

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

第十一届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案 (数学类高年级组, 2021 年 4 月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四				总分
满分	20	15	15	20	10	10	10	100
得分								

注意:

1. 第一至第四大题是必答题, 再从第五至第十大题中任选 3 题, 题号要填入上面的表中(多选无效).
2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 20 分)填空题(每小题 5 分)

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=n}^{3n-1} k \right)^{\frac{1}{2n}} \sin \frac{1}{n} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{e}}}.$

2. 已知 f 在区间 $(-1, 3)$ 内有二阶连续导数, $f(0) = 12, f(2) = 2f'(2) + 8$, 则 $\int_0^1 xf''(2x) dx = \underline{\underline{1}}.$
3. 在三维空间的直角坐标系中, 方程 $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz = 1$ 表示的二次曲面类型是 椭圆柱面.
4. 在矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的奇异值分解 $A = U \Lambda V$ 中(其中 U, V 为正交方阵, Λ 为对角阵), $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 考虑单叶双曲面 $S : x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

1. 证明: S 上同一族直母线中任意两条不同的直母线是异面直线;
2. 设 S 上同一族直母线中的两条直母线分别经过 $M_1(1, 1, 1)$ 与 $M_2(2, 2, 1)$ 两点. 求这两条直母线的公垂线方程以及这两条直母线之间的距离.

证明: 1. 将曲面方程改写为

$$x^2 - y^2 = 1 - z^2,$$

从而有

$$(x+y)(x-y) = (1+z)(1-z) \quad (1)$$

现在引进不全为零的参数 λ, μ , 以及不全为零的参数 u, v , 我们得到两族直母线方程

$$\begin{cases} \lambda(x+y) = \mu(1+z) \\ \mu(x-y) = \lambda(1-z) \end{cases} \quad (2)$$

以及

$$\begin{cases} u(x+y) = v(1-z) \\ v(x-y) = u(1+z) \end{cases} \quad (3)$$

..... (2 分)

首先以第一族直母线 (2) 为例证明两条不同的直母线是异面直线. 取 (2) 中两条直母线 L_1 与 L_2

$$L_1 : \begin{cases} \lambda_1(x+y) = \mu_1(1+z) \\ \mu_1(x-y) = \lambda_1(1-z) \end{cases} \quad (4)$$

以及

$$L_2 : \begin{cases} \lambda_2(x+y) = \mu_2(1+z) \\ \mu_2(x-y) = \lambda_2(1-z) \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\lambda_1\mu_2 \neq \lambda_2\mu_1$.

考虑线性方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 x + \lambda_1 y - \mu_1 z - \mu_1 = 0 \\ \mu_1 x - \mu_1 y + \lambda_1 z - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 x + \lambda_2 y - \mu_2 z - \mu_2 = 0 \\ \mu_2 x - \mu_2 y + \lambda_2 z - \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

设 (6) 的系数矩阵为 A , 经计算可得

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 & -\mu_1 & -\mu_1 \\ \mu_1 & -\mu_1 & \lambda_1 & -\lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & -\mu_2 & -\mu_2 \\ \mu_2 & -\mu_2 & \lambda_2 & -\lambda_2 \end{vmatrix} = 4(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)^2 \neq 0$$

所以 L_1 与 L_2 为异面直线.(5 分)

对于第二族直母线 (3), 设两条直母线 L'_1, L'_2

$$L'_1 : \begin{cases} u_1(x+y) = v_1(1-z) \\ v_1(x-y) = u_1(1+z) \end{cases} \quad (7)$$

以及

$$L'_2 : \begin{cases} u_2(x+y) = v_2(1-z) \\ v_2(x-y) = u_2(1+z) \end{cases} \quad (8)$$

其中 $u_1v_2 \neq u_2v_1$.

考虑方程组

$$\begin{cases} u_1x + u_1y + v_1z - v_1 = 0 \\ v_1x - v_1y - u_1z - u_1 = 0 \\ u_2x + u_2y + v_2z - v_2 = 0 \\ v_2x - v_2y - u_2z - u_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

设方程组 (9) 的系数矩阵为 B , 经计算得到

$$\det(B) = \begin{vmatrix} u_1 & u_1 & v_1 & -v_1 \\ v_1 & -v_1 & -u_1 & -u_1 \\ u_2 & u_2 & v_2 & -v_2 \\ v_2 & -v_2 & -u_2 & -u_2 \end{vmatrix} = -4(u_1v_2 - u_2v_1)^2 \neq 0$$

所以 L'_1 与 L'_2 为异面直线. (8 分)

