

# 第十一届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案 (数学类高年级组, 2021 年 4 月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四				总分
满分	20	15	15	20	10	10	10	100
得分								

注意:

1. 第一至第四大题是必答题, 再从第五至第十大题中任选 3 题, 题号要填入上面的表中 (多选无效).
2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 20 分)填空题 (每小题 5 分)

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \prod_{k=n}^{3n-1} k \right)^{\frac{1}{2n}} \sin \frac{1}{n} = \frac{3\sqrt{3}}{e}.$$

2. 已知  $f$  在区间  $(-1, 3)$  内有二阶连续导数,  $f(0) = 12, f(2) = 2f'(2) + 8$ , 则  $\int_0^1 x f''(2x) dx = \underline{1}$ .
3. 在三维空间的直角坐标系中, 方程  $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz = 1$  表示的二次曲面类型是 椭圆柱面.
4. 在矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  的奇异值分解  $A = UAV$  中(其中  $U, V$  为正交方阵,  $\Lambda$  为对角阵),  $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 考虑单叶双曲面  $S: x^2 - y^2 + z^2 = 1$ .

1. 证明:  $S$  上同一族直母线中任意两条不同的直母线是异面直线;

2. 设  $S$  上同一族直母线中的两条直母线分别经过  $M_1(1, 1, 1)$  与  $M_2(2, 2, 1)$  两点. 求这两条直母线的公垂线方程以及这两条直母线之间的距离.

**证明:** 1. 将曲面方程改写为

$$x^2 - y^2 = 1 - z^2,$$

从而有

$$(x + y)(x - y) = (1 + z)(1 - z) \quad (1)$$

现在引进不全为零的参数  $\lambda, \mu$ , 以及不全为零的参数  $u, v$ , 我们得到两族直母线方程

$$\begin{cases} \lambda(x + y) = \mu(1 + z) \\ \mu(x - y) = \lambda(1 - z) \end{cases} \quad (2)$$

以及

$$\begin{cases} u(x + y) = v(1 - z) \\ v(x - y) = u(1 + z) \end{cases} \quad (3)$$

..... (2 分)

首先以第一族直母线 (2) 为例证明两条不同的直母线是异面直线. 取 (2) 中两条直母线  $L_1$  与  $L_2$

$$L_1: \begin{cases} \lambda_1(x + y) = \mu_1(1 + z) \\ \mu_1(x - y) = \lambda_1(1 - z) \end{cases} \quad (4)$$

以及

$$L_2: \begin{cases} \lambda_2(x + y) = \mu_2(1 + z) \\ \mu_2(x - y) = \lambda_2(1 - z) \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $\lambda_1\mu_2 \neq \lambda_2\mu_1$ .

考虑线性方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 x + \lambda_1 y - \mu_1 z - \mu_1 = 0 \\ \mu_1 x - \mu_1 y + \lambda_1 z - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 x + \lambda_2 y - \mu_2 z - \mu_2 = 0 \\ \mu_2 x - \mu_2 y + \lambda_2 z - \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

设 (6) 的系数矩阵为  $A$ , 经计算可得

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 & -\mu_1 & -\mu_1 \\ \mu_1 & -\mu_1 & \lambda_1 & -\lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & -\mu_2 & -\mu_2 \\ \mu_2 & -\mu_2 & \lambda_2 & -\lambda_2 \end{vmatrix} = 4(\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2)^2 \neq 0$$

所以  $L_1$  与  $L_2$  为异面直线. ....(5 分)

对于第二族直母线 (3), 设两条直母线  $L'_1, L'_2$

$$L'_1: \begin{cases} u_1(x+y) = v_1(1-z) \\ v_1(x-y) = u_1(1+z) \end{cases} \quad (7)$$

以及

$$L'_2: \begin{cases} u_2(x+y) = v_2(1-z) \\ v_2(x-y) = u_2(1+z) \end{cases} \quad (8)$$

其中  $u_1 v_2 \neq u_2 v_1$ .

考虑方程组

$$\begin{cases} u_1 x + u_1 y + v_1 z - v_1 = 0 \\ v_1 x - v_1 y - u_1 z - u_1 = 0 \\ u_2 x + u_2 y + v_2 z - v_2 = 0 \\ v_2 x - v_2 y - u_2 z - u_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

设方程组 (9) 的系数矩阵为  $B$ , 经计算得到

$$\det(B) = \begin{vmatrix} u_1 & u_1 & v_1 & -v_1 \\ v_1 & -v_1 & -u_1 & -u_1 \\ u_2 & u_2 & v_2 & -v_2 \\ v_2 & -v_2 & -u_2 & -u_2 \end{vmatrix} = -4(u_1v_2 - u_2v_1)^2 \neq 0$$

所以  $L'_1$  与  $L'_2$  为异面直线. .... (8 分)

