高数选填做题技巧

主讲人 夜雨

以主流模拟卷的核心题为载体，给高数小题做一个做题技巧的总结，相信大家看完一定收获满满!

反常积分的判断

1）一般情况，将被积函数等价成p积分（$\frac{1}{(x-a)^p}$或$\frac{1}{x^p}$）

2）对于带$\ln x$的积分，将被积函数等价成等价成$\frac{1}{x^p\ln^q x}$

当$p\neq 1$时，$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$与$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^p}dx$同敛散，$\int_{\frac{3}{2}}^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$与$\int_{\frac{3}{2}}^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$同敛散

也就是说$\ln^q x$不影响敛散性，可忽略!

当$p=1$时，$\frac{1}{x\ln^q x}dx=\frac{1}{\ln^q x}d\ln x=\begin{cases}\ln\ln x, q=1\\ \frac{\ln^{1-q}x}{1-q}, q\neq 1\end{cases}$ （直接可以积出来）

3）对于带e^x的积分，一般加绝对值放缩成x^α

$x\to+\infty$时，$e^x\gg x^\alpha$

4）带$\sin x$，$\cos x(x\to+\infty)$，一般加绝对值放缩成 1

注：瑕点的定义是“无穷间断点”，间断点不一定是瑕点，比如$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$无瑕点，必收敛

汤八卷一

7. 下列反常积分发散的是(　　).

A. $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

B. $\int_{-1}^{+\infty}\frac{1}{1+x|x|}dx$

C. $\int_0^1\ln^2 x\,dx$

D. $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{\sqrt{x^3-x}}dx$

汤八卷八

3. 下列反常积分发散的是(　　).

A. $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}dx$

B. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^{-x^2}}{x+1}dx$

C. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}(1+2x)}dx$

D. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$

张八卷三

3. 设常数 $m>0,n>0$,则$\int_0^n\sqrt{x}\left[\frac{m}{x}\right]dx$($[\cdot]$是取整符号)的敛散性

A. 仅与 m 有关.

B. 仅与 n 有关.

C. 与 m,n 均有关.

D. 与 m,n 均无关.

李艳芳卷二

4 设 q 为非零常数,若积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^q - 1}{(x^2 - x)^p} dx$ 收敛,则必有(　　)

(A) $q > 0$.　　(B) $q < 0$.　　(C) $\frac{1}{2} < p < 2$.　　(D) $0 < p < \frac{1}{2}$.

变上限积分函数奇偶性判断

定义判断稍微费时间，直接上技巧

偶函数×偶函数＝偶函数（＋×＋＝＋）

奇函数×偶函数＝奇函数（－×＋＝－）

奇函数×奇函数＝偶函数（－×－＝＋）

$\int_0^x$ 奇 $dt =$ 偶

$\int_0^x$ 偶 $dt =$ 奇

若干奇偶函数复合

若全部是奇函数，则复合的结果是奇函数

若有一个是偶函数，则复合的结果是偶函数

张八卷四

2. $f(x) = \int_0^{\sin x} |x| e^{t^2} dt (x \in \mathbf{R})$ 是

A. 有界函数.　　B. 单调函数.

C. 周期函数.　　D. 奇函数.

两式差的等价量求法

1）若 $f/g \to 1$，$f-g=g\left(\frac{f}{g}-1\right)\sim g\ln\frac{f}{g}=g(\ln f-\ln g)$（$f,g$ 带指数，根号都可以利用此方法去掉）

2）若 $f/g \nrightarrow 1$，设 $f\sim ax^n, g\sim bx^n$，则 $f-g\sim(a-b)x^n$

3）若 f,g 不同阶，则高阶被低阶吸收，$f-g\sim -g$ 或 f

李艳芳卷二

1 设 $\alpha_1=\sin\sqrt{x}-\sin(2\sqrt{x}),\alpha_2=e^{\sqrt[3]{x}}-e^{\sqrt{x}},\alpha_3=\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x}$. 当 $x\to0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是(　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　(B) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$.　(C) $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$.　(D) $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$.

张八卷五

2. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n^x\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right]$ 在 $x=1$ 处

A. 左极限存在，右极限不存在.

B. 左极限不存在，右极限存在.

C. 左、右极限都存在，但不相等.

D. 连续.

变上限积分的等价无穷小

李六卷三

1. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\cos x-1}=1$，当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{\sin^2 x} f(t)\mathrm{d}t$ 与 ax^n 是等价无穷小，则

A. $a=-1$，$n=5$.　B. $a=1$，$n=5$.　C. $a=-\dfrac{1}{6}$，$n=6$.　D. $a=\dfrac{1}{6}$，$n=6$.

张八卷五

1. 设 $x\to 0$ 时，$\int_0^x (e^{t\cos t^2}-e^t)\mathrm{d}t$ 与 ax^b 是等价无穷小量，则 $(a,b)=$

