全国大学生数学竞赛非数学类模拟九

清疏竞赛考研数学

2023 年 10 月 25 日

摘要

$$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\},\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}.$$

模拟试题应当规定时间独立完成并给予反馈.

1 填空题

填空题 1.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt\right)^{x^2}=$ $\underline{e^{\frac{1}{2}}}$

填空题 1.2 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域二阶可微且 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ $\underline{e^2}$

特殊值法, 取 $f(x)=2x^2$, $\lim\limits_{x\to0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^3=e^3$

填空题 1.3 设 φ,ψ 都是光滑函数且 $y=x\varphi(z)+\psi(z)$ 确定一个函数 $z=z(x,y)$, 则 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ $\underline{0}$

$x\varphi(z)+\psi(z)-y=0$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\varphi(z)}{x\varphi'(z)+\psi'(z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-1}{x\varphi'(z)+\psi'(z)}$

填空题 1.4 过点 $(1,1,1)$ 且垂直于两个平面 $x-y+z=0,2x+3y-12z+6=0$ 的平面方程为 $\underline{9x+14y+5z-28=0}$.

$(1,-1,1)$　$(2,3,-12)$

填空题 1.5 设 $k\in\mathbb{N}$, 计算 $\lim\limits_{x\to1}\left[\left(x^k-1\right)^{n+1}\frac{d^n\left(\frac{1}{x^k-1}\right)}{dx^n}\right]=$ $\underline{(-1)^n n!\cdot k^n}$

1.1 $x^2\ln\left(2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt\right)\sim x^2\left(2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt-1\right)$

$$\sim\frac{\int_0^x e^{t^2}dt-\frac{e^{x^2}}{2x}}{\frac{e^{x^2}}{2x^3}}\overset{洛}{\sim}\frac{e^{x^2}-\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)'}{\left(\frac{e^{x^2}}{2x^3}\right)'}=\frac{x^2}{\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)(2x-\sqrt{6})}\to\frac{1}{2}$$

2 选择题答案区

1.2 $\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3+g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$,

则 $1+x+\frac{f(x)}{x}=[e^3+g(x)]^x$, $\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\left[[e^3+g(x)]^x-x\right]^{\frac{1}{x}}$

$$=e^{\frac{\ln([e^3+g(x)]^x-x)}{x}}\sim e^{\frac{[e^3+g(x)]^x-1-x}{x}}=e^{\frac{e^{x\ln(e^3+g(x))}-1}{x}-1}$$

替换 $\sim e^{\ln(e^3+g(x))-1}\to e^2$

1.4: 设平面法向量为 a,b,c, 则 $\begin{cases}a-b+c=0\\2a+3b+12c=0\end{cases}\Rightarrow(a,b,c)=(9,14,5)$

1.5: $\lim\limits_{x\to 1}(x^k-1)^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^k-1}\right)$

$\frac{1}{x^k-1}=-\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})}$, $\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$, $\left(\frac{1}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}$

$\cdots\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(j)}=\frac{j!}{(1-x)^{j+1}}$

$$-\left(\frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{(1+x\cdots+x^{k-1})}\right)^{(n)}=-\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-k)}\left(\frac{1}{1+x+x^2\cdots+x^{k-1}}\right)^{(k)}$$

故极限为 $\lim\limits_{x\to 1}\left(-C_n^0\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}\frac{(x^k-1)^{n+1}}{1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}-\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\quad(x-1)^{n+1}(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})^n$

$=\quad(-1)^n\cdot n!\,k^n$

3 解答题

解答题 3.1 设 $f \in C(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha.$$

证明, 对任何 $r > 0$, 存在 $x, y \in \mathbb{R}$, 使得

$$y - x = r, f(x) = f(y).$$

证明: 若$\exists r_0>0$, 使 $g(x)=f(x+r_0)-f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

不妨设 $g(x)>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, 即 $f(x+r_0)>f(x)$

$f(x+2r_0)>f(x+r_0)$, 又 $f(x)>f(x-nr_0)$

$\vdots$

$f(x+nr_0)>f(x)$

故 $f(x+nr_0) \geq f(x+r_0) > f(x) > f(x-r_0) \geq f(x-nr_0)$, $\forall n \geq 1$

令 $n \to +\infty$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+nr_0) = a = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x-nr_0)$. 故

$a \geq f(x+r_0) > f(x-r_0) \geq a$, 矛盾!

故$\exists x, y \in \mathbb{R}$, 使 $y-x=r$ 且 $f(x)=f(y)$. 证毕!

