2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛
（数学类）试卷

一、(本题 15 分) 平面 R^2 上两个半径为 r 的圆 C_1, C_2 外切于 P 点，将圆 C_2 沿 C_1 的圆周（无滑动）滚动一周，这时 C_2 上的 P 点也随 C_2 的运动而运动。记 Γ 为 P 点的运动轨迹曲线，称为心脏线。现设 C 为以 P 的初始位置（切点）为圆心的圆，其半径为 R。记 $\gamma: R^2 \cup \{\infty\} \to R^2 \cup \{\infty\}$ 为圆 C 的反演变换，它将 $Q \in R^2 \setminus \{P\}$ 映成射线 PQ 上的点 Q'，满足 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ'} = R^2$. 求证：$\gamma(\Gamma)$ 为抛物线。

二、(本题 10 分) 设 n 阶方阵 $B(t)$ 和 $n \times 1$ 矩阵 $b(t)$ 分别为

$$B(t) = \left(b_{ij}(t)\right), b(t) = \left(b_1(t), \cdots, b_n(t)\right)^T,$$

其中 $b_{ij}(t), b_i(t)$ 均为关于 t 的实系数多项式，$i, j = 1, 2, \cdots, n$。记 $\mathrm{d}(t)$ 为 $B(t)$ 的行列式，$\mathrm{d}_i(t)$ 为用 $b(t)$ 替代 $B(t)$ 的第 i 列后所得的 n 阶矩阵的行列式。若 $\mathrm{d}(t)$ 有实根 t_0，使得 $B(t_0)X = b(t_0)$ 成为关于 X 的相容线性方程组，试证明：$\mathrm{d}(t), \mathrm{d}_1(t), \cdots, \mathrm{d}_n(t)$ 必有次数大于等于 1 的公因式。

三、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上有二阶连续导数，$f'(0) = 1, f''(0) \neq 0$ 且 $0 < f(x) < x, x \in (0, a)$. 令 $x_{n+1} = f(x_n), x_1 \in (0, a)$.

(1) 求证 $\{x_n\}$ 收敛并求极限；

(2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛？若不收敛，则说明理由；若收敛，则求其极限。

四、(本题 15 分) 设 $a > 1$，函数 $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 可微，求证：存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得 $f'(x_n) < f(ax_n), n = 1, 2, \cdots$.

五、(本题 20 分) 设 $f: [-1, 1] \to R$ 为偶函数，f 在 $[0, 1]$ 上单调递增，又设 g 是 $[-1, 1]$ 上的凸函数，即对任意 $x, y \in [-1, 1]$ 及 $t \in (0, 1)$ 有

$$g(tx + (1-t)y) \le tg(x) + (1-t)g(y).$$

求证：$2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x.$

六、(本题 25 分) 设 $R^{n\times n}$ 为 n 阶实方阵全体，E_{ij} 为 (i, j) 位置元素为 1，其余位置元素为 0 的 n 阶方阵，$i, j = 1, 2, \cdots, n$. 让 Γ_r 为秩等于 r 的 n 阶实方阵全体，$r = 0, 1, 2, \cdots, n$，并让 $\phi: R^{n\times n} \to R^{n\times n}$ 为可乘映照，即满足：$\phi(AB) = \phi(A)\phi(B), \forall A, B \in R^{n\times n}$.

试证明：(1) $\forall A, B \in \Gamma_r$，秩 $\phi(A) =$ 秩 $\phi(B)$。

(2) 若 $\phi(0) = 0$，且存在某个秩为 1 的矩阵 W，使得 $\phi(W) \neq 0$，则必存在可逆方阵 R 使得 $\phi(E_{ij}) = RE_{ij}R^{-1}$ 对于一切 E_{ij} 皆成立，$i, j = 1, 2, \cdots, n$.