答案

一、填空题

1. $(x-y)^{n-1}\left[x+(n-1)y\right]$　　2. $\dfrac{8}{9}$

3. $\lambda^3(\lambda+4)$　　4. $(12\ 0\ \text{-}12)$　　5. α_1,α_2（或者任取两个向量构成的向量组）

二、选择题

1. B　　2. A　　3. D　　4. C　　5. C

三、求过点 $A(-3,0,1)$ 且平行于平面 π_1: $3x\text{-}4y\text{-}z+5=0$ 又与直线 $L_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ 相交的直线 L 的方程

解： L_1 的参数方程为：$\begin{cases} x=2t \\ y=t+1 \\ z=-t-1 \end{cases}$

设 L 与 L_1 的交点为 $M(2t,t+1,-t-1)$，则 $\vec{AM}=(2t+3,t+1,-t-2)$，

π_1 的法向量 $\mathbf{n}=(3,-4,-1)$

$\vec{AM}\perp\mathbf{n}\Rightarrow 3(2t+3)+(-4)(t+1)+(-1)(-t-2)=0$

即 $t=-\dfrac{7}{3}$，则 $\vec{AM}=\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，　L 的方向向量可取为 $\mathbf{s}=(-5,-4,1)$

则 L 的方程为：$\dfrac{x+3}{-5}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z-1}{1}$

四、设 A 是 n 阶非零实矩阵，满足 $A^*=A^T$，证明：（1）$|A|>0$（2）如果 $n>2$，则 $|A|=1$

证明： 已知 $A^*=A^T$，即 $\left(A_{ij}\right)_{n\times n}^T=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}^T$，也是 $A_{ij}=a_{ij}$

（1）$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots a_{in}A_{in}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots a_{in}^2\ (i=1,2,\cdots n)$

又因为 $A\neq 0$，即 A 有非零元素，可记为 a_{kj}，而 $a_{k1}^2+a_{k2}^2+\cdots a_{kn}^2>0$，所以 $|\mathrm{A}|>0$

（2）$AA^T=AA^*=|A|E$

两边取行列式，得 $|A|^2=|A|^n|E|\Rightarrow|A|^{n-2}=1\Rightarrow|A|=1$（因为 $|\mathrm{A}|>0$）

五、解：由 $A^*X=A^{-1}+X$ 得

$$X=(A^*-E)^{-1}A^{-1}=(AA^*-A)^{-1}=(|A|E-A)^{-1}$$

又 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&2\end{vmatrix}=2,$ 故

$$X=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

六、解：$\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\end{pmatrix}^6=\left(\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\end{pmatrix}^2\right)^3=(10E_2)^3=10^3E_2,\ \left(\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\end{pmatrix}^6\right)^{-1}=10^{-3}E_2,$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^6=(E_3+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix})^6=\sum_{i=0}^{6}C_6^iE_3^{6-i}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}^i=E_3^6+6E_3^5\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^6\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&6&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-6&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(A^6)^{-1}=\begin{pmatrix}10^{-3}&0&0&0&0\\0&10^{-3}&0&0&0\\0&0&1&-6&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$