2. 将  $M_1(1, 1, 1)$  点代入 (2) 中可得  $\mu : \lambda = 1 : 1$ , 获得直母线  $L_3$  的方程

$$L_3 : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \quad (10)$$

将  $M_2(2, 2, 1)$  点代入 (2) 中可得  $\mu : \lambda = 2 : 1$ , 获得直母线  $L_4$  的方程

$$L_4 : \begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases} \quad (11)$$

因为  $(1, 1, -1) \times (1, -1, 1) = (0, -2, -2)$ , 取  $L_3$  的方向  $\vec{n}_3 = (0, 1, 1)$ . 因为  $(1, 1, -2) \times (2, -2, 1) = (-3, -5, -4)$ , 取  $L_4$  的方向  $\vec{n}_4 = (3, 5, 4)$ .  $L_3, L_4$  的公垂线  $L$  的方向为  $\vec{n} = \vec{n}_3 \times \vec{n}_4 = (-1, 3, -3)$ . 设  $M(x, y, z)$  为  $L$  上的任意一点, 则  $L$  的方程满足

$$\begin{cases} (\overrightarrow{M_1M}, \vec{n}_3, \vec{n}) = 0 \\ (\overrightarrow{M_2M}, \vec{n}_4, \vec{n}) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{M_1M}, \vec{n}_3, \vec{n}) &= \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ (\overrightarrow{M_2M}, \vec{n}_4, \vec{n}) &= \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 3 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

经化简得到公垂线  $L$  的方程

$$\begin{cases} 6x + y - z = 6 \\ 27x - 5y - 14z = 30 \end{cases}$$

..... (12 分)

$L_3, L_4$  之间的距离满足

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{19}} = \frac{2}{19} \sqrt{19}$$

..... (15 分)

**注.** 经计算可得公垂线与两条直母线  $L_3, L_4$  的交点分别为  $\frac{1}{19}(19, -3, -3)$  和  $\frac{1}{19}(17, 3, -9)$ , 这两点间的距离为  $\frac{2}{19}\sqrt{19}$ . 因此, 也可以通过计算两点间的距离得到异面直线之间的距离.

将  $M_1(1, 1, 1), M_2(2, 2, 1)$  分别代入第二族直母线族 (3) 中可得到同一条直母线

$$\begin{cases} 1 - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

即  $M_1, M_2$  位于同一条直母线上. 因此, 只需考虑  $L_3, L_4$  的情形. □

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设  $V$  是有限维欧氏空间,  $V_1, V_2$  是  $V$  的非平凡子空间且  $V = V_1 \oplus V_2$ . 设  $p_1, p_2$  分别是  $V$  到  $V_1, V_2$  的正交投影,  $\varphi = p_1 + p_2$ , 用  $\det \varphi$  表示线性变换  $\varphi$  的行列式. 证明:  $0 < \det \varphi \leq 1$  且  $\det \varphi = 1$  的充要条件是  $V_1$  与  $V_2$  正交.

**证明:** 设  $\dim V_1 = m, \dim V_2 = n, m, n > 0$ . 分别取  $V_1$  和  $V_2$  的各一组标准正交基, 它们合起来是  $V$  的一组基,  $\varphi$  在这组基下的矩阵形如

$$A = \begin{pmatrix} I_m & B \\ C & I_n \end{pmatrix},$$

其中  $B$  和  $C$  分别是  $p_1|_{V_2}: V_2 \rightarrow V_1$  和  $p_2|_{V_1}: V_1 \rightarrow V_2$  的矩阵. ....(3 分)

对于  $v_1 \in V_1$  和  $v_2 \in V_2, v_1 - p_2 v_1 \in V_2^\perp$ , 故  $\langle p_2 v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ , 同理  $\langle v_1, p_1 v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ . 由  $\langle p_2 v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, p_1 v_2 \rangle$  可得  $C = B^T$ . 从而  $CB = B^T B$  为半正定矩阵, 它就是  $p_2 p_1|_{V_2}: V_2 \rightarrow V_2$  的矩阵. ....(6 分)

设  $\lambda$  为  $p_2 p_1|_{V_2}$  的一个特征值,  $v_2 \in V_2$  是相应的特征向量, 则  $\lambda \geq 0$  且由于  $v_2 \notin V_1$ , 我们有  $\|p_1 v_2\| < \|v_2\|$ , 所以

$$0 \leq \lambda \|v_2\|^2 = \langle p_2 p_1 v_2, v_2 \rangle = \langle p_1 v_2, p_1 v_2 \rangle = \|p_1 v_2\|^2 < \|v_2\|^2,$$

故  $0 \leq \lambda < 1$ . ....(9 分)

由于  $\varphi$  在  $V$  的一组基下的矩阵为  $A$ , 所以

$$\det \varphi = \det A = \det \begin{pmatrix} I_m & B \\ C & I_n \end{pmatrix} = \det (I_n - CB) = \prod_{\lambda} (1 - \lambda),$$

