

第十届全国大学生数学竞赛决赛试题参考答案及评分标准
(非数学类, 2019年3月30日)

一、填空题(本题满分30分, 每小题6分)

1. 设函数 $y = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-a\sin^2 x} - b}{x^2}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $a+b$ 的值为_____.

答案: $a+b=-3$

2. 设 $a>0$, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx = _____$. 答案: $I = \frac{\pi \ln a}{2a}$

3. 设曲线 L 是空间区域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 的表面与平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 的交线, 则 $\left| \oint_L (z^2-y^2)dx + (x^2-z^2)dy + (y^2-x^2)dz \right| = _____$. 答案: $I = \frac{9}{2}$

4. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-y,z)=0$ 确定, 其中 $F(u,v)$ 具有连续二阶偏导数,

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = _____$. 答案: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{F_2^2 F_{11} - 2F_1 F_2 F_{12} + F_1^2 F_{22}}{F_2^3}$

5. 已知二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2$, 则 f 的规范形为_____.

答案: $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2$

二、设 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内三阶连续可导, 满足 $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0$,

$f'''(0)=-1$; 又设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 \in (0,1), a_{n+1} = f(a_n)$ ($n=1,2,3,\dots$), 严格单调减

少且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^2$.

【解】由于 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内三阶可导, $f(x)$ 在 $x=0$ 处有 Taylor 公式

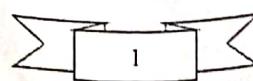
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3),$$

又 $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1$, 所以

$$f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3). \quad \text{-----4分} \quad ①$$

由于 $a_1 \in (0,1)$, 数列 $\{a_n\}$ 严格单调且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 $a_n > 0$, 且 $\left\{ \frac{1}{a_n^2} \right\}$ 为严格单

调增加趋于正无穷的数列, 注意到 $a_{n+1} = f(a_n)$, 故由 Stolz 定理及①式, 有



由 扫描全能王 扫描创建

2019年3月30日决赛试题标准答案

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}} \quad \text{-----8分} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 a_{n+1}^2}{a_n^2 - a_{n+1}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 f^2(a_n)}{a_n^2 - f^2(a_n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 \left(a_n - \frac{1}{6} a_n^3 + o(a_n^3) \right)^2}{a_n^2 - \left(a_n - \frac{1}{6} a_n^3 + o(a_n^3) \right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^4 - \frac{1}{3} a_n^6 + \frac{1}{36} a_n^8 + o(a_n^4)}{\frac{1}{3} a_n^4 - \frac{1}{36} a_n^6 + o(a_n^4)} = 3. \\
 &\quad \text{-----12分}
 \end{aligned}$$

三、设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续导数, 且 $|f(x)| \leq 1$, $f'(x) > 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

证明: 对于 $0 < \alpha < \beta$, 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f'\left(nx - \frac{1}{x}\right) dx = 0$.

【证明】 令 $y = x - \frac{1}{nx}$, 则 $y' = 1 + \frac{1}{nx^2} > 0$. 故函数 $y(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上严格单调增加. 记 $y(x)$ 的反函数为 $x(y)$, 则 $x(y)$ 定义在 $\left[\alpha - \frac{1}{n\alpha}, \beta - \frac{1}{n\beta}\right]$ 上, 且

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{nx^2}} > 0. \quad \text{-----4分}$$

于是

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'\left(nx - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{\alpha - \frac{1}{n\alpha}}^{\beta - \frac{1}{n\beta}} f'(ny) x'(y) dy.$$

根据积分中值定理, 存在 $\xi_n \in \left[\alpha - \frac{1}{n\alpha}, \beta - \frac{1}{n\beta}\right]$, 使得

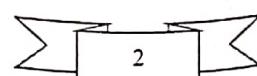
$$\int_{\alpha - \frac{1}{n\alpha}}^{\beta - \frac{1}{n\beta}} f'(ny) x'(y) dy = x'(\xi_n) \int_{\alpha - \frac{1}{n\alpha}}^{\beta - \frac{1}{n\beta}} f'(ny) dy = \frac{x'(\xi_n)}{n} \left[f\left(n\beta - \frac{1}{\beta}\right) - f\left(n\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \right].$$

-----8分

因此

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f'\left(nx - \frac{1}{x}\right) dx \right| \leq \frac{|x'(\xi_n)|}{n} \left[\left| f\left(n\beta - \frac{1}{\beta}\right) \right| + \left| f\left(n\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \right| \right] \leq \frac{2|x'(\xi_n)|}{n}.$$

注意到



由 扫描全能王 扫描创建

2019年3月30日决赛试题标准答案

$$0 < x'(\xi_n) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n\xi_n^2}} < 1,$$

则

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f' \left(nx - \frac{1}{x} \right) dx \right| \leq \frac{2}{n},$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f' \left(nx - \frac{1}{x} \right) dx = 0.$$

-----12分

四、计算三重积分: $\iiint_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$, 其中

$$\Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1..$$

【解】采用“先二后一”法，并利用对称性，得

$$I = 2 \int_0^1 dz \iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}, \text{ 其中 } D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x. \quad -----4 \text{分}$$

用极坐标计算二重积分，得

$$I = 2 \int_0^1 dz \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} \frac{r dr}{(1+r^2+z^2)^2} = \int_0^1 dz \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{1+\sec^2 \theta + z^2} \right) d\theta$$

