2011 年第二届全国大学生数学竞赛决赛
(数学专业）参考答案

一、【参考解答】: 过原点的平面Σ和椭球面

$$4x^2+5y^2+6z^2=1$$

的交线Γ为圆时，圆心必为原点．从而Γ必在以原点为中心的某个球面上．设该球面方程为$x^2+y^2+z^2=r^2$．在该圆上

$$z^2-x^2=5x^2+5y^2+5z^2-5r^2+z^2-x^2=1-5r^2.$$

即该圆在曲面$H: z^2-x^2=1-5r^2$上.

断言$5r^2=1$，否则$H: z^2-x^2=1-5r^2$是一个双曲柱面. 注意到Γ关于原点中心对称，H的一叶是另一叶的中心对称的像，所以Γ和H的两叶一定都有交点. 另一方面，Γ又要整个地落在H上，这与作为圆周的Γ是一条连续的曲线矛盾，所以必有$5r^2=1$．从而Γ在$z^2-x^2=0$上，即Γ在平面$x-z=0$或$x+z=0$上. 所以Σ为$x-z=0$或$x+z=0$.

反过来，当Σ为$x-z=0$或$x+z=0$时，Σ和$4x^2+5y^2+6z^2=1$的交线在$5x^2+5y^2+5z^2=1$上，从而为一个圆. 总之，平面$x-z=0$或$x+z=0$即为所求.

二、【参考证明】:【思路一】: 记$a=\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$，则$a\in\left(0,+\infty\right)$.

$$\int_0^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x\ge a\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=a\left(a-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=a\int_0^a\left(1-f(x)\right)\mathrm{d}x>\int_0^a x\left(1-f(x)\right)\mathrm{d}x$$

从而有$\int_0^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x>\int_0^a x\,\mathrm{d}x=\dfrac{a^2}{2}$.

【思路二】: 记$a=\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$，则$a\in\left(0,+\infty\right)$，对于$M\ge1$，记$a_M=\int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x$，则$a_M\in\left(0,M\right)$. 这样，可令$g_M(x)=\begin{cases}1, x\in\left[0,a_M\right],\\ 0, x\in(a_M,M].\end{cases}$ 则易见

$$G_M(x)=\int_0^x\left(g_M(t)-f(t)\right)dt>0,\forall x\in\left(0,M\right)\text{且}G_M(M)=0.$$

进一步注意到$a_M\ge a_1\left(M\ge1\right)$，可知

$$G_M(x)=G_1(x),\forall x\in\left[0,a_1\right],\forall M\ge1.$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\int_0^M x\left(g_M(x)-f(x)\right)\mathrm{d}\,x\\
&=xG_M(x)\Big|_0^M-\int_0^M G_M(x)\,\mathrm{d}\,x\\
&=-\int_0^M G_M(x)\,\mathrm{d}\,x\le-\int_0^{a_1} G_M(x)\,\mathrm{d}\,x\\
&=-\int_0^{a_1} G_1(x)\,\mathrm{d}\,x
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}\,x\ge\int_0^M xf(x)\,\mathrm{d}\,x\\
&\ge\int_0^M xg_M(x)\,\mathrm{d}\,x+\int_0^{a_1}G_1(x)\,\mathrm{d}\,x\\
&=\frac{1}{2}a_M^2+\int_0^{a_1}G_1(x)\,\mathrm{d}\,x,\forall M>1.
\end{aligned}
$$

令 $M\to+\infty$ 得到

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}\,x&\ge\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2+\int_0^{a_1}G_1(x)\,\mathrm{d}\,x\\
&>\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2.
\end{aligned}
$$

【注】如果 $f(x)$ 连续，则可以采用以下方法证明：

考虑 $F(x)=\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}\,t-\frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)^2,\forall x\ge 0$，则

$$
F'(x)=f(x)\left(x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)>0,\forall x>0.
$$

从而 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调上升. 所以 $F(+\infty)>F(0)=0$. 即结论成立.

三、【参考证明】: $t_n=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}ka_{n+k}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{n+k}\left(n+k\right)a_{n+k}$. 由假设，$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(n+k\right)a_{n+k}$ 收敛，而 $\frac{k}{n+k}$ 关于 k 单调且一致有界，从而由 Abel 判别法知 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}ka_{n+k}$ 收敛，即 t_n 有定义.

