

全国大学生数学竞赛非数学类模拟二

清疏竞赛考研数学

2023 年 9 月 3 日

摘要

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}, \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

模拟试题应当规定时间独立完成并给予反馈.

1 填空题

填空题 1.1 给定 $[0, 1]$ 上的正值连续函数 f , 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right)} =$

填空题 1.2 过点 $(2, 0, 0)$ 做曲面 $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ 的全部切线, 则全部切线组成的曲面方程为 _____

填空题 1.3 设 $n > 0$ 且 $\int_1^\infty \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} dx$ 收敛, 则 m, n 的范围是 = _____

填空题 1.4 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) \ln \sin x dx =$ _____

填空题 1.5 微分方程 $4y'' + 4xy' + x^2y = 2e^{x-\frac{x^2}{4}}$ 的通解为 _____

2 选择题答案区

3 解答题

解答题 3.1 设 $z = f(u, v)$, u, v 由方程组 $\begin{cases} u + v = g(xy) \\ u - v = h\left(\frac{x}{y}\right) \end{cases}$ 确定的 x, y 的函数, 这里 f, g, h 连续可微, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解答题 3.2 设 $f \in C[0, 1]$ 且满足 $\int_0^1 x^2 f(x) dx = 1$, 证明

(1): 存在 $\theta \in [0, 1]$, 使得 $|f(\theta)| \geq 3$.

(2): 若还有 $\int_0^1 x f(x) dx = 0$, 证明存在 $\theta \in [0, 1]$, 使得 $|f(\theta)| \geq 10.2$.

解答题 3.3 对 $n \in \mathbb{N}, a > 0$, $L_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2n+1} + y^{2n+1} = ax^n y^n\}$ 围成区域记为 D_n , 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS_{D_n},$$

这里 S_{D_n} 表示 D_n 的面积.

解答题 3.4 设区域 D 由 $y = x^2, y = x$ 所围成,

(1): 求区域 D 绕 $y = x$ 旋转一周形成的旋转体体积.

(2): 求区域 D 绕 $y = x$ 旋转一周形成的旋转体表面积.

解答题 3.5 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 设

$$a_n > 0, n = 1, 2, \dots, s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty.$$

记

$$t_n = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_{k_1}} \frac{1}{a_{k_1} + a_{k_2}} \cdots \frac{1}{a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_n}} \right).$$

计算 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$.

解答题 3.6 设 a_n 递减到 0 且满足

$$\frac{1}{2}(a_n + a_{n+2}) \geq a_{n+1}, n = 1, 2, \cdots.$$

则对 $\theta \in (0, 2\pi)$, 证明

(1): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta$ 收敛.

(2): $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta \geq 0$.