姓名: ______ 准考证号: ______ 所在院校: ______ 考场号: ______ 座位号: ______ 专业: ______

密封线 答题时不要超过此线

# 第十四届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
## (数学 B 类, 2022 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满分 | 15 | 15 | 15 | 20 | 15 | 20 | 100 |
| 得分 | | | | | | | |

**注意:**

1. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

一、(本题 15 分) 空间直角坐标系中两平面 $x+y+z-3=0$ 和 $x-2y-z+2=0$ 的交线为 $L$. 求过点 $(1,2,3)$ 并与直线 $L$ 垂直的平面方程.

**解答.** 两平面的法向量分别为

$$(1,1,1),\ (1,-2,-1).$$

它们的交线 $L$ 的直线方向 $v$ 垂直于这两个平面的法向量，故

$$v=(1,1,1)\times(1,-2,-1)=(1,2,-3).$$

.................................................................. (5 分)

向量 $v$ 也是所求的与 $L$ 垂直的平面的法向量. 于是，所求平面方程为

$$(x-1)+2(y-2)-3(z-3)=0,$$

$$x+2y-3z+4=0.$$

.................................................................. (15 分)

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

二、(本题 15 分) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n^2}=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_n}{n^2}=b$. 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^5}\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ 存在并求其值.

**解答.** 对于 $n\geqslant 1$, 记 $A_n=\frac{a_n}{n^2}-a$, $B_n=\frac{b_n}{n^2}-b$. 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=\lim\limits_{n\to+\infty}B_n=0$. 从而 $\{A_n\},\{B_n\}$ 有界. 记 $M=\sup\limits_{n\geqslant 1}\big(|A_n|+|B_n|\big)+|a|+|b|$.

........................................................................ (4 分)

由 Stolz 公式或利用定积分, 我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=0}^{n}k^2(n-k)^2=\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^3}-2\sum_{k=0}^{n}\frac{k^3}{n^4}+\sum_{k=0}^{n}\frac{k^4}{n^5}\Big)$$
$$=\ \frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1}{30}.$$

........................................................................ (8 分)

另一方面, 对于 $n\geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{1}{n^5}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}-\frac{ab}{n^5}\sum_{k=1}^{n-1}k^2(n-k)^2-\frac{a_0b_n+a_nb_0}{n^5}\Big|\\=\ &\Big|\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n-1}k^2(n-k)^2\Big(A_kB_{n-k}+bA_k+aB_{n-k}\Big)\Big|\\\leqslant\ &\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\big(|A_k|+|B_k|\big).\end{aligned}$$

........................................................................ (12 分)

由 Stolz 公式,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\big(|A_k|+|B_k|\big)=\lim_{n\to+\infty}M\big(|A_n|+|B_n|\big)=0.$$

因此,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=ab\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n-1}k^2(n-k)^2=\frac{ab}{30}.$$

........................................................................ (15 分)

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

三、(本题 15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 $B$ 与 $A$ 可交换, 其元素均为正整数且行列式为 1. 证明存在正整数 $k$ 使得 $B = A^k$.

**证明.** 令

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

由于 $B$ 与 $A$ 可交换, 可得 $c = b, d = a - b$. $B$ 的元素均为正整数, 故 $a, b$ 为正整数且 $a > b$. 再由 $\det B = 1$ 得到 $a^2 - ab - b^2 = 1$.

…………………………………………………………………………………… (5 分)

若 $b = 1$, 则由 $a^2 - ab - b^2 = 1$ 易得 $a = 2$, 因此

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

若 $b > 1$, 考察矩阵

$$B_1 = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2b-a \\ 2b-a & 2a-3b \end{pmatrix}.$$

令 $a_1 = a - b, b_1 = 2b - a$, 则有 $2a - 3b = a_1 - b_1$, 即

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 - b_1 \end{pmatrix}.$$

显然 $a_1$ 为正整数. 注意到 $a^2 - ab - b^2 = 1$, 若 $a \geqslant 2b$, 则有 $1 + b^2 = a^2 - ab = a(a-b) \geqslant 2b^2$, 即 $b^2 \leqslant 1$, 矛盾, 由此得到 $b_1 = 2b - a$ 也是正整数. 显然 $a_1^2 - a_1b_1 - b_1^2 = \det B_1 = (\det A)^{-1} \det B = 1$, 即 $a_1(a_1 - b_1) = 1 + b_1^2 > 0$, 从而 $a_1 > b_1$. 这表明矩阵 $B_1$ 中的元素 $a_1, b_1$ 满足矩阵 $B$ 中元素 $a, b$ 所满足的条件, 但是 $b_1 = b - (a - b) < b$. 若 $b_1 > 1$, 则类似地矩阵

$$B_2 = A^{-1}B_1 = (A^{-1})^2 B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

