哈尔滨工业大学（深圳）线性代数模拟考试

考试时间：120 分钟 总分：100 分

一、 填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵且其行列式 $|\boldsymbol{A}|=4$，则 $\left|\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right|+\left|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\right|=$ ______ .

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ，则 $(\boldsymbol{A}^*)^2+\boldsymbol{E}$ 必有特征值 ______ .

3. 行列式计算：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-1 & b-1 & c-1 & d-1 \\ a^2-a & b^2-b & c^2-c & d^2-d \\ a^3-a^2 & b^3-b^2 & c^3-c^2 & d^3-d^2 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

4. 求直线 $\begin{cases} 2x-4y+2z=0 \\ 3x-2z-9=0 \end{cases}$ 在平面 $2x+y+z=1$ 上投影直线的方程为 ______ .

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量, 且满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为 ______ .

二、 单选题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，下列说法正确的是（ ）

A. 对同阶矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 也是正定矩阵

B. $\boldsymbol{A}$ 的负惯性系数为 0

C. 对同阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的特征值和 $\boldsymbol{A}$ 相同

D. 对于正整数 k，$\boldsymbol{A}^k$ 不一定是正定矩阵

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times 4$ 矩阵，$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$ 是一个非齐次线性方程组。已知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是该方程组的三个解：

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A}) = 3$，则方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为（）

A. $k(1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$

B. $k(2,3,1,1)^{\mathrm{T}} + (1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$

C. $k(1,1,0,1)^{\mathrm{T}} + (1,2,1,0)^{\mathrm{T}}$

D. $k_1(1,1,0,1)^{\mathrm{T}} + k_2(2,2,0,2)^{\mathrm{T}} + (1,2,1,0)^{\mathrm{T}}$

3. 下列四个矩阵中，可以相似对角化的是（）

A. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

4. 下列关于向量组的说法错误的是（）

A. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关

B. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由它们线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关

C. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 也一定线性相关

D. 如果 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)=R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 一定能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

5. 已知平面 $\pi_1: x+2y-z-3=0$ 和 $\pi_2: x-y-2z-4=0$，过这两个平面的交线且经过点 $P(1,2,-1)$ 的平面方程为（）

A. $x+3y+2z-5=0$

B. $3x+y-4z-9=0$

C. $2x+y-3z-7=0$

D. $4x-y+2z-4=0$

三、 计算与证明题（本大题共 5 小题，每小题 12 分，共 60 分）

---

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$。

2. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示。

(1) 求 a 的值；

(2) 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

---

3. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{bmatrix}$，满足方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=(1,0,\dots,0)^{\mathrm{T}}$。

(1) 求证 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

(2) 当 a 为何值时，方程组有唯一解，并求出 x_1；

(3) 当 a 为何值时，方程组有无穷多解，并求出其通解。

---

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\,(n>1)$ 阶矩阵，$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n$ 是 n 维列向量。若 $\boldsymbol{\xi}_n \neq \mathbf{0}$，且满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\xi}_3, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_{n-1} = \boldsymbol{\xi}_n, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_n = \mathbf{0}$。证明:

(1) 向量组 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n$ 线性无关；

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵。

---

5. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} ij x_i x_j$。

(1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵；

(2) 求一个正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形；

(3) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解。