2015 年第六届全国大学生数学竞赛决赛

(数学类三、四年级) 参考答案

一、填空题

(1) $z_1^2+z_2^2-z_3^2$.　(2) $\dfrac{3}{4}$　(3) 8π

(4) **【参考解答】**: $(n-1)!$

秩 $A=n-1 \Rightarrow$ 秩 $A^*=1$ 且 $Ax=0$ 的解空间维数为 1.

A 行和 $=0 \Rightarrow A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow Ax=0$ 的一组基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$

注意到 $AA^*=0$，从而 A^* 的每一列均形如 $a\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$，又由于 A 为实对称矩阵，故 A^* 也为实对称矩阵，故

$$A^*=\begin{pmatrix}a & \cdots & a\\ \vdots & & \vdots\\ a & \cdots & a\end{pmatrix}.$$

考虑多项式 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-n)$，其一次项系数为 $(-1)^{n-1}n!$.

另一方面，由 $f(\lambda)=|\lambda I-A|$ 又知，其一次项系数为 $(-1)^{n-1}(A_{11}+\cdots+A_{nn})$，结果为 $a=(n-1)!$.

二、【参考解答】: 设 l 为 z 轴，以过点 P 且垂直于 z 轴的直线为 x 轴来建立直角坐标系，可以设 $P:(p,0,0)$，l 的参数方程为: $l: x=0, y=0, z=t.$

设球面 C 的球心为 (x_0,y_0,z_0)，由于 C 过点 P，则

$$C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(p-x_0)^2+{y_0}^2+{z_0}^2.$$

求 l 与 C 的交点: 将 l 的参数方程代入 C，有

$$ {x_0}^2+{y_0}^2+(t-z_0)^2=(p-x_0)^2+{y_0}^2+{z_0}^2.$$

即

$$t^2-2z_0t+(2px_0-p^2)=0. \qquad (1)$$

由此可得两解为 $t_{1,2}=z_0\pm\sqrt{z_0^2-(2px_0-p^2)}$. 故弦长

$$a=|t_1-t_2|=2\sqrt{z_0^2-(2px_0-p^2)},$$

从而
$$z_0^2-2px_0+p^2-\frac{a^2}{4}=0. \tag{2}$$

反之，如果球面C的球心满足(2)，如果C过点P，此时二次方程(1)的判别式
$$\Delta=4z_0^2-4\left(2px_0-p^2\right)=a^2\geq 0,$$
方程有两个实根$t_{1,2}=z_0\pm\frac{a}{2}$. 从而$C$和$l$相交，而且截出来弦长为$a$. 所以所求轨迹方程为
$$z^2-2px\ +p^2-\frac{a^2}{4}=0.$$

三、【参考证明】: 对$A=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1\end{pmatrix}$，且特征方程为
$$\begin{aligned}&0=\left|\lambda I-A\right|=\lambda^2-2\operatorname{Re}z_1\lambda+\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\\&\Delta=4\left(\operatorname{Re}z_1\right)^2-4\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)\leq 0\end{aligned}$$

情形 1：$\Delta=0$. 此时，$z_2=0, z_1=\operatorname{Re}z_1$，从而$A=\begin{pmatrix}\operatorname{Re}z_1 & 0\\ 0 & \operatorname{Re}z_1\end{pmatrix}=J_A\in\Gamma$

取$P=I$即有$P^{-1}AP=J_A$.