解答题 3.2 证明如下不等式

$$\frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{ne}, \forall n > 1.$$

证明: 原不等式等价于 $\frac{1}{2n} < 1 - e(1-\frac{1}{n})^n < \frac{1}{n}$, $n>1$

$$\iff 1-\frac{1}{n} < e(1-\frac{1}{n})^n < 1-\frac{1}{2n}$$

$$\iff \ln(1-\frac{1}{n}) < 1+n\ln(1-\frac{1}{n}) < \ln(1-\frac{1}{2n})$$

$$\iff -\ln(1-\frac{1}{n}) > -1-n\ln(1-\frac{1}{n}) > -\ln(1-\frac{1}{2n})$$

由 $-\ln(1-x)=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{x^m}{m}$ $x\in(0,1)$, 我们有

$$\iff \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{n^m m} > -1+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{m-1}m} > \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{2^m n^m\cdot m}$$

$$\iff \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m n^m} > \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^m\cdot(m+1)} > \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\cdot 2^m\cdot n^m}$$

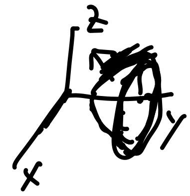
由 $\frac{1}{m} > \frac{1}{m+1} > \frac{1}{2^m\cdot m}$, $\forall m\in N$, 故不等式成立.

解答题 3.3 计算

$$I_1=\iint_{\Sigma}(8y+1)\,xdydz+2\left(1-y^2\right)dzdx-4yzdxdy,$$

这里 Σ 是 yOz 平面上由曲线 $z=\sqrt{y-1}\,(1\leqslant y\leqslant 3)$ 绕 y 轴旋转一周形成的曲面, 其法向量和 y 轴正向夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

解:



曲面: $y=1+x^2+z^2$

补充 $y=3$, 积分为 I_2, 方向朝右,

由Gauss公式, $I_1+I_2=\iiint(8y+1-4y-4y)\,dV=\iiint dV$

其中 $\iiint dV=\iiint_{1\leq z\leq 1+x^2+y^2}1\,dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\,dr\int_{1+r^2}^{3}1\,dV$

$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(2-r^2)\,r\,dr=2\pi$

$I_2=\iint_{\Sigma}2(1-3^2)\,dzdx=-16\iint_{\Sigma}dzdx$

$=-16\cdot\pi\cdot 2$

$=-32\pi$

故 $I_1=34\pi$.

解答题 3.4 发现全部可微函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, 使得

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\sqrt{ab})\forall a,b>0.$$

解: 显然 $f\in C^\infty(0,+\infty)$, $f(b^2)-f(a^2)=(b^2-a^2)f'(ab)$.

$$2bf'(b^2)=2bf'(ab)+(ab^2-a^3)f''(ab)$$

$$0=2b^2f''(ab)+(b^2-3a^2)f''(ab)+b(ab^2-a^3)f'''(ab)$$

令 $b=1$, 有 $0=2f''+(1-3a^2)f''+(a-a^3)f'''$

$$=3(1-a)(1+a)f''+a(1-a)(1+a)f'''$$

故 $0=3f''+af'''$

故 $f(a)=C_1+C_2a+\dfrac{C_3}{a}$, $a>0$.

代入验证知上述 f 为所求.

解答题 3.5 设 $f \in C^1[0,1]$, 证明

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|\,dx.$$

证明: 由积分中值定理, $\exists\, \theta_1 \in (0,\frac{1}{2})$, 使 $|f(\theta_1)| = 2\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\,dx$

$\theta_2 \in (\frac{1}{2},1)$, 使 $|f(\theta_2)| = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|\,dx$.

故
$$\begin{aligned}\left|f(\tfrac{1}{2})\right| &\leq \left|f(\tfrac{1}{2}) - f(\theta_1)\right| + |f(\theta_1)| \\ &\leq \int_{\theta_1}^{\frac{1}{2}} |f'(y)|\,dy + 2\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\,dx \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(y)|\,dy + 2\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|f(\tfrac{1}{2})\right| &\leq \left|f(\tfrac{1}{2}) - f(\theta_2)\right| + |f(\theta_2)| \\ &\leq \int_{\frac{1}{2}}^{\theta_2} |f'(y)|\,dy + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|\,dx \\ &\leq \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(x)|\,dx + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|\,dx\end{aligned}$$

故 $\left|f(\frac{1}{2})\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|\,dx + \int_0^1 |f(x)|\,dx$, 证毕!

解答题 3.6 设 $f \in C^1(a,b)$ 满足 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ 和 $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$ 以及

$$f'(x) + f^2(x) \geqslant -1, \forall x \in (a,b).$$

求 $b-a$ 最小值.

草稿: $y' + y^2 = -1 \Rightarrow \frac{y'}{y^2+1} = -1 \Rightarrow \arctan y = -x + C$

证明: 令 $C(x) = \arctan f(x) + x$, $C'(x) = \frac{f'(x) + f^2(x) + 1}{1 + f^2(x)} \geqslant 0.$

故 $C(x)$ 单调递增, $\lim\limits_{x \to a^+} C(x) = \frac{\pi}{2} + a \leqslant \lim\limits_{x \to b^-} C(x) = -\frac{\pi}{2} + b$

故 $b - a \geqslant \pi$.

取 $f(x) = -\tan\left(x - a + \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in (a, a+\pi)$

$$f'(x) = -\left[\tan^2\left(x - a + \frac{\pi}{2}\right) + 1\right]$$

$= -f^2(x) - 1$, 因此 $b-a$ 的最小值为 π.