2019年3月30日决赛试题标准答案

第十届全国大学生数学竞赛决赛试题参考答案及评分标准
(非数学类，2019年3月30日)

一、填空题(本题满分30分，每小题6分)

1. 设函数 $y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-b}{x^2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a+b$ 的值为________.

答案：$a+b=-3$

2、设 $a>0$，则 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=$____________.　　　答案：$I=\dfrac{\pi\ln a}{2a}$

3. 设曲线 L 是空间区域 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$ 的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 的交线，则 $\left|\oint_L (z^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\mathrm{d}z\right|=$________.　　答案：$I=\dfrac{9}{2}$

4. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-y,z)=0$ 确定，其中 $F(u,v)$ 具有连续二阶偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________.　　　**答案：** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{F_2^2F_{11}-2F_1F_2F_{12}+F_1^2F_{22}}{F_2^3}$

5. 已知二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^n\left(x_i-\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2$，则 f 的规范形为_______.

答案：$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2$

二、设 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内三阶连续可导，满足 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=-1$；又设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1\in(0,1)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$，严格单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n^2$.

【解】由于 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内三阶可导，$f(x)$ 在 $x=0$ 处有 Taylor 公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3),$$

又 $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1$，所以

$$f(x)=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3).\text{ ----------4 分}\qquad ①$$

由于 $a_1\in(0,1)$，数列 $\{a_n\}$ 严格单调且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则 $a_n>0$，且 $\left\{\dfrac{1}{a_n^2}\right\}$ 为严格单调增加趋于正无穷的数列，注意到 $a_{n+1}=f(a_n)$，故由 Stolz 定理及①式，有

$$\lim_{n\to\infty} na_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}}$$ ------------8 分

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2a_{n+1}^2}{a_n^2-a_{n+1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2f^2(a_n)}{a_n^2-f^2(a_n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2\left(a_n-\frac{1}{6}a_n^3+o(a_n^3)\right)^2}{a_n^2-\left(a_n-\frac{1}{6}a_n^3+o(a_n^3)\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^4-\frac{1}{3}a_n^6+\frac{1}{36}a_n^8+o(a_n^4)}{\frac{1}{3}a_n^4-\frac{1}{36}a_n^6+o(a_n^4)}=3.$$

-----------12 分

三、设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有连续导数，且$|f(x)|\le 1$，$f'(x)>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

证明：对于$0<\alpha<\beta$，成立$\lim\limits_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=0$.

【证明】 令$y=x-\frac{1}{nx}$，则$y'=1+\frac{1}{nx^2}>0$．故函数$y(x)$在$[\alpha,\beta]$上严格单调增加. 记$y(x)$的反函数为$x(y)$，则$x(y)$定义在$\left[\alpha-\frac{1}{n\alpha},\beta-\frac{1}{n\beta}\right]$上，且

$$x'(y)=\frac{1}{y'(x)}=\frac{1}{1+\frac{1}{nx^2}}>0.$$ ----------4 分

于是

$$\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_{\alpha-\frac{1}{n\alpha}}^{\beta-\frac{1}{n\beta}}f'(ny)x'(y)\,\mathrm{d}y.$$

根据积分中值定理，存在$\xi_n\in\left[\alpha-\frac{1}{n\alpha},\beta-\frac{1}{n\beta}\right]$，使得

$$\int_{\alpha-\frac{1}{n\alpha}}^{\beta-\frac{1}{n\beta}}f'(ny)x'(y)\,\mathrm{d}y=x'(\xi_n)\int_{\alpha-\frac{1}{n\alpha}}^{\beta-\frac{1}{n\beta}}f'(ny)\,\mathrm{d}y=\frac{x'(\xi_n)}{n}\left[f\left(n\beta-\frac{1}{\beta}\right)-f\left(n\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\right].$$

------------8 分

因此

$$\left|\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right|\le\frac{|x'(\xi_n)|}{n}\left[\left|f\left(n\beta-\frac{1}{\beta}\right)\right|+\left|f\left(n\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\right|\right]\le\frac{2|x'(\xi_n)|}{n}.$$

注意到

$$0 < x'(\xi_n) = \frac{1}{1+\frac{1}{n\xi_n^2}} < 1,$$

则

$$\left|\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)dx\right| \le \frac{2}{n},$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)dx = 0.$$

--------------12 分

四、计算三重积分：$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$，其中

$\Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1.$.

【解】 采用“先二后一”法，并利用对称性，得

$$I = 2\int_0^1 dz\iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$$，其中 $D: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x$. ----------4 分

用极坐标计算二重积分，得

$$I = 2\int_0^1 dz\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sec\theta}\frac{rdr}{(1+r^2+z^2)^2} = \int_0^1 dz\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\right)d\theta$$

交换积分次序，得

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^1\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\right)dz = \frac{\pi^2}{16}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^1\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}dz$$ --------8 分

作变量代换：$z=\tan t$，并利用对称性，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^1\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 t}{\sec^2\theta+\sec^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta+\sec^2 t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta+\sec^2 t}{\sec^2\theta+\sec^2 t}dt = \frac{1}{2}\times\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32}$$

所以 $I = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32}$. ------------12 分

五、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdots\cdots\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$ 之和.

