中值问题历届真题

(1987-2024)

主讲人：夜雨

汇总历届真题，大家就会发现中值问题考得比较频繁（特别是近几年，2023 和 2024 连着考了两年），所涉及的方法和内容也非常多，比如泰勒中值定理，柯西中值定理，拉格朗日中值定理，原函数法，常数值法，构造通法，多项式拟合法，双中值问题， 零点问题，虽然中值问题一般是压轴题，但实际上这类问题并没有大家想象中的困难！相信这份讲义能助力大家拿下中值问题！

运用泰勒中值定理求解中值问题和不等式

运用泰勒中值定理就是：将$f(\alpha)$在β处泰勒展开

其中α，β无非是这些点：区间端点a，b或区间中点的$\dfrac{a+b}{2}$或极值点（包括最值点）c或任意点x

α，β怎么取都是可以分析出来的！只要遵循下面两个原则！

一．α，β怎么取，要根据题目的条件和结论，要取条件和结论中出现的点！

二．展开后要将结论和条件中不存在的式子消去！

设$f(x)$具有二阶导数，且$f'(0)=f'(1)$，$|f''(x)|\leqslant 1$，证明：

（1）当$x\in(0,1)$时，有$|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x|\leqslant \dfrac{x(1-x)}{2}$

（2）$\left|\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leqslant \frac{1}{12}$（2024 数一、二、三）

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上具有二阶连续导数，证明：（2023数一、二、三）

（1）若$f(0)=0$，则存在$\xi\in(-a,a)$，使得$f''(\xi)=\dfrac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$

（2）若$f(x)$在$(-a,a)$内取到极值，则存在$\eta\in(-a,a)$，使得$|f''(\eta)|\geq\dfrac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$

函数$f(x)$在$[-1,1]$上有三阶连续导数，且$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：存在$\xi\in(-1,1)$，使得$f'''(\xi)=3$（1999 数二）

设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数，且满足条件$|f(x)|\leqslant a$，$|f''(x)|\leqslant b$，其中a,b都是非负常数，c 是$(0,1)$内的任意一点，证明：$|f'(x)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}$（1996 数一）

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上具有二阶连续导数，且$f(0)=0$，证明：存在$\xi\in[-a,a]$，使得

$a^3 f''(\xi)=3\int_{-a}^{a} f(x)dx$（2001 数二）

原函数法：是基于罗尔定理的一个找原函数的方法，原函数法本质上就是运用罗尔定理的过程的逆过程

比如$F(x)=e^x f(x)$

$F(a)=F(b)\Rightarrow F'(\xi)=0\Rightarrow e^{-\xi}f'(\xi)-e^{-\xi}f(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)-f(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=f(\xi)$

那么如何从结论$f'(\xi)=f(\xi)$找出辅助函数$F(x)$？逆着操作！

首先将欲证结论$f'(\xi)=f(\xi)$中的ξ换成x得到$f'(x)=f(x)$

$f'(x)=f(x)\Rightarrow f'(x)-f(x)=0\Rightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=0\Rightarrow e^{-x}f(x)=C$

其中$e^{-x}f(x)$就是我们要构造的辅助函数$F(x)$

原函数法步骤：将欲证结论中的ξ换成x，等式两边同时除以（或乘以）一个式子，移项，积分最终化成$F(x)=C$这样的式子，这里的$F(x)$就是我们要构造的函数（这个过程类似于解微分方程，我们把结论对应的微分方程求解出来，再把解的形式化成$F(x)=C$亦可！）

设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上具有二阶导数，且$f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证明：

（1）方程$f(x)=0$在区间$(0,1)$内至少有一个实根

（2）方程$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$在区间$(0,1)$内至少存在两个实根（2017 数一、二）

设$y=f(x)$是区间$[0,1]$上的任一非负连续函数（1998 数一、二）

（1）试证：存在$x_0\in(0,1)$，使得在区间$[0,x_0]$上以$f(x_0)$为高的矩形面积等于区间$[x_0,1]$上以$y=f(x)$为曲边的曲边梯形面积

（2）又设$f(x)$在区间$(0,1)$内可导，且$f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，证明（1）中的x_0是唯一的

