专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

第十二届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案
(数学类高年级组, 2021 年 5 月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四				总分
满分	20	15	15	20	10	10	10	100
得分								

注意:

1. 第一至第四大题是必答题, 再从第五至第十大题中任选 3 题, 题号要填入上面的表中 (多选无效).
2. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 20 分, 每小题 5 分) 填空题

1. 设 $\Omega : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2 \leqslant 1$, 则积分 $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+2y^2+3z^2)\,dxdydz = \underline{\quad \frac{1424\pi}{15} \quad}$.

2. 设 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{e^{k^2}}{k}, y_n = \int_0^n e^{x^2}\,dx$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \underline{\quad 2 \quad}$.

3. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型为 $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}$.

4. 设 A 为 2021 阶对称矩阵, A 的每一行均为 $1, 2, \ldots, 2021$ 的一个排列. 则 A 的迹 $\operatorname{tr} A = \underline{\quad 1011 \times 2021 \quad}$.

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 给定 yOz 平面上的圆 $C: y=\sqrt{3}+\cos\theta,\ z=1+\sin\theta\ (\theta\in[0,2\pi])$.

1. 求 C 绕 z 轴旋转所得到的环面 S 的隐式方程.

2. 设 $z_0\geqslant 0$, 以 $M(0,0,z_0)$ 为顶点的两个锥面 S_1 和 S_2 的半顶角之差为 $\pi/3$, 且均与环面 S 相切 (每条母线都与环面相切), 求 z_0 和 S_1, S_2 的隐式方程.

解答. 1. 由 yOz 平面的圆 C 的参数方程消去参数 θ 可得

$$C:\begin{cases}(y-\sqrt{3})^2+(z-1)^2=1,\\ x=0,\end{cases}$$

由此可得绕 z 轴旋转获得的环面 S 的方程

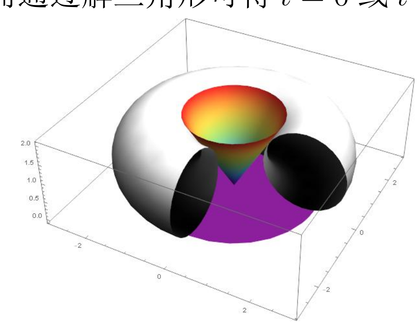
$$(\pm\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{3})^2+(z-1)^2=1,$$

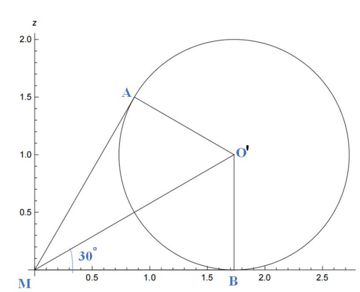
化简得到

$$S:\ (x^2+y^2+(z-1)^2+2)^2=12(x^2+y^2).$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (5 分)

2. 记圆 C 的圆心坐标为 $O'(0,\sqrt{3},1)$, M 的坐标为 $(0,0,t)$, M 与圆 C 的两个切点坐标分别为 A, B, 则由两个圆锥半顶角之差为 $\frac{\pi}{3}$ 可得 $\angle O'MA=\angle O'MB=\frac{\pi}{6}$, 进而通过解三角形可得 $t=0$ 或 $t=2$.

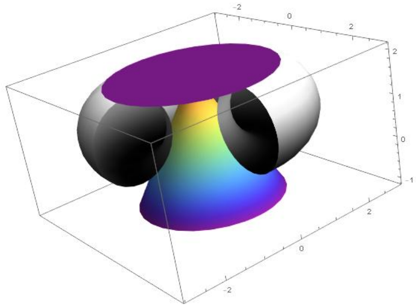


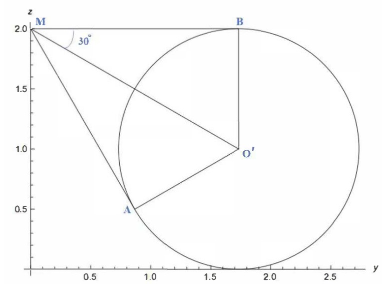


当 $t=0$ 时, 得 $M(0,0,0)$, 此时切点坐标为 $A(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}), B(0,\sqrt{3},0)$, 锥面 S_1 的母线即为直线 MA, 其方程为 $L_1:\begin{cases}x=0,\\ \sqrt{3}y-z=0,\end{cases}$ S_1 即为 L_1 绕 z 轴所得旋转

面，其方程为 $S_1: z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$. 锥面 S_2 的母线即为直线 MB, 其方程为 $L_2: \begin{cases} x=0, \\ z=0, \end{cases}$ S_2 即为 L_2 绕 z 轴所得旋转面，其方程为 $S_2: z=0$.

