2023 年第六届华教杯全国大学生数学竞赛初赛真题
（数学类专业组）

一、选择题（10 题、3 分/题）

1．已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+b}{x-1}, & x\neq 1\\ a, & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则（　　）．

A．$a=4,b$ 可取任意实数　　B．$b=-3$，a 可取任意实数

C．a，b 都可能取任意实数　　D．$a=4$，$b=-3$

2．$\int e^x(x^5-20x^3)dx=$（　　）．

A．$e^x(x^5-5x^4)+C$　　B．$e^x(x^5+5x^4)+C$

C．$e^x(x^4-4x)+C$　　D．$e^x(x-x^4)+C$

3．$\lim\limits_{\substack{i\to+\infty\\ j\to+\infty}}\sum_{n=1}^{i}\sum_{m=1}^{j}\dfrac{1}{(4n-1)^{2m+1}}=$（　　）．

A．$-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{8}$　　B．$\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{8}$　　C．$2\ln 2+\dfrac{\pi}{8}$　　D．$\ln 2+\dfrac{\pi}{8}$

4．$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{+\infty}^{-\infty}\min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=$（　　）．

A．$-\sqrt{\pi}$　　B．$\sqrt{\pi}$　　C．$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$　　D．$-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

5．设 $y=y(x),\begin{cases}x=2t+|t|\\ y=5t^2+4t|t|\end{cases}$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=$（　　）．

A．0　　B．1　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．2

6．若 $\sum$ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 位于平面 $z=1$ 下方的部分，则 $\iint_{\Sigma}|z|dS=$（　　）．

A. $\frac{\pi}{60}(25\sqrt{5}+1)$　　B. $\frac{\pi}{8}(25\sqrt{5}+1)$　　C. $\frac{\pi}{60}(5\sqrt{5}+1)$　　D. $\frac{\pi}{6}(25\sqrt{5}+1)$

7．若 $f(x)$ 是可导函数，$f(0)=0$，$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=$（　　）.

A. $\frac{1}{n}f^{'}(0)$　　B. $\frac{1}{2n}f^{'}(0)$　　C. $f^{'}(0)$　　D. 0

8．已知 $m,n>0$，且 $m+2n=2$，则 $\frac{m^3+8n^3}{2mn}$ 的最小值为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

9．已知 $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_n=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_{n-1}}$，$n\ge 2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}x_k=$（　　）.

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{2}{\pi}$　　D. $\frac{4}{\pi}$

10．已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&3&0&0\\0&4&6&0\\0&0&7&9\\0&0&0&10\end{bmatrix}$，$B=(2A+E)(A+2E)^{-1}$，则 $|B-2E|$ 中所有元素的代数余子式之和为（　　）.

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

二、填空题（7 题、4 分/题）

1．若 $a>0$，且 $\int_0^a x\sin x dx=b$，则 $\int_{-a}^{a}x(\sin x-\cos x)dx=$________.

2．设函数 $f\left(x\right)$ 的一个原函数为 2023^x-2022，$\int f''\left(x\right)dx=$________.

3．设函数 $f\left(x\right)$ 连续，且满足方程 $\int_0^{2x}xf\left(t\right)dt+2\int_x^0 tf\left(2t\right)dt=2x^3\left(x-1\right)$，

则函数 $f\left(x\right)$ 的驻点为 $x=$________.

4．周期为 2 的函数 $f(x)$ 在一个周期内的表达式为 $f(x)=\begin{cases}1,-1\le x\le 0.5\\x,0.5<x<1\end{cases}$，则它的傅里叶级数在

$x=-3.5$ 处的和为________.

5．级数求和，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{n^2+3n+3}=$________.

6．已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n{}'(x)-u_n(x)=\dfrac{e^x(n-1)x^{n-2}}{n}$，$n$ 为非负整数，且 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$，则求函数项级数的和，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=$________.

7．设 $D:1\le x^2+y^2\le 4$，则 $I=\iint\limits_D (x+1)e^{4-x^2-y^2}dxdy=$________.

三、解答题（3 题、14 分/题）

1．设 $\{a_n\}$ 为非负数列，$S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$，$I_n(m)=\int_0^1\dfrac{(S_n(x))^{m+1}}{(S_{n+1}(x))^m}dx$，若对正数 α，实数 β，有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}a_n=l$，证明：对实数 $m\ge 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}I_n(m)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{a_k}{k+1}$.

2．若 A 是对角线元素为 0 的四阶实对称可逆矩阵，I 为四阶单位矩阵，又

$$B=diag\{0,0,k,l\}\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&k&\\&&&l\end{pmatrix}\text{这里 }(k>0,l>0).$$

（1）试计算 $I+AB$,且指出 A 中元素满足何条件时， $I+AB$为可逆矩阵.

（2）当 $I+AB$为可逆矩阵时，试证明$(I+AB)^{-1}A$为对称矩阵.