这里  $\lambda$  取遍矩阵  $CB$  的所有特征值 (记重数). 由于  $CB$  的特征值即  $p_2 p_1|_{V_2}$  的特征值, 故对  $CB$  的每个特征值  $\lambda$  有  $0 \leq \lambda < 1$ , 从而  $0 < \det \varphi \leq 1$ . ....(12 分)

特别地,  $\det \varphi = 1$  当且仅当对  $CB$  的每个特征值  $\lambda$ , 均有  $\lambda = 0$ , 这也等价于  $CB = B^T B = 0$ , 即  $B = C = 0$ . 所以  $\det \varphi = 1$  的充要条件是  $V_1$  与  $V_2$  正交. ....(15 分)

得分	
评阅人	

#### 四、(本题 20 分) 证明:

1. 证明: 函数方程  $x^3 - 3x = t$  存在三个在闭区间  $[-2, 2]$  上连续, 在开区间  $(-2, 2)$  内连续可微的解  $x = \varphi_1(t)$ ,  $x = \varphi_2(t)$ ,  $x = \varphi_3(t)$  满足:

$$\varphi_1(-t) = -\varphi_3(t), \quad \varphi_2(-t) = -\varphi_2(t), \quad |t| \leq 2.$$

2. 若  $f$  是  $[-2, 2]$  上的连续偶函数, 证明:  $\int_{-2}^2 f(x^3 - 3x) dx = \int_0^1 f(x^3 - 3x) dx$ .

**证明:** 1. 记  $g(x) = x^3 - 3x$ , 那么  $g$  是奇函数, 且  $g'(x) = 3(x^2 - 1)$ . 于是  $g$  具有如下性质:

(1) 在  $(-\infty, -1]$  和  $[1, +\infty)$  上严格单调上升, 在  $[-1, 1]$  上严格单调下降.

(2)  $x = -1$  是极大值点, 极大值为 2;  $x = 1$  是极小值点, 极小值为 -2.

..... (4 分)

(3) 记

$$g_1 = g|_{[-2, -1]}, \quad g_2 = g|_{[-1, 1]}, \quad g_3 = g|_{[1, 2]}.$$

根据以上性质,  $g_1, g_2, g_3$  分别在其定义的闭区间上严格单调, 且值域均为  $[-2, 2]$ . 因此, 依次有反函数  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , 以  $[-2, 2]$  为定义域, 依次以  $[-2, -1], [-1, 1], [1, 2]$  为值域.

..... (7 分)

由反函数的连续性得  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  均为  $[-2, 2]$  上的连续函数. 而  $g_1, g_2, g_3$  依次在  $(-2, -1), (-1, 1), (1, 2)$  内连续可导, 且导数不等于零. 因此, 它们的反函数  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  在  $(-2, 2)$  内连续可微. .... (10 分)

另一方面, 注意到  $g$  为奇函数, 以及  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  的值域,  $g_1, g_2, g_3$  的定义域, 我们有

$$-t = -g_3(\varphi_3(t)) = -g(\varphi_3(t)) = g(-\varphi_3(t)) = g_1(-\varphi_3(t)), \quad t \in [-2, 2].$$

因此

$$\varphi_1(-t) = -\varphi_3(t), \quad t \in [-2, 2].$$

同理,

$$-t = -g_2(\varphi_2(t)) = -g(\varphi_2(t)) = g(-\varphi_2(t)) = g_2(-\varphi_2(t)), \quad t \in [-2, 2].$$

从而

$$\varphi_2(-t) = -\varphi_2(t), \quad t \in [-2, 2].$$

.....(14 分)

2. 根据韦达定理, 我们有

$$\varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t) = 0, \quad \forall t \in [-2, 2].$$

从而

$$\varphi_1'(t) + \varphi_2'(t) + \varphi_3'(t) = 0, \quad \forall t \in (-2, 2).$$

.....(17 分)

这样结合  $f$  为连续偶函数得到

$$\begin{aligned} & 2 \int_1^2 f(x^3 - 3x) dx - 2 \int_0^1 f(x^3 - 3x) dx \\ &= \int_{-2}^{-1} f(x^3 - 3x) dx - \int_{-1}^1 f(x^3 - 3x) dx + \int_1^2 f(x^3 - 3x) dx \\ &= \int_{-2}^2 f(t) \varphi_1'(t) dt + \int_{-2}^2 f(t) \varphi_2'(t) dt + \int_{-2}^2 f(t) \varphi_3'(t) dt = 0. \end{aligned}$$

从而结论成立. ....(20 分)

□



得分	
评阅人	

五、(本题 10 分) 设  $E \subseteq \mathbb{R}$  是  $\mathcal{L}$ -可测集,  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  是  $E$  上一致有界可测函数列, 若  $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \int_E \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x) \right|^2 dm < \infty$ , 则  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x) = 0, \mathcal{L} - a.e., x \in E$ .

