第十二届全国大学生数学竞赛初赛试卷答案
(数学类B卷, 2020年11月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

专业:　座位号:　考场号:　所在院校:　准考证号:　姓名:

密封线　答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

一、 (本题 15 分)已知椭球面

$$\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a>b,$$

的外切柱面Σ_ε ($\varepsilon=1$ 或 -1) 平行于已知直线

$$l_\varepsilon: \frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z-3}{c}.$$

试求与Σ_ε交于一个圆周的平面的法方向. 注：本题中的外切柱面指的是每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面.

解： 设l是柱面的任意一条直母线，则由假设，l与已知椭球面Σ_0相切于一点$M_1(x_1,y_1,z_1)$. 因为l平行于已知直线l_ε, 所以，l的标准方程和参数方程分别是

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z-z_1}{c},$$
$$x=x_1,\quad y=y_1+\varepsilon t\sqrt{a^2-b^2},\quad z=z_1+ct.$$

把l的参数方程代入曲面Σ_0的方程并化简得

$$t^2\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}+1\right)+2t\left(\varepsilon\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}y_1+\frac{1}{c}z_1\right)+\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1=0, \qquad (1)$$

其中首项系数$\frac{a^2-b^2}{a^2}+1>0$.　（5分）

因为点M_1在Σ_0上，所以

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1=0.$$

又因为l与Σ_0在M_1点相切，所以$t=0$是二次方程(1)的重根。因此，

$$\varepsilon\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}y_1+\frac{1}{c}z_1=0,\ \text{即}\ \varepsilon c\sqrt{a^2-b^2}y_1+b^2z_1=0.$$

此式与

$$\frac{y-y_1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z-z_1}{c}\ \text{即}\ \varepsilon cy_1-\sqrt{a^2-b^2}z_1=\varepsilon cy-\sqrt{a^2-b^2}z$$

联立解出

$$y_1=\frac{b^2}{ca^2}(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z),\quad z_1=-\varepsilon\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z).$$

再把$x_1=x$和上面的两式代入Σ_0的方程，得到外切柱面Σ_ε的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z)^2}{a^4c^2}+\frac{(a^2-b^2)(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z)^2}{a^4c^2}=1.$$

（10分）

如果令$z=0$, 上式化为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{a^4}+\frac{(a^2-b^2)y^2}{a^4}=1,\ \text{即}\ x^2+y^2=a^2.$$

所以柱面Σ_ε与xoy坐标面相交于圆周

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=0\end{cases}.$$

由于与二次柱面Σ_ε的交线为圆周的所有平面都是平行的，故知所求的法方向唯一且为xoy平面的法方向，方向数为 $0,0,1$.（15分）

专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线　答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分)设$f(x)$ 在$[0,1]$上连续，且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$, 证明：$1 \leqslant \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leqslant \frac{4}{3}$.

证： 由 Schwarz不等式，

$$1 = \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 \leqslant \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$$

（5分）

又由于 $(f(x)-1)(f(x)-3) \leqslant 0$, 故有$\frac{(f(x)-1)(f(x)-3)}{f(x)} \leqslant 0$, 即$\int_0^1 (f(x) + \frac{3}{f(x)})dx \leqslant 4$.（10分）

由$4ab \leqslant (a+b)^2$ 知

$$\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \frac{3}{f(x)}dx \leqslant \frac{(\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 \frac{3}{f(x)}dx)^2}{4} \leqslant 4$$

于是 $1 \leqslant \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leqslant \frac{4}{3}$.