2. 将 $M_1(1, 1, 1)$ 点代入 (2) 中可得 $\mu : \lambda = 1 : 1$, 获得直母线 L_3 的方程

$$L_3 : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \quad (10)$$

将 $M_2(2, 2, 1)$ 点代入 (2) 中可得 $\mu : \lambda = 2 : 1$, 获得直母线 L_4 的方程

$$L_4 : \begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases} \quad (11)$$

因为 $(1, 1, -1) \times (1, -1, 1) = (0, -2, -2)$, 取 L_3 的方向 $\vec{n}_3 = (0, 1, 1)$. 因为 $(1, 1, -2) \times (2, -2, 1) = (-3, -5, -4)$, 取 L_4 的方向 $\vec{n}_4 = (3, 5, 4)$. L_3, L_4 的公垂线 L 的方向为 $\vec{n} = \vec{n}_3 \times \vec{n}_4 = (-1, 3, -3)$. 设 $M(x, y, z)$ 为 L 上的任意一点, 则 L 的方程满足

$$\begin{cases} (\overrightarrow{M_1M}, \vec{n}_3, \vec{n}) = 0 \\ (\overrightarrow{M_2M}, \vec{n}_4, \vec{n}) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{M_1M}, \vec{n}_3, \vec{n}) &= \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ (\overrightarrow{M_2M}, \vec{n}_4, \vec{n}) &= \begin{vmatrix} x - 2 & y - 2 & z - 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

经化简得到公垂线 L 的方程

$$\begin{cases} 6x + y - z = 6 \\ 27x - 5y - 14z = 30 \end{cases}$$

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

.....(12分)

L_3, L_4 之间的距离满足

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{19}} = \frac{2}{19}\sqrt{19}$$

.....(15分)

注. 经计算可得公垂线与两条直母线 L_3, L_4 的交点分别为 $\frac{1}{19}(19, -3, -3)$ 和 $\frac{1}{19}(17, 3, -9)$, 这两点间的距离为 $\frac{2}{19}\sqrt{19}$. 因此, 也可以通过计算两点间的距离得到异面直线之间的距离.

将 $M_1(1, 1, 1), M_2(2, 2, 1)$ 分别代入第二族直母线族 (3) 中可得到同一条直母线

$$\begin{cases} 1 - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

即 M_1, M_2 位于同一条直母线上. 因此, 只需考虑 L_3, L_4 的情形. □

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 V 是有限维欧氏空间, V_1, V_2 是 V 的非平凡子空间且 $V = V_1 \oplus V_2$. 设 p_1, p_2 分别是 V 到 V_1, V_2 的正交投影, $\varphi = p_1 + p_2$, 用 $\det \varphi$ 表示线性变换 φ 的行列式. 证明: $0 < \det \varphi \leq 1$ 且 $\det \varphi = 1$ 的充要条件是 V_1 与 V_2 正交.

证明: 设 $\dim V_1 = m, \dim V_2 = n, m, n > 0$. 分别取 V_1 和 V_2 的各一组标准正交基, 它们合起来是 V 的一组基, φ 在这组基下的矩阵形如

$$A = \begin{pmatrix} I_m & B \\ C & I_n \end{pmatrix},$$

其中 B 和 C 分别是 $p_1|_{V_2} : V_2 \rightarrow V_1$ 和 $p_2|_{V_1} : V_1 \rightarrow V_2$ 的矩阵. (3 分)

对于 $v_1 \in V_1$ 和 $v_2 \in V_2, v_1 - p_2 v_1 \in V_2^\perp$, 故 $\langle p_2 v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, 同理 $\langle v_1, p_1 v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$. 由 $\langle p_2 v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, p_1 v_2 \rangle$ 可得 $C = B^T$. 从而 $CB = B^T B$ 为半正定矩阵, 它就是 $p_2 p_1|_{V_2} : V_2 \rightarrow V_2$ 的矩阵. (6 分)

设 λ 为 $p_2 p_1|_{V_2}$ 的一个特征值, $v_2 \in V_2$ 是相应的特征向量, 则 $\lambda \geq 0$ 且由于 $v_2 \notin V_1$, 我们有 $\|p_1 v_2\| < \|v_2\|$, 所以

$$0 \leq \lambda \|v_2\|^2 = \langle p_2 p_1 v_2, v_2 \rangle = \langle p_1 v_2, p_1 v_2 \rangle = \|p_1 v_2\|^2 < \|v_2\|^2,$$

故 $0 \leq \lambda < 1$ (9 分)

由于 φ 在 V 的一组基下的矩阵为 A , 所以

$$\det \varphi = \det A = \det \begin{pmatrix} I_m & B \\ C & I_n \end{pmatrix} = \det (I_n - CB) = \prod_{\lambda} (1 - \lambda),$$

这里 λ 取遍矩阵 CB 的所有特征值 (记重数). 由于 CB 的特征值即 $p_2 p_1|_{V_2}$ 的特征值, 故对 CB 的每个特征值 λ 有 $0 \leq \lambda < 1$, 从而 $0 < \det \varphi \leq 1$ (12 分)

特别地, $\det \varphi = 1$ 当且仅当对 CB 的每个特征值 λ , 均有 $\lambda = 0$, 这也等价于 $CB = B^T B = 0$, 即 $B = C = 0$. 所以 $\det \varphi = 1$ 的充要条件是 V_1 与 V_2 正交.

