专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

# 第十一届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案
## (数学类低年级组, 2021 年 4 月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满分 | 20 | 15 | 15 | 20 | 15 | 15 | 100 |
| 得分 | | | | | | | |

**注意:**

1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

一、 (本题 20 分)填空题 (每小题 5 分)

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{k=n}^{3n-1}k\right)^{\frac{1}{2n}}\sin\frac{1}{n}=$ $\underline{\quad\frac{3\sqrt{3}}{e}\quad}$.

2. 已知 $f$ 在区间 $(-1,3)$ 内有二阶连续导数, $f(0)=12, f(2)=2f'(2)+8$，则 $\int_0^1 xf''(2x)\,dx=$ $\underline{\quad 1\quad}$.

3. 在三维空间的直角坐标系中, 方程 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2xz=1$ 表示的二次曲面类型是 ___椭圆柱面___.

4. 在矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}$ 的奇异值分解 $A=U\Lambda V$ 中(其中 $U,V$ 为正交方阵, $\Lambda$ 为对角阵), $\Lambda=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&\sqrt{3}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

二、(本题 15 分) 考虑单叶双曲面 $S: x^2-y^2+z^2=1$.

1. 证明: $S$ 上同一族直母线中任意两条不同的直母线是异面直线;

2. 设 $S$ 上同一族直母线中的两条直母线分别经过 $M_1(1,1,1)$ 与 $M_2(2,2,1)$ 两点. 求这两条直母线的公垂线方程以及这两条直母线之间的距离.

**证明:** 1. 将曲面方程改写为

$$x^2-y^2=1-z^2,$$

从而有

$$(x+y)(x-y)=(1+z)(1-z) \tag{1}$$

现在引进不全为零的参数 $\lambda,\mu$, 以及不全为零的参数 $u,v$, 我们得到两族直母线方程

$$\begin{cases}\lambda(x+y)=\mu(1+z)\\ \mu(x-y)=\lambda(1-z)\end{cases} \tag{2}$$

以及

$$\begin{cases}u(x+y)=v(1-z)\\ v(x-y)=u(1+z)\end{cases} \tag{3}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2 分)

首先以第一族直母线 (2) 为例证明两条不同的直母线是异面直线. 取 (2) 中两条直母线 $L_1$ 与 $L_2$

$$L_1:\begin{cases}\lambda_1(x+y)=\mu_1(1+z)\\ \mu_1(x-y)=\lambda_1(1-z)\end{cases} \tag{4}$$

以及

$$L_2:\begin{cases}\lambda_2(x+y)=\mu_2(1+z)\\ \mu_2(x-y)=\lambda_2(1-z)\end{cases} \tag{5}$$

其中, $\lambda_1\mu_2\neq\lambda_2\mu_1$.

考虑线性方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 x + \lambda_1 y - \mu_1 z - \mu_1 = 0 \\ \mu_1 x - \mu_1 y + \lambda_1 z - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 x + \lambda_2 y - \mu_2 z - \mu_2 = 0 \\ \mu_2 x - \mu_2 y + \lambda_2 z - \lambda_2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

设 (6) 的系数矩阵为$A$, 经计算可得

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 & -\mu_1 & -\mu_1 \\ \mu_1 & -\mu_1 & \lambda_1 & -\lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & -\mu_2 & -\mu_2 \\ \mu_2 & -\mu_2 & \lambda_2 & -\lambda_2 \end{vmatrix} = 4(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)^2 \neq 0$$

所以 $L_1$ 与 $L_2$ 为异面直线. ............................................(5 分)

对于第二族直母线 (3), 设两条直母线 $L_1', L_2'$

$$L_1' : \begin{cases} u_1(x+y) = v_1(1-z) \\ v_1(x-y) = u_1(1+z) \end{cases} \tag{7}$$

以及

$$L_2' : \begin{cases} u_2(x+y) = v_2(1-z) \\ v_2(x-y) = u_2(1+z) \end{cases} \tag{8}$$

其中 $u_1 v_2 \neq u_2 v_1$.