.... (11 分)





当 $t=2$ 时, 得 $M(0,0,2)$, 此时切点坐标为 $A(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}), B(0,\sqrt{3},2)$, 两条母线的方程分别为

$$L_1': \begin{cases} x=0, \\ \sqrt{3}y+z-2=0 \end{cases} \quad \text{和} \quad L_2': \begin{cases} x=0, \\ z=2. \end{cases}$$

对应的锥面方程为

$$S_1': z=2-\sqrt{3(x^2+y^2)} \quad \text{和} \quad S_2': z=2.$$

.... (15 分)

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 n 阶复方阵 $A_1,\ldots,A_{2n}$ 均相似于对角阵, $\mathbb{C}^n$ 表示复 n 维列向量空间. 证明：

1. $\mathbb{C}^n=\ker A_k\oplus\operatorname{Im}A_k$. 这里 $\ker A_k=\{\alpha|A_k\alpha=0,\alpha\in\mathbb{C}^n\}$, $\operatorname{Im}A_k=\{A_k\beta|\beta\in\mathbb{C}^n\}$ $(k=1,\ldots,2n)$.

2. 若对所有的 $k<j$ 皆有 $A_kA_j=0\,(k,j=1,2,\ldots,2n)$, 则 $A_1,\ldots,A_{2n}$ 中至少有 n 个矩阵为零矩阵.

证明. 由 A_k 可复对角化可知，存在可逆矩阵 $P_k=(p_1^{(k)},\cdots,p_n^{(k)})$ 使得

$$A_kP_k=\operatorname{diag}(\lambda_1^{(k)},\cdots,\lambda_n^{(k)})P_k.$$

不妨设 $p_1^{(k)},\cdots,p_t^{(k)}$ 为关于特征值 0 的特征向量，$p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}$ 为关于特征值$\lambda\neq 0$ 的特征向量. 于是, $\ker A_k=\operatorname{span}\{p_1^{(k)},\cdots,p_t^{(k)}\}$, $\operatorname{Im}A_k=\operatorname{span}\{p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}\}$. 这里若 A_k 不以 0 为特征值时, $\ker A_k=0$. 事实上，若 $\dim\ker A_k>t$, 则特征值 0 的代数重数 $>t$, 矛盾. 从而有 $\ker A_k=\operatorname{span}\{p_1^{(k)},\cdots,p_t^{(k)}\}$.

另一方面，$\forall y\in\mathbb{C}^n$, y 可写成 $y=a_1p_1^{(k)}+\cdots+a_np_n^{(k)}$, 结果 $Ay=a_{t+1}\lambda_{t+1}^{(k)}p_{t+1}^{(k)}+\cdots+a_n\lambda_n^{(k)}p_n^{(k)}\in\operatorname{span}\{p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}\}$. 从而有 $\operatorname{Im}A_k=\operatorname{span}\{p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}\}$. 故有 $\mathbb{C}^n=\ker A_k\oplus\operatorname{Im}A_k$.

………………………………………………………… (5 分)

现由条件 $A_1A_2=0$ 得 $\operatorname{Im}A_2\subseteq\ker A_1$, 进而有

$$\mathbb{C}^n=(\ker A_1\cap\ker A_2)\oplus\operatorname{Im}A_2\oplus\operatorname{Im}A_1.$$

事实上, 由 $\mathbb{C}^n=\ker A_2\oplus\operatorname{Im}A_2$ 可知， $\forall u\in\ker A_1, u=u_1+u_2$, 其中 $u_1\in\ker A_2, u_2\in\operatorname{Im}A_2$. 又由 $\operatorname{Im}A_2\subseteq\ker A_1$ 得 $u_1=(u-u_2)\in\ker A_2\cap\ker A_1$. 结果 $\ker A_1$ 有直和分解：$\ker A_1=(\ker A_2\cap\ker A_1)\oplus\operatorname{Im}A_2$, 于是 $\mathbb{C}^n=(\ker A_1\cap\ker A_2)\oplus\operatorname{Im}A_2\oplus\operatorname{Im}A_1$.

利用 $A_1A_3=0, A_2A_3=0$ 及 $\mathbb{C}^n=\ker A_3\oplus\operatorname{Im}A_3$, 重复前述对 $\ker A_1$ 进行分解的过程又可得

$$\ker A_2\cap\ker A_1=(\ker A_3\cap\ker A_2\cap\ker A_1)\oplus\operatorname{Im}A_3,$$

从而有

$$\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \ker A_2 \cap \ker A_3) \oplus \operatorname{Im} A_3 \oplus \operatorname{Im} A_2 \oplus \operatorname{Im} A_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

最后有

$$\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \cdots \cap \ker A_{2n}) \oplus \operatorname{Im} A_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} A_{2n}.$$

…………………………………………………………… (12 分)

两边取维数得

$$n = \dim(\ker A_1 \cap \cdots \cap \ker A_{2n}) + \operatorname{rank} A_1 + \cdots + \operatorname{rank} A_{2n}.$$

因此 $\operatorname{rank} A_1, \ldots, \operatorname{rank} A_{2n}$ 中至少有 n 个为 0，即 $A_1, \ldots, A_{2n}$ 中至少有 n 个矩阵为零矩阵. 证毕. □

…………………………………………………………… (15 分)

得分	
评阅人	

四、(本题 20 分) 称实函数 f 满足条件 (P): 若 f 在 $[0,1]$ 上非负连续, $f(1)>f(0)=0$, $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx=+\infty$, 且对任何 $x_1,x_2\in[0,1]$ 成立 $f\big(\frac{x_1+x_2}{2}\big)\geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

1. 令 $c>0$, 对于 $f_1(x)=cx$ 和 $f_2(x)=\sqrt{x}$, 分别验证 f_1,f_2 是否满足条件 (P), 并计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\big(f_1(x)-xf_1'(x)\big)^m e^{f_1'(x)}$ 和 $\lim\limits_{x\to0^+}\big(f_2(x)-xf_2'(x)\big)^m e^{f_2'(x)}$.
2. 证明: $\forall m\geqslant 1$, 存在满足条件 (P) 的函数 f 以及趋于零的正数列 $\{x_n\}$, 使得 f 在每一点 x_n 可导, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(f(x_n)-x_nf'(x_n)\big)^m e^{f'(x_n)}=+\infty$.

