夜雨真题班　数列极限大题篇

主讲人：夜雨

数列极限问题考的最近的一年是 2018，已经六年没有考了，所以今年考的几率很大，所以大家还是要重视这块内容，整理近三十年真题（1987-2024），发现除了 2016 年数一一道，其他全部都可以用单调有界准则来做，所以大家要重点掌握好单调有界准则！

利用单调有界准则

判断数列的单调性，我们主要有下面两个方法！

方法一：直接做差，判断$x_{n+1}-x_n$的正负

设$x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$，试证数列$\{x_n\}$极限存在，并求此极限（1996 数一）

设$a_1=2, a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在（1997 数一）

设$0\leq x_1\leq 3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并此极限（2002 数二）

设数列$\{x_n\}$满足：$0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n\,(n=1,2,\cdots)$

（1）证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求之

（2）计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$（2006 数一二）

设$f(x)$是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx\,(n=1,2,\cdots)$

证明数列$\{a_n\}$的极限存在（1999 数二）

（1）证明：对任意的正整数n，都有$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$

（2）设$a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{a_n\}$的极限存在（2011 数一二）

设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0$，$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$
证明：$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$（2018 数一二三）

方法二：利用下面的结论
数列$\{x_n\}$满足: $m\leqslant x_n\leqslant M$，$x_{n+1}=f(x_n)$，如果在$[m,\ M]$上，$f'(x)\geqslant 0$，则$\{x_n\}$单调
注：当$x_2>x_1$，$\{x_n\}$单调递增；当$x_2<x_1$，$\{x_n\}$单调递减；当$x_2=x_1$，$\{x_n\}$恒等于x_1

设$x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$，试证数列$\{x_n\}$极限存在，并求此极限（1996 数一）

设$a_1=2,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right),(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在（1997 数一）

设$0 \leqslant x_1 \leqslant 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并此极限（2002 数二）

形如$f(x_n)+g(x_{n+1})<a$的不等式递推数列

题目一般会把a设置成$f(x)+g(x)$的最小值，会把$g(x)$设置成严格单调的函数

判断单调性的套路：$f(x_n)+g(x_{n+1})<a \Rightarrow [f(x_n)+g(x_n)]+[g(x_{n+1})-g(x_n)]<a$

$f(x_n)+g(x_n) \geqslant a \Rightarrow g(x_{n+1})-g(x_n)<0 \Rightarrow g(x_{n+1})<g(x_n) \Rightarrow x_{n+1}$恒$<x_n$或$x_{n+1}$恒$>x_n$

设函数$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$

（1）求$f(x)$的最小值

（2）设数列$\{x_n\}$满足$\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求此极限（2013 数二）

设数列$\{x_n\}$满足$x_n>0$，$x_n+\dfrac{4}{x_{n+1}^2}<3$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求此极限（补充题）

由方程根构成的数列极限问题

由方程根构成的数列$\{x_n\}$：x_n是方程$f_n(x)=0$的根，题目一般会把$f_n(x)$设置成严格单调的函数

判断单调性的老套路：由$f_{n+1}(x_{n+1})=0, f_n(x_n)=0$可得$f_{n+1}(x_{n+1})=f_n(x_n)$，一般可将$f_{n+1}(x_{n+1})$放缩成$f_n(x_{n+1})$，从而得到$f_n(x_{n+1})>f_n(x_n)$或$f_n(x_{n+1})<f_n(x_n)$，又由$f_n(x)$严格单调，进而得到$x_{n+1}>x_n$或$x_{n+1}<x_n$

（1）证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$(n为大于1的整数)在区间$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根

（2）记（1）中的实根为x_n，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求此极限（2012 数二）

（1）证明：$f_n(x)=x^n+nx-2\,(n=1,2,\cdots)$在$(0,+\infty)$上有唯一的零点$x_n$

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$（补充题）

利用无穷级数与极限的联系（数二不用掌握）

级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$收敛$\Longleftrightarrow$ 数列$\{x_n\}$收敛

所以可以通过证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$收敛来证明数列$\{x_n\}$收敛!

已知函数$f(x)$可导，且$f(0)=1$，$0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=f(x_n)\,(n=1,2,\cdots)$，证明:

（1） 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，且$0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$（2016 数一）

（1）证明：对任意的正整数n，都有$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$

（2）设$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{a_n\}$的极限存在（2011 数一二）

利用压缩映射原理

数列$\{x_n\}$满足: $m\leqslant x_n\leqslant M$， $x_{n+1}=f(x_n)$， 当$x\in[m, M]$， $|f'(x)|\leqslant k<1$，若a是方程$x=f(x)$在区间$[m, M]$内的一个根，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

证明： $|x_n-a|=|f(x_{n-1})-f(a)|=|f'(\xi)|\,|x_{n-1}-a|\leqslant k|x_{n-1}-a|$

$0\leqslant|x_n-a|\leqslant k|x_{n-1}-a|\leqslant k\cdot k|x_{n-2}-a|\leqslant\cdots\leqslant k^{n-1}|x_1-a|\to0$，故$x_n\to a$

先斩后奏：先求出a，再按上面的过程证明$\{x_n\}$的极限是a

设$x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\,(n=1,2,\cdots)$，试证数列$\{x_n\}$极限存在，并求此极限（1996 数一）

设$a_1=2,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right),(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在（1997 数一）