第二章 矩阵

【问题解答】

矩阵有什么含义?

一方面，矩阵可以看作是对量的一种排列方式；另一方面，也是更为重要的方面，是把矩阵看作线性变换，看作一种操作。当矩阵相乘时应看作是复合变换。 AB 应看作是 "进行变换 B 后再进行变换 A "，这和复合函数是一个道理。矩阵乘法的定义也是根据这种看法来的（看了第一章的链接应该有印象）

有哪些矩阵的名字要记住?

奇异矩阵(行列式为0)、非奇异矩阵(行列式不为0)、对称矩阵 $(A=A^T)$ ，反对称矩阵 $(A=-A^T)$ 、单位矩阵 E

值得注意的矩阵运算?

$(AB)^T=B^TA^T \quad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

矩阵的秩有什么用?

知道了矩阵的秩，就可以将对原本矩阵的研究变为对它的标准型 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的研究。不仅如此，在后面的章节中矩阵的秩具有频率很高的应用，因此我们的例题中会对秩的计算进行训练，以使读者在之后的计算中更为熟练。

金科玉律：**左乘行变换，右乘列变换**

【典型例题】

【例1】设 A,B,C 均为n阶方阵，且 $AB=BC=CA=E$,求 $A^2+B^2+C^2$

解析： E 作为单位元，在算式中有意无意添上去可以得到很多奇妙的推导。

$A^2=AEA=ABCA=(AB)(CA)=E^2=E$, 同理可以得到 $B^2=E,C^2=E$, 因此答案为 $3E$

在可逆矩阵相关问题中， $E=AA^{-1}$ 的应用也有好处。

【例2】设n阶实对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足 $A^2=0$ ，证明 $A=0$

解析：证明一个矩阵为0矩阵常用方式有两种，证明矩阵的每一个元素为0或者证明矩阵的秩为0.

本题由于实对称矩阵的特殊性，考察 A^2 的对角线元素为
$A_{ii}=a_{i1}a_{1i}+a_{i2}a_{2i}+...+a_{in}a_{ni}=a_{i1}^2+...+a_{in}^2=0$，由平方的非负性可以得到 $a_{ij}=0$ ，又i 是任意的，从而有 $A=0$。

考虑对角线的原因实际上是出于 A^TA 的对角线具有平方和的性质，而实对称矩阵有 $A^T=A$.

【例3】设 A 为n阶对称矩阵， B为n阶反对称矩阵，证明 AB 为反对称矩阵 $\iff AB=BA$

解析：证明矩阵为某一类矩阵都是从定义入手。

AB 为反对称矩阵
$\iff (AB)^T=-AB \iff B^TA^T=-AB \iff -BA=-AB \iff BA=AB$

倒数第二个等价符号用了条件。

【例4】如果$A^2=A$**,则称** A **为幂等矩阵，设** A,B **都是幂等矩阵，证明：** $A+B$ **是幂等矩阵** $\iff$ $AB=BA=0$

解析：$A+B$ 是幂等矩阵

$\iff (A+B)^2=A+B \iff A^2+AB+BA+B^2=A+B \iff A+AB+BA+B=A+B \iff A$

反推显然，而正推需要进一步深入

$AB=-BA \to A^2B=-BA \to A(-BA)=-BA \to -(AB)A=-BA \to (BA)A=-BA \to BA=-BA$

,从而可以得到 $BA=0$ 进而结论成立。

需要反复运用条件进行转化，得到 $D=-D$ 的形式。

【例5】 $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{2008}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{2009}=$

解析：要用初等变换的观点看矩阵乘法。左乘行变换，右乘列变换。左边的矩阵表示将它所乘的矩阵的第一行和第三行交换，交换偶数次等于没换。右边的矩阵表示将它所乘的矩阵的第一列和第二列交换，交换奇数次相当于交换一次。故答案为

$$\begin{pmatrix}a_2&a_1&a_3\\b_2&b_1&b_3\\c_2&c_1&c_3\end{pmatrix}$$

【例6】设 $\alpha=(1,0,-1)^T$，$A=\alpha\alpha^T$ **则** $|\lambda E-A^k|=$

解析：课本里分块矩阵章节有降阶公式的证明。即 $|\lambda E-B_{m\times n}A_{n\times m}|=\lambda^{m-n}|\lambda E-A_{n\times m}B_{m\times n}|$.

