

第十五届全国大学生数学竞赛初赛试卷参考答案
(数学 A 类, 2023 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	20	15	15	20	100
得分							

注意:

- 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
- 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
- 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 在空间中给定直线 L 及直线外定点 P . 设 M 是过 P 点且与直线 L 相切的球面的球心. 问: 所有可能的球心 M 构成何种曲面? 证明你的结论.

解答. 解: 这是一个抛物柱面. (5 分)

证明如下: 在空间中建立直角坐标系, 使得直线 L 为 x -轴, 点 P 到 L 的垂线为 z -轴, 其垂足 O 点为原点. 这时, $O = (0, 0, 0)$, $P = (0, 0, a)$ ($a > 0$), 直线 L 的方向向量为 $v = (1, 0, 0)$. 设 $M = (x, y, z)$ 是过 P 点且与直线 L 相切的球面的球心, 则球半径 PM 等于 M 到直线 L 的距离, 即:

$$PM = \frac{|\overrightarrow{OM} \times v|}{|v|}.$$

..... (10 分)

$$PM^2 = x^2 + y^2 + (z - a)^2;$$

$$\overrightarrow{OM} \times v = (x, y, z) \times (1, 0, 0) = (0, z, -y);$$

故有

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = z^2 + y^2;$$

$$z = \frac{1}{2a}(x^2 + a^2),$$

为抛物柱面. (15 分)

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $f(x, y, z) = x^2 + (y^2 + z^2)(1 - x)^3$.

(1) 计算 f 的驻点.

(2) 求 f 在 Σ 上的最小值, 其中,

Σ 是 $\{(x, y, z) \mid |x| \leq 2, y^2 + z^2 \leq 4\}$ 的边界.

(3) 求 f 在椭球 $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} \leq 1$ 上的最小值.

解答. (1)

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = 2x - 3(y^2 + z^2)(1 - x)^2, \\ f_y(x, y, z) = 2y(1 - x)^3, \\ f_z(x, y, z) = 2z(1 - x)^3. \end{cases}$$

求解 $f_x(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0, z_0) = f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$ 的点可得函数在整个空间上只有唯一的驻点 $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.

(注. 易见由上述方程的第二式可得 $x_0 = 1$ 或 $y_0 = 0$. 但 $x_0 = 1$ 与第一个式子矛盾. 因此 $x_0 = 0$, 进而又有 $y_0 = z_0 = 0$.)

.....(5 分)

(2) $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, 其中

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \mid x \in [-2, 2], y^2 + z^2 = 4\},$$

$$\Sigma_2 = \{(x, y, z) \mid x = 2, y^2 + z^2 \leq 4\},$$

$$\Sigma_3 = \{(x, y, z) \mid x = -2, y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

在 Σ_1 上,

$$f(x, y, z) = x^2 + 4(1 - x)^3 = g_1(x), \quad x \in [-2, 2].$$

作为一元函数, 考虑 g_1 在 $[-2, 2]$ 内的驻点:

$$g_1'(\xi) = 2\xi - 12(1 - \xi)^2 = 0.$$

可得: $\xi_1 = \frac{3}{2}$, $\xi_2 = \frac{2}{3}$.

我们有

$$g_1(2) = 0, \quad g_1(-2) = 112, \quad g_1\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}, \quad g_1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{27}.$$

故 f 在 Σ_1 上的最小值为 0.

(注: 以上讨论说明 $g_1(2) = 0$ 以及 $g_1(-2), g_1\left(\frac{3}{2}\right), g_1\left(\frac{2}{3}\right) \geq 0$ 即可. 或不必求驻点, 直接说明 $g_1 \geq 0$ 且 $g_1(2) = 0$.)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

在 Σ_2 上,

$$f(x, y, z) = 4 - (y^2 + z^2) = g_2(x, y) \geq 0, \quad y^2 + z^2 \leq 4.$$

在 Σ_3 上,

$$f(x, y, z) = 4 + 27(y^2 + z^2) = g_3(x, y) \geq 0, \quad y^2 + z^2 \leq 4.$$

故 f 在 Σ 上的最小值为 0.

