第十届清疏竞赛班非数学类 4:

本次课主要处理递推数列的极限问题

隐零点处理手法.

$(1): f_n(x)=e^{-x}+e^{-2x}+\cdots+e^{-nx}$, 证明$f_n(x)=1$在$[0,1)$有唯一实根,

并求极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$(2): e^x+x^{2n+1}=0$，求$A,B\neq 0$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n-A)=B$

(考试不考)附加方法：拉格朗日反演

(3): 迭代法$x_n e^{x_n}=n$, 估计$x_n\ (n\to\infty)$

证明(1)：$f_n(0)=n\geq 1, f_n(x)=\dfrac{e^{-x}-e^{-x(n+1)}}{1-e^{-x}}$

$$f_n(1)=\frac{e^{-1}-e^{-(n+1)}}{1-e^{-1}}=\frac{1-e^{-n}}{e-1}<1 \Leftrightarrow 1-e^{-n}<e-1 \Leftrightarrow 2<e^{-n}+e$$

由零点定理,因此存在唯一的$x_n\in[0,1)$, 使得$\dfrac{e^{-x_n}-e^{-x_n(n+1)}}{1-e^{-x_n}}=1$

思路总结：在考场上我们几乎只能遇到n可以解出来的类型.

$$e^{-x_n}-e^{-x_n(n+1)}=1-e^{-x_n} \Rightarrow e^{-x_n(n+1)}=2e^{-x_n}-1 \Rightarrow -x_n(n+1)=\ln\left(2e^{-x_n}-1\right)$$

$$\Rightarrow -(n+1)=\frac{\ln\left(2e^{-x_n}-1\right)}{x_n}$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}-(n+1)=-\infty, \lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$

结论：有界数列必有收敛子列

我们称$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$为广义收敛.

结论：

如果x_n所有广义收敛子列都收敛于同一个$a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$, 则$x_n$也收敛到$a$.

设$x_{n_k}\to A\in[0,1]$, 那么$\lim\limits_{x\to A}\dfrac{\ln\left(2e^{-x}-1\right)}{x}=-\infty \Rightarrow A=\ln 2$

由我们上面的结论就知道$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\ln 2$.

$(2):n\in\mathbb{N}$

$e^{x_n}+x_n^{2n+1}=0$，求$A,B\neq 0$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(x_n-A\right)=B$

证明：

e^x+x^{2n+1}是递增函数

$e^{-1}+\left(-1\right)^{2n+1}=e^{-1}-1<0,e^0+0^{2n+1}=1>0$

所以存在唯一的$x_n\in\left(-1,0\right)$,使得$e^{x_n}+x_n^{2n+1}=0$

$$e^{x_n}=-x_n^{2n+1},x_n=\left(2n+1\right)\ln\left(-x_n\right)\Rightarrow\frac{x_n}{\ln\left(-x_n\right)}=2n+1\to\infty$$

和刚才一样,我们知道$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1=A$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(x_n+1\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\ln\left(-x_n\right)}\left(x_n+1\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x}{\ln\left(-x\right)}\left(x+1\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{x\left(1-x\right)}{\ln\left(x\right)}=\frac{1}{2}=B'$$

(考试不考)自己给出x_n的渐进,$y_n=x_n+1$

$$n=\frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{\ln\left(-x_n\right)}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{y_n-1}{\ln\left(1-y_n\right)}-1\right)$$

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{y_n-1}{\ln\left(1-y_n\right)}-1\right)}$$

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{y_n-1}{\ln\left(1-y_n\right)}-1\right)}=2x+5x^2+o\left(x^2\right)$$

此时可以套用拉格朗日反演得到y_n关于n的展开,

此时就得到x_n关于n的展开.