.... (15 分)

考场号: _____



专业: _____

所在院校: _____



准考证号: _____

姓名: _____



得分	
评阅人	

四、(本题 20 分) 证明:

1. 证明: 函数方程 $x^3 - 3x = t$ 存在三个在闭区间 $[-2, 2]$ 上连续, 在开区间 $(-2, 2)$ 内连续可微的解 $x = \varphi_1(t)$, $x = \varphi_2(t)$, $x = \varphi_3(t)$ 满足:

$$\varphi_1(-t) = -\varphi_3(t), \quad \varphi_2(-t) = -\varphi_2(t), \quad |t| \leq 2.$$

2. 若 f 是 $[-2, 2]$ 上的连续偶函数, 证明: $\int_1^2 f(x^3 - 3x) dx = \int_0^1 f(x^3 - 3x) dx$.

证明: 1. 记 $g(x) = x^3 - 3x$, 那么 g 是奇函数, 且 $g'(x) = 3(x^2 - 1)$. 于是 g 具有如下性质:

(1) 在 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$ 上严格单调上升, 在 $[-1, 1]$ 上严格单调下降.

(2) $x = -1$ 是极大值点, 极大值为 2; $x = 1$ 是极小值点, 极小值为 -2.

..... (4 分)

(3) 记

$$g_1 = g|_{[-2, -1]}, \quad g_2 = g|_{[-1, 1]}, \quad g_3 = g|_{[1, 2]}.$$

根据以上性质, g_1, g_2, g_3 分别在其定义的闭区间上严格单调, 且值域均为 $[-2, 2]$. 因此, 依次有反函数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, 以 $[-2, 2]$ 为定义域, 依次以 $[-2, -1], [-1, 1], [1, 2]$ 为值域.

..... (7 分)

由反函数的连续性得 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 均为 $[-2, 2]$ 上的连续函数. 而 g_1, g_2, g_3 依次在 $(-2, -1), (-1, 1), (1, 2)$ 内连续可导, 且导数不等于零. 因此, 它们的反函数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 在 $(-2, 2)$ 内连续可微. (10 分)

另一方面, 注意到 g 为奇函数, 以及 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 的值域, g_1, g_2, g_3 的定义域, 我们有

$$-t = -g_3(\varphi_3(t)) = -g(\varphi_3(t)) = g(-\varphi_3(t)) = g_1(-\varphi_3(t)), \quad t \in [-2, 2].$$

因此

$$\varphi_1(-t) = -\varphi_3(t), \quad t \in [-2, 2].$$

同理,

$$-t = -g_2(\varphi_2(t)) = -g(\varphi_2(t)) = g(-\varphi_2(t)) = g_2(-\varphi_2(t)), \quad t \in [-2, 2].$$

从而

$$\varphi_2(-t) = -\varphi_2(t), \quad t \in [-2, 2].$$

.....(14 分)

2. 根据韦达定理, 我们有

$$\varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t) = 0, \quad \forall t \in [-2, 2].$$

从而

$$\varphi'_1(t) + \varphi'_2(t) + \varphi'_3(t) = 0, \quad \forall t \in (-2, 2).$$

.....(17 分)

这样结合 f 为连续偶函数得到

$$\begin{aligned} & 2 \int_1^2 f(x^3 - 3x) dx - 2 \int_0^1 f(x^3 - 3x) dx \\ = & \int_{-2}^{-1} f(x^3 - 3x) dx - \int_{-1}^1 f(x^3 - 3x) dx + \int_1^2 f(x^3 - 3x) dx \\ = & \int_{-2}^2 f(t)\varphi'_1(t) dt + \int_{-2}^2 f(t)\varphi'_2(t) dt + \int_{-2}^2 f(t)\varphi'_3(t) dt = 0. \end{aligned}$$

从而结论成立.(20 分)

□

得分	
评阅人	

五、(本题 10 分) 设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是 \mathcal{L} -可测集, $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 是 E 上一致有界可测函数列, 若 $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \int_E \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x) \right|^2 dm < \infty$, 则 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x) = 0$, \mathcal{L} -a.e., $x \in E$.

