概率论大题复盘

主讲人：夜雨

集主流模拟卷（张宇八套卷、李林六套卷、李艳芳三套卷、余炳森五套卷、超越 5+5 套卷）之精华！ 讲一讲概率论大题有哪些考法！

求随机变量的分布

作全集拆分的类型

类型一：在不同条件下，X 与 Y 的关系不一样

（超越 5+5 卷三）

(22)(本题满分 12 分) 设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & |x|\leqslant 1,\\ \frac{1}{8}, & 1<|x|\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

令 $Y=g(X)=\begin{cases}X^2, & X<1,\\ X^2-1, & X\geqslant 1.\end{cases}$ 求：(Ⅰ)$P\{-1<Y<2 \mid X<1\}$；(Ⅱ)Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

解 (Ⅰ)$P\{-1<Y<2 \mid X<1\}=\dfrac{P\{-1<X^2<2,X<1\}}{P\{X<1\}}=\dfrac{P\{-\sqrt{2}\leqslant X<1\}}{P\{X<1\}}$

$$=\frac{\int_{-\sqrt{2}}^{-1}\frac{1}{8}dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}dx}{\int_{-3}^{-1}\frac{1}{8}dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}dx}=\frac{\sqrt{2}+3}{6},$$

(Ⅱ)$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$.

(ⅰ)当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

(ⅱ)当 $0\leqslant y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}+P\{1\leqslant X\leqslant\sqrt{y+1}\}$$
$$=\frac{1}{4}\times 2\sqrt{y}+\frac{1}{8}(\sqrt{y+1}-1)=\frac{1}{2}\sqrt{y}+\frac{1}{8}\sqrt{y+1}-\frac{1}{8};$$

(ⅲ)当 $1\leqslant y<8$ 时，

$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant -1\}+P\{-1<X\leqslant 1\}+P\{1<X\leqslant\sqrt{y+1}\};$$
$$=\frac{1}{8}\times(-1+\sqrt{y})+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\times(\sqrt{y+1}-1)=\frac{1}{8}\sqrt{y}+\frac{1}{8}\sqrt{y+1}+\frac{1}{4};$$

(ⅳ)当 $8\leqslant y<9$ 时，

$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant -1\}+P\{-1<X\leqslant 1\}+P\{1<X\leqslant 3\};$$
$$=\frac{1}{8}\times(-1+\sqrt{y})+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\times 2=\frac{1}{8}\sqrt{y}+\frac{5}{8};$$

(ⅴ)当 $y\geqslant 9$ 时，$F_Y(y)=1$. 故

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{1}{2}\sqrt{y}+\frac{1}{8}\sqrt{y+1}-\frac{1}{8}, & 0\leqslant y<1,\\ \frac{1}{8}\sqrt{y}+\frac{1}{8}\sqrt{y+1}+\frac{1}{4}, & 1\leqslant y\leqslant 8,\\ \frac{1}{8}\sqrt{y}+\frac{5}{8}, & 8\leqslant y<9,\\ 1, & y\geqslant 9.\end{cases}$$

(22)(**本题满分 12 分**) 设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & |x|\leqslant 1,\\ \frac{1}{8}, & 1<|x|\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

令 $Y=g(X)=\begin{cases}X^2, & X<1,\\ X^2-1, & X\geqslant 1.\end{cases}$ 求:(Ⅰ)$P\left\{-1<Y<2 \middle| X<1\right\}$;(Ⅱ)$Y$ 的分布函数 $F_Y(y)$.

