华教杯全国大学生数学竞赛真题

（专科生组）

（扫描上方二维码即可报名）

一、选择题

1. 【2019 年真题】设函数 $f(x)=\begin{cases}2+x^2, & x>1\\ e^x, & x\le 1\end{cases}$，则 $f(f(f(0)))$ 的值为（　　）

A. $2+e^2$　　B. 3　　C. 11　　D. e^e

【答案】A

解：由函数 $f(x)=\begin{cases}2+x^2, & x>1\\ e^x, & x\le 1\end{cases}$，可得 $f(0)=e^0=1$，$f(f(0))=f(1)=e^1=e$，

$f(f(f(0)))=f(e)=2+e^2$，故选 A 。

2. 【2019 年真题】函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}+3\cos\dfrac{x}{3}$ 的最小正周期为（　　）

A. 4π　　B. 6π　　C. 8π　　D. 12π

【答案】D

解：设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，则 $f(x+T)=f(x)$，

有 $f(x+T)=\dfrac{1}{2}\sin(\dfrac{x}{2}+\dfrac{T}{2})+3\cos(\dfrac{x}{3}+\dfrac{T}{3})=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}+3\cos\dfrac{x}{3}$，

所以$\begin{cases}\dfrac{T}{2}=2k_1\pi,k_1\in z\\ \dfrac{T}{3}=2k_2\pi,k_2\in z\end{cases}$，即：$\begin{cases}T=4k_1\pi\\ T=6k_2\pi\end{cases}$

取最小公倍数，即 $k_1=3,k_2=2$

所以$T=12\pi$，故选 D 。

3. 【2019 年真题】函数 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln x$ 极限为（　　）

$A.1$　　$B.+\infty$　　$C.0$　　$D.\dfrac{1}{2}$

【答案】C

解：由洛必达法则计算可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$，故选 C 。

4. 【2019 年真题】由追敛性求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

【答案】C

解：一共有 $(n+1)^2-n^2+1=2(n+1)$项相加，通过放缩法可得：

$$2=\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2}}=\frac{2(n+1)}{n}$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)}{n}=2$，由追敛性可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ =2 ,故选 C 。

5. 【2019 年真题】$\lim\limits_{x\to2}(2x-2)=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

【答案】B

解：直接代入可得 $\lim\limits_{x\to2}(2x-2)=2\times2-2=2$,故选 B 。

6. 【2020 年真题】著名的斐波那契数列满足 $x_1=x_2=1$，$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】D

解：由 $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ 可得 $\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}=1+\frac{x_n}{x_{n+1}}$，假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=A$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ 可得：

$A=1+\frac{1}{A}$，即 $A^2-A-1=0$ 由于 $x_n>0$，因此 $A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,故选 D 。

7. 【2020 年真题】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，$3f(x)-4f(4x)+f(16x)=3x(x\in R)$，则 $f(x)=$（　　）

A. x　　B. x^2　　C. $2x$　　D. $2x^2$

【答案】A

解：对等式两边同时求导可得 $3f'(x)-16f'(4x)+16f'(16x)=3$，

代入 $x=0$ 可得 $f'(0)=1$，由导数的定义 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$，

因此 $f(x)=x+o(x)$，代入原式得 $o(x)=0$，即 $f(x)=x$，故选 A 。

8. 【2022 年真题】曲线 $x=\frac{2t+t^2}{1+t^3}$，$y=\frac{2t-t^2}{1+t^3}$ 在 $t=\infty$ 处的法线方程为（　　）

A. $y=-x$　　B. $y=x$　　C. $y=-2x$　　D. $y=2x$

【答案】B

解：由参数方程求导法则可得：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(2-2t)(1+t^3)-(2t-t^2)\cdot3t^2}{(2+2t)(1+t^3)-(2t+t^2)\cdot3t^2}$

代入 $t=\infty$ 得到 $x=0,y=0,\frac{dy}{dx}=-1$，也就是切斜斜率为-1，因此法线斜率为 1，所以法线方程为 $y=x$，故选 B 。

9. 【2022 年真题】已知 $y=f(\frac{3x-2}{3x+2})$，$f'(x)=\arcsin x^2$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$（　　）

A. $\frac{4}{9}\arcsin\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}$　　C. $\frac{12}{25}\arcsin\frac{1}{25}$　　D. $\frac{2}{5}\arcsin\frac{2}{5}$

