2021年期中试题

习题答疑第10周

一、填空（每题1分）

1.设$0 < a < b$，则数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}} =$____________.

解：由于$0 < a < b$，故$0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$，从而

$$\frac{1}{a} = (a^{-n})^{\frac{1}{n}} < (a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}} < (2a^{-n})^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{a}\sqrt[n]{2}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a}$.

2.若记曲线$3x+2y^3-2x^2\sin y=2$与y轴的交点为P，则曲线在点P处的法线方程为____________.

解：依题意，在$3x+2y^3-2x^2\sin y=2$中，令$x=0$，可知$y=1$.

方程$3x+2y^3-2x^2\sin y=2$两边关于x求导，得

$$3+6y^2y'-4x\sin y-2x^2\cos y\times y'=0$$

将$x=0$，$y=1$代入上式，可解得$y'(0)=-\frac{1}{2}$.

因此法线的斜率$\mathrm{k}=2$，

法线为：$y=2x+1$.

3.设$f(x)$与$g(x)$互为反函数， $f(x)$二阶可导，且$f(1)=3$，$f'(1)=-2$，$f''(1)=4$，则$g''(3)=$____________.

解：由于$f\big(g(x)\big)=x$，所以$f'\big(g(x)\big)g'(x)=1$，

$$g'(x)=\frac{1}{f'\big(g(x)\big)}$$

从而，$g''(x)=\frac{-[f'(g(x))]'}{[f'(g(x))]^2}=-\frac{f''\big(g(x)\big)g'(x)}{\big[f'\big(g(x)\big)\big]^2}=-\frac{f''\big(g(x)\big)}{\big[f'\big(g(x)\big)\big]^3}$， 将

$f(1)=3$， $f'(1)=-2$，$f''(1)=4$，代入可得

$g''(3)=-\frac{f''\big(g(3)\big)}{\big[f'\big(g(3)\big)\big]^3}=\frac{1}{2}$.

4.已知函数$f(x)=x^2e^{-x+3}$，则$f^{(20)}(1)=$________.

解：（方法一）由莱布尼兹公式，

$$f^{(20)}(x)=\sum_{n=0}^{20}C_{20}^{n}(x^2)^{(n)}(e^{-x+3})^{(20-n)}$$

$$=\sum_{n=0}^{2}C_{20}^{n}(x^2)^{(n)}(e^{-x+3})^{(20-n)}$$

$$=x^2(e^{-x+3})^{(20)}+20\times 2x(e^{-x+3})^{(19)}+190\times 2(e^{-x+3})^{(18)}$$

$$=x^2e^{-x+3}+20\times 2x(-e^{-x+3})+190\times 2e^{-x+3}$$

故$f^{(20)}(1)=341e^2$.

4.已知函数$f(x)=x^2e^{-x+3}$，则$f^{(20)}(1)=$________.

解：（方法二）用泰勒公式，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{20}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+o((x-1)^n)$$

$$=x^2e^{-x+3}=[(x-1)+1]^2e^{-(x-1)+2}$$

$$=[(x-1)^2+2(x-1)+1]e^{-(x-1)}e^2$$

$$=[(x-1)^2+2(x-1)+1]\,e^2\sum_{n=0}^{20}\frac{1}{n!}[-(x-1)]^n+o((x-1)^n)$$

故$\frac{f^{(20)}(1)}{20!}=e^2[\frac{1}{18!}(-1)^{18}+2\frac{1}{19!}(-1)^{19}+\frac{1}{20!}(-1)^{20}]$

故$f^{(20)}(1)=341e^2$.

二、选择题（每题1分）

1.设函数$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$，$\mathrm{g}(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leq -1\\ x, & -1<x<0\\ x-b, & x\geq 0\end{cases}$，若函数$f(x)+g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，则（　　）

(A)$a=3,b=1$;(B) $a=3,b=2$; (C) $a=-3,b=1$; (D) $a=-3,b=2$.

解：依题意，必须保证和函数$f(x)+g(x)$在$x=0$和$x=-1$连续.

由于$f(-1)=-1$, $f(-1+)=f(-1-)=-1$,

$g(-1)=2+a$，　$g(-1+)=-1$, $g(-1-)=2+a$,故$2+a=-1$

$f(0)=1$, $f(0+)=1$, $f(0-)=-1$

$g(0)=-b$，　$g(0+)=-b$, $g(0-)=0$,故$1-b=-1$.

所以$a=-3,b=2$.

