第三章微分中值定理与导数的应用

习题三

3.1

1．下列函数在指定的区间上是否满足罗尔定理的条件？在区间内是否存在点ξ使$f'(\xi)=0$？

(1) $f(x)=x^3+4x^2-7x-10,[-1,2]$；

解 因为$f(x)$在$[-1,2]$上连续，在$(-1,2)$内可导，且$f(1)=f(2)=0$，所以$f(x)$在$[-1,2]$上满足罗尔定理条件,由罗尔定理，存在$\xi\in(-1,2)$，使得$f'(\xi)=0$．由

$$f'(\xi)=3\xi^2+8\xi-7=0$$

解得

$$\xi=\frac{-4+\sqrt{37}}{3}\in(1,2)$$

(2) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2},[-1,1]$.

解 因为$f(x)$在$x=0$处不可导，所以$f(x)$在$[-1,1]$上不满足罗尔定理条件．又当$x\neq0$时，有$f'(x)=-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\neq0$，所以不存在$\xi\in(-1,1)$使$f'(\xi)=0$．

2．设$f(x)=\begin{cases}3-x^2,0\le x\le1\\ \frac{2}{x},1<x\le2\end{cases}$，在区间$[0,2]$上是否满足拉格朗日中值定理的条件？满足等式$f(2)-f(0)=f'(\xi)(2-0)$的$\xi$共有几个？

解 因为$f(1^-)=f(1^+)=f(1)=2$，所以$f(x)$在$x=1$处连续，故$f(x)$在$[0,2]$上连续，又因为$f'_-(1)=f'_+(1)=-2$，所以$f(x)$在$x=1$处可导，故$f(x)$在$(0,2)$内可导，因此$f(x)$在$[0,2]$上满足拉格朗日中值定理条件，由拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(0,2)$，使得

$$f(2)-f(0)=f'(\xi)(2-0)$$

又$f'(x)=\begin{cases}-2x,0<x\le 1\\ -\dfrac{2}{x^2},1<x<2\end{cases}$，所以

$$1-3=(-2\xi)(2-0) \quad 或 \quad 1-3=\left(-\frac{2}{\xi^2}\right)(2-0)$$

解得$\xi=\dfrac{1}{2}$或$\xi=\sqrt{2}$.

3. 不用求出函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$的导数，说明方程$f'(x)=0$有几个实根，并指出它们所在的区间.

解 因为$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$，所以$f(x)$在区间$[1,2],[2,3],[3,4]$上满足罗尔定理条件，由罗尔定理,存在$\xi_1\in(1,2),\xi_2\in(2,3),\xi_3\in(3,4),$，使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$. 又$f'(x)$是三次多项式，故方程$f'(x)=0$有且仅有三个实根,分别位于区间$(1,2),(2,3),(3,4)$内.

4. 证明：当$x\ge 1$时，$\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

证 设$f(x)=\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$，则$f(x)$在$[1,+\infty)$上可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-(2x)(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

由拉格朗日中值定理推论知，在$[1,+\infty)$上恒有$f(x)=C$，令$x=1$得，$C=\pi/4$，所以

$$\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

5. 证明下列不等式.

(1) 当$a>b>0,n>1$时，$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$；

证　设$f(x)=x^n$，则$f(x)$在$[b,a]$上连续，在(b,a)内可导，由拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(b,a)$，使得

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$$

即

$$a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b)$$

因为$b<\xi<a$，所以$b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^n$，于是

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$$

(2) 当$x>0$时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证　设$f(x)=\ln(1+x)$，对$f(x)$在区间$[0,x]$上应用拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(0,x)$使得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$$

即

$$\ln(1+x)-0=\frac{1}{1+\xi}(x-0)$$

又$0<\xi<x$，所以$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$，故

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$$

6. 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，$a>0$，试证：存在点$\xi\in(a,b)$，使得$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$.

证　函数$f(x)$, $g(x)=\ln x$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$g'(x)=\frac{1}{x}\neq 0$，由柯西中值定理，存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$$

整理得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$$

7. 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上二阶可导，且$f(a)=f(b)=0$，$f(c)<0\,(a<c<b)$，证明：存在点$\xi\in(a,b)$使得$f''(\xi)>0$.

证　对$f(x)$分别在$[a,c]$和$[c,b]$上应用拉格朗日中值定理，存在$\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a}<0$$
$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{-f(c)}{b-c}>0$$

对$f(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上应用拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}>0$$

8. 设$f(x)$和$g(x)$在区间I上可导，证明：在$f(x)$的任意两个零点之间，必有方程$f'(x)+f(x)g'(x)=0$的实根.

