第十届清疏竞赛班非数学类 28

级数计算和级数补充知识点

一个重要的无穷积

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), z\in\mathbb{C}.$$

则有$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$无穷积:

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{\sinh(iz)}{i}$$

所以

$$\sinh z = i\sin(-iz) = -i\sin(iz) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

可以推出以$zeta$函数为系数的幂级数:$\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)x^{2k} = \dfrac{1-\pi x\cot\pi x}{2}$

其中$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}, x>1.$

$$\ln\sin z = \ln z + \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\ln\sin(\pi z) = \ln(\pi z) + \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

$$= \ln(\pi z) - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^{2m}}{mn^{2m}}$$

因此$\ln\dfrac{\pi z}{\sin(\pi z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{z^{2m}}{mn^{2m}} = \sum_{m=1}^{\infty}\zeta(2m)\dfrac{z^{2m}}{m}$

两边求导就可以得到$\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)z^{2k} = \dfrac{1-\pi z\cot\pi z}{2}, |z|<1.$

可以推出$\cot x, \dfrac{1}{\sin x}$的有理分式展开:

$$\ln\sin x = \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), x \in (0, \pi)$$

两边求导就有$\cot x = \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{x - n\pi} + \dfrac{1}{x + n\pi}\right)$

而对$x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$,有

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x - \frac{2n-1}{2}\pi} + \frac{1}{x + \frac{2n-1}{2}\pi}\right)$$

再利用$\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{2}\left(\tan\dfrac{x}{2} + \cot\dfrac{x}{2}\right)$.

因此得到$\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{x - n\pi} + \dfrac{1}{x + n\pi}\right), x \in (0, \pi)$.

$A-D$判别法$\left(\text{可以直接使用，证明适用}abel\text{变换即可}\right)$：

对于一般项级数$\sum a_n b_n$，我们有如下判别法：

(1)若$\sum a_n$有界，b_n递减趋于0，则$\sum a_n b_n$收敛

(2)若$\sum a_n$收敛，b_n单调有界，则$\sum a_n b_n$收敛

例子：判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2 \sin n}{n}$收敛性.

证明：$\frac{1}{n}$递减到0且

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k^2 \sin k\right|=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k^2+k\right)-\cos\left(k^2-k\right)\right]\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k\left(k+1\right)\right)-\cos\left(\left(k-1\right)k\right)\right]\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\cos\left(n\left(n+1\right)\right)-1\right|\leq 1.$$

所以由$A-D$判别法我们知道$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2 \sin n}{n}$收敛.

经验：对于$\sin n^2$这种东西在非数学类框架下一般不可解.

根值判别法$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$，我们纠正记忆为$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$即子列极限的最大可能值.

记忆课内常见判别法$\left(\text{可以直接使用}\right)$:

对$a_n > 0$,

$\left(1\right): \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = r$

则$r > 1$时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, $r < 1$时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散

$\left(2\right): \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\ln a_n}{\ln n}\right) = r$

则$r > 1$时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, $r < 1$时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散

记忆一个包含所有经典级数判别法的例子

$\left(\text{证明留作习题,不可直接使用}\right)$

设$a_n > 0$,若$\lim_{n\to\infty}\left[n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]\ln n = G$,则

$\left(1\right)$若$G > 1$,则$\sum a_n$收敛

$\left(2\right)$若$G < 1$,则$\sum a_n$发散

为展示级数判别法的证明例子,我们举例如下：

设$a_n>0$,若$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n=G$,则

(1)若$G>1$,则$\sum a_n$收敛,

(2)若$G<1$,则$\sum a_n$发散.

证明:

(1):由极限的定义,我们知道存在$\varepsilon>0$, $N\in\mathbb{N}$,使得

$$\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n>c\triangleq G-\varepsilon>1,\forall n\ge N.$$

即$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>1+\dfrac{c}{n\ln n}+\dfrac{1}{n},\forall n\ge N.$

因此$\dfrac{a_N}{a_{n+1}}>\prod\limits_{k=N}^{n}\left(1+\dfrac{c}{k\ln k}+\dfrac{1}{k}\right)$

从而$a_{n+1}<a_N\prod\limits_{k=N}^{n}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{c}{k\ln k}+\dfrac{1}{k}\right)}$

估阶角度:
$$\left(\begin{array}{l}
\prod\limits_{k=N}^{n}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{c}{k\ln k}+\dfrac{1}{k}\right)}=e^{-\sum\limits_{k=N}^{n}\ln\left(1+\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}\right)}=Ce^{-\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}\right)}\\
Ce^{-\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}\right)}\sim Ce^{-\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}\right)}\sim Ce^{-\int_2^n\left(\frac{c}{x\ln x}+\frac{1}{x}\right)dx}\\
=Ce^{-c\ln\ln n-\ln n}=\dfrac{C}{n\ln^c n}\\
\text{而}\sum\dfrac{C}{n\ln^c n}\sim\int_2^\infty\dfrac{C}{x\ln^c x}dx=\int_{\ln 2}^\infty\dfrac{C}{y^c}dy<\infty,\\
\text{因此}\sum a_n<\infty.
\end{array}\right)$$