【答案】C

解：由复合函数求导法则可得 $\frac{dy}{dx}=f'(\frac{3x-2}{3x+2})\cdot\frac{3\cdot(3x+2)-(3x-2)\cdot 3}{(3x+2)^2}$

当 $x=1$ 时，$f'(\frac{3x-2}{3x+2})=f'(\frac{1}{5})=\arcsin\frac{1}{25}$，因此 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\frac{12}{25}\arcsin\frac{1}{25}$，故选 C。

10. 【2022 年真题】由曲线 $x=t-t^3$，$y=1-t^4$ 所围图形的面积为（　　）

A. $\frac{16}{35}$　　B. $\frac{3}{7}$　　C. $\frac{2}{7}$　　D. $\frac{17}{35}$

【答案】A

解：$S=\int_{-1}^{1}(1-t^4)(1-3t^2)dt=\int_{-1}^{1}(1-t^4-3t^2+3t^6)dt=\left.\left(t-\frac{t^5}{5}-t^3+\frac{3t^7}{7}\right)\right|_{-1}^{1}=\frac{16}{35}$，故选 A。

二、填空题

1. 【2019 年真题】$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{3n^2+2n+3}=$__________。

【答案】$\frac{2}{3}$

解：上下最高次项次数相同，抓大头法可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{3n^2+2n+3}=\frac{2}{3}$。

2. 【2019 年真题】$y=2x^2+x-3$ 在点 $(1,0)$ 处的法线方程为__________。

【答案】$y=-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$

解：切线的斜率 $y'=4x+1, y'|_{x=1}=5$，因此法线的斜率为 $-\frac{1}{y'}=-\frac{1}{5}$，法线方程为：$y=-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$。

3. 【2019 年真题】若 f 在区间 $[a,b]$ 上只有有限个间断点的有界函数，则 f 在 $[a,b]$ 上__________。

【答案】可积

解：由黎曼可积定理可得。

4. 【2020 年真题】已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$

的收敛域为__________。

【答案】(1，5]

解：因为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 的收敛域以-2 为中心，收敛域为(-4，0]，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 相当于把 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 中心右移 5 个单位，因为收敛域为(1，5]。

5．【2020 年真题】设 $f(x,y)=\sin(xy)+(y-1)\arccos\dfrac{x-y}{x+y}$，则 $f_x(0,1)=$__________。

【答案】1

解：对 x 求偏导，把 y 看作常数，因此先代入 $y=1$，求得 $f(x,1)=\sin(xy)$

因此 $f_x(x,1)=\cos(xy)\cdot y$，再代入 $x=0$ 可得 $f_x(0,1)=\cos(0)\cdot 1=1$。

6．【2022 年真题】定积分 $5\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x\cos^2 x}dx=$__________。

【答案】4

解：原式=$5\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x\cos^2 x}dx$

$$=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^{\frac{3}{2}}xdx-5\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sin^{\frac{3}{2}}xdx$$

$$=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}xd\sin x-5\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}xd\sin x$$

$$=2[\sin^{\frac{5}{2}}x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2[\sin^{\frac{5}{2}}x]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=4$$

7．【2022 年真题】函数 $f(x)=\ln(2+2x+x^2)$ 按照二项式 $x+1$ 域的正整数幂展开为__________。

【答案】$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x+1)^{2n}}{n}$

解：由麦克劳林级数得

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln[1+(1+x)^2] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+1)^{2n}}{n}
\end{aligned}
$$

三、解答题

1．【2022 年真题】已知一模具底面 D 是封闭曲线 $r=\dfrac{2022t}{1+t^2}, \varphi=\dfrac{\pi t}{1+t}$ 所围成平面图形，模具的高等于 $3cm$，求该模具的体积（单位为 cm^3）。

【答案】解：$\dfrac{3(2022)^2\pi}{8}\left(\arctan 2+\dfrac{4}{5}\right)$

$$
\begin{aligned}
S_D &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi \\
&= \frac{(2022)^2\pi}{2}\int_0^{-2}\frac{t^2}{(1+t^2)^2(1+t)^2}dt \\
&= -\frac{(2022)^2\pi}{8}\left[\frac{1}{1+t^2}+\arctan t+\frac{1}{(1+t)^2}\right]_0^{-2} \\
&= \frac{(2022)^2\pi}{8}\left(\arctan 2+\frac{4}{5}\right)
\end{aligned}
$$