进一步，$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$ 使得当 $n>N$ 时，

$$
S_n=\sum_{k=n}^{+\infty}ka_k\in\left(-\varepsilon,\varepsilon\right),
$$

此时对任何 $n>N$ 以及 $m>1$，

$$\sum_{k=1}^{m} k a_{n+k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{n+k}\left(S_{k+n} - S_{k+n+1}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{n+k} S_{k+n} - \sum_{k=2}^{m+1} \frac{k-1}{n+k-1} S_{k+n}$$
$$= \frac{1}{n+1} S_{n+1} - \frac{m}{n+m} S_{m+n+1} + \sum_{k=2}^{m}\left(\frac{k}{n+k} - \frac{k-1}{n+k-1}\right) S_{k+n}.$$

从而有

$$\left|\sum_{k=1}^{m} k a_{n+k}\right| \le \left(\frac{1}{n+1} + \frac{m}{n+m}\right)\varepsilon + \sum_{k=2}^{m}\left(\frac{k}{n+k} - \frac{k-1}{n+k-1}\right)\varepsilon$$
$$= \left(\frac{1}{n+1} + 2\frac{m}{n+m} - \frac{1}{n}\right)\varepsilon \le 2\varepsilon.$$

所以$| t_n |\le 2\varepsilon, \forall n > N$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0.$

四、【参考证明】: 设A可对角化，则有A的特征向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$构成C^n的一组基，$A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$. 对任意的$i,j$，令$T_{ij} \in M_n(C)$，满足

$$T_{ij}\alpha_k = \delta_{ik}\alpha_j \left(\forall k\right),$$

则可证$T_{ij}, i,j = 1,\cdots,n$是$M_n(\mathbb{C})$的一组基，为此，只要验证其线性无关性：设$\sum\limits_{ij}\lambda_{ij}T_{ij} = 0$，注意到

$$T_{ij}\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n\right) = \left(0,\cdots,\alpha_j,\cdots,0\right),$$

有$\sum\limits_{ij}\lambda_{ij}T_{ij}\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n\right) = 0.$ 从而

$$\sum_i\sum_j \lambda_{ij}\left(0,\cdots,0,\alpha_j,0,\cdots,0\right) = 0.$$

即

$$\left(\sum_j \lambda_{1j}\alpha_j,\cdots,\sum_j \lambda_{ij}\alpha_j,\cdots,\sum_j \lambda_{nj}\alpha_j\right)$$
$$= \sum_j\left(0,,0,\sum_j \lambda_{ij}\alpha_j,0,\cdots,0\right) = 0.$$

从而有$\sum\limits_j \lambda_{ij}\alpha_j = 0\left(\forall i\right)$，故$\lambda_{ij} = 0\left(\forall i,j\right)$. 所以

$$T_{ij}, i,j = 1,\cdots,n$$

是$M_n(C)$的一组基. 又$\sigma_A\left(T_{ij}\right) = A\,T_{ij} - T_{ij}A$，

$$\begin{aligned}&\sigma_A\left(T_{ij}\right)\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n\right)\\&=\left(0,\cdots,0,\left(\lambda_j-\lambda_i\right)\alpha_j,0,\cdots,0\right)\\&=\left(\lambda_j-\lambda_i\right)T_{ij}\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n\right).\end{aligned}$$

故$\sigma_A\left(T_{ij}\right)=\left(\lambda_j-\lambda_i\right)T_{ij}$. 即$T_{ij},i,j=1,\cdots,n$是$\sigma_A$的特征向量，所以$\sigma_A$可对角化.

