2020年期末试题

习题答疑第17周

一、填空（每题2分，满分8分）

1.$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x =$__________.

解：$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{2}$.

2.$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x \cos(x-t)^2\mathrm{d}t\right) =$__________.

解：由于$\int_0^x \cos(x-t)^2\mathrm{d}t \overset{u=x-t}{=} \int_x^0 -\cos u^2\mathrm{d}u = \int_0^x \cos u^2\mathrm{d}u$

故$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x \cos(x-t)^2\mathrm{d}t\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x \cos u^2\mathrm{d}u\right) = \cos x^2$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=$______________.

解：由于当函数$f(x)$在[0,1]上连续，则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right].$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x|_{x=0}^{x=1}=\frac{\pi}{4}.$

4.微分方程$yy''+(y')^2=0$满足条件$y(0)=1$， $y'(0)=\frac{1}{2}$的特解为____________.

解：令$y'=z$，则$y''=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$，故$yy''+(y')^2=0$可化为

$yz\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+z^2=0$，即$z(y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+z)=0$. 从而$z=0$或者$y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+z=0$.

当$z=0$时，即$y'=0$，不满足 $y'(0)=\frac{1}{2}$，不符题意.

因此， $y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+z=0$，可解得$y'=z=\frac{C_1}{y}$. 由$y(0)=1$， $y'(0)=\frac{1}{2}$，可知

$C_1=\frac{1}{2}$. 故$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2y}$，即$2y\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$，积分得$y^2=x+C_2$.

由于$y(0)=1$，故$C_2=1$，且$y=\sqrt{x+1}$.

二、选择题（每题2分，共8分）

1.设函数$f(x)=\sec x$在$x=0$处的二阶泰勒多项式为$1+ax+bx^2$，则（　）

(A)$a=1,b=\frac{1}{2}$;(B) $a=1,b=-\frac{1}{2}$; (C) $a=0,b=\frac{1}{2}$; (D) $a=0,b=-\frac{1}{2}$.

解：依题意，函数$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$，

所以$a=\frac{f'(0)}{1!},b=\frac{f''(0)}{2!}$.

由于$f(x)=\sec x$，$f'(x)=\sec x\tan x$，$f'(0)=0$，$a=0$.

$f''(x)=\sec x\tan^2 x+\sec^3 x$，$f''(0)=1$，$b=\frac{1}{2}$.

选C.

2.设$y=y(x)$是方程$y\ln y-x+y=0$所确定的隐函数，则曲线$y=y(x)$在$(1，1)$处的曲率是（ ）

(A)$\frac{\sqrt{5}}{15}$;　　(B)$\frac{\sqrt{5}}{25}$;　　(C)$\frac{\sqrt{3}}{8}$;　　(D)$\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

解：由于曲线$y=y(x)$的曲率$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$.

对$y\ln y-x+y=0$关于x求导得，$y'\ln y+y'-1+y'=0$.

故，$y'=\frac{1}{\ln y+2}$，将$x=1$，$y=1$代入得，$y'(1)=\frac{1}{2}$.

而$y''=-\frac{1}{(\ln y+2)^2}\frac{y'}{y}$，因此$y''(1)=-\frac{1}{8}$.

$(1，1)$处的曲率$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\Big|_{x=1}=\frac{\sqrt{5}}{25}$.

选B.

3.曲线段$y=\int_0^x \tan t\mathrm{d}t(0\le x\le \frac{\pi}{4})$ 的弧长等于

(A) $\sqrt{3}$;　　(B) $2\sqrt{3}-1$;　　(C) $2\ln 2$;　　(D) $\ln(\sqrt{2}+1)$.

解：由于曲线弧长$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+(\tan x)^2}\,\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1)$.