中的元素 $a_2, b_2$ 也满足矩阵 $B$ 中元素 $a, b$ 所满足的条件, 但是 $b_2 < b_1 < b$. 继续进行下去, 通过左乘 $A^{-1}$ 有限次, 比如 $s$ 次后可以使得得到的矩阵

$$B_s = (A^{-1})^s B = \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ b_s & a_s - b_s \end{pmatrix}$$

中的元素 $a_s, b_s$ 满足 $a_s > b_s > 0, a_s^2 - a_s b_s - b_s^2 = 1$ 且 $b_s$ 为最小正整数, 即 $b_s = 1$.

.......................................................... (12 分)

由前面的证明得到 $B_s = A$, 从而 $B = A^{s+1}$, 令 $k = s + 1$ 即可.

.......................................................... (15 分)

专业：________ 座位号：________ 考场号：________ 所在院校：________ 准考证号：________ 姓名：________

密封线 答题时不要超过此线

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

四、(本题20分) 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\4&1&x\\4&0&5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}&y_1&y_2\\y_2&\frac{8}{3}&y_1\\y_1&y_2&\frac{8}{3}\end{pmatrix}$ 为复数域上的两个 3 阶方阵，其中 $x,y_1,y_2$ 为未知复数. 若已知 $A$ 与 $B$ 有相同的 Jordan 标准型, 求 $x,y_1,y_2$.

**解答.** 1) 首先令 $H=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$, 则有$H^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $H^3=E$. 于是 $B=\frac{8}{3}E+y_1H+y_2H^2$. 由于 $|\lambda E-H|=\lambda^3-1$, 故 $H$ 的特征值为 $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$, 它们各不相同, 因此 $H$ 可对角化, 即

$$H\sim\begin{pmatrix}1&&\\&e^{i\frac{2\pi}{3}}&\\&&e^{i\frac{4\pi}{3}}\end{pmatrix}.$$

结果 $B$ 也可对角化,

$$B\sim\begin{pmatrix}f(1)&&\\&f(e^{i\frac{2\pi}{3}})&\\&&f(e^{i\frac{4\pi}{3}})\end{pmatrix},$$

其中$f(t)=\frac{8}{3}+y_1t+y_2t^2$.

........................................................... (5 分)

2) 现由 $A\sim B$ 可知：$A$ 可相似对角化. 直接计算可知 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=1$(2 重), $\lambda_2=6$(1 重). 故有 $\lambda_1=1$ 的几何重数为 2, 即相应于 $\lambda_1=1$ 的 $A$ 的特征向量空间的维数为 2. 由 $(A-\lambda_1E)z=0$ 知：秩 $(A-E)=1$.

将$A-E$ 进行初等行变换，将之化为行阶梯型：

$$A-1E=\begin{pmatrix}2-1&0&1\\4&0&x\\4&0&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&x-4\\0&0&0\end{pmatrix},$$

结果，要使秩$(A-E)=1$ 当且仅当$x-4=0$, 从而求得$x=4$.

........................................................... (10 分)

3) 下面求$y_1, y_2$. 现有 $A \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$. 故有 $A \sim B \Leftrightarrow B$ 的三个特征值为$1, 1, 6$. 由此得下列三种情形：

$$(I)\begin{cases} f(1) &= 1, \\ f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) &= 1, \\ f(e^{i\frac{4\pi}{3}}) &= 6; \end{cases}$$

$$(II)\begin{cases} f(1) &= 1, \\ f(e^{i\frac{4\pi}{3}}) &= 1, \\ f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) &= 6; \end{cases}$$

$$(III)\begin{cases} f(1) &= 6, \\ f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) &= 1, \\ f(e^{i\frac{4\pi}{3}}) &= 1; \end{cases}$$

对情形$(I)$, 解之得$\begin{cases} y_1 &= -\frac{5}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{6}i \\ y_2 &= -\frac{5}{6} - \frac{5\sqrt{3}}{6}i \end{cases}$; 对情形$(II)$, 解之得$\begin{cases} y_1 &= -\frac{5}{6} - \frac{5\sqrt{3}}{6}i \\ y_2 &= -\frac{5}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{6}i \end{cases}$;

对情形$(III)$, 解之得$\begin{cases} y_1 &= \frac{5}{3} \\ y_2 &= \frac{5}{3}. \end{cases}$