解答. 我们指出, 注意到 $f(x)-xf'(x)=-x^2\big(\frac{f(x)}{x}\big)'$ 对计算与思考是有益的.

1. 易见 f_1,f_2 都在 $[0,1]$ 上非负连续, $f_1(1)>f_1(0)=0$, $f_2(1)>f_2(0)=0$.
   对于 $x>0$, $f_1'(x)=c$, $f_1''(x)=0$, $f_2'(x)=\frac12 x^{-1/2}$, $f_2''(x)=-\frac14 x^{-3/2}$.
   因此, f_1,f_2 均是 $[0,1]$ 上的凹函数. 由于 $\int_0^1\frac{1}{f_1(x)}\,dx=+\infty$, $\int_0^1\frac{1}{f_2(x)}\,dx<+\infty$, 所以 f_1 满足条件 (P) 而 f_2 不满足条件 (P).
   另一方面, $f_1(x)-xf_1'(x)\equiv 0$, 因此, $\lim\limits_{x\to0^+}\big(f_1(x)-xf_1'(x)\big)^m e^{f_1'(x)}=0$.
   而 $\lim\limits_{x\to0^+}\big(f_2(x)-xf_2'(x)\big)^m e^{f_2'(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\big(\frac{\sqrt{x}}{2}\big)^m e^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=+\infty$.
   .... (5 分)

2. 从 1 的结果得到提示, 我们用类似函数 $\sqrt{x}$ 与 cx 的函数来构造想要的例子.
   注意到对于 $(0,1]$ 中严格单调下降并趋于零的点列 $\{a_n\}$, 当函数 f 的图像为依次连接 $(a_n,\sqrt{a_n})$ 的折线且 $f(0)=0$ 时, 条件 (P) 成立.
   于是, 我们可以尝试寻找这样一列 $\{a_n\}$ 以及 $x_n\in(a_{n+1},a_n)$ 以满足题目的要求.

   .... (10 分)

   具体地, 取 $a_0=1$, $x_n\in(a_{n+1},a_n)$ 待定. 我们给出 f 的表达式如下:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{a_{n+1}}+k_n(x-a_{n+1}), & x\in(a_{n+1},a_n];n\geqslant 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

   其中 $k_n=\dfrac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}}{a_n-a_{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$.

注意到

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{1}{2k_n}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant \frac{\sqrt{a_n}}{2}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}},$$

取 $a_{n+1} = a_n e^{-\frac{2}{n\sqrt{a_n}}}$, 即有 $0 < a_{n+1} < a_n$, 且 $\displaystyle\int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{1}{f(x)}\,dx \geqslant \frac{1}{n}$.

……………………………………………………… (15 分)

另一方面, 在 $(a_{n+1}a_n)$ 内, $f'(x) = k_n \geqslant \frac{1}{2\sqrt{a_n}}$,

$$f(x) - xf'(x) = \frac{\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}} \geqslant \frac{\sqrt{a_n}e^{-\frac{1}{n\sqrt{a_n}}}}{2}.$$

因此, 任取 $x_n \in (a_{n+1}, a_n)$, 均有

$$\varliminf_{n\to+\infty}\big(f(x_n) - x_n f'(x_n)\big)^m e^{f'(x_n)} \geqslant \varliminf_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{a_n}e^{-\frac{1}{n\sqrt{a_n}}}}{2}\right)^m e^{\frac{1}{2\sqrt{a_n}}} = +\infty.$$

因此, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\big(f(x_n) - x_n f'(x_n)\big)^m e^{f'(x_n)} = +\infty$. □

……………………………………………………… (20 分)

得分	
评阅人	

五、(本题 10 分) 设 $\{f_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ 是 $\mathbb{R}$ 上可测函数列， $f_n^2, f^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ $(\forall n \geq 1)$, 且对 $\mathcal{L}-a.e.\, x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2\, dm = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dm$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)|^2\, dm = 0.$

证明. 因为 $f^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$，所以 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists n_\varepsilon$ 及 $\delta > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]} |f(x)|^2\, dm < \varepsilon,$$

且对任何可测集 $E \subseteq \mathbb{R}$，当 $mE < \delta$ 时，有

$$\int_E |f(x)|^2\, dm < \varepsilon.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2 分)