2.设函数$g(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内可导且只有一个零点$x=-3$，则函数$f(x)=|x^3+2x^2-3x|g(x)$的不可导点的个数是（ ）

(A) 1； (B) 2； (C) 3； (D) 4.

解：当$|x^3+2x^2-3x|\neq 0$时，$|x^3+2x^2-3x|$可导，故$f(x)$可导.

因此$f(x)$的不可导点只可能是

$x^3+2x^2-3x=x(x+3)(x-1)=0$的解

易知，$|x^3+2x^2-3x|$在$x=-3$，$x=0$，$x=1$处的左右导数都存在且不相等. 由于$g(-3)=0$，故$f(x)$的不可导点为

$x=0$，$x=1$.

3.设常数$k \neq 0$，函数$f(x)$在点x_0处的增量$\Delta y|_{x=x_0} = k(\Delta x)^{\frac{1}{3}} + o(\Delta x)$，则函数$f(x)$在点$x_0$处（　　）

(A) 连续，不可微；　　(B) 可微且$f'(x) = k$；

(C)可微且$f'(x) = 0$；　(D) 可微且$f'(x) = 1$.

解：$\Delta y|_{x=x_0} = k(\Delta x)^{\frac{1}{3}} + o(\Delta x)$,故函数$f(x)$在点$x_0$处连续.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y|_{x=x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k(\Delta x)^{\frac{1}{3}} + o(\Delta x)}{\Delta x} = \infty$$，不存在.

故函数$f(x)$在点x_0处连续，不可微.

^{2}cm/s，3cm/s,

4.有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率为$2cm/s$，$-3cm/s$,当地面半径为10cm，高为5cm时，圆柱体的体积与侧表面积随时间变化的速率分别为

(A)$125\pi cm^3/s$, $40\pi cm^3/s$;　(B) $125\pi cm^3/s$, $-40\pi cm^3/s$;

(C) $-100\pi cm^3/s$, $-40\pi cm^3/s$; (D) $-100\pi cm^3/s$, $-40\pi cm^3/s$.

解：设底面半径为$r(t)$,高为$h(t)$，则

体积$\mathrm{V}(t)=\pi r^2(t)h(t)$，侧面积$\mathrm{S}(t)=2\pi r(t)h(t)$,

故$V'(t)=2\pi r(t)r'(t)h(t)+\pi r^2(t)h'(t)$,

$\mathrm{S}'(t)=2\pi r'(t)h(t)+2\pi r(t)h'(t)$,

依题意，$r(t_0)=10$,$h(t_0)=5$, $r'(t_0)=2$,$h'(t_0)=-3$.

故$V'(t_0)=2\pi r(t)r'(t)h(t)+\pi r^2(t)h'(t)|_{t=t_0}=-100$,

$\mathrm{S}'(t_0)=2\pi r'(t)h(t)+2\pi r(t)h'(t)|_{t=t_0}=-40$.

三、解答题（4分）

求函数$f(x)=\frac{(1+x)\sin x\cos\frac{x}{2-x}}{|x|(x+1)(x-1)}$的间断点，并判断间断点的类型.

解：函数没有定义的点为$x=0$，$x=-1$，$x=1$，$x=2$.

故函数$f(x)$为$x=0$，$x=-1$，$x=1$，$x=2$.

由于$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(1+x)\sin x\cos\frac{x}{2-x}}{|x|(x+1)(x-1)}=-1$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(1+x)\sin x\cos\frac{x}{2-x}}{|x|(x+1)(x-1)}=1$,

故$x=0$是第一类间断点，跳跃间断点.

求函数$f(x)=\frac{(1+x)\sin x\cos\frac{x}{2-x}}{|x|(x+1)(x-1)}$的间断点，并判断间断点的类型.

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{(1+x)\sin x\cos\frac{x}{2-x}}{|x|(x+1)(x-1)}=\frac{\sin 1\cos\frac{1}{3}}{2},$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{(1+x)\sin x\cos\frac{x}{2-x}}{|x|(x+1)(x-1)}=\frac{\sin 1\cos\frac{1}{3}}{2},$$

故$x=-1$是第一类间断点，可去间断点.

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(1+x)\sin x\cos\frac{x}{2-x}}{|x|(x+1)(x-1)}=\infty,$$

故$x=1$是第二类间断点，无穷间断点.

易知，故$x=2$是第二类间断点，震荡间断点.

