

第十二届全国大学生数学竞赛初赛试题参考答案

(非数学类, 2020 年 11 月)

一、(本题满分 30 分, 每小题 6 分) 填空题:

【1】 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 利用等价无穷小: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $\sqrt{1-x^3}-1 \sim -\frac{1}{2}x^3$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

【2】 设函数 $f(x) = (x+1)^n e^{-x^2}$, 则 $f^{(n)}(-1) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 利用莱布尼兹求导法则, 得

$$f^{(n)}(x) = n!e^{-x^2} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k [(x+1)^n]^{(k)} (e^{-x^2})^{(n-k)},$$

所以 $f^{(n)}(-1) = \frac{n!}{e}.$

【3】 设 $y = f(x)$ 是由方程 $\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$ 确定的隐函数, 且

满足 $f(1)=1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 对所给方程两端关于 x 求导, 得 $\frac{\frac{y - xy'}{y^2}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{x + yy'}{x^2 + y^2}$, 即 $(x+y)y' = y-x$,

所以 $f'(1)=0$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y=1$.

【4】 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, 则 $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin(x+y)}{x(x+y)} dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 令 $u = x+y$, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \int_0^x \frac{\sin u}{u} du \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right)^2 - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \int_0^x \frac{\sin u}{u} du.$$

令 $F(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du$, 则 $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$, 所以

$$I = \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{+\infty} F(x)F'(x)dx = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2} [F(x)]^2 \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

【5】 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义, 对任意 $x \in U$, $f(x) \neq g(x)$,

且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = a > 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x)]^{g(x)} - [g(x)]^{g(x)}}{f(x) - g(x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 根据极限的保号性, 存在 $x=0$ 的一个去心邻域 U_1 , 使得 $x \in U_1$ 时 $f(x) > 0$,

$g(x) > 0$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, 利用等价无穷小替换, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x)]^{g(x)} - [g(x)]^{g(x)}}{f(x) - g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} [g(x)]^{g(x)} \frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^{g(x)} - 1}{f(x) - g(x)} = a^a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^{g(x)} - 1}{f(x) - g(x)} \\ &= a^a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{g(x) \ln \frac{f(x)}{g(x)}}{g(x)}} - 1}{f(x) - g(x)} = a^a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \ln \frac{f(x)}{g(x)}}{f(x) - g(x)} = a^a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \ln \left(1 + \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) \right)}{f(x) - g(x)} \\ &= a^a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right)}{f(x) - g(x)} = a^a. \end{aligned}$$

二、(本题满分 10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}$, $n \geq 1$. 求极

限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n!a_n$.

【解】 利用归纳法易知 $a_n > 0$ ($n \geq 1$). 由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1}} &= (n+1) \left(1 + \frac{1}{a_n} \right) = (n+1) + (n+1) \frac{1}{a_n} = (n+1) + (n+1) \left(n + n \frac{1}{a_{n-1}} \right) \\ &= (n+1) + (n+1)n + (n+1)n \frac{1}{a_{n-1}}, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

如此递推, 得 $\frac{1}{a_{n+1}} = (n+1)! \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{a_1} \right) = (n+1)! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, \dots\dots\dots 3 分

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! a_n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}} = \frac{1}{e}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

三、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$.

证明: (1) 存在 $x_0 \in (0,1)$ 使得 $f(x_0)=2-3x_0$; (2) 存在 $\xi, \eta \in (0,1)$, 且 $\xi \neq \eta$, 使得 $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

【解】 (1) 令 $F(x)=f(x)-2+3x$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $F(0)=-2$, $F(1)=2$. 根据连续函数介值定理, 存在 $x_0 \in (0,1)$ 使得 $F(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=2-3x_0$.
..... 5 分

(2) 在区间 $[0, x_0]$, $[x_0, 1]$ 上利用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi, \eta \in (0,1)$, 且 $\xi \neq \eta$, 使得

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\xi), \quad \text{且} \quad \frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=f'(\eta).$$

所以

$$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

四、(本题满分 12 分) 已知 $z = xf(\frac{y}{x}) + 2y\varphi(\frac{x}{y})$, 其中 f, φ 均为二次可微函数.

(1) 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

(2) 当 $f=\varphi$, 且 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{x=a} = -by^2$ 时, 求 $f(y)$.

【解】 (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = f(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x} f'(\frac{y}{x}) + 2\varphi'(\frac{x}{y}), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^2} f''(\frac{y}{x}) - \frac{2x}{y^2} \varphi''(\frac{x}{y}).$
..... 3 分

(2) $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{x=a} = -\frac{y}{a^2} f''(\frac{y}{a}) - \frac{2a}{y^2} \varphi''(\frac{a}{y}) = -by^2.$

因为 $f=\varphi$, 所以 $\frac{y}{a^2} f''(\frac{y}{a}) + \frac{2a}{y^2} f''(\frac{a}{y}) = by^2.$

令 $y=au$, 则 $\frac{u}{a} f''(u) + \frac{2}{au^2} f''(\frac{1}{u}) = a^2 bu^2$, 即 $u^3 f''(u) + 2f''(\frac{1}{u}) = a^3 bu^4.$

上式中以 $\frac{1}{u}$ 换 u 得 $2f''(\frac{1}{u}) + 4u^3 f''(u) = 2a^3 b \frac{1}{u}.$ 5 分