又 $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)\mathcal{L} - a.e.$ $x \in \mathbb{R}$. 由叶果诺夫定理, 存在可测子集 $E_\varepsilon \subseteq [-n_\varepsilon, n_\varepsilon]$ 使得 $mE_\varepsilon < \delta$, $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[-n_\varepsilon, n_\varepsilon] \setminus E_\varepsilon$ 上一致收敛到 $f(x)$. 令 $E_1 = [-n_\varepsilon, n_\varepsilon] \setminus -E_\varepsilon$, 有

$$\int_{E_1} |f_n(x) - f(x)|^2\, dm \to 0, \qquad n \to \infty,$$

且

$$\int_{E_1} |f_n(x)|^2\, dm \to \int_{E_1} |f(x)|^2\, dm, \qquad n \to \infty.$$

事实上, $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty, x \in E_1, mE_1 < \infty)$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geqslant 1, \forall n \geq N$ 以及 $x \in E_1$, 成立 $|f_n(x) \to f(x)| < \varepsilon$，$\int_{E_1} |f_n(x) - f(x)|^2\, dm \leq \varepsilon^2 \cdot mE_1$，故

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_1} |f_n(x) - f(x)|^2\, dm = 0.$$

又

$$\Big|\Big(\int_{E_1} |f_n(x)|^2\, dm\Big)^{\frac{1}{2}} - \Big(\int_{E_1} |f(x)|^2\, dm\Big)^{\frac{1}{2}}\Big| \leq \Big(\int_{E_1} |f_n(x) - f(x)|^2\, dm\Big)^{\frac{1}{2}},$$

得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_1} |f_n(x)|^2\, dm = \int_{E_1} |f(x)|^2\, dm.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (6 分)

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)|^2\,dm=\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dm,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_1^c}|f_n(x)|^2\,dm=\int_{E_1^c}|f(x)|^2\,dm.$$

注意到 $E_1^c=\big(\mathbb{R}\setminus[-n_\varepsilon,n_\varepsilon]\big)\bigcup E_\varepsilon, mE_\varepsilon<\delta$，得

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}}\int|f_n(x)-f(x)|^2\,dm\\
\le\ &\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{E_1}|f_n(x)-f(x)|^2\,dm+2\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{E_1^c}|f_n(x)|^2\,dm\\
&+2\int_{E_1^c}|f(x)|^2\,dm<8\varepsilon.
\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int|f_n(x)-f(x)|^2\,dm=0.$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (10 分)

法 II. 记 $f_0=f$. 由假设, 立即得到 $\left\{\int_{\mathbb{R}}f_n^2(x)\,dm\right\}_{n\geqslant 0}$ 有界. 设 S 为它的一个上界. 任取 $g\in L^2(\mathbb{R})$, 我们要证

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)g(x)\,dm=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)g(x)\,dm. \tag{1}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (3 分)

先令 $g\in C_c(\mathbb{R})$, 其中 $C_c(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上有紧支集的连续函数全体. 任取 $A>0$ 以及 $M>0$ 使得 $\operatorname{supp}g\subseteq[-A,A]$. 记 $E\equiv E_A=[-A,A]$, 则

$$mE(|f_n|>M)\leqslant\frac{1}{M^2}\int_E|f_n(x)|^2\,dm\leqslant\frac{S}{M^2}.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_E f_n(x)g(x)\,dm-\int_E f(x)g(x)\,dm\Big|\\
\leqslant\ &\frac{2S}{M}\|g\|_\infty+\Big|\int_E g\tilde{f}_{n,M}\,dm-\int_E g\tilde{f}_{0,M}\,dm\Big|,
\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{f}_{n,M}(x) = \begin{cases} f_n(x), & |f_n(x)| \leqslant M, \\ M, & f_n(x) > M, \\ -M, & f_n(x) < -M. \end{cases}$$

注意到 $\tilde{f}_{n,M} \to f_{0,M}(x),\ \text{a.e. } x \in \mathbb{R}$, 结合控制收敛定理, 我们有

$$\varlimsup_{n\to\infty} \Big| \int_E f_n(x)g(x)\,dm - \int_E f(x)g(x)\,dm \Big| \leqslant \frac{2S}{M}\|g\|_\infty.$$

于是由 $M > 0$ 的任意性可得

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)g(x)\,dm = \int_E f(x)g(x)\,dm.$$

注意到 $\operatorname{supp} g \subseteq [-A, A]$, 即 (1) 对于 $g \in C_c(\mathbb{R})$ 成立.

由 $C_c(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的稠密性可得对任何 $g \in L^2(\mathbb{R})$, (1) 成立.

. . . . (8 分)

最后得到

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|^2\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \Big(f_n^2(x) + f^2(x) - 2f_n(x)f(x) \Big)\,dm \\ = \ & \int_{\mathbb{R}} \Big(f^2(x) + f^2(x) - 2f(x)f(x) \Big)\,dm = 0. \end{aligned}$$

□

. . . . (10 分)

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

六、(本题 10 分) 设函数列 $\{f_n(z)\}$ 在区域 G 上解析, 且在 G 中内闭一致收敛于函数 $f(z)$. 证明：

1. 若 $f(z)$ 不恒为零，l 是 G 内可求长的简单闭曲线，其内部属于 G, 且不经过$f(z)$的零点. 则存在正整数N, 使得当 $n \geqslant N$ 时，在 l 的内部 $f_n(z)$ 和 $f(z)$ 有相同个数的零点；

2. 若 $\{f_n(z)\}$ 在区域 G 内还是单叶的，$f(z)$ 不为常数, 则 $f(z)$ 在 G 内单叶解析.