情形 2：$\Delta<0$. 此时A的特征值为
$$\begin{aligned}&\lambda_1=\operatorname{Re}z_1+i\sqrt{\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-\left(\operatorname{Re}z_1\right)^2}\\&\lambda_2=\operatorname{Re}z_1-i\sqrt{\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-\left(\operatorname{Re}z_1\right)^2}\\&\lambda_2=\bar{\lambda}_1,\lambda_2\neq\lambda_1\end{aligned}$$

从而$J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\in\Gamma$

现取A关于λ_1的一个非零特征向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，则有
$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{z_1x}+\overline{z_2y}=\overline{\lambda_1}\bar{x}\\ \bar{z}_2\bar{x}-\bar{z}_1\bar{y}=-\bar{\lambda}_1\bar{y}\end{cases}$$

直接检验知$A\begin{pmatrix}-\bar{y}\\ \bar{x}\end{pmatrix}=\bar{\lambda}_1\begin{pmatrix}-\bar{y}\\ \bar{x}\end{pmatrix}$，因此$\begin{pmatrix}-\bar{y}\\ \bar{x}\end{pmatrix}$为$A$关于$\bar{\lambda}_1$的一个非零特征向量. 令$P=\begin{pmatrix}x & -\bar{y}\\ y & \bar{x}\end{pmatrix}$，则有

P可逆，且$P\in\Gamma, P^{-1}AP=J_A$.

四、【参考证明】: α的最大值为$\frac{1}{2}$.

若$\alpha > \frac{1}{2}$，取$x_n = (n\pi)^{-1}, y_n = \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{-1}$，则

$$\frac{|f(x_n)-f(y_n)|}{|x_n-y_n|^{\alpha}} = 2^{\alpha}\pi^{\alpha-1}n^{2\alpha-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\alpha-1} \to \infty.$$

下面证明$\sup\limits_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\frac{1}{2}}} < +\infty.$

由于$f(x)$为偶函数，不妨设$0 \le x < y$，令

$$z = \sup\{u \le y \mid f(u) = f(x)\},$$

则$z^{-1} \le y^{-1} + 2\pi.$

$$|f(x)-f(y)| = |f(z)-f(y)| \le \int_z^y |f'(t)|\,\mathrm{d}t \le |y-z|^{\frac{1}{2}}\left(\int_z^y f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le |x-y|^{\frac{1}{2}}\left(\int_z^y\left(\sin\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\cos\frac{1}{t}\right)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{s=\frac{1}{t}}}\ |x-y|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{y^{-1}}^{z^{-1}}\left(\frac{\sin s}{s}-\cos s\right)^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le |x-y|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{y^{-1}}^{y^{-1}+2\pi}4\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8\pi}\,|x-y|^{\frac{1}{2}}.$$

五、【参考证明】: 由$x''(t) \le -a(t)f(x(t)) < 0$. 故$x(t)$是上凸的. 故$\lim\limits_{t\to\infty} x'(t)$存在或为$-\infty$.

若$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, x(t) = +\infty$，则$x'(t) > 0$，$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = +\infty$. 故

$$x'(t)f(x(t)) \le a(t)x'(t)f(x(t)) \le -x'(t)x''(t),$$

积分得

$$\int_0^t f(x(s))\,\mathrm{d}x(s) \le \frac{x'(0)^2 - x'(t)^2}{2} \le \frac{x'(0)^2}{2}.$$

令$t \to \infty$得$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{x'(0)^2}{2}$矛盾.

六、【参考解答】: 由(1)可得$\left(f'-f+\frac{a+b}{2}\right)\left(f'+f-\frac{a+b}{2}\right) = -\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ (2)

由此可知$f'-f+\frac{a+b}{2}$是无零点的整函数. 可设

$$f' - f + \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} e^{\alpha}, \tag{3}$$

其中α是一个整函数，由(2)得

$$f' + f - \frac{a+b}{2} = -\frac{a-b}{2} e^{-\alpha}. \tag{4}$$

由(3)(4)可得

$$f = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4} e^{\alpha} - \frac{a-b}{4} e^{-\alpha}. \tag{5}$$

$$f' = \frac{a-b}{4} e^{\alpha} - \frac{a-b}{4} e^{-\alpha}. \tag{6}$$

对(5)求导得

$$f = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4} e^{\alpha} - \frac{a-b}{4} e^{-\alpha}. \tag{7}$$

由(6)(7)可得

$$\left(\alpha' + 1\right)\left(e^{\alpha} - 1\right)\left(e^{\alpha} + 1\right) = 0,$$

因此$e^{\alpha} - 1 = 0$或者$e^{\alpha} + 1 = 0$ 或者$\alpha' + 1 = 0$.