..... (10 分)

(3) 注意到椭球 $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} \leq 1$ 完全在 Σ 围成的区域 Ω 内, 而且函数 f 在 Ω 内有唯一驻点 $(0, 0, 0)$, $f(0, 0, 0) = 0$. 因此, f 在 $\bar{\Omega}$ 上的最小值为 0. 进而 f 在该椭球上的最小值就是 0.

..... (15 分)

得分	
评阅人	

三、(本题 20 分) 设 V 是复数域 \mathbb{C} 上的 n 维线性空间, \mathbf{A} 是 V 上的一个线性变换. 证明: 存在 $\alpha \in V$ 使得 $\{\alpha, \mathbf{A}\alpha, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha\}$ 成为 V 的一组基当且仅当对于 \mathbf{A} 的任一特征值 λ , λ 的几何重数为 1.

解答. 必要性. 设存在 $\alpha \in V$ 使得 $\{\alpha, \mathbf{A}\alpha, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha\}$ 成为 V 的一组基, 显然 \mathbf{A} 在该基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & 0 & * \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & * \\ & & & 1 & * \end{pmatrix}.$$

.....(2 分)

对任意 $c \in \mathbb{C}$,

$$cI - A = \begin{pmatrix} c & * \\ -1 & c & * \\ & -1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & c & * \\ & & & -1 & * \end{pmatrix},$$

其左下角的 $n-1$ 阶子式非零, 所以 $\text{rank}(cI - A) \geq n-1$, 从而齐次线性方程组

$$(cI - A)X = 0$$

的解空间维数为 $n - \text{rank}(cI - A) \leq 1$.

.....(5 分)

又对 \mathbf{A} 的任一特征值 λ ,

$$(\lambda I - A)X = 0$$

一定有非零解, 它的解空间维数 ≥ 1 . 所以齐次线性方程组

$$(\lambda I - A)X = 0$$

的解空间维数为 1, 即 λ 的几何重数为 1.

.....(8 分)

充分性: 设 \mathbf{A} 的互不相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 代数重数分别为 d_1, d_2, \dots, d_s , 其中 $d_1 + d_2 + \dots + d_s = n$, 即 \mathbf{A} 的特征多项式为

$$f(x) = (x - \lambda_1)^{d_1}(x - \lambda_2)^{d_2} \cdots (x - \lambda_s)^{d_s}.$$

对于 $1 \leq i \leq s$, 记 $V_{\lambda_i} = \text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{d_i}$, 其中 \mathbf{I} 为恒等变换, 则 V_{λ_i} 为 \mathbf{A} -不变子空间且

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}.$$

..... (11 分)

由于 λ_i 的几何重数为 1, 故 $\mathbf{A}|_{V_{\lambda_i}}$ 的 Jordan 标准型为

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{d_i \times d_i}.$$

所以存在 $\alpha_i \in V_{\lambda_i}$ 使得 $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{d_i-1} \alpha_i \neq 0$.

..... (14 分)

令

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s,$$

则 $\{\alpha, \mathbf{A}\alpha, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha\}$ 是 V 的一组基. 若否, 则 $\alpha, \mathbf{A}\alpha, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha$ 线性相关, 从而存在次数 $\leq n-1$ 的非零多项式 $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $p(\mathbf{A})\alpha = 0$. 由于 V_{λ_i} 为 \mathbf{A} -不变子空间, 所以 $p(\mathbf{A})\alpha_i \in V_{\lambda_i}$. 由

$$0 = p(\mathbf{A})\alpha = p(\mathbf{A})\alpha_1 + p(\mathbf{A})\alpha_2 + \cdots + p(\mathbf{A})\alpha_s$$

可知 $p(\mathbf{A})\alpha_i = 0$. 由于 $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{d_i-1} \alpha_i \neq 0$, 所以 $(x - \lambda_i)^{d_i}$ 是 \mathbf{A} 的零化 α_i 的次数最低的多项式, 从而

$$(x - \lambda_i)^{d_i} \mid p(x).$$

..... (18 分)

又当 $i \neq j$ 时, $(x - \lambda_i)^{d_i}$ 与 $(x - \lambda_j)^{d_j}$ 互素, 所以

$$(x - \lambda_1)^{d_1}(x - \lambda_2)^{d_2} \cdots (x - \lambda_s)^{d_s} \mid p(x),$$

即 $f(x) \mid p(x)$, 这与 $\deg p(x) < \deg f(x)$ 且 $p(x) \neq 0$ 矛盾.