（15分）

得分	
评阅人	

三、（本题15分）设 A 为 n 阶复方阵, $p(x)$ 为 A 的特征多项式.又设 $g(x)$ 为 m 次复系数多项式, $m \geqslant 1$. 证明：$g(A)$ 可逆当且仅当 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

证明：取A 的 Jordan 分解：$A = P \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix} P^{-1}$,

其中$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ 为 Jordan 块. 结果，

$$(*) \qquad g(A) = P \begin{pmatrix} g(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(J_s) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & * & * \\ & \ddots & * \\ & & g(\lambda_s) \end{pmatrix} P^{-1}$$

（8分）

$\Leftarrow$). $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素,于是 $p(x)$ 与 $g(x)$ 没有公共根. 注意到$\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ 为A 的所有互不相同的特征根. 故有 $g(\lambda_1), \ldots, g(\lambda_s)$ 均不为0. 结果,

$$|g(A)| = g(\lambda_1) \cdot \cdots \cdot g(\lambda_s) \neq 0,$$

$g(A)$可逆，得证.（13分）

$\Rightarrow$). $g(A)$可逆,从而 $|g(A)| \neq 0$. 由 $|g(A)| = g(\lambda_1) \cdot \cdots \cdot g(\lambda_s)$ 知： $g(\lambda_1), \ldots, g(\lambda_s)$ 均不为0，故 $p(x)$ 与 $g(x)$ 没有公共根. 当然 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素，否则导致$p(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根，矛盾.（15分）

得分	
评阅人	

四、（本题20分）设 σ 为 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 的一个线性变换. $\mathbb{1}$ 表示恒等变换. 证明以下两条等价：

(1) $\sigma = k\mathbb{1}, k \in \mathbb{C}$;

(2)存在 σ 的 $n+1$ 个特征向量: $v_1, \ldots, v_{n+1}$, 这 $n+1$ 个向量中任何 n 个向量均线性无关.

证： (1) $\Rightarrow$ (2). 取$v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, v_n = e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, v_{n+1} = e_1 + \cdots + e_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. 则易知, $v_1, \ldots, v_{n+1}$ 均是σ 的特征向量. 进一步，该组向量中任何n 个向量必线性无关. 事实上, 不妨设这n个向量为：$v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{n+1}$. 于是

$a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_{n+1} v_{n+1} = 0 \Leftrightarrow$

$(a_1 + a_{n+1}) e_1 + \cdots + (a_{i-1} + a_{n+1}) e_{i-1} + a_{n+1} e_i + (a_{i+1} + a_{n+1}) e_{i+1} + \cdots + (a_n + a_{n+1}) e_n = 0.$

结果，$a_{n+1} = 0$, 进而 $a_1 = \cdots = a_{n+1} = 0$. 如所需。（5分）

(2) $\Rightarrow$ (1). 记$\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ 分别为相应于$v_1, \ldots, v_{n+1}$ 的 σ 的特征值，其和为s, 即$s = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1}$. 由条件知 $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{n+1}$ 线性无关, 因此它可充当 $\mathbb{C}^n$ 的基. σ 在此组基下的表示阵为A:

$$\sigma(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{n+1}) = (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{n+1})A$$

结果 $trA = s - \lambda_i$.（10分）

又取$v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_{n+1}$, σ 在此组基下的表示阵为B:

$$\sigma(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_{n+1}) = (v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_{n+1})B$$

结果 $trB = s - \lambda_j$. 注意到A 与B 相似，因为他们是同一线性变换在不同基下的表示阵。故$s - \lambda_i = s - \lambda_j, \lambda_i = \lambda_j$. 即

$\sigma = k\mathbb{1}, k = \lambda_1$. 证毕.（20分）

得分	
评阅人	

五、（本题15分）计算广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{(x)}{x^3}dx$, 这里 (x)表示 x的小数部分(例如：当n为正整数且$x\in[n,n+1)$时，$(x)=x-n$).