证明: 对 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ 和 $N \geq 1$, 设

$$A_N(\varepsilon) = \left\{ x \in E : \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| \geq \varepsilon \right\}.$$

由于

$$\int_E \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x) \right|^2 dm \geq \varepsilon^2 \cdot m(A_N(\varepsilon)).$$

由题设有 $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{m(A_N(\varepsilon))}{N} < +\infty$ (2 分)

设

$$N_1 = 1, N_{k+1} = \left[\frac{N_k}{1 - \varepsilon} \right] + 1, \quad \forall k \geq 1 \quad (1)$$

又设 m_k 是满足 $N_k \leq m_k < N_{k+1}$ 的正整数, 且 $\frac{m(A_{m_k}(\varepsilon))}{m_k} = \min_{N_k \leq N < N_{k+1}} \frac{m(A_N(\varepsilon))}{N}$.

于是

$$\sum_{N_k \leq N < N_{k+1}} \frac{m(A_N(\varepsilon))}{N} \geq (N_{k+1} - N_k) \frac{m(A_{m_k}(\varepsilon))}{m_k} \geq \varepsilon \cdot m(A_{m_k}(\varepsilon)).$$

从而, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_{m_k}(\varepsilon)) < +\infty. \quad (2)$$

令

$$A(\varepsilon) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_{m_k}(\varepsilon) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_{m_k}(\varepsilon) \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_{m_k}(\varepsilon), \forall N \geq 1,$$

$$\Rightarrow m(A(\varepsilon)) \leq \sum_{k=N}^{\infty} m(A_{m_k}(\varepsilon)) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} m(A(\varepsilon)) = 0.$$

即对 \mathcal{L} -a.e., $x \in E$ 及充分大的 k , 有

$$\left| \frac{1}{m_k} \sum_{n=1}^{m_k} f_n(x) \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

..... (7 分)

又 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 E 上一致有界, 即 $\exists c > 0, \forall x \in E, \forall n \geq 1, |f_n(x)| \leq c. \forall x \in E, N \geq 1$, 设 k 是唯一满足 $N_k \leq N < N_{k+1}$ 的正整数(其中 N_k 由 (1) 确定).

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x) - \frac{1}{m_k} \sum_{n=1}^{m_k} f_n(x) \right| &= \left| \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N f_n(x) - \sum_{n=1}^{m_k} f_n(x) \right) + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{m_k} \right) \sum_{n=1}^{m_k} f_n(x) \right| \\ &\leq 2c \frac{N_{k+1} - N_k}{N_k} \leq 2c \frac{1}{N_k} \left(\frac{N_k}{1-\varepsilon} + 1 - N_k \right) = \frac{2c\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{2c}{N_k} \end{aligned}$$

当 N 充分大时, 当然有 k 充分大, 此时 $\frac{2c\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{2c}{N_k} \leq 5c\varepsilon$ 及 (3), 即对 $\mathcal{L}-a.e., x \in E$, 有

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| < (1 + 5c)\varepsilon, \text{ 故}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x) = 0, \quad \mathcal{L}-a.e., x \in E.$$

..... (10 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

得分	
评阅人	

六、(本题 10 分) 设 $f(z)$ 在 $|z| \leq R$ ($R > 0$) 内解析且满足 $|f(z)| \leq M$ ($M > 0$), $f(0) \neq 0$. 证明: $f(z)$ 在圆 $|z| \leq R/3$ 内的零点个数(零点的重数计算在内)不超过 $\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{M}{|f(0)|}$.

证明: 用 z_i ($1 \leq i \leq n$) 表示 $f(z)$ 在 $|z| \leq R/3$ 内的零点, 令

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^n (1 - \frac{z}{z_i})}.$$

..... (3 分)

则 $g(z)$ 在 $|z| \leq R$ 内解析. 因为在 $|z| = R$ 上, 对 $i = 1, 2, \dots, n$ 都有

$$\left| \frac{z}{z_i} \right| \geq 3,$$

于是在 $|z| = R$ 上,

$$|g(Re^{i\theta})| \leq \frac{M}{\prod_{i=1}^n (3-1)} = 2^{-n}M.$$

从而在 $|z| < R$ 内, 有

$$|g(z)| \leq 2^{-n}M.$$

..... (8 分)

特别地

$$|g(0)| \leq 2^{-n}M.$$

又 $g(0) = f(0)$, 所以 $|f(0)| \leq 2^{-n}M$, 即

$$2^n |f(0)| \leq M.$$

对上式两边取对数, 得

$$n \leq \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{M}{|f(0)|}.$$

..... (10 分)

□

得分	
评阅人	

七、(本题 10 分) 证明: 180 阶群不是单群.