A. $\left(-\dfrac{1}{6},3\right)$.　B. $\left(-\dfrac{1}{24},4\right)$.

C. $\left(-\dfrac{1}{2},5\right)$.　D. $\left(-\dfrac{1}{12},6\right)$.

渐近线的快速求法

给定曲线 $y=f(x)$

斜渐近线和水平渐近线求法：若 $f(x)$ 可以表示为 $ax+b+o(1)\ (x\to\infty)$，则 $y=ax+b$ 就是水平或斜渐近线

竖直渐近线求法：找 $f(x)$ 的无穷间断点（从无定义的点找）

李六卷一

1. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1+ax^3}+x)=0$，则曲线 $y=\sqrt[3]{1+ax^3}$ 有斜渐近线为

A. $y=x$.　B. $y=-x$.　C. $y=\dfrac{1}{3}x$.　D. $y=-\dfrac{1}{3}x$.

超越卷一

(2) 曲线 $y=\ln|1-e^{2x}|$ 有(　　) 条渐近线.

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

李六卷四

2. 曲线 $y=\sqrt{1+x^2}e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线条数为

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

极限判断极值点，拐点

已知 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=A(A\neq 0)$

1）若点 a 不是 $g(x)$ 的极值点，则点 a 也不是 $f(x)$ 的极值点

2）若点 a 是 $g(x)$ 的极值点，则点 a 也是 $f(x)$ 的极值点，且 $A>0$ 时，结论相同，$A<0$ 时，结论相反

当 $A>0$ 时，若点 a 是 $g(x)$ 的极小（大）值点，则点 a 是 $f(x)$ 的极小（大）值点

当 $A<0$ 时，若点 a 是 $g(x)$ 的极小（大）值点，则点 a 是 $f(x)$ 的极大（小）值点

李四卷一

6. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，则

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$ 存在.

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$ 不存在.

C. $f'(0)=0, f''(0)=2$.

D. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

汤三卷二

7. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x}{f(x)-2}=-1$，则(　　).

A. $f'(1)=0$ 且 $x=1$ 为极小值点

B. $f'(1)=0$ 且 $x=1$ 为极大值点

C. $f'(1)$ 不存在且 $x=1$ 为极小值点

D. $f'(1)$ 不存在且 $x=1$ 为极大值点

李六卷二

4. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[f(x+1)+e^{x^2}]}{x^2}=2$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的

A. 驻点且为极大值点.

B. 驻点且为极小值点.

C. 不可导点.

D. 可导点但不是驻点.

余五卷一

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内三阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{(x-1)^2\ln x}=\dfrac{1}{3}$，则(　　).

A. $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点

B. 点 $(1,2)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

C. $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点

D. 点 $(1,2)$ 不为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

余五卷四

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数，$f(0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}=2$，则(　　).

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. 以上都不正确

极值点、拐点的判断除了根据“一阶、二阶两侧是否异号”，还可以根据第三充分条件
核心就是要看到几阶导数不为零!
极值的第三充分条件
设函数$f(x)$在$x=x_0$处$n(n\geqslant 2)$阶可导，且$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$
若n是偶数，则$x=x_0$是$f(x)$的极值点
若n是奇数，则$x=x_0$不是$f(x)$的极值点（无需记忆）
拐点的第三充分条件
设函数$f(x)$在$x=x_0$处$n(n\geqslant 3)$阶可导，且$f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$
若n是奇数，则点$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点
若n是偶数，则点$(x_0,f(x_0))$不是曲线$y=f(x)$的拐点（无需记忆）

汤八卷七

2. 设函数$f(x)$连续二阶可导，且$f(0)=2$，又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2f'(x)-2}{\ln(1+x)-x^2}=2$，则(　　).

A. $f(x)$在$x=0$处取极大值2　　B. $f(x)$在$x=0$处取极小值2

C. $f(x)$在$x=0$处不取极值　　D. $(0,2)$为$y=f(x)$的拐点

极值点、拐点、驻点个数判断

设$f(x)$是多项式函数，若a是$f(x)$的k重根，则a是$f'(x)$的$k-1$重根（k是正整数）

李六卷二

12. 函数 $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的驻点个数为________.

增加问题求极值点个数，拐点个数

最值计算

小题用拉乘有时比较浪费时间，可借助参数方程或柯西不等式快速得到答案

张八卷一

4. 函数 $f(x,y)=x+4y$ 在条件$\frac{x^2}{2}-x+y^2=1$下的最大值是

A. $2+2\sqrt{2}$.　　B. $1+3\sqrt{2}$.

C. $2+2\sqrt{3}$.　　D. $1+3\sqrt{3}$.

积分比大小

1）积分区域一致，直接比较被积函数的大小

2）积分区域不一致，先化成一致，再比较被积函数的大小

3）积分区域具有包含关系，可以考虑作差法

4）积分区域一致，被积函数无法比较大小，可以考虑作差法

李艳芳卷三

3 设 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x}dx, J=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx, K=\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{e^x}dx$，则（　　）

(A) $I>J>K$.　　(B) $J>I>K$.　　(C) $I>K>J$.　　(D) $J>K>I$.