(3):迭代法很难的时候才会考察.

$$x_n e^{x_n}=n \Rightarrow \ln x_n+x_n=\ln n \Rightarrow 0 \le x_n=\ln n-\ln x_n \le \ln n$$

$$\Rightarrow x_n=O(\ln n)$$

$$\ln x_n=\ln(\ln n-\ln x_n)=\ln\ln n+\ln\left(1-\frac{\ln x_n}{\ln n}\right)$$

$$=\ln\ln n-\frac{\ln x_n}{\ln n}+o\left(\frac{\ln x_n}{\ln n}\right)$$

$$=\ln\ln n-\frac{\ln O(\ln n)}{\ln n}+o\left(\frac{\ln O(\ln n)}{\ln n}\right)$$

$$=\ln\ln n-\frac{\ln\ln n+\ln O(1)}{\ln n}+o\left(\frac{\ln\ln n+\ln O(1)}{\ln n}\right)$$

$$=\ln\ln n-\frac{\ln\ln n}{\ln n}+o\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)$$

$$\Rightarrow x_n=\ln n-\ln\ln n+\frac{\ln\ln n}{\ln n}+o\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)$$

例如可以出题: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln\ln n}(x_n-\ln n+\ln\ln n)=1$

$a_{n+1}=f\left(a_n\right)$求极限总结,

(1):我们只能处理f具有单调性的情况,或者通过转化使得

a_n值域落入f的单调区间转化为单调的情况.

(2):当f递增,a_n一定具有单调性且和不动点大小关系恒定.

例如我们举$a_{n+1}=\sin a_n, a_1\in\mathbb{R}$

证明:

运用结论的书写:显然$-1\le a_n\le 1, n\ge 2$,所以可以不妨设$-1\le a_1\le 1$

此时a_n落入了$\sin x$的递增区间,

不动点$x=0$,因此如果$a_1\ge 0$,那么$a_2=\sin a_1\le a_1\Rightarrow a_n$递减

$a_1\ge 0\Rightarrow a_n\ge 0,\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$存在$\Rightarrow\sin a=a\Rightarrow a=0$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

如果$a_1\le 0$,那么$a_2=\sin a_1\ge a_1\Rightarrow a_n$递增

$a_1\le 0\Rightarrow a_n\le 0,\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$存在$\Rightarrow\sin a=a\Rightarrow a=0$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

严格书写(以$a_1\ge 0$为例):

显然$-1\le a_n\le 1, n\ge 2$,所以可以不妨设$-1\le a_1\le 1$

此时a_n落入了$\sin x$的递增区间.

归纳法书写:

我们证明$0\le a_{n+1}\le a_n$

当$n=1$,可以直接验证,假定n的时候成立,此时

$a_{n+2}=\sin a_{n+1}\le\sin a_n=a_{n+1}$

$a_{n+2}=\sin a_{n+1}\ge\sin 0=0$

因此对任何$n\in\mathbb{N}$,都有$0\le a_{n+1}\le a_n$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$存在$\Rightarrow\sin a=a\Rightarrow a=0$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

$(3): f(x)$递减$($非数几乎不用$)$

结论：a_n一定不具有单调性, 且和不动点大小关系不恒定, 但是:

a_n的奇子列和偶子列一定具有单调性, 且和不动点大小恒定.

但是单调性相反且大小关系相反.

证明只需要考虑$f(f(x))$,此时转化为递推函数递增来进行证明

$x_{n+2} = f(f(x_n))$

在数学类上遇见这种问题要处理的难点

是$x = f(f(x))$会不会产生不同于$x = f(x)$的根.

具体细节可以关注数学类课程.

压缩映像处理手法.

(1)：$x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n^3+4}, x_1=1,$ 计算$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

(2)：求极限:$\sqrt{7}, \sqrt{7-\sqrt{7}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}} \cdots$

证明：

(1)：递推数列递减, 所以尽量不走单调性.

$$x=\frac{1}{x^3+4}\Rightarrow x\left(x^3+4\right)=1\Rightarrow \text{不动点}x_0=0.249$$