若$e^{\alpha} - 1 = 0$，则由(5)得到$f = b$是一个常数；同理，若$e^{\alpha} + 1 = 0$，则$f = a$，也是一个常数；若$\alpha' + 1 = 0$，则

$\alpha\left(z\right) = -z + C$，其中$C$是任意常数，再由(5)可得

$$f\left(z\right) = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4} e^{-z+C} - \frac{a-b}{4} e^{z-C} = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \mathrm{ch}\left(z - C\right).$$

七、【参考证明】:【思路一】: 1)在题设条件下，对任何可测集E，有$m^{*}\left(f\left(E\right)\right) \le K \cdot m\left(E\right)$.

(1) 若E为区间，由f的连续性知：$f\left(E\right)$为区间. 又$f\left(x\right)$是 Lipschitz 函数，有$\left|f\left(E\right)\right| \le K\left|E\right|$，即

$$m\left(f\left(E\right)\right) \le K \cdot m\left(E\right).$$

(2) 若E为开集，由开集的构造知：$E = \bigcup\limits_{n\ge1}\left(\alpha_n, \beta_n\right)$，其中$\left\{\left(\alpha_n, \beta_n\right)\right\}$互不相交. 由(1)得:

$$m^{*}\left(f\left(E\right)\right) = m^{*}\left(f\left(\bigcup_{n\ge1}\left(\alpha_n, \beta_n\right)\right)\right) = m^{*}\left(\bigcup_{n\ge1}\left(\alpha_n, \beta_n\right)\right) \le \sum_{n\ge1} m^{*} f\left(\left(\alpha_n, \beta_n\right)\right)$$

$$\le K \sum_{n\ge1} m\left(\left(\alpha_n, \beta_n\right)\right) = K \cdot m\left(\bigcup_{n\ge1}\left(\alpha_n, \beta_n\right)\right) = K \cdot m\left(E\right).$$

(3) 若E为可测，则$\forall\varepsilon > 0, \exists$开集$G \supset E$，使得$m\left(G - E\right) < \varepsilon$.

由(2)及$f\left(G\right) \supset f\left(E\right)$ 知

$$m^{*}\left(f\left(E\right)\right) \le m^{*}\left(f\left(G\right)\right) \le K \cdot m\left(G\right) = K \cdot m\left(E \cup \left(G - E\right)\right)$$

$$\le K \cdot m\left(E\right) + K \cdot m\left(G - E\right) < K \cdot m\left(E\right) + K \cdot \varepsilon$$

由ε的任意性知：$m^{*}\left(f\left(E\right)\right) \le K \cdot m\left(E\right)$.

2) 在题设条件下，若E可测，则$f\left(E\right)$可测. E可测

$\Rightarrow \exists F_\sigma -$型集$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n, F_n$闭集，$A\subset E, m\left(E-A\right)=0.$ 又$f\left(A\right)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f\left(F_n\right),$ 由$f\left(x\right)$的连续性知，$f\left(F_n\right)$闭. 那么$f\left(A\right)$是$F_\sigma -$型集且$f\left(A\right)\subset f\left(E\right).$ 由 1)知：

$$m^*\left(f\left(E-A\right)\right)\le K\cdot m\left(E-A\right)=0.$$

即$m\left(f\left(E-A\right)\right)=0.$ 而$f\left(E-A\right)\supset f\left(E\right)-f\left(A\right)$，从而有$m\left(f\left(E\right)-f\left(A\right)\right)=0$. 故$f\left(E\right)$可测.