3．一桶中盛有 100 公斤水，以每分钟 1 公斤的速率注入浓度为 0.1 的盐水且不停地搅拌，同时以同样的速率排出搅拌后的盐水，那么经过多长时间后，桶内的含盐量达到 5 公斤？(附：ln2≈0.6931)

2023年第六届华教杯全国大学生数学竞赛初赛真题

（数学类专业组）参考答案

一、选择题

1、D　　2、A　　3、A　　4、D　　5、A

6、A　　7、B　　8、B　　9、C　　10、B

二、填空题

1、$2b$　　2、$2023^x(\ln 2023)^2+C$　　3、$\frac{1}{2}$　　4、0.75

5、$\arctan\frac{1}{2}$　　6、$\begin{cases}-\frac{e^x\ln(1-x)}{x},[-1,0)\cup(0,1)\\ 1,\ x=0\end{cases}$　　7、$\pi(e^3-1)$

三、解答题

1、【参考解析】

对 $x\in[0,1]$，注意到 $0\le\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{S_{n+1}(x)}\le 1$，由 $(1-x)^m\ge 1-mx$，有

$$\frac{(S_n(x))^{m+1}}{(S_{n+1}(x))^m}=S_n(x)(1-\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{S_{n+1}(x)})^m\ge S_n(x)(1-\frac{ma_{n+1}x^{n+1}}{S_{n+1}(x)})$$. 于是

$$0\le S_n(x)-\frac{(S_n(x))^{m+1}}{(S_{n+1}(x))^m}\le ma_{n+1}x^{n+1}\frac{S_n(x)}{S_{n+1}(x)}\le ma_{n+1}x^{n+1}$$，从而得

$$0\le\int_0^1 S_n(x)-I_n(m)\le m\cdot\frac{a_{n+1}}{n+2}=m\cdot\frac{(n+1)^\alpha(\ln(n+1)^\beta a_{n+1}}{(n+1)^\alpha(\ln(n+1))^\beta(n+2)}\to 0(n\to\infty).$$

由条件 $\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha(\ln n)^\beta a_n=l$ 知，当 $n\to\infty$ 时，有 $\frac{a_n}{n+1}\sim\frac{l}{n^{\alpha+1}(\ln n)^\beta}$，于是由正项级数得比较判别法及 $\sum\frac{1}{n^{\alpha+1}(\ln n)^\beta}$ 收敛得到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}$ 收敛，其中用到极限

$$\lim_{n\to\infty}n^{1+\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha+1}(\ln n)^\beta}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}(\ln n)^\beta}=0$$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n(m)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)dx=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}$.

2、【参考解析】

（1）若设 $A=(a_{ij})_{4\times4}$，则由 A 的对角线元素为 0 且 $A^T=A$有:

$$I+AB=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}+\left(\begin{array}{cc:cc}0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{12}&0&a_{23}&a_{24}\\ \hdashline a_{13}&a_{23}&0&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&0\end{array}\right)\bullet\left(\begin{array}{cc:cc}0&&&\\&0&&\\ \hdashline &&k&\\&&&l\end{array}\right)$$

（将后面矩阵 A, B 皆按虚线分块再相乘）

$$=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&ka_{13}&la_{14}\\0&0&ka_{23}&la_{24}\\0&0&0&la_{34}\\0&0&ka_{34}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&ka_{13}&la_{14}\\0&1&ka_{23}&la_{24}\\0&0&1&la_{34}\\0&0&ka_{34}&1\end{pmatrix}$$

由　分块矩阵行列式公式有 $|I+AB|=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&la_{34}\\ka_{34}&1\end{vmatrix}=1-kla_{34}^2$,

故　当 $a_{34}\neq\dfrac{1}{\sqrt{kl}}$ 时， $I+AB$为可逆矩阵.

（2）注意到下面式子运算：

$$[(I+AB)^{-1}A]^T=A^T[(I+AB)^{-1}]^T=A[(I+AB)^T]^{-1}=A(I+B^TA^{-1})^{-1}$$

$$=A(I+BA)^{-1}=[(I+BA)A^{-1}]^{-1}=(A^{-1}+B)^{-1}=[A^{-1}(I+AB)]^{-1}$$

$$=(I+AB)^{-1}A$$

故 $(I+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵.

3、【参考解析】

设 t 时刻桶内的含盐量为 y(t)，则此时溶液的浓度为 $\dfrac{y(t)}{100}=0.01y(t)$，那么在时间间隔[t,t+dt]内，进盐量为 $0.1\times1\times dt=0.1dt$，出盐量为 $0.01y\times1\times dt=0.01ydt$，从而含盐量的微元为 $dy=0.1dt-0.01ydt$ 或 $\dfrac{dy}{dt}+0.01y=0.1$，该方程的初始条件为 $y(0)=0$，求解该初值问题，得 $y=10(1-e^{-0.01t})$。将 $y=5$ 代入，可得 $t=100\ln2\approx69.31$ 分钟.