考虑方程组

$$\begin{cases} u_1 x + u_1 y + v_1 z - v_1 = 0 \\ v_1 x - v_1 y - u_1 z - u_1 = 0 \\ u_2 x + u_2 y + v_2 z - v_2 = 0 \\ v_2 x - v_2 y - u_2 z - u_2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

设方程组 (9) 的系数矩阵为 $B$, 经计算得到

$$\det(B)=\begin{vmatrix} u_1 & u_1 & v_1 & -v_1 \\ v_1 & -v_1 & -u_1 & -u_1 \\ u_2 & u_2 & v_2 & -v_2 \\ v_2 & -v_2 & -u_2 & -u_2 \end{vmatrix}=-4(u_1v_2-u_2v_1)^2\neq 0$$

所以 $L_1'$ 与 $L_2'$ 为异面直线. ..............................................(8 分)

2. 将 $M_1(1,1,1)$ 点代入 (2) 中可得 $\mu:\lambda=1:1$, 获得直母线 $L_3$ 的方程

$$L_3:\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases} \tag{10}$$

将 $M_2(2,2,1)$ 点代入 (2) 中可得 $\mu:\lambda=2:1$, 获得到直母线 $L_4$ 的方程

$$L_4:\begin{cases} x+y-2z=2 \\ 2x-2y+z=1 \end{cases} \tag{11}$$

因为 $(1,1,-1)\times(1,-1,1)=(0,-2,-2)$, 取 $L_3$ 的方向 $\overrightarrow{n_3}=(0,1,1)$. 因为 $(1,1,-2)\times(2,-2,1)=(-3,-5,-4)$, 取 $L_4$ 的方向 $\overrightarrow{n_4}=(3,5,4)$. $L_3,L_4$ 的公垂线 $L$ 的方向为 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{n_3}\times\overrightarrow{n_4}=(-1,3,-3)$. 设 $M(x,y,z)$ 为 $L$ 上的任意一点, 则 $L$ 的方程满足

$$\begin{cases} (\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{n})=0 \\ (\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{n_4},\overrightarrow{n})=0 \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{n})=\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$(\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{n_4},\overrightarrow{n})=\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 3 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}=0$$

经化简得到公垂线 $L$ 的方程

$$\begin{cases} 6x+y-z=6 \\ 27x-5y-14z=30 \end{cases}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (12 分)

$L_3, L_4$ 之间的距离满足

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}=\frac{2}{\sqrt{19}}=\frac{2}{19}\sqrt{19}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (15 分)

**注.** 经计算可得公垂线与两条直母线 $L_3, L_4$ 的交点分别为 $\frac{1}{19}(19,-3,-3)$ 和 $\frac{1}{19}(17,3,-9)$, 这两点间的距离为 $\frac{2}{19}\sqrt{19}$. 因此, 也可以通过计算两点间的距离得到异面直线之间的距离.

将 $M_1(1,1,1), M_2(2,2,1)$ 分别代入第二族直母线族 (3) 中可得到同一条直母线

$$\begin{cases} 1-z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

即 $M_1, M_2$ 位于同一条直母线上. 因此, 只需考虑 $L_3, L_4$ 的情形. $\square$

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

三、(本题 15 分) 设 $V$ 是有限维欧氏空间, $V_1, V_2$ 是 $V$ 的非平凡子空间且 $V = V_1 \oplus V_2$. 设 $p_1, p_2$ 分别是 $V$ 到 $V_1, V_2$ 的正交投影, $\varphi = p_1 + p_2$, 用 $\det\varphi$ 表示线性变换 $\varphi$ 的行列式. 证明: $0 < \det\varphi \leq 1$ 且 $\det\varphi = 1$ 的充要条件是 $V_1$ 与 $V_2$ 正交.

**证明:** 设 $\dim V_1 = m$, $\dim V_2 = n$, $m, n > 0$. 分别取 $V_1$ 和 $V_2$ 的各一组标准正交基, 它们合起来是 $V$ 的一组基, $\varphi$ 在这组基下的矩阵形如

$$A = \begin{pmatrix} I_m & B \\ C & I_n \end{pmatrix},$$

其中 $B$ 和 $C$ 分别是 $p_1|_{V_2}: V_2 \to V_1$ 和 $p_2|_{V_1}: V_1 \to V_2$ 的矩阵. ...........(3 分)