综合 1)，2)可得：对任意的可测集E，均有$f\left(E\right)$可测且$m\left(f\left(E\right)\right)\le K\cdot m\left(E\right).$

【思路 2】: i) 若$f\left(x\right)$为R^1上的绝对连续函数，$A\subset R, m\left(A\right)=0$，则$m\left(f\left(A\right)\right)=0.$

$$f\in AC\left(R^1\right)\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$$

对任意至多可数个互不相交的开区间$\left\{\left(a_i,b_i\right)\right\}_{i\ge1}$，当$\sum\limits_{i\ge1}\left(b_i-a_i\right)<\delta$时，有

$$\sum_{i\ge1}\left(f\left(b_i\right)-f\left(a_i\right)\right)<\varepsilon.$$

由$m\left(A\right)=0$，对上$\delta>0, \exists$开集$G\supset A, m\left(G\right)<\delta$.

令$G=\bigcup\limits_{k\ge1}\left(c_k,d_k\right), m_k=\min\limits_{x\in\left[c_k,d_k\right]} f\left(x\right)=f\left(\alpha_k\right),\ M_k=\min\limits_{x\in\left[c_k,d_k\right]} f\left(x\right)=f\left(\beta_k\right).$

因为$\sum\limits_{k\ge1}\left(\beta_k-\alpha_k\right)\le\sum\limits_{k\ge1}\left(d_k-c_k\right)<\delta$，所以$\sum\limits_{k\ge1}\left(f\left(\beta_k\right)-f\left(\alpha_k\right)\right)<\varepsilon.$而

$$m^*f\left(G\right)=m^*\left(\bigcup_{k\ge1}f\left(\left(c_k,d_k\right)\right)\right)\le\sum_{k\ge1}\left|f\left(\beta_k\right)-f\left(\alpha_k\right)\right|<\varepsilon.$$

又因为$f\left(G\right)\supset f\left(A\right)$，所以$m^*f\left(A\right)<\varepsilon$，由$\varepsilon$的任意性知$m^*f\left(A\right)=0.$

ii) 若$f\left(x\right)$为R^1上的绝对连续函数，A可测，则$f\left(A\right)$可测

$$A\text{可测}\Rightarrow\exists F_\sigma-\text{型集}B=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n, F_n\text{闭集},$$

$$B\subset A, m\left(A-B\right)=0\Rightarrow f\left(B\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f\left(F_n\right),$$

由f的连续性知，$f\left(F_n\right)$闭. 那么$f\left(B\right)$是$F_\sigma-$型集，$f\left(B\right)\subset f\left(A\right).$　由 i)知：$m\left(f\left(A-B\right)\right)=0.$

又因为$f\left(A-B\right)\supset f\left(A\right)-f\left(B\right)$，从而有$m\left(f\left(A\right)-f\left(B\right)\right)=0$. 故$f\left(A\right)$可测.

iii) 不妨设E测度有限. f为R^1上的 Lipschitz 函数$\Rightarrow f\left(x\right)$为$R^1$上的绝对连续函数$\Rightarrow f'\left(x\right)$在$R^1$上几乎处处存在且$\left|f'\left(x\right)\right|\le K, f'$在$E$上是$L-$可积，即$\exists Z\subset R^1, m\left(Z\right)=0, f'\left(x\right)$存在且

$$\left|f'\left(x\right)\right|\le K, \forall x\in E-Z.$$

由 i)知：$mf\left(Z\right)=0$．于是

$$m\left(f\left(E\right)\right)\le m\left(f\left(E-Z\right)\right)+m\left(f\left(Z\right)\right)=m\left(f\left(E-Z\right)\right)\le\int_{E-Z}\left|f'\left(x\right)\right|\mathrm{d}m$$
$$\le\int_{E-Z}K\,\mathrm{d}m\le K\cdot m\left(E\right).$$

【注】：上式的第二个不等式的证明如下：

若 f 在 R^1 上上绝对连续，f 在 A 上的存在积分，则 $mf\left(A\right)\le\int_A\left|f'\right|\mathrm{d}m.$

【证明】(1)对任何区间 I，$mf\left(I\right)\le\int_I\left|f'\right|\mathrm{d}m$．令

$$\max_{x\in\bar{I}}f\left(x\right)=f\left(b\right),\min_{x\in\bar{I}}f\left(x\right)=f\left(a\right),a,b\in\bar{I}.$$

则 $mf\left(I\right)=f\left(b\right)-f\left(a\right)=\left|\int_{(a,b)}f'\,\mathrm{d}m\right|\le\int_{(a,b)}|f'|\,\mathrm{d}m\le\int_I|f'|\,\mathrm{d}m$.