五、【参考证明】: 记$M=\sup\limits_{x,y\in\mathbb{R}}\left|f(x+y)-f(x)-f(y)\right|$，则

$$\begin{aligned}&|f(2x)-2f(x)|\le M,\\&|f(3x)-f(2x)-f(x)|\le M,\\&\cdots\cdots\\&|f(nx)-f(\left(n-1\right)x)-f(x)|\le M,\forall x\in R,n\in N^+.\end{aligned}$$

从而

$|f(nx)-nf(x)|\le(n-1)M\le nM,\forall x\in R,n\in N^+.$(1)

上式中x用mx代入，则有

$$|f(mnx)-nf(mx)|\le nM,\forall x\in R;m,n\in N^+.$$

把上式中的m,n互换，得

$$|f(mnx)-mf(nx)|\le mM,\forall x\in R;m,n\in N^+.$$

于是有

$$\left|\frac{f(mx)}{m}-\frac{f(nx)}{n}\right|\le\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)M,\forall x\in R;m,n\in N^+.\text{(2)}$$

这表明函数行列$\left\{\frac{f(nx)}{n}\right\}$是关于$x\in R$一致收敛的. 设其极限为$g(x)$，则$g(x)$连续. 由题设，

$\forall x,y\in R;n\in N^+$，

$$\left|\frac{f(n(x+y))}{n}-\frac{f(nx)}{n}-\frac{f(ny)}{n}\right|\le\frac{M}{n}.$$

取极限即得

$$g(x+y)=g(x)+g(y),\forall x,y\in R.\qquad(3)$$

而在(1)式除以n后取极限可以得到

$$\left|g(x)-f(x)\right|\le M,\forall x\in R.\qquad(4)$$

从而$\sup\limits_{x\in R}\left|g(x)-f(x)\right|<+\infty$.

下面证明$g(x)=g(1)x$. 由(3)可得，

$$g\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}g(1),\forall m\in Z,n\in N^+.$$

由$g(x)$的连续性和有理数的稠密性得到

$$g(x)=g(1)x,\forall x\in R.$$

综上所述，要证的结论成立.

【注】如果最后由 $g(x)$ 的连续性和 $g(x+y)=g(x)+g(y)$ 得到 $g(x)=ax$，算全对.

六、【参考证明】: 首先证明 $\varphi=a\cdot\mathrm{tr}(-)$，这里 $\mathrm{tr}(-)$ 是取迹映射:

$$\varphi\left(E_{ij}\right)=\varphi\left(E_{i1}E_{1j}\right)=\varphi\left(E_{1j}E_{i1}\right)=\delta_{ij}\varphi\left(E_{11}\right)$$

其中 E_{ij} 是 $\left(i,j\right)$ 位置为 1，其他位置为 0 的矩阵.

取 $a=\varphi\left(E_{11}\right)$，则 $\varphi\left(E_{ij}\right)=a\cdot\mathrm{tr}(E_{ij})$，故

$$\varphi=a\cdot\mathrm{tr}(),a\neq 0.$$

1．$\left(-,-\right)$ 是双线性型，且是对称点.

设 $\left(X,Y\right)=0,\forall Y\in M_n(R)$，取 $Y=X^t,X$ 的共轭转置，则 $\left(X,Y\right)=a\cdot\mathrm{tr}\left(XX^t\right)=0.$ 有 $\mathrm{tr}\left(XX^t\right)=0$，故 $X=0.$

2．证明 $\sum_{i=1}^{n^2}A_iB_i$ 与任意 A_k 可交换：设

$$\begin{aligned}B_iA_k&=\sum_l x_lB_l,x_l=\left(B_iA_k,A_l\right);A_kA_i\\&=\sum_l y_lA_l,y_l=\left(A_kA_i,B_l\right).\end{aligned}$$

计算 $\Delta=\left(\sum_{i=1}^{n^2}A_iB_i\right)A_k-A_k\sum_{i=1}^{n^2}A_iB_i=\sum_{i=1}^{n^2}\left(A_iB_iA_k-A_kA_iB_i\right)$

$$\begin{aligned}&=\sum_{i=1}^{n^2}\left(A_i\sum_l\left(B_iA_k,A_l\right)B_l-\sum_l\left(A_kA_i,B_l\right)A_lB_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n^2}\sum_l\left[\left(B_iA_k,A_l\right)A_iB_l-\left(A_kA_i,B_l\right)A_lB_i\right]\end{aligned}$$

上式中 $\left(A_kA_i,B_l\right)=\left(B_lA_k,A_i\right)$. 故 $\Delta=0.$ 从而 $\sum_{i=1}^{n^2}A_iB_i$ 与任意 A_k 可交换，$\sum_{i=1}^{n^2}A_iB_i$ 是数量矩阵.