全国大学生数学竞赛非数学类模拟六

清疏竞赛考研数学

2023 年 9 月 25 日

摘要

$$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\},\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}.$$

模拟试题应当规定时间独立完成并给予反馈.

1 填空题

填空题 1.1 设 $g(x)=\lim\limits_{r\to 0^+}\left((x+1)^{r+1}-x^{r+1}\right)^{\frac{1}{r}}$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=$ __________

填空题 1.2 平面 $lx+my+nz=\lambda$ 和椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 相切, 则 $a^2\ell^2+b^2m^2+c^2n^2=$ __________

填空题 1.3 设 f 连续且满足 $x=\int_0^x f(y)\,dy+\int_0^x yf(x-y)\,dy$, 则 $f(x)=$ __________

填空题 1.4 给定二阶连续可微函数 $f(x,y,z)$, 做换元 $\begin{cases}x=a_{11}u+a_{12}v+a_{13}w\\y=a_{21}u+a_{22}v+a_{23}w\\z=a_{31}u+a_{32}v+a_{33}w\end{cases}$, 这里 $A=(a_{ij})$ 是实正交矩阵. 则方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$ 变为 __________

填空题 1.5 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx=$ __________

2 选择题答案区

3 解答题

解答题 3.1 设 $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ 满足

$$u = x + y \sin u.$$

证明

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left(\sin^n u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right), \forall n \geqslant 1.$$

解答题 3.2 设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}, x>0$, 证明

$$\left|f^{(n)}(x)\right|<\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}.$$

解答题 3.3 定义 $C(\alpha)$ 为 $(1+x)^{\alpha}$ 在 $x=0$ 的 *Taylor* 级数的 x^{1992} 的系数, 计算

$$\int_0^1 \left(C\left(-y-1\right) \sum_{k=1}^{1992} \frac{1}{y+k} \right) dy.$$

解答题 3.4 设 ρ 为点 (x, y, z) 到 x 轴的距离, Ω 为一棱台, 其六个顶点分别为

$$(0,0,1)\,,(0,1,1)\,,(1,1,1)\,,(0,0,2)\,,(0,2,2)\,,(2,2,2)\,.$$

计算

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{\rho^2} dxdydz.$$

注意 允许查阅棱台定义.

解答题 3.5 设

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2}, n = 2, 3, \cdots .$$

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$ 收敛并求值.

解答题 3.6 给定实数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 和 $x \in (0,1)$, 满足

$$\frac{a_0}{1-x} + \frac{a_1}{1-x^2} + \cdots + \frac{a_n}{1-x^{n+1}} = 0.$$

证明存在 $y \in (0,1)$ 使得

$$a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n = 0.$$