证　设 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的任意两个零点，不妨设 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)=f(x_2)=0$，令 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$，则 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导，且 $F(x_1)=F(x_2)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)e^{g(\xi)}+f(\xi)e^{g(\xi)}g'(\xi)=0$$

又 $e^{g(\xi)}\neq 0$，所以

$$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$$

所以 ξ 是方程 $f'(x)+f(x)g'(x)=0$ 的根.

9. 设 $f(x)$ 在闭区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上可导，且 $f(0)f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$，证明：存在点 $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)\tan\xi$.

证　因为 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，且 $f(0)f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$，由零点存在定理，存在 $\eta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得

$$f(\eta)=0$$

令 $F(x)=f(x)\cos x$，则 $F(x)$ 在 $\left[\eta,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(\eta,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且 $F(\eta)=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in\left(\eta,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)\cos\xi+f(\xi)(-\sin\xi)=0$$

又 $\cos\xi\neq 0$，所以

$$f'(\xi)=f(\xi)\tan\xi$$

3.2

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{\sin\ x}$；

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \dfrac{1+1}{1} = 2$

(2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sin\ x}{(\pi - 2x)^2}$；

解

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{2(\pi-2x)(-2)} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$$

$$= -\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{-2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

(3) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln\ \tan\ 7x}{\ln\ \tan\ 2x}$；

解

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\tan 7x}\cdot\sec^2 7x\cdot 7}{\frac{1}{\tan 2x}\cdot\sec^2 2x\cdot 2} = \frac{7}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 2x}{\tan 7x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2 7x}{\sec^2 2x}$$

$$= \frac{7}{2}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2 7x\cdot 2}{\sec^2 2x\cdot 7}\cdot 1 = \frac{7}{2}\cdot\frac{2}{7}\cdot 1 = 1$$

(4) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos\ x}}{\sqrt{1+x}}$；

解

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to -1^+}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{\arccos x}}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}$$

$$= \lim_{x\to -1^+}\frac{1}{\sqrt{\arccos x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - e^{\sin\ x}}{x^3}$；

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}\left(e^{x-\sin x}-1\right)}{x^2} = e^0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6}$$

(6) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$；

解

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cot\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\csc^2\frac{\pi x}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$；

解 $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{m(1-x^n)-n(1-x^m)}{(1-x^m)(1-x^n)}=\lim_{x\to 1}\frac{-mnx^{n-1}+nmx^{m-1}}{mx^{m-1}(1-x^n)-nx^{n-1}(1-x^m)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-mn(n-1)x^{n-2}+nm(m-1)x^{m-2}}{-m(m-1)x^{m-2}(1-x^n)+mnx^{m-1}\cdot x^{n-1}-n(n-1)x^{n-2}(1-x^m)+nmx^{n-1}x^{m-1}}$$

$$=\frac{-mn(n-1)+nm(m-1)}{mn+nm}=\frac{m-n}{2}$$

(8) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$；

解

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\tan x(-\ln x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}x}=\mathrm{e}^0=1$$

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$；

解

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\ln\cos x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\cos x}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}}}$$

$$=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{\cos x}}=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-(-1)}{-\sin x}}=\mathrm{e}^0=1$$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}-1\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}-1}}\right]^{n\left(\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}-1\right)}$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3}=-\frac{1}{6}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$$

2. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}},x>0\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},x\le 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性 .

解

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}}\right]^{\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{\mathrm{e}x}}$$

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right]}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{1+x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x}=-\frac{\mathrm{e}}{2}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\left(-\frac{\mathrm{e}}{2}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=f(0)$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

3. 设$f(x)$有二阶导数，当$x\neq 0$时，$f(x)\neq 0$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，求$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解　由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$得$f(0)=0, f'(0)=0$，又$f''(0)=4$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}\times 4=2$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}=\mathrm{e}^2$$

3.3

1. 求函数$f(x)=\sqrt{x}$按$(x-4)$的幂展开的带有拉格朗日余项的3阶泰勒公式.

解　求导得

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}, f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}},$$

令$x=4$得

$$f(4)=2, f'(4)=\frac{1}{4}, f''(4)=-\frac{1}{32}, f'''(4)=\frac{3}{256}, f^{(4)}(\xi)=-\frac{15}{16}\xi^{-\frac{7}{2}}$$

所以泰勒公式为

$$\sqrt{x}=f(x)=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4$$
$$=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-\frac{15}{284}\xi^{-\frac{7}{2}}(x-4)^4$$

其中ξ介于4与x之间.

2. 求函数 $f(x)=\ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为 $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^{k}}, k=0,1,2,\cdots,n$，且

$$f(2)=\ln 2，\quad f^{(k)}(2)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^{k}}, k=1,2,\cdots,n$$

所以泰勒公式为

$$\ln x=f(x)=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^{2}+\cdots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^{n}+o\left((x-2)^{n}\right)$$
$$=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{8}(x-2)^{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^{n}}(x-2)^{n}+o\left((x-2)^{n}\right)$$

3. 求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有皮亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式.

