

# 第十三届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案 (数学 A 类, 2021 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 设不全为零的  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , 求直线  $\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-1}{c}$  绕  $z$  轴旋转所得的旋转曲面方程.

解答. 设点  $M_1(0, 0, 0)$ , 方向  $\vec{s}_1 = (0, 0, 1)$ , 则  $z$  轴为直线  $L_1$ :

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}.$$

直线  $L_2$

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-1}{c}$$

过点  $M_2(1, 1, 1)$ , 方向为  $\vec{s}_2 = (a, b, c)$ .

$\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$  的混合积为

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}) = a - b.$$

..... (2 分)

(1). 当  $a = b$  时,  $L_2$  与  $L_1$  共面. 分以下三种情况讨论.

1). 当  $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$ , 即  $c = 0$  时,  $L_2$  与  $L_1$  垂直, 此时所得的旋转面是  $z = 1$  的平面.

当  $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \neq 0$ , 即  $c \neq 0$  时,  $L_2$  与  $L_1$  平行或者相交于一点, 于是有以下两种情形.

2). 当  $L_2$  平行于  $L_1$  时, 所得的旋转曲面是一个圆柱面  $x^2 + y^2 = 2$ .

3). 当  $L_1$  与  $L_2$  相交于一点时, 所得的旋转面为一个圆锥面, 顶点为它们的交点  $(0, 0, \frac{a-c}{a})$  的锥面方程  $x^2 + y^2 - \frac{2a^2}{c^2}(z - \frac{a-c}{a}) = 0$ .

..... (8 分)

(2). 当  $a \neq b$  时, 即  $L_2$  与  $L_1$  不共面时, 首先考虑  $L_2$  与  $L_1$  不垂直时的情形. 设  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  为  $L_2$  上的任意一点,  $M(x, y, z)$  为过  $M_0$  的旋转曲面上的纬圆上的任意一点, 则有

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{s}_1 = 0, \\ |\overrightarrow{M_1M_0}| = |\overrightarrow{M_1M}|, \\ \frac{x_0-1}{a} = \frac{y_0-1}{b} = \frac{z_0-1}{c}. \end{cases}$$

由此得到

$$\begin{cases} z - z_0 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ x_0 = 1 + at, \\ y_0 = 1 + bt, \\ z_0 = 1 + ct, \end{cases}$$

其中  $t \in \mathbb{R}$  为参数. 因  $L_1$  与  $L_2$  不垂直, 由  $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = c \neq 0$ , 得到  $t = \frac{z_0-1}{c} = \frac{z-1}{c}$ , 以及

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x_0^2 + y_0^2 \\ &= \left[1 + \frac{a}{c}(z-1)\right]^2 + \left[1 + \frac{b}{c}(z-1)\right]^2 \\ &= Az^2 + Bz + C, \end{aligned}$$

其中

$$A = \frac{a^2 + b^2}{c^2}, B = \frac{a(c-a) + b(c-b)}{c^2}, C = \frac{(c-a)^2 + (c-b)^2}{c^2}.$$

经计算可得

$$AC - B^2 = \frac{(a-b)^2}{c^2} > 0.$$

注意到  $A > 0$ , 以及

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= Az^2 + 2Bz + C \\ &= A \left( z + \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A} \end{aligned}$$

得到

$$\frac{A}{AC - B^2} (x^2 + y^2) - \frac{A^2}{AC - B^2} \left( z + \frac{B}{A} \right)^2 = 1.$$

它是旋转单叶双曲面.

..... (13 分)

当  $L_1$  与  $L_2$  为异面直线而且垂直时,  $c = 0$ . 所得旋转曲面是一个挖去一个圆盘(半径为  $L_1$  与  $L_2$  之间的距离  $\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ) 的平面.