证明: 对  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  和  $N \geq 1$ , 设

$$A_N(\varepsilon) = \left\{ x \in E : \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| \geq \varepsilon \right\}.$$

由于

$$\int_E \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x) \right|^2 dm \geq \varepsilon^2 \cdot m(A_N(\varepsilon)).$$

由题设有  $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{m(A_N(\varepsilon))}{N} < +\infty$ . ..... (2 分)

设

$$N_1 = 1, N_{k+1} = \left[ \frac{N_k}{1 - \varepsilon} \right] + 1, \quad \forall k \geq 1 \quad (1)$$

又设  $m_k$  是满足  $N_k \leq m_k < N_{k+1}$  的正整数, 且  $\frac{m(A_{m_k}(\varepsilon))}{m_k} = \min_{N_k \leq N < N_{k+1}} \frac{m(A_N(\varepsilon))}{N}$ .

于是

$$\sum_{N_k \leq N < N_{k+1}} \frac{m(A_N(\varepsilon))}{N} \geq (N_{k+1} - N_k) \frac{m(A_{m_k}(\varepsilon))}{m_k} \geq \varepsilon \cdot m(A_{m_k}(\varepsilon)).$$

从而, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_{m_k}(\varepsilon)) < +\infty. \quad (2)$$

..... (5 分)

令

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_{m_k}(\varepsilon) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_{m_k}(\varepsilon) \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_{m_k}(\varepsilon), \forall N \geq 1, \\ \implies m(A(\varepsilon)) &\leq \sum_{k=N}^{\infty} m(A_{m_k}(\varepsilon)) \xrightarrow{(2)} m(A(\varepsilon)) = 0. \end{aligned}$$

即对  $\mathcal{L} - a.e., x \in E$  及充分大的  $k$ , 有

$$\left| \frac{1}{m_k} \sum_{n=1}^{m_k} f_n(x) \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

..... (7 分)

又  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  在  $E$  上一致有界, 即  $\exists c > 0, \forall x \in E, \forall n \geq 1, |f_n(x)| \leq c. \forall x \in E, N \geq 1$ , 设  $k$  是唯一满足  $N_k \leq N < N_{k+1}$  的正整数(其中  $N_k$  由 (1) 确定).

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x) - \frac{1}{m_k} \sum_{n=1}^{m_k} f_n(x) \right| &= \left| \frac{1}{N} \left( \sum_{n=1}^N f_n(x) - \sum_{n=1}^{m_k} f_n(x) \right) + \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{m_k} \right) \sum_{n=1}^{m_k} f_n(x) \right| \\ &\leq 2c \frac{N_{k+1} - N_k}{N_k} \leq 2c \frac{1}{N_k} \left( \frac{N_k}{1-\varepsilon} + 1 - N_k \right) = \frac{2c\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{2c}{N_k} \end{aligned}$$

当  $N$  充分大时, 当然有  $k$  充分大, 此时  $\frac{2c\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{2c}{N_k} \leq 5c\varepsilon$  及 (3), 即对  $\mathcal{L} - a.e., x \in E$ , 有

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| < (1 + 5c)\varepsilon, \text{ 故}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x) = 0, \quad \mathcal{L} - a.e., x \in E.$$

..... (10 分)

得分	
评阅人	

六、(本题 10 分) 设  $f(z)$  在  $|z| \leq R$  ( $R > 0$ ) 内解析且满足  $|f(z)| \leq M$  ( $M > 0$ ),  $f(0) \neq 0$ . 证明:  $f(z)$  在圆  $|z| \leq R/3$  内的零点个数(零点的重数计算在内)不超过  $\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{M}{|f(0)|}$ .

**证明:** 用  $z_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 表示  $f(z)$  在  $|z| \leq R/3$  内的零点, 令

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^n (1 - \frac{z}{z_i})}.$$

.....(3 分)

则  $g(z)$  在  $|z| \leq R$  内解析. 因为在  $|z| = R$  上, 对  $i = 1, 2, \dots, n$  都有

$$\left| \frac{z}{z_i} \right| \geq 3,$$

于是在  $|z| = R$  上,

$$|g(Re^{i\theta})| \leq \frac{M}{\prod_{i=1}^n (3 - 1)} = 2^{-n} M.$$

从而在  $|z| < R$  内, 有

$$|g(z)| \leq 2^{-n} M.$$

.....(8 分)

特别地

$$|g(0)| \leq 2^{-n} M.$$

又  $g(0) = f(0)$ , 所以  $|f(0)| \leq 2^{-n} M$ , 即

$$2^n |f(0)| \leq M.$$

对上式两边取对数, 得

$$n \leq \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{M}{|f(0)|}.$$

.....(10 分)

□

得分	
评阅人	

七、(本题 10 分) 证明: 180 阶群不是单群.