..... (20 分)

得分	
评阅人	

四、(本题 15 分) 设 $n \geq 3$ 为自然数, $\theta = \frac{2\pi}{n}$. 对任意 $1 \leq s, t \leq n$, 取 $a_{st} = \sin(s+t)\theta$, 令矩阵 $A = (a_{st})_{n \times n}$, 计算 $E + A^{2023}$ 的行列式, 其中 E 为 n 阶单位矩阵.

证明. 1) 显见, A 为实对称矩阵, 可以对角化. 对 $n \geq 3$ 且 $n \neq 4$ 时 $a_{11} = \sin \frac{4\pi}{n} \neq 0$ 恒成立, 而当 $n = 4$ 时有 $a_{12} = \sin \frac{3\pi}{2} \neq 0$, 所以 $A \neq 0$.

.....(2 分)

2) 断言: A 的最小多项式为 $x^3 - \frac{n^2}{4}x$. 事实上, 对任意 $1 \leq s, t \leq n$,

$$\sin(s+t)\theta = \frac{1}{2i} (e^{i(s+t)\theta} - e^{-i(s+t)\theta}).$$

令

$$v = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ e^{i2\theta} \\ \vdots \\ e^{in\theta} \end{pmatrix},$$

则容易得到

$$A = \frac{1}{2i}(vv^t - \overline{vv^t}) = \frac{1}{2i}(vv^t - \overline{v}v^*),$$

其中 $v^* = \overline{v}^t$. 注意到

$$v^t v = e^{2i\theta} + e^{2i2\theta} + \cdots + e^{2in\theta} = e^{2i\theta} \cdot \frac{1 - e^{2in\theta}}{1 - e^{2i\theta}} = 0,$$

和

$$v^* v = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

故有

$$A^2 = -\frac{1}{4} [(vv^t - \overline{v}v^*)(vv^t - \overline{v}v^*)] = \frac{n}{4}(vv^* + \overline{v}v^*).$$

所以

$$A^3 = A^2 A = \frac{n}{4} [(vv^* + \overline{v}v^*)(vv^t - \overline{v}v^*)] \cdot \frac{1}{2i} = \frac{n^2}{4} A.$$

由此得 A 的一个零化多项式为 $x^3 - \frac{n^2}{4}x$.

由

$$x^3 - \frac{n^2}{4}x = x \left(x + \frac{n}{2} \right) \left(x - \frac{n}{2} \right)$$

考场号: _____ 座位号: _____ 专业: _____



密封线
答题时不要超过此线



所在院校: _____ 准考证号: _____

姓名: _____

可知 A 的最小多项式 $\varphi(x)$ 只可能是下列 7 个多项式之一:

$$x, x + \frac{n}{2}, x - \frac{n}{2}, x\left(x + \frac{n}{2}\right), x\left(x - \frac{n}{2}\right), \left(x + \frac{n}{2}\right)\left(x - \frac{n}{2}\right), x^3 - \frac{n^2}{4}x.$$

显然, $\varphi(x)$ 不可能为一次多项式, 因为 $x, x + \frac{n}{2}, x - \frac{n}{2}$ 均不能零化 A (关于 x , 由 $A \neq 0$ 知 x 不能零化 A ; 对 $x + \frac{n}{2}$ 和 $x - \frac{n}{2}$, 考察 $A \pm \frac{n}{2}E$ 的 $(1, 1)$ 位置元素, 由 $\frac{n}{2} > 1$ 直接知 $A \pm \frac{n}{2}E$ 的 $(1, 1)$ 位置元素不可能为 0).

