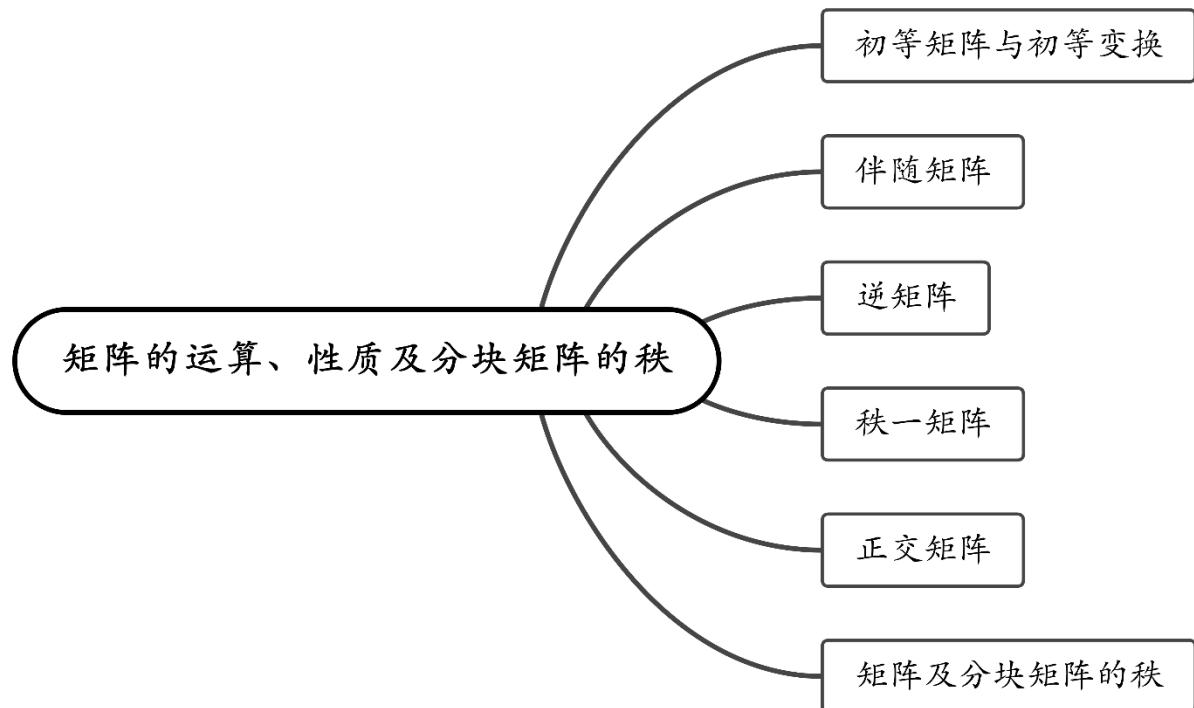


矩阵的运算、性质及分块矩阵的秩

主讲人 夜雨



初等矩阵与初等变换

三类初等矩阵：换法矩阵，消法矩阵，倍法矩阵

$$\text{换法矩阵 } E(i,j) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 & & & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \end{array}$$

$$\text{且 } |E(i,j)| = -1, \text{ 比如 } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

左乘 $E(i,j)$, 交换第 i,j 行; 右乘 $E(i,j)$, 交换第 i,j 列

$$\text{消法矩阵换法矩阵 } E(ij(k)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & k \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{第 } i \text{ 行} \\ \text{第 } j \text{ 行} \end{array}$$

且 $|E(ij(k))| = 1$, 比如 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

左乘 $E(ij(k))$, 第 j 行的 k 倍加到 i 行; 右乘 $E(ij(k))$, 第 i 行的 k 倍加到 j 行

$$\text{倍法矩阵 } E(i(k)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & & k & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

且 $|E(i(k))| = k$, 比如 $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

左乘 $E(i(k))$, 第 i 行乘 k ; 右乘 $E(i(k))$, 第 i 列乘 k

乘法规则: 左乘初等矩阵, 作行变换; 右乘初等矩阵, 作列变换 (左行右列)

初等矩阵的逆矩阵仍然是初等矩阵 (并且是同类型的)

$$E(i,j)^{-1} = E(i,j), \text{ 比如 } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E(i(k))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right), \text{ 比如 } \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k)), \text{ 比如 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得到 B ，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C ，则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为 () (2004)

$$(A) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (C) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (D) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设 A, P 均为 3 阶矩阵，且 $P^T AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，若 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ ， $Q = [\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3]$ ，则 $Q^T AQ$ 为