对于 $v_1 \in V_1$ 和 $v_2 \in V_2$, $v_1 - p_2 v_1 \in V_2^{\perp}$, 故 $\langle p_2 v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$, 同理 $\langle v_1, p_1 v_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$. 由 $\langle p_2 v_1, v_2\rangle = \langle v_1, p_1 v_2\rangle$ 可得 $C = B^T$. 从而 $CB = B^T B$ 为半正定矩阵, 它就是 $p_2 p_1|_{V_2}: V_2 \to V_2$ 的矩阵. ..........................................(6 分)

设 $\lambda$ 为 $p_2 p_1|_{V_2}$ 的一个特征值, $v_2 \in V_2$ 是相应的特征向量, 则 $\lambda \geq 0$ 且由于 $v_2 \notin V_1$, 我们有 $\|p_1 v_2\| < \|v_2\|$, 所以

$$0 \leq \lambda \|v_2\|^2 = \langle p_2 p_1 v_2, v_2\rangle = \langle p_1 v_2, p_1 v_2\rangle = \|p_1 v_2\|^2 < \|v_2\|^2,$$

故 $0 \leq \lambda < 1$. ........................................................(9 分)

由于 $\varphi$ 在 $V$ 的一组基下的矩阵为 $A$, 所以

$$\det\varphi = \det A = \det \begin{pmatrix} I_m & B \\ C & I_n \end{pmatrix} = \det(I_n - CB) = \prod_{\lambda}(1 - \lambda),$$

这里 $\lambda$ 取遍矩阵 $CB$ 的所有特征值 (记重数). 由于 $CB$ 的特征值即 $p_2 p_1|_{V_2}$ 的特征值, 故对 $CB$ 的每个特征值 $\lambda$ 有 $0 \leq \lambda < 1$, 从而 $0 < \det\varphi \leq 1$. .............(12 分)

特别地, $\det\varphi = 1$ 当且仅当对 $CB$ 的每个特征值 $\lambda$, 均有 $\lambda = 0$, 这也等价于 $CB = B^T B = 0$, 即 $B = C = 0$. 所以 $\det\varphi = 1$ 的充要条件是 $V_1$ 与 $V_2$ 正交.

..........................................................(15 分)

| | |
|---|---|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

四、 (本题 20 分) 证明:

1. 证明: 函数方程 $x^3-3x=t$ 存在三个在闭区间 $[-2,2]$ 上连续, 在开区间 $(-2,2)$ 内连续可微的解 $x=\varphi_1(t)$, $x=\varphi_2(t)$, $x=\varphi_3(t)$ 满足:

$$\varphi_1(-t)=-\varphi_3(t),\ \varphi_2(-t)=-\varphi_2(t),\quad |t|\leqslant 2.$$

2. 若 $f$ 是 $[-2,2]$ 上的连续偶函数, 证明: $\int_1^2 f(x^3-3x)\,dx=\int_0^1 f(x^3-3x)\,dx$.

**证明：** 1. 记 $g(x)=x^3-3x$, 那么 $g$ 是奇函数, 且 $g'(x)=3(x^2-1)$. 于是 $g$ 具有如下性质：

(1) 在 $(-\infty,-1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上严格单调上升, 在 $[-1,1]$ 上严格单调下降.

(2) $x=-1$ 是极大值点, 极大值为 2; $x=1$ 是极小值点, 极小值为 $-2$.

........................................................................ (4 分)

(3) 记

$$g_1=g|_{[-2,-1]},\quad g_2=g|_{[-1,1]},\quad g_1=g|_{[1,2]}.$$

根据以上性质, $g_1,g_2,g_3$ 分别在其定义的闭区间上严格单调, 且值域均为 $[-2,2]$. 因此, 依次有反函数 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$, 以 $[-2,2]$ 为定义域, 依次以 $[-2,-1]$, $[-1,1]$, $[1,2]$ 为值域.

........................................................................ (7 分)

由反函数的连续性得 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 均为 $[-2,2]$ 上的连续函数. 而 $g_1,g_2,g_3$ 依次在 $(-2,-1)$, $(-1,1)$, $(1,2)$ 内连续可导, 且导数不等于零. 因此, 它们的反函数 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 在 $(-2,2)$ 内连续可微. ............................................(10 分)

另一方面, 注意到 $g$ 为奇函数, 以及 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 的值域, $g_1,g_2,g_3$ 的定义域, 我们有

$$-t=-g_3(\varphi_3(t))=-g(\varphi_3(t))=g(-\varphi_3(t))=g_1(-\varphi_3(t)),\qquad t\in[-2,2].$$