4.如图所示，设有一质量为M、长为L的匀质细杆AB，在AB的延长线上靠近B端处有一质量为m的质点C, 此质点到B的距离为a，则细杆AB与质点C之间的相互吸引力的大小等于（　　）

(A) $\frac{GMm}{a(L+a)}$;　　(B) $\frac{GMm}{L(L+a)}$;　　(C) $\frac{GMm}{a(L+2a)}$;　　(D) $\frac{GMm}{L(L+2a)}$.

解：以A为原点O，AB为x轴建立数轴，杆AB上的小段$[x, x+\Delta x]$

对质点m的引力微元为$\mathrm{d}F=\frac{GmM\frac{\mathrm{d}x}{L}}{(a+L-x)^2}=\frac{GmM}{L(a+L-x)^2}\mathrm{d}x$，

故引力$F=\int_0^L\frac{GmM}{L(a+L-x)^2}\mathrm{d}x=\frac{GmM}{L(a+L-x)}\Bigg|\begin{matrix}x=L\\x=0\end{matrix}=\frac{GMm}{a(L+a)}$.

三、解答题（6分）

给定函数$y = f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} + 3$,

(1) 求函数$y = f(x)$的单调区间与极值，曲线凹凸区间和拐点.

(2) 求曲线$y = f(x)$的渐近线，并作函数$y = f(x)$的图形.

解:

（1）解：$f'(x) = \frac{3x^2}{(x+1)^2} - \frac{2x^3}{(x+1)^3} = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$,

$$f''(x) = \frac{3x^2 + 6x}{(x+1)^3} - \frac{3x^2(x+3)}{(x+1)^4} = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

函数$f(x)$有唯一的极值点$x = -3$，极大值$f(-3) = -\frac{15}{4}$

三、解答题（6分）

由于$f'(x)=\frac{3x^2}{(x+1)^2}-\frac{2x^3}{(x+1)^3}=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$,

$$f''(x)=\frac{3x^2+6x}{(x+1)^3}-\frac{3x^2(x+3)}{(x+1)^4}=\frac{6x}{(x+1)^4}$$

函数$f(x)$ 的单调增区间$(-\infty,-3)$和$(-1,+\infty)$

单调减区间$(-3,-1)$

凹区间$(0,+\infty)$, 凸区间$(-\infty,-1)$和$(-1,0)$，拐点(0，3)

（2）渐近线为$x=-1$，$y=x+1$，函数图像略。

四、计算下列积分，三小题，共10分

1.计算定积分$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\mathrm{d}x$.

解：$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x\left(1-\sin^2 x\right)}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x}\,|\cos x|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\sqrt{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi}=\frac{4}{3}.$$

2.计算不定积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x+2}}$.

解：令$\sqrt{x+2}=t$，则$x=t^2-2$， $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x+2}}=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{t^2-2+t}=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{(t+2)(t-1)}$$

$$=\int[\frac{\frac{2}{3}}{t-1}+\frac{\frac{4}{3}}{t+2}]\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\ln|t-1|+\frac{4}{3}\ln|t+2|+C$$

$$=\frac{2}{3}\ln\left|\sqrt{x+2}-1\right|+\frac{4}{3}\ln\left|\sqrt{x+2}+2\right|+C.$$

3.计算定积分$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x\arcsin x\,\mathrm{d}x$.

解：$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x\arcsin x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arcsin x\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{2}\arcsin x\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2}\frac{x+1}{2}\arcsin x\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{8}$.

五、本题5分

设曲线段$x^2 + y^2 = 4$，（$y \ge 0, 0 \le x \le 1$）与直线$x = 0$，$x = 1$及x轴所围成的平面图形为D，

(I) 求平面图形D的面积.

(II) 求图形D分别绕x轴和y轴旋转一周所成旋转体的体积.

解：（I）D的面积$S_D = \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\arcsin\frac{1}{2}} 4\cos^2 t\,\mathrm{d}t$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2(1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = (2t + \sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(II)D绕x轴旋转一周所成旋转体体积$V_x = \int_0^1 \pi(4 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{11\pi}{3}$.