解 求导得

$$f'(x)=\sec^{2}x，\quad f''(x)=2\sec^{2}x\tan x，\quad f'''(x)=4\sec^{2}x\tan^{2}x+2\sec^{4}x$$

令 $x=0$ 得

$$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=2$$

所以麦克劳林公式为

$$\tan x=f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\frac{f'''(0)}{3!}x^{3}+o\left(x^{3}\right)$$
$$=x+0+\frac{2x^{3}}{3!}+0+o\left(x^{3}\right)=x+\frac{x^{3}}{3}+o\left(x^{3}\right)$$

4. 求函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{1-x}$ 的带有拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为 $f^{(k)}(x)=(-1)^{k}(x-k)\mathrm{e}^{1-x}, k=0,1,2,\cdots,n+1$，且

$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}k\mathrm{e}, k=0,1,2,\cdots,n，\quad f^{(n+1)}(\theta x)=(-1)^{n-1}(\theta x-n-1)\mathrm{e}^{1-\theta x}$$

所以麦克劳林公式为

$$
\begin{aligned}
xe^{1-x} &= f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \\
&= 0 + \mathrm{e}x + \frac{-2\mathrm{e}}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{(n-1)} n\mathrm{e}}{n\,!}x^n + \frac{(-1)^{(n+1)}(\theta x - n - 1)}{(n+1)!}\mathrm{e}^{1-\theta x}x^{n+1} \\
&= \mathrm{e}x - \mathrm{e}x^2 + \cdots + (-1)^{(n-1)}\frac{\mathrm{e}}{(n-1)!}x^n + (-1)^{(n+1)}\frac{(\theta x - n - 1)\mathrm{e}^{1-\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}
\end{aligned}
$$

5. 利用泰勒公式计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2\left[x + \ln(1-x)\right]}$；

解

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2\left[x+\ln(1-x)\right]} = \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!} + o(x^4)\right]}{x^2\left[x + \left(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right]}
$$

$$
= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4}} = \frac{-\frac{1}{12}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}
$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right]$.

解

$$
\lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2} + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)\right)\right]
$$

$$
= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}
$$

6. 确定常数 a,b，使 $x-(a+b\cos x)\sin x$ 当 $x\to 0$ 时为 x 的 5 阶无穷小.

解 $x-(a+b\cos x)\sin x = x - a\sin x - \frac{b}{2}\sin 2x$

$$= x - a\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) - \frac{b}{2}\left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + o(x^5)\right)$$

$$= (1-a-b)x + \frac{a+4b}{b}x^3 - \frac{a+16b}{120}x^5 + o(x^5)$$

因为当 $x \to 0$ 时它是 x 的 5 阶无穷小，所以必须

$$\begin{cases} 1-a-b=0 \\ a+4b=0 \\ a+16b \neq 0 \end{cases}$$

解得 $a=\frac{4}{3}, b=-\frac{1}{3}$.

7. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)$，证明：在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $|f''(\xi)| \geq 4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$.

证 将 $f(x)$ 分别在 $x=a, x=b$ 处展成一阶泰勒公式

$$f(x) = f(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2$$

$$f(x) = f(b) + f''(b)(x-b) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2$$

其中 $a<\xi_1<x, x<\xi_2<b$，令 $x=\frac{a+b}{2}$ 得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + f''(a)\cdot\frac{b-a}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + f''(b)\cdot\frac{a-b}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

两式相减并注意到 $f'(a)=f'(b)$，得

$$0 = f(a) - f(b) + \frac{(b-a)^2}{4}\left[\frac{f''(\xi_1)}{2} - \frac{f''(\xi_2)}{2}\right]$$

记 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$，则

$$\left|f(b)-f(a)\right|=\frac{(b-a)^2}{4}\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}-\frac{f''(\xi_2)}{2}\right|\le\frac{(b-a)^2}{4}\left[\frac{f''(\xi_1)}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2}\right]\le\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

即

$$\left|f''(\xi)\right|\ \ge\ 4\,\frac{\left|f(b)-f(a)\right|}{(b-a)^2}$$

3.4

1. 确定下列函数的单调区间.

(1) $y=x-\mathrm{e}^x$;

解 求导得 $y'=1-\mathrm{e}^x$，令 $y'=0$ 得 $x=0$，当 $x>0$ 时，$y'<0$，所以函数在 $(0,+\infty)$ 上单调减少，当 $x<0$ 时，$y'>0$，所以函数在 $(-\infty,0)$ 上单调增加.

(2) $y=(x-1)(x+1)^3$.