因此

$$\varphi_1(-t)=-\varphi_3(t),\qquad t\in[-2,2].$$

同理,

$$-t=-g_2(\varphi_2(t))=-g(\varphi_2(t))=g(-\varphi_2(t))=g_2(-\varphi_2(t)),\qquad t\in[-2,2].$$

从而

$$\varphi_2(-t)=-\varphi_2(t),\qquad t\in[-2,2].$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (14 分)

2. 根据韦达定理，我们有

$$\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\varphi_3(t)=0, \qquad \forall\, t\in[-2,2].$$

从而

$$\varphi_1'(t)+\varphi_2'(t)+\varphi_3'(t)=0, \qquad \forall\, t\in(-2,2).$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (17 分)

这样结合 $f$ 为连续偶函数得到

$$\begin{aligned}
& 2\int_1^2 f(x^3-3x)\,dx-2\int_0^1 f(x^3-3x)\,dx \\
= & \int_{-2}^{-1} f(x^3-3x)\,dx-\int_{-1}^{1} f(x^3-3x)\,dx+\int_1^2 f(x^3-3x)\,dx \\
= & \int_{-2}^{2} f(t)\varphi_1'(t)\,dt+\int_{-2}^{2} f(t)\varphi_2'(t)\,dt+\int_{-2}^{2} f(t)\varphi_3'(t)\,dt=0.
\end{aligned}$$

从而结论成立. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (20 分)

□

| | |
|---|---|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

五、(本题 15 分) 设 $n \geqslant 2$, 对于 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 规定 $A^0$ 为 $n$ 阶单位阵 $I$. 形式定义 $\sin A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}$, $\cos A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}$ 以及 $\arctan A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} A^{2k+1}$. 记 $\|A\| \equiv \max\limits_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\\ \|\mathbf{x}\|=1}} \|A\mathbf{x}\|$, 其中 $\|\mathbf{x}\| \equiv \sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}$. 证明:

1. $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\sin A, \cos A$ 均有意义, 且 $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = I$.
2. 当 $\|A\| < 1$ 时, $\arctan A$ 有意义, 且 $\sin\arctan A = A\cos\arctan A$.

**证明:** 1. 由于

$$\left\|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}\right\| + \left\|\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k}\right\| \leqslant \frac{\|A\|^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\|A\|^{2k}}{(2k)!},$$

而 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\|A\|^k}{k!}$ 收敛, 因此, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}$ 和 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}$ 均绝对收敛, 从而 $\sin A, \cos A$ 有定义. ............................................................ (3 分)

进一步, 由绝对收敛级数的性质,

$$(\sin A)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^k}{(2j+1)!(2k-2j+1)!} A^{2k+2} = -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} C_{2k}^{2j+1} A^{2k},$$

$$(\cos A)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^k}{(2j)!(2k-2j)!} A^{2k} = I + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^k}{(2k)!} C_{2k}^{2j} A^{2k}.$$

由于

$$\sum_{j=0}^{k} C_{2k}^{2j} - \sum_{j=0}^{k-1} C_{2k}^{2j+1} = (1-1)^{2k} = 0,$$

因此 $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = I$. ........................................ (6 分)

2. 由 $\left\|\frac{(-1)^k}{2k+1}A^{2k+1}\right\| \leqslant \frac{\|A\|^{2k+1}}{2k+1}$ 可得, 当 $\|A\| < 1$ 时, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} A^{2k+1}$ 绝对收敛, 从而此时 $\arctan A$ 有定义. 易见 $\sin A, \cos A, \arctan A, A$ 均两两可交换.

............................................................ (8 分)

进一步, 若在某区间 $[a,b]$ 上的矩阵值函数 $A(t)$ 连续可微, 且对任何 $t, s \in [a,b]$, $A(t)$ 和 $A(s)$ 可交换, 则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}(t)\right)'$ 一致收敛, 从而 $(\sin A(t))' =$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}(t)A'(t) = (\cos A(t))A'(t)$. 同理, $(\cos A(t))' = -(\sin A(t))A'(t)$, 以及当 $\|A(t)\| < 1$ 时成立 $(\arctan A(t))' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A^{2k}(t)A'(t) = (I + A^2(t))^{-1}A'(t)$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (12 分)