证明. 1. 由 Weierstrass 定理，$f(z)$ 在 G 内解析. 因 $f(z)$ 在 l 上不为零, 所以

$$\min_{z\in l} |f(z)| = m > 0.$$

…………………………………………………………… (2 分)

又 $\{f_n(z)\}$ 在 l 上一致收敛到 $f(z)$, 存在正整数 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时, 在 l 上有$|f_n(z) - f(z)| < m$, 即当 $n \geqslant N$ 时, 在 l 上有 $|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$. 由 Rouche 定理，在 l 的内部，$f_n(z)$ 和 $f(z)$ 有相同个数的零点.

…………………………………………………………… (5 分)

2. 反证法. 若 $f(z)$ 在 G 内不是单叶的，那么在 G 内至少存在两点 z_1 和 $z_2\,(z_1 \neq z_2)$ 使得 $f(z_1) = f(z_2)$.

令 $F_n(z) = f_n(z) - f_(z_1)$, 则 $\{F_n(z)\}$ 在 G 内内闭一致收敛于不恒为零的解析函数 $F(z) = f(z) - f(z_1)$.

…………………………………………………………… (7 分)

在 G 内分别以 z_1 和 z_2 为心，作不交且外离的两个小圆 $C_1 : |z - z_1| = r_1$ 和 $C_2 : |z - z_1| = r_2$. 由第 1 部分结论, 存在正整数 N，使当 $n \geqslant N$ 时, $F_n(z)$ 在 C_1 与 C_2 的内部与 $F(z)$ 有相同个数的零点，即在 C_1 与 C_2 内分别存在 z_1^* 与 z_2^*, 使 $f(z_1^*) = f_n(z_2^*) = f_n(z_1)$. 这与 $f_n(z)$ 在 G 内单叶矛盾. □

…………………………………………………………… (10 分)

得分	
评阅人	

七、(本题 10 分) 设 R 为有单位元的交换环, $R[x]$ 是 R 上的一元多项式环,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in R[x].$$

证明: $f(x)$ 在环 $R[x]$ 中可逆当且仅当 a_0 在 R 中可逆且 $a_1, \ldots, a_n$ 均为 R 中的幂零元.

证明. 先证充分性. 由于 a_0 可逆, 记 $b_i = a_0^{-1} a_i$, $1 \le i \le n$, $g(x) = b_1 x + \cdots + b_n x^n$. 则有 $f(x) = a_0(1 + g(x))$. 对任意 $1 \le i \le n$, a_i 幂零, 故存在正整数 m_i 使得 $a_i^{m_i} = 0$. 令 $N = \max\{m_1, \cdots, m_n\}$, 则有 $a_i^N = 0$, 从而 $b_i^N = a_0^{-N} a_i^N = 0$. 由于 $g(x)^{nN} = (b_1 x + \cdots + b_n x^n)^{nN}$ 展开式中任一项系数形如

$$\frac{(nN)!}{k_1! \cdots k_n!} b_1^{k_1} \cdots b_n^{k_n},$$

其中 $0 \le k_1, \cdots, k_n \le nN$ 且 $k_1 + \cdots + k_n = nN$, 从而必存在某个 k_j 使得 $k_j \ge N$. 由此 $b_j^{k_j} = 0$, 从而 $g(x)^{nN} = 0$. 于是

$$f(x) \cdot a_0^{-1}(1 - g(x) + g(x)^2 - \cdots + (-1)^{nN-1} g(x)^{nN-1}) = 1 + (-1)^{nN-1} g(x)^{nN} = 1,$$

所以 $f(x)$ 在 $R[x]$ 中可逆.

. . . . (4 分)

为证明必要性, 首先证明如下论断: 若 $a \in R$ 不是幂零元, 则存在 R 的素理想 P 使得 $a \notin P$. 事实上, 考虑集合

$$S = \{I \mid I \text{ 是 } R \text{ 的理想且 } I \cap \{a, a^2, \cdots\} = \varnothing\}.$$

由于 a 不是幂零元, 显然 R 的零理想 $(0) \in S$, 因此 S 非空. S 按照集合的包含关系成为一个偏序集, 任取 S 的一个链 (全序子集) $T = \{I_\alpha \mid \alpha \in J\}$, 其中 J 为指标集. 令 $A = \bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha$, 则 A 是 R 的理想且 $A \cap \{a, a^2, \cdots\} = \varnothing$, 即 $A \in S$. 显然 A 为链 T 的上界, 根据 Zorn 引理, 偏序集 S 有极大元 P. 显然 $a \notin P$, 下面证明 P 为 R 的素理想. 反之, 若存在 $u, v \in R \setminus P$ 但是 $uv \in P$. 由 P 的极大性, 理

想 $(u)+P$ 和 $(v)+P$ 均不在 S 中, 从而存在正整数 s 和 t 使得 $a^s \in (u)+P$, $a^t \in (v)+P$. 设 $a^s = uy+p_1$, $a^t = vz+p_2$, 其中 $y,z \in R$, $p_1,p_2 \in P$, 则有

$$a^{s+t} = (uy+p_1)(vz+p_2) = (uv)yz + (uy)p_2 + p_1(vz) + p_1p_2,$$

由 $uv, p_1, p_2 \in P$ 得到 $a^{s+t} \in P$, 与 $P \in S$ 矛盾.

