

2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛

(数学类三、四年级) 试卷

一、填空题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

(1) 设 Γ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体: 矩阵的每行每列只有一个非零元素, 且该非零元素为 1, 则 $\sum_{A \in \Gamma} |A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 令 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛, 则 p 取值范围 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $D: x^2 + 2y^2 \leq 2x + 4y$, 则积分 $I = \iint_D (x + y) \, dx \, dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 若实向量 $X = (a, b, c)$ 的三个分量 a, b, c 满足 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{2016} = I_2$, 则 $X = \underline{\hspace{2cm}}$ 或 $\underline{\hspace{2cm}}$ 或 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中, 设 S 为椭圆柱面 $x^2 + 2y^2 = 1$, σ 是空间中的平面, 它与 S 的交集为一个圆. 求所有这样平面 σ 的法向量.

三、(本题 15 分) 设 A, B 为 n 阶实对称矩阵. 证明 $\text{tr}((AB)^2) \leq \text{tr}(A^2 B^2)$.

四、(本题 20 分) 设单位圆 Γ 的外切 n 边形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 各边与 Γ 分别切于 B_1, B_2, \dots, B_n .

令 P_A, P_B 分别表示多边形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 与 B_1, B_2, \dots, B_n 的周长. 求证: $P_A^{\frac{1}{3}} P_B^{\frac{2}{3}} > 2\pi$.

五、(本题 10 分, 抽象代数) 设 u_1, v_1, u_2, v_2 为群 G 中的元素, 满足

$$u_1 v_1 = v_1 u_1 = u_2 v_2 = v_2 u_2.$$

若 u_1, u_2 的阶均为 8, v_1, v_2 的阶均为 13. 证明: $u_1 u_2$ 的阶为 4 及 $v_1 v_2$ 的阶为 13.

六、(本题 10 分, 实变函数) 设 $E \subset \mathbb{R}^1$, E 是 L -可测的, 若 $m(E) > a > 0$, 则存在无内点的有界闭集 $F \subset E$, 使得 $m(F) = a$.

七、(本题 10 分, 微分几何) 设 $\gamma(s), s \in [0, l]$ 是空间中一条光滑闭曲线, 以弧长为参数, 且曲率 $k > 0$. 设 $\beta: [0, l] \rightarrow S^2$ 为单位球面上由 $\gamma(s)$ 的单位主法向量构成的一条简单闭曲线 B . 证明: B 将球面分成面积相等的两个部分.

八、(本题 10 分, 数值分析) 实系数多项式 $p(x)$ 的模 1 范数定义为:

$$\|p\|_1 := \int_0^1 |p(x)| \, dx.$$

1. 求二次实系数多项式 $p(x)$ 使得 $p(x) \leq x^3$, 对任意 $x \in [0, 1]$ 成立, 且 $\|x^3 - p(x)\|_1$ 达到最小.

2. 求三次实系数多项式 $p(x)$ 使得 $p(x) \leq x^4$, 对任意 $x \in [0, 1]$ 成立, 且 $\|x^4 - p(x)\|_1$ 达到最小.

九、(本题 10 分, 复变函数) 设 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 是单位圆盘, $f(z)$ 在 D 上解析,

$f(0) = 0$, 且在 D 上有 $\operatorname{Re} f(z) \leq 1$. 求证: 在 D 上有 $\operatorname{Re} f(z) \leq \frac{2|z|}{1+|z|}$.

十、(本题 10 分, 概率统计) 甲袋中有 $N-1$ ($N > 1$) 个白球和 1 个黑球, 乙袋中有 N 个白球, 每次从甲乙两袋中分别取出一个球并交换放入另一袋中, 这样经过了 n 次, 求黑球出现在甲袋中的概率 p_n , 并计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.