联立二式, 解得 $-3u^3 f''(u) = a^3 b(u^4 - \frac{2}{u})$, 所以 $f''(u) = \frac{a^3 b}{3}(\frac{2}{u^4} - u)$, 从而有

$$f(u) = \frac{a^3 b}{3}(\frac{1}{3u^2} - \frac{u^3}{6}) + C_1 u + C_2.$$

故 $f(y) = \frac{a^3 b}{3}(\frac{1}{3y^2} - \frac{y^3}{6}) + C_1 y + C_2$ 4 分

五、(本题满分 12 分) 计算 $I = \oint_{\Gamma} |\sqrt{3}y - x| dx - 5z dz$, 曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 2z \end{cases}$, 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

【解】 曲线 Γ 也可表示为 $\begin{cases} z = 2, \\ x^2 + y^2 = 4, \end{cases}$ 所以 Γ 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta, \\ y = 2 \sin \theta, \text{ 参数的范} \\ z = 2, \end{cases}$

围: $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 4 分

注意到在曲线 Γ 上 $dz = 0$, 所以

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^{2\pi} |2\sqrt{3} \sin \theta - 2 \cos \theta| 2 \sin \theta d\theta = -8 \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \right| \sin \theta d\theta \\ &= -8 \int_0^{2\pi} \left| \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right| \sin \theta d\theta = -8 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi+\pi}{3}} |\cos t| \sin \left(t - \frac{\pi}{3} \right) dt. \text{ (代换: } t = \theta + \frac{\pi}{3} \text{)} \end{aligned}$$

根据周期函数的积分性质, 得 4 分

$$I = -8 \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t| \sin \left(t - \frac{\pi}{3} \right) dt = -4 \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t| (\sin t - \sqrt{3} \cos t) dt = 8\sqrt{3} \int_0^{\pi} |\cos t| \cos t dt.$$

令 $u = t - \frac{\pi}{2}$, 则 $I = -8\sqrt{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin u| \sin u du = 0$ 4 分

六、(本题满分 12 分) 证明 $f(n) = \sum_{m=1}^n \int_0^m \cos \frac{2\pi n[x+1]}{m} dx$ 等于 n 的所有因子(包括 1 和 n 本身)之和, 其中 $[x+1]$ 表示不超过 $x+1$ 的最大整数, 并计算 $f(2021)$.

【解】 $\int_0^m \cos \frac{2\pi n[x+1]}{m} dx = \sum_{k=1}^m \int_{k-1}^k \cos \frac{2\pi n[x+1]}{m} dx = \sum_{k=1}^m \int_{k-1}^k \cos \frac{2\pi nk}{m} dx = \sum_{k=1}^m \cos k \frac{2\pi n}{m}$.
..... 4 分

如果 m 是 n 的因子, 那么 $\int_0^m \cos \frac{2\pi n[x+1]}{m} dx = m$; 否则, 根据三角恒等式

$$\sum_{k=1}^m \cos kt = \cos \frac{m+1}{2} t \cdot \frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}},$$

有 $\int_0^m \cos \frac{2\pi n[x+1]}{m} dx = \cos(\frac{m+1}{2} \cdot \frac{2\pi n}{m}) \cdot \frac{\sin(\frac{m}{2} \cdot \frac{2\pi n}{m})}{\sin \frac{2\pi n}{2m}} = 0$, 因此得证. 5 分

由此可得 $f(2021) = 1 + 43 + 47 + 2021 = 2112$ 3 分

七、(本题满分 14 分) 设 $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n}$ ($n \geq 1$).

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$;

(2) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 条件收敛;

(3) 证明当 $p \geq 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^p}$ 收敛, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 的和.

【解】 (1) 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $0 < a < \frac{\varepsilon}{2}$, 将积分区间分成两段, 得

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n} = \int_0^a \frac{dt}{(1+t^4)^n} + \int_a^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n}.$$

因为

$$\int_a^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n} \leq \frac{1-a}{(1+a^4)^n} < \frac{1}{(1+a^4)^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

所以存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, $\int_a^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, 从而

$$0 \leq u_n < a + \int_a^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 4 分

(2) 显然 $0 < u_{n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^{n+1}} \leq \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n} = u_n$, 即 u_n 单调递减, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$,

故由莱布尼兹判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛. 3 分

另一方面, 当 $n \geq 2$ 时, 有

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n} \geq \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n} = \frac{1}{n-1} (1 - 2^{1-n}),$$

由于 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ 发散, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 发散, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 因

此 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 条件收敛. 3 分

(3) 先求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 的和. 因为

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n} = \frac{t}{(1+t^4)^n} \Big|_0^1 + n \int_0^1 \frac{4t^4}{(1+t^4)^{n+1}} dt = \frac{1}{2^n} + 4n \int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}} dt \\ &= \frac{1}{2^n} + 4n \int_0^1 \frac{1+t^4-1}{(1+t^4)^{n+1}} dt = \frac{1}{2^n} + 4n(u_n - u_{n+1}), \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} + 4u_1.$$

利用展开式 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, 取 $x = -\frac{1}{2}$, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2$. 而

$$u_1 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}}{8} [\pi + 2\ln(1+\sqrt{2})]$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n} = \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} [\pi + 2\ln(1+\sqrt{2})]$.

最后, 当 $p \geq 1$ 时, 因为 $\frac{u_n}{n^p} \leq \frac{u_n}{n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^p}$ 收敛.

..... 4 分