解 求导得

$$y'=(x+1)^3+(x-1)\cdot 3(x+1)^2=4(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

令 $y'=0$ 得 $x=-1$，$x=\frac{1}{2}$，当 $x<-1$ 和 $-1<x<\frac{1}{2}$ 时，$y'<0$，所以函数在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 上单调减少，当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$y'>0$，所以函数在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调增加.

3. 设 $f''(x)>0$，$f(0)<0$，试证：函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 分别在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

证 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

令 $\varphi(x)=xf'(x)-f(x)$，则 $\varphi'(x)=xf'''(x)$，当 $x<0$ 时，$\varphi'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调减少，当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加，故当 $x\neq 0$ 时，有

$$\varphi(x)>\varphi(0)=-f(0)>0$$

所以

$$g'(x)=\frac{\varphi(x)}{x^2}>0$$

故 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

3. 证明下列不等式.

(1) 当 $x>0$ 时 $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2}$；

证　设 $f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$，则在 $[0,+\infty)$ 上

$$f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq 0$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加，于是当 $x>0$ 时，有 $f(x)>f(0)=0$，即

$$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2}$$

(2) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$；

证　设 $f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3$，则在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有

$$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x-x)(\tan x+x)$$

令 $g(x)=\tan x-x$，则在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有

$$g'(x)=\sec^2 x-1=\tan^2 x\geq 0$$

所以 $g(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，故当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$g(x)>g(0)=0$，从而当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即

$$\tan x > x+\frac{1}{3}x^3$$

(3) 当 $\alpha>\beta>\mathrm{e}$ 时，$\beta^{\alpha}>\alpha^{\beta}$.

证 设 $f(x)=x\ln\beta-\beta\ln x$，则在区间 $[\beta,+\infty)$ 上有

$$f'(x)=\ln\beta-\frac{\beta}{x}>1-\frac{\beta}{x}\geq 0$$

所以 $f(x)$ 在 $[\beta,+\infty)$ 上单调增加，于是当 $\alpha>\beta>\mathrm{e}$ 时，有 $f(\alpha)>f(\beta)=0$ 即 $\alpha\ln\beta-\beta\ln\alpha>0$，所以 $\beta^{\alpha}>\alpha^{\beta}$.

4. 讨论方程 $\ln x=ax$（其中 $a>0$）有几个实根？

解 设 $f(x)=\ln x-ax$，则在 $(0,+\infty)$ 内可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{x}-a$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{a}$，当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调增加，当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调减少，又

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=-\infty,\ f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

由零点存在定理及函数的单调性知，当 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=0$，即 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，方程有唯一实根 $x=\mathrm{e}$，当 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)>0$，即 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，方程有两个实根，当 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)<0$，即 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，方程无实根.

5. 求下列曲线的凸凹区间及拐点.

(1) $y=x^3-5x^2+3x+5$；

解 $y'=3x^2-10x+3$，$y''=6x-10$

令 $y''=0$ 得 $x=\dfrac{5}{3}$，当 $x<\dfrac{5}{3}$ 时，$y''<0$，所以曲线在区间 $\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right)$ 上是凸的，当 $x>\dfrac{5}{3}$ 时，$y''>0$，所以曲线在区间 $\left(\dfrac{5}{3},+\infty\right)$ 上是凹的，拐点为 $\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{20}{27}\right)$.

(2) $y=\ln\left(1+x^2\right)$;

解

$$y'=\frac{2x}{1+x^2},y''=\frac{2\left(1+x^2\right)-(2x)^2}{\left(1+x^2\right)^2}=-\frac{2\left(x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

令 $y''=0$ 得 $x=\pm1$，当 $x<-1$ 和 $x>1$ 时，$y''>0$，所以曲线在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上是凹的，当 $-1<x<1$ 时，$y''<0$，所以曲线在区间 $(-1,1)$ 上是凸的，拐点为 $(-1,\ln 2)$ 和 $(1,\ln 2)$.

(3) $y=\begin{cases}\ln x-x, x\geq 1\\ x^2-2x, x<1\end{cases}$；

解 函数在 $x=1$ 处连续，当 $x>1$ 时，$y'=\dfrac{1}{x}-1$，$y''=-\dfrac{1}{x^2}<0$，所以曲线在区间 $(1,+\infty)$ 上是凸的，当 $x<1$ 时，$y'=2x-2,y''=2>0$，所以曲线在区间 $(-\infty,1)$ 上是凹的，拐点为 $(1,-1)$.