..... (15 分)

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设  $B \subset R^n (n \geq 2)$  是单位开球, 函数  $u, v$  在  $\bar{B}$  上连续, 在  $B$  内二阶连续可导, 满足

$$\begin{cases} -\Delta u - (1 - u^2 - v^2)u = 0, & x \in B, \\ -\Delta v - (1 - u^2 - v^2)v = 0, & x \in B, \\ u(x) = v(x) = 0, & x \in \partial B, \end{cases}$$

其中,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ ,  $\partial B$  表示  $B$  的边界. 证明:  $u^2(x) + v^2(x) \leq 1 (\forall x \in \bar{B})$ .

证明. 记  $w = w(x) = u^2(x) + v^2(x)$ , 则  $w$  满足问题

$$\begin{cases} -\Delta w - 2(1 - w)w = -2(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2), & x \in B, \\ w(x) = 0, & x \in \partial B. \end{cases} \quad (1)$$

..... (6 分)

显然,  $w(x) \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$ . 所以,  $w(x)$  必然在  $\bar{B}$  上达到最大值. 设最大值为  $x_1$ .

若  $x_1 \in B$ , 则  $\nabla w(x_1) = 0$ ,  $-\Delta w(x_1) \geq 0$ . 于是由 (1) 得到, 在  $x_1$  处,

$$0 \leq -\Delta w \leq 2(1 - w)w - 2(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \leq 2(1 - w)w.$$

..... (12 分)

而  $w(x_1) \geq 0$ , 故上式表明  $w(x_1) \leq 1$ .

若  $x_1 \in \partial B$ , 则由 (1),  $w(x_1) = 0$ .

综合之, 恒有  $0 \leq w \leq 1, x \in \bar{B}$ .

..... (15 分)

□

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设  $f(x) = x^{2021} + a_{2020}x^{2020} + a_{2019}x^{2019} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$  为整系数多项式,  $a_0 \neq 0$ . 设对任意  $0 \leq k \leq 2020$  有  $|a_k| \leq 40$ , 证明:  $f(x) = 0$  的根不可能全为实数.

证明. 设  $f(x) = 0$  的 2021 个根分别为  $x_1, x_2, \dots, x_{2021}$ . 由于  $a_0 \neq 0$ , 所以  $x_i \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq 2021$ . 若  $x_1, x_2, \dots, x_{2021}$  都是实数, 由 Cauchy 不等式有

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} \geq \left( \sum_{i=1}^{2021} x_i \cdot \frac{1}{x_i} \right)^2 = 2021^2.$$

..... (5 分)

由 Vieta 定理,

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i = -a_{2020}, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 2021} x_i x_j = a_{2019},$$

由此得到

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 = \left( \sum_{i=1}^{2021} x_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2021} x_i x_j = a_{2020}^2 - 2a_{2019}.$$

注意到  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_{2021}}$  是多项式

$$g(x) = x^{2021} f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 x^{2021} + a_1 x^{2020} + a_2 x^{2019} + \cdots + a_{2019} x^2 + a_{2020} x + 1$$

的根. 继续由 Vieta 定理,

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i} = -\frac{a_1}{a_0}, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 2021} \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{x_j} = \frac{a_2}{a_0},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} = \left( \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i} \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2021} \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{x_j} = \frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0}.$$

..... (10 分)

因为对任意  $0 \leq k \leq 2020$  有  $|a_k| \leq 40$ , 又  $a_0$  为非零整数, 故  $|a_0| \geq 1$ , 所以

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} = (a_{2020}^2 - 2a_{2019}) \left( \frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0} \right) \leq (40^2 + 2 \cdot 40)(40^2 + 2 \cdot 40) = 1680^2,$$

矛盾. 证毕 ..... (15 分)

□

得分	
评阅人	

四、(本题 20 分) 设  $P$  为对称酉矩阵, 证明: 存在可逆复矩阵  $Q$  使得  $P = \overline{Q}Q^{-1}$ .