D绕y轴旋转一周所成旋转体体积$V_y = \int_0^1 2\pi x\sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3}(2 - \sqrt{3})$.

六、本题4分

设函数$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x$,证明：存在开区间$(0,1)$内一点$\xi$，使得$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

证明：由积分中值定理，存在$a\in[0,\frac{1}{2}]$使得 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=af(a)$.

考察函数$F(x)=xf(x)$，则$F(x)$在$[a,1]$上可导且$F(1)=F(a)$，$F'(x)=xf'(x)+f(x)$，故存在开区间$(0,1)$内一点，使得

$F'(\xi)=\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$即$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

七、本题5分

已知微分方程$y' + ay = f(x)$，其中 a是非零实常数，$f(x)$是实数域R上的连续函数，

（I）若$f(x) = x$，求微分方程的通解.

（II）若函数$f(x)$是周期为T的函数，证明：微分方程有且仅有一个周期为T的解.

证明：（I）由于$y' + ay = x$，故

$$y = \left[C + \int x e^{\int a \mathrm{d}x} \mathrm{d}x\right] \mathrm{e}^{-\int a \mathrm{d}x} = \left[C + \int x e^{ax} \mathrm{d}x\right] \mathrm{e}^{-ax}$$

$$= \left[C + \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{1}{a^2} e^{ax}\right] \mathrm{e}^{-ax} = C\mathrm{e}^{-ax} + \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}.$$

七、本题5分

已知微分方程$y' + ay = f(x)$，其中 a是非零实常数，$f(x)$是实数域R上的连续函数，

（II）若函数$f(x)$是周期为T的函数，证明：微分方程有且仅有一个周期为T的解.

证明：（II）由于$y' + ay = f(x)$，$f(x)$是周期为T的函数.

$$y(x) = \left[C + \int_0^x f(t)e^{\int a\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{-\int a\mathrm{d}x} = \left[C + \int_0^x f(t)e^{at}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{-ax}$$

先证存在性：$y(x+T) - y(x)$

$$= \left[C + \int_0^{x+T} f(t)e^{at}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{-a(x+T)} - \left[C + \int_0^x f(t)e^{at}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{-ax}$$

七、本题5分

$$=\left[C+\int_0^{x+T} f(t)e^{at}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{-a(x+T)}-\left[C+\int_0^{x} f(t)e^{at}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{-ax}$$

$$=[(C+\int_0^{x+T} f(t)e^{at}\mathrm{d}t)\,\mathrm{e}^{-aT}-(C+\int_0^{x} f(t)e^{at}\mathrm{d}t)]\mathrm{e}^{-ax}$$

由于$g(x)=(C+\int_0^{x+T} f(t)e^{at}\mathrm{d}t)\,\mathrm{e}^{-aT}-(C+\int_0^{x} f(t)e^{at}\mathrm{d}t)$,

$$g'(x)=f(x+T)e^{a(x+T)}\mathrm{e}^{-aT}-f(x)e^{ax}=0$$

故$g(x)$恒为常数，存在唯一的C使得$g(x)=0$,

此时$y(x+T)-y(x)=0$，微分方程有一个周期为T的解.

七、本题5分

再证周期解的唯一性：（用反证法）

如果微分方程有两个不同的周期为T的解$y(x)$和$z(x)$. 则$y(x)-z(x)$一定是$y'+ay=0$的一个周期为T的非零解，而$y'+ay=0$的通解为$y=Ce^{-ax}$，没有周期为T的非零解，矛盾.

八、本题4分

设数列$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^2 x\mathrm{d}x\ \ (n=0,1,2,\dots)$.

（I）证明：a_n单调减少且$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$，$\ \ (n=2,3,4,\dots)$.

（II）计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

证明：（I）$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^2 x\mathrm{d}x>a_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1} x\cos^2 x\mathrm{d}x$

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x\right)'\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x(\cos x)'\mathrm{d}x$$

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n+1}\sin^{n+2} x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x(1-\cos^2 x)\mathrm{d}x$$

故

$$a_{n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2} x\cos^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n-1}\sin^n x\mathrm{d}x$$

$$a_n=\frac{1}{n+1}[(n-1)a_{n-2}-a_n]$$

因此$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$.

