

2009 年第一届全国大学生数学竞赛初赛 (数学类) 参考答案

第一题：【参考解析】：先求圆柱面的轴 L_0 的方程。由已知条件易知，圆柱面母线的方向是 $\vec{n} = (1, 1, 1)$ ，且圆柱面经过点 $O(0, 0, 0)$ ，过点 $O(0, 0, 0)$ 且垂直于 $\vec{n} = (1, 1, 1)$ 的平面 π 的方程为： $x + y + z = 0$ 。 π 与三已知直线的交点分别为

$$O(0, 0, 0), P(1, 0, -1), Q(0, -1, 1).$$

圆柱面的轴 L_0 是到这三点等距离的点的轨迹，即

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$ 。将 L_0 的方程改为标准方程 $x - 1 = y + 1 = z$ 。圆柱面的半径即为平行

直线 $x = y = z$ 和 $x - 1 = y + 1 = z$ 间的距离。 $P_0(1, -1, 0)$ 为 L_0 上的点。对圆柱面上任意一点 $S(x, y, z)$ ，有 $\frac{|\vec{n} \times \overrightarrow{P_0S}|}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{n} \times \overrightarrow{P_0O}|}{|\vec{n}|}$ ，即

$$(-y + z - 1)^2 + (x - z - 1)^2 + (-x + y + 2)^2 = 6,$$

所以，所求圆柱面的方程为：

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 3x + 3y = 0.$$

第二题：【参考解析】：(1) 的证明：记

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), M = a_{n1}F^{n-1} + a_{n-11}F^{n-2} + \dots + a_{21}F + a_{11}E.$$

要证明 $M = A$ ，只需证明 A 与 M 的各个列向量对应相等即可。若以 e_i 记第 i 个基本单位列向量。于是，只需证明：对每个 i ， $Me_i = Ae_i (= \alpha_i)$ 。

记 $\beta = (-a_n, -a_{n-1}, \dots, -a_1)^T$ ，则 $F = (e_2, e_3, \dots, e_n, \beta)$ 。注意到，

$$Fe_1 = e_2, F^2e_1 = Fe_2 = e_3, \dots,$$

$$F^{n-1}e_1 = F(F^{n-2}e_1) = Fe_{n-1} = e_n \quad (*)$$

由

$$\begin{aligned} Me_1 &= (a_{n1}F^{n-1} + a_{n-11}F^{n-2} + \dots + a_{21}F + a_{11}E)e_1 \\ &= a_{n1}F^{n-1}e_1 + a_{n-11}F^{n-2}e_1 + \dots + a_{21}Fe_1 + a_{11}Ee_1 \\ &= a_{n1}e_n + a_{n-11}e_{n-1} + \dots + a_{21}e_2 + a_{11}e_1 \\ &= \alpha_1 = Ae_1. \end{aligned}$$

知 $Me_2 = MFe_1 = FMe_1 = FAe_1 = AFe_1 = Ae_2$ 。

$$Me_3 = MF^2e_1 = F^2Me_1 = F^2Ae_1 = AF^2e_1 = Ae_3$$

.....

$$Me_n = MF^{n-1}e_1 = F^{n-1}Me_1 = F^{n-1}Ae_1 = AF^{n-1}e_1 = Ae_n$$

所以, $M = A$.

(2) 解: 由 (1), $C(F) = \text{span}\{E, F, F^2, \dots, F^{n-1}\}$,

设 $x_0E + x_1F + x_2F^2 + \dots + x_{n-1}F^{n-1} = O$, 等式两边同右乘 e_1 , 利用(*)得

$$\begin{aligned}\theta &= Oe_1 = (x_0E + x_1F + x_2F^2 + \dots + x_{n-1}F^{n-1})e_1 \\ &= x_0Ee_1 + x_1Fe_1 + x_2F^2e_1 + \dots + x_{n-1}F^{n-1}e_1 \\ &= x_0e_1 + x_1e_2 + x_2e_3 + \dots + x_{n-1}e_n.\end{aligned}$$

因 $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ 线性无关, 故

$$x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0,$$

所以, $E, F, F^2, \dots, F^{n-1}$ 线性无关.

因此, $E, F, F^2, \dots, F^{n-1}$ 是 $C(F)$ 的基, 特别地, $\dim C(F) = n$.

第三题: 【参考解析】: 假设 λ_0 是 f 的特征值, W 是相应的特征子空间, 即 $W = \{\eta \in V \mid f(\eta) = \lambda_0\eta\}$. 于是, W 在 f 下是不变的.

下面先证明, $\lambda_0 = 0$. 任取非零 $\eta \in W$, 记 m 为使得 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \dots, g^m(\eta)$ 线性相关的最小的非负整数, 于是, 当 $0 \leq i \leq m-1$ 时, $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \dots, g^i(\eta)$ 线性无关.

