

线性代数

全国大学生数学竞赛真题集（线性代数）

作者：李炤一

时间：July, 2022

版本：Second

b 站 up 主：李炤一



酌贪泉而觉爽, 处涸辙以犹欢。——王勃

目录

第 1 章 第五届决赛	1
1.1 矩阵多项式	1
1.2 秩 1 矩阵	1
1.3 正定矩阵	3
第 2 章 第六届决赛	5
2.1 矩阵高次幂	5
第 3 章 第七届决赛	7
第 4 章 第八届决赛	8
第 5 章 第九届决赛	9
第 6 章 第十届决赛	10
第 7 章 第十一届决赛	11
第 8 章 第十二届决赛	12

第1章 第五届决赛

题目 1.1

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & a \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 其中 a 为常数, 矩阵 B 满足关系式 $AB = A - B + E$, 其中 E 是单位矩阵且 $B \neq E$ 。若秩 $\text{rank}(A + B) = 3$, 试求常数 a 的值。



题目 1.2

设 A, B 为两个 n 阶正定矩阵, 求证 AB 正定的充要条件是 $AB = BA$ 。



1.1 矩阵多项式

(题目 1.1.1)

设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = O$, 证明 A 及 $A + 2E$ 都可逆, 并求 A^{-1} 和 $(A + 2E)^{-1}$ 。



(题目 1.1.2—2001 考研数学一)

设矩阵 A 满足 $A^2 + A - 4E = O$, 其中 E 为单位矩阵, 则 $(A - E)^{-1}$ 。



(题目 1.1.3)

设矩阵 $A = \alpha\alpha^T$, 其中 α 是 n 维实列向量, α^T 是 α 的转置。又已知 $\alpha^T\alpha = 1$, 矩阵 $B = E + A + A^2 + \dots + A^n$, 其中 E 是 n ($n > 2$) 阶单位矩阵。

(1) 证明 B 是可逆矩阵, 并求 B^{-1} 。

(2) 求行列式 $|B - 3E|$ 。



(题目 1.1.4)

已知二阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, 矩阵 X 满足方程: $AXA - 4AX + XA - 4X - 12A = O$, 求矩阵 X 的行列式。



1.2 秩 1 矩阵

(题目 1.2.1—2021 考研数学一)

已知 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 P , 使得 P^TAP 为对角矩阵。



(题目 1.2.2—2022 考研数学一)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ijx_i x_j$

- (1) 写出 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵。
- (2) 求正交变换 $x = Qy$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形。
- (3) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解。



(题目 1.2.3—1992 考研数学一)

设 $A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}$, 其中 $a_i \neq 0, b_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则矩阵 A 的秩。



(题目 1.2.4—1996 考研数学一)

设 $A = E - \xi \xi^T$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, ξ 是 n 维非零列向量, ξ^T 是 ξ 的转置。

证明: (1) $A^2 = A$ 的充要条件是 $\xi^T \xi = 1$ 。

(2) 当 $\xi^T \xi = 1$ 时, A 是不可逆矩阵。



(题目 1.2.5—1999 考研数学一)

设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1, 则 A 的 n 个特征值是。



(题目 1.2.6—2001 考研数学一)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B ()

- (A) 合同且相似 (B) 合同但不相似
(C) 不合同但相似 (D) 不合同且不相似



(题目 1.2.7—2003 考研数学一)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = P^{-1} A^* P$, 求 $B + 2E$ 的特征值与特征向量, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 3 阶单位矩阵。



(题目 1.2.8—2012 考研数学一)

设 x 为三维单位列向量, E 为 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $E - xx^T$ 的秩。



(题目 1.2.9—2014 考研数学一)

证明: n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似。

(题目 1.2.10—2017 考研数学一)

设 α 是 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则 ()

- (A) $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆 (B) $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆
(C) $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆 (D) $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

1.3 正定矩阵

(题目 1.3.1)

设 A 是 $m \times n$ 的实矩阵 ($m > n$), 证明: $A^T A$ 正定的充分必要条件是 $r(A) = n$ 。

(题目 1.3.2—1999 考研数学一)

设实对称矩阵 $A_{m \times m}$ 正定, $B_{m \times n}$ 为实矩阵, 证明: $B^T A B$ 为正定矩阵的充要条件是 $r(B) = n$ 。

(题目 1.3.3—1999 考研数学三)

设 $A_{m \times n}$ 为实矩阵, E 为 n 阶单位阵, $B = \lambda E + A^T A$, 证明: 当 $\lambda > 0$ 时, B 为正定矩阵。

(题目 1.3.4—1997 考研数学三)

若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$ 是正定的, 求 t 的取值范围。

(题目 1.3.5—2000 考研数学三)

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + a_1x_2)^2 + (x_2 + a_2x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} + a_{n-1}x_n)^2 + (x_n + a_nx_1)^2$ 为一个 n 元实二次型, 试问当参数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足何种条件时, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 正定。

(题目 1.3.6—2005 考研数学三)

设 $D = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 其中 A 和 B 分别为 m 阶和 n 阶实对称矩阵, $C_{m \times n}$ 为实矩阵。