四、本题4分

设参数方程$\begin{cases} x = t + arctant + 1 \\ y = t^3 + 6t - 2 \end{cases}$确定函数$y = y(x)$,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{3t^2+6}{1+\frac{1}{1+t^2}} = 3(1 + t^2)$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}\ bnx} = \frac{\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{6t}{1 + \frac{1}{1 + t^2}} = \frac{6t(1 + t^2)}{2 + t^2}.$$

五、本题4分

计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos^3 x+2\sin^3 x\cos x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos^4 x+6\sin^2 x\cos^2 x+6\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^4 x}{12x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos^4 x}{12x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{12\sin^2 x\cos^2 x}{12x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^4 x}{12x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos^4 x}{12x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{12\sin^2 x \cos^2 x}{12x^2} - \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^4 x}{12x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^4 x}{6x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{x^2} - \lim_{x \to 0} \frac{\sin^4 x}{6x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)}{6x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos^2 x}{x^2} - \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{6x^2}$$

$$= \frac{2}{6} + 1 - 0 = \frac{4}{3}.$$

六、本题3分

设函数$f(x)$当$|x|\leq 1$时二阶可导，且满足$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{f(x)}{\tan x}}-1}{\ln(4x+e^{\sin x})}=-3$,求$f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

解：由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{f(x)}{\tan x}}-1}{\ln(4x+e^{\sin x})}=-3$,

由等价无穷小可知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)}{\tan x}}{4x+e^{\sin x}-1}=-3$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x[4+\frac{e^{\sin x}-1}{x}]}=-3$$

设函数$f(x)$当$|x| \leq 1$时二阶可导，且满足$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{f(x)}{tanx}}-1}{\ln(4x+e^{sinx})} = -3$,求$f(0), f'(0), f''(0)$.

故$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^2} = -3$即$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = -15$.

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) \ = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^2}5x^2 = 0$.

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^2}5x = 0$.

$$f''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\frac{1}{2}x^2}$$

$= 10\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^2} = -30$.

六、本题3分

设函数$f(x)$当$|x| \le 1$时二阶可导，且满足$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{f(x)}{\tan x}}-1}{\ln(4x+e^{\sin x})} = -3$,求$f(0), f'(0), f''(0)$.

解（方法二）由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{f(x)}{\tan x}}-1}{\ln(4x+e^{\sin x})} = -3$,

由等价无穷小可知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)}{\tan x}}{4x+e^{\sin x}-1} = -3$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x[4+\frac{e^{\sin x}-1}{x}]} = -3$$

设函数$f(x)$当$|x| \leq 1$时二阶可导，且满足$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{f(x)}{\tan x}}-1}{\ln(4x+e^{\sin x})} = -3$,求$f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

故$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^2} = -3$即$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+15x^2}{x^2} = 0$.

故$f(x) + 15x^2 = o(x^2)$, $f(x) = -15x^2 + o(x^2)$,

$f(x) = -15x^2 + o(x^2)$,

由题设， $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)$,

故$f(0) = 0$， $f'(0) = 0$, $f''(0) = -30$.

七、本题3分

设函数$f(x)$在闭区间$[0,2]$连续，在开区间$(0,2)$可导，且$f(2)=0$，

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=5.$$

（I）证明：存在$\eta\in(1,2)$, 使得$f(\eta)=\eta$.

（II）证明：存在$\xi\in(0,\eta)$, $f'(\xi)=\frac{2\xi-f(\xi)}{\xi}$.

证明：（I）由于$f(2)=0$，$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=5$，故$f(1)=2$.

考察$g(x)=f(x)-x$，则$g(x)$在闭区间$[1,2]$连续，

$g(1)=f(1)-1=1$, $g(2)=f(2)-2=-2$, 故存在$\eta\in(1,2)$, 使得
$g(\eta)=f(\eta)-\eta=0$. 即存在$\eta\in(1,2)$, 使得$f(\eta)=\eta$.

七、本题3分

设函数$f(x)$在闭区间$[0,2]$连续，在开区间$(0,2)$可导，且$f(2)=0$，

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=5.$$

（I）证明：存在$\eta\in(1,2)$, 使得$f(\eta)=\eta$.

（II）证明：存在$\xi\in(0,\eta)$, $f'(\xi)=\frac{2\xi-f(\xi)}{\xi}$.

证明：（II）考察$h(x)=xf(x)-x^2$，则$h(x)$在闭区间$[0,\eta]$连续,在开区间$(0,\eta)$上可导，且$h'(x)=xf'(x)+f(x)-2x$

$h(0)=0$, $h(\eta)=\eta f(\eta)-\eta^2=0$,

故存在$\xi\in(0,\eta)$, 使得$h'(\xi)=\xi f'(\xi)+f(\xi)-2\xi=0$.