假设函数$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，并且$g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证：

（1）在开区间(a,b)内$g(x)\neq 0$

（2）在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$ （1995 数一）

设函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=g''(\xi)$ （2007 数一、二、三）

构造通法

如果结论形如$h'(\xi)+p(\xi)h(\xi)=0$，则构造辅助函数$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}$

设函数$f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$

（1）证明：$\exists\xi\in(1,2)$，使得$f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$

（2）证明：$\exists\eta\in(1,2)$，使得$f(2)=\ln 2\cdot\eta\cdot e^{\eta^2}$（2020 数二）

奇函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上具有二阶导数，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=1$

（2）存在$\xi\in(-1,1)$，使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$（2013 数一、二）

设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0)=f(1)=1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，试证：

（1）存在$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$f(\eta)=\eta$

（2）对任意实数λ，存在$\xi\in(0,\eta)$，使得$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$（1999 数三）

设函数$f(x)$在$[0,1]$上有连续，在$(0,1)$内可导，且满足$f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{1-x^2}f(x)dx$，证明存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=2\xi f(\xi)$（2001 数三）

设函数$f(x)$在$[0,1]$上有连续，在$(0,1)$内可导，且满足$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx$，$(k>1)$，证明存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$（2001 数三）

常数K值法：处理中值部分可分离的中值问题

第一类常数K值法

使用条件：

（1）中值可分离：即原式可化成这样一个等式“等式的一端只含有区间端点a,b，另一端只含有中值ξ”

（2）可化为零式：如果把式子中的b换成a时，呈现$0=0$的形式，就称它是零式

构造步骤：

（1）把原式化成分离形式（含中值的部分放一边），把等式一端的常数记为K

（2）再将原式化为零式，在零式中，将含有中值的部分换成K，把b换成x，再将右端全部移到左端，把所得的式子记作$F(x)$，这就是构造的辅助函数。

注：由K的取法可知必有$F(b)=0$，由原式可化为零式可知必有$F(a)=0$，所以有$F(a)=F(b)$

第二类常数K值法

使用条件：中值可分离：即原式可化成这样一个等式“等式的一端只含有区间端点a,b，另一端只含有中值ξ”

构造步骤：

（1）把原式化成分离形式，把等式一端的常数记为K，得到*等式

（2）对上面得到的*等式适当变形，将a,b分离，使得等式左端为由a构成的代数式，右端为由b构成的代数式

（3）若两端的代数式关于a,b对称，则将左端的代数式中的a换成x得到$F(x)$，这就是构造的辅助函数

注：因为两端的代数式关于a,b对称，此时必有$F(a)=F(b)$

（1）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

（2）证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)\,(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在且 $f'_+(0)=A$（2009 数一、二、三）

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $g(x)>0$，证明：存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$（2002 数三）

证明积分中值定理：若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得
$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$（2008 数二部分）

柯西中值定理运用：常用于中值部分可分离的中值问题

如果结论中的中值可分离，即原式可化成这样一个等式：等式的一端只含有区间端点a,b，另一端只含有中值ξ，可以考虑运用拉格朗日中值定理和柯西中值定理

解题步骤

第一步：将ξ与a,b分离

第二步：可以从两个角度入手

从含有a,b的式子入手：将含有a,b的式子化成$\dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}$或$\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$（即局部分离$a,b$）

从含有ξ的式子入手：将含有ξ的式子化成$\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$或$F'(\xi)$

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)=1$，证明：存在$\xi,\eta\in(a,b)$，使得$e^{\eta-\xi}[f'(\eta)+f(\eta)]=1$（1998 数三）

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f'(x)\neq 0$，证明：存在$\xi,\eta\in(a,b)$，使得$\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$（1998数三）

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$（1995 数三）

拉格朗日中值定理的几何意义

$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

左边是某一点的导数，右边是某一条弦的斜率

所以我们可以把某一点的导数看作某一条弦的斜率来分析问题！

如何去找到这条弦呢？就是要找到弦的两个端点！

设不恒为常数的函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)$，证明：在(a,b)内至少存在一点ξ，使$f'(\xi)>0$（1990 数一）

