第十届清疏竞赛班非数学类 8:

中值定理基本框架

本次课后阅读第九届非数学类(七,八).什么地方需要视频再去看视频,不要直接就看视频.

K值法类:

$f(x)\in D^2[a,b]$,证明存在一点$\theta\in(a,b)$,使得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{12}f''(\theta)(b-a)^3.$$

证明:

记常数K,使得$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{12}K(b-a)^3.$

即$K=\dfrac{\int_a^b f(x)dx-(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}{\frac{1}{12}(b-a)^3}$,

$$F(y)=\int_a^y f(x)dx-(y-a)\frac{f(a)+f(y)}{2}+\frac{1}{12}K(y-a)^3.$$

$F(a)=F(b)=0$,由罗尔中值定理,我们知道,存在$c\in(a,b)$,使得

$$F'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{2}-(c-a)\frac{f'(c)}{2}+\frac{1}{4}K(c-a)^2=0.$$

$F'(a)=0$,因此继续由罗尔,存在$\theta\in(a,b)$,使得

$$F''(\theta)=-\frac{f''(\theta)}{2}(\theta-a)+\frac{1}{2}K(\theta-a)=0\Rightarrow f''(\theta)=K.$$

现在你掌握了插值法,那么平时训练时只需要

$f(x)\in D^2[a,b]$,证明存在一点$\theta\in(a,b)$,使得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{12}f''(\theta)(b-a)^3.$$

$F(x)=\int_a^x f(y)dx$,F是3阶可导,前面的p二次,拟和三个点

自然猜测拟合的是$F(a)=0,F'(a)=f(a),F(b),F'(b)=f(b)$

$F^{(3)}(\theta)=p^{(3)}(\theta)\Rightarrow f''(\theta)=6p$的首系数,自行计算$p$(可先阅读后面.)

积分中值定理直接在公众号搜索积分中值

结论全部背下来，不看证明.

插值:

我们先来看一个具体的例子：

$f\left(x\right)\in C^{2}\left[a,b\right], f\left(a\right)=f\left(b\right)=0$, 证明$\exists \xi\in\left(a,b\right)$,

使得$\int_a^b f\left(x\right)dx=\frac{1}{12}f''\left(\xi\right)\left(b-a\right)^{3}$

证明：

确定一个一次函数$p\left(x\right)$, 使得$p\left(a\right)=f\left(a\right), p\left(b\right)=f\left(b\right), p\left(x\right)=0$

$$f\left(x\right)=p\left(x\right)+r\left(x\right), r\left(x\right)=\frac{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}{2}f''\left(\theta\left(x\right)\right)$$

$$f''\left(\theta\left(x\right)\right)=\frac{2f\left(x\right)}{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}\in C\left[a,b\right]$$

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^b\frac{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}{2}f''\left(\theta\left(x\right)\right)dx$$

$$=f''\left(\xi\right)\int_a^b\frac{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}{2}dx=\frac{1}{12}f''\left(\xi\right)\left(b-a\right)^{3}$$

一句话总结一下;用一个多项式去和某些初值相同然后考虑

f和这个多项式差了多少, 也就是余项.

回忆课本(默认函数对应光滑性足够)

要拟合$f(a)$

$$f(x)=f(a)+f'(\theta)(x-a)=p(x)+r(x)$$

要拟和$f(a),f'(a),f''(a),\cdots,f^{(n-1)}(a)$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(x-a)^n=p(x)+r(x)$$

要拟和$f(a),f(b)$

两个初值条件,确定一次函数

$$f(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{(x-a)(x-b)}{2!}f''(\theta)=p(x)+r(x)$$

要拟和$f'(a),f(b)$(其实应该拟和$f(a),f'(a),f(b)$,不能只拟和函数值)

三个初值条件,确定二次函数p(三个条件三个未知数解方程)

$$f(x)=p(x)+\frac{(x-a)^2(x-b)}{3!}f'''(\theta)=p(x)+r(x)$$

要拟和$f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$

n个初值条件,确定$n-1$次多项式p,此时叫做拉格朗日插值.

$$p(x)=\frac{(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}f(x_1)+\cdots+\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}f(x_n)$$

$$r(x)=\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{n!}f^{(n)}(\theta)$$