.... (7 分)

下面证明必要性. 由于 $f(x)$ 可逆, 故存在 $h(x) \in R[x]$ 使得 $f(x)h(x) = 1$. 设 $h(x)$ 的常数项为 h_0, 从而 $a_0h_0 = 1$, 故 a_0 在 R 中可逆. 任取 R 的一个素理想 P, 对于 $a \in R$, 用 $\overline{a}$ 表示 a 在自然同态 $\eta:\ R \to \overline{R} = R/P$ 下的像, 即 $\overline{a} = \eta(a) = a+P$. 记 $\overline{f}(x) = \overline{a_0} + \overline{a_1}x + \cdots + \overline{a_n}x^n \in \overline{R}[x]$ 为 $f(x)$ 在自然同态 η 下诱导出来的像, 由 $f(x)h(x) = 1$ 可得 $\overline{f}(x)\overline{h}(x) = \overline{1}$, 所以 $\overline{f}(x)$ 在 $\overline{R}[x]$ 中可逆. 由于 P 为素理想, $\overline{R}$ 为整环, 即 $\overline{f}(x)$ 是整环上的可逆多项式, 所以 $\overline{f}(x) = \overline{a_0}$ 为 $\overline{R}$ 中的可逆元, 从而对于任意 $1 \le i \le n$ 有 $\overline{a_i} = \overline{0}$, 即 $a_i \in P$, 故 a_i 包含在 R 的所有素理想中, 所以 a_i 为幂零元. $\square$

.... (10 分)

得分	
评阅人	

八、(本题 10 分) 设 $S: r=(x,y,h(x,y))$ 为三维欧氏空间中的光滑曲面, $h(x,y)$ 是关于 x,y 的光滑函数.

1. 求 S 的平均曲率的表达式.

2. 设 S 为极小曲面, 当 $h(x,y)=f(x)+g(y)$ 时, 求 $h(x,y)$ 的表达式, 其中函数 f,g 均为光滑函数.

解答. 1. 经计算可得

$$
\begin{aligned}
&r_x=(1,0,h_x),\ r_y=(0,1,h_y),\\
&r_{xx}=(0,0,h_{xx}),\ r_{xy}=(0,0,h_{xy}),\ r_{yy}=(0,0,h_{yy}).
\end{aligned}
$$

经计算可得S的单位法向量

$$\vec{n}=\frac{\vec{r}_x\times\vec{r}_y}{|\vec{r}_x\times\vec{r}_y|}=\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}}(-h_x,-h_y,1),$$

以及S的第一基本形式系数和第二基本形式的系数

$$
\begin{aligned}
&E=r_x\cdot r_x=1+h_x^2,\ F=r_x\cdot r_y=h_xh_y,\ G=r_y\cdot r_y=1+h_y^2,\\
&L=r_{xx}\cdot n=\frac{h_{xx}}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}},\ M=r_{xy}\cdot n=\frac{h_{xy}}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}},\\
&\quad N=r_{yy}\cdot n=\frac{h_{yy}}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}}.
\end{aligned}
$$

于是, 可得S的平均曲率

$$
\begin{aligned}
H&=\frac{LG-2FM+EN}{2(EG-F^2)}\\
&=\frac{h_{xx}(1+h_y^2)-2h_xh_yh_{xy}+h_{yy}(1+h_x^2)}{2(1+h_x^2+h_y^2)^{\frac{2}{3}}}.
\end{aligned}
$$

…………………………………………………………… (3 分)

2. 当 $h(x,y)=f(x)+g(y)$ 时, 我们有

$$h_x=f'(x),\ h_y=g'(y),\ h_{xx}=f''(x),\ h_{xy}=0,\ h_{yy}=g''(y).$$

于是, 我们有

$$H=\frac{f''(x)(1+(g'(y))^2)+g''(y)(1+(f'(x))^2)}{2(1+(f'(x))^2+(g'(y))^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

当 S 为极小曲面, 即 $H \equiv 0$ 时, 得到

$$f''(x)(1+(g'(y))^2)+g''(y)(1+(f'(x))^2)=0,$$

即

$$\frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}=-\frac{g''(y)}{1+(g'(y))^2}. \tag{1}$$

…………………………………………………………… (5 分)

根据 (1), 我们设

$$\frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}=c,$$

其中 c 为常数. 求解上述方程我们得到

$$f(x)=-\frac{1}{c}\ln\cos(cx+d),$$
$$g(y)=\frac{1}{c}\ln\cos(cy+b),$$

其中 d, b 是常数. 于是得到

$$h(x,y)=\frac{1}{c}\ln\frac{\cos(cy+b)}{\cos(cx+d)}.$$

…………………………………………………………… (8 分)