证明：若函数$\varphi(x)$具有二阶导数，且满足$\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，则至少存在一点$\xi\in(1,3)$，使得$\varphi''(\xi)<0$（2008 数二部分）

设函数$f(x)$在区间$[0,2]$上有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$，证明：

（1）存在$\xi\in(0,2)$，使得$|f'(\xi)|\geq M$

（2）若对任意$x\in(0,2)$，使得$|f'(x)|\leq M$，则$M=0$（2020 数一、三）

多项式拟合法

步骤：将旧函数$f(x)$的条件和结论变成$g(x)=f(x)-p(x)$的条件和结论，其中$p(x)$为多项式函数

多项式拟合法的核心作用就是简化条件和结论！

例如（1999 数二）

$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，$f'''(\xi)=3$变成$g(-1)=0$，$g(1)=0$，$g'(0)=0$，$g'''(\xi)=0$

即$p(-1)=0$，$p(1)=1$，$p'(0)=0$，$p'''(\xi)=3$

由$p'''(\xi)=3$，且ξ是不确定的，可知$p(x)$要设为三次ax^3+bx^2+cx+d

例如（2019 数二）

$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)dx=1$变成$g(0)=0$，$g(1)=0$，$\int_0^1 g(x)dx=0$

即$p(0)=0$，$p(1)=1$，$\int_0^1 p(x)dx=1$

三个方程解三个未知数，故$p(x)$设为二次ax^2+bx+c，联立$\begin{cases} p(0)=0 \\ p(1)=1 \\ \int_0^1 p(x)dx=1 \end{cases}$解出即可

问题来了，上面只将条件优化了，那能不能条件和结论一起优化呢？

再将$f''(\eta)<-2$变成$g''(\eta)<0$即$p''(\eta)=-2$即要求$p(x)$二次ax^2+bx+c且$a=-1$

联立$\begin{cases} p(0)=0 \\ p(1)=1 \\ \int_0^1 p(x)dx=1 \\ p''(\eta)=-2 \end{cases}$无解！故不能全部优化，四个只能选其三

另外一种优化方式：两个条件加结论

$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f''(\eta)<-2$变成$g(0)=0$，$g(1)=0$，$g''(\eta)<0$

即$p(0)=0$，$p(1)=1$，$p''(\eta)=-2$

由$p''(\eta)=-2$且η是不确定的，故$p(x)$设为二次ax^2+bx+c，联立$\begin{cases} p(0)=0 \\ p(1)=1 \\ p''(\eta)=-2 \end{cases}$解出即可

函数$f(x)$在$[-1,1]$上有三阶连续导数，且$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：存在$\xi\in(-1,1)$，使得$f'''(\xi)=3$（1999 数二）

已知$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)dx=1$，证明:

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$

（2）存在$\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)<-2$（2019 数二）

零点定理的运用： $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内必有一零点

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微，对于 $[0,1]$ 上的每一个 x，函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内，且 $f'(x)\neq 1$，证明：在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x，使 $f(x)=x$（1987 数一）

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$，证明：在 (a,b) 内存在唯一的 ξ，使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$，$x=a$ 所围成的平面图形的面积 S_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$，$x=b$ 所围成的平面图形的面积 S_2 的三倍（1988 数一）

双中值问题

双中值问题的套路：在区间(a,b)上插入区间分点c，分成两个区间(a,c)和(c,b)，对两个区间(a,c)和(c,b)分别运用拉格朗日中值定理

问题：如何确定分点$(c,f(c))$

将结论中$f'(\xi_1)$换成$\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$，$f'(\xi_2)$换成$\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$，得到$f(c)$与c的关系式，从而确定出分点$(c,f(c))$

已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=1-\xi$

（2）存在两个不同的$\xi,\eta\in(0,1)$，使得$f'(\eta)f'(\xi)=1$（2005 数一、二）

设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=\dfrac{1}{3}$，证明：存在$\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$（2010 数二）

设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^\pi f(x)dx=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x dx=0$，证明：$f(x)$在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的零点$\xi_1$，$\xi_2$（2000 数一、二、三）（一道未分类的经典题）