$0 \leq i \leq m-1$ 时, 令 $W_i = \text{span}\{\eta, g(\eta), g^2(\eta), \dots, g^{i-1}(\eta)\}$, 其中, $W_0 = \{\theta\}$.

因此, $\dim W_i = i (1 \leq i \leq m)$, 并且,

$$W_m = W_{m+1} = W_{m+2} = \dots$$

显然, $g(W_i) \subseteq W_{i+1}$, 特别地, W_m 在 g 下是不变的.

下面证明, W_m 在 f 下也是不变的.

事实上, 由 $f(\eta) = \lambda_0\eta$, 知

$$fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = \lambda_0g(\eta) + \lambda_0\eta$$

$$fg^2(\eta) = gfg(\eta) + fg(\eta)$$

$$= g(\lambda_0g(\eta) + \lambda_0\eta) + (\lambda_0g(\eta) + \lambda_0\eta)$$

$$= \lambda_0g^2(\eta) + 2\lambda_0g(\eta) + \lambda_0\eta.$$

根据

$$fg^k(\eta) = gfg^{k-1}(\eta) + fg^{k-1}(\eta)$$

$$= g(fg^{k-1})(\eta) + fg^{k-1}(\eta)$$

用归纳法不难证明, $fg^k(\eta)$ 一定可以表示成

$$\eta, g(\eta), g^2(\eta), \dots, g^k(\eta)$$

的线性组合，且表示式中 $g^k(\eta)$ 前的系数为 λ_0 .

因此， W_m 在 f 下也是不变的， f 在 W_m 上的限制在基

$$\eta, g(\eta), g^2(\eta), \dots, g^{m-1}(\eta)$$

下的矩阵是上三角矩阵，且对角线元素都是 λ_0 ，因而，这一限制的迹为 $m\lambda_0$.

由于 $fg - gf = f$ 在 W_m 上仍然成立，而 $fg - gf$ 的迹一定为零，故 $m\lambda_0 = 0$ ，即 $\lambda_0 = 0$. 任取 $\eta \in W$ ，由于

$$f(\eta) = \theta, fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = g(\theta) + f(\eta) = \theta$$

所以， $g(\eta) \in W$. 因此， W 在 g 下是不变的. 从而，在 W 中存在 g 的特征向量，这也是 f, g 的公共特征向量.

第四题：【参考解析】：(1) $\forall \varepsilon > 0$ ，将 $[a, b] K$ 等分，分点为

$$x_j = a + \frac{j(b-a)}{K}, j = 0, 1, 2, \dots, K,$$

使得 $\frac{b-a}{K} < \varepsilon$. 由于 $\{f_n(x)\}$ 在有限个点 $\{x_j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots, K$ 上收敛，因此 $\exists N$ ，
 $\forall m > n > N$ ，使得 $|f_m(x_j) - f_n(x_j)| < \varepsilon$ 对每个 $j = 0, 1, 2, \dots, K$ 成立.

于是 $\forall x \in [a, b]$ ，设 $x \in [x_j, x_{j+1}]$ ，则

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_m(x_j)| + |f_m(x_j) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_n(x)| \\ &= |f_m'(\xi)(x - x_j)| + |f_m(x_j) - f_n(x_j)| + |f_n'(\eta)(x - x_j)| \\ &< (2M+1)\varepsilon \end{aligned}$$

(2) 不一定. 令 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ ，则

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上不能保证处处可导.}$$

第五题：【参考解析】：

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 dt &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 dt + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 dt = I_1 + I_2 \\ I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 dt < n^3 \int_0^{\frac{\pi}{n}} t dt = \frac{\pi^2 n}{2}, \\ I_2 &= \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 dt < \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \left(\frac{\pi}{2t} \right)^3 dt = -\frac{\pi^3}{8} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} dt = \frac{\pi^3}{8} \left(\frac{n}{\pi} - \frac{2}{\pi} \right) < \frac{\pi^2 n}{8} \end{aligned}$$

因此 $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\pi^2 n}$ ，由此得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散.

第六题: 【参考解析】: 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \left(\cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) r d\theta = \int_0^1 dr \iint_{x^2+y^2=r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx \right) \\ &= \int_0^1 dr \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_0^1 dr \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} (x^2 y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 dr \int_0^r \rho^5 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{168} \end{aligned}$$

第七题: 【参考解析】: 因为 $f(x)$ 在 $[0, c]$ 上满足拉格朗日(Lagranger)中值定理的条件, 故存

在 $\xi_1 \in (0, c)$, 使 $f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0}$. 由于 c 在弦 AB 上, 故有

$$\frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0).$$

从而 $f'(\xi_1) = f(1) - f(0)$.

同理可证, 存在 $\xi_2 \in (c, 1)$, 使 $f'(\xi_2) = f(1) - f(0)$. 由 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, 知 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上 $f'(x)$ 满足罗尔(Rolle)定理的条件, 所以存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$, 使 $f''(\xi) = 0$.