式.

15.（3 分）设$f(x)$在$[0,1]$上导函数连续，且$f(0)=0, f(1)=1$，证明：$\int_0^1 |f'(x) - f(x)| \mathrm{d}x \geq \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

22 秋(工科)数学分析(1)期末试题

一. 选择题(每小题 2 分，共 10 分)

1. 设$f(x)=\dfrac{1}{\arctan\frac{x-1}{x}}$，则(　　)

(A) $x=0$ 与 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点；

(B) $x=0$ 与 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点；

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点；

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

2. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n x+\cos^n x}$ $\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，则下列选项错误的是(　　)

(A) $f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$　　(B) $f(x)$ 在闭区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续

(C) $f(x)$ 在开区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内可导　　(D) $f(x)$ 在开区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内无驻点

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=0$，则当 $x>2$ 时，$f(x)$ 满足(　　)

(A) 单调减少且大于零　　(B) 单调增加且大于零

(C) 单调减少且小于零　　(D) 单调增加且小于零

4. 设$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$，$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(1+x)^2}dx$，则(　　)

(A) $I_1>I_2>I_3$　　(B) $I_3>I_2>I_1$

(C) $I_2>I_1>I_3$　　(D) $I_2>I_3>I_1$

5. 设$f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的连续函数，则在下列变上限积分定义的函数中，必为偶函数的是(　　)

(A) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$　　(B) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

(C) $\int_0^x f(t^2)dt$　　(D) $\int_0^x [f(t)]^2 dt$

二. 填空题(每小题 2 分，共 10 分)

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{n+2k}{3n-2k}=$____________.

(微积分 A、B、C、D、F) $\int_0^1\ln\frac{1+2x}{3-2x}dx=$____________.

7. 设$x=f(y)$是单调可导函数$y=g(x)$的反函数，且$g(1)=2$，$g'(1)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$\lim\limits_{y\to 2}(y-2)\frac{f(y)-f(2)}{(\ln y-\ln 2)^2}=$__________.

8. 设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续导数，$f(1)=1$，且满足

$\int_0^1 [2f(x)-x(x-1)f''(x)]\mathrm{d}x=1$，则$f(0)=$_______.

9. 已知当$x\to 0$时，$\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t\sim k(\tan x-\sin x)$，则$k=$____.

10. 求微分方程$y'+xy=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}y^2$满足初值条件$y(1)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$的特解

$y=$___________.

三. 解答题(共 30 分)

11. (1)(本题 4 分)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\cos x-1}$.

(微积分 A)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{2(1-\cos x)}$.

(微积分 B)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

(微积分 C)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2+x^3}$.

(微积分 D)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{x^2+x^3}$.

(微积分 F)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2+x^3}$.

(2)(本题 4 分)计算定积分$\int_0^2 |x^2-1|\mathrm{d}x$.

12. (1)(本题 4 分)求椭圆$4x^2+y^2=4$在点$(0,2)$处的曲率.

(微积分 A)计算定积分$\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right]\mathrm{d}x$ $(a>0)$.

(微积分 B)计算定积分$\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{a^2+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right]\mathrm{d}x$ $(a>0)$.

(微积分 C)计算定积分$\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+\ln\frac{a-\frac{x}{2}}{a+\frac{x}{2}}\right]\mathrm{d}x$ $(a>0)$.

(微积分 D)计算定积分$\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{a^2+x^2}+\ln\frac{a-\frac{x}{2}}{a+\frac{x}{2}}\right]\mathrm{d}x$ $(a>0)$.

(微积分 F)计算定积分$\int_{-a}^{a}\left[\sqrt{a^2-x^2}+\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right]\mathrm{d}x$ $(a>0)$.

(2)(本题 4 分)设函数$y=y(x)$由$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=\arctan t\end{cases}$ $(t\geqslant 0)$确定，计算$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}$.

13. (本题 5 分)设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内二阶可导，过点$A(0,f(0))$与$B(1,f(1))$的直线与曲线$y=f(x)$相交于点$C(c,f(c))$，其中$0<c<1$，证明：存在$\xi\in(0,1)$使得$f''(\xi)=0$.

14. (本题 5 分) 求由曲线$y=\tan x$，直线$y=0$和直线$x=\dfrac{\pi}{4}$所围成的闭区域D的面积S，以及闭区域D绕直线$y=0$旋转一周所得旋转体的体积V.

15. (本题 4 分) 已知反常积分$I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{a}{x+2}\right)\mathrm{d}x$收敛，试确定参数$a$并计算$I$的值.

(微积分 A、B、C、D、F) 设$f(x)$是定义在闭区间$[0,1]$上的连续函数，且对于任意$x\in[0,1]$，有$0<m\leqslant f(x)\leqslant M$. 证明：

$$\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right)\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$