() (2009)

$$(A) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (C) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (D) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 B ，则 () (2005)

- (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得到 B^*
- (B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得到 B^*
- (C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得到 $-B^*$
- (D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得到 $-B^*$

设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B ，再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C ，记

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } (\quad) \text{ (2006)}$$

- (A) $C = P^{-1}AP$ (B) $C = PAP^{-1}$ (C) $C = P^TAP$ (D) $C = PAP^T$

关于初等变换和初等矩阵一些重要结论（记忆并学会适当推导）

- (1) 任意一个可逆矩阵都可以表示为若干个初等矩阵的乘积（记）
- (2) 任意一个可逆矩阵都可以通过初等行（列）变换得到单位矩阵
- (3) 单位矩阵可以通过初等行（列）变换得到任意一个可逆矩阵
- (4) 设 A, B 为同阶可逆矩阵，则 A 可以通过初等行（列）变换得到 B

若矩阵 A 经初等列变换化成 B ，则 () (2020)

- (A) 存在矩阵 P ，使得 $PA = B$
 (B) 存在矩阵 P ，使得 $BP = A$
 (C) 存在矩阵 P ，使得 $PB = A$
 (D) 方程 $Ax = \mathbf{0}$ 与 $Bx = \mathbf{0}$ 同解

伴随矩阵

伴随矩阵的定义及核心公式

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A|E$$

$$AA^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A|E$$

为什么你学得好，因为你站在更高的位置

常见公式

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

$$(kA)^* = k^{n-1} A^* \quad (1998 \text{ 考察过})$$

对角矩阵的伴随矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \prod_{i \neq 1} a_i & & & \\ & \prod_{i \neq 2} a_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \prod_{i \neq n} a_i \end{pmatrix}$$

比如 $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} bc & & \\ & ac & \\ & & ab \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & c & \\ & & & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} bcd & & & \\ & acd & & \\ & & abd & \\ & & & abc \end{pmatrix}$

设 A 为 n 阶可逆矩阵, 则 () (1996)

$$(A) (A^*)^* = |A|^{n-1} A \quad (B) (A^*)^* = |A|^{n+1} A$$

$$(C) (A^*)^* = |A|^{n-2} A \quad (D) (A^*)^* = |A|^{n+2} A$$

分块矩阵的伴随矩阵

设 A, B 是 n 阶可逆方阵, 则有如下公式

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = (-1)^n \begin{pmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{pmatrix} \quad (\text{已知 } A, B \text{ 为 } n \text{ 阶})$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* - A^*CB^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

逆矩阵

可逆的定义：对于 n 阶矩阵 A ，若存在一个矩阵 B ，使得 $AB = E$ （或 $BA = E$ ），则称 A 是可逆的，并把 B 称为 A 的逆矩阵，记为 A^{-1} （且此时 $B = \frac{A^*}{|A|}$ ）

设 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $ABC = E$ ，则必有（）(1991)

- (A) $ACB = E$ (B) $CBA = E$
 (C) $BAC = E$ (D) $BCA = E$

可逆的充要条件： A 可逆 $\iff |A| \neq 0 \iff A$ 所有特征值不为零 $\iff Ax = \mathbf{0}$ 仅有零解

设 A 为 n 阶非零矩阵，若 $A^3 = O$ ，则（）(2008)

- (A) $E - A$ 不可逆， $E + A$ 不可逆 (B) $E - A$ 不可逆， $E + A$ 可逆
 (C) $E - A$ 可逆， $E + A$ 可逆 (D) $E - A$ 可逆， $E + A$ 不可逆

常见公式

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \text{ 则 } (A^*)^{-1} \quad \text{(1995)}$$

逆矩阵的求法：

方法一：利用伴随矩阵 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ （适用二三阶，三阶以上容易算错）

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (\text{口诀：主对调，副换号})$$

方法二：作初等变换

$$[A | E] \xrightarrow{r} [E | A^{-1}] \quad (\text{行变换就是左乘 } A^{-1})$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & A^{-1} \end{array} \right] \xrightarrow{c} \left[\begin{array}{c|c} E & \\ \hline A^{-1} & \end{array} \right] \quad (\text{列变换就是右乘 } A^{-1})$$

$$[A | B] \xrightarrow{r} [E | A^{-1}B] \quad (\text{行变换就是左乘 } A^{-1})$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline E & A^{-1}B \end{array} \right] \xrightarrow{c} \left[\begin{array}{c|c} E & \\ \hline BA^{-1} & \end{array} \right] \quad (\text{列变换就是右乘 } A^{-1})$$