(1) 设 $P = \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix}$, 求 $P^T D P$ 。

(2) 判断 $B - C^T A^{-1} C$ 是否正定矩阵。

(题目 1.3.7—2021 考研数学一)

已知 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$

- (1) 求正交矩阵 P , 使得 $P^T A P$ 为对角矩阵。
 (2) 求正定矩阵 C , 使得 $C^2 = (a+3)E - A$ 。



(题目 1.3.8)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_1 x_3$

- (1) 求正交变换 $x = Qy$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形。
 (2) 若 3 阶正定矩阵 B 满足 $B^2 - A = O$, 求行列式 $|A + B|$ 。



(题目 1.3.9)

假设正定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, 求一个矩阵 D 满足 $A = D^T D$ 。



第2章 第六届决赛

题目 2.1

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \text{ 设, 则 } A^{50}.$$



题目 2.2

设 A_1, A_2, B_1, B_2 均为 n 阶方阵, 其中 A_2, B_2 可逆。证明: 存在可逆矩阵 P, Q 使得 $PA_iQ = B_i$ ($i = 1, 2$) 成立的充要条件是 $A_1A_2^{-1}$ 和 $B_1B_2^{-1}$ 相似。



题目 2.3

设 $f(x, y)$ 为 R^2 上的非负连续函数, 若 $I = \lim_{t \rightarrow +\infty} \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) d\sigma$ 存在极限, 则称广义积分 $\iint_{R^2} f(x, y) d\sigma$ 收敛于 I 。若 $\iint_{R^2} e^{ax^2+2bxy+cy^2} d\sigma$ 收敛于 I , 实二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 在正交变换下的标准二次型为 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$ 。证明 λ_1, λ_2 都小于零。



2.1 矩阵高次幂

(题目 2.1.1)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}, \text{ 则 } A^n.$$



(题目 2.1.2)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 求 } A^{10}.$$



(题目 2.1.3)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 求 } A^n.$$



(题目 2.1.4)

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^{2021} 。



(题目 2.1.5)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1) 证明当 $n > 1$ 时, $A^n = A^{n-2} + A^2 - E$ 。

(2) 求 A^n 。



(题目 2.1.6—1992 考研数学一)

设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 对应的特征向量依次为 $\xi_1 = (1, 1, 1)^T, \xi_2 = (1, 2, 4)^T, \xi_3 = (1, 3, 9)^T$, 向量 $\beta = (1, 1, 3)^T$ 。

(1) 将 β 用 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性表出。

(2) 求 $A^n \beta$ 。



第3章 第七届决赛

题目 3.1

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的特征值, $f(x)$ 为多项式, 则矩阵 $f(A)$ 的行列式的值。



题目 3.2

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, C 是 $p \times q$ 矩阵。证明: $R(AB) + R(BC) - R(B) \leq R(ABC)$, 其中 $R(X)$ 表示矩阵 X 的秩。



第4章 第八届决赛

题目 4.1

已知 A 为 n 阶可逆反对称矩阵, b 为 n 元列向量, 设 $B = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\text{rank}(B)$ 。



题目 4.2

设 n 阶方 A, B 满足 $AB = A + B$ 。证明: 若存在正整数 k , 使得 $A^k = O$ (O 为零矩阵), 则行列式 $|B + 2017A| = |B|$ 。



第5章 第九届决赛

题目 5.1

设 a, b, c, d 是互不相同的正实数, x, y, z, w 是实数, 满足 $a^x = bcd, b^y = cda, c^z = dab, d^w =$

abc , 则行列式
$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -w \end{vmatrix}.$$



题目 5.2

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, 定义 $H(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}, n \geq 2$

(1) 证明: 对任一非零 $x \in R^n, H(x) > 0$ 。

(2) 求 $H(x)$ 满足条件 $x_n = 1$ 的最小值。



第6章 第十届决赛

题目 6.1

已知二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2$, 求 f 的规范形。



题目 6.2

设 A 是 n 阶幂零矩阵, 即满足 $A^2 = O$ 。证明: 若 A 的秩为 r , 且 $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & I_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$, 其中 I_r 为 r 阶单位矩阵。



第 7 章 第十一届决赛

题目 7.1

设 $B_1, B_2, \dots, B_{2021}$ 为空间 R^3 中半径不为零的 2021 个球, $A = (a_{ij})$ 为 2021 阶方阵, 其 (i, j) 元 a_{ij} 为球 B_i 与 B_j 相交部分的体积。证明: 行列式 $|E + A| > 1$, 其中 E 为单位矩阵。



第8章 第十二届决赛

题目 8.1

设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 16 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, 且 $|A| > 0$, $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$, 其中 I 为单位矩阵, 求 B 。



题目 8.2

设 A 是 n 阶实对称矩阵, 证明:

- (1) 存在实对称矩阵 B , 使得 $B^{2021} = A$, 且 $AB = BA$ 。
- (2) 存在一个多项式 $p(x)$, 使得上述矩阵 $B = p(A)$ 。
- (3) 上述矩阵 B 是唯一的。

