

2017 年第八届全国大学生数学竞赛决赛

(数学一、二年级) 参考答案

一、填空题:

(1) 【参考解答】: 0.

因为该多项式无 3 次项, 故 4 个根之和为 0. 行列式的每一列加到第一列即可得到行列式的值为 0.

(2) 【参考解答】: $a > 27$ 或 $a < -37$.

记 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + a$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 24x^2 - 60x + 72 = 12(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \\ &= 12(x-1)(x-3)(x+2) \end{aligned}$$

$f(x)$ 在 -2 和 3 取得极小值 $-152 + a$ 和 $-27 + a$. $f(x)$ 在 1 取得极大值 $37 + a$. 因此, 当且仅当 $a > 27$ 或 $a < -37$ 时方程有虚根.

(3) 【参考解答】: $-\frac{\pi}{2}a^3$.

令曲面 $S_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2 \\ z = 0 \end{cases}$ 取下侧, 则 $S_1 \cup S$ 为闭下半球面的内侧. 设其内部区域为 Ω , 令 D 为 xOy

平面上的圆域 $x^2 + y^2 \leq a^2$, 则利用高斯公式, 得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \left\{ \iint_{S \cup S_1} - \iint_{S_1} \left[ax \, dy \, dz + (z+a)^2 \, dx \, dy \right] \right\} \\ &= \frac{1}{a} \left\{ - \iiint_{\Omega} (3a + 2z) \, dV + \iint_D a^2 \, dx \, dy \right\} \\ &= \frac{1}{a} \left\{ -2\pi a^4 - 2 \iiint_{\Omega} z \, dV + \pi a^4 \right\} \\ &= -\pi a^3 - \frac{2}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r \, dr \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 z \, dz = -\frac{\pi}{2} a^3. \end{aligned}$$

(4) 【参考解答】: $-\frac{1}{2}$.

$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Q^T$, Q 可以表示为 $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$, 所以 $a_{21} = -\sin t \cos t$, 立即得到结果.

第二题: 【参考解答】: 交线为抛物线或椭圆.

(1) 如果平面 P 平行于 z -轴, 则相交曲线 $C = \Gamma \cap P$ 可以经过以 z -为旋转轴的旋转, 使得 P 平行于

yz - 平面, C 的形式不变. 所以可不妨设 P 的方程为 $x = c$, 交线 C 的方程为

$$z = \frac{1}{2}(c^2 + y^2).$$

将 C 投影到 yz - 平面上, 得到抛物线 $z - \frac{c^2}{2} = \frac{1}{2}y^2$. 由于平面 P 平行于 yz - 平面, 故交线为抛物线.

(2) 如果平面 P 不平行于 z - 轴, 设 P 的方程为 $z = ax + by + c$. 代入 Γ 的方程 $z = \frac{1}{2}(c^2 + y^2)$, 得

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 + 2c := R^2$$

将 $C = \Gamma \cap P$ 垂直投影到 xy - 平面, 得到圆周

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

令 Q 是以这个圆为底的圆柱, 则 C 也是圆柱 Q 与平面 P 的交线. 在圆柱 Q 中从上或从下放置半径为 R 的球体, 它与平面 P 相切于 F_1, F_2 , 与圆柱 Q 相交于圆 D_1, D_2 . 对 $C = Q \cap P$ 上的任意一点 A , 过 A 点的圆柱母线交圆 D_1 于 B_1 , 交圆 D_2 于 B_2 , 则线段 B_1B_2 为定长. 这时, 由于球的切线长相等, 得到 $|AF_1| + |AF_2| = |AB_1| + |AB_2| = |B_1B_2|$ 为常数, 故曲线 C 为椭圆.

第三题: 【参考证明】: 设 $A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q, B = Q^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P^{-1}$. 其中 P, Q 为可逆方阵, B_1 为 r 阶方阵, 则有

$$AB = P \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}, BA = Q^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & O \\ B_3 & O \end{pmatrix} Q, ABA = P \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$$

由 $\text{rank } ABA = \text{rank } B_1 = \text{rank } B$ 可得, 存在矩阵 X, Y 使得 $B_2 = B_1X, B_3 = YB_1$, 从而有

$$AB = P \begin{pmatrix} I & -X \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$BA = Q^{-1} \begin{pmatrix} I & O \\ Y & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ -Y & I \end{pmatrix} Q$$

因此, AB 与 BA 相似.