显然$0\le x_{n+1}\le \dfrac{1}{4}$

第一种：对$n\ge 2,$

$$\left|x_{n+1}-x_0\right|=\left|\frac{1}{x_n^3+4}-x_0\right|=\left|\frac{1}{x_n^3+4}-\frac{1}{x_0^3+4}\right|$$

$$=\left|\frac{x_0^3-x_n^3}{\left(x_n^3+4\right)\left(x_0^3+4\right)}\right|\le\left|\frac{x_0^3-x_n^3}{16}\right|=\frac{1}{16}\left|x_0-x_n\right|\left(x_n^2+x_0^2+x_nx_0\right)$$

$$\le\frac{1}{16}\left|x_0-x_n\right|\left(x_n^2+x_0^2+x_nx_0\right)\le\frac{3}{16^2}\left|x_0-x_n\right|\le\left(\frac{3}{16^2}\right)^2\left|x_0-x_{n-1}\right|$$

$$\le\left(\frac{3}{16^2}\right)^3\left|x_0-x_{n-2}\right|\le\cdots\le\left(\frac{3}{16^2}\right)^n\left|x_0-x_1\right|\to 0$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

第二种：

$$\left|\left(\frac{1}{x^3+4}\right)'\right|=\left|-\frac{3x^2}{\left(x^3+4\right)^2}\right|\le\frac{3}{16^2},\forall x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$$

由拉格朗日中值定理,得到

$$\left|x_{n+1}-x_0\right|=\left|\frac{1}{x_n^3+4}-\frac{1}{x_0^3+4}\right|\le\frac{3}{16^2}\left|x_n-x_0\right|,\text{和上面一样迭代即得.}$$

第三种：

$$\left|\left(\frac{1}{x^3+4}\right)'\right| = \left|-\frac{3x^2}{\left(x^3+4\right)^2}\right| \le \frac{3}{16^2}, \forall x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

由拉格朗日中值定理,得到

$$\left|x_{n+1}-x_n\right| = \left|\frac{1}{x_n^3+4} - \frac{1}{x_{n-1}^3+4}\right| \le \frac{3}{16^2}\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \cdots \le \left(\frac{3}{16^2}\right)^{n-1}\left|x_2 - x_1\right|$$

$$\sum\left|x_{n+1}-x_n\right| \le \sum\left(\frac{3}{16^2}\right)^{n-1}\left|x_2-x_1\right| < \infty$$

因此$\sum\left(x_{n+1}-x_n\right)$收敛,所以$x_n$收敛.

因此设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,解方程得$a = x_0$

(2)：求极限：$\sqrt{7}, \sqrt{7-\sqrt{7}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}}$

证明：

$$x_{n+2} = \sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}, x_1 = \sqrt{7}, x_2 = \sqrt{7-\sqrt{7}}$$

$$x = \sqrt{7-\sqrt{7+x}} \Rightarrow x = 2$$

$$\left|x_{n+2}-2\right| = \left|\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}} - \sqrt{7-\sqrt{7+2}}\right|$$

$$= \frac{\left|\sqrt{7+2}-\sqrt{7+x_n}\right|}{\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}+\sqrt{7-\sqrt{7+2}}} = \frac{\left|2-x_n\right|}{\left(\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}+\sqrt{7-\sqrt{7+2}}\right)\left(\sqrt{7+2}+\sqrt{7+x_n}\right)}$$

$$\le \frac{\left|2-x_n\right|}{\left(\sqrt{7-\sqrt{7+2}}\right)\left(\sqrt{7+2}\right)} = \frac{\left|2-x_n\right|}{6}$$

$$\left|x_{2n+1}-2\right| \le \frac{\left|2-x_{2n-1}\right|}{6}, \left|x_{2n+2}-2\right| \le \frac{\left|2-x_{2n}\right|}{6} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 2.$$

上下极限处理手法(比压缩映像还万能)

(1)：类递增

$c_1,c_2>0,c_{n+2}=\sqrt{c_{n+1}}+\sqrt{c_n}$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}c_n$

证明：

(1)：取$M=\max\{4,c_1,c_2\}$, 显然$n=1,2,c_n\le M$, 若$c_n\le M$,

则$c_{n+2}\le 2\sqrt{M}\le M$，所以对所有$n\in\mathbb{N}$, 都有$c_n\le M$.

显然$c_n\ge 0$.