(2) f' 可积 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall e\subset E$，若 $me<\delta$，有 $\int_e|f'|\,\mathrm{d}m<\varepsilon.$

$$A\text{ 可测}\Rightarrow\text{对上}\,\delta>0,\exists\text{开集}\,G\supset A,m\left(G-A\right)<\delta,$$

于是 $\int_{G-A}|f'|\,\mathrm{d}m<\varepsilon.$ 令 $G=\bigcup_{k\ge1}\left(\alpha_k,\beta_k\right)$，则

$$m\left(f\left(A\right)\right)\le m\left(f\left(G\right)\right)\le\sum_{k\ge1}m\left(f\left(\left(\alpha_k,\beta_k\right)\right)\right)$$
$$\le\sum_{k\ge1}\int_{\left(\alpha_k,\beta_k\right)}\left|f'\right|\mathrm{d}m=\int_G\left|f'\right|\mathrm{d}m=\int_G\left|f'\right|\mathrm{d}m-\varepsilon+\varepsilon$$
$$\le\int_G\left|f'\right|\mathrm{d}m-\int_{G-A}\left|f'\right|\mathrm{d}m+\varepsilon=\int_A\left|f'\right|\mathrm{d}m+\varepsilon$$

由 ε 的任意性得 $mf\left(A\right)\le\int_A\left|f'\right|\mathrm{d}m.$

八、【参考证明】：在 P_0 附近取曲率线坐标 $\left(u,v\right)$，曲面的参数方程设为 $\mathrm{r}\left(u,v\right)$．不妨设 $\mathrm{r}\left(0,0\right)=P_0$.

用 E,F,G,L,M,N 分别表示曲面 $\mathrm{r}\left(u,v\right)$ 的第一基本型、第二基本型系数，则 $F=M=0$.

令 $f\left(u,v\right)=<\mathrm{r}\left(u,v\right),\mathrm{r}\left(u,v\right)>$，则 $f\left(u,v\right)$ 在 $\left(0,0\right)$ 点取极大值 1．于是

$$f_u\left(0,0\right)=2<\mathrm{r}_u\left(0,0\right),\mathrm{r}\left(0,0\right)>=0,$$
$$f_v\left(0,0\right)=2<\mathrm{r}_v\left(0,0\right),\mathrm{r}\left(0,0\right)>=0.$$

从而曲面 S 在 P_0 的法向 $\vec{n}\left(0,0\right)=\mathrm{r}\left(0,0\right)$. 又由于

$$f_{uu}\left(0,0\right)=2\left(E\left(0,0\right)+L\left(0,0\right)\right),f_{uv}\left(0,0\right)=0,$$
$$f_{vv}\left(0,0\right)=2\left(G\left(0,0\right)+N\left(0,0\right)\right).$$

根据 $f\left(u,v\right)$ 在 $\left(0,0\right)$ 点取极大值，$f_{uu}\left(0,0\right)\le0,f_{vv}\left(0,0\right)\le0$. 于是

$$0<E\left(0,0\right)\le-L\left(0,0\right),0<G\left(0,0\right)\le-N\left(0,0\right),$$

从而 S 在 P_0 的 Gauss 曲率

$$K\left(P_0\right)=\frac{L\left(0,0\right)N\left(0,0\right)}{E\left(0,0\right)G\left(0,0\right)}\geq 1.$$