因此 $|\lambda E-A^k|=\lambda^{3-1}|\lambda-(\alpha^T\alpha)^k|=\lambda^2(\lambda-2^k)$

也可以利用结合律先算出 A^k.但不是一般方法

【例7】已知 $A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\-3&1&-2\\6&-2&4\end{pmatrix}$**，求** $A^k=$

解析：注意到列之间有倍数关系，或行之间有倍数关系。取一列出来，然后将系数构成矩阵写为矩阵乘法即可。

$(3,-3,6)^T=-3(-1,1,-2)^T,(-1,1,-2)^T=1(-1,1,-2)^T,(2,-2,4)^T=-2(-1,1,-2)^T$

，因此可以有

$A=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&-2\end{pmatrix}$，然后用结合律进行计算即可

当学习了向量空间的相关知识后，应该能对此种做法更加熟练。

【例8】设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}1&a&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&b&c\\0&0&0&1&b\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$**，其中** $abc\neq 0$**，且** $BP=PA$

,求 $B^k(k>3)$.

解析：本题为介绍分块矩阵求逆的几个简单结论和求高次幂的另一种题型。

我们有如下结论：

$$D=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix} \quad D^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & 0\\ 0 & B^{-1}\end{pmatrix}$$

即分块对角矩阵的逆等于各对角分块的逆,可推广到任意多个分块

$$D=\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}$$

即分块反对角矩阵的逆等于各反对角分块求逆后逆反对角重新排列，可推广到任意多分块

$B=PAP^{-1},B^k=PA^kP^{-1}$，用结合律很容易得到这个结果。

因此先计算P^{-1} ，分块方式很容易看出来是按左上角方阵和右下角方阵分块。

计算A^k 也一样，先对 A 分块，然后利用对角矩阵的k次方公式 $D=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix} \quad D^k=\begin{pmatrix}A^k & 0\\ 0 & B^k\end{pmatrix}$ 即可。

【例9】设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$,证明 $A,A+2E$ 均可逆。

解析：判断可逆的常用方式为看矩阵的行列式是否为0.本题建议判断哪个就构造哪个

$A(A-E)=2E$，两边取行列式可以得到 $|A|\neq 0$ 因此 A 可逆。

$A^2+2A-3A-6E+4E=0$,从而 $(A+2E)(A-3E)=-4E$，两边取行列式可得到 $|A+2E|\neq 0$ 因此可逆。

【例10】设 A,B 均为n阶方阵，已知 $A-E,B$ 都可逆，且 $(A-E)^{-1}=B^*-E$，证明 A 可逆。

解析：两边左乘 $A-E$ 化简得到 $AB^*-A-B^*=0$，为出现 $|A|$，提取 A 有 $A(B^*-E)=B^*$，两边取行列式即可得到 $|A|\neq 0$ 从而命题得证。

【例11】设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解析：低阶行列式由 $AA^*=|A|E$得到 $A^*|A|^{-1}=A^{-1}$ 即可。这里给出二阶行列式的逆的简单结论。

主对角线对换位置，反对角线不换，反对角线取负，整体除以行列式。

即 $A^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

【例12】若方阵 A 可逆且每行元素之和都为 2，则 A^{-1} 的每行元素之和为

解析：学会将文字转化为数学表达式

条件的意思即为 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，两边乘 $\frac{1}{2}A^{-1}$ 即可得到答案为 $\frac{1}{2}$

【例13】求解矩阵方程 $AXB=C$,其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$

解析：通过这道题说明初等变换法求行列式的逻辑。

我们知道可以使用 $(A|E)$ 两边同时进行初等行变换（不能有列变换）的方式求 A^{-1}。这是因为行变换相当于左乘一系列初等矩阵，记为 $P=P_1P_2...P_s$，即 $(PA|PE)\to(E|P)$，因此得到 $P=A^{-1}$。同样可以用列变换的方式，写成 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$ 即可。

按照这个逻辑，我们可以这样写：

$\begin{pmatrix}C & A\\B & 0\end{pmatrix}$,当我们用行变换把 A 变成 E 时，就有 C 变成 $A^{-1}C$(左乘一系列初等矩阵，合起来为 A^{-1})，同理，把 B 变成 E 时，就得到了 $A^{-1}CB^{-1}$(右乘一系列初等矩阵，合起来为 B^{-1})，即 X.