证明: 对于素数 p , 用 $n_p(G)$ 表示有限群 G 的 Sylow p -子群个数.
反证, 设 G 为 180 阶单群, 由 $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ 和 Sylow 定理有 $n_3(G) > 1$, $n_3(G) \mid 20$ 且 $n_3(G) \equiv 1 \pmod{3}$, 故 $n_3(G) = 4$ 或 $n_3(G) = 10$.

若 $n_3(G) = 4$, 考虑 G 在它的 Sylow 3-子群集合上的共轭作用, 由此得到 G 到对称群 S_4 的一个同态, 由 G 为单群知这个同态的核只含有单位元, 即此同态为单同态, 从而 $180 = |G| \leq |S_4| = 24$, 矛盾, 故 $n_3(G) = 10$ (3 分)

我们断言 G 的任意两个不同的 Sylow 3-子群的交平凡. 若否, 设有 G 的两个不同的 Sylow 3-子群 S, T 使得 $D = S \cap T \neq \{e\}$. 由于 S 和 T 都是 9 阶群, 它们为交换群, 从而 D 为 3 阶群且 $D \trianglelefteq S, T$. 记 $N = N_G(D) = \{g \in G \mid D^g = D\}$ 为 D 在 G 中的正规化子, 则有 $S, T \leq N$, 这样 S 和 T 都是群 N 的 Sylow 3-子群, 从而 N 的 Sylow 3-子群个数 $n_3(N) > 1$. 依然由 Sylow 定理有 $n_3(N) \mid [N : S]$ (这里 $[N : S]$ 表示 S 在 N 中的指数) 和 $n_3(N) \equiv 1 \pmod{3}$, 故 $n_3(N) \geq 4$ 且与 3 互素. 由 $n_3(N) \mid |N|$ 和 $|S| \mid |N|$, 我们有 $|N| \geq 36$, 进而 $[G : N] \leq 5$. 考虑 G 在 N 的左陪集集合上的左乘作用, 得到 G 同构于 $S_{[G:N]}$ 的一个子群, 但是 $|G| = 180 > 5! \geq |S_{[G:N]}|$, 矛盾.

..... (5 分)

下面再看 G 的 Sylow 5-子群, 由 $n_5(G) > 1$, $n_5(G) \mid 36$ 和 $n_5(G) \equiv 1 \pmod{5}$ 得到 $n_5(G) = 6$ 或者 $n_5(G) = 36$. 由于 G 的 Sylow 5-子群为 5 阶群, 故 G 的任两个不同的 Sylow 5-子群的交平凡. 若 $n_5(G) = 36$, 则 G 的 10 个 Sylow 3-子群和 36 个 Sylow 5-子群至少包含 $10(9 - 1) + 36(5 - 1) + 1 = 225 > 180$ 个元素, 矛盾. 故 $n_5(G) = 6$.

..... (7 分)

考虑 G 在它的 6 个 Sylow 5-子群集合上的共轭作用, 类似于前面的讨论, 我们得到一个 G 到对称群 S_6 的单同态, 即 G 同构于 S_6 的一个子群, 不妨设 $G \leq S_6$. 若 G 中有奇置换, 则

$$1 < [G : G \cap A_6] = [GA_6 : A_6] \leq [S_6 : A_6] = 2,$$

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

即 $G \cap A_6$ 是 G 的指数为 2 的子群, 从而 $G \cap A_6$ 是 G 的非平凡正规子群, 与 G 为单群矛盾, 所以 $G \leq A_6$. 又由

$$[A_6 : G] = |A_6|/|G| = 360/180 = 2$$

得到 $G \trianglelefteq A_6$, 与 A_6 为单群矛盾. (10 分)

得分	
评阅人	

八、(本题 10 分) 设 $S : r = r(u, v)$ 为 \mathbb{R}^3 中的光滑曲面, 其第一基本形式为 $(ds)^2 = E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2$, 其中 (u, v) 为曲面 S 的参数, $r_u = \frac{\partial r}{\partial u}$, $r_v = \frac{\partial r}{\partial v}$, $E = r_u \cdot r_u$, $F = r_u \cdot r_v$, $G = r_v \cdot r_v$. 证明:

1. 存在新的参数 (u_1, v_1) , 使得 S 的第一基本形式为 $(ds)^2 = h(u_1, v_1)[(du_1)^2 + (dv_1)^2]$, 其中 $h > 0$ 为光滑函数.
2. 如果曲面 S 的第一基本形式满足 $(ds)^2 = h(u, v)[(du)^2 + (dv)^2]$, 则其高斯曲率 K 可以表示为 $K = -\frac{1}{2h}\Delta \log h$, 其中 $h > 0$ 为光滑函数, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ 表示拉普拉斯算子.