【解】 级数通项 $a_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdots\cdots\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+2}$，令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}x^{2n+2}\text{，}\qquad \text{------------ 4 分}$$

则收敛区间为 $(-1,1)$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2\left[f(\frac{1}{\sqrt{2}})-\frac{1}{2}\right]$，

$f'(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}=2g(x)$，其中 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$．因为

$$g'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}2nx^{2n-1}$$

$$=1+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}\right)=1+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xg(x)]\text{，}$$

所以 $g(x)$ 满足 $g(0)=0$，$g'(x)-\frac{x}{1-x^2}g(x)=\frac{1}{1-x^2}$. -------------8 分

解这个一阶线性方程，得

$$g(x)=e^{\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{1}{1-x^2}e^{-\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}\text{，}$$

由 $g(0)=0$ 得 $C=0$，故 $g(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，所以 $f(x)=(\arcsin x)^2$，$f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{\pi^2}{16}$，

且

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2-8}{8}.\qquad \text{------------12 分}$$

六、设 A 是 n 阶幂零矩阵，即满足 $A^2=O$．证明：若 A 的秩为 r，且 $1\le r<\frac{n}{2}$，则存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}O & I_r & O\\ O & O & O\end{pmatrix}$，其中 I_r 为 r 阶单位矩阵.

【证】 存在 n 阶可逆矩阵 H,Q，使得 $A=H\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$，因为 $A^2=O$，所以有

$$A^2=H\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}QH\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q=O\text{，}\qquad \text{--------4 分}$$

对 QH 作相应分块为 $QH=\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}$，则有

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} QH \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix} = O.$$

因此$R_{11} = O$，　　　　　　-----------6 分

而$Q = \begin{pmatrix} O & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} H^{-1}$，所以

$$A = H \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = H \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} H^{-1} = H \begin{pmatrix} O & R_{12} \\ O & O \end{pmatrix} H^{-1}$$

显然，$r(A) = r(R_{12}) = r$，所以R_{12}为行满秩矩阵. ----------8 分

因为$r < \frac{n}{2}$，所以存在可逆矩阵S_1, S_2，使得$S_1 R_{12} S_2 = (I_r, O)$，---------10 分

令$P = H \begin{pmatrix} S_1^{-1} & O \\ O & S_2 \end{pmatrix}$，则有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} S_1 & O \\ O & S_2^{-1} \end{pmatrix} H^{-1}AH \begin{pmatrix} S_1^{-1} & O \\ O & S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & I_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$ --------11 分

七、设$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$为单调递减的正实数列，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$为一实数列，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n u_n$收敛，证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)u_n = 0.$$

【证】由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n u_n$收敛，所以对任意给定$\varepsilon > 0$，存在自然数$N_1$，使得当$n > N_1$时，有

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=N_1}^{n} a_k u_k < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

因为$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$单调递减的正数列，所以

$$0 < \frac{1}{u_{N_1}} \le \frac{1}{u_{N_1+1}} \le \cdots \le \frac{1}{u_n} \qquad (2)$$ ---------2 分

注意到当$m < n$时，有

$$\sum_{k=m}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k = A_n b_n - A_{m-1}b_m + \sum_{k=m}^{n-1}(b_k - b_{k+1})A_k,$$

令$A_0 = 0$，$A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$（$k = 1, 2, \cdots, n$），得到

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})A_k \qquad \text{----------4 分}$$

下面证明：对于任意自然数n， 如果$\{a_n\},\{b_n\}$满足

$$b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0,\ m \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le M$$

则有

$$b_1 m \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = b_1 M$$

事实上， $m \le A_k \le M$，$b_k - b_{k+1} \ge 0$，即得到

$$mb_1 = mb_n + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})m \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le Mb_n + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})M = Mb_1 \qquad \text{------6 分}$$

利用（2）， 令 $b_1 = \dfrac{1}{u_n}, b_2 = \dfrac{1}{u_{n-1}}, \cdots$，可以得到$-\dfrac{\varepsilon}{2}u_n^{-1} < \sum\limits_{k=N_1}^{n} a_k < \dfrac{\varepsilon}{2}u_n^{-1}$，即

$$\left|\sum_{k=N_1}^{n} a_k u_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{-------8 分}$$

又由$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$知，存在自然数$N_2$， 使得$n > N_2$

$$\left|(a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1 - 1})u_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{---------10 分}$$

取$N = \max\{N_1, N_2\}$，则当$n > N$时，有

$$\left|(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)u_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)u_n = 0$.　　　　　　------------11 分