

2011 年第二届全国大学生数学竞赛决赛 (数学专业) 试卷

一、(本题 15 分) 求出过原点且和椭球面 $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 1$ 的交线为一个圆周的所有平面.

二、(本题 15 分) 设 $0 < f(x) < 1$, 无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 和 $\int_0^{+\infty} xf(x) dx$ 都收敛. 求

$$\text{证: } \int_0^{+\infty} xf(x) dx > \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^2.$$

三、(本题 15 分) 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ 收敛, $t_n = a_{n+1} + 2a_{n+2} + \dots + ka_{n+k} + \dots$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0.$$

四、(本题 15 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 定义线性变换

$$\sigma_A : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}), \sigma_A(X) = AX - XA.$$

证明: 当 A 可对角化时, σ_A 也可对角化. 这里 $M_n(\mathbb{C})$ 是复数域 \mathbb{C} 上 n 阶方阵组成的线性空间.

五、(本题 20 分) 设连续函数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\sup_{x,y \in \mathbb{R}} |f(x+y) - f(x) - f(y)| < +\infty.$$

证明: 存在实常数 a 满足 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - ax| < +\infty$.

六、(本题 20 分) 设 $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ 是非零线性映射, 满足

$$\varphi(XY) = \varphi(YX), \forall X, Y \in M_n(\mathbb{R}),$$

这里 $M_n(\mathbb{R})$ 是实数域 \mathbb{R} 上 n 阶方阵组成的线性空间. 在 $M_n(\mathbb{R})$ 上定义双线性型

$$(-, -) : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ 为 } (X, Y) = \varphi(XY).$$

(1) 证明 $(-, -)$ 是非退化的, 即若 $(X, Y) = 0, \forall Y \in M_n(\mathbb{R})$, 则 $X = 0$.

(2) 设 A_1, \dots, A_{n^2} 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的一组基, B_1, \dots, B_{n^2} 是相应的对偶基. 即

$$(A_i, B_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq j \\ 1, & \text{当 } i = j \end{cases}.$$

证明 $\sum_{i=1}^{n^2} A_i B_i$ 是数量矩阵.