全国大学生数学竞赛非数学类模拟四

清疏竞赛考研数学

2023 年 9 月 11 日

摘要

$$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\},\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}.$$

模拟试题应当规定时间独立完成并给予反馈.

1 填空题

填空题 1.1 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((2x)^{1+\frac{1}{2x}}-x^{1+\frac{1}{x}}-x\right)=$ __________

填空题 1.2 $f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-1|}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最大值为 $=$ __________

填空题 1.3 两曲面 $3x^2+2y^2=2z+1, x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0$ 在交点 $(1,1,2)$ 处两法线的夹角 (取锐角) 为 __________

填空题 1.4 计算级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}=$ __________

填空题 1.5 计算 $\int_0^1\left[(e-1)\sqrt{\ln(1+(e-1)x)}+e^{x^2}\right]dx=$ __________

2 选择题答案区

3　解答题

解答题 3.1 证明: 方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2\left(y-y^3\right)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z=0$ 在 $x=uv, y=\frac{1}{v}$ 替换下形式不变.

解答题 3.2 计算

$$\iiint_{\Omega}\left(y^2+z^2\right)dxdydz,$$

这里

$$\Omega=\left\{(x,y,z):x^2+y^2\leqslant a^2\,(a>0)\,,|z|\leqslant\frac{h}{2}\,(h>0)\right\}.$$

解答题 3.3 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上 $n+1$ 阶可微. 对 $a<b$, 若

$$\ln\left(\frac{f(b)+f'(b)+\cdots+f^{(n)}(b)}{f(a)+f'(a)+\cdots+f^{(n)}(a)}\right)=b-a,$$

证明存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f^{(n+1)}(c)=f(c)$.

解答题 3.4 设连续函数 $f:[1,8]\to\mathbb{R}$ 满足

$$\int_1^2 f\left(t^3\right)^2 dt+2\int_1^2 f\left(t^3\right)dt=\frac{2}{3}\int_1^8 f\left(t\right)dt-\int_1^2\left(t^2-1\right)^2 dt.$$

求 f 表达式.

解答题 3.5 给定递增连续函数 $f:[0,1]\to(0,+\infty)$, 对每个 $a\geqslant 0$, 证明

$$\int_0^1 \frac{x^{a+1}}{f\left(x\right)}dx \leqslant \frac{a+1}{a+2}\int_0^1 \frac{x^a}{f\left(x\right)}dx.$$

解答题 3.6 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续可微的递增函数, 满足

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=1.$$

证明

(1): 序列

$$x_n=f\left(\frac{1}{1}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)-\int_1^n f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

收敛.

(2): 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{n+1}\right)+f\left(\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2021n}\right)\right).$$