

第十五届全国大学生数学竞赛初赛试卷参考答案
(数学 B 类, 2023 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	20	15	15	20	100
得分							

注意:

- 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
- 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
- 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 在空间中给定两不同点 P 和 Q . 过 P 点直线 $L(P)$ 和过 Q 点直线 $L(Q)$ 正交于点 M . 问: 所有可能的正交点 M 构成何种曲面? 证明你的结论.

证明. 在空间中建立直角坐标系, 使得线段 PQ 的中点为原点 O , 直线 PQ 为 x -轴,

$$P = (-a, 0, 0), Q = (a, 0, 0) \quad (a > 0).$$

..... (5 分)

设过 P 点直线 $L(P)$ 和过 Q 点直线 $L(Q)$ 正交于 $M = (x, y, z)$ 点, 则有

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{QM} = 0,$$

..... (10 分)

$$(x + a, y, z) \cdot (x - a, y, z) = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

为球面.

..... (15 分)

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $f(x, y, z) = x^2 + (y^2 + z^2)(1 - x)^3$.

(1) 计算 f 的驻点.

(2) 求 f 在 Σ 上的最小值, 其中,

Σ 是 $\{(x, y, z) \mid |x| \leq 2, y^2 + z^2 \leq 4\}$ 的边界.

(3) 求 f 在椭球 $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} \leq 1$ 上的最小值.

解答. (1)

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = 2x - 3(y^2 + z^2)(1 - x)^2, \\ f_y(x, y, z) = 2y(1 - x)^3, \\ f_z(x, y, z) = 2z(1 - x)^3. \end{cases}$$

求解 $f_x(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0, z_0) = f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$ 的点可得函数在整个空间上只有唯一的驻点 $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.

(注. 易见由上述方程的第二式可得 $x_0 = 1$ 或 $y_0 = 0$. 但 $x_0 = 1$ 与第一个式子矛盾. 因此 $x_0 = 0$, 进而又有 $y_0 = z_0 = 0$.)

.....(5 分)

(2) $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, 其中

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \mid x \in [-2, 2], y^2 + z^2 = 4\},$$

$$\Sigma_2 = \{(x, y, z) \mid x = 2, y^2 + z^2 \leq 4\},$$

$$\Sigma_3 = \{(x, y, z) \mid x = -2, y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

在 Σ_1 上,

$$f(x, y, z) = x^2 + 4(1 - x)^3 = g_1(x), \quad x \in [-2, 2].$$

作为一元函数, 考虑 g_1 在 $[-2, 2]$ 内的驻点:

$$g_1'(\xi) = 2\xi - 12(1 - \xi)^2 = 0.$$

可得: $\xi_1 = \frac{3}{2}$, $\xi_2 = \frac{2}{3}$.

我们有

$$g_1(2) = 0, \quad g_1(-2) = 112, \quad g_1\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}, \quad g_1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{27}.$$

故 f 在 Σ_1 上的最小值为 0.

(注: 以上讨论说明 $g_1(2) = 0$ 以及 $g_1(-2), g_1\left(\frac{3}{2}\right), g_1\left(\frac{2}{3}\right) \geq 0$ 即可. 或不必求驻点, 直接说明 $g_1 \geq 0$ 且 $g_1(2) = 0$.)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

在 Σ_2 上,

$$f(x, y, z) = 4 - (y^2 + z^2) = g_2(x, y) \geq 0, \quad y^2 + z^2 \leq 4.$$

在 Σ_3 上,

$$f(x, y, z) = 4 + 27(y^2 + z^2) = g_3(x, y) \geq 0, \quad y^2 + z^2 \leq 4.$$

故 f 在 Σ 上的最小值为 0.

..... (10 分)

(3) 注意到椭球 $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} \leq 1$ 完全在 Σ 围成的区域 Ω 内, 而且函数 f 在 Ω 内有唯一驻点 $(0, 0, 0)$, $f(0, 0, 0) = 0$. 因此, f 在 $\bar{\Omega}$ 上的最小值为 0. 进而 f 在该椭球上的最小值就是 0.

