

22 年线性代数期末考试答案 (简洁版)

寅默

2023 年 12 月 25 日

1 填空

1. -1 Hint.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B(A+B)^{-1}(A+B) & 0 \\ A+B & A+B \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$$

2. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

3. -1 Hint.

$$\text{Ans} = (A\alpha)^T(A\alpha) = \alpha^T A^T A \alpha = \alpha^T \alpha = (\alpha, \alpha)$$

4. $m-r$ 5. 题意不明, 更改为 $-2xy - 2xz$ 答案是 $a > 3$

6. 双叶双曲面

2 选择

1. C

2. C

3. D

4. A

5. C

6. C

3 大题

1. 等价条件 $|C - DB^{-1}A| \neq 0$.

Hint.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - DB^{-1}r_1} \begin{vmatrix} A & B \\ C - DB^{-1}A & B \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - c_2 B^{-1}A} \begin{vmatrix} B \\ C - DB^{-1}A & B \end{vmatrix}$$

2. 等价。

Hint.

$$R(A) \geq R(AP) = R(B) = R(AP) \geq R(A) + R(P) - s = R(A)$$

3. 1. 若 $a = 2$, 方程组无解, 其他情况下方程组无穷解

2. 通解

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. 1.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$$

4. 1. $a = b = 0$

2. 规范型为 $z_1^2 + z_2^2 = 4$

3. 由于二次型 f 对应的系数矩阵的特征值为 $0, 1, 2$, 不全大于 0 , 故不是正定矩阵(而是半正定矩阵).