存在$\xi\in(0,\eta)$, $f'(\xi)=\frac{2\xi-f(\xi)}{\xi}$.

八、本题3分

设数列$\{x_n\}$满足关系式$0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n \ (n \in Z_+)$.

（I）证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并计算此极限.

（II）计算极限$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解：（I）易知$0 < x_n < \pi$, 且$x_{n+1} = \sin x_n < x_n$,

有单调有界原理可知，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，设为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则

$0 \le a < \pi$, 由$x_{n+1} = \sin x_n$取极限可得，$a = \sin a$, 故$a = 0$.

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

八、本题3分

设数列$\{x_n\}$满足关系式$0 < x_1 < \pi$, $x_{n+1} = \sin x_n \ (n \in Z_+)$.

（I）证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并计算此极限.

（II）计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解：（II）由于$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}}{x_n^2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{\sin x_n}{x_n}}{x_n^2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin x_n}{x_n}-1}{x_n^2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x_n - x_n}{x_n^3}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

2020年期中试题

习题答疑第10周

一、填空题，每题1分，共5分.

1.若$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{5}{n})^{-kn}=e^{-10}$，则常数$k=$__________.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{5}{n})^{-kn}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{5}{n})^{\frac{n}{5}(-5k)}=e^{-5k}=e^{-10}$，

故$k=2$.

2.设n为正整数，则$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=$__________.

解:$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

从而易知，$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=1$.

3.曲线$\cos(xy)+\ln y-x=1$在$x=0$所对应点处的切线方程为__________.

解：在$\cos(xy)+\ln y-x=1$令$x=0$，解得$y=1$.

$\cos(xy)+\ln y-x=1$两边关于x求导得，

$$-\sin(xy)(y+xy')+\frac{y'}{y}-1=0$$

将$x=0$，$y=1$代入解得$y'(0)=1$.

故所求切线为$y=x+1$.

4. 已知函数$f(x)=\ln(3x-2x^2)$，则$f^{(n)}(x)=$____________.

解：$f(x)=\ln(3x-2x^2)=\ln x+\ln(3-2x)$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{3-2x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\frac{3}{2}}$$

$f^{(n)}(x)=(f'(x))^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-\frac{3}{2})^n}$.

5.有一半经为Rcm，高为$h$cm的圆锥容器（如图所示），

今以$25cm^3/s$的速度自顶部向容器内注水，

则当容器内的水位等于锥顶高的一半时，

水面上升的速度为________.

解：设t时刻的水面高度$h(t)$cm，容器中水的体积为$V(t)\ cm^3$.

则$V(t)=\frac{1}{3}\pi R^2h\left(1-\frac{[h-h(t)]^3}{h^3}\right)$，设$t_0$时刻$h(t_0)=\frac{h}{2}$.

从而$V'(t)=\frac{1}{3}\pi R^2h\ \frac{3[h-h(t)]^2}{h^3}h'(t)$，由已知，$V'(t)=25$

将$t=t_0$和$h(t_0)=\frac{h}{2}$代入，得$25=\frac{1}{3}\pi R^2h\ \frac{3[h-h(t_0)]^2}{h^3}h'(t_0)$，

解得$h'(t_0)=\frac{100}{\pi R^2}$.

二、每小题1分，共5分.

1.“对任意给定的$\varepsilon \in (0,1)$,总存在$\delta > 0$，当$0 < |x - x_0| \leq \delta$时，恒有$|f(x) - A| \leq 2\varepsilon$成立”是$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$的（　　）

(A) 充分条件，但非必要条件；　（B）必要条件，但非充分条件；

(C) 充要条件；　(D) 既非充分，又非必要条件.

解：由于ε的任意性，可知是充要条件.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$的定义：对任意给定的正数$\varepsilon$,总存在$\delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$成立.

2.函数$f(x)=\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$的可去间断点的个数为(   ).

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 无穷多个.

解：$f(x)=\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$的间断点为$\sin(\pi x)$的零点，即$x\in Z$，

当分子为零时，$x=0$或者$x=1$或者$x=-1$.

由洛必达法则可知，这三个间断点都是可去间断点.

3.设函数$f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\dots(e^{nx}-n)$，$n$为正整数，

则$f'(0)=$(   )

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$; (B) $(-1)^n(n-1)!$;

(C) $(-1)^{n-1}n!$; (D) $(-1)^n n!$.