**证明:** 对于素数  $p$ , 用  $n_p(G)$  表示有限群  $G$  的 Sylow  $p$ -子群个数.

反证, 设  $G$  为 180 阶单群, 由  $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$  和 Sylow 定理有  $n_3(G) > 1$ ,  $n_3(G) \mid 20$  且  $n_3(G) \equiv 1 \pmod{3}$ , 故  $n_3(G) = 4$  或  $n_3(G) = 10$ .

若  $n_3(G) = 4$ , 考虑  $G$  在它的 Sylow 3-子群集合上的共轭作用, 由此得到  $G$  到对称群  $S_4$  的一个同态, 由  $G$  为单群知这个同态的核只含有单位元, 即此同态为单同态, 从而  $180 = |G| \leq |S_4| = 24$ , 矛盾, 故  $n_3(G) = 10$ . ..... (3 分)

我们断言  $G$  的任意两个不同的 Sylow 3-子群的交平凡. 若否, 设有  $G$  的两个不同的 Sylow 3-子群  $S, T$  使得  $D = S \cap T \neq \{e\}$ . 由于  $S$  和  $T$  都是 9 阶群, 它们为交换群, 从而  $D$  为 3 阶群且  $D \leq S, T$ . 记  $N = N_G(D) = \{g \in G \mid D^g = D\}$  为  $D$  在  $G$  中的正规化子, 则有  $S, T \leq N$ , 这样  $S$  和  $T$  都是群  $N$  的 Sylow 3-子群, 从而  $N$  的 Sylow 3-子群个数  $n_3(N) > 1$ . 依然由 Sylow 定理有  $n_3(N) \mid [N : S]$  (这里  $[N : S]$  表示  $S$  在  $N$  中的指数) 和  $n_3(N) \equiv 1 \pmod{3}$ , 故  $n_3(N) \geq 4$  且与 3 互素. 由  $n_3(N) \mid |N|$  和  $|S| \mid |N|$ , 我们有  $|N| \geq 36$ , 进而  $[G : N] \leq 5$ . 考虑  $G$  在  $N$  的左陪集集合上的左乘作用, 得到  $G$  同构于  $S_{[G:N]}$  的一个子群, 但是  $|G| = 180 > 5! \geq |S_{[G:N]}|$ , 矛盾.

..... (5 分)

下面再看  $G$  的 Sylow 5-子群, 由  $n_5(G) > 1$ ,  $n_5(G) \mid 36$  和  $n_5(G) \equiv 1 \pmod{5}$  得到  $n_5(G) = 6$  或者  $n_5(G) = 36$ . 由于  $G$  的 Sylow 5-子群为 5 阶群, 故  $G$  的任两个不同的 Sylow 5-子群的交平凡. 若  $n_5(G) = 36$ , 则  $G$  的 10 个 Sylow 3-子群和 36 个 Sylow 5-子群至少包含  $10(9-1) + 36(5-1) + 1 = 225 > 180$  个元素, 矛盾. 故  $n_5(G) = 6$ .

..... (7 分)

考虑  $G$  在它的 6 个 Sylow 5-子群集合上的共轭作用, 类似于前面的讨论, 我们得到一个  $G$  到对称群  $S_6$  的单同态, 即  $G$  同构于  $S_6$  的一个子群, 不妨设  $G \leq S_6$ . 若  $G$  中有奇置换, 则

$$1 < [G : G \cap A_6] = [GA_6 : A_6] \leq [S_6 : A_6] = 2,$$

即  $G \cap A_6$  是  $G$  的指数为 2 的子群, 从而  $G \cap A_6$  是  $G$  的非平凡正规子群, 与  $G$  为单群矛盾, 所以  $G \leq A_6$ . 又由

$$[A_6 : G] = |A_6|/|G| = 360/180 = 2$$

得到  $G \leq A_6$ , 与  $A_6$  为单群矛盾. .... (10 分)

得分	
评阅人	

八、(本题 10 分) 设  $S: r = r(u, v)$  为  $\mathbb{R}^3$  中的光滑曲面, 其第一基本形式为  $(ds)^2 = E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2$ , 其中  $(u, v)$  为曲面  $S$  的参数,  $r_u = \frac{\partial r}{\partial u}$ ,  $r_v = \frac{\partial r}{\partial v}$ ,  $E = r_u \cdot r_u$ ,  $F = r_u \cdot r_v$ ,  $G = r_v \cdot r_v$ . 证明:

1. 存在新的参数  $(u_1, v_1)$ , 使得  $S$  的第一基本形式为  $(ds)^2 = h(u_1, v_1)[(du_1)^2 + (dv_1)^2]$ , 其中  $h > 0$  为光滑函数.
2. 如果曲面  $S$  的第一基本形式满足  $(ds)^2 = h(u, v)[(du)^2 + (dv)^2]$ , 则其高斯曲率  $K$  可以表示为  $K = -\frac{1}{2h}\Delta \log h$ , 其中  $h > 0$  为光滑函数,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$  表示拉普拉斯算子.

