

# 第十届全国大学生数学竞赛试卷

(非数学类, 2018 年 10 月)

一、填空题 (本题满分 24 分, 共 4 小题, 每小题 6 分)

(1) 设  $\alpha \in (0, 1)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (n+1)^\alpha - n^\alpha \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【参考解析】: 【思路一】因为  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha < 1 + \frac{1}{n}$ , 所以

$$0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right] < n^\alpha \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \frac{1}{n^{1-\alpha}} \rightarrow 0 (n \rightarrow 0)$$

所以由夹逼准则可得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (n+1)^\alpha - n^\alpha \right] = 0$ .

【思路二】 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (n+1)^\alpha - n^\alpha \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x^\alpha}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha x}{x^\alpha} = \alpha \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} = 0.$

(2) 若曲线  $y = y(x)$  由  $\begin{cases} x = t + \cos t \\ e^y + ty + \sin t = 1 \end{cases}$  确定, 则此曲线在  $t = 0$  对应点处的切线方程为 \_\_\_\_\_.

【参考解析】: 当  $t = 0$  时,  $x = 1$  且  $e^y = 1$ , 即  $y = 0$ , 即求点  $(1, 0)$  处曲线  $y = y(x)$  的切线方程. 在方程组两端对  $t$  求导, 得

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - \sin t \\ e^y \cdot y'(t) + y + ty'(t) + \cos t = 0 \end{cases}$$

将  $t = 0$ ,  $y = 0$  代入方程, 得  $x'(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ , 所以  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{y'(0)}{x'(0)} = -1$ , 所

以切线方程为  $y - 0 = (-1)(x - 1)$ , 即  $y = -x + 1$ .

(3)  $\int \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{(1 + x^2)^{3/2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【参考解析】: 【思路一】典型三角代换结构  $\sqrt{1 + x^2}$ , 令  $x = \tan t$ ,  $dx = \sec^2 t dt$ , 所以

$$F(x) = \int \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{(1 + x^2)^{3/2}} dx = \int \frac{\ln(\sec t + \tan t)}{\sec t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int \ln(\sec t + \tan t) d(\sin t) = \sin t \ln(\sec t + \tan t) - \int \frac{\sin t}{\cos t} dt \\
&= \sin t \ln(\sec t + \tan t) + \ln |\cos t| + C
\end{aligned}$$

由于  $\tan t = \frac{x}{1}$ , 所以  $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ,  $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ,  $\sec t = \sqrt{1+x^2}$ , 代入得原积分为

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) + \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$\text{或 } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\begin{aligned}
\text{【思路二】 } F(x) &= \int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) d\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x}{x^2+1} dx \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C
\end{aligned}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\begin{aligned}
\text{【参考解析】: 【思路一】 } A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x (1 - \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos 2x} (1 - \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \sqrt{(\cos 2x - 1) + 1}}{x^2} + \frac{1 - \sqrt[3]{(\cos 3x - 1) + 1}}{x^2} \right] \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2} \\
&= \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3.
\end{aligned}$$

【思路二】带皮亚诺余项的麦克劳林公式, 有

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), (\cos 2x)^{\frac{1}{2}} = 1 - x^2 + o(x^2)$$

$$(\cos 3x)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{3x^2}{2} + o(x^2)$$

所以  $\cos x (\cos 2x)^{\frac{1}{2}} (\cos 3x)^{\frac{1}{3}} = 1 - 3x^2 + o(x^2)$ , 代入得

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + o(x^2)}{x^2} = 3.$$

**二(本题满分8分)** 设函数  $f(t)$  在  $t \neq 0$  时一阶连续可导, 且  $f(1) = 0$ , 求函数  $f(x^2 - y^2)$ , 使得曲线积分  $\int_L y[2 - f(x^2 - y^2)] dx + xf(x^2 - y^2) dy$  与路径无关, 其中  $L$  为任一不与直线  $y = \pm x$  相交的分段光滑曲线.

**【参考解析】**: 令  $P(x, y) = y[2 - f(x^2 - y^2)]$ ,  $Q(x, y) = xf(x^2 - y^2)$ , 于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} &= 2 - f(x^2 - y^2) + y[-f'(x^2 - y^2)(-2y)] \\ &= 2 - f(x^2 - y^2) + 2y^2 f'(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = f(x^2 - y^2) + 2x^2 f'(x^2 - y^2)$$

由积分与路径无关的条件  $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ , 代入结果整理得

$$(x^2 - y^2)f'(x^2 - y^2) + f(x^2 - y^2) - 1 = 0$$

令  $x^2 - y^2 = u$ , 即  $uf'(u) + f(u) - 1 = 0$ , 分离变量得  $\frac{df(u)}{1 - f(u)} = \frac{1}{u} du$ , 由分离变

量法, 两端积分, 得  $\frac{1}{1 - f(u)} = C_1 u$ , 即  $f(u) = 1 + \frac{C}{u}$ , 由  $f(1) = 0$ , 得  $C = -1$ ,

$$\text{即 } f(x^2 - y^2) = 1 - \frac{1}{x^2 - y^2}.$$

**【注】** 其中微分方程  $uf'(u) + f(u) - 1 = 0$  的通解可以通过改写微分方程为  $[uf(u)]' = 1$ , 得到通解为  $uf(u) = u + C$ .

**三 (本题满分14分)** 设  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 且  $1 \leq f(x) \leq 3$ . 证明:

$$1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{4}{3}.$$

**【参考解析】**: 由柯西不等式, 得

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \geq \left[ \int_0^1 \sqrt{f(x)} \sqrt{\frac{1}{f(x)}} dx \right]^2 = 1$$