则

$$
V=3S_D=\frac{3(2022)^2\pi}{8}\left(\arctan 2+\frac{4}{5}\right)
$$

2．【2020 年真题】函数 $g(p)=p\int_1^{+\infty}\dfrac{x-[x]}{x^{p+1}}dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是否连续？

【答案】解：任取 $p_0\in(0,+\infty)$，记 $I=[\dfrac{p_0}{2}, p_0+1]$，对每个 $p\in I$，$g(p)=p\int_1^{+\infty}\dfrac{x-[x]}{x^{p+1}}dx$ 右边的无穷极限积分收敛，令 $f(x, p)=p\dfrac{x-[x]}{x^{p+1}}$。

（i）任取 $p\in I$，则由 $0\le f(x, p)=p\dfrac{x-[x]}{x^{p+1}}\le\dfrac{p}{x^{p+1}}\le\dfrac{p_0+1}{x^{\frac{p_0}{2}+1}}$ 和 $\int_1^{+\infty}\dfrac{p_0+1}{x^{\frac{p_0}{2}+1}}dx$ 收敛得到 $p\int_1^{+\infty}\dfrac{p_0+1}{x^{\frac{p_0}{2}+1}}dx$ 关于 p 在 I 上一致收敛。

（ii）任取闭子区间 $[A, B]\subset[1,+\infty)$，则对 $(x, p)\in[A, B]\times I$，由

$$\left|f(x, p)-f(x, p_0)\right| \le \left|\frac{p}{x^{p+1}}-\frac{p_0}{x^{p_0+1}}\right| = |p-p_0|\cdot\frac{1-\xi\ln x}{x^{\xi+1}} \le (1+(p_0+1)\ln B)|p-p_0|$$

得到 $p\to p_0$ 时，$f(x, p)$ 关于 x 在 $[1,+\infty)$ 上内闭一致收敛到 $f(x, p_0)$，其中 ξ 介于 p_0 与 p 之间。

（iii）$\int_1^{+\infty} f(x, p_0)dx = p_0\int_1^{+\infty}\frac{x-[x]}{x^{p_0+1}}dx$ 收敛．对任意的 $p_0\in(0,+\infty)$ 有

$\lim\limits_{p\to p_0} g(p) = \lim\limits_{p\to p_0}\int_1^{+\infty} f(x, p)dx = \int_1^{+\infty} f(x, p_0)dx = g(p_0)$．由 p_0 的任意性，$g(p)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上连续。

3．【2020 年真题】对于正整数 n，设数列 $\left\{p_n=\sqrt{n+c}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx\right\}$，证明：当 $-1\le c\le\frac{1}{2}$ 时，$\{p_n\}$ 为严格单调增加数列。

【答案】证明：由 $\sqrt{\frac{\pi(4n-1)}{2n(4n+1)}}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx<\sqrt{\frac{\pi(4n+5)}{2(n+1)(4n+3)}}$ 得

$$\sqrt{\frac{\pi(n+c)(4n-1)}{2n(4n+1)}}<p_n=\sqrt{n+c}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx<\sqrt{\frac{\pi(n+c)(4n+5)}{2(n+1)(4n+3)}} \qquad (1)$$

$$\sqrt{\frac{\pi(n+1+c)(4n+3)}{2(n+1)(4n+5)}}<p_{n+1}=\sqrt{n+1+c}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1} xdx<\sqrt{\frac{\pi(n+1+c)(4n+9)}{2(n+2)(4n+7)}} \qquad (2)$$

由（1）（2）得，若

$\sqrt{n+c}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx<\sqrt{\frac{\pi(n+c)(4n+5)}{2(n+1)(4n+3)}}\le\sqrt{\frac{\pi(n+1+c)(4n+3)}{2(n+1)(4n+5)}}<\sqrt{n+1+c}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1} xdx$ 成立，

即 $(n+c)(4n+5)^2\le(n+1+c)(4n+3)^2$

解得 $c\le\frac{(4n+3)^2}{(4n+5)^2-(4n+3)^2}-n=\frac{(4n+3)^2}{16(n+1)}-n=\frac{8n+9}{16(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{16(n+1)}$，因为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{16(n+1)}$ 严格单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{16(n+1)})=\frac{1}{2}$．另外，对于正整数 n，必须 $\sqrt{n+c}\ge 0$，即 $c\ge -1$，所以当 $-1\le c\le\frac{1}{2}$ 时，对于所有的正整数 n，$p_n<p_{n+1}$，即 $\{p_n\}$ 为严格单调增加数列。

（扫描上方二维码即可报名）