**解答.** 设  $P$  为  $n$  阶矩阵. 因为  $P$  为酉矩阵, 自然为正规矩阵, 所以存在酉矩阵  $U$  使得  $U^{-1}PU = D$  为对角阵.

..... (2 分)

设

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

并设  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  为复数满足  $\beta_i^2 = \alpha_i, 1 \leq i \leq n$ , 令

$$E = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n \end{pmatrix}.$$

由 Lagrange 插值公式知存在复系数多项式  $f(x)$  使得  $f(\alpha_i) = \beta_i, 1 \leq i \leq n$ , 从而

$$E = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) & & & \\ & f(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\alpha_n) \end{pmatrix} = f(D),$$

且

$$E^2 = \begin{pmatrix} \beta_1^2 & & & \\ & \beta_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} = D.$$

..... (10 分)

现在  $D^T = D, P^T = P, U^T = \bar{U}^{-1}$ , 所以

$$D = D^T = (U^{-1}PU)^T = U^T P^T (U^{-1})^T = \bar{U}^{-1} P \bar{U} = \bar{U}^{-1} U D U^{-1} \bar{U},$$

从而  $U^{-1}\bar{U}$  与  $D$  可交换. 又  $E = f(D)$ , 所以  $E$  也与  $U^{-1}\bar{U}$  可交换, 即  $EU^{-1}\bar{U} = U^{-1}\bar{U}E$ , 或写为

$$UEU^{-1} = \bar{U}E\bar{U}^{-1}.$$

..... (15 分)

由于  $P$  为酉矩阵, 即  $\bar{P}^T P = I$ , 这里  $I$  为单位矩阵, 再由  $U$  也是酉矩阵得到

$$\bar{D}D = \bar{D}^T D = \overline{U^{-1}PU}^T U^{-1}PU = \bar{U}^T \bar{P}^T (\bar{U}^{-1})^T U^{-1}PU = \bar{U}^T U = I.$$

所以对任意  $1 \leq i \leq n$ ,  $\bar{\alpha}_i \alpha_i = 1$ , 即复数  $\alpha_i$  的模为 1, 从而复数  $\beta_i$  的模也是 1, 故  $\bar{\beta}_i = \beta_i^{-1}$ , 由此得到  $\bar{E} = E^{-1}$ . 令  $Q = U\bar{E}U^{-1}$ , 则显然  $Q$  可逆且有  $\bar{Q} = \bar{U}E\bar{U}^{-1} = UEU^{-1}$ , 又  $Q^{-1} = U\bar{E}^{-1}U^{-1} = UEU^{-1}$ , 所以

$$\bar{Q}Q^{-1} = (UEU^{-1})^2 = UE^2U^{-1} = UDU^{-1} = P.$$

..... (20 分)

□

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设  $\alpha > 1$ , 证明:

$$(1) \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dx.$$

$$(2) \text{ 计算 } \int_0^{+\infty} \sin x^3 dx \cdot \int_0^{+\infty} \sin x^{\frac{3}{2}} dx.$$

解答. (1) 证明: 对于  $s > 0$  以及  $0 \leq a < b \leq +\infty$ , 我们有

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-sx} \sin x dx &= \operatorname{Im} \int_a^b e^{-(s-i)x} dx = \operatorname{Im} \frac{e^{-(s-i)a} - e^{-(s-i)b}}{s-i} \\ &= \frac{se^{-sa} \sin a - se^{-sb} \sin b + e^{-sa} \cos a - e^{-sb} \cos b}{s^2 + 1}. \end{aligned} \quad (1)$$

..... (2 分)

由 (1),

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{2\alpha} + 1} dt$$

收敛.