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\dots(e^{nx}-n)}{x}=(-1)^{n-1}(n-1)!$.

4.当$x \to 0^+$，若$(\ln(1+2x))^a$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}$均是x的高阶无穷小量，则a的取值范围是(　　　).

(A) $(2,+\infty)$;　　(B) $(1,2)$;　　(C) $(\frac{1}{2},1)$;　　(D) $(0,\frac{1}{2})$.

解：当$x \to 0^+$，若$(\ln(1+2x))^a \sim (2x)^a = 2^a x^a = o(x)$，

$$(1-\cos x)^{\frac{1}{a}} \sim \left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{a}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}} (x)^{\frac{2}{a}} = o(x)$$

故$a > 1$且$\frac{2}{a} > 1$，从而$1 < a < 2$.

5. 设函数$y=f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上有定义，当自变量x有增量Δx相应的函数增量为$\Delta y=(x^2+2e^x\Delta x)\Delta x+y\Delta x+\alpha$，其中$\alpha$是$\Delta x\to 0$时关于$\Delta x$的高阶无穷小量，

则当$x=-1$，$y=1$，$\Delta x=0.1$时微分$\mathrm{d}y=$ (　　).

(A) 0.1；　(B) 0.2；　(C) $0.1+0.02e^{-1}$；(D) $0.2+0.02e^{-1}$.

解：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x^2+2e^x\Delta x)\Delta x+y\Delta x+\alpha}{\Delta x}=x^2+y$

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=y'\Delta x=(x^2+y)\Delta x$$

故当$x=-1$，$y=1$，$\Delta x=0.1$时微分$\mathrm{d}y=0.2$.

三、本题4分

确定常数a和b的值，使得函数$f(x)=\begin{cases} b\cos x+(a+1)x, & x\le 0 \\ e^{-ax}+x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x>0 \end{cases}$处处可导，并求$f'(x)$.

解：依题意函数$f(x)$在$x=0$处连续，从而$f(0+)=b=f(0-)=1$

$$f_+{}'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-ax}+x^2\cos\frac{1}{x^2}-1}{x}=-a$$

$$f_-{}'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x+(a+1)x-1}{x}=a+1$$

从而$-a=a+1$. 因此$a=-\frac{1}{2}$，$b=1$. 且$f_+{}'(0)=f_-{}'(0)=\frac{1}{2}$.

三、本题4分

解：因此$a=-\frac{1}{2}$，$b=1$.代入函数 $f(x)=\begin{cases} b\cos x+(a+1)x, & x\le 0 \\ e^{-ax}+x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x>0 \end{cases}$，

得$f(x)=\begin{cases} \cos x+\frac{1}{2}x, & x\le 0 \\ e^{\frac{1}{2}x}+x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x>0 \end{cases}$.

$$f'(x)=\begin{cases} -\sin x+\frac{1}{2}, & x\le 0 \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}+2x\cos\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2}, & x>0 \end{cases}.$$

四、本题4分

设函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内有连续二阶导数，且$f'(1)=1$，$f''(1)=2$，求参数方程$\begin{cases} x=f(e^{-t}) \\ y=f(e^{t}) \end{cases}$所确定的函数$y=y(x)$在$t=0$处的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_{t=0}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\big|_{t=0}$.

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{f'(e^t)e^t}{-f'(e^{-t})e^{-t}}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_{t=0}=\frac{f'(e^t)e^t}{-f'(e^{-t})e^{-t}}\big|_{t=0}=-1.$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

$$=-\frac{[f'(e^t)e^t+f''(e^t)e^t]f'(e^{-t})e^{-t}-f'(e^t)e^t[-f'(e^{-t})e^{-t}-f''(e^{-t})e^{-2t}]}{[f'(e^{-t})e^{-t}]^2}$$

四、本题4分

设函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内有连续二阶导数，且$f'(1)=1$，$f''(1)=2$，求参数方程$\begin{cases} x=f(e^{-t}) \\ y=f(e^{t}) \end{cases}$所确定的函数$y=y(x)$在$t=0$处的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_{t=0}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\big|_{t=0}$.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}=$$

$$=-\frac{[f'(e^{t})e^{t}+f''(e^{t})e^{t}]f'(e^{-t})e^{-t}-f'(e^{t})e^{t}[-f'(e^{-t})e^{-t}-f''(e^{-t})e^{-2t}]}{[f'(e^{-t})e^{-t}]^2}\Big|_{t=0}$$

$$=-\frac{[f'(1)+f''(1)]f'(1)-f'(1)[-f'(1)1-f''(1)]}{[f'(1)]^2}$$

$$=-6.$$

五、本题4分

计算$\lim\limits_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

解： $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos2x+2x\sin x)}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos2x+2x\sin x-1}{x^4}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin2x+2x\cos x+2\sin x}{4x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin2x+x\cos x+\sin x}{2x^3}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\cos2x+\cos x-x\sin x+\cos x}{6x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\cos2x+2\cos x-x\sin x}{6x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{4\sin2x-2\sin x-\sin x-x\cos x}{12x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{4\sin2x-3\sin x-x\cos x}{12x}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

