2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、计算下列各题(本题共 4 个小题，每题 6 分，共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x\right)^{\frac{2}{x}}-e^2\left(1-\ln\left(1+x\right)\right)}{x}$.

【参考解答】：因为 $\dfrac{\left(1+x\right)^{\frac{2}{x}}-e^2\left(1-\ln\left(1+x\right)\right)}{x}=\dfrac{e^{\frac{2}{x}\ln\left(1+x\right)}-e^2\left(1-\ln\left(1+x\right)\right)}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^2\ln\left(1+x\right)}{x}=e^2,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln\left(1+x\right)}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln\left(1+x\right)-2}-1}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln\left(1+x\right)-2}{x}$$

$$=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)-x}{x^2}=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-e^2.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x\right)^{\frac{2}{x}}-e^2\left(1-\ln\left(1+x\right)\right)}{x}=0$.

【注】可以考虑洛必达法则、带皮亚诺余项的麦克劳林公式，具体参见视频解析！

(2) 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

【参考解答】：若 $\theta=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

若 $\theta\neq 0$，则当 n 充分大，使得 $0<\left|\dfrac{\theta}{2^n}\right|<\dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}\cdot\sin\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

从而有，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

(3) 求 $\iint\limits_D\operatorname{sgn}\left(xy-1\right)dxdy$，其中

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,0\le y\le 2\right\}.$$

【参考解答】: 设 $D_1=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le \frac{1}{2},0\le y\le 2\right\}$,

$$D_2=\left\{(x,y)\mid \frac{1}{2}\le x\le 2,0\le y\le \frac{1}{x}\right\},\ D_3=\left\{(x,y)\mid \frac{1}{2}\le x\le 2,\frac{1}{x}\le y\le 2\right\},$$

$$\iint\limits_{D_1\cup D_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x}=1+2\ln 2,\ \iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3-2\ln 2,$$

$$\iint\limits_{D}\operatorname{sgn}(xy-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1\cup D_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2-4\ln 2.$$

【注】由积分的几何意义，积分等于 2 倍 D_3 矩形的面积减去矩形的面积. 具体分析参见解析视频!

(4) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和。

【参考解答】:令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$,定义区间为$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. $\forall x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$,则

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2-x^2}.$$

所以有 $S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{\left(2-x^2\right)^2},x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right).$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{10}{9}.$$

【注】一般思路参见解析视频!

第二题：(本题两问，每问 8 分，共 16 分)设$\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$为数列，$a,\lambda$ 为有限数，求证:

1．如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a;$

2．如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}.$

【参考证明】: 1. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\exists M>0$ 使得$|a_n|\le M$，且$\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in N$，

当$n>N_1$时，$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因为$\exists N_2>N_1$，当$n>N_2$时，$\frac{N_1\left(M+|a|\right)}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$.

于是

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right| \le \frac{N_1\left(M+|a|\right)}{n}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\left(n-N_1\right)}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

2. 对于 $i=0,1,\cdots,p-1$, 令 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$，易知 $\left\{A_n^{(i)}\right\}$ 为 $\left\{a_{n+p}-a_n\right\}$ 的子列。由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda,$$

而 $A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lambda.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{p+i}}{n}=0$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\lambda$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)p+i}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

$\forall m\in N,\exists n,p,i\in N,\left(0\le i\le p-1\right)$，使得 $m=np+i$, 且当 $m\to\infty$ 时，$n\to\infty$，

所以有 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{a_m}{m}=\dfrac{\lambda}{p}$.

【注】探索思路过程参见解析视频

第三题：(15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-1,1\right]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f\left(-1\right)=0, f(1)=1, f'(0)=0$，求证：在开区间 $\left(-1,1\right)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$.

【参考证明】: 由麦克劳林公式，得 $f(x)=f(0)+\dfrac{1}{2!}f''(0)x^2+\dfrac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$，$\eta$ 介于 0 和 x 之间，$x\in\left[-1,1\right]$.分别取 $x=1,x=-1$，得

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)+\frac{1}{3!}f'''(\eta_1),0<\eta_1<1.$$

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)-\frac{1}{3!}f'''(\eta_2),-1<\eta_2<0.$$

两式相减，得 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$.

由于 $f'''(x)$ 在闭区间 $\left[-1,1\right]$ 上连续，因此 $f'''(x)$ 在闭区间 $\left[\eta_2,\eta_1\right]$ 上有最大值 M 和最小值 m，从而有 $m\le\dfrac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}\le M$.

再由闭区间上连续函数的介值定理，至少存在一点 $x_0\in\left[\eta_2,\eta_1\right]\subset\left(-1,1\right)$，使得

$$f'''(x_0)=\frac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}=3.$$

第四题：(15 分)在平面上，有一条从点$(a,0)$向右的射线，线密度为ρ。在点$(0,h)$处（其中$h>0$）有一质量为m的质点。求射线对该质点的引力。

【参考解答】：在x轴的x处取一小段dx，其质量为ρdx，到质点的距离为$\sqrt{h^2+x^2}$，这一小段与质点的引力是$dF=\frac{Gm\rho dx}{h^2+x^2}$（其中$G$为引力常数），则有

$$F_x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}F_x=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho x\,\mathrm{d}x}{\left(h^2+x^2\right)^{3/2}}=\frac{Gm\rho}{2}\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(x^2\right)}{\left(h^2+x^2\right)^{3/2}}$$

$$=-Gm\rho\left(h^2+x^2\right)^{-1/2}\Big|_a^{+\infty}=\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}}.$$

类似有

$$F_y=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}F_y=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho h\,\mathrm{d}x}{\left(h^2+x^2\right)^{3/2}}=\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Gm\rho h^2\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{h^3\sec^3 t}$$

$$=\frac{Gm\rho}{h}\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\frac{a}{h}\right)$$

所求引力向量为$\vec{F}=\left(F_x,F_y\right)$.

第五题：(15 分)设$z=z(x,y)$是由方程$F\left(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y}\right)=0$确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，求证：

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1\text{和}x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0.$$

【参考解答】：对方程两边分别关于x,y求导，

$$\frac{\partial z}{\partial x}F_u'-\frac{1}{x^2}F_u'+\frac{\partial z}{\partial x}F_v'=0,\quad F_u'\frac{\partial z}{\partial y}+F_v'\frac{\partial z}{\partial y}+F_v'\frac{1}{y^2}=0$$

由此可得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_u'}{x^2\left(F_u'+F_v'\right)},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_v'}{y^2\left(F_u'+F_v'\right)}$，所以$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1$. 对该式再关于$x,y$求导，有

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0,x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2y\frac{\partial z}{\partial y}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

第一个等式乘以x，第二个等式乘以y，相加借助于第一个等式的结论可得

$$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy\left(x-y\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0.$$

第六题：(15 分)设函数$f(x)$连续，a,b,c为常数，Σ是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$。记第一型曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S$.求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)\mathrm{d}u$.

【参考证明】：由Σ的面积为4π。当a,b,c都为零时，等式显然成立。当它们不全为 0 时，可知原点到平面$ax+by+cz+d=0$的距离是$\dfrac{\left|d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

设平面$P_u: u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$其中$u$固定，则$|u|$是原点到平面$P_u$的距离，从而$-1\le u\le 1$。两平面$P_u$和$P_{u+du}$截单位球$\Sigma$的截下的部分上，被积函数取值为$f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)$。这部分摊开可以看成是一个细长条，这个细长条的长是$2\pi\sqrt{1-u^2}$，宽是$\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$，它的面积为$2\pi du$，故得证。