华教杯全国大学生数学竞赛训练题

（专科生组、均为往届真题）

一、选择题（共 10 题，3 分/题）

1、已知 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$，则函数 $\boldsymbol{y}=\operatorname{sgn}(\boldsymbol{x}^2+1)$ 的值域是（　　）

A $[-1,1]$；**B** $\{1\}$；**C** $\{-1,0,1\}$；**D** $\{2,0,1\}$.

2、函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在定义域内是（　　）

A 有下界无上界；**B** 有上界无下界；**C** 有界，且 $|f(x)|\le\dfrac{1}{2}$；　**D** 有界，且 $|f(x)|\le 2$.

3、下列关于函数极值点、驻点、最值点说法正确的是（ ）

A. 函数的极值点就是函数的最值点.

B. 函数的最值点一定是函数的驻点.

C. 函数的驻点一定是函数的极值点.

D. 函数的不可导点也有可能是最值点.

4、下列关于无穷小量与无穷大量的说法正确的是（ ）

A、无穷大量与无穷小量的乘积是个不定的量，一定没有极限

B、一个无界的量就是无穷大量

C、无穷大量的倒数是无穷小量

D、若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则一定有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$

5、函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $[\dfrac{1}{e},1]$ 上是（　　）

A 有下界无上界；**B** 有上界无下界；

C 有界，且 $f(x)\in[-e,0]$；　**D** 有界，且 $f(x)\in[-1,e]$.

6、设 $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)\sin\dfrac{1}{x}}$，则 $\boldsymbol{f(x)}$的间断点个数是（　　）

A 1 个;　B 2 个;C 3 个;　D 无穷多个.

7、函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ 的间断点的个数是（　　）

A　2 个;　B 1 个;　C 0 个**;　D 无法计算.**

8、设曲线 $f(x)=x^3+3ax^2+3bx+c$ 在 $x=-1$ 取极大值，点(0,3)是其拐点，则（　　）

A *a*= -1,b= 0,c=3;　B *a*=3,b= -1,c=0;　C *a*=0,b= -1,c=3;　D 以上都不正确.

9、设 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$，则下列说法正确的是（ ）

A、$f(x)$ 在 $x=0$ 点连续　　　　B、$f(x)$ 在 $x=0$ 点左右导数都存在

C、当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 可导　　　　D、$f'_+(0)=f'(0+0), f'_-(0)=f'(0-0)$

10、由微分的近似计算可知，当 $|\triangle x|$ 很小时，有的近似公式

$f(x_0+\triangle x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\triangle x$，据此计算 $\sqrt[11]{2019}$ 说法正确的是　（ ）

A、$\because \sqrt[11]{2019}=\sqrt[11]{2^{11}-29}$, 取 $x_0=2^{11}, \triangle x=-29$

B、$\because \sqrt[11]{2019}=\sqrt[11]{2^{11}-29}$, 取 $x_0=2^{11}, \triangle x=29$

C、$\because \sqrt[11]{2019}=2\sqrt[11]{1-\dfrac{29}{2^{11}}}$, 取 $x_0=1, \triangle x=\dfrac{29}{2^{11}}$

D、$\because \sqrt[11]{2019}=2\sqrt[11]{1-\dfrac{29}{2^{11}}}$, 取 $x_0=1, \triangle x=-\dfrac{29}{2^{11}}$

二、填空题（共 7 题，4 分/题）

1、设函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数就是其本身，则 a,b,c,d 应满足的条件是________.

2、设函数在 (a,b) 内单调，若函数有间断点，则间断点的类型是____________

3、设 $f(x)=\begin{cases}ax+b, x\ge 0\\ 2e^x-1, x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点可导，则 $a+b=$ ______.

4、设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x})^{ax}=\int_{-\infty}^{a}xe^x dx$，则常数 a=__________.

5、函数 $f(x)=\frac{x-1}{x^2-3x+2}$ 的第一类间断点是_______.

6、设 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases},\theta\in[0,2\pi]$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$ __________.

7、曲线 $y=f(x)=x^n(n\in N^+)$ 上，过点 $(1,1)$ 处的切线， 与 x 轴交点的横坐标记为

x_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=$ ______.

三、解答题（共 3 题，14 分/题）

1、设 $f(x)=\begin{cases}x^m\sin\frac{1}{x}, x\ne 0\\ 0, x=0\end{cases}, m\in N^+$，求:

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则 m 取何值?

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，则 m 取何值?

(3) 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则 m 取何值?

2、设 $f(x)$ 在[a,b]上连续，且 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b, c_i>0, i=1,2,\cdots,n$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\frac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}$.

3、证明：$\sin x>x-\frac{x^3}{6}, x>0$

华教杯全国大学生数学竞赛训练题答案

（专科生组）

一、选择题

1-5、BCDCC　　　　6-10、DACCD

二、填空题

1、$a+d=0$

2、第一类跳跃性间断点

3、3

4、2

5、$x=1$

6、$-\dfrac{b}{a^2\sin^3\theta}$

7、$\dfrac{1}{e}$

二、解答题

1、

解：(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$，即

$\lim\limits_{x\to 0} x^m \sin\dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^m=0 \Rightarrow m\ge 1(m\in N^+)$；

(2) $\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^m\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，则极限 $\lim\limits_{x\to 0} x^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^{m-1}=0 \Rightarrow m>1(m\in N^+)$，此时，$f'(0)=0$.

(3)当 $x\ne 0$ 时，$f'(x)=x^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{m-2}\cos\dfrac{1}{x}$, 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点连续，由(2)知 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=f'(0)=0 \Rightarrow m>2(m\in N^+)$.

2、

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b, c_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = \dfrac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}$.

证明：函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m.

即 $\forall x \in [a,b], m \le f(x) \le M$，于是 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b, c_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$

$\forall x_i \in [a,b], c_i > 0$ 总有 $m \le f(x_i) \le M \Rightarrow c_i m \le c_i f(x_i) \le c_i M$，$i = 1,2,\cdots,n$，

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i m \le \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} c_i M \Rightarrow m\sum_{i=1}^{n} c_i \le \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \le M\sum_{i=1}^{n} c_i,$$

$\Rightarrow m \le \dfrac{\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \le M$，$i = 1,2,\cdots,n$.由介值定理知，$\exists \xi \in [a,b]$，使得

$f(\xi) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} c_i}$，即 $f(\xi) = \dfrac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}$.

3、

证明：令 $f(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}, x > 0$,则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且可导，且 $f(0) = 0$，

$\because f'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}, f''(x) = x - \sin x > 0 (x > 0)$, $f'(0) = 0$，这就是说 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即当 $x > 0$ 时，$f'(x) > f'(0) = 0$，

这就是说, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即当 $x > 0$ 时，$f(x) > f(0) = 0$，

于是，$\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}, x > 0$.