设$\limsup\limits_{n\to\infty}c_n=A,\liminf\limits_{n\to\infty}c_n=B$

$$A=\limsup_{n\to\infty}c_{n+2}=\limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt{c_{n+1}}+\sqrt{c_n}\right)$$

$$\le\limsup_{n\to\infty}\sqrt{c_{n+1}}+\limsup_{n\to\infty}\sqrt{c_n}=2\sqrt{A}\Rightarrow A\le 4$$

$$B=\liminf_{n\to\infty}c_{n+2}=\liminf_{n\to\infty}\left(\sqrt{c_{n+1}}+\sqrt{c_n}\right)$$

$$\ge\liminf_{n\to\infty}\sqrt{c_{n+1}}+\liminf_{n\to\infty}\sqrt{c_n}=2\sqrt{B}\Rightarrow B\ge 4$$

而$A\ge B$，因此$A=B=4$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=4$.

$\left(\text{考的很难的时候}\right)$加强归纳处理手法：

$\left(1\right)$：$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+n,a_1=\dfrac{1}{2}$, 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$

$\left(2\right)$: $a_n=\sqrt{n+a_{n-1}},a_1=1$, 证明：$a_n=\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8\sqrt{n}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

分析：很多时候我们直接放缩数列是什么也得不到的.

这个时候需要自己猜出一个不等式去放缩.

证明：

$\left(1\right)$: 我们证明$n-1\le a_n\le n$, 当$n=1$显然成立, 假定n的时候成立,

当$n+1$时, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+n\le\dfrac{n}{n}+n=n+1$

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{n}+n\ge\frac{n-1}{n}+n=n+1-\frac{1}{n}\ge n$$

$\Rightarrow n-1\le a_n\le n,\forall n\in\mathbb{N}$.

因此$1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}\le1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=1$

$\left(2\right)$:

$a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}\ge\sqrt{n}$，下证$a_n\le1+\sqrt{n}$

当$n=1$时, 显然, 当n时, $a_n\le1+\sqrt{n}$,

$$a_{n+1}=\sqrt{n+1+a_n}\le\sqrt{n+2+\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n+2+\sqrt{n}}\le1+\sqrt{n+1}\Leftrightarrow n+2+\sqrt{n}\le n+2+2\sqrt{n+1}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{n}\le2\sqrt{n+1}$$

因此我们证明了$a_n\le1+\sqrt{n},\forall n\in\mathbb{N}$

这给出了$a_n=\sqrt{n}+O\left(1\right)$

$$a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}=\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{a_{n-1}}{n}}$$

利用$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{8}x^2+o\left(x^2\right)$,

下面部分视频中有点问题,我们做一下纠正.

视频中余项$a_n=\sqrt{n}+o\left(\sqrt{n}\right)$一次到2阶是不够的,我们必须先搞出第一阶.

但是方法一致.

首先归纳给出了$a_n=\sqrt{n}+O(1)$

$$a_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{a_{n-1}}{n}}\right)=\sqrt{n}\left(1+\frac{a_{n-1}}{2n}+O\left(\frac{a_{n-1}^2}{n^2}\right)\right)=\sqrt{n}+\frac{a_{n-1}}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\sqrt{n}+\frac{\sqrt{n-1}+O(1)}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{n}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\sqrt{n}+\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}+\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

在类似视频中操作有

$$a_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{a_{n-1}}{n}}\right)=\sqrt{n}\left(1+\frac{a_{n-1}}{2n}-\frac{a_{n-1}^2}{8n^2}+o\left(\frac{a_{n-1}^2}{n^2}\right)\right)$$

$$=\sqrt{n}+\frac{a_{n-1}}{2\sqrt{n}}-\frac{a_{n-1}^2}{8n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\sqrt{n}+\frac{a_{n-1}}{2\sqrt{n}}-\frac{\left[\sqrt{n-1}+O(1)\right]^2}{8n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\sqrt{n}+\frac{\sqrt{n-1}+\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2\sqrt{n}}-\frac{n-1}{8n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\sqrt{n}+\frac{\sqrt{n-1}+\frac{1}{2}}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{8\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\sqrt{n}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\frac{1}{8\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\sqrt{n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$