其次, $\varphi(x)$ 也不可能为二次多项式. 我们先考察多项式 $x(x + \frac{n}{2})$, 看 $A(A + \frac{n}{2}E)$ 的 (n, n) 位置元素. A^2 的 (n, n) 位置元素为

$$\frac{n}{4}(e^{in\theta} \cdot e^{-in\theta} + e^{-in\theta} \cdot e^{in\theta}) = \frac{n}{2},$$

A 的 (n, n) 位置元素为

$$\sin 2n \frac{2\pi}{n} = 0,$$

从而 $\frac{n}{2}A$ 的 (n, n) 位置元素也为 0, 这便得到 $A(A + \frac{n}{2}E)$ 的 (n, n) 位置元素为 $\frac{n}{2} \neq 0$. 故 $x(x + \frac{n}{2})$ 不能充当 $\varphi(x)$.

同理可知, $x(x - \frac{n}{2})$ 和 $x^2 - (\frac{n}{2})^2$ 也不能充当 $\varphi(x)$. 至此我们得到 A 的最小多项式 $\varphi(x)$ 为 $x^3 - \frac{n^2}{4}x$. 断言真.

..... (10 分)

3) 由于 $x^3 - \frac{n^2}{4}x = x(x + \frac{n}{2})(x - \frac{n}{2})$ 是 A 的最小多项式, 得到 A 的互不相同的特征值为 $0, \frac{n}{2}$ 和 $-\frac{n}{2}$. 再由

$$A = \frac{1}{2i}(vv^t - \bar{v}v^*)$$

可知 $\text{rank } A \leq \text{rank}(vv^t) + \text{rank}(\bar{v}v^*) \leq 2$, 因此 A 至多有两个非 0 特征值. 故 A 的 n 个特征值为

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, \frac{n}{2}, -\frac{n}{2},$$

所以 $E + A^{2023}$ 的 n 个特征值为

$$\underbrace{1, \dots, 1}_{n-2}, 1 + \left(\frac{n}{2}\right)^{2023}, 1 - \left(\frac{n}{2}\right)^{2023}.$$

由此得到

$$|E + A^{2023}| = \left(1 + \left(\frac{n}{2}\right)^{2023}\right) \left(1 - \left(\frac{n}{2}\right)^{2023}\right) = 1 - \left(\frac{n}{2}\right)^{4046}.$$

..... (15 分)

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 非空有界, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, \mathbf{c} 非零. 用 $\text{diam } E = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ 表示 E 的直径, 记 $E + \mathbf{c} = \{\mathbf{x} + \mathbf{c} \mid \mathbf{x} \in E\}$. 证明: $\text{diam } E < \text{diam } (E \cup (E + \mathbf{c}))$.

证明. (为简单起见, 对于 \mathbb{R}^n 中的点 \mathbf{x} , 简记 $\|\mathbf{x}\|$ 为 $|\mathbf{x}|$.)

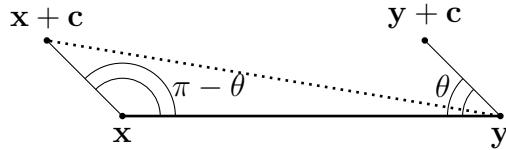
记 $\rho = \text{diam } E$. 若 $\rho = 0$, 即 E 为单点集, 结论显然成立.

下设 $\rho > 0$. 取 $\varepsilon > 0$ 使得 $\varepsilon < \rho$ 且 $\varepsilon < \frac{|\mathbf{c}|^2}{4\rho}$.

可取到 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ 使得 $a = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \rho - \varepsilon$.

..... (5 分)

记 $\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \cdot |\mathbf{c}|}$.



若 $\cos \theta \geq 0$, 则

$$\begin{aligned} |(\mathbf{x} + \mathbf{c}) - \mathbf{y}| &= \sqrt{a^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2a|\mathbf{c}| \cos \theta} \geq \sqrt{a^2 + |\mathbf{c}|^2} \\ &\geq \sqrt{(\rho - \varepsilon)^2 + |\mathbf{c}|^2} = \sqrt{\rho^2 - 2\rho\varepsilon + \varepsilon^2 + |\mathbf{c}|^2} > \sqrt{\rho^2 + \frac{|\mathbf{c}|^2}{2}} > \rho. \end{aligned}$$

由此即得 $\text{diam } E < \text{diam } (E \cup (E + \mathbf{c}))$.