方法三：利用分块矩阵的逆矩阵

已知 A, B 可逆，则有

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{记})$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} \quad (\text{记})$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{得知道怎么来的, 2023 年考察过})$$

可得

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = (-1)^n \begin{pmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*CB^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

方法四：利用对角矩阵的逆矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_1 & & & \\ & 1/a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/a_n \end{pmatrix}$$

设矩阵 A 和 B 满足 $AB = A + 2B$ ，其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ，求矩阵 B (1987)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ ，且 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$ ，则 $(E + B)^{-1} =$ (2000)

设矩阵 A 满足 $A^2 - 3A - 2E = O$ ，则 $A^{-1} =$ (1988)

设矩阵 A 满足 $A^2 + A - 4E = O$ ，则 $(A - E)^{-1} =$ (2001)

设 n 阶矩阵 A, B 满足 $A + B = AB$

1) 证明 $A - E$ 是可逆矩阵

2) 已知 $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A (1991)

设四阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ (1991)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则逆矩阵 $(A - 2E)^{-1} =$ (1989)

设 $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, 其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$, 则 $A^{-1} =$ (1994)

设三阶矩阵 A, B 满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$, 其中 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$, 则 $B =$ (1995)

设 A, B 是二阶方阵, 若 $|A|=2, |B|=3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 () (2009)

- (A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

设 A, B 是 n 阶可逆方阵, 则 $\begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}^* =$ () (2023)

- (A) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -B^*A^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -A^*B^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$
 (C) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

秩一矩阵

设 A 是 n 阶矩阵

性质一: $r(A)=1 \Leftrightarrow A$ 可表示为 $\alpha\beta^T$, 其中 α, β 是 n 维非零列向量

注: 当 A 可表示为 $\alpha\beta^T$, 有 $tr(A)=(\alpha, \beta)=\beta^T\alpha=\alpha^T\beta$

性质二: $r(A)=1 \Rightarrow A^n=[tr(A)]^{n-1}A$

性质三: $r(A)=1 \Rightarrow A$ 的所以特征值是 $tr(A), \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ 个}}$

已知 $\alpha=(1, 2, 3)^T, \beta=\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)^T$, 设 $A=\alpha\beta^T$, 则 $A^n=$ (1994)

设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则 () (2017)

- (A) $E-\alpha\alpha^T$ 不可逆 (B) $E+\alpha\alpha^T$ 不可逆
 (C) $E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆 (D) $E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

正交矩阵

正交矩阵定义：满足 $A^T A = E$ (或者 $AA^T = E$) 的矩阵 A 称之为正交矩阵

正交矩阵的性质

性质一：设 A 是正交矩阵，则 $|A|=1$ 或 -1

性质二：设 A 是正交矩阵，则 A^{-1}, A^T 也是正交矩阵，且 $A^{-1} = A^T$

性质三：两个正交矩阵 A, B 的乘积依旧是正交矩阵

性质四： A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow A$ 的各列 (行) 都是单位向量且两两正交

性质五：正交变换不改变向量之间的内积、向量的模长

设 A 是正交矩阵，则 $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ 且 $\|Ax\| = \|x\|$

性质六： A 是正交矩阵，若 A 有实数特征值，则这个实数特征值只能是 -1 或 1

注：正交矩阵不一定有实数特征值，比如 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 没有实数特征值

性质七：关于 $|A + E|$ 及 $|A - E|$ 是否为零？(即判断 -1 和 1 是否是特征值)

设 A 是正交矩阵且 $|A| < 0$ ，则 -1 必是特征值 (1995 年考察过)

设 A 是偶数阶正交矩阵且 $|A| > 0$ ，则 -1 和 1 都是特征值

设 A 是奇数阶正交矩阵且 $|A| > 0$ ，则 1 必是特征值

设 A 是奇数阶正交矩阵则 -1 和 1 必有一个是特征值

性质八：设 A 是正交矩阵，若 A 有特征值 -1 和 1 ，则 -1 和 1 对应的特征向量正交

性质九：

A 是正交矩阵且 $|A|=1 \rightarrow A_{ij} = a_{ij}$

A 是正交矩阵且 $|A|=1 \xleftarrow{A \text{ 是非零矩阵}} A_{ij} = a_{ij}$

A 是正交矩阵且 $|A|=-1 \rightarrow A_{ij} = -a_{ij}$

A 是正交矩阵且 $|A|=-1 \xleftarrow{A \text{ 是非零矩阵}} A_{ij} = -a_{ij}$ (2013 考察过)