八、本题4分

设数列$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x \mathrm{d}x$ $(n = 0,1,2,\ldots)$.

（I）证明：a_n单调减少且$a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$，$(n = 2,3,4,\ldots)$.

（II）计算极限$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

解：（II）$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x \mathrm{d}x > a_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \cos^2 x \mathrm{d}x$

故$1 > \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n a_{n-1}}{(n+3) a_n} > \frac{n}{n+3}$，故$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

2021年期末试题

习题答疑第17周

一、填空题，每题2分，共8分.

1.曲线$y = x^2 + x + 1$在$(0,1)$处的曲率$k =$__________.

解：$y' = 2x + 1$, $y'' = 2$

故$k = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}\Big|_{(0,1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.设曲线$y = y(x)$由参数方程$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 2 \\ y = t^3 - 3t + 2 \end{cases}$所确定，则曲线曲线$y = y(x)$ 向上凸x的区间为__________.

解:$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3t^2-3}{3t^2+3}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\frac{6t(3t^2+3)-6t(3t^2-3)}{(3t^2+3)^2}}{3t^2+3} = \frac{36t}{(3t^2+3)^3} < 0$，$t < 0$,

从而$x \in (-\infty, 2)$.

3.设函数$f(x)$连续，则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x t^2 f(x^3-t^3)\mathrm{d}t=$__________.

解：令$x^3-t^3=u$，则$\mathrm{d}u=-3t^2\mathrm{d}t$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x t^2 f(x^3-t^3)\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x^3}^0 -\frac{1}{3}f(u)\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^3}\frac{1}{3}f(u)\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{1}{3}f(x^3)3x^2=f(x^3)x^2.$$

4. 曲线$\begin{cases}x=\frac{1}{3}t^3-t\\ y=t^2+2\end{cases}$相应于$0\le t\le 3$的弧长为__________.

解：弧长$\int_0^3\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t=\int_0^3\sqrt{(t^2-1)^2+(2t)^2}\mathrm{d}t$

$$=\int_0^3\sqrt{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t=\int_0^3(t^2+1)\mathrm{d}t=12.$$

二、每小题2分，共8分.

1.设函数$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le \pi \\ 2, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，若$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则（　　）

(A) $x=\pi$是$F(x)$的跳跃间断点；　（B）$x=\pi$是$F(x)$的可去间断点；

(C) $F(x)$在$x=\pi$处连续；　　　　(D) $F(x)$在$x=\pi$处可导.

解：$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}1-\cos x, & 0\le x\le \pi \\ 2+2(x-\pi) & \pi\le x\le \pi\end{cases}$.

易知$F(x)$在$x=\pi$处连续但是$F(x)$在$x=\pi$处不可导.

2.函数$f(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}$在$x=0$处的三次泰勒多项式为$ax+bx^2+cx^3$,则 (　).

(A) $a=1$, $b=0$, $c=-\frac{7}{6}$;　　(B) $a=1$, $b=0$, $c=\frac{7}{6}$; ;

(C) $a=-1$, $b=-1$, $c=-\frac{7}{6}$; ;　(D) $a=-1$, $b=-1$, $c=\frac{7}{6}$; .

解: $f(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}=(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))(1-x^2+o(x^3))$

$$=\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)-\left(x^3+o(x^3)\right)=x-\frac{7}{6}x^3+o(x^3)$$

故$a=1$, $b=0$, $c=-\frac{7}{6}$.

3.设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{a-1}}, & 1<x<e\\ \dfrac{1}{x(\ln x)^{a+1}}, & e\le x\end{cases}$，若反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，则(　)

(A) $a<-2$; (B) $a>2$;　(C) $-2<a<0$;　　(D) $0<a<2$.

