2017 年第九届全国大学生数学竞赛初赛
（数学类）试卷

一、（本题 15 分） 在空间直角坐标系中，设单叶双曲面Γ的方程为$x^2+y^2-z^2=1$. 设P为空间中的平面，它交Γ于一抛物线C. 求该平面P的法线与$z-$轴的夹角.

二、（本题 15 分） 设$\{a_n\}$是递增数列，$a_1>1$. 求证：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$收敛的充分必要条件是$\{a_n\}$有界. 又问级数通项分母中的$a_n$是否可以换成$a_{n+1}$？

三、（本题 15 分） 设$\Gamma=\{W_1,W_2,\ldots,W_r\}$为$r$个各不相同的可逆的$n$阶复方阵构成的集合. 若该集合关于矩阵乘法封闭（即$\forall M,N\in\Gamma$，有$MN\in\Gamma$）. 证明：$\Sigma_{i=1}^{r}W_i=0$当且仅当$\Sigma_{i=1}^{r}\operatorname{tr}(W_i)=0$，其中$\operatorname{tr}(W_i)$表示$W_i$的迹.

四、（本题 20 分） 给定非零实数a及实n阶反对称矩阵A(即A的转置A^T等于$-A$). 记矩阵有序对集合T为：$T=\left\{(X,Y)\mid X\in\mathbb{R}^{n\times n},Y\in\mathbb{R}^{n\times n},XY=aI+A\right\}$，其中$I$为$n$阶单位阵，$\mathbb{R}^{n\times n}$为所有实$n$阶方阵构成的集合. 证明：任取$T$中的两元：$(X,Y)$和$(M,N)$，必有$XN+Y^TM^T\neq 0$.

五、（本题 15 分） 设$f(x)=\arctan x, A$为常数. 若$B=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-An\right)$存在，求$A,B$.

六、（本题 20 分） 设$f(x)=1-x^2+x^3$ $(x\in[0,1])$，计算以下极限并说明理由：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x}.$$