交换积分次序，得

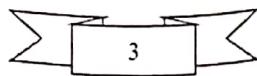
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{1+\sec^2 \theta + z^2} \right) dz = \frac{\pi^2}{16} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{1+\sec^2 \theta + z^2} dz \quad -----8 \text{分}$$

作变量代换: $z = \tan t$ ，并利用对称性，得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{1+\sec^2 \theta + z^2} dz &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t}{\sec^2 \theta + \sec^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta + \sec^2 t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta + \sec^2 t}{\sec^2 \theta + \sec^2 t} dt = \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32}. \quad -----12 \text{分}$$

五、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdots \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$ 之和。



由 扫描全能王 扫描创建

2019 年 3 月 30 日决赛试题标准答案

【解】 级数通项 $a_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdots \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+2}$, 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)} x^{2n+2}, \quad \text{----- 4 分}$$

则收敛区间为 $(-1, 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \left[f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \right]$,

$$f'(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} = 2g(x), \text{ 其中 } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}. \text{ 因为}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} = 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} 2nx^{2n-1} \\ &= 1 + x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} \right) = 1 + x \frac{d}{dx} [xg(x)], \end{aligned}$$

所以 $g(x)$ 满足 $g(0) = 0$, $g'(x) - \frac{x}{1-x^2} g(x) = \frac{1}{1-x^2}$. ----- 8 分

解这个一阶线性方程, 得

$$g(x) = e^{\int \frac{x}{1-x^2} dx} \left(\int \frac{1}{1-x^2} e^{-\int \frac{x}{1-x^2} dx} dx + C \right) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}},$$

由 $g(0) = 0$ 得 $C = 0$, 故 $g(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, 所以 $f(x) = (\arcsin x)^2$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi^2}{16}$,

且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi^2 - 8}{8}. \quad \text{----- 12 分}$$

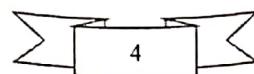
六、设 A 是 n 阶幂零矩阵, 即满足 $A^2 = O$. 证明: 若 A 的秩为 r , 且 $1 \leq r < \frac{n}{2}$,

则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & I_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$, 其中 I_r 为 r 阶单位矩阵.

【证】 存在 n 阶可逆矩阵 H, Q , 使得 $A = H \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$, 因为 $A^2 = O$, 所以有

$$A^2 = H \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q H \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = O, \quad \text{----- 4 分}$$

对 QH 作相应分块为 $QH = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$, 则有



由 扫描全能王 扫描创建

2019年3月30日决赛试题标准答案

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q H \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix} = O.$$

因此 $R_{11} = O$, -----6分

而 $Q = \begin{pmatrix} O & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} H^{-1}$, 所以

$$A = H \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = H \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} H^{-1} = H \begin{pmatrix} O & R_{12} \\ O & O \end{pmatrix} H^{-1}$$

显然, $r(A) = r(R_{12}) = r$, 所以 R_{12} 为行满秩矩阵. -----8分

因为 $r < \frac{n}{2}$, 所以存在可逆矩阵 S_1, S_2 , 使得 $S_1 R_{12} S_2 = (I_r, O)$, -----10分

令 $P = H \begin{pmatrix} S_1^{-1} & O \\ O & S_2 \end{pmatrix}$, 则有

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} S_1 & O \\ O & S_2^{-1} \end{pmatrix} H^{-1} A H \begin{pmatrix} S_1^{-1} & O \\ O & S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & I_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}. \quad \text{-----11分}$$

七、设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调递减的正实数列, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一实数列, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ 收敛, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) u_n = 0.$$

【证】由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ 收敛, 所以对任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N_1 , 使得当 $n > N_1$

时, 有

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=N_1}^n a_k u_k < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

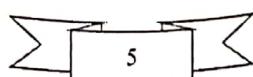
因为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减的正数列, 所以

$$0 < \frac{1}{u_{N_1}} \leq \frac{1}{u_{N_1+1}} \leq \dots \leq \frac{1}{u_n} \quad (2) \quad \text{-----2分}$$

注意到当 $m < n$ 时, 有

$$\sum_{k=m}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = A_n b_n - A_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) A_k,$$

令 $A_0 = 0$, $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$ ($k = 1, 2, \dots, n$), 得到



由 扫描全能王 扫描创建

2019年3月30日决赛试题标准答案

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) A_k \quad \text{-----4分}$$

下面证明：对于任意自然数 n ，如果 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0, \quad m \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq M$$

则有

$$b_1 m \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k = b_1 M$$

事实上， $m \leq A_k \leq M, \quad b_k - b_{k+1} \geq 0$ ，即得到

$$mb_1 = mb_n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1})m \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq Mb_n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1})M = Mb_1 \quad \text{-----6分}$$

利用(2)，令 $b_1 = \frac{1}{u_n}, b_2 = \frac{1}{u_{n-1}}, \dots$ ，可以得到 $-\frac{\varepsilon}{2} u_n^{-1} < \sum_{k=N_1}^n a_k < \frac{\varepsilon}{2} u_n^{-1}$ ，即

$$\left| \sum_{k=N_1}^n a_k u_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{-----8分}$$

又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 知，存在自然数 N_2 ，使得 $n > N_2$

$$\left| (a_1 + a_2 + \dots + a_{N_1-1}) u_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{-----10分}$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ ，则当 $n > N$ 时，有

$$\left| (a_1 + a_2 + \dots + a_n) u_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) u_n = 0$. -----11分