综上所述，本题所求的$x, y_1, y_2$ 共有三组解：

第一组为$\begin{cases} x &= 4, \\ y_1 &= -\frac{5}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{6}i, \\ y_2 &= -\frac{5}{6} - \frac{5\sqrt{3}}{6}i; \end{cases}$

第二组为$\begin{cases} x &= 4, \\ y_1 &= -\frac{5}{6} - \frac{5\sqrt{3}}{6}i, \\ y_2 &= -\frac{5}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{6}i; \end{cases}$

第三组为$\begin{cases} x &= 4, \\ y_1 &= \frac{5}{3}, \\ y_2 &= \frac{5}{3}; \end{cases}$

........................................................................ （20 分）

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线　答题时不要超过此线

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

五、(本题 15 分) 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$, $a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)\,(n\geqslant 0)$. 证明：级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$ 收敛并求它的和.

**证明.** 我们有 $\delta>0$ 使得

$$\begin{aligned}1&=(1-x-x^2)f(x)=(1-x-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}\\&=a_0+(a_1-a_0)x+\sum_{n=0}^{\infty}\big(a_{n+2}-a_{n+1}-a_n\big)x^{n+2},\qquad\forall\,|x|<\delta.\end{aligned}$$

........................................................................ (5 分)

因此, $a_0=1$, $a_1=a_0$,

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,\qquad\forall\,n\geqslant 0.$$

从而易见 $a_n\geqslant n$ 进而 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.

........................................................................ (10 分)

另一方面,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n\cdot a_{n+2}}=\frac{a_{n+2}-a_n}{a_n\cdot a_{n+2}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{m}\frac{a_{n+1}}{a_n\cdot a_{n+2}}\\&=\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{m+1}}-\frac{1}{a_{m+2}},\qquad\forall\,m\geqslant 2.\end{aligned}$$

因此, 级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n\cdot a_{n+2}}$ 收敛且和为 $\dfrac{1}{a_0}+\dfrac{1}{a_1}=2$.

........................................................................ (15 分)

| 得分 | |
| --- | --- |
| 评阅人 | |

六、(本题 20 分) 证明: (1) 对任意 $0<a<1$, 存在唯一实数 $b>1$ 满足 $a-\ln a=b-\ln b$; (2) 对于上述数对 $a,b$ 有 $ab<1$; (3) 对于上述数对 $a,b$ 有 $b+\ln a>1$.

**证明.** 设 $f(x)=x-\ln x$, 它是定义在 $(0,+\infty)$上的连续函数.

(1) 注意到 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$, 于是该函数在 $(0,1]$ 上严格递减, 在 $[1,+\infty)$ 上严格递增, 并且 $f((0,1])=f([1,+\infty))=[1,+\infty)$. 于是, 对任意 $0<a<1$, 存在唯一实数 $b>1$ 满足 $a-\ln a=b-\ln b$.

............................................................ (6 分)

(2) 令 $h(a)=f\left(\frac{1}{a}\right)-f(a)$ $(a\in(0,1])$. 由 (1) 的讨论, 我们只要证明对任何 $a\in(0,1)$ 成立 $h(a)>0$. 如果证明了这一点, 则当 $0<a<1$ 时有 $f\left(\frac{1}{a}\right)>f(a)$. 因为 $f(b)=f(a)$ 并且函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上严格递增, 于是 $b<\frac{1}{a}$.

具体地, 我们有 $h(1)=0$, 而

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}-a+\ln a\right)=-\frac{1}{a^2}-1+\frac{2}{a}=-\frac{(a-1)^2}{a^2}<0,\ 0<a<1.$$

因此, 对任何 $a\in(0,1)$ 成立 $h(a)>0$.

............................................................ (14 分)

(3) 类似于 (2), 令 $g(a)=f(1-\ln a)-f(a)$ $(a\in(0,1])$. 我们只要证明对任何 $a\in(0,1)$ 成立 $g(a)<0$. 即

$$1-a<\ln(1-\ln a),\qquad \forall\, a\in(0,1).$$

这等价于

$$1-e^{-x}<\ln(1+x),\qquad \forall\, x>0.$$

由中值定理, 对于 $x>0$, 我们有 $0<\eta<\xi<x$ 使得

$$\ln(1+x)-1+e^{-x}=\left(\frac{1}{1+\xi}-e^{-\xi}\right)x=\frac{(e^{\eta}-1)x\xi}{(1+\xi)e^{\xi}}>0.$$

............................................................ (20 分)