又由于  $[f(x)-1][f(x)-3] \leq 0$ , 则  $\frac{[f(x)-1][f(x)-3]}{f(x)} \leq 0$ , 即

$$f(x) + \frac{3}{f(x)} \leq 4, \text{ 所以 } \int_0^1 \left[ f(x) + \frac{3}{f(x)} \right] dx \leq 4. \text{ 由于}$$

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{3}{f(x)} dx \leq \frac{1}{4} \left[ \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 \frac{3}{f(x)} dx \right]^2 \leq 4$$

$$\text{所以 } 1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{4}{3}.$$

**四 (本题满分 12 分)** 计算三重积分  $\iiint_{(V)} (x^2 + y^2) dV$ , 其中  $(V)$  是由

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 \geq 4, x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 9$$

及  $z \geq 0$  所围成的空间图形.

**【参考解析】:** 画图 (关键), 考虑区域的特殊性, 采用容易计算的整体减去容易计算的部分来完成计算, 从而分成三个部分来讨论:

第一部分: 整个大球  $(V_1)$  的积分: 采用球坐标换元, 令

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = 1 + r \cos \varphi \\ 0 &\leq r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

于是有

$$\iiint_{(V_1)} (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^3 r^2 \sin^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{648\pi}{5}$$

第二部分: 小球  $(V_2)$  的积分: 采用球坐标换元, 令

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = 2 + r \cos \varphi \\ 0 &\leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

于是有

$$\iiint_{(V_2)} (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 r^2 \sin^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{256\pi}{15}$$

第三部分: 大球  $z = 0$  下部分的积分  $(V_3)$ , 采用柱坐标:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, y = r \sin \theta, 1 - \sqrt{9 - r^2} \leq z \leq 0 \\ 0 &\leq r \leq 2\sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

$$\text{于是有 } \iiint_{(V_3)} (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} r dr \int_{1-\sqrt{9-r^2}}^0 r^2 dz = \frac{136\pi}{5}$$

所以最终的积分为

$$\begin{aligned} \iiint_V (x^2 + y^2) dV &= \iiint_{(V_1)} - \iiint_{(V_2)} - \iiint_{(V_3)} \\ &= \frac{648}{5}\pi - \frac{256}{15}\pi - \frac{136}{5}\pi = \frac{256}{3}\pi. \end{aligned}$$

**五 (本题满分 14 分)** 设  $f(x, y)$  在区域  $D$  内可微, 且  $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \leq M$ ,

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  是  $D$  内两点, 线段  $AB$  包含在  $D$  内. 证明:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq M |AB|,$$

其中  $|AB|$  表示线段  $AB$  的长度.

**【参考解析】**: 作辅助函数  $\varphi(t) = f[x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)]$ , 显然函数  $\varphi(t)$  在  $[0, 1]$  上可导. 根据拉格朗日中值定理, 存在  $c \in (0, 1)$ , 使得

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(c) = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}(x_2 - x_1) + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}(y_2 - y_1)$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |\varphi(1) - \varphi(0)| &= |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \\ &= \left| \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}(x_2 - x_1) + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}(y_2 - y_1) \right| \\ &\leq \sqrt{\left[ \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \right]^2 + \left[ \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \right]^2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \leq M |AB|. \end{aligned}$$

**六 (本题满分 14 分)** 证明: 对于连续函数  $f(x) > 0$ , 有

$$\ln \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \ln f(x) dx.$$

**【参考解析】**: 由于  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 所以

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k), x_k \in \left[ \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right].$$

由算术几何不等式  $[f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$ . 于是有

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln f(x_k) \leq \ln \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right]$$

根据  $\ln x$  的连续性, 两边取极限, 得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln f(x_k) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right]$$

即  $\ln \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \ln f(x) dx$ .

**七 (本题满分 14 分)** 已知  $\{a_k\}, \{b_k\}$  是正数数列, 且  $b_{k+1} - b_k \geq \delta > 0, k = 1, 2, \dots$ ,  $\delta$

为一常数. 证明: 若级数  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  收敛, 则级数  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)}}{b_{k+1} b_k}$  收敛.

**【参考解析】**: 令  $S_k = \sum_{i=1}^k a_i b_i$ ,  $a_k b_k = S_k - S_{k-1}$ ,

$$S_0 = 0, a_k = \frac{S_k - S_{k-1}}{b_k}, k = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_k &= \sum_{k=1}^N \frac{S_k - S_{k-1}}{b_k} = \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{S_k}{b_k} - \frac{S_k}{b_{k+1}} \right) + \frac{S_N}{b_N} \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{b_{k+1} - b_k}{b_k b_{k+1}} S_k + \frac{S_N}{b_N} \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\delta}{b_k b_{k+1}} S_k \end{aligned}$$

所以  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S_k}{b_k b_{k+1}}$  收敛. 由不等式

$$\sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k}{k} = \frac{S_k}{k}$$

可知  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)}}{b_{k+1} b_k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S_k}{b_k b_{k+1}}$ , 故原不等式成立.