现在如果要拟合高阶的$f^{(j_1)}(x_1),f^{(j_2)}(x_2),\cdots,f^{(j_n)}(x_n),0\le j_i\le k_i,i=1,2,\cdots,n$

$p(x)$没有直接表达，只能具体数字具体解方程算

$$r(x)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^{k_i+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n}k_i+n\right)!}f^{\left(\sum_{i=1}^{n}k_i+n\right)}(\theta)$$

但是有一种特殊情况有一个p的算法,即所有拟和的点的导数不超过1阶

或者说$k_i\le 1,i=1,2,\cdots,n$

待定$p(x)=w(x)+k(x)\prod_{i=1}^{n}(x-x_i),w(x)$是拉格朗日插值部分,

$k(x)$次数是k_i中为1的个数少1,$k(x)$待定多项式.

$f(x)\in D^3[0,1]$，$f(0)=-1, f'(0)=f(1)=0$, 存在$\theta\in(0,1)$

使得$f(x)=x^2-1+\dfrac{x^2(x-1)}{3!}f^{(3)}(\theta)$

分析：

拟合2个点, 三个初值条件, 所以拟和的多项式是二次

$$f(x)=x^2-1+\frac{x^2(x-1)}{3!}f^{(3)}(\theta)$$

固定操作法算p:

$$p(x)=\frac{x-1}{0-1}f(0)+\frac{x-0}{1-0}f(1)+cx(x-1)$$

$$=x-1+cx(x-1), p'(x)=1+cx-c+cx$$

$$p'(0)=0\Rightarrow c=1\Rightarrow p(x)=x^2-1$$

考试中证明：

对$x\in[0,1]$, 记K使得$f(x)=x^2-1+\dfrac{x^2(x-1)}{3!}K$

那么令$F(y)=f(y)-y^2+1-\dfrac{y^2(y-1)}{3!}K$

$$F(0)=F'(0)=F(1)=0=F(x)$$

$$F'(y)=f'(y)-2y-\frac{3y^2-2y}{6}K$$

$$F''(y)=f''(y)-2-\frac{3y-1}{3}K$$

$$F'''(y)=f'''(y)-K$$

反复罗尔我们知道存在$\theta\in(0,1)$

使得$f'''(\theta)=K$, 恰好就是$f(x)=x^2-1+\dfrac{x^2(x-1)}{3!}K$

证毕！

插值法模型合计两种：

$1: f(x)=p(x)+r(x)$,注意光滑性要高一阶；

$2: f(x)$，$p(x)$有很多初值相同的点,如果p是n次的,

那么反复罗尔实际上有$f^{(n)}(\theta)=p^{(n)}(\theta)$.

$f(x)\in D^2[0,1], f(0)=f(1), f'(1)=1$, 证明 存在$\xi\in(0,1)$

使得$f''(\xi)=2$.

证明：

拟合$f(1), f'(1), f(0)$,得到p是二次的,余项要到3阶导,所以第二种模型

因此存在$\xi\in(0,1)$,使得$f''(\xi)=p''(\xi)=2$倍p的首系数

$$p(x)=\frac{x-1}{0-1}f(0)+\frac{x-0}{1-0}f(1)+cx(x-1)$$

$$=(1-x)f(0)+xf(1)+cx(x-1)=f(0)+cx(x-1)$$

$$p'(x)=cx-c+cx, p'(1)=c=1$$

因此$f''(\xi)=2c=2$.

$f\in C^3[0,1], f(0)=1, f(1)=2, f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 证明存在$\theta\in(0,1)$, 使得

$|f'''(\theta)|\geq 24$

证明：拟合$f(0)$，$f(1)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=a$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)$

四个条件确定三次函数，余项四阶，但是只有3阶可导，第二种模型

$f'''(\theta)=p'''(\theta)=6p$首系数,拉格朗日插值代码是interp

$$p(x)=(6-4a)x^2+(4a-5)x+1+cx(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$p'\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow 1-\frac{c}{4}=0\Rightarrow c=4\Rightarrow f'''(\theta)=24$$

作业：

$f(x)\in D^3[-1,1]$

证明当$f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0,$ 存在$\theta\in(-1,1),$ 使得$f'''(\theta)=3$

决赛真题：

若$f\in C^1[0,1]$且满足$\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{2},\int_0^1 xf(x)dx=\frac{3}{2}$