当 $c=0$ 时, 我们得到 $f''(x)=g''(y)=0$. 此时, 我们有

$$f(x)=a_1x+b_1,\ g(y)=a_2y+b_2,$$

其中 a_1, a_2, b_1, b_2 都是常数. 于是, $h(x,y)=a_1x+a_2y+b_1+b_2$. □

…………………………………………………………… (10 分)

得分	
评阅人	

九、(本题 10 分) 设有一列盒子，已知第 k 个盒子中有 k 个球，其中 1 个是红球, 另外 $k-1$ 个是白球. 现从前 n 个盒子中各取一球，记 S_n 表示取出的 n 个球中红球的个数. 证明:

1. $\dfrac{S_n}{\ln(n)}$ 依概率收敛于 1;
2. $\dfrac{S_n-\ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}$ 依分布收敛于标准正态分布 $N(0,1)$;
3. 对任意 $r>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} E\Big(\dfrac{|S_n-\ln(n)|^r}{\ln^r(n)+|S_n-\ln(n)|^r}\Big)=0$.

解答. 1. 对于 $k=1,2,\ldots,n$, 记

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{从第 } k \text{ 个盒子中取出红球,}\\ 0, & \text{从第 } k \text{ 个盒子中取出白球.}\end{cases}$$

则 X_k 独立且服从 $0-1$ 分布 $B(1,\dfrac{1}{k})$, 并且 $S_n=\sum\limits_{k=1}^n X_k$.

只需证明，对任意 $\varepsilon>0$, $P\big(\big|\frac{S_n}{\ln(n)}-1\big|\geqslant\varepsilon\big)\to 0$ ($n\to\infty$). 事实上

$$\begin{aligned}P\Big(\Big|\frac{S_n}{\ln(n)}-1\Big|\geqslant\varepsilon\Big) &= P\big(|S_n-\ln(n)|\geqslant\varepsilon\ln(n)\big)\leqslant\frac{E(S_n-\ln(n))^2}{\varepsilon^2\ln^2(n)}\\ &= \frac{\mathrm{Var}(S_n)+(ES_n-\ln(n))^2}{\varepsilon^2\ln^2(n)},\end{aligned}$$

$\mathrm{Var}(S_n)=\sum\limits_{k=1}^n(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k^2})\leqslant\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{1}{k}$ 并且 $ES_n=\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{1}{k}$.

注意 $\ln(n)+\dfrac{1}{n}\leqslant\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{1}{k}\leqslant\ln(n)+1$ 蕴含

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}=1,\ \ \ln(n)+\frac{1}{n}\leqslant ES_n\leqslant\ln(n)+1$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Var}(S_n)}{\ln^2(n)}=0,\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{(ES_n-\ln(n))^2}{\ln^2(n)}=0.$$

故 $P\big(\big|\dfrac{S_n}{\ln(n)}-1\big|\geqslant\varepsilon\big)\to 0$.

.... (5 分)

2. 注意 $\dfrac{S_n-\ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}=\dfrac{S_n-ES_n}{\sqrt{\ln(n)}}+\dfrac{ES_n-\ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}$. 由 $\ln(n)+\frac{1}{n}\leqslant ES_n\leqslant \ln(n)+1$ 知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ES_n-\ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}=0.$$

故，应用 $\dfrac{\mathrm{Var}(S_n)}{\ln(n)}\to 1$，只需证明 $\dfrac{S_n-ES_n}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}$ 依分布收敛于标准正态分布 $N(0,1)$.

法 I. 验证李雅普诺夫（Lyapunov）条件成立, 即当 $n\to\infty$时

$$\frac{1}{(\mathrm{Var}(S_n))^2}\sum_{k=1}^n E(X_k-EX_k)^4\to 0.$$

事实上，由于 $\displaystyle\sum_{k=1}^n E(X_k-EX_k)^4=\sum_{k=1}^n\Big\{\big(1-\frac{1}{k}\big)^4\frac{1}{k}+\frac{1}{k^4}\big(1-\frac{1}{k}\big)\Big\}\leqslant\sum_{k=1}^n\frac{2}{k}$, 且 $\dfrac{\mathrm{Var}(S_n)}{\ln(n)}\to 1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\mathrm{Var}(S_n))^2}\sum_{k=1}^n E(X_k-EX_k)^4=0.$$

.... (8分)

法 II. 验证下列林德贝格 (Lindeberg) 条件成立, 即对任意 $\tau>0$，当 $n\to\infty$ 时

$$\frac{1}{\mathrm{Var}(S_n)}\sum_{k=1}^n E\big\{(X_k-EX_k)^2 I(|X_k-EX_k|\geqslant\tau\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)})\big\}\to 0$$

或

$$\frac{1}{\mathrm{Var}(S_n)}\sum_{k=1}^n\int_{|x-EX_k|\geqslant\tau\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}(x-EX_k)^2dF_k(x)\to 0,$$

其中 $F_k(x)=P(X_k\leqslant x)$.