..... (15 分)

得分	
评阅人	

三、(本题 20 分) 设 V 是复数域 \mathbb{C} 上的 n 维线性空间, \mathbf{A} 是 V 上的一个线性变换. 证明: 存在 $\alpha \in V$ 使得 $\{\alpha, \mathbf{A}\alpha, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha\}$ 成为 V 的一组基当且仅当对于 \mathbf{A} 的任一特征值 λ , λ 的几何重数为 1.

解答. 必要性. 设存在 $\alpha \in V$ 使得 $\{\alpha, \mathbf{A}\alpha, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha\}$ 成为 V 的一组基, 显然 \mathbf{A} 在该基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & 0 & * \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & * \\ & & & 1 & * \end{pmatrix}.$$

.....(2 分)

对任意 $c \in \mathbb{C}$,

$$cI - A = \begin{pmatrix} c & * \\ -1 & c & * \\ & -1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & c & * \\ & & & -1 & * \end{pmatrix},$$

其左下角的 $n-1$ 阶子式非零, 所以 $\text{rank}(cI - A) \geq n-1$, 从而齐次线性方程组

$$(cI - A)X = 0$$

的解空间维数为 $n - \text{rank}(cI - A) \leq 1$.

.....(5 分)

又对 \mathbf{A} 的任一特征值 λ ,

$$(\lambda I - A)X = 0$$

一定有非零解, 它的解空间维数 ≥ 1 . 所以齐次线性方程组

$$(\lambda I - A)X = 0$$

的解空间维数为 1, 即 λ 的几何重数为 1.

.....(8 分)

充分性: 设 \mathbf{A} 的互不相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 代数重数分别为 d_1, d_2, \dots, d_s , 其中 $d_1 + d_2 + \dots + d_s = n$, 即 \mathbf{A} 的特征多项式为

$$f(x) = (x - \lambda_1)^{d_1}(x - \lambda_2)^{d_2} \cdots (x - \lambda_s)^{d_s}.$$

对于 $1 \leq i \leq s$, 记 $V_{\lambda_i} = \text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{d_i}$, 其中 \mathbf{I} 为恒等变换, 则 V_{λ_i} 为 \mathbf{A} -不变子空间且

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}.$$

..... (11 分)

由于 λ_i 的几何重数为 1, 故 $\mathbf{A}|_{V_{\lambda_i}}$ 的 Jordan 标准型为

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{d_i \times d_i}.$$

所以存在 $\alpha_i \in V_{\lambda_i}$ 使得 $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{d_i-1}\alpha_i \neq 0$.

..... (14 分)

令

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s,$$

则 $\{\alpha, \mathbf{A}\alpha, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha\}$ 是 V 的一组基. 若否, 则 $\alpha, \mathbf{A}\alpha, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha$ 线性相关, 从而存在次数 $\leq n-1$ 的非零多项式 $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $p(\mathbf{A})\alpha = 0$. 由于 V_{λ_i} 为 \mathbf{A} -不变子空间, 所以 $p(\mathbf{A})\alpha_i \in V_{\lambda_i}$. 由

$$0 = p(\mathbf{A})\alpha = p(\mathbf{A})\alpha_1 + p(\mathbf{A})\alpha_2 + \cdots + p(\mathbf{A})\alpha_s$$

可知 $p(\mathbf{A})\alpha_i = 0$. 由于 $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{d_i-1}\alpha_i \neq 0$, 所以 $(x - \lambda_i)^{d_i}$ 是 \mathbf{A} 的零化 α_i 的次数最低的多项式, 从而

$$(x - \lambda_i)^{d_i} \mid p(x).$$

..... (18 分)

又当 $i \neq j$ 时, $(x - \lambda_i)^{d_i}$ 与 $(x - \lambda_j)^{d_j}$ 互素, 所以

$$(x - \lambda_1)^{d_1}(x - \lambda_2)^{d_2} \cdots (x - \lambda_s)^{d_s} \mid p(x),$$

即 $f(x) \mid p(x)$, 这与 $\deg p(x) < \deg f(x)$ 且 $p(x) \neq 0$ 矛盾.