证明: 1. 曲面 S 的第一基本形式满足

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2 \\ &= \frac{1}{E} \left[Edu + Fdv + \sqrt{F^2 - EG}dv \right] \left[Edu + Fdv - \sqrt{F^2 - EG}dv \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

令 $l = EG - F^2$, 则有 $\sqrt{F^2 - EG} = i\sqrt{l}$, $i^2 = -1$. 于是

$$Edu + Fdv \pm \sqrt{F^2 - EG}dv = Edu + Fdv \pm i\sqrt{l}dv$$

由常微分方程理论可知, 存在一个非零(复的)积分因子 λ , 使得 $\lambda(Edu + Fdv + i\sqrt{l}dv)$ 为某个(复的)函数 $\mu = u_1 + iv_1$ 的全微分, 即有

$$\lambda(Edu + Fdv + i\sqrt{l}dv) = d\mu = du_1 + idv_1 \quad (2)$$

对方程(2)的两边取共轭, 得到

$$\bar{\lambda}(Edu + Fdv - i\sqrt{l}dv) = \overline{d\mu} = du_1 - idv_1 \quad (3)$$

将(2), (3)代入(1), 得到

$$(ds)^2 = h(u_1, v_1)[(du_1)^2 + (dv_1)^2] \quad (4)$$

其中, $h(u_1, v_1) = \frac{1}{E|\lambda|^2}$ (4分)

另外, 令 $\lambda = p + iq$, p, q 均为实数. 由方程(2)得到

$$(p + iq)(Edu + Fdv + i\sqrt{l}dv) = du_1 + idv_1 \quad (5)$$

由方程(5)可得

$$\begin{cases} du_1 = p(Edu + Fdv) - q\sqrt{l}dv \\ dv_1 = q(Edu + Fdv) + p\sqrt{l}dv \end{cases} \quad (6)$$

由方程组(6), 该变换的雅可比行列式满足

$$\frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} = (p^2 + q^2)E\sqrt{l} > 0$$

于是 (u_1, v_1) 是一组新的参数. (5分)

2. 证法一: 对于曲面 $S : r = r(u, v)$, $(ds)^2 = h(u, v)[(du)^2 + (dv)^2]$. 注意到 $r_u \cdot r_u = E = G = r_v \cdot r_v = h(u, v)$, $F = r_u \cdot r_v = r_v \cdot r_u = 0$, 于是有 $r_{uu} \cdot r_v + r_u \cdot r_{uv} = 0$, $r_{uv} \cdot r_v + r_u \cdot r_{vv} = 0$. 将 r_u, r_v 单位化, 定义

$$e_1 = \frac{r_u}{|r_u|} = \frac{r_u}{\sqrt{E}} = \frac{r_u}{\sqrt{h}}, e_2 = \frac{r_v}{|r_v|} = \frac{r_v}{\sqrt{G}} = \frac{r_v}{\sqrt{h}}, n = r_u \times r_v \quad (7)$$

于是, e_1, e_2, n 构成 \mathbb{R}^3 的标准正交基. 因此 r_{uu}, r_{uv}, r_{vv} 可由该基表示. 例如, 设

$$r_{uu} = ae_1 + be_2 + cn \quad (8)$$

可以获得

$$a = r_{uu} \cdot e_1 = \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial u}, b = r_{uu} \cdot e_2 = -\frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial v}, c = r_{uu} \cdot n = L$$

即得到

$$r_{uu} = \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial u} e_1 - \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial v} e_2 + Ln \quad (9)$$

类似地, 可以求得

$$r_{uv} = \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial v} e_1 + \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial u} e_2 + Mn \quad (10)$$

$$r_{vv} = -\frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial u} e_1 + \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial v} e_2 + Nn \quad (11)$$

r_{uu}, r_{uv}, r_{vv} 在上述标准正交基下的坐标表示为

$$\begin{cases} r_{uu} = \left(\frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial v}, L \right) \\ r_{uv} = \left(\frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial v}, \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial u}, M \right) \\ r_{vv} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial u}, \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial v}, N \right) \end{cases} \quad (12)$$

其中, $M = r_{uv} \cdot n$, $N = r_{vv} \cdot n$.