$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{Y\leqslant y,X<1\}+P\{Y\leqslant y,X\geqslant 1\}$

$=P\{X^2\leqslant y,X<1\}+P\{X^2\leqslant y+1,X\geqslant 1\}$

$$P\{X^2\leqslant y,X<1\}=\begin{cases}y<0,0\\ y\geqslant 0,=P\left\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y},X<1\right\}=\begin{cases}y>1,P\left\{-\sqrt{y}\leqslant X<1\right\}\begin{cases}\sqrt{y}\geqslant 3\\ \sqrt{y}<3\end{cases}\\ 0\leqslant y\leqslant 1,P\left\{-\sqrt{y}\leqslant X<\sqrt{y}\right\}\end{cases}\end{cases}$$

$$P\{X^2\leqslant y+1,X\geqslant 1\}=\begin{cases}y+1<1,0\\ y+1\geqslant 1,=P\left\{-\sqrt{y+1}\leqslant X\leqslant\sqrt{y+1},X\geqslant 1\right\}=P\left\{1\leqslant X\leqslant\sqrt{y+1}\right\}\begin{cases}\sqrt{y+1}\geqslant 3\\ \sqrt{y+1}<3\end{cases}\end{cases}$$

类型二：离散型连续型变量的混合

（超越 5+5 卷十）

(22)(**本题满分 12 分**) 设随机变量 X 在 $(0,\pi)$ 上服从均匀分布，Y 的分布律为 $P\{Y=i\}=\frac{|i|}{2}$，$i=-1,1$，且 X 和 Y 相互独立，记 $U=\sin X$，$V=Y+U$.

（Ⅰ）求 U 的概率密度函数 $f_U(u)$；

（Ⅱ）求 V 的概率密度函数 $f_V(v)$；

（Ⅱ）求协方差 $\mathrm{cov}(U,V)$。

解 （Ⅰ）由题意知 $U=\sin X$ 的值域为 $(0,1)$. 所以当 $u<0$ 时，$F_U(u)=0$. 当 $u\geqslant 1$ 时，$F_U(u)=1$；当 $0<u\leqslant 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
F_U(u)&=\mathrm{P}\{U=\sin X\leqslant u\}\\
&=\mathrm{P}\{0\leqslant X\leqslant \arcsin u\}+\mathrm{P}\{\pi-\arcsin u\leqslant X\leqslant \pi\}\\
&=\int_0^{\arcsin u}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x+\int_{\pi-\arcsin u}^{\pi}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{\pi}\arcsin u.
\end{aligned}
$$

所以 $U=\sin X$ 的概率密度函数为

$$
f_U(u)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-u^2}}, & 0<u<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

（Ⅱ）由 X 和 Y 相互独立，得 $U=\sin X$ 和 Y 相互独立，从而 $V=Y+U$ 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_V(v)&=\mathrm{P}\{V=Y+U\leqslant v\}\\
&=\mathrm{P}\{Y=-1,U\leqslant v+1\}+\mathrm{P}\{Y=1,U\leqslant v-1\}\\
&=\mathrm{P}\{Y=-1\}\cdot\mathrm{P}\{U\leqslant v+1\}+\mathrm{P}\{Y=1\}\cdot\mathrm{P}\{U\leqslant v-1\}\\
&=\frac{1}{2}F_U(v+1)+\frac{1}{2}F_U(v-1).
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
f_V(v)&=\frac{1}{2}f'_U(v+1)+\frac{1}{2}f'_U(v-1)\\
&=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{-v^2-2v}}, & -1<v<0,\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{2v-v^2}}, & 1<v<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
\end{aligned}
$$

（Ⅲ）由于 U 和 Y 相互独立，所以 $\mathrm{cov}(U,Y)=0$，而

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(U)&=\mathrm{E}(U^2)-[\mathrm{E}(U)]^2\\
&=E(\sin^2X)-[E(\sin X)]^2\\
&=\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\sin^2x\mathrm{d}x-\left[\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\sin x\mathrm{d}x\right]^2\\
&=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(U,V)&=\mathrm{cov}(U,Y+U)\\
&=\mathrm{cov}(U,Y)+\mathrm{cov}(U,U)\\
&=\mathrm{D}(U)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}.
\end{aligned}
$$

（超越 5+5 卷四）

(22)(**本题满分 12 分**) 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

令 $Y=\begin{cases}-1, & 0\leqslant X<1,\\ 1, & 1\leqslant X\leqslant 2,\end{cases}$ 求(Ⅰ)$Z=XY$ 的概率密度 $f_Z(z)$；(Ⅱ)$\operatorname{cov}(X,Z)$.