余五卷一

7. 设 $D=\left\{(x,y)\middle|\,0\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}},0\leqslant y\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}$，

$$I_1=\iint_D \sin(\max\{x^2,y^2\})dxdy, I_2=\iint_D \sin(\min\{x^2,y^2\})dxdy,$$

$$I_3=\frac{1}{2}\iint_D (\sin x^2+\sin y^2)dxdy,$$

则有（　　）.

A. $I_1=I_2=I_3$　　B. $I_1=I_3>I_2$

C. $I_1>I_2=I_3$　　D. $I_1>I_3>I_2$

超越卷一

(4) 设 $M=\int_0^1 e^x dx, N=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} dx, P=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\tan x} dx$,则(　　)

(A) $P<M<N$　　(B) $P<N<M$　　(C) $M<P<N$　　(D) $N<P<M$

李六卷一

6. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^\alpha} dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^\alpha} dx (\alpha>0)$,则

A. $I_1<I_2$.

B. $I_1>I_2$.

C. $I_1=I_2$.

D. I_1, I_2 的大小与 α 有关.

李六卷六

5. 设 $I_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\, dx\ (k=1, 2, 3, 4)$,则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=$

A. I_1.　　B. I_2.　　C. I_3.　　D. I_4.

超越卷二

(6) 设 $I_k=\iint\limits_{D_k}(xy^2e^{-x^2}+x^2\sin(x^2+y^2))d\sigma, k=1,2,3$,其中

$D_1:x^2+y^2\leqslant\frac{\pi}{2}$, $D_2:x^2+y^2\leqslant\pi$, $D_3:x^2+y^2\leqslant 2\pi$,则 I_1,I_2,I_3 三者的大小关系为(　　).

(A)$I_1\leqslant I_2\leqslant I_3$　　(B)$I_3\leqslant I_2\leqslant I_1$　　(C)$I_1\leqslant I_3\leqslant I_2$　　(D)$I_3\leqslant I_1\leqslant I_2$

线性微分方程解的叠加原理

y_1^* 是 $y'+q(x)y=f_1(x)$ 的解，y_2^* 是 $y'+q(x)y=f_2(x)$ 的解

则 $ay_1^*+by_2^*$ 是 $y'+q(x)y=af_1(x)+bf_2(x)$ 的解（可推广到任意阶情形）

由此可以得到

1） 非齐次解＋齐次解＝非齐次解

2） 非齐次解－非齐次解＝齐次解

3） 齐次解＋齐次解＝齐次解

若 y_1,y_2 及 ay_1+by_2 是 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解，ay_1-by_2 是 $y'+p(x)y=0$ 的解，求 a,b

李艳芳卷三

(5) 设函数 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 分别为一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的三个不同的解,已知 $y_1(0)=a,y_2(0)=b,y_3(0)=c$,则下列说法中,正确的是(　　)

(A) $\dfrac{y_3(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}$ 是否为常数与 $p(x),q(x)$ 有关.

(B) $\dfrac{y_3(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}$ 是否为常数与 a,b,c 的取值有关.

(C) 若 $a<b<c$,则 $\dfrac{y_3(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}$ 必为大于 0 的常数.

(D) 若 $a<b<c$,则 $\dfrac{y_3(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}$ 必为小于 0 的常数.

求参数范围（参数分离）

李六卷三

1. 若方程 $\ln x = ax(a>0)$ 有且只有 2 个实根，则

A. $0<a<\frac{1}{e}$.　　B. $a=\frac{1}{e}$.

C. $\frac{1}{e}<a<1$.　　D. $a>1$.

汤八卷四

3. 设 $\ln x = ax^2$ 有且仅有两个实根，则（　　）.

A. $a<0$　　B. $0<a<\frac{1}{2e}$　　C. $a=\frac{1}{2e}$　　D. $a>\frac{1}{2e}$

李六卷三

4. 设常数 $a>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x\leqslant x^a$，则 a 的取值范围为

A. $(0,\mathrm{e}]$.　　B. $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.　　C. $[\mathrm{e},+\infty)$.　　D. $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$.

幂级数的收敛半径

设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nq^n$ 条件收敛，则收敛半径为 $|q|$

张八卷六

2. 设常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，r 是实数，则

A. 当 $|r|\geqslant1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}r^{2n-1}$ 发散.

B. 当 $|r|\leqslant1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散.

C. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}r^{2n-1}$ 发散时，$|r|\geqslant1$.

D. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散时，$|r|\leqslant1$.

李六卷六

4. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n (x+1)^n$ 的收敛区间为

A. $(-3,1)$.　　B. $(-4,2)$.　　C. $(-2,0)$.　　D. $(0,2)$.