..... (20 分)

得分	
评阅人	

四、(本题 15 分) 证明对任意 n 阶方阵 A , 存在主对角线上元素为 1 或 -1 的 n 阶对角矩阵 J 使得 $A + J$ 可逆.

解答. 对 n 做归纳. 当 $n = 1$ 时, $A = (a)$, 显然 $a + 1$ 或者 $a - 1$ 中一定有一个数非零, 结论成立. (2 分)

设结论对 $n - 1$ 阶矩阵成立, 下面考察 n 阶方阵 A . 记

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 A_1 为 $n - 1$ 阶矩阵, α 为 $n - 1$ 维行向量, β 为 $n - 1$ 维列向量, a_{nn} 为一个数. 由归纳假设, 存在主对角线上元素为 1 或 -1 的 $n - 1$ 阶对角矩阵 J_1 使得 $A_1 + J_1$ 可逆. (5 分)

从而

$$\begin{aligned} & \left| A + \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| - \left| A + \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{array}{cc} A_1 + J_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} + 1 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} A_1 + J_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} - 1 \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{cc} A_1 + J_1 & \beta - \beta \\ \alpha & (a_{nn} + 1) - (a_{nn} - 1) \end{array} \right| \\ &= 2 |A_1 + J_1| \neq 0. \end{aligned}$$

这表明上式最左边的两个行列式中至少有一个非零. (11 分)

令

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{若} \quad \left| A + \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \neq 0,$$

或者

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{若} \quad \left| A + \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right| \neq 0,$$

则 J 为主对角线上元素为 1 或 -1 的 n 阶对角矩阵且 $|A + J| \neq 0$, 即 $A + J$ 可逆, 所以结论对 n 阶矩阵成立. (14 分)
由归纳法原理, 结论对任意方阵成立. (15 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____

考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

1

卷之三

10

所在院校:_____

110

四二

准考证

卷之三

姓名：

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 $f(x) = x^n(1-x)^n$,

$$F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

计算并化简 $\frac{d}{dx}(F'(x) \sin x - F(x) \cos x)$.

得分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 设非负函数 f 在 $[0, +\infty)$ 上连续可微, 无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且存在 $[0, +\infty)$ 上的非负函数 g , 使得

$$f'(x) \leq g(x), \quad x \geq 0. \quad (1)$$

分别就下列三种情形, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- (i) $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ 收敛.
- (ii) $g(x) = C > 0$, 其中 C 为常数.
- (iii) $g(x) = Cf^p(x)$, 其中 $C > 0, p > 0$ 为常数.

证明. 法 I. (i) 由条件 (1),

$$f(x) \leq f(y) + \int_y^x g(x) dx \leq f(y) + \int_y^{+\infty} g(x) dx, \quad 0 \leq y < x.$$

所以 f 在 $[0, +\infty)$ 上有界. 于是

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq f(y) + \int_y^{+\infty} g(x) dx, \quad 0 \leq y < +\infty$$

进而由无穷积分 $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 得到

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 存在, 又无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 从而 $A = 0$.
..... (10 分)

(ii) 我们用反证法证明结论.

假设结论不成立, 那么存在正数 a 和正数数列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, $f(x_n) \geq a, n = 1, 2, \dots$. 显然不妨设

$$x_n > \frac{a}{2C}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

在区间 $[x_n - \frac{a}{2C}, x_n]$ 上对不等式 (1) 从 x 积分到 x_n , 利用 (2) 得到

$$f(x_n) - f(x) \leq C(x_n - x). \Rightarrow a - f(x) \leq C(x_n - x) \leq C \cdot \frac{a}{2C} = \frac{a}{2}.$$

我们有

$$f(x) \geq \frac{a}{2}, x_n - \frac{a}{2C} \leq x \leq x_n, n = 1, 2, \dots.$$

从而

$$\int_{x_n - \frac{a}{2C}}^{x_n} f(x) dx \geq \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2C} = \frac{a^2}{4C}, n = 0, 1, 2, \dots.$$

此与 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的 Cauchy 准则矛盾, 证毕.