解 (Ⅰ) $P\{0\leqslant X<1\}=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, $P\{1\leqslant X\leqslant 2\}=\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z\}\\&=P\{Y=-1,XY\leqslant z\}+P\{Y=1,XY\leqslant z\}\\&=P\{0\leqslant X<1,X\geqslant -z\}+P\{1\leqslant X\leqslant 2,X\leqslant z\}.\end{aligned}$$

(ⅰ) $z<-1$, $F_Z(z)=0$;

(ⅱ) $z\geqslant 2$, $F_Z(z)=P\{0\leqslant X<1\}+P\{1\leqslant X\leqslant 2\}=1$;

(ⅲ) $-1\leqslant z<0$, $F_Z(z)=P\{-z\leqslant X<1\}+0=\int_{-z}^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z^2$;

(ⅳ) $0\leqslant z<1$, $F_Z(z)=P\{0\leqslant X\leqslant 1\}+0=\frac{1}{2}$;

(ⅴ) $1\leqslant z<2$, $F_Z(z)=P\{0\leqslant X<1\}+P\{1\leqslant X\leqslant z\}=\frac{1}{2}+\int_1^z(2-x)\mathrm{d}x=2z-\frac{1}{2}z^2-1$.

综上，有

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-1,\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z^2, & -1\leqslant z<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant z<1,\\ 2z-\frac{1}{2}z^2-1, & 1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2.\end{cases}$$

所以

$$f_Z(z)=\begin{cases}-z, & -1\leqslant z<0,\\ 2-z, & 1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ) $\operatorname{cov}(X,Z)=E(XZ)-EX\cdot EZ$，而

$E(XZ)=E(X^2Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2g(x)f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2(-1)x\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2\cdot 1\cdot(2-x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$.

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot x\mathrm{d}x+\int_1^2 x(2-x)\mathrm{d}x=1$,

$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}zf_Z(z)\mathrm{d}z=\int_{-1}^0 z(-z)\mathrm{d}z+\int_1^2 z(2-z)\mathrm{d}z=\frac{1}{3}$,

或

$E(Z)=E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}xg(x)f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot(-1)x\mathrm{d}x+\int_1^2 x\cdot 1\cdot(2-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

故 $\operatorname{cov}(X,Z)=\frac{2}{3}-1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

（超越 5+5 卷一）

(22)(本题满分 12 分) 已知随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$上服从均匀分布，$Z=\begin{cases}1, & X\geqslant Y,\\ -1, & X<Y,\end{cases}$ $T=(X^2+Y^2)Z$.

$F_T(t)=P\{T\leqslant t\}=P\{(X^2+Y^2)Z\leqslant t\}=P\{(X^2+Y^2)Z\leqslant t,X\geqslant Y\}+P\{(X^2+Y^2)Z\leqslant t,X<Y\}$

$=P\{(X^2+Y^2)\leqslant t,X\geqslant Y\}+P\{(X^2+Y^2)\geqslant -t,X<Y\}$

$$P\{(X^2+Y^2)\leqslant t,X\geqslant Y\}=\begin{cases}t<0,0\\ 1>t\geqslant 0,\frac{t\pi}{2}\Big/\pi\\ t\geqslant 1,\frac{\pi}{2}\Big/\pi\end{cases}$$

$$P\{(X^2+Y^2)\geqslant -t,X<Y\}=\begin{cases}-t\leqslant 0,\frac{\pi}{2}\Big/\pi\\ 1\geqslant -t>0,\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-t\pi}{2}\right)\Big/\pi\\ -t>1,0\end{cases}$$

(22)(本题满分 12 分) 已知随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$上服从均匀分布，$Z=\begin{cases}1, & X\geqslant Y,\\ -1, & X<Y,\end{cases}$ $T=(X^2+Y^2)Z$.

