19 年期末第六题解析

寅默

2023 年 12 月 28 日

1 题目

实矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足

1. $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = (2, 4, 2)^T$
2. A 与 $D = \mathrm{diag}(-3, 1, -4)$ 合同
3. $|A + 2E| = 0$
4. $AA^T = 4E$

问：

1. A 对应的二次型为 f，求 $f = 1$ 代表的曲面
2. 求一个正交变换 $x = Py$ 将二次型 f 化为标准型。

2 解

第一问是简单的，根据合同变换后的对角矩阵知道，二次型可以变换为

$$-3z_1^2 + z_2^2 - 4z_3^2 = 1$$

这显然是双叶双曲面。

第二问首先需要确定的是，A 是一个实对称矩阵。这通过 A 与对角矩阵合同可以看出，于是不妨设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，其对应的特征向量分别为 X_1, X_2, X_3，于是

$$X_i = EX_i = \frac{1}{4}AA^TX_i = \frac{1}{4}AAX_i = \frac{1}{4}\lambda_i^2X_i$$

其中用到了 $A = A^T$ 这个实对称的性质。这样根据特征向量非零就能有 $\lambda_i = \pm 2$。另外由于 A 与 $D = \mathrm{diag}(-3, 1, -4)$ 合同，于是 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -2$，又由条件 1 可以推出 2 对应的特征向量为 $(1, 2, 1)^T$，所以我们可以直接取 -2 对应的特征向量为 $(1, 0, -1)^T, (1. -1, 1)$，此时再规范化一下就能够得到

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$