..... (15 分)

(iii) 假设结论不成立, 那么存在正数 a 和正数数列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, $f(x_n) \geq a, n = 1, 2, \dots$. 显然不妨设

$$x_n > b = \frac{a}{2a^{p-1}C}, n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

现在证明 f 在区间 $[x_n - b, x_n]$ 上的最小值 m_n 大于一个正常数.

设 $t_n \in [x_n - b, x_n], f(t_n) = m_n$. 我们分两种情况来讨论.

1. $m_n = a$, 则有 $f(x) \geq a, x \in [x_n - b, x_n]$.

2. $m_n < a$, 因为 $f(x_n) \geq a$, 所以 $t_n < x_n$. 记 $T_n = \sup \{t; f(x) < a, x \in [t_n, t]\}$, 那么, 由 f 的连续性知道, $t_n < T_n \leq x_n, f(T_n) = a$.

在 t_n 和 T_n 处应用不等式 (1), 利用 (3), 得到

$$a - m_n = f(T_n) - f(t_n) \leq C \int_{t_n}^{T_n} f^p(x) dx \leq C a^p (T_n - t_n) \leq C a^p b = \frac{a}{2}.$$

即

$$\frac{a}{2} \leq m_n \leq f(x), \quad x \in [x_n - b, x_n].$$

综合两种情况, 我们总有

$$f(x) \geq \frac{a}{2}, x \in [x_n - b, x_n].$$

于是

$$\int_{x_n - b}^{x_n} f(x) dx \geq \frac{ab}{2} = \frac{a}{4C} > 0,$$

此与 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的 Cauchy 准则矛盾, 证毕.

..... (20 分)

法 2. 我们对三种情形作统一处理. 设 $g(x) = Cf^p(x) + h(x)$, 其中 $C \geq 0$, $p \geq 0$ 为常数(0^0 理解为 1), h 非负且 $\int_0^{+\infty} h(x) dx$ 收敛.

任取 $m \geq 16C + 2$, 由 Cauchy 准则, 存在 $N = N_m \geq 1$ 使得当 $n \geq N$ 时,
 $\int_{\frac{n}{m^2}}^{\frac{n+1}{m^2}} (f(x) + h(x)) dx < \frac{1}{4m^3}$. 因此, 结合 f 非负, 对于任何 $n \geq N$, 有

$\xi_n \in [\frac{n}{m^2}, \frac{n+1}{m^2}]$ 使得 $f(\xi_n) < \frac{1}{4m}$.

我们断言当 $x > \frac{N+1}{m^2}$ 时, $f(x) \leq \frac{1}{m}$.

否则, 有 $\eta_1 > \frac{N+1}{m^2}$, 使得 $f(\eta_1) > \frac{1}{m}$. 我们有 $k \geq N$ 使得 $\xi_k < \eta_1 < \xi_k + \frac{2}{m^2}$.

进一步, 设 η_2 为 $f - \frac{1}{m}$ 在 $[\xi_k, \eta_1]$ 中最小的零点, η_3 为 $f - \frac{1}{2m}$ 在 $[\xi_k, \eta_2]$ 中最大的零点. 则在 $[\eta_3, \eta_2]$ 上 $\frac{1}{2m} \leq f \leq \frac{1}{m} < 1$. 从而

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} &= f(\eta_2) - f(\eta_3) = \int_{\eta_3}^{\eta_2} f'(t) dt \\ &\leq \int_{\eta_3}^{\eta_2} (C f^p(t) + h(t)) dt \leq \int_{\eta_3}^{\eta_2} (C + h(t)) dt \\ &\leq \frac{2C}{m^2} + \frac{1}{2m^3} \leq \frac{1}{4m}. \end{aligned}$$

矛盾.

因此, 当 $x > \frac{N+1}{m}$ 时, $f(x) \leq \frac{1}{m}$. 由此即得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

..... (20 分)