(4) $\begin{cases}x=t^2\\ y=3t+t^3\end{cases}$ $(t>0)$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{3+3t^2}{2t}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{t}+t\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{t^2}+1\right)}{2t}=\frac{3\left(t^2-1\right)}{4t^3}$$

令 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$，得 $t=1,t=-1$(舍)，当 $0<t<1$ 时，$0<x<1$，$\frac{d^2y}{dx^2}<0$，所以曲线在区间 $(0,1)$ 上是凸的，当 $t>1$ 时，$x>1$，$\frac{d^2y}{dx^2}>0$，所以曲线在区间 $(1,+\infty)$ 上是凹的，拐点为 $(1,4)$.

7. 问 a,b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

解　$y'=3ax^2+2bx$，$y''=6ax+2b$

因为点 $(1,3)$ 是拐点，所以

$$\begin{cases}a+b=3\\6a+2b=0\end{cases}$$

解得 $a=-\frac{3}{2},b=\frac{9}{2}$.

3.5

1. 确定下列函数的极值.

(1)　$y=2x^3-6x^2-18x+7$；

解　$y'=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$

令 $y'=0$ 得，$x=-1,x=3$，又

$$y''=12x-12$$

在点 $x=-1$ 处，有 $y'|_{x=-1}=0,y''|_{x=-1}=-24<0$，所以 $y|_{x=-1}=17$ 是极大值, 在 $x=3$ 处，有 $y'|_{x=3}=0,y''|_{x=3}=24>0$，所以 $y|_{x=3}=-47$ 是极小值.

(2)　$y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$.

解 $y' = -\frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$

当 $x \neq -1$ 时，$y' = -\frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} < 0$，且函数在点 $x=1$ 处连续，所以函数在 $(-\infty,+\infty)$ 区间内单调减少，故函数无极值.

2. 求下列函数的最大值和最小值.

(1) $y = 2x^3 - 3x^2, -1 \le x \le 4$;

解 $y' = 6x^2 - 6x$

解 令 $y'=0$ 得 $x=0, x=1$，在 $x=0, x=1$ 处，有 $y|_{x=0}=0, y|_{x=1}=-1$，在 $x=-1, x=4$ 处，有 $y|_{x=-1}=-5, y|_{x=4}=80$，比较之，最大值为 $y|_{x=4}=80$，最小值为 $y|_{x=-1}=-5$.

(2) $y = x\ln x, 0 < x \le \mathrm{e}$.

解 $y' = \ln x + 1$

令 $y'=0$ 得 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$，在 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 处，有 $y\Big|_{x=\frac{1}{\mathrm{e}}} = -\frac{1}{\mathrm{e}}$，在 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 处，有

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

在 $x=\mathrm{e}$ 处，有 $y|_{x=\mathrm{e}}=\mathrm{e}$，比较之，最大值为 $y|_{x=\mathrm{e}}=\mathrm{e}$，最小值为 $y\Big|_{x=\frac{1}{\mathrm{e}}} = -\frac{1}{\mathrm{e}}$.

4. 求函数 $f(x) = \arctan\frac{1-x}{1+x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的值域.

解
$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\frac{(-1)(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x^2} < 0$$

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调减少，又

$$f\left(0^{+}\right)=\lim_{x\to 0^{+}}\arctan\frac{1-x}{1+x}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

$$f(1)=0$$

所以 $f(x)$ 的值域为 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$.

4. 证明下列不等式.

(1) 当 $0\le x\le 1$ 时， $2^{1-p}\le x^{p}+(1-x)^{p}\le 1\ (p>1)$；

证 设 $f(x)=x^{p}+(1-x)^{p}$，则 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，且

$$f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$，在 $x=\frac{1}{2}$ 处有 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{p-1}}$，在 $x=0,x=1$ 处有 $f(0)=f(1)=1$，比较之，最大值为 $f(1)=1$，最小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{p-1}}$，故当 $0\le x\le 1$ 时，有

$$\frac{1}{2^{p-1}}=f\left(\frac{1}{2}\right)\le f(x)\le f(1)=1$$

即

$$2^{1-p}\le x^{p}+(1-x)^{p}\le 1$$

(2) 当 $x<1$ 时， $\mathrm{e}^{x}\le\frac{1}{1-x}$.

证 设 $f(x)=(1-x)\mathrm{e}^{x}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内可导，且

$$f'(x)=-\mathrm{e}^{x}+(1-x)\mathrm{e}^{x}=-x\mathrm{e}^{x}$$

令 $f'(x)=0$ 得唯一驻点 $x=0$，又

$$f''(x)=-(x+1)\mathrm{e}^{x}$$

在 $x=0$ 处，有 $f'(0)=0, f''(0)=-1<0$，所以 $x=0$ 是最大值点，最大值为 $f(0)=1$，故当 $x<1$ 时，恒有

$$f(x)\le f(0)=1$$

即

$$e^x \le \frac{1}{1-x}$$

5. 要造一圆柱形油罐，体积为 V，问底半径 r 和高 h 各等于多少时，才能使表面积最小?这时底直径与高的比是多少？

解　油罐的表面积为

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

其中 $\pi r^2 h=V$，消去 h 得

$$S=2\pi r^2+\frac{2V}{r},\ r\in(0,+\infty)$$

求导得

$$\frac{dS}{dr}=4\pi r-\frac{2V}{r^2}$$

令 $\frac{dS}{dr}=0$ 得唯一驻点 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，求二阶导得

$$\frac{d^2S}{dr^2}=4\pi+\frac{4V}{r^3}$$

在 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 处，有

$$\left.\frac{dS}{dr}\right|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=0,\left.\frac{d^2S}{dr^2}\right|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=12\pi>0$$