..... (4 分)

任取  $A > \varepsilon > 0$ , 由 Weierstrass 判别法,  $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dt$  关于  $x \in [\varepsilon, A]$  一致收敛, 因此, 结合 (1),

$$\begin{aligned} & \left| \int_\varepsilon^A dx \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dt - \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dx \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} dt \int_\varepsilon^A e^{-t^\alpha x} \sin x dx - \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dx \right| \\ &\leq \left| \int_0^{+\infty} \left( \left| \int_A^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dx \right| + \left| \int_0^\varepsilon e^{-t^\alpha x} \sin x dx \right| \right) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{+\infty} \frac{|t^\alpha e^{-t^\alpha A} \sin A + e^{-t^\alpha A} \cos A| + |-t^\alpha e^{-t^\alpha \varepsilon} \sin \varepsilon + 1 - e^{-t^\alpha \varepsilon} \cos \varepsilon|}{t^{2\alpha} + 1} dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{+\infty} \left( e^{-t^\alpha A} + |\sin \varepsilon| + |1 - e^{-t^\alpha \varepsilon} \cos \varepsilon| \right) \frac{t^\alpha + 1}{t^{2\alpha} + 1} dt \right|. \end{aligned}$$

利用一致收敛性, 或控制收敛定理, 得到

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dx.$$

..... (8 分)



(2) 对于  $\alpha > 1$ , 以及  $x > 0$ , 有

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} dt = \frac{1}{\alpha} x^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-s} ds = \frac{1}{\alpha} x^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

以及

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha + 1} dt &= \frac{1}{\alpha} \int_0^1 s\left(\frac{1}{s} - 1\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{1}{s^2} ds \\ &= \frac{1}{\alpha} B\left(1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}. \end{aligned}$$

..... (11 分)

从而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin x^\alpha dx &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \sin x dx \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)} \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} x} \sin x dt \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)} \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} x} \sin x dx \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} + 1} dt \\ &= \frac{\pi}{2\alpha\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) \sin \frac{(\alpha-1)\pi}{2\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \sin \frac{\pi}{2\alpha}. \end{aligned}$$

最后得到

$$\int_0^{+\infty} \sin x^3 dx \cdot \int_0^{+\infty} \sin x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \sin \frac{\pi}{6} \cdot \frac{2}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}.$$

..... (15 分)

注: 可以利用第二型曲线积分计算, 对于  $\alpha > 1$ , 在以 0 为顶点的锥形区域

$$D := \{re^{i\theta} | r > 0, \theta \in (0, \beta)\}$$

内, 定义  $\text{Ln } z$  如下:

$$\text{Ln}(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta, \quad \forall re^{i\theta} \in D,$$

其中  $\beta = \frac{\pi}{2\alpha}$ . 则易见  $\text{Ln } z$  可以连续地把定义域延伸到  $D$  的边界. 又易见, 在  $D$  内成立  $\text{Ln } z$  在  $D$  内解析.

令  $z^\alpha := e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ , ( $z \in \overline{D}$ ), 则  $e^{iz^\alpha}$  在  $D$  内解析在  $\overline{D}$  上连续.

任取  $R > 0$ , 考虑  $D_R := B_R(0) \cap D$ , 则  $\int_{\partial D_R} e^{iz^\alpha} dz = 0$ . 由此即得

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{ix^\alpha} dx &= \int_0^R e^{ir^\alpha e^{i\alpha\beta}} e^{i\beta} dr - \int_0^\beta e^{iR^\alpha e^{i\alpha\theta}} iR e^{i\theta} d\theta \\ &= e^{i\beta} \int_0^R e^{-r^\alpha \sin(\alpha\beta)} e^{ir^\alpha \cos(\alpha\beta)} dr - i \int_0^\beta R e^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)} e^{iR^\alpha \cos(\alpha\theta)} e^{i\theta} d\theta \\ &= e^{\frac{\pi i}{2\alpha}} \int_0^R e^{-r^\alpha} dr - i \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} R e^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)} e^{iR^\alpha \cos(\alpha\theta)} e^{i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

易见有常数  $C > 0$  使得

$$\begin{aligned} &\left| i \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} R e^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)} e^{iR^\alpha \cos(\alpha\theta)} e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} R e^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)} d\theta \right| \leq \left| \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} R e^{-CR^\alpha \theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{CR^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

于是, 可得

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^\alpha} dx = e^{\frac{i\pi}{2\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-r^\alpha} dr = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) e^{\frac{i\pi}{2\alpha}}.$$