**证明:** 1. 曲面  $S$  的第一基本形式满足

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2 \\ &= \frac{1}{E} \left[ Edu + Fdv + \sqrt{F^2 - EG}dv \right] \left[ Edu + Fdv - \sqrt{F^2 - EG}dv \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

令  $l = EG - F^2$ , 则有  $\sqrt{F^2 - EG} = i\sqrt{l}$ ,  $i^2 = -1$ . 于是

$$Edu + Fdv \pm \sqrt{F^2 - EG}dv = Edu + Fdv \pm i\sqrt{l}dv$$

由常微分方程理论可知, 存在一个非零(复的)积分因子  $\lambda$ , 使得  $\lambda(Edu + Fdv + i\sqrt{l}dv)$  为某个(复的)函数  $\mu = u_1 + iv_1$  的全微分, 即有

$$\lambda(Edu + Fdv + i\sqrt{l}dv) = d\mu = du_1 + idv_1 \quad (2)$$

对方程 (2) 的两边取共轭, 得到

$$\bar{\lambda}(Edu + Fdv - i\sqrt{l}dv) = \overline{d\mu} = du_1 - idv_1 \quad (3)$$

将 (2), (3) 代入 (1), 得到

$$(ds)^2 = h(u_1, v_1)[(du_1)^2 + (dv_1)^2] \quad (4)$$

其中,  $h(u_1, v_1) = \frac{1}{E|\lambda|^2}$ . ..... (4 分)

另外, 令  $\lambda = p + iq$ ,  $p, q$  均为实数. 由方程 (2) 得到

$$(p + iq)(Edu + Fdv + i\sqrt{l}dv) = du_1 + idv_1 \quad (5)$$

由方程 (5) 可得

$$\begin{cases} du_1 = p(Edu + Fdv) - q\sqrt{l}dv \\ dv_1 = q(Edu + Fdv) + p\sqrt{l}dv \end{cases} \quad (6)$$

由方程组 (6), 该变换的雅可比行列式满足

$$\frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} = (p^2 + q^2)E\sqrt{l} > 0$$

于是  $(u_1, v_1)$  是一组新的参数. ....(5 分)

2. 证法一: 对于曲面  $S : r = r(u, v)$ ,  $(ds)^2 = h(u, v)[(du)^2 + (dv)^2]$ . 注意到  $r_u \cdot r_u = E = G = r_v \cdot r_v = h(u, v)$ ,  $F = r_u \cdot r_v = r_v \cdot r_u = 0$ , 于是有  $r_{uu} \cdot r_v + r_u \cdot r_{uv} = 0$ ,  $r_{uv} \cdot r_v + r_u \cdot r_{vv} = 0$ . 将  $r_u, r_v$  单位化, 定义

$$e_1 = \frac{r_u}{|r_u|} = \frac{r_u}{\sqrt{E}} = \frac{r_u}{\sqrt{h}}, e_2 = \frac{r_v}{|r_v|} = \frac{r_v}{\sqrt{G}} = \frac{r_v}{\sqrt{h}}, n = r_u \times r_v \quad (7)$$

于是,  $e_1, e_2, n$  构成  $\mathbb{R}^3$  的标准正交基. 因此  $r_{uu}, r_{uv}, r_{vv}$  可由该基表示. 例如, 设

$$r_{uu} = ae_1 + be_2 + cn \quad (8)$$

可以获得

$$a = r_{uu} \cdot e_1 = \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial u}, b = r_{uu} \cdot e_2 = -\frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial v}, c = r_{uu} \cdot n = L$$

即得到

$$r_{uu} = \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial u} e_1 - \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial v} e_2 + Ln \quad (9)$$

类似地, 可以求得

$$r_{uv} = \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial v} e_1 + \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial u} e_2 + Mn \quad (10)$$

$$r_{vv} = -\frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial u} e_1 + \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial v} e_2 + Nn \quad (11)$$

$r_{uu}, r_{uv}, r_{vv}$  在上述标准正交基下的坐标表示为

$$\begin{cases} r_{uu} = \left( \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial v}, L \right) \\ r_{uv} = \left( \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial v}, \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial u}, M \right) \\ r_{vv} = \left( -\frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial u}, \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial h}{\partial v}, N \right) \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $M = r_{uv} \cdot n, N = r_{vv} \cdot n$ .