解：反常积分$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛的充要条件是反常积分$\int_1^{e}f(x)\mathrm{d}x$收敛且反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，易知$1-a+1>0$且$-a-1+1<0$，故$0<a<2$.

4.设函数$y = f(x)$对于一切x满足方程$f''(x) + e^x(f'(x))^2= \ln(1 + x)$且$f'(0) = 0$，则(　　　).

(A) $f(0)$是函数$f(x)$的极小值;　　(B) $f(0)$是函数$f(x)$的极大值;

(C) $(0, f(0))$是曲线$y = f(x)$的拐点;

(D) $f(0)$不是函数$f(x)$的极值，$(0, f(0))$不是曲线$y = f(x)$的拐点.

解：由于$f''(x) + e^x(f'(x))^2= \ln(1 + x)$且$f'(0) = 0$.

故$f''(0) = 0$，$f'''(x) + e^x(f'(x))^2+2e^x f'(x)f''(x) = \frac{1}{1+x}$.

从而$f'''(x) = 1$. $(0, f(0))$是曲线$y = f(x)$的拐点，但$f(0)$不是函数$f(x)$的极值.

三、本题9分

1. 计算不定积分$\int \frac{3x+6}{(x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$

解：$\int \frac{3x+6}{(x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x+1} - \frac{3x-3}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{3}{x+1} - \frac{3}{2}\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} + \frac{9}{2}\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

$$= 3\ln|x+1| - \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{9}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= 3\ln|x+1| - \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) + 3\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

2. 计算不定积分$\int \frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

解：$\int \frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = -\frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} + \int \frac{1}{\mathrm{e}^x}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$

$$= -\frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} + \int \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x = -\frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} + \int 1 - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} + x - \frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x}) + C$$

.

3. 计算定积分$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

解：$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{x^3}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{-\frac{1}{2}(\frac{1}{x^2})'}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}x$

$$=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\Bigg|_1^{\sqrt{3}}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

.

四、本题6分

1.计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos(x^2)}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos(x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xx\sin x}{2x^3}=\frac{1}{2}.$$

2.求极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{4\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{2n\pi}{n}}\right]$.

解：原式$=\int_0^1\sqrt{1+\cos 2\pi x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^1|\cos\pi x|\,\mathrm{d}x$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\pi x\,\mathrm{d}x+\sqrt{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}-\cos\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

五、本题6分

1.设D是由抛物线$y=3x^2$、直线$x=2$和x轴所围成的平面图形，求

（1）平面图形D的面积.

（2）平面图形D分别绕y轴、绕$x=3$旋转一周所成旋转体的体积.

解:(1)平面图形D的面积$S_D=\int_0^2 3x^2\mathrm{d}x=8$.

(2) D绕y轴旋转一周所成旋转体的体积$V_Y=\int_0^2 2\pi x\cdot 3x^2\mathrm{d}x=24\pi$.

D绕$x=3$旋转一周所成旋转体的体积$V_3=\int_0^2 2\pi(3-x)\cdot 3x^2\mathrm{d}x=24\pi$.

2.设容器的内侧是由抛物线$y=x^2$ （$0\leq y\leq H$)绕y轴旋转一周而成的曲面，现在容器中盛水，水高位$\frac{H}{2}$，若将容器内的水全部抽出，问至少需要作多少功?

（长度单位：m，重力加速度g m/s^2, 水密度为$\rho\ kg/m^3$）

解：$W=\int_0^{\frac{H}{2}}\rho g\pi\left(\sqrt{y}\right)^2(H-y)\mathrm{d}y$

$$=\rho g\pi\int_0^{\frac{H}{2}}Hy-y^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{12}\rho g\pi H^3.$$

六、本题6分(解方程)

1.设$f(x)$在$(0,+\infty)$内有连续的一阶导数，对任意$x \in (0,+\infty)$满足方程$5x\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) + x^3$ 且$f(1) = 1$, 求$f(x)$.