第四题: 【参考证明】: 由于 $f \in \mathcal{S}$, 因此存在 $M_1 > 0$ 使得

$$|2\pi i x f(x)| \leq \frac{M_1}{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

这样 $\int_{\mathbb{R}} (-2\pi i y) f(y) e^{-2\pi i x y} dy$ 关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致收敛, 从而可得

$$\frac{d\hat{f}(x)}{dx} = \int_{\mathbb{R}} -2\pi i y f(y) e^{-2\pi i x y} dy. \quad (2)$$

同理可得

$$\frac{d^n \hat{f}(x)}{dx^n} = \int_R (-2\pi iy)^n f(y) e^{-2\pi ixy} dy. \quad (3)$$

利用分部积分法可得

$$\left(f^{(n)} \right)^\wedge(x) = (2\pi ix)^n \hat{f}(x), \forall n \geq 0 \quad (4)$$

结合(3)(4)并利用 $f \in \mathcal{S}$, 可得对任何 $m, k \geq 0$, 有

$$x^m \frac{d^k \hat{f}(x)}{dx^k} = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_R \frac{d^m \left((-2\pi iy)^k f(y) \right)}{dy^m} e^{-2\pi ixy} dy$$

在 R 上有界. 从而 $\hat{f} \in \mathcal{S}$. 于是 $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy$ 收敛,

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A \hat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy &= \int_{-A}^A dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{2\pi i(x-t)y} dt \\ &= \int_{-A}^A dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) e^{2\pi ity} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-A}^A f(x-t) e^{2\pi ity} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{\sin(2\pi At)}{\pi t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t) - f(x)}{\pi t} \sin(2\pi At) dt + f(x) \quad (5) \end{aligned}$$

由于 $f \in \mathcal{S}$ 易得积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f(x-t) - f(x)}{\pi t} \right| dt$ 收敛, 从而由黎曼引理可得

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t) - f(x)}{\pi t} \sin(2\pi At) dt = 0. \quad (6)$$

组合(5)(6)即得结论成立.

第五题: 【参考解答】: 1. 先证

$$\left(\frac{k}{n} \right)^n < \left(\frac{k+1}{n+1} \right)^{n+1}, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

由均值不等式, 有 $k+1 < \frac{k}{n} + \dots + \frac{k}{n} + 1 > (n+1)^{n+1} \sqrt[n]{\left(\frac{k}{n} \right)^n}$, 因此, 有

$$\left(\frac{k}{n} \right)^n < \left(\frac{k+1}{n+1} \right)^{n+1}, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

于是

$$S_{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\ > \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n > S_n$$

即 S_n 单调递增. 另一方面, $\frac{S_n}{n} < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, 故有 $S_n < \frac{n}{n+1} < 1$, 即 S_n 有界. 所以 S_n 单调递增有上界, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在.

2. 当 $x \neq 0$ 时, $e^x > 1+x$, 则 $\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n < e^{n \cdot (-k/n)} = e^{-k}$, 从而有

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n < \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k} < \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} = \frac{1}{e-1}$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \leq \frac{1}{e-1}$.

另外, 对任意正整数 $n > m$, 则 $S_n \geq \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$, 令 $n \rightarrow \infty$, 则有

$$S \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m e^{-k} \geq \frac{1}{e-1}.$$

所以可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{1}{e-1}$.

第六题: 【参考证明】: 令 $y(x, y_0)$ 为方程满足初值条件 $y(0, y_0) = y_0$ 的解. 由常微分方程解的存在唯一性定理, 这样的解局部存在并且唯一. 首先证明:

引理: 对任意 $r \in R$ 函数 $y(x, r)$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上有定义, 且对任意 $r \geq 2$ 有

$$y(x, r) \leq r \text{ 和 } y(x, -r) \geq -r.$$

引理的证明: 反证法. 设存在 $x_0 \in [0, 2\pi]$, $r \geq 2$ 使得 $y(x_0, r) > r$, 则 $x_0 > 0$. 记

$$t = \inf \{s \in [0, x_0] \mid y(x, r) \geq r, \forall x \in [s, x_0]\}$$

则 $y(t, r) = r, y'_x(t, r) \geq 0$.

但 $y'_x(t, r) = -y(t, r)^3 + \sin t < 0$, 矛盾. 同理可证, 对于任意的 $x \in [0, 2\pi], r \geq 2$ 有

$$y(x, -r) \geq -r.$$

所以引理成立.

考虑函数 $f(r) = y(2\pi, r), r \in R$, 则连续函数 f 满足 $f([-2, 2]) \subset [-2, 2]$, 故存在 $y_0 \in [-2, 2]$, 使得

$$f(y_0) = y_0.$$

对恒等式

$$\frac{dy(x, r)}{dx} = -y(x, r)^3 + \sin x.$$

两边对 r 求导, 得到

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y(x, r)}{\partial r} \right) = -3y(x, r)^2 \frac{\partial y(x, r)}{\partial r},$$

故有 $\frac{\partial y(x, r)}{\partial r} = e^{-3 \int_0^x y(s, r)^2 ds}$ 于是有

$$f'(r) = e^{-3 \int_0^{2\pi} y(s, r)^2 ds} < 1.$$

所以 f 至多只有一个不动点.

唯一性的另一种证明方法: 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程的两个满足边值条件的解. 由存在唯一性定理,

$$y_1(x) \neq y_2(x), \forall x \in [0, 2\pi]$$

不妨设 $y_1(x) > y_2(x), \forall x \in [0, 2\pi]$.

令 $y = y_1 - y_2 > 0$, 则 $y(0) = y(2\pi)$,

$$\dot{y} = -(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) y < 0 \Rightarrow y(0) < y(2\pi).$$

矛盾.