注意到  $\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial u} = r_{vu} \cdot r_v$ , 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} &= r_{vu} \cdot r_v + r_{vu} \cdot r_{vu} \\ &= \frac{\partial}{\partial v} (r_{uu} \cdot r_v) - r_{uu} \cdot r_{vv} + r_{vu} \cdot r_{vu} \end{aligned} \quad (13)$$

利用(8)-(12), 得到

$$r_{uu} \cdot r_v = -\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial v} (r_{uu} \cdot r_v) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \quad (14)$$

$$r_{uu} \cdot r_{vv} = -\frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial v} \right)^2 \right] + LN, \quad r_{vu} \cdot r_{vu} = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial v} \right)^2 \right] + M^2 \quad (15)$$

将 (14), (15) 代入 (13) 得到

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + \frac{1}{2h} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial v} \right)^2 \right] + M^2 - LN$$

或者

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta h &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \\ &= \frac{1}{2h} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial v} \right)^2 \right] + M^2 - LN \end{aligned} \quad (16)$$

注意到

$$\Delta \log h = -\frac{1}{h^2} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial v} \right)^2 \right] + \frac{1}{h} \Delta h \quad (17)$$

结合(16)与(17), 由高斯曲率满足的公式, 得到

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{2h} \Delta \log h$$

..... (10 分)

证法二: 当曲面  $S$  的第一基本形式满足  $(ds)^2 = E(du)^2 + G(dv)^2$  时, 可以看出  $F = 0$ . 根据曲率张量的定义可以证明

$$R_{1212} = \sqrt{EG} \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}{\sqrt{G}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}}{\sqrt{E}} \right) \right] \quad (18)$$

由 (18) 以及高斯曲率的定义, 得到

$$K = -\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{R_{1212}}{EG - F^2} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}{\sqrt{G}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}}{\sqrt{E}} \right) \right] \quad (19)$$



密封线 答题时不要超过此线

其中  $g_{11} = E, g_{12} = F, g_{22} = G$ . 既然  $E = G = h, F = 0$ , 经计算可得

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}{\sqrt{G}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}}{\sqrt{E}} \right) = \frac{1}{2} \Delta \log h \quad (20)$$

将 (20) 代入 (19), 得到

$$K = -\frac{1}{2h} \Delta \log h$$

..... (10 分)

□

得分	
评阅人	

九、(本题 10 分) 设  $\{X_i\}$  是独立随机变量序列.

1. 若  $\{X_i\}$  服从大数定律且满足中心极限定理, 即

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \xrightarrow{P} 0 \text{ 和 } \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) = 0;$$

2. 若  $\{X_i\}$  同分布且满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} nP(|X_1| \geq n) = 0$ , 则  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu_n$  依概率收敛于 0, 即  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu_n \xrightarrow{P} 0$ , 其中  $\mu_n = E[X_1 I(|X_1| \leq n)]$ ,  $I(A)$  表示事件  $A$  的示性函数.

证明: 1. 由于  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \xrightarrow{P} 0$ , 所以对任意  $\varepsilon > 0$ ,

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0.$$

于是

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)\right| \geq \varepsilon\right) = 1 - P\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)\right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)}} < \frac{n\varepsilon}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)}}\right) \rightarrow 0.$$

利用  $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$  得到  $\frac{n\varepsilon}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)}} \rightarrow \infty$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) = 0.$$

.....(4 分)

2. 记  $Y_{ni} = X_i I(|X_i| \leq n)$ . 则

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_{ni} - \mu_n) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i I(|X_i| > n).$$

对任意  $\varepsilon > 0$ ,

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i I(|X_i| > n)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{i=1}^n P(|X_i| > n) = nP(|X_1| > n) \rightarrow 0.$$

所以

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i I(|X_i| > n) \xrightarrow{P} 0.$$

..... (6 分)

于是要证  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu_n \xrightarrow{P} 0$ , 只需证明  $P(|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_{ni} - \mu_n)| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ . 事实上

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_{ni} - \mu_n)\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_{ni} - EY_{ni})\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}(Y_{n1})}{n\varepsilon^2} \leq \frac{EY_{n1}^2}{n\varepsilon^2}.$$

..... (7 分)

【方法一】应用分步积分法, 得

$$\begin{aligned} \frac{EY_{n1}^2}{n} &= \frac{1}{n} E[X_1^2 I(|X_1| \leq n)] = \frac{1}{n} \int_0^n x^2 dP(|X_1| \leq x) = -\frac{1}{n} \int_0^n x^2 dP(|X_1| > x) \\ &= \frac{2}{n} \int_0^n xP(|X_1| > x)dx - nP(|X_1| > n) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k xP(|X_1| > x)dx - nP(|X_1| > n) \\ &\leq \frac{2}{n} \left(1 + \sum_{k=2}^n kP(|X_1| > k/2)\right) - nP(|X_1| > n). \end{aligned}$$

由于  $nP(|X_1| > n) \rightarrow 0$ , 所以存在  $N$ , 当  $k > N$  时,  $kP(|X_1| > k/2) < \varepsilon$ , 于是当  $n$  较大时

$$\frac{1}{n} \left(1 + \sum_{k=2}^n kP(|X_1| > k/2)\right) = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{k=2}^N kP(|X_1| > k/2) + \sum_{k=N+1}^n kP(|X_1| > k/2)\right) < 2\varepsilon.$$

则  $\frac{EY_{n1}^2}{n} \rightarrow 0$ , 故  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu_n \xrightarrow{P} 0$ .