事实上，由于 $\mathrm{Var}(S_n)\to\infty$, 所以当 n 较大时，对 $1\leqslant k\leqslant n$, $I(|X_k-EX_k|\geqslant\tau\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)})=0$, 故

$$\frac{1}{\mathrm{Var}(S_n)}\sum_{k=1}^n E\big\{(X_k-EX_k)^2 I(|X_k-EX_k|\geqslant\tau\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)})\big\}\to 0.$$

.... (8分)

3. 注意 $E\Big(\dfrac{|S_n-\ln(n)|^r}{\ln^r(n)+|S_n-\ln(n)|^r}\Big)=E\Big(\dfrac{|\frac{S_n}{\ln(n)}-1|^r}{1+|\frac{S_n}{\ln(n)}-1|^r}\Big)$. 由 1 小题知，对任意 $\varepsilon>0$,

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{\ln(n)}-1\Big|\geqslant\varepsilon\Big)\to 0.$$

记 $\frac{S_n}{\ln(n)}-1$ 的分布函数为 $F_n(x)=P(\frac{S_n}{\ln(n)}-1\leqslant x)$. 由于函数 $g(x)=\frac{|x|^r}{1+|x|^r}$ 在 $[0,\infty)$ 上是单调非降函数，所以

$$\begin{aligned}E\Big(\frac{|\frac{S_n}{\ln(n)}-1|^r}{1+|\frac{S_n}{\ln(n)}-1|^r}\Big) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|^r}{1+|x|^r}dF_n(x)=\Big(\int_{|x|\leqslant\varepsilon}+\int_{|x|>\varepsilon}\Big)\frac{|x|^r}{1+|x|^r}dF_n(x)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon^r}{1+\varepsilon^r}+\int_{|x|>\varepsilon}dF_n(x)=\frac{\varepsilon^r}{1+\varepsilon^r}+P\Big(\Big|\frac{S_n}{\ln(n)}-1\Big|>\varepsilon\Big).\end{aligned}$$

于是由 ε 的任意性，得 $\lim\limits_{n\to\infty}E\Big(\dfrac{|S_n-\ln(n)|^r}{\ln^r(n)+|S_n-\ln(n)|^r}\Big)\to 0$.

.... (10 分)

得分	
评阅人	

十、(本题 10 分) 考虑求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的下列数值格式：

$$y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} = h(b_0 f_n + b_1 f_{n-1} + b_2 f_{n-2}),$$

其中 a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 为常数, $f_j = f(x_j, y_j), j = n-2, n-1, n.$

1. 确定常数 a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, 使得上述数值格式具有尽可能高阶的精度；
2. 分析上一步得到的数值格式的稳定性与收敛性.

解答. 定义算子 L 如下：

$$L(y(x)) := y(x) + a_1 y(x-h) + a_2 y(x-2h) - h(b_0 y'(x) + b_1 y'(x-h) + b_2 y'(x-2h)).$$

将 y, y' 在 x 处做 Taylor 展开可以得到：

$$\begin{aligned} L(y(x)) &= y(x) + a_1 \left(\sum_{j=0}^{k} (-h)^j / j! y^{(j)}(x) + (-h)^{k+1}/(k+1)! y^{(k+1)}(\xi_1) \right) \\ &\quad + a_2 \left(\sum_{j=0}^{k} (-2h)^j / j! y^{(j)}(x) + (-2h)^{k+1}/(k+1)! y^{(k+1)}(\xi_2) \right) \\ &\quad - b_0 h y'(x) - b_1 h \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-h)^j / j! y^{(j+1)}(x) + (-h)^k / k! y^{(k+1)}(\eta_1) \right) \\ &\quad - b_2 h \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-2h)^j / j! y^{(j+1)}(x) + (-2h)^k / k! y^{(k+1)}(\eta_2) \right) \\ &= (1 + a_1 + a_2) y(x) - (a_1 + 2a_2 + b_0 + b_1 + b_2) h y'(x) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{k} (a_1 + 2^j a_2 + j b_1 + 2^{j-1} j b_2)(-h)^j / j! y^{(j)}(x) + O(h^{k+1}) \\ &:= \sum_{j=0}^{k} d_j (-h)^j / j! y^{(j)}(x) + O(h^{k+1}). \end{aligned}$$

其中

$$d_0 := 1 + a_1 + a_2, \quad d_1 := a_1 + 2a_2 + b_0 + b_1 + b_2,$$
$$d_j := a_1 + 2^j a_2 + jb_1 + 2^{j-1} jb_2 = 0, \quad j = 2, 3, 4.$$

.... (5分)

令 $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$, 解得

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -1, \quad b_0 = 1/3, \quad b_1 = 4/3, \quad b_2 = 1/3.$$

此时 $d_5 = 4/3 \neq 0$. 因此格式的最高精度是 4 阶, 所求格式为:

$$y_n - y_{n-2} = \frac{1}{3}(f_n + 4f_{n-1} + f_{n-2}).$$

.... (7分)

2. 对上述格式，令 $p(z) = z^2 - 1, q(z) = \frac{1}{3}(z^2 + 4z + 1)$. $p(z) = 0$ 的两个根 ± 1 的模长为 1，且均为单根，故格式稳定。另一方面， $p(1) = 0$ 且 $p'(1) = q(1) = 2$, 因此格式相容，进而收敛.

.... (10分)