2018 年第十届全国大学生数学竞赛初赛

（非数学类）试卷

一、填空题（本题满分 24 分，共 4 小题，每小题 6 分）

(1) 设$\alpha\in\left(0,1\right)$，则$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(n+1\right)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]=$________.

(2)若曲线$y=y\left(x\right)$由$\begin{cases}x=t+\cos t\\ e^{y}+ty+\sin t=1\end{cases}$确定,则此曲线在$t=0$对应点处的切线方程为________.

(3) $\displaystyle\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)}{\left(1+x^{2}\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}\,x=$__________.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^{2}}=$__________.

二（本题满分 8 分） 设函数$f\left(t\right)$在$t\neq0$时一阶连续可导，且$f\left(1\right)=0$，求函数$f\left(x^{2}-y^{2}\right)$，使得曲线积分$\displaystyle\int_{L}y\left[2-f\left(x^{2}-y^{2}\right)\right]\mathrm{d}\,x+xf\left(x^{2}-y^{2}\right)\mathrm{d}\,y$与路径无关，其中$L$为任一不与直线$y=\pm x$相交的分段光滑曲线.

三（本题满分 14 分） 设$f\left(x\right)$在区间$\left[0,1\right]$上连续，且$1\leq f\left(x\right)\leq3$. 证明:

$$1\leq\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}\,x\int_{0}^{1}\frac{1}{f\left(x\right)}\mathrm{d}\,x\leq\frac{4}{3}.$$

四（本题满分 12 分） 计算三重积分$\displaystyle\iiint\limits_{(V)}\left(x^{2}+y^{2}\right)\mathrm{d}\,V$，其中$\left(V\right)$是由

$$x^{2}+y^{2}+\left(z-2\right)^{2}\geq4,x^{2}+y^{2}+\left(z-1\right)^{2}\leq9$$

及$z\geq0$所围成的空间图形.

五（本题满分 14 分） 设$f\left(x,y\right)$在区域D内可微，且$\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^{2}+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^{2}}\leq M$，$A\left(x_{1},y_{1}\right),B\left(x_{2},y_{2}\right)$是$D$内两点，线段$AB$包含在$D$内. 证明：$\left|f\left(x_{1},y_{1}\right)-f\left(x_{2},y_{2}\right)\right|\leq M\,|\,AB\,|$，其中$|\,AB\,|$表示线段$AB$的长度.

六（本题满分 14 分） 证明：对于连续函数$f\left(x\right)>0$，有$\displaystyle\ln\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}\,x\geq\int_{0}^{1}\ln f\left(x\right)\mathrm{d}\,x.$

七 (本题满分 14 分) 已知$\left\{a_{k}\right\},\left\{b_{k}\right\}$是正数数列，且$b_{k+1}-b_{k}\geq\delta>0,k=1,2,\cdots$，$\delta$为一常数. 证明：若级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}a_{k}$收敛，则级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{\left(a_{1}a_{2}\cdots a_{k}\right)\left(b_{1}b_{2}\cdots b_{k}\right)}}{b_{k+1}b_{k}}$收敛.