..... (10 分)

【方法二】

$$\begin{aligned}
 \frac{EY_{n1}^2}{n} &= \frac{1}{n}E[X_1^2 I(|X_1| \leq n)] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E[X_1^2 I(j-1 < |X_1| \leq j)] \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j^2 P(j-1 < |X_1| \leq j) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n P(j-1 < |X_1| \leq j) \int_0^j x dx \\
 &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n P(j-1 < |X_1| \leq j) \sum_{k=1}^j \int_{k-1}^k x dx \\
 &\leq \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n P(j-1 < |X_1| \leq j) \sum_{k=1}^j k = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n k \sum_{j=k}^n P(j-1 < |X_1| \leq j) \\
 &\leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n k P(|X_1| > k-1) \leq \frac{2}{n} \left( 1 + \sum_{k=2}^n k P(|X_1| > k/2) \right).
 \end{aligned}$$

由于  $nP(|X_1| > n) \rightarrow 0$ , 所以存在  $N$ , 当  $k > N$  时,  $kP(|X_1| > k/2) < \varepsilon$ , 于是当  $n$  较大时,

$$\frac{1}{n} \left( 1 + \sum_{k=2}^n k P(|X_1| > k/2) \right) = \frac{1}{n} \left( 1 + \sum_{k=2}^N k P(|X_1| > k/2) + \sum_{k=N+1}^n k P(|X_1| > k/2) \right) < 2\varepsilon.$$

则  $\frac{EY_{n1}^2}{n} \rightarrow 0$ , 故  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu_n \xrightarrow{P} 0$ .

..... (10 分)

得分	
评阅人	

十、(本题 10 分) 设  $A$  是具有正对角元的非奇异对称矩阵. 证明: 若求解线性方程组  $Ax = b$  的 Gauss-Seidel 迭代法对任意初始值都收敛, 则  $A$  为正定矩阵.

证明: 线性方程组  $Ax = b$  的 Gauss-Seidel 迭代格式可写

为

$$x_{k+1} = (D - L)^{-1}L^Tx_k + (D - L)^{-1}b,$$

其中  $A = D - L - L^T$ ,  $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ ,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

..... (2 分)

将 Gauss-Seidel 格式改写为  $(D - L)x_{k+1} = L^Tx_k + b$ . 对任意初始值  $x_0$ ,  $Ax = b$  的 Gauss-Seidel 迭代法都收敛, 设其解收敛到  $x^*$ . 记  $y_k = x_k - x^*$ , 则有  $(D - L)y_{k+1} = L^Ty_k$ . 令  $\varepsilon_k = y_k - y_{k+1}$ , 注意到  $(D - L) = A + L^T$ , 那么

$$(D - L)\varepsilon_k = Ay_k, \quad Ay_{k+1} = L^T\varepsilon_k.$$

..... (4 分)

于是

$$\begin{aligned} y_k^TAy_k - y_{k+1}^TAy_{k+1} &= y_k^T(D - L)\varepsilon_k - y_{k+1}^TL^T\varepsilon_k \\ &= \varepsilon_k^TDy_k - \varepsilon_k^TL^Ty_k - \varepsilon_k^TLy_{k+1} \\ &= \varepsilon_k^TD\varepsilon_k + \varepsilon_k^T(D - L)y_{k+1} - \varepsilon_k^TL^Ty_k. \end{aligned}$$

又因  $(D - L)y_{k+1} = L^Ty_k$ , 所以

$$y_k^TAy_k - y_{k+1}^TAy_{k+1} = \varepsilon_k^TD\varepsilon_k.$$

由题设可知  $D$  是正定的, 因此

$$y_k^TAy_k > y_{k+1}^TAy_{k+1}, \quad k \geq 0.$$

.....(7 分)

下面我们将采用反证法证明若 Gauss-Seidel 迭代收敛, 则  $A$  正定.

反证: 假设  $A$  不正定, 不妨设  $b = 0$ . 则可找到一个  $x_0 \neq 0$ , 使得  $x_0^T A x_0 < 0$ . 则  $y_0^T A y_0 < 0$ . 由 Gauss-Seidel 迭代产生的序列  $\{y_n\}$  满足

$$0 > y_0^T A y_0 > y_1^T A y_1 > y_2^T A y_2 > \cdots > y_n^T A y_n > \cdots$$

显然该数列不收敛于 0, 这与题设矛盾, 因此假设不成立, 即  $A$  正定.

.....(10 分).