(Ⅰ)求T的概率密度函数$f_T(t)$； (Ⅱ)求$\mathrm{cov}(X^2+Y^2,Z)$.

解 (Ⅰ)$F_T(t)=P\{T\leqslant t\}$,

① 当$t<-1$时，$F_T(t)=0$；

② 当$t\geqslant 1$时，$F_T(t)=1$；

③ 当$-1\leqslant t<0$时，

$F_T(t)=P\{(X^2+Y^2)Z\leqslant t\}=P\{Z=-1,X^2+Y^2\geqslant -t\}+P\{Z=1,X^2+Y^2\leqslant t\}$

$$=P\{X<Y,X^2+Y^2\geqslant -t\}+0=P\{(X,Y)\in D_1\}=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t}{\pi}=\frac{1+t}{2};$$

④ 当$0\leqslant t<1$时，

$F_T(t)=P\{T\leqslant t\}=P\{(X^2+Y^2)Z\leqslant t\}$

$$=P\{Z=-1,X^2+Y^2\geqslant -t\}+P\{Z=1,X^2+Y^2\leqslant t\}=\frac{1}{2}+\frac{t}{2}.$$

故$F_T(t)=\begin{cases}0, & t<-1,\\ \frac{1+t}{2}, & -1\leqslant t<1,\\ 1, & t\geqslant 1,\end{cases}$ 即$f_T(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1\leqslant t\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) $\mathrm{cov}(X^2+Y^2,Z)=E((X^2+Y^2)Z)-E(X^2+Y^2)\cdot E(Z)$,

$E((X^2+Y^2)Z)=E(T)=0$, $\begin{array}{c|cc}Z & -1 & 1\\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}$，故$E(Z)=0$，所以$\mathrm{cov}(X^2+Y^2,Z)=0$.

最值符号的处理

张宇八套卷卷七

22.(本题满分 12 分)

在长度为 1 的直杆上任取一点,将直杆分成两段,设 X,Y 分别是较短与较长的部分的长度,令 $Z=\frac{X}{Y}$.

(1) 求 Z 的概率密度;

(2) 求 Z 和 $\frac{1}{Z}$ 的数学期望.

$Y=\max\{W,1-W\}$, $X=\min\{W,1-W\}$

$0<\frac{X}{Y}\leqslant 1$

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\left\{\frac{X}{Y}\leqslant z\right\}=\begin{cases} z\leqslant 0,0 \\ z\geqslant 1,1 \\ 0<z<1 \end{cases}$$

22.【解】 (1) 令 $V\sim U(0,1)$,如图所示,则 $X=\min\{V,1-V\}$.

当 $x<0$ 时,$F_X(x)=0$;当 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时,$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=1$;

当 $0\leqslant x<\frac{1}{2}$ 时,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{X\leqslant x\}=P\{\min\{V,1-V\}\leqslant x\} \\ &= 1-P\{\min\{V,1-V\}>x\} \\ &= 1-P\{V>x,1-V>x\}=1-P\{x<V<1-x\} \\ &= 1-(1-2x)=2x. \end{aligned}$$

所以 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 2x, & 0\leqslant x<\frac{1}{2}, \\ 1, & x\geqslant\frac{1}{2}. \end{cases}$$

故 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases} 2, & 0<x<\frac{1}{2}, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

由条件知,$Z=\frac{X}{Y}=\frac{X}{1-X}$.由于函数 $z=\frac{x}{1-x}$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内严格单调递增且可导,因此反函数为 $x=\frac{z}{1+z}$,且 $\frac{dx}{dz}=\frac{1}{(1+z)^2}$,故 Z 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \begin{cases} f_X\left(\frac{z}{1+z}\right)\left|\frac{1}{(1+z)^2}\right|, & 0<z<1, \\ 0, & 其他 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{(1+z)^2}, & 0<z<1, \\ 0, & 其他. \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 由(1) 可知,$E(Z)=\int_0^1 z\cdot\frac{2}{(1+z)^2}dz=2\ln 2-1$.