解：由于$5x\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) + x^3$

即$5\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) + x^3$

$$3\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = xf(x) + x^3$$

$$3f(x) = f(x) + xf'(x) + 3x^2$$

化简得$f'(x) - \frac{2}{x}f(x) = -3x$,

解得$f(x) = -3x^2\ln x + Cx^2$,由于$f(1) = 1$，故$C = 1$.

因此$f(x) = -3x^2\ln x + x^2$.

六、本题6分(解方程)

2.求微分方程$2yy''=1+(y')^2$满足$y(1)=1$，$y'(1)=-1$的特解.

解：令$z=y'$，则$y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$,

方程$2yy''=1+(y')^2$可化为$2yz\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=1+z^2$,

分离变量，得$2z\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\frac{1}{y}\mathrm{d}y$

积分，得$\ln(1+z^2)=\ln y+C_1$,

由于$y(1)=1$，$y'(1)=-1$，故$C_1=\ln 2$.

从而$1+z^2=2y$，注意到$y'(1)=-1$，故$y'=-\sqrt{2y-1}$

即$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\sqrt{2y-1}$，分离变量，解得$\sqrt{2y-1}=-x+C_2$

由于$y(1)=1$，故$C_1=2, y=\frac{(2-x)^2+1}{2}$.

七、本题4分

(I) 证明：当$0 \le x \le 1$时，有不等式$0 \le 2x - \sin\frac{\pi x}{2} \le 1$成立.

(II) 计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}[\int_0^1 \left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^n \mathrm{d}x]^{\frac{1}{n}}$.

证明：(1) 当$0 \le x \le 1$时，$0 \le \sin\frac{\pi x}{2} \le \frac{\pi x}{2} \le 2x$，故$0 \le 2x - \sin\frac{\pi x}{2}$.

由于$y = 2x - \sin\frac{\pi x}{2}$在$0 \le x \le 1$时单调上升，且$y(1) = 1$

故当$0 \le x \le 1$时，有不等式$0 \le 2x - \sin\frac{\pi x}{2} \le 1$成立.

(2) $2^{\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}} = [\int_0^1 (2x)^n \mathrm{d}x]^{\frac{1}{n}} \le \left[\int_0^1 \left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^n \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}} \le \left[\int_0^1 2^n \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}} = 2$

由于$\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}} = 2$，故$\lim\limits_{n\to\infty}[\int_0^1 \left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^n \mathrm{d}x]^{\frac{1}{n}} = 2$.

八、本题3分

设函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上具有连续的二阶导数，证明：$f''(x)\le 0$的充要条件是对任意实数a,b恒有$f(\frac{a+b}{2})\ge\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证明：令$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，

则$F'(x)=f(x)$，$F''(x)=f'(x)$，$F'''(x)=f''(x)$.

$F(x)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}F''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+$
$\frac{1}{6}F'''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3$,存在$\xi\in(a,b)$.从而

八、本题3分

$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}F''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\frac{1}{6}F'''(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f''(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3$,

$0=F(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=F\left(\frac{a+b}{2}\right)-F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}F''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\frac{1}{6}F'''(\eta)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3=F\left(\frac{a+b}{2}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\frac{1}{6}f''(\eta)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3$,

两式相减得

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi)+f''(\eta)}{6}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$

八、本题3分

当$f''(x)\le 0$时，故

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi)+f''(\eta)}{6}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \le f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

即$f(\frac{a+b}{2})\ge \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

如果对任意实数a,b恒有$f(\frac{a+b}{2})\ge \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，用反证法可证$f''(x)\le 0$，否则存在$x_0$使得$f''(x_0)>0$，从而，存在$(a,b)\ni x_0$，使得$f''(x_0)>0$.

因此，$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi)+f''(\eta)}{6}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 > f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$

即$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，与题设矛盾.

综上所述，$f''(x)\le 0$的充要条件是对任意实数a,b恒有$f(\frac{a+b}{2})\ge \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.