注意到

$$\ln\left(1+\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}\right)-\frac{c}{k\ln k}-\frac{1}{k}=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}\right)^2+o\left(\left(\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}\right)^2\right)$$

因此$\sum_{k=2}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}\right)-\frac{c}{k\ln k}-\frac{1}{k}\right]$收敛, 所以存在$C>0$, 使得

$$e^{-\sum_{k=N}^{n}\ln\left(1+\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}\right)}=e^{-\sum_{k=N}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}\right)-\frac{c}{k\ln k}-\frac{1}{k}\right]+\sum_{k=N}^{n}\left[\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}\right]}\le Ce^{-\sum_{k=N}^{n}\left[\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}\right]}$$

$$\le Ce^{-\sum_{k=N}^{n}\int_k^{k+1}\left[\frac{c}{x\ln x}+\frac{1}{x}\right]dx}=Ce^{-\int_N^{n+1}\left[\frac{c}{x\ln x}+\frac{1}{x}\right]dx}=C'e^{-c\ln\ln n-\ln n}=\frac{C'}{n\ln^c n}$$

因此$\sum_{n=N}^{\infty}a_{n+1}\le a_N\sum_{n=N}^{\infty}\frac{C'}{n\ln^c n}\le a_N C'\sum_{n=N}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x\ln^c x}dx=a_N C'\int_{N-1}^{\infty}\frac{1}{x\ln^c x}dx$

由于$a_N C'\int_{N-1}^{\infty}\frac{1}{x\ln^c x}dx<\infty$,因此$\sum_{n=N}a_n$收敛.

(2):

极限的定义, 我们知道存在$\varepsilon>0, N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n<c\triangleq G+\varepsilon<1,\forall n\ge N.$$

那么$a_{n+1}>a_N\prod_{k=N}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}\right)}$

$$\prod_{k=N}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}\right)}=e^{-\sum_{k=N}^{n}\ln\left(1+\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}\right)}\ge e^{-\sum_{k=N}^{n}\frac{c}{k\ln k}+\frac{1}{k}}$$

因此类似(1), 我们知道$\sum_{n=N}^{\infty}a_{n+1}>C''\int_{N-1}^{\infty}\frac{1}{x\ln^c x}dx$

注意到$c<1$可以知道上式右边积分发散, 因此级数发散.

凝聚判别法

设m_k严格递增的正整数列,a_n非负递减, 且存在$C > 0$, 有

$\left(m_{k+1}-m_k\right) \leq C\left(m_k-m_{k-1}\right)$.试证明

$\sum\left(m_{k+1}-m_k\right)a_{m_k}$和$\sum a_n$有相同的收敛性.

证明：

首先正项级数的收敛性由其子列决定, 因此：

$$\sum a_n=\sum_k \sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} a_j \geq \sum_k \sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} a_{m_{k+1}}=\sum_k\left(m_{k+1}-m_k\right)a_{m_{k+1}} \geq \frac{1}{C}\sum_k\left(m_{k+2}-m_{k+1}\right)a_{m_{k+1}}$$

$$\sum a_n=\sum_k \sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} a_j \leq \sum_k \sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} a_{m_k}=\sum_k\left(m_{k+1}-m_k\right)a_{m_k}$$

因此结合上面两个不等式我们知道$\sum\left(m_{k+1}-m_k\right)a_{m_k}$和$\sum a_n$有相同的收敛性.

(更常用)推论：

设$p \geq 1$是一个自然数, 对非负递减的a_n, $\sum a_n$和$\sum p^n a_{p^n}$有相同的收敛性

证明：因为$p^{k+1}-p^k=p\left(p^k-p^{k-1}\right)$,因此取$m_k=p^k$得到所需结果.

重要模型:设$a_n > 0$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散, 这里$\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\infty$.

证明：

若$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$收敛,由$Cauchy$收敛准则, 存在$m \in \mathbb{N}$, 使得对任何$p \in \mathbb{N}$都有

$$\frac{1}{2} \geq \sum_{n=m+1}^{m+p}\frac{a_n}{S_n} \geq \sum_{n=m+1}^{m+p}\frac{a_n}{S_{m+p}}=\frac{S_{m+p}-S_m}{S_{m+p}}=1-\frac{S_m}{S_{m+p}}, \forall p \in \mathbb{N}.$$

因此令$p \rightarrow \infty$,就有$\frac{1}{2} \geq 1$,矛盾！因此我们证明了$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散

经典结论：

设$\left|x_n\right| \le M, \left|x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n\right| \le K, n = 0,1,2,\cdots$

则$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le 2\sqrt{MK}, n = 0,1,2,\cdots$

分析：回忆我们知道通过f, f''的界能给出f'的界, 本题方法就是从连续版本到离散版本.

