代数与几何期中模拟答案及部分题解析

一、填空题(每题 1 分，共 5 分)

1. $[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$　　2. $\frac{8}{9}$　　3. $\lambda^3(\lambda+4)$

4. $\begin{pmatrix}12 & 0 & -12\end{pmatrix}$　　5. $-\frac{a}{b}$

提示：

1. $$\begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y \\ y & x & y & \dots & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & x \end{vmatrix} \underline{\underline{c_1 = c_1 + \dots + c_n}} [x+(n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & y & y & \dots & y \\ 1 & x & y & \dots & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y & y & \dots & x \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{matrix} r_2 - yr_1 \\ r_3 - yr_1 \\ \dots \end{matrix}}} [x+(n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-y & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x-y \end{vmatrix} = [x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$$

2. $\left|3A^* - (3A)^{-1}\right| = \left|3\,|A|\,A^{-1} - \frac{1}{3}A^{-1}\right| = \left|\frac{2}{3}A^{-1}\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{8}{9}$.

3. $\left|\lambda E + A^2\right| = \left|\lambda E + \alpha^T\alpha\alpha^T\alpha\right| = \left|\lambda E + \alpha^T(\alpha\alpha^T)\alpha\right| = \left|\lambda E + 2\alpha^T\alpha\right| = \lambda^3\left|\lambda E_1 + 2\alpha\alpha^T\right| = \lambda^3(\lambda+4)$.

4. $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 8 & -4\end{pmatrix}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 & 0 & -12\end{pmatrix}$.

5. $A(A^{-1} - B^{-1})B = B - A$，两边同时取行列式得 $\left|A(A^{-1} - B^{-1})B\right| = |B - A|$，即

$|A||B|\left|A^{-1} - B^{-1}\right| = |(-1)(A - B)|$，即 $|AB|\left|A^{-1} - B^{-1}\right| = (-1)^7\,|(A - B)|$，则 $|AB| = -\frac{a}{b}$.

二、选择题(每题 1 分，共 5 分)

1.（B）　　2.（A）　　3.（D）

4.（C）　　5.（C）

三、(5 分) $\frac{x+3}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-1}$

四、(5 分)

证明：先证明 A 可逆且$|A|>0$

因为$A^* = A^T \Rightarrow a_{ij} = A_{ij}$,所以$|A| = a_{11}A_{11} + \dots + a_{1n}A_{1n} = a_{11}^2 + \dots + a_{1n}^2 \geq 0$

又由于 A 非零，因此$\exists a_{ij} \neq 0$,因此$|A|>0$。

$AA^*=|A|E$,由$|A|\neq 0, \therefore |A^*| = |A|^{n-1}$, 又$A^* = A^T, |A^T|=|A|, |A|\neq 0$,得$|A|^{n-2}=1$

又由$|A|>0$，因此$|A|=1$.

五、(5 分) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

提示：$|A|=2$，故 A 可逆。

$|A|A^{-1}X = A^{-1} + X$,由$|A|=2 \therefore 2A^{-1}X = A^{-1}+X$.

等式两端同时左乘A,有$2X = E + AX$,得$X=(2E-A)^{-1}$

六、(5 分) $\begin{pmatrix} \frac{1}{1000} & 0 & & & \\ 0 & \frac{1}{1000} & & & \\ & & 1 & -6 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

提示：$(A^6)^{-1} = (A^{-1})^6$,利用初等变换法求 A^{-1},再利用分块矩阵的幂运算性质，以及把右下角的矩阵拆成一个单位阵+另一个矩阵的形式即可。