注意到 $\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial u} = r_{vu} \cdot r_v$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} &= r_{uu} \cdot r_v + r_{vu} \cdot r_{vv} \\ &= \frac{\partial}{\partial v} (r_{uu} \cdot r_v) - r_{uu} \cdot r_{vv} + r_{vu} \cdot r_{vv} \end{aligned} \quad (13)$$

利用(8)-(12), 得到

$$r_{uu} \cdot r_v = -\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial v} (r_{uu} \cdot r_v) = -\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial v^2} \quad (14)$$

$$r_{uu} \cdot r_{vv} = -\frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)^2 \right] + LN, \quad r_{vu} \cdot r_{vv} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)^2 \right] + M^2 \quad (15)$$

将 (14), (15) 代入 (13) 得到

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + \frac{1}{2h} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)^2 \right] + M^2 - LN$$

或者

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta h &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \\ &= \frac{1}{2h} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)^2 \right] + M^2 - LN \end{aligned} \quad (16)$$

注意到

$$\Delta \log h = -\frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)^2 \right] + \frac{1}{h} \Delta h \quad (17)$$

结合(16)与(17), 由高斯曲率满足的公式, 得到

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{2h} \Delta \log h \quad \dots \dots \dots \quad (10 \text{ 分})$$

证法二: 当曲面 S 的第一基本形式满足 $(ds)^2 = E(du)^2 + G(dv)^2$ 时, 可以看出 $F = 0$. 根据曲率张量的定义可以证明

$$R_{1212} = \sqrt{EG} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}{\sqrt{G}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}}{\sqrt{E}} \right) \right] \quad (18)$$

由 (18) 以及高斯曲率的定义, 得到

$$K = -\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{R_{1212}}{EG - F^2} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}{\sqrt{G}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}}{\sqrt{E}} \right) \right] \quad (19)$$

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

其中 $g_{11} = E, g_{12} = F, g_{22} = G$. 既然 $E = G = h, F = 0$, 经计算可得

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}{\sqrt{G}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}}{\sqrt{E}} \right) = \frac{1}{2} \Delta \log h \quad (20)$$

将(20)代入(19),得到

$$K = -\frac{1}{2h}\Delta \log h$$

..... (10分)

□

得分	
评阅人	

九、(本题 10 分) 设 $\{X_i\}$ 是独立随机变量序列.

1. 若 $\{X_i\}$ 服从大数定律且满足中心极限定理, 即

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \xrightarrow{P} 0 \text{ 和 } \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)^2}{\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) = 0;$$

2. 若 $\{X_i\}$ 同分布且满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} nP(|X_1| \geq n) = 0$, 则 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu_n$ 依概率收敛于 0, 即 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu_n \xrightarrow{P} 0$, 其中 $\mu_n = E[X_1 I(|X_1| \leq n)]$, $I(A)$ 表示事件 A 的示性函数.

证明: 1. 由于 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \xrightarrow{P} 0$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0.$$

于是

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)\right| \geq \varepsilon\right) = 1 - P\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)\right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)}} < \frac{n\varepsilon}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)}}\right) \rightarrow 0.$$

利用 $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$ 得到 $\frac{n\varepsilon}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)}} \rightarrow \infty$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) = 0.$$

..... (4 分)

2. 记 $Y_{ni} = X_i I(|X_i| \leq n)$. 则

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_{ni} - \mu_n) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i I(|X_i| > n).$$

对任意 $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i I(|X_i| > n)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{i=1}^n P(|X_i| > n) = nP(|X_1| > n) \rightarrow 0.$$

所以

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i I(|X_i| > n) \xrightarrow{P} 0.$$

..... (6 分)

于是要证 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu_n \xrightarrow{P} 0$, 只需证明 $P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_{ni} - \mu_n)\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0$. 事实上

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_{ni} - \mu_n)\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_{ni} - EY_{ni})\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}(Y_{n1})}{n\varepsilon^2} \leq \frac{EY_{n1}^2}{n\varepsilon^2}.$$

..... (7 分)

【方法一】应用分步积分法, 得

$$\begin{aligned} \frac{EY_{n1}^2}{n} &= \frac{1}{n} E[X_1^2 I(|X_1| \leq n)] = \frac{1}{n} \int_0^n x^2 dP(|X_1| \leq x) = -\frac{1}{n} \int_0^n x^2 dP(|X_1| > x) \\ &= \frac{2}{n} \int_0^n x P(|X_1| > x) dx - nP(|X_1| > n) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k x P(|X_1| > x) dx - nP(|X_1| > n) \\ &\leq \frac{2}{n} \left(1 + \sum_{k=2}^n k P(|X_1| > k/2)\right) - nP(|X_1| > n). \end{aligned}$$

由于 $nP(|X_1| > n) \rightarrow 0$, 所以存在 N , 当 $k > N$ 时, $k P(|X_1| > k/2) < \varepsilon$, 于是当 n 较大时

$$\frac{1}{n} \left(1 + \sum_{k=2}^n k P(|X_1| > k/2)\right) = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{k=2}^N k P(|X_1| > k/2) + \sum_{k=N+1}^n k P(|X_1| > k/2)\right) < 2\varepsilon.$$

则 $\frac{EY_{n1}^2}{n} \rightarrow 0$, 故 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu_n \xrightarrow{P} 0$.