所以 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 是最小值点，此时 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}=2r$，故当 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$，$h=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 时，表面积 S 最小，这时底直径与高的比为 $2r:h=1:1$.

3.6

1．求下列曲线的渐近线.

(1) $y=\dfrac{x^2}{4-x^2}$；

解 $x=\pm 2$ 是间断点，因为

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{4-x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to -2}\frac{x^2}{4-x^2}=\infty$$

所以直线 $x=2$ 和 $x=-2$ 都是垂直渐近线. 又因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{4}{x^2}-1}=-1$$

所以直线 $y=-1$ 是水平渐近线.

(2) $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$.

解 因为

$$a_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}}{x}=\mathrm{e}^{\pi}$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\mathrm{e}^{\pi}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-\mathrm{e}^{\pi}x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-\mathrm{e}^{\pi}}{\dfrac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\pi}=-\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{\pi}=-2\mathrm{e}^{\pi}$$

所以直线 $y=\mathrm{e}^{\pi}x-2\pi\mathrm{e}^{\pi}$ 是斜渐近线.

因为

$$a_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}}{x}=1$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-1}{\frac{1}{x}}-1=-1-1=-2$$

所以直线$y=x-2$是斜渐近线.

2. 描绘下列函数的图形.

(1) $y=e^{-\frac{1}{x}}$；

解 定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

求导得

$$y'=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}>0$$

所以函数在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上是单调增加的，求二阶导数得

$$y''=-\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1-2x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$$

令$y''=0$得$x=\frac{1}{2}$，当$x<0$，$0<x<\frac{1}{2}$时，有$y''>0$，所以函数在区间$(-\infty,0)$和$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上是凹的，当$x>\frac{1}{2}$时，$y''<0$，所以曲线在区间$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上是凸的，拐点为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{e^2}\right)$.

因为

$$\lim_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{x}}=+\infty$$

所以直线$x=0$是垂直渐近线，又$\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=0$.

因为

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=1$$

所以直线$y=1$是水平渐近线.

画出图形（略）.

(2) $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

解 定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

求导得

$$y'=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$$

令$y'=0$得$x=-1$，$x=5$.

求二阶导得

$$y''=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$$

令$y''=0$得$x=-1$.

列表讨论

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	$+$	0	$+$	不存在	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	不存在	$+$	$+$	$+$
$y=y(x)$	$\uparrow\ \cap$	拐点	$\uparrow\ \cup$	不存在	$\downarrow\ \cup$	极小值	$\uparrow\ \cup$

极小值为$y\big|_{x=5}=\dfrac{27}{2}$，拐点为$(-1,0)$.

因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=+\infty$$

所以$x=1$是垂直渐近线.

因为

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}}{x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x\right]=5,$$

所以$y=x+5$是斜渐近线.

画出图形（略）.

3.7

1. 求抛物线$y=x^2-4x+3$在其顶点处的曲率及曲率半径.

解 $y'=2x-4$，$y''=2$

抛物线的顶点为$(2,-1)$，所以顶点处的曲率

$$K=\frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}\Big|_{x=2}=\frac{2}{\left[1+(2x-4)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\Big|_{x=2}=2$$

曲率半径为

$$R=\frac{1}{K}=\frac{1}{2}$$

2. 求曲线$x^2+xy+y^2=3$在点$(1,1)$处的曲率及曲率半径.

解 方程关于x求导得

$$2x+y+xy'+2yy'=0$$

再求导得

$$2+y'+y'+xy''+2(y')^2+2yy''=0$$

在点$(1,1)$处，有

$$y'\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-1,\ y''\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{2}{3}$$

所以曲线在点$(1,1)$处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{|-1|}{\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

曲率半径为

$$R=\frac{1}{K}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{6}}=3\sqrt{2}$$

3. 求曲线$\begin{cases}x=3t^2\\y=3t-t^3\end{cases}$在$t=1$对应的点处的曲率及曲率半径.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=1}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\Big|_{t=1}=\frac{3-3t^2}{6t}\Big|_{t=1}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=1}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\Big|_{t=1}=\frac{-\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{2}}{6t}\Big|_{t=1}=-\frac{1}{6}$$