同理, 若 $\cos \theta < 0$, 则

$$|(\mathbf{y} + \mathbf{c}) - \mathbf{x}| > \rho.$$

同样得到结论.

..... (15 分)

得分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 设 $a = \sqrt[3]{3}$, $x_1 = a$, $x_{n+1} = a^{x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$). 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 极限存在, 但不是 3.

证明. 易证数列单调上升, 有上界 3, 从而数列极限存在.

具体地, 由于 $a = x_1 = \sqrt[3]{3} > 1$, $x_2 = a^{x_1} > a = x_1$. 一般地, 归纳可得 $x_{n+1} = a^{x_n} > a^{x_{n-1}} = x_n$ ($n \geq 2$).

另一方面, 注意到 $a^3 = 3$, 归纳可得 $x_n \leq 3$ ($n \geq 1$).

..... (5 分)

下证 $\{x_n\}$ 的极限不为 3.

法 I. 我们来归纳地证明 $1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < \frac{5}{2}$.

具体地, $1 < x_1 = \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\frac{24}{8}} < \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$.

假设对某个 $n \geq 1$, $1 < x_n < \frac{5}{2}$ 成立, 那么

$$x_{n+1} = a^{x_n} < \left(\sqrt[3]{3}\right)^{\frac{5}{2}} = \sqrt[6]{243}$$

而另一方面

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{2}\right)^6 &= \left(\frac{25}{4}\right)^3 = \left(6 + \frac{1}{4}\right)^3 \\ &= 216 + 3 \cdot 6^2 \frac{1}{4} + \dots = 243 + \dots > 243 \end{aligned}$$

其中 ... 显然是为正数, 故得证 $\sqrt[6]{243} < \frac{5}{2}$.

由于所有的项 x_n 都不超过 $\frac{5}{2}$, 所以数列的极限不可能为 3.

..... (20 分)

法 II. 我们来找 $\{x_n\}$ 的上界 L . 为此, 我们需要关系式 $3^{\frac{L}{3}} \leq L$. 即 $3^{\frac{1}{3}} \leq L^{\frac{1}{L}}$. 考虑 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$). 我们有

$$f'(x) = x^x (\ln x - 1), \quad x > 0.$$

可见 f 在 $(0, e]$ 上严格单减, 在 $[e, +\infty)$ 上严格单增. 我们来归纳地证明 $x_n < e$.

易见 $x_1 = 3^{\frac{1}{3}} < e^{\frac{1}{e}} < e$.

若对某个 $n \geq 1$, $x_n < e$, 则 $x_{n+1} = 3^{\frac{x_n}{3}} < e^{\frac{x_n}{e}} < e$.

因此, e 是 $\{x_n\}$ 的上界. 即数列 $\{x_n\}$ 的极限不可能为 3.

法 III. 设 $\{x_n\}$ 的极限为 L . 考察前面关于 $\{x_n\}$ 单调有界的证明, 事实上可以得到数列 $\{x_n\}$ 严格单增, 进而 $x_n < L$ ($\forall n \geq 1$). 记 $f(x) = a^x$, 则 $f'(3) = a^3 \ln a = \ln 3 > 1$.

若 $L = 3$, 由 f 的连续可导性, 有 $\delta > 0$ 使得当 $x \in (3 - \delta, 3 + \delta)$ 时, $f'(x) > 1$. 我们有 $N \geq 1$ 使得当 $n \geq N$ 时, $3 - \delta < x_n < 3$. 此时, 由中值定理, 有 $\xi_n \in (x_n, L)$, 使得

$$|x_{n+1} - 3| = f(3) - f(x_n) = f'(\xi_n)(3 - x_n) \geq 3 - x_n, \quad n \geq N.$$

特别, 归纳可得

$$|x_n - 3| \geq 3 - x_N > 0, \quad \forall n \geq N.$$

与 $\{x_n\}$ 收敛于 3 矛盾. 因此, $\{x_n\}$ 的极限不可能是 3.

..... (20 分)