2018 年第九届全国大学生数学竞赛决赛
(非数学专业)试卷

一、填空题(满分 30 分，每小题 6 分)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln\left(1+\sin^2 x\right)}=$__________.

(2)设一平面过原点和点 $\left(6,-3,2\right)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则此平面方程为______.

(3)设函数 $f\left(x,y\right)$ 具有一阶连续偏导数，满足 $\mathrm{d}f\left(x,y\right)=ye^y\,\mathrm{d}x+x\left(1+y\right)e^y\,\mathrm{d}y$ 及 $f\left(0,0\right)=0$，则 $f\left(x,y\right)=$__________.

(4)满足 $\dfrac{\mathrm{d}u\left(t\right)}{\mathrm{d}t}=u\left(t\right)+\int_0^1 u\left(t\right)\mathrm{d}t$ 及 $u\left(0\right)=1$ 的可微函数 $u\left(t\right)=$__________.

(5)设 a,b,c,d 是互不相同的正实数，x,y,z,w 是实数，满足

$$a^x=bc\,\mathrm{d},b^y=c\,\mathrm{d}\,a,e^z=\mathrm{d}\,ab,\mathrm{d}^w=abc,$$

则行列式 $\begin{vmatrix}-x&1&1&1\\1&-y&1&1\\1&1&-z&1\\1&1&1&-w\end{vmatrix}=$__________.

二、(本题满分 11 分)设函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 内连续，且存在两两互异的点

$$x_1,x_2,x_3,x_4\in\left(0,1\right)，使得 a=\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<\frac{f\left(x_3\right)-f\left(x_4\right)}{x_3-x_4}=\beta.$$

证明：对任意 $\lambda\in\left(\alpha,\beta\right)$，存在互异的点 $x_5,x_6\in\left(0,1\right)$，使得 $\lambda=\dfrac{f\left(x_5\right)-f\left(x_6\right)}{x_5-x_6}$.

三、(本题满分 11 分)设函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 上连续且 $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\neq0$，证明：在区间 $\left[0,1\right]$ 上存在三个不同的点 x_1,x_2,x_3，使得

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1}f\left(t\right)\mathrm{d}t+f\left(x_1\right)\arctan x_1\right]x_3$$

$$=\left[\frac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2}f\left(t\right)\mathrm{d}t+f\left(x_2\right)\arctan x_2\right]\left(1-x_3\right).$$

四、(本题满分 12 分)求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{\left(n+1\right)!}-\sqrt[n]{n!}\right]$.

五、(本题满分 12 分)设 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T\in R^n$，定义

$$H(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{j+1},n\geq 2.$$

(1)证明：对任一非零$x\in R^n,H(x)>0.$

(2)求$H(x)$满足条件$x_n=1$的最小值.

六、(本题满分 12 分)设函数$f(x,y)$在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq a^2\}$上具有一阶连续偏导数，且满足

$$f(x,y)|_{x^2+y^2=a^2}=a^2\text{以及}\max_{(x,y)\in D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=a^2,$$

其中$a>0$. 证明：$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leq\frac{4}{3}\pi a^4.$

七、(本题满分 12 分)设$0<a_n<1,n=1,2,\cdots$且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$(有限或$+\infty$).

(1)证明：当$q>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；当$q<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散；

(2)讨论$q=1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性并阐明理由.