现考虑 $t \in [0,1]$ 以及矩阵值函数 $f(t) = \sin\arctan(tA) - tA\cos\arctan(tA)$, 则根据上述讨论, 我们有

$$\begin{aligned} f'(t) &= (\cos\arctan(tA))(I + t^2A^2)^{-1}A - A\cos\arctan(tA) \\ &\quad + tA(\sin\arctan(tA))(I + t^2A^2)^{-1}A \\ &= tA^2(I + t^2A^2)^{-1}f(t), \qquad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

结合 $f(0) = 0$ 得到

$$\begin{aligned} \|f(t)\| &= \left\| \int_0^t sA^2(I + s^2A^2)^{-1}f(s)\,ds \right\| \leqslant \int_0^t \|A\|^2 \left\| \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k s^{2k}A^{2k} \right\| \|f(s)\|\,ds \\ &\leqslant \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^{2k+2}\,\|f(s)\|\,ds = \frac{\|A\|^2}{1 - \|A\|^2}\int_0^t \|f(s)\|\,ds, \qquad \forall\, t \in [0,1]. \end{aligned}$$

由此易证 $f(t) = 0$ ($\forall\, t \in [0,1]$). 即结论成立.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (15 分)

□

专业: ____ 座位号: ____ 考场号: ____ 所在院校: ____ 准考证号: ____ 姓名: ____

密封线 答题时不要超过此线

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

六、(本题 15 分) 设 $m, n$ 为正整数. 证明: 当参数 $k \neq 0$ 时, 微分方程 $y'(x) = ky^{2n}(x) + x^{2m-1}$ 的所有解都不是全局解(全局解即指定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的解).

**证明:** 我们分两种情况证明, 即 $k > 0$ 与 $k < 0$.

情形一: $k > 0$.

假设 $y(x)$ 为所给方程的一个全局解. 则

$$\lim_{x\to+\infty} y'(x) = \lim_{x\to+\infty} (ky^{2n}(x) + x^{2m-1}) = +\infty.$$

于是, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$. ........................................................(3 分)

取 $a > k$ 使得 $y(\sqrt[2m-1]{a}) \geqslant 1$. 对任意 $x \in [\sqrt[2m-1]{a}, +\infty)$, 我们有

$$y'(x) = ky^{2n}(x) + x^{2m-1} > ky^2(x) + k > 0.$$

........................................................................................(5 分)

因为 $y'(x) = ky^{2n}(x) + x^{2m-1} > 0, x \in [\sqrt[2m-1]{a}, +\infty)$, 所以 $y(x)$ 在 $[\sqrt[2m-1]{a}, +\infty)$ 上严格单调增加. 做辅助函数

$$z(x) = \arctan y(x), \quad x \in [\sqrt[2m-1]{a}, +\infty).$$

注意到对于 $x \in [\sqrt[2m-1]{a}, +\infty)$

$$z'(x) = \frac{y'(x)}{1+y^2(x)} = \frac{ky^{2n}(x)+x^{2m-1}}{1+y^2(x)} > \frac{ky^2(x)+k}{1+y^2(x)} = k$$

........................................................................................(8 分)

于是, 我们有

$$z(x) \geqslant kx - k\sqrt[2m-1]{a} + z(\sqrt[2m-1]{a}), \quad x \in [\sqrt[2m-1]{a}, +\infty).$$

另一方面, 我们有 $z(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$, 与上面的不等式矛盾.

........................................................................................(10 分)

情形二： $k < 0$.

假设 $y(x)$ 为所给方程的一个全局解. 则

$$\lim_{x\to-\infty} y'(x) = \lim_{x\to-\infty}(ky^{2n}(x)+x^{2m-1}) = -\infty.$$

于是, $\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$. ........................................ (12 分)

取 $a<k$ 使得 $y(\sqrt[2m-1]{a})\geqslant 1$. 对任意$x\in(-\infty\ \sqrt[2m-1]{a}]$, 我们有$y'(x)=ky^{2n}(x)+x^{2m-1}<ky^2(x)+k<0$. 因为 $y'(x)=ky^{2n}(x)+x^{2m-1}<0, x\in(-\infty,\ \sqrt[2m-1]{a}]$, 所以 $y(x)$ 在 $(-\infty,\ \sqrt[2m-1]{a}]$ 上严格单调减少. 做辅助函数

$$z(x)=\arctan y(x),\ \ x\in(-\infty,\ \sqrt[2m-1]{a}].$$

注意到对于 $x\in(-\infty,\ \sqrt[2m-1]{a}]$,

$$z'(x) \ = \tfrac{y'(x)}{1+y^2(x)} = \tfrac{ky^{2n}(x)+x^{2m-1}}{1+y^2(x)} < \tfrac{ky^2(x)+k}{1+y^2(x)} = k.$$