得分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 设  $f, g$  为  $\mathbb{R}$  上的非负连续可微函数, 满足:  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 成立  $f'(x) \geq 6 + f(x) - f^2(x)$ ,  $g'(x) \leq 6 + g(x) - g^2(x)$ . 证明:

- (1)  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$  以及  $x \in \mathbb{R}$ , 存在  $\xi \in (-\infty, x)$  使得  $f(\xi) \geq 3 - \varepsilon$ .
- (2)  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 成立  $f(x) \geq 3$ .
- (3)  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 存在  $\eta \in (-\infty, x)$  使得  $g(\eta) \leq 3$ .
- (4)  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 成立  $g(x) \leq 3$ .

解答. (1) 任取  $\varepsilon \in (0, 1)$  以及  $x \in \mathbb{R}$ , 若结论不真, 则  $f(t) \leq 3 - \varepsilon (\forall t \leq x)$ . 因此,

$$f'(t) \geq 6 + f(t) - f^2(t) = (3 - f(t))(2 + f(t)) \geq 2\varepsilon, \quad \forall t \leq x.$$

于是

$$f(x) - f(t) \geq 2\varepsilon(x - t), \quad \forall t \leq x.$$

从而  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty$ . 与  $f$  非负矛盾.

因此, 存在  $\xi < x$  使得  $f(\xi) \geq 3 - \varepsilon$ .

..... (5 分)

- (2) 任取  $x \in \mathbb{R}$ , 由连续性, 我们只要证明对任何  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 成立  $f(x) \geq 3 - \varepsilon$ .

由 (1), 存在  $\xi < x$  使得  $f(\xi) \geq 3 - \varepsilon$ . 令  $h(t) = f(t) - (3 - \varepsilon)$ , 我们有

$$h'(t) = f'(t) \geq (3 - f(t))(2 + f(t)) \geq -(2 + f(t))h(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

记  $F(t) = \int_0^t (2 + f(s)) ds$ , 则

$$(e^{F(t)} h(t))' = e^{F(t)} (h'(t) + (2 + f(t))h(t)) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

因此,

$$e^{F(x)} h(x) \geq e^{F(\xi)} h(\xi) \geq 0.$$

因此,  $h(x) \geq 0$ . 即  $f(x) \geq 3 - \varepsilon$ .

..... (10 分)

- (3) 任取  $x \in \mathbb{R}$ , 若结论不真, 则  $g(t) > 3 (\forall t < x)$ . 因此,

$$g'(t) \leq 6 + g(t) - g^2(t) = -(g(t) - 3)^2 - 5(g(t) - 3) \leq -(g(t) - 3)^2, \quad \forall t < x.$$

于是

$$\frac{g'(t)}{(g(t) - 3)^2} \leq -1, \quad \forall t \leq x.$$

不等式两边在  $[t, x]$  上积分, 得到

$$\frac{1}{g(t)-3} - \frac{1}{g(x)-3} \leq t-x, \quad \forall t < x.$$

进而

$$-\frac{1}{g(x)-3} \leq t-x, \quad \forall t < x.$$

在上式令  $t \rightarrow -\infty$  即得矛盾. 因此, 存在  $\eta \in (-\infty, x)$  使得  $g(\eta) \leq 3$ .

..... (17 分)

(4) 任取  $x \in \mathbb{R}$ , 由 (3), 存在  $\eta \in (-\infty, x)$  使得  $g(\eta) \leq 3$ . 我们有

$$(g(t)-3)' \leq -(g(t)-3)(2+g(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

因此,

$$(e^{G(t)}(g(t)-3))' = e^{G(t)}((g(t)-3)' + (2+g(t))(g(t)-3)) \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

其中  $G(t) = \int_0^t (2+g(s)) ds$ . 从而

$$e^{G(x)}(g(x)-3) \leq e^{G(\eta)}(g(\eta)-3) \leq 0.$$

因此,  $g(x) \leq 3$ . .

□

..... (20 分)