因此如果我们要同时进行行列变换求逆，应该从以上观点入手。22年期中试题中有一道分块矩阵求逆就是应用这个思想。

【例14】设 $A_{4\times3},R(A)=2$，B 可逆，则 $R(AB)=$

解析：这道题很简单，只是想让大家清楚的记得：可逆矩阵不改变秩。即 $R(AB)=R(A)=2.$

可逆矩阵乘一个矩阵相当于做一系列初等变换，而初等变换不改变秩。

【例15】设 A,B 均为n阶方阵，且 $A^2-2AB=E$，则 $R(AB-BA+A)=$

解析：有$A(A-2B)=E$,因此有 $A^{-1}=A-2B,(A-2B)A=E$。因此有 $A^2-2BA=A^2-2AB$，得到 $AB-BA=0,$ 因此 $R(AB-BA+A)=R(A)=n$

这里要指出的是可逆矩阵定义为 $AB=BA=E$,而判断时只需要有一个成立即可。

【例16】设 A 为n阶方阵，且 $A^2-A=2E$，则 $R(2E-A)+R(E+A)=$

解析：秩不等式的应用，这里展示加法不等式的应用

首先由 $(A-2E)(A+E)=0$ 立即可得 $R(A-2E)+R(A+E)\leqslant n$

又 $(2E-A)+(A+E)=3E\to R(2E-A+A+E)\leqslant R(2E-A)+R(A+E)$

即$R(2E-A)+R(A+E)\geqslant n$

因此答案为n

这里要指出的是，矩阵乘一个非零常数不改变秩，因此秩的加法不等式有很大操作空间。

【例17】设 A 是n阶方阵 $(n\geq3)$，求

(1)若 $A^2=0,$ 则 $R(A^*)=$

(2)若 $R(A)=n-1$，则 $R((A^*)^*)=$

解析：这里主要展示作业中的一个结论：

$$R(A^*)=\begin{cases}n & R(A)=n\\1 & R(A)=n-1\\0 & R(A)<n-1\end{cases}$$

不难得到(1)中 $R(A)\leqslant\frac{n}{2}<n-1(n\geqslant3)$,从而 $R(A^*)=0$

(2)中$R(A^*)=1,R((A^*)^*)=0$

【例18】设 $A_{m\times s}, B_{s\times n}$ **，证明** $R(AB)\le min\{R(A),R(B)\}$**.**

解析：考虑矩阵的标准型

$P_1AQ_1=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, P_2BQ_2=\begin{pmatrix}E_t & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ，求出 A,B 后相乘有
$AB=P_1^{-1}\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q_1^{-1}P_2^{-1}\begin{pmatrix}E_t & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q_2^{-1}$，考察中间的项可以得到
$AB=P_1^{-1}\begin{pmatrix}M_{r\times t} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q_2^{-1}$ 因此命题成立。

研究矩阵可以研究它的标准型。

【例19】设 $A_{m\times s}, B_{s\times n}$**, 证明** $R(AB)\ge R(A)+R(B)-s$**。**

解析：主要利用分块矩阵的秩的相关结论。

$R(AB)+s=R\begin{pmatrix}AB & 0\\ 0 & E_s\end{pmatrix}, R(A)+R(B)\leqslant\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$. 然后考虑分块矩阵的初等变换即可

【例20】设 $A_{m\times n}, B_{n\times s}, C_{s\times t}$**，证明** $R(ABC)\ge R(AB)+R(BC)-R(B)$**.**

解析：观察得知 B 为桥梁，实际上是上一道题的推广。

讨论 B 的标准型即可，$B=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=(M\ S)\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N\\ T\end{pmatrix}=MN$

因此有
$R(ABC)=R(AMNC)\geqslant R(AM)+R(NC)-r\geqslant R(AMN)+R(MNC)-r=R(AB)+R(BC)-R(B)$

以上为用分块矩阵讨论矩阵的秩的相关问题。矩阵的标准型具有一定意义。