华教杯全国大学生数学竞赛训练题

（数学类专业组、均为往届真题）

一、选择题（共 10 题，3 分/题）

1、函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2-3x+1}$ 在下列区间内有界的是

(A) $(0,\frac{1}{2})$　(B) $(\frac{1}{2},1)$　(C) $(0,1)$　(D) $(1,+\infty)$

2、 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则

（A）$0<dy<\Delta y$　（B）$0<\Delta y<dy$　（C）$\Delta y<dy<0$　（D）$dy<\Delta y<0$

3、设函数 $f(x)=|\ln(x-1)|$，则

（A）$x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(2,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（B）$x=2$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(2,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（C）$x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(2,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D）$x=2$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(2,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

4、 设积分 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$，则积分 I 的值为

(A) $\sqrt{\pi}$　（B）$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$　(C) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　(D) 1

5、设 D 是平面上以点 $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 为 D 的第一象限区域，则积分 $\iint\limits_D[\sin x\sin y+y^3\cos x)dxdy$ 的值为

(A)0　(B) $4\iint\limits_{D_1}(\sin x\sin y+y^3\cos x)dxdy$

(C) $4\iint\limits_D y^3\cos xdxdy$　(D) $4\iint\limits_{D_1}\sin x\sin ydxdy$

6、 设数列a_n与b_n满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=1$，则下列结论是正确的是

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$必存在 （B）若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$必不存在

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$存在，则必有$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在 (D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在 ，则必有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$存在

7、下列函数中在$x=0$处可导的是（ ）

A. $f(x)=|\sin x|$ B. $f(x)=|x(1-x)|$ C. $f(x)=\cos|x|$ D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

8、设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$f'(1)=0$，$\lim\limits_{x\to1}f'(x)=1$，则$f(x)$

(A)在$x=1$处取得极大值 (B) 在$x=1$处取得极小值

(C) 在$x=1$处不取得极值 (D) 在$x=1$处可能取得极值

9、 设函数$f(x)=\begin{cases}x\ln(1+x), 0\le x<1\\ 1, \quad x\ge1\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则

(A) $F(x)$在$x=0$连续但不可导 B）$x=0$是$F(x)$的可去间断点

(C) $x=0$是$F(x)$的跳跃间断点 (D) $F(x)$在$x=0$处可导

10、 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<\dfrac{1}{2}\\ x, & \dfrac{1}{2}\le x<1\end{cases}$，$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx, n=0,1,2,\cdots$，

$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，则$S(-\dfrac{11}{2})$的值为

A. $\dfrac{1}{4}$ B. $\dfrac{3}{4}$ C. $\dfrac{3}{8}$ D. $-\dfrac{3}{4}$

二、填空题（共 7 题，4 分/题）

1、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}(e^{x^2}-e^{\sin^2 3x})}{\ln(1+x)-x}=$____________

2、设Ω由曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$所围区域，则$\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=$____________

3、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots\sqrt[n]{n}}{n}=$______

4、设 f 二阶可导 $x+y=f(xy)$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$______

5、$\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}dx=$______

6、设 Ω 由曲面 $z^2=x^2+y^2-1$ 及平面 $z=0,z=2$ 所围成，其密度 $\rho=1$，则它对 z 轴的转动惯量为______

7、设 l 是过原点，方向为 $\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{8}\}$ 的直线，密度为 1 的均匀椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕直线 l 旋转，则其转动惯量为______

三、解答题（共 3 题，14 分/题）

1、已知 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$，计算 $\displaystyle\int_0^2\frac{1}{x}\ln\frac{2+x}{2-x}dx$

2、已知 n 元实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=x^TAX,\quad X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，求 f 在条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值。

3、设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=0,f(1)=1$，求证对任意 $n\in N^*$，存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi-\dfrac{1}{n})=f(\xi)-\dfrac{1}{n}$

华教杯全国大学生数学竞赛训练题答案

（数学类专业组）

一、选择题

1-5、DACCB　　　　　　6-10、DCCAC

二、填空题

1、16

2、$\dfrac{4\pi}{15}abc^3$

3、1

4、$f''\dfrac{(y-x)^2}{(1-xf')^3}+\dfrac{2f'(yf'-1)}{(1-xf')^2}$

5、$\dfrac{1}{5}\ln\left|4+5\sin^2 x\right|+c$

6、$\dfrac{103}{15}\pi$

7、$\dfrac{4abc\pi}{15}(\dfrac{10}{26}a^2+\dfrac{25}{26}b^2+\dfrac{17}{26}c^2)$

三、解答题

1、

$\ln\dfrac{2+x}{2-x}=\ln(1+\dfrac{x}{2})-\ln(1-\dfrac{x}{2})$，分别将它们进行麦克劳林展开

$$\ln(1+\frac{x}{2})=(\frac{x}{2})-\frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2+\frac{1}{3}(\frac{x}{2})^3-\frac{1}{5}(\frac{x}{2})^5+\cdots,\quad 0\le x\le 2$$

$$\ln(1-\frac{x}{2})=-(\frac{x}{2})-\frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2-\frac{1}{3}(\frac{x}{2})^3-\frac{1}{5}(\frac{x}{2})^5+\cdots,\quad 0\le x\le 2$$

$$\ln\frac{2+x}{2-x}=\ln(1+\frac{x}{2})-\ln(1-\frac{x}{2})=x+\frac{x^3}{3\cdot 2^2}+\frac{x^5}{5\cdot 2^4}+\frac{x^7}{7\cdot 2^6}+\dots$$

$f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{2+x}{2-x}=1+\dfrac{x^2}{3\cdot 2^2}+\dfrac{x^4}{5\cdot 2^4}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n+1)2^{2n}}$，此级数收敛域为$[0,2)$

两边积分 $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^2\frac{x^{2n}}{(2n+1)2^{2n}}dx=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{4}$

2、

因为 f 是一个实二次型，A 为实对称矩阵，故存在正交变换

$X = QY$ 使得，　$f = X^T AX = Y^T Q^T AQY = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

记 $\lambda_0 = \max\limits_{1\le i\le n} \lambda_i$，则 $f = f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \le \lambda_0 (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$

由于 Q 正交。所以 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$

$f \le \lambda_0 (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_0 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$，

当 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 时，$X^T AX$ 取最大值为 $X^T AX = \lambda_0$

3、

证：令 $g(x) = f(x) - f(x - \frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$，其中 $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], k = 2,3,\cdots n$，若存在 $k \in \{1,2,\cdots n\}$ 使 $g(\frac{k}{n}) = 0$，则 $\xi = \frac{k}{n}$，命题成立，否则 $\forall k \in \{1,2,\cdots n\}, g(\frac{k}{n}) \ne 0$

$\sum\limits_{k=1}^{n} g(\frac{k}{n}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k-1}{n}) - \frac{1}{n} \right] = f(1) - f(0) - 1 = 0$，故存在 $k \in \{1,2,3\cdots n\}$

使得　$g(\frac{k-1}{n}) g(\frac{k}{n}) < 0$.

在 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ 上 $g(x)$ 连续，应用零点定理，必存在 $\xi \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ 使得 $g(\xi) = 0$ 即 $f(\xi - \frac{1}{n}) = f(\xi) - \frac{1}{n}$