证： 对于任意正整数 $\ell>2$, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_1^{\ell}\frac{(x)}{x^3}dx &= \sum_{n=1}^{\ell-1}\int_n^{n+1}\frac{x-n}{x^3}=\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(\int_n^{n+1}x^{-2}dx-n\int_n^{n+1}x^{-3}dx\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{2n+1}{n(n+1)^2}\\
&= \sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{1}{n(n+1)^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\ell}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\ell}\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

（10分）

对于$y\in[\ell,\ell+1)$, 我们有

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\ell}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\ell}\frac{1}{n^2}=\int_1^{\ell}\frac{(x)}{x^3}dx\leqslant\int_1^{y}\frac{(x)}{x^3}dx\leqslant\int_1^{\ell+1}\frac{(x)}{x^3}dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\ell+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\ell+1}\frac{1}{n^2}$$

于是得到

$$\int_1^{+\infty}\frac{(x)}{x^3}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1-\frac{\pi^2}{12}.$$

（15分）

得分	
评阅人	

六、（本题20分）设函数$f(x)$在 $[0,1]$ 上连续，满足对任意$x\in[0,1]$

$$\int_{x^2}^{x} f(t)dt \geqslant \frac{x^2-x^4}{2}.$$

证明：$\int_0^1 f^2(x)dx \geqslant \frac{1}{10}$.

证明一： 注意到

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(t)dt = \int_0^1 dt \int_t^{\sqrt{t}} f(t)dx = \int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 8 分

于是，我们有

$$\int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(t)dt \geqslant \int_0^1 \frac{x^2-x^4}{2}dx = \frac{1}{15}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 13 分

因为

$$0 \leqslant \int_0^1 (f(t)-(\sqrt{t}-t))^2 dt = \int_0^1 f^2(t)dt - 2\int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt + \int_0^1 (\sqrt{t}-t)^2 dt$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 18 分

所以

$$\int_0^1 f^2(t)dt \geqslant 2\int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt - \int_0^1 (\sqrt{t}-t)^2 dt \geqslant \frac{2}{15} - \frac{1}{30} = \frac{1}{10}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 20 分

证明二： 注意到

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(t)dt = \int_0^1 dt \int_t^{\sqrt{t}} f(t)dx = \int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 8 分

于是，我们有

$$\int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(t)dt \geqslant \int_0^1 \frac{x^2-x^4}{2}dx = \frac{1}{15}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 13 分

因为对任意$\beta \in (0,+\infty)$

$$0 \leqslant \int_0^1 (\beta f(t) - (\sqrt{t}-t))^2 dt = \int_0^1 \beta^2 f^2(t)dt - 2\beta \int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt + \int_0^1 (\sqrt{t}-t)^2 dt$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(t)dt &\geqslant \frac{2}{\beta}\int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt - \frac{1}{\beta^2}\int_0^1 (\sqrt{t}-t)^2 dt \geqslant \frac{2}{15\beta} - \frac{1}{30\beta^2} \\ &= \frac{1}{30}\left(4\cdot\frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^2\right).\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 17 分

容易得到当$\beta \in [1/3, 1]$时，有

$$\int_0^1 f^2(t)dt \geqslant \frac{1}{30}\left(4\cdot\frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^2\right) \geqslant \frac{1}{10}.$$

特别地，当$\beta = 1/2$时

$$\int_0^1 f^2(t)dt \geqslant \frac{1}{30}\left(4\cdot 2 - 2^2\right) = \frac{2}{15} > \frac{1}{10}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 20 分

证明三：因为对任意$0 < \beta < 1$，任意正整数n, 我们有

$$\int_{\beta^{2^n}}^{\beta} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{\beta^{2^k}}^{\beta^{2^{k-1}}} f(t)dt \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{\beta^{2^k} - \beta^{2^{k+1}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\beta^2 - \beta^{2^{n+1}}\right).$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5 分

于是

$$\int_0^{\beta} f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_{\beta^{2^n}}^{\beta} f(t)dt \geqslant \frac{\beta^2}{2}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 8 分

从而我们有

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{\beta\to 1^-}\int_0^{\beta} f(t)dt \geqslant \lim_{\beta\to 1^-}\frac{\beta^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 13 分

最后，由柯西-希瓦尔茨不等式可得

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 f(t)dt \leqslant \left(\int_0^1 1^2 dt\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^{1/2}$$

…………………18 分

于是,

$$\int_0^1 f^2(x)dx \geqslant \frac{1}{4} > \frac{1}{10}.$$

…………………20 分