证明存在$\eta\in(0,1)$使得$f'(\eta)=3$

证明：

$F(x)=\int_0^x f(y)dy$，$F(0)=0$，$F(1)=\frac{5}{2}$

$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{5}{2}-\int_0^1 F(x)dx=\frac{3}{2}\Rightarrow\int_0^1 F(x)dx=1$

F是2阶可导, 插$F(0)$，$F(1)$，此时p一次, 余项二次

应该是第一种模型

$F(x)=\frac{5}{2}x+\frac{x(x-1)}{2}f'(\theta(x))$

$1=\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1\frac{5}{2}x+\frac{x(x-1)}{2}f'(\theta(x))dx$

$=\frac{5}{4}+f'(\eta)\int_0^1\frac{x(x-1)}{2}dx=\frac{5}{4}-\frac{1}{12}f'(\eta)$

因此$f'(\eta)=3$

$f\in C^3\left[-a,a\right],a>0,$满足$f\left(a\right)-f\left(-a\right)=a^3,f'\left(0\right)=0$

证明：存在$\eta\in\left(-a,a\right),$使得$f'''\left(\eta\right)=3$

证明：

$f\left(a\right)$，$f\left(-a\right)$，$f\left(0\right),f'\left(0\right),p$是3次多项式, 余项四次

只有3阶光滑性,因此是第二种模型

$f'''\left(\eta\right)=p'''\left(\eta\right)=6$倍$p$首系数

$p\left(x\right)=w\left(x\right)+c\left(x-a\right)\left(x+a\right)x=w\left(x\right)+c\left(x^3-a^2x\right),$

w是二次的拉格朗日插值部分，它是什么不重要

$p\left(a\right)-p\left(-a\right)=a^3,p'\left(x\right)=w'\left(x\right)+c\left(3x^2-a^2\right)$

从而0=$w'\left(0\right)-ca^2\Rightarrow c=\dfrac{w'\left(0\right)}{a^2}.$

现在你只需要算出w即可，但是本题w是一个二次函数

而$w\left(a\right)-w\left(-a\right)=f\left(a\right)-f\left(-a\right)=a^3$

$w=tx^2+ux+v,w'\left(0\right)=u,2ua=a^3\Rightarrow u=\dfrac{a^2}{2}$

$c=\dfrac{1}{2}\Rightarrow f'''\left(\eta\right)=3$

要注意，以前的任何中值定理，本质上都是特殊的插值.

$f(x)$是周期1的连续函数，且在$(0,1)$可导，$f(1)=0$，$f(x)$在$[1,2]$取得最大值M

证明存在$\theta\in(1,2)$，使得$f'(\theta)\geq 2M$.

证明：

$M\leq 0$，则$f\equiv 0$，下面设$M>0$

$f(2)=f(1)=0$，如果插两个点$f(2),f(1)$，p是一次的，余项2次

只有一阶导，所以套第二个模型

$f'(\theta)=p'(\theta)=0$

上面就是罗尔中值定理的插值观点.

实际上本题的模型是靠近谁，用谁的插值.

设$x_0\in[1,2]$是$f(x)$最大值点，那么当$1\leq x_0\leq\dfrac{3}{2}$

拟合一个点$f(1)$，实际上就是拉格朗日中值定理

$f(x)=f(1)+f'(\theta)(x-1)=f'(\theta)(x-1)$

那么$f'(\theta)=\dfrac{f(x_0)}{x_0-1}\geq\dfrac{f(x_0)}{\dfrac{3}{2}-1}=2f(x_0)=2M$

当$\dfrac{3}{2}\leq x_0\leq 1$，此时拟合$f(2)$，大家自行完成剩下的细节.

$f\in C[0,1]\cap D(0,1)$，$|f'(x)|\leq M$，

若存在$\theta\in(0,1)$，$\int_0^\theta f(x)dx=0$，证明$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\leq\dfrac{1-\theta}{2}M$

证明：

$F(x)=\int_0^x f(y)dy$，$F(0)=F(\theta)=0$，拟合这两个点

p一次，余项2次，F 2阶光滑性，因此第一种模型

所以$F(x)=\dfrac{x(x-1)}{2}F''(\xi)=\dfrac{x(x-\theta)}{2}f'(\xi)$

$|F(1)|\leq\dfrac{(1-\theta)}{2}M$，证毕！