已知联合概率密度$f(x,y)$，求$F(x,y)$及$g(X,Y)$的分布

核心：分情况求二重积分

（李林六套卷卷六）

22.（本题满分 12 分）

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+y)}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（Ⅰ）求(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$；

（Ⅱ）求$P\left\{X+Y>1\,\middle|\,X<\dfrac{1}{2}\right\}$；

（Ⅲ）求$E(Y-X)$.

22. **解析** （Ⅰ）$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

如图 1 所示，当$x\leqslant 0$或$y\leqslant 0$时，$F(x,y)=0$.

当$0<y\leqslant x$时，

$$F(x,y)=\int_0^y \mathrm{d}u\int_u^y 2e^{-u}e^{-v}\mathrm{d}v=2\int_0^y(e^{-2u}-e^{-y}e^{-u})\mathrm{d}u$$

$$=(-e^{-2u}+2e^{-y}e^{-u})\Big|_0^y=1-2e^{-y}+e^{-2y}.$$

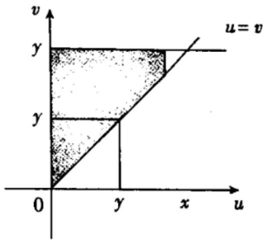

图 1

当$0<x<y$时，

$$F(x,y)=\int_0^x \mathrm{d}u\int_u^y 2e^{-u}e^{-v}\mathrm{d}v=2\int_0^x(e^{-2u}-e^{-y}e^{-u})\mathrm{d}u$$

$$=(-e^{-2u}+2e^{-y}e^{-u})\Big|_0^x=1-2e^{-y}-e^{-2x}+2e^{-(x+y)}.$$

故 $F(x,y)=\begin{cases}1-2e^{-y}-e^{-2x}+2e^{-(x+y)}, & 0<x<y,\\ 1-2e^{-y}+e^{-2y}, & 0<y\leqslant x,\\ 0, & x\leqslant 0 \text{ 或 } y\leqslant 0.\end{cases}$

(Ⅱ) 由 $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 知 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

$$P\left\{X+Y>1\,\middle|\,X<\frac{1}{2}\right\}=\frac{P\left\{X+Y>1,X<\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X<\frac{1}{2}\right\}}.$$

又 $$P\left\{X<\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2e^{-2x}dx=1-e^{-1},$$

$$P\left\{X+Y>1,X<\frac{1}{2}\right\}=\iint\limits_{\substack{x+y>1\\ x<\frac{1}{2}}}f(x,y)dx\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{1-x}^{+\infty}2e^{-(x+y)}dy$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-1}dx=e^{-1},$$

故 $P\left\{X+Y>1\,\middle|\,X<\frac{1}{2}\right\}=\dfrac{e^{-1}}{1-e^{-1}}=\dfrac{1}{e-1}.$

(Ⅲ) 记 $Z=Y-X$，则 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Y-X\leqslant z\}=\iint\limits_{y-x\leqslant z}f(x,y)dx\,dy.$$

如图 2 所示，当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$.

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{x+z}2e^{-x}e^{-y}dy$

$$=2\int_0^{+\infty}e^{-x}(e^{-x}-e^{-x}e^{-z})dx$$

$$=2(1-e^{-z})\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=1-e^{-z}.$$

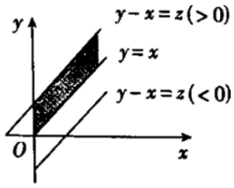

图 2

故 $F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $Z=Y-X$ 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，

从而 $EZ=E(Y-X)=\dfrac{1}{\lambda}=1.$

已知联合概率密度 $f(x,y)$，求 X,Y 的分布

（余丙森五套卷卷一）

22.（本题满分 12 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\lambda^2x^{\lambda-1}y^{\lambda-1}, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为未知参数.