所以曲线在$t=1$对应的点处的曲率为

$$K=\frac{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{t=1}\frac{\left|-\frac{1}{6}\right|}{\left[1+0^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{6}$$

曲率半径为

$$R=\frac{1}{K}=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6$$

4. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解 $y'=\frac{1}{x}, y''=-\frac{1}{x^2}$

所以曲线的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

曲率半径为

$$R=\frac{1}{K}=\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x},\quad x>0$$

求导得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(2x^2-1\right)}{x^2}$$

令 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}=0$ 得唯一驻点 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}<0$，当 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}>0$，

所以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是最小值点，故最小曲率半径为

$$R\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x}\Bigg|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

5. 求曲线 $y=\tan x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$ 处的曲率圆方程.

解 因为

$$y'=\sec^2 x,\ y''=2\sec^2 x\tan x$$

在点$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$处，有

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=2,\ y''\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=4$$

所以曲率半径为

$$R=\frac{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\left(1+2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4}=\frac{\sqrt{125}}{4}$$

由曲率中心计算公式得

$$\xi=\left\{x-\frac{y'\left(1+(y')^2\right)}{y''}\right\}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{2\left(1+2^2\right)}{4}=\frac{\pi-10}{4}$$

$$\eta=\left\{y+\frac{y'+(y')^2}{y''}\right\}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{4}}=1+\frac{1+2^2}{4}=\frac{9}{4}$$

所以曲率中心为$\left(\frac{\pi-10}{4},\frac{9}{4}\right)$，故曲率圆方程为

$$\left(x-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$$

总习题三

1. 设$f'(x_0)=f''(x_0)=0,f'''(x_0)>0$，则（　　）

（A）$f'(x_0)$是$f'(x)$的极大值

（B）$f(x_0)$是$f(x)$的极大值

（C）$f(x_0)$是$f(x)$的极小值

（D）$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

解 选（D）

2. 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=k$，求 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x+a)-f(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x+a)-f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}[f'(\xi)(x+a-x)]=a\lim\limits_{x\to\infty} f'(\xi)=ak$

其中ξ介于x与$a+x$之间，当$x\to\infty$时$\xi\to\infty$.

3. 设 $f''(x)<0, f(0)=0$，证明：对任何 $x_1,x_2>0$，都有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.（不妨设 $x_1<x_2$）

证 对$f(x)$分别在区间$[0,x_1]$和$[x_2,x_1+x_2]$上应用拉格朗日中值定理，存在$\xi_1\in(0,x_1)$，$\xi_2\in(x_2,x_1+x_2)$，使得

$$f(x_1)=f(x_1)-f(0)=f'(\xi_1)(x_1-0)=x_1f'(\xi_1)$$

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\xi_2)(x_1+x_2-x_2)=x_1f'(\xi_2)$$

对$f'(x)$在区间$[\xi_1,\xi_2]$上应用拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得

$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)<0$$

所以

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)-f(x_1)=x_1f'(\xi_2)-x_1f'(\xi_1)=x_1(f'(\xi_2)-f'(\xi_1))<0$$

即

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

4. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明：在开区间$(0,1)$内存在两个不同的点$\xi,\eta$，使得 $f'(\xi)=-1, f'(\eta)=1$.

证设$F(x)=f(x)+x-1$，则$F(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，且

$$F(0)=f(0)+0-1=-1<0,\ F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}>0$$

由零点存在定理，存在$\eta_1 \in \left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，使得$F(\eta_1)=0$，又$F(1)=0$，对$F(x)$在$[\eta_1,1]$上应用罗尔定理，存在$\xi \in (\eta_1,1) \subset (0,1)$，使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)+1=0$$

即

$$f'(\xi) = -1$$

设$G(x)=f(x)-x$，则$G(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，且

$$G\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0,\ G(1)=f(1)-1=-1<0$$

由零点存在定理，存在$\eta_2 \in \left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得$G(\eta_2)=0$，又$G(0)=0$，对$G(x)$在$[0,\eta_2]$上应用罗尔定理，存在$\eta \in (0,\eta_2) \subset (0,1)$，使得

$$G'(\eta)=f'(\eta)-1=0$$

即

$$f'(\eta)=1$$

5. （布达定理）设$f(x)$在开区间(a,b)内可导，$x_1,x_2 \in (a,b)$. 若$f'(x_1)f'(x_2)<0$，证明：至少存在一点$\xi \in (x_1,x_2)$，使得$f'(\xi)=0$. 你能将这一定理做简单的推广吗?