..... (10 分)

【方法二】

$$\begin{aligned}
\frac{EY_{n1}^2}{n} &= \frac{1}{n} E[X_1^2 I(|X_1| \leq n)] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E[X_1^2 I(j-1 < |X_1| \leq j)] \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j^2 P(j-1 < |X_1| \leq j) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n P(j-1 < |X_1| \leq j) \int_0^j x dx \\
&= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n P(j-1 < |X_1| \leq j) \sum_{k=1}^j \int_{k-1}^k x dx \\
&\leq \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n P(j-1 < |X_1| \leq j) \sum_{k=1}^j k = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n k \sum_{j=k}^n P(j-1 < |X_1| \leq j) \\
&\leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n k P(|X_1| > k-1) \leq \frac{2}{n} \left(1 + \sum_{k=2}^n k P(|X_1| > k/2) \right).
\end{aligned}$$

由于 $nP(|X_1| > n) \rightarrow 0$, 所以存在 N , 当 $k > N$ 时, $kP(|X_1| > k/2) < \varepsilon$, 于是当 n 较大时,

$$\frac{1}{n} \left(1 + \sum_{k=2}^n k P(|X_1| > k/2) \right) = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{k=2}^N k P(|X_1| > k/2) + \sum_{k=N+1}^n k P(|X_1| > k/2) \right) < 2\varepsilon.$$

则 $\frac{EY_{n1}^2}{n} \rightarrow 0$, 故 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu_n \xrightarrow{P} 0$.

..... (10 分)

得分	
评阅人	

十、(本题 10 分) 设 A 是具有正对角元的非奇异对称矩阵. 证明: 若求解线性方程组 $Ax = b$ 的 Gauss-Seidel 迭代法对任意初始值都收敛, 则 A 为正定矩阵.

证明: 线性方程组 $Ax = b$ 的 Gauss-Seidel 迭代格式可写为

$$x_{k+1} = (D - L)^{-1}L^T x_k + (D - L)^{-1}b,$$

其中 $A = D - L - L^T$, $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

..... (2 分)

将 Gauss-Seidel 格式改写为 $(D - L)x_{k+1} = L^T x_k + b$. 对任意初始值 x_0 , $Ax = b$ 的 Gauss-Seidel 迭代法都收敛, 设其解收敛到 x^* . 记 $y_k = x_k - x^*$, 则有 $(D - L)y_{k+1} = L^T y_k$. 令 $\varepsilon_k = y_k - y_{k+1}$, 注意到 $(D - L) = A + L^T$, 那么

$$(D - L)\varepsilon_k = Ay_k, \quad Ay_{k+1} = L^T \varepsilon_k.$$

..... (4 分)

于是

$$\begin{aligned} y_k^T A y_k - y_{k+1}^T A y_{k+1} &= y_k^T (D - L) \varepsilon_k - y_{k+1}^T L^T \varepsilon_k \\ &= \varepsilon_k^T D y_k - \varepsilon_k^T L^T y_k - \varepsilon_{k+1}^T L y_{k+1} \\ &= \varepsilon_k^T D \varepsilon_k + \varepsilon_k^T (D - L) y_{k+1} - \varepsilon_{k+1}^T L^T y_k. \end{aligned}$$

又因 $(D - L)y_{k+1} = L^T y_k$, 所以

$$y_k^T A y_k - y_{k+1}^T A y_{k+1} = \varepsilon_k^T D \varepsilon_k.$$

由题设可知 D 是正定的, 因此

$$y_k^T A y_k > y_{k+1}^T A y_{k+1}, \quad k \geq 0.$$

.....(7 分)

下面我们将采用反证法证明若 Gauss-Seidel 迭代收敛，则 A 正定。

反证：假设 A 不正定，不妨设 $b = 0$. 则可找到一个 $x_0 \neq 0$, 使得 $x_0^T A x_0 < 0$. 则 $y_0^T A y_0 < 0$. 由 Gauss-Seidel 迭代产生的序列 $\{y_n\}$ 满足

$$0 > y_0^T A y_0 > y_1^T A y_1 > y_2^T A y_2 > \dots > y_n^T A y_n > \dots$$

显然该数列不收敛于 0, 这与题设矛盾, 因此假设不成立, 即 A 正定.

.....(10 分).