设 $A = (a_{ij})$ 是三阶非零矩阵，若 $A_{ij} + a_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ ，则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$ (2013)

A 是正交矩阵且 $|A| < 0$ ，求 $|A + E|$ (1995)

矩阵及分块矩阵的秩

常见公式

1) $r(A_{m \times n}) \leq m, n$

2) $r(A) \leq r(A, B); r(A) \leq r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

3) $r(A + B) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$

4) $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

5) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B); r\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$

6) $r(A^T A) = r(AA^T) = r(A)$

7) 若 $A_{m \times n} B_{n \times s} = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$

8) $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n - 1 \\ 0, & r(A) < n - 1 \end{cases}$

9) 若 A 为列满秩矩阵, 则 $r(AB) = r(B)$; 若 A 为行满秩矩阵, 则 $r(BA) = r(B)$ (左乘列满秩, 右乘行满秩, 秩不改变)

基于如下结论

结论一: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ 是 n 维列向量, 有 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$

结论二: 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ 表示, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$

结论三: 方程 $AX = B$ 有解 $\iff r(A) = r(A, B)$

结论四: $Ax = \mathbf{0}$ 和 $Bx = \mathbf{0}$ 同解 $\iff r(A) = r(B) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

结论五: 初等变换不改变矩阵的秩

若 $A_{m \times n} B_{n \times m} = E_m$, 则 () (2010)

(A) $r(A) = m, r(B) = m$

(B) $r(A) = m, r(B) = n$

(C) $r(A) = n, r(B) = m$

(D) $r(A) = n, r(B) = n$

设三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$, 若 $r(A^*) = 1$, 则必有 () (2003)

(A) $a = b$ 或 $a + 2b = 0$ (B) $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$

(C) $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$ (D) $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$

设 A 是 n 阶矩阵, α 是 n 维列向量, 若 $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = r(A)$, 则线性方程组 () (2001)

(A) $AX = \alpha$ 必有无穷多解 (B) $AX = \alpha$ 必有唯一解

(C) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ 仅有零解 (D) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ 必有非零解

广义消法变换的应用 (重点)

广义消法变换和消法变换一样, 都不改变矩阵的秩, 把“矩阵”看作“数”, 广义消法变换就是消法变换, 但是与消法变换不同的是, 广义消法变换需要注意 P 矩阵的位置!

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + P \times r_2} \begin{pmatrix} A + PC & B + PC \\ C & D \end{pmatrix} \text{ (行变换, } P \text{ 在左)}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_2 \times P} \begin{pmatrix} A + BP & B \\ C + DP & D \end{pmatrix} \text{ (列变换, } P \text{ 在右)}$$

设 A, B 为 n 阶实矩阵, 下列不成立的是 () (2021)

$$(A) r\begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T A \end{pmatrix} = 2r(A)$$

$$(B) r\begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$$

$$(C) r\begin{pmatrix} A & BA \\ O & AA^T \end{pmatrix} = 2r(A)$$

$$(D) r\begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$$

已知 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $ABC = O$, E 为 n 阶单位矩阵, 记矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ BC & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} AB & C \\ O & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & AB \\ AB & O \end{pmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3 , 则 () (2023)

- (A) $r_1 \leq r_2 \leq r_3$
- (B) $r_1 \leq r_3 \leq r_2$
- (C) $r_3 \leq r_1 \leq r_2$
- (D) $r_2 \leq r_1 \leq r_3$

设 A, B 为 n 阶矩阵, 若方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 与 $Bx = \mathbf{0}$ 同解, 则 () (2022)

- (A) 方程组 $\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix}y = \mathbf{0}$ 只有零解
- (B) 方程组 $\begin{pmatrix} E & A \\ O & AB \end{pmatrix}y = \mathbf{0}$ 只有零解
- (C) 方程组 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}y = \mathbf{0}$ 与 $\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix}y = \mathbf{0}$ 同解
- (D) 方程组 $\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix}y = \mathbf{0}$ 与 $\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix}y = \mathbf{0}$ 同解

设 A, B 为 n 阶矩阵, 则 () (2018)

- (A) $r(A \ AB) = r(A)$
- (B) $r(A \ BA) = r(A)$
- (C) $r(A \ B) = \max\{r(A), r(B)\}$
- (D) $r(A \ B) = r(A^T \ B^T)$