(1) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$；

(2) 设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 是来自总体 (X,Y) 的简单随机样本，求参数 λ 的最大似然估计量.

22.【解析】(1)Y 的概率密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$,

当 $y\leqslant 0$ 或者 $y\geqslant 1$ 时,$f_Y(y)=0$;

当 $0<y<1$ 时,$f_Y(y)=\int_y^1 2\lambda^2x^{\lambda-1}y^{\lambda-1}\mathrm{d}x=2\lambda y^{\lambda-1}x^{\lambda}\Big|_y^1=2\lambda y^{\lambda-1}(1-y^{\lambda})$,故

$$f_Y(y)=\begin{cases}2\lambda y^{\lambda-1}(1-y^{\lambda}), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $0<y<1$ 时,$f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{\lambda x^{\lambda-1}}{1-y^{\lambda}}, & y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

参数估计

最大似然估计

参数有范围的情形：那么就绝对不是求出似然函数的极值点就万事大吉了，得考虑似然函数的单调性

（张宇八套卷卷七）

22.(本题满分 12 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\frac{1}{2}(1+\theta x),-1<x<1,|\theta|\leqslant 1,$$

因观测设备精度不高,观察不到 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的具体取值,只能观测到每个 X_i 是否大于 0,

记 $Y_i=\begin{cases}1, & X_i>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $i=1,\cdots,n,\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i$. 求 θ 的最大似然估计量.

$$P\{Y=1\}=P\{X>0\}=\int_0^1\frac{1}{2}(1+\theta x)dx=\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}$$

$$P\{Y=0\}=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}$$

$$P\{Y=k\}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right)^k\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}\right)^{1-k}$$

$$L(\theta)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right)^{y_1}\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}\right)^{1-y_1}\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right)^{y_2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}\right)^{1-y_2}\cdots\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right)^{y_n}\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}\right)^{1-y_n}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right)^{y_1+y_2+\cdots+y_n}\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}\right)^{n-(y_1+y_2+\cdots+y_n)}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right)^{n\bar{y}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}\right)^{n-n\bar{y}}$$

$$\ln L(\theta)=n\bar{y}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right)+\left(n-n\bar{y}\right)\ln\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}\right)$$

$$\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=\frac{\frac{1}{4}n\bar{y}}{\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}}+\frac{-\frac{1}{4}\left(n-n\bar{y}\right)}{\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}n\left(\frac{\bar{y}}{\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}}-\frac{\left(1-\bar{y}\right)}{\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}}\right)=\frac{1}{4}n\frac{\bar{y}\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}\right)-\left(1-\bar{y}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}=\frac{1}{4}n\frac{\frac{2\bar{y}-1}{2}-\frac{\theta}{4}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}=\frac{1}{16}n\frac{\left(4\bar{y}-2\right)-\theta}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}$$

22.【解】 由题设，

$$P\{X_i>0\}=\int_0^1\frac{1}{2}(1+\theta x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4},$$

于是 $Y_i\sim B\left(1,\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right),i=1,\cdots,n.$

则似然函数

$$L(\theta)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right)^{\sum\limits_{i=1}^n y_i}\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}\right)^{n-\sum\limits_{i=1}^n y_i}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right)^{n\bar{y}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}\right)^{n-n\bar{y}},$$

取对数，得

$$\ln L(\theta)=n\bar{y}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}\right)+(n-n\bar{y})\ln\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}\right).$$

令 $\frac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n\bar{y}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}}-\frac{(n-n\bar{y})\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{\theta}{4}}=0$，解得 $\theta=4\bar{y}-2$，又因为 $|\theta|\leqslant1$，且 $0\leqslant\bar{Y}\leqslant1$，故 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\begin{cases}-1, & 0\leqslant\bar{y}\leqslant0.25,\\ 4\bar{Y}-2, & 0.25<\bar{y}<0.75,\\ 1, & 0.75\leqslant\bar{y}\leqslant1.\end{cases}$$