六、本题4分

(I) 证明：对于任意正整数n，都有$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$.

(II) 设$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \ (n \in Z_+)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在.

证明: (I) 考察函数$f(x) = \ln(1+x)$，则$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = f(\frac{1}{n})$，$f(0) = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

由拉格朗日中值定理，存在$\xi \in (0,\frac{1}{n})$，使得

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) = f'(\xi)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\xi}$$

$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < \frac{1}{n}\frac{1}{1+\xi} < \frac{1}{n}$, 故$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$.

(I) 证明：对于任意正整数n，都有$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

(II) 设$a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \ (n \in Z_+)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在.

证明: (II) 由于$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$，故

$$a_{n+1}-a_n$$

$$=\left(1+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}-[\ln(n+1)-\ln n]=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$$

数列$\{a_n\}$单调下降.

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

$$>\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0$$

(I) 证明：对于任意正整数n，都有$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

(II) 设$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \ (n \in Z_+)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在.

因此，数列$\{a_n\}$单调下降且有下界，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在.

七、本题4分

(I) 证明拉格朗日中值定理：若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，则存在$\xi \in (a,b)$，使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(II) 设函数$f(x)$在开区间$(-1,1)$上具有二阶连续导数且$f''(x)\neq 0$，证明：对于开区间$(-1,1)$内任一$x\neq 0$，存在唯一的$\theta(x)\in(0,1)$，使得

$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$成立，并证明$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

证明：(I) 考察函数$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，则$g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间$(a,b)$上可导，且$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，

$g(a)=g(b)=0$.

由罗尔中值定理，存在$\xi\in(a,b)$，$g'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$，

从而$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

七、本题4分

(II) 设函数$f(x)$在开区间$(-1,1)$上具有二阶连续导数且$f''(x) \neq 0$，证明：对于开区间$(-1,1)$内任一$x \neq 0$，存在唯一的$\theta(x) \in (0,1)$，使得$f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x)$成立，并证明$\lim\limits_{x\to 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

证明：(II) 由拉格朗日中值定理，对于开区间$(-1,1)$内任一$x \neq 0$，存在$0 < \theta(x) = \frac{\xi-0}{x-0} < 1$，使得$f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x)$成立.

由于$f''(x) \neq 0$，故$f'(x)$严格单调.$\theta(x) \in (0,1)$的值是存在且唯一的.

$$f'(\theta(x)x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

七、本题4分

$$f'(\theta(x)x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$0\neq f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{\theta(x)x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{\theta(x)x^2}$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)\neq 0$,

故$f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{\theta(x)x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(0)}{2\theta(x)}$，从而$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

七、本题4分

(II) 设函数$f(x)$在开区间$(-1,1)$上具有二阶连续导数且$f''(x) \neq 0$，证明：对于开区间$(-1,1)$内任一$x \neq 0$，存在唯一的$\theta(x) \in (0,1)$，使得$f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x)$成立，并证明$\lim\limits_{x\to 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

证明:(方法二）(II) 由拉格朗日中值定理，对于开区间$(-1,1)$内任一$x \neq 0$，存在$0 < \theta(x) = \frac{\xi-0}{x-0} < 1$，使得$f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x)$成立.

由于$f''(x) \neq 0$，故$f'(x)$严格单调.$\theta(x) \in (0,1)$的值是存在且唯一的.

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + o(x^2)$$

七、本题4分

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(0)+o(x^2)$$

$$f'(x)=f'(0)+xf''(0)+o(x)$$

故$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)=f(0)+x[f'(0)+\theta(x)xf''(0)+o(\theta(x)x)]$
$=f(0)+xf'(0)+\theta(x)x^2f''(0)+xo(\theta(x)x)$
从而$\frac{1}{2}x^2f''(0)+o(x^2)=\theta(x)x^2f''(0)+xo(\theta(x)x)$,
同除以x^2，再令$x\to 0$，可得$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.