九、【参考证明】: 令$G=\left(\alpha D-C\right)^{-1}\left(\left(\alpha-1\right)D+C^T\right),\lambda$为$G$的特征值，$x$是对应的特征向量，$y=\left(I-G\right)x$，则

$$\left(\alpha D-C\right)y=\left(\alpha D-C\right)x-\left(\left(\alpha-1\right)D+C^T\right)x=\left(D-C-C^T\right)x=Ax$$

$$\left(\alpha D-D+C^T\right)y=\left(\alpha D-C-A\right)y=\left(\alpha D-C-A\right)x-\left(\alpha D-C-A\right)Gx$$
$$=\left(\alpha D-C-A\right)x-\left((\alpha-1)D+C^T\right)x+AGx=AGx=\lambda Ax.$$

以上两个方程两边分别与y作内积，得

$$\alpha\left\langle Dy,y\right\rangle-\left\langle Cy,y\right\rangle=\left\langle Ax,y\right\rangle.$$
$$\alpha\left\langle y,Dy\right\rangle-\left\langle y,Dy\right\rangle+\left\langle y,C^Ty\right\rangle=\left\langle y,\lambda Ax\right\rangle.$$

以上两式相加得

$$\left(2\alpha-1\right)\left\langle Dy,y\right\rangle=\left\langle Ax,y\right\rangle+\left\langle y,\lambda Ax\right\rangle$$
$$=\left(1-\bar{\lambda}\right)\left\langle Ax,x\right\rangle+\bar{\lambda}\left(1-\lambda\right)\left\langle x,Ax\right\rangle=\left(1-|\lambda|^2\right)\left\langle Ax,x\right\rangle.$$

由于$\alpha>\frac{1}{2},\left\langle Dy,y\right\rangle\geq 0,\left\langle Ax,x\right\rangle>0$，则必有$|\lambda|\leq 1$，若$|\lambda|=1$，则$y=0$，从而

$$Ax=\left(\alpha D-C\right)y=0,$$

进而$x=0$，矛盾. 因此$|\lambda|<1$，即$\rho\left(G\right)<1$. 故迭代收敛.

十、【参考证明】: 若f,g在$\left[0,1\right]$上无公共零点，则连续函数$\left|f\right|^2+\left|g\right|^2$在$\left[0,1\right]$上恒大于0，结果

$$\frac{1}{\left|f\right|^2+\left|g\right|^2}\in R.$$

注意到I为左理想，$f\in I,\bar{f}\in R$，从而$\left|f\right|^2=\bar{f}\ f\in I$，同样$\left|g\right|^2\in I$，故$\left|f\right|^2+\left|g\right|^2\in I$，进而$\frac{1}{\left|f\right|^2+\left|g\right|^2}\left(\left|f\right|^2+\left|g\right|^2\right)=1\in R,$矛盾与$I$为$R$的一个极大左理想.

十一、【参考解答】: 设需要组织t吨货源预备出口，则国家收益Y（单位：万元）是随机变量X的函数$Y=g\left(X\right)$，表达式为

$$g\left(X\right)=\begin{cases}3t, X\geq t\\ 3X-\left(t-X\right), X<t\end{cases}$$

显然，$100\leq t\leq 200,$ 由已知条件，知X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{100}, x\in[100,200]\\ 0, x\notin[100,200]\end{cases}$$

由于Y是随机变量，因此，题中所指的国家收益最大可理解为均值最大，因而问题转化为求Y的均值，即求$E[g(X)]$的均值. 简单计算可得

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{100}\int_{100}^{200}g(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$=\frac{1}{100}\int_{100}^{t}[3x-(t-x)]\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{100}\int_{t}^{200}3t\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{50}[-t^2+350t-10000].$$

记$h(t)=-t^2+350t-10000.$ 令$h'(t)=0,$ 得$t=175.$ 而$h''(t)=-2<0$.

因此，当$t=175$时函数$h(t)$达到最大值，亦即$E[g(X)]$达到最大，故应组织 175 吨这种商品，能使国家获得收益均值最大.