没法求导的情形：只能借助其他方法求最值

张宇八套卷卷七

10. 已知总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-\theta|},-\infty<x<+\infty,$$

$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{10}$ 是来自该总体的简单随机样本的观察值，则 θ 的最大似然估计值为

A. $\frac{x_5}{2}$.　　B. $\frac{x_6}{2}$.　　C. $\frac{x_5+x_6}{2}$.　　D. $\frac{x_6-x_5}{2}$.

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x_i-\theta|}\right)=\frac{1}{2^{10}}\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{10}|x_i-\theta|},$$

取对数为

$$\ln L(\theta)=-10\ln2-\sum_{i=1}^{10}|x_i-\theta|.$$

不用求导的情形：借助其他方法求最值

余丙森五套卷卷五

10. 设总体 $X\sim U(-\theta,\theta)$，其中未知参数 $\theta>0$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=($　　$)$.

A. $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$　　B. $-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$

C. $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|$　　D. $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|$

10.【答案】C

【解析】因为 X 的密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & -\theta\leqslant x\leqslant\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 所以似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{1}{2^n\theta^n},-\theta\leqslant x_i\leqslant\theta,i=1,2,\cdots,n.$$

因为 $L(\theta)$ 为 θ 的单减函数，且 $|x_i|\leqslant\theta,i=1,2,\cdots,n,\theta\geqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$，所以当 $\theta=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$ 时 $L(\theta)$ 取最大值，故 $\hat{\theta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|$.

矩估计

两个参数 $\begin{cases}E(X)=\dfrac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)\\ E(X^2)=\dfrac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)\end{cases}$

（李艳芳三套卷卷二）

22 设总体 X 服从 $(\theta,\lambda\theta)$ 上的均匀分布，其中 $\theta>0,\lambda>1,X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（Ⅰ）利用样本的一阶原点矩与二阶原点矩求 θ,λ 的矩估计量；

（Ⅱ）求 θ,λ 的最大似然估计量.

$$\begin{cases}E(X)=\dfrac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)\\ E(X^2)=\dfrac{1}{n}(X_1^2+\cdots+X_n^2)\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{\theta+\lambda\theta}{2}$$

$$E(X^2)=E^2(X)+D(X)=\left(\frac{\theta+\lambda\theta}{2}\right)^2+\frac{(\lambda\theta-\theta)^2}{12}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\theta+\lambda\theta}{2}=\dfrac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)=A\\ \left(\dfrac{\theta+\lambda\theta}{2}\right)^2+\dfrac{(\lambda\theta-\theta)^2}{12}=\dfrac{1}{n}(X_1^2+\cdots+X_n^2)=B\end{cases}$$

张宇八套卷卷一

9. 设总体 $X\sim U(a,b)$，a,b 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，$X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$S_1^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，令 $L=b-a$，则 L 的矩估计量与最大似然估计量分别为

A. $\overline{X}+\sqrt{3}S_1,X_{(n)}-X_{(1)}$.　　B. $\overline{X}+\sqrt{3}S_1,\dfrac{X_{(n)}-X_{(1)}}{2}$.

C. $2\sqrt{3}S_1,X_{(n)}-X_{(1)}$.　　D. $2\sqrt{3}S_1,\dfrac{X_{(n)}-X_{(1)}}{2}$.

$$\begin{cases} E(X) = \dfrac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \\ E(X^2) = \dfrac{1}{n}(X_1^2 + \cdots + X_n^2) \end{cases} \Longrightarrow D(X) = \frac{1}{n}(X_1^2 + \cdots + X_n^2) - \left(\bar{X}\right)^2$$

$$\begin{cases} E(X) = \dfrac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \\ E(X^2) = \dfrac{1}{n}(X_1^2 + \cdots + X_n^2) \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = E^2(X) + D(X) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \\ \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{1}{n}(X_1^2 + \cdots + X_n^2) \end{cases}$$

$$\frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{n}(X_1^2 + \cdots + X_n^2) - \left(\bar{X}\right)^2$$