证明：

当$M = 0$，那$x_n = 0$恒成立, 则命题成立, 当$K = 0$, 我们有x_n是有界的等差数列, 则必然为常数列，因此命题成立.

所以不妨设$M, K > 0$，不妨只证明$\left|x_1 - x_0\right| \le 2\sqrt{MK}$.

对$n \ge 2$, 我们有

$$M \ge x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(x_k - x_{k-1}\right)$$

$$= x_0 + \left(x_1 - x_0\right)n + \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\left(x_{j+2} - 2x_{j+1} + x_j\right)$$

$$\ge -M + \left(x_1 - x_0\right)n - \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}K$$

$$= -M + \left(x_1 - x_0\right)n - \frac{n\left(n-1\right)}{2}K$$

因此$x_1 - x_0 \le \dfrac{2M}{n} + \dfrac{n-1}{2}K, \forall n \ge 1$.

另外一方面,

$$-M \le x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(x_k - x_{k-1}\right)$$

$$= x_0 + \left(x_1 - x_0\right)n + \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\left(x_{j+2} - 2x_{j+1} + x_j\right)$$

$$\le M + \left(x_1 - x_0\right)n + \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}K$$

$$= M + \left(x_1 - x_0\right)n + \frac{n\left(n-1\right)}{2}K$$

因此$x_1 - x_0 \ge -\dfrac{2M}{n} - \dfrac{n-1}{2}K, \forall n \ge 1$.

故$\left|x_1 - x_0\right| \le \dfrac{2M}{n} + \dfrac{n-1}{2}K, \forall n \ge 1$.

回忆连续版本, 取h是得均值不等式达到取等, 从而得到最好上界,

但离散版本均值不等式取等的n不一定是自然数, 因此还需要一层估计.

$$\left|x_1 - x_0\right| \le \frac{2M}{n} + \frac{n-1}{2}K, \forall n \ge 1.$$

$$\frac{2M}{n} + \frac{n-1}{2}K - 2\sqrt{MK} = \frac{Kn^2 - \left(4\sqrt{KM} + K\right)n + 4M}{2n}$$

只需找到$n \in \mathbb{N}$,使得$Kn^2 - \left(4\sqrt{KM} + K\right)n + 4M \le 0.$

$Kx^2 - \left(4\sqrt{KM} + K\right)x + 4M$的最大零点最小零点之差为$\sqrt{1 + 8\sqrt{\frac{M}{k}}} > 1$

且$K0^2 - \left(4\sqrt{KM} + K\right)0 + 4M > 0$, 对称轴$x = \frac{4\sqrt{KM} + K}{2K} > 0.$

容易知道存在$n \in \mathbb{N}$,使得$Kn^2 - \left(4\sqrt{KM} + K\right)n + 4M \le 0.$

我们就证明了不等式.

注意：实际运用之中未必要导出比较好的界$2\sqrt{MK}$,可以根据需要随便取一个合适的n就可以了.

推出另一个经典结论：

设$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)=0, \sum\limits_{k=1}^{n}a_k$有界, 则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

小知识点，上下极限的另外一个等价定义(记忆且可直接使

$$\limsup_{n\to\infty}a_n \triangleq \lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n}a_k, \liminf_{n\to\infty}a_n \triangleq \lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n}a_k$$

证明：设$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right|\le M, \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\ge n}\left|a_{k+1}-a_k\right|=0$

由上一个结论, 我们知道

$\sup\limits_{k\ge n}\left|a_k\right|\le 2\sqrt{M\sup\limits_{k\ge n}\left|a_{k+1}-a_k\right|}$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n}\left|a_k\right|=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

应用：证明$\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\sqrt{k}$无界.

证明：如$\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\sqrt{k}$有界, 则

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sin\sqrt{k+1}-\sin\sqrt{k}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\cos\theta$$

而$\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=0$, 因此$\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sin\sqrt{k+1}-\sin\sqrt{k}\right)=0.$

因此$\lim\limits_{k\to\infty}\sin\sqrt{k}=0$, 这是矛盾！因此$\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\sqrt{k}$无界.

注意$\lim\limits_{k\to\infty}\sin\sqrt{k}\ne 0$是需要证明的，留作习题.

提示：利用三角恒等式和考虑子列来导出矛盾.