证 不妨设$f'(x_1)<0,\ f'(x_2)>0$，因为

$$\lim_{\Delta x \to 0^+}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}=f'(x_1)<0$$

所以当Δx充分小时，$f(x_1+\Delta x)<f(x_1)$，故$f(x_1)$不是$f(x)$在区间$[x_1,x_2]$上的最小值，类似可证$f(x_2)$不是$f(x)$在区间$[x_1,x_2]$上的最小值，由此可知，$f(x)$在(x_1,x_2)内取得最小值m，即存在$\xi \in (x_1,x_2)$，使得$f(\xi)=m$，由费马引理知，$f'(\xi)=0$.

推广：设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，则对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，及任意介于 $f'(x_1)$ 和 $f'(x_2)$ 之间的常数 μ，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(\xi)=\mu$.

6. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^4+3}-\left[A+B(x-1)+C(x-1)^2\right]}{(x-1)^2}=0$，求常数 A,B,C.

解 由

$$0=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^4+3}-\left[A+B(x-1)+C(x-1)^2\right]}{(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left[2+(x-1)+\frac{5}{4}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)\right]-\left[A+B(x-1)+C(x-1)^2\right]}{(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2-A+(1-B)(x-1)+\left(\frac{5}{4}-C\right)(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)}{(x-1)^2}$$

知

$$\begin{cases}2-A=0\\1-B=0\\\frac{5}{4}-C=0\end{cases}$$

解得

$$A=2,B=1,C=\frac{5}{4}$$

7. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续的二阶导数，且 $f(0)f'(0)f''(0)\neq 0$. 证明：存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得

$$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)=o(h^2).$$

证 将 $f(x)$ 展开成二阶麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$

所以

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+\frac{f''(0)}{2}h^2+o(h^2)$$

$$f(2h)=f(0)+f'(0)(2h)+\frac{f''(0)}{2}(2h)^2+o(h^2)$$
$$f(3h)=f(0)+f'(0)(3h)+\frac{f''(0)}{2}(3h)^2+o(h^2)$$

于是

$$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$$
$$=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)f(0)+(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)f'(0)h+\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0)h^2+o(h^2)=o(h^2)$$

所以

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1=0\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0\\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0\end{cases}$$

解得

$$\lambda_1=3，\lambda_2=-3，\lambda_3=1$$

8. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上有连续的二阶导数，且 $f(-1)=1, f(0)=0, f(1)=3$，证明：在开区间内 $(-1,1)$ 至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=4$.

证 将 $f(x)$ 展开成一阶麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2$$

其中 η 介于 0 与 x 之间.

令 $x=-1$ 得

$$1=f(-1)=-f'(0)+\frac{f''(\eta_1)}{2} \quad (-1<\eta_1<0)$$

令 $x=1$ 得

$$3=f(1)=-f'(0)+\frac{f''(\eta_2)}{2} \quad (0<\eta_2<1)$$

两式相加得

$$4=\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}$$

因为$f''(x)$在闭区间$[\eta_1,\eta_2]$上连续（因$f''(x)$在$[-1,1]$上连续），所以$f''(x)$在$[\eta_1,\eta_2]$上有最大值M，最小值m，于是

$$m \le 4 = \frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2} \le M$$

由介值定理，存在$\xi \in [\eta_1,\eta_2] \subset (-1,1)$，使得

$$f''(\xi)=4$$

9. 设$a>1$，$f(x)=a^x-ax$在区间$(-\infty,+\infty)$内的驻点为$x(a)$. 问a为何值时，$x(a)$最小？并求出最小值.

解 求导得

$$f'(x)=a^x\ln a-a$$

令$f'(x)=0$得

$$x=1-\frac{\ln\ln a}{\ln a}=x(a)$$

求导得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}=-\frac{\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\ln a-\ln\ln a\cdot\frac{1}{a}}{(\ln a)^2}=-\frac{1-\ln\ln a}{a(\ln a)^2},\ a>1$$

令$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}=0$得唯一驻点$a=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$，当$1<a<\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$时，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}<0$，当$a>\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$时，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}>0$，所以$a=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$是最小值点，最小值为$x\Big|_{a=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

10. 设函数$y=y(x)$由方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$所确定，试求$y=y(x)$的驻点，并判断它是否为极值点.

解 方程关于x求导得

$$6y^2y'-4yy'++2y+2xy'-2x=0$$

令 $y'=0$ 得 $2y-2x=0$，即 $y=x$，代入方程得

$$2x^3-x^2-1=0$$

解出得到驻点 $x=1$.

求二阶导得

$$12y(y')^2+6y^2y''-4(y')^2-4yy''+2y'+2y'+2xy''-2=0$$

在 $x=1$ 处，$y=1, y'=0$，代入上式得

$$y''\big|_{x=1}=\frac{1}{2}>0$$

所以 $x=1$ 是极小值点，极小值为 $y\big|_{x=1}=1$.