于是, 我们有

$$z(x)\geqslant kx-k\sqrt[2m-1]{a}+z(\sqrt[2m-1]{a}),\ \ x\in(-\infty,\ \sqrt[2m-1]{a}].$$

另一方面, 我们有 $z(x)\in(-\pi/2,\pi/2)$, 与上面的不等式矛盾.

.............................................................. (15 分)

**(或者)情形二**: $k<0$.

令 $h(x)=y(-x)$, 则

$$h'(x)=-y'(-x)=-(ky^{2n}(-x)+(-x)^{2m-1})=-kh^{2n}(x)+x^{2m-1}.$$

.............................................................. (14 分)

由情形一可知函数 $h(x)$ 的定义域不能延拓到正无穷, 于是函数 $y(x)=h(-x)$ 的定义域不能延拓到负无穷. ........................................ (15 分)

**证明二**: 我们分两种情况证明, 即 $k>0$ 与 $k<0$.

情形一: $k>0$.

假设 $y(x)$ 为所给方程的一个全局解. 则

$$\lim_{x\to+\infty} y'(x) = \lim_{x\to+\infty}(ky^{2n}(x)+x^{2m-1}) = +\infty.$$

于是, $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$. ........................................ (3 分)

取 $a>k$ 使得 $y(\sqrt[2m-1]{a})\geqslant 1$. 对任意 $x\in[\sqrt[2m-1]{a},+\infty)$, 我们有 $y'(x)=ky^{2n}(x)+x^{2m-1}>ky^2(x)+k>0$, 即 $\frac{y'(x)}{ky^2(x)+k}>1$. ................................ (8 分)

从而

$$\frac{1}{k}\left(\arctan y(x)-\arctan y(\sqrt[2m-1]{a})\right)=\int_{\sqrt[2m-1]{a}}^{x}\frac{y'(t)}{ky^2(t)+k}dt\geqslant x-\sqrt[2m-1]{a},\quad \forall x>\sqrt[2m-1]{a}.$$

另一方面, 上面不等式左边的值落在 $(-\pi/k,\pi/k)$内, 与上面的不等式矛盾.

................................................................ (10 分)

情形二： $k<0$.

假设 $y(x)$ 为所给方程的一个全局解. 则

$$\lim_{x\to-\infty}y'(x)=\lim_{x\to-\infty}(ky^{2n}(x)+x^{2m-1})=-\infty.$$

于是, $\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)=+\infty$. ................................................ (12 分)

取 $a<k$ 使得 $y(\sqrt[2m-1]{a})\geqslant 1$. 对任意 $x\in(-\infty,\sqrt[2m-1]{a}]$, 我们有 $y'(x)=ky^{2n}(x)+x^{2m-1}<ky^2(x)+k<0$, 即 $\frac{y'(x)}{ky^2(x)+k}>1$. 从而

$$\frac{1}{k}\left(\arctan y(\sqrt[2m-1]{a})-\arctan y(x)\right)=\int_{x}^{\sqrt[2m-1]{a}}\frac{y'(t)}{ky^2(t)+k}dt\geqslant \sqrt[2m-1]{a}-x,\quad \forall x<\sqrt[2m-1]{a}$$

另一方面, 上面不等式左边的值落在 $(\pi/k,-\pi/k)$ 内, 与上面的不等式矛盾.

................................................................ (15 分)

**(或者)情形二：** $k<0$.

令$h(x)=y(-x)$, 则

$$h'(x)=-y'(-x)=-(ky^{2n}(-x)+(-x)^{2m-1}=-kh^{2n}(x)+x^{2m-1}.$$

................................................................ (14 分)

由情形一可知函数 $h(x)$ 的定义域不能延拓到正无穷, 于是函数 $y(x)=h(-x)$ 的定义域不能延拓到负无穷. ........................................... (15 分)