

全国大学生数学竞赛初赛模拟试题

(数学专业类)

一、(本题15分) 设二次曲线 $F(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - 4y + 1 = 0$ 的切线与直线 $x + 2y = 0$ 平行. 求切线的方程。

二、(本题15分) 设 P 是一个多项式, 且对于任意的 $x \in R, P(x) - P'(x) > 0$. 证明:
对于任意的 $x \in R, P(x) > 0$.

三、(本题20分) 设 A, B 均为 n 阶复方阵, 它们的共轭转置分别为 A^*, B^* . 若
 $AB - BA = A^* - B^*$, 求 $A - B$ 的秩.

四、(本题15分) 设 $A = (a_{ij})$ 为 $n(n \geq 2)$ 阶实方阵, 其 n 个特征值皆是实数.

- (1) 证明: A 为严格对角占优矩阵 (即 $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ 对 $i = 1, 2, \dots, n$ 均成立) 的必要条件是 A 的所有特征值皆为正数.
- (2) 请给出一个不是严格对角占优但其所有特征值又皆是正数的实对称阵例子.

五、(本题15分) 设实值函数 f 在 R 上任意阶可导, 且 $f(0) = f'(0) = \dots =$

$$f^{(2023)}(0) = 0, \quad f^{(2024)}(0) = 1, \quad \text{证明: 函数 } g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x^{2024}}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2024!}, & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } R \text{ 上也任意阶可}$$

导.

六、(本题20分) 设函数 f 是 $[0,1]$ 上取值为正的二阶连续可导的函数, 且

$f'(0)=0, f''(0)>0$. 证明: 存在正整数列 $\{m_k\}$ 和 $\{n_k\}$, $m_k < n_k$, m_k, n_k 互素, 使

得 $\mu_k \triangleq n_k f\left(\frac{m_k}{n_k}\right)$ 满足.

(1) μ_k 单调增加且发散于无穷;

(2) 对于任意的 $k_1, k_2 \in N$, $\frac{\mu_{k_1}}{\mu_{k_2}} \notin N$.

注: 模拟试题答案解析请参考全国大学生数学竞赛命题组编、科学出版社出版的《全国大学生数学竞赛真题解析与获奖名单(第11-15届)》。