华教杯全国大学生数学竞赛训练题

（非数学类专业组、均为往届真题）

一、选择题（共 10 题，3 分/题）

1、 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \ln(1+t^2)dt,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}(\sin t)^2dt$，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是

(A) γ,α,β.　(B) α,γ,β.　(C) β,α,γ.　(D) β,γ,α.

2、 设 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''+2y'-4y=e^{\cos x}$ 的解，满足初始条件 $f'(x_0)$=0，$f(x_0)<0$，则下列结论是正确的是

（A） $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值　　（B） $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值

（C） $f(x)$ 在 x_0 处不会取得极值　　（D） $f(x)$ 在 x_0 处可能取得极值

3、 设 $I_1=\int_0^1\ln(1+\cos x)dx,I_2=\int_0^1(x+\sin x)e^{x^2}dx,I_3=\int_0^1\sqrt{1+\cos^3 x}dx$，则

(A) $I_1<I_2<I_3$　（B） $I_1<I_3<I_2$　(C) $I_3<I_1<I_2$　(D) $I_2<I_1<I_3$

4、 设常数 $p>0,q>0$，反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{(\ln x)^p}{(x-1)^q}dx$，则

(A) $p<1,q>1$ 时，积分收敛　　(B) $p<1,q<1$ 时，积分收敛

(C) $p>1,q>1$ 时，积分收敛　　(D)积分发散

5、 设 u_n 为单调递增的正数列，且 $S_n=\sum_{k=1}^n u_k<1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$

A. 发散　B. 收敛　C. 收敛且和小于 1　D. 无法判断

6、 设 $y=y(x)$ 是方程 $y''+ay'+by=xe^x$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则 $\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x\sin 2x}$ 的值为

（A） 0　（B） 1　（C） $\frac{1}{2}$　（D） $\frac{1}{4}$

7、 α 为实数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\arctan\frac{1}{n^{\alpha}}$

（A）条件收敛但不绝对收敛　（B）条件收敛，但绝对收敛与否与 α 取值有关

（C）绝对收敛且与 α 取值无关　（D）敛散性不定

8、 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_x^{x^2}\sin t^2dt}{x^2(3^x-1)}, x\neq 0\\ a \qquad\qquad\qquad ,x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则

(A) $a=3$ （B） $a=-\dfrac{1}{3\ln 3}$ (C) $f'(x_0)=-\dfrac{1}{3}$ (D) $a=3\ln 3$

9、 设 $f(x)=x\arctan x$，则 $f^{(100)}(0)$的值为

A. 0 B. $\dfrac{100!}{99}$ C. $-\dfrac{1}{99}$ D. $-\dfrac{100!}{99}$

10、设函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin x, & 0\le x<\pi\\ 1 & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$ $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$，则

(A) $\varphi(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导 （B） $\varphi(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续，但不可导

(C) $x=\pi$ 是 $\varphi(x)$ 的可去间断点 (D) $x=\pi$ 是 $\varphi(x)$ 的跳跃间断点

二、填空题（共 7 题，4 分/题）

1、 设 $f(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$， $y=f^{-1}(x)$ 为其反函数，则 $f^{-1}(2)=$________

2、 设函数 $y=f(3x+1)$ 的定义域为$[0,1]$，则函数 $y=f(3\sin x+1)$ 的定义域为_

3、 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{4n^2+1}+\dfrac{2}{4n^2+2^2}+\cdots\dfrac{n}{4n^2+n^2})=$ ________________

4、 已知当 $x\to 0$ 时， $\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\ln(1+t)dt$ 与 $1-\cos(mx^n)$ 是等价无穷小，则 $(m,n)=$______

5、 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3z\\ 2x-4y+5z=3\end{cases}$ 在点（1,1,1）处的切线方程为___________

6、 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{1+3\tan x}dx=$__________

7、 设曲面$\sum$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在柱体$x^2+y^2\le 2x$内的部分，则

$\oiint\limits_{\Sigma}(z+2y)dS=$____________

三、解答题（共 3 题，14 分/题）

1、 设二次型$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2\beta x_2x_3+2x_1x_3$经正交变换$X=QY$化成$f=y_1^2+2y_3^2$，其中$X=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T,Y=\left(y_1,y_2,y_3\right)^T$是三维列向量，$Q$是正交 矩阵，试求常数$\alpha,\beta$.

2、过曲线$3x^2+2xy+3y^2=1$上任意一点作曲线的切线，求切线与坐标轴所围成的三角形面积的最小值。

3、 证明：$\int_0^1\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx=2\ln 2-1$，其中$\left[x\right]$表示不超过$x$的最大整数。

华教杯全国大学生数学竞赛训练题答案

（非数学类专业组）

一、选择题

1-5、ADBDB　　　　　　　　　6-10、ABBDB

二、填空题

1、$\frac{15}{8}$

2、$[2k\pi,(2k+1)\pi],k\in z$

3、$\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$

4、$(\pm1,2)$

5、$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-2}$

6、$\frac{1}{10}(\frac{\pi}{4}+\frac{9}{2}\ln 2)$

7、$\frac{32}{9}\sqrt{2}$

三、解答题

1、

由已知条件得二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&\alpha&1\\ \alpha&1&\beta\\ 1&\beta&1\end{pmatrix}$，其行列式为 0

$$|A|=\begin{vmatrix}1&\alpha&1\\ \alpha&1&\beta\\ 1&\beta&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\alpha&1\\ \alpha-\beta&1&\beta\\ 0&\beta&1\end{vmatrix}=-(\alpha-\beta)^2=0$$，所以 $\alpha=\beta$

$$|\lambda A-E|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-\alpha&-1\\ -\alpha&\lambda-1&-\alpha\\ -1&-\alpha&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-\alpha&-1\\ 0&\lambda-1&-\alpha\\ -\lambda&-\alpha&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-\alpha&-1\\ 0&\lambda-1&-\alpha\\ 0&-2\alpha&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$=\lambda[(\lambda-1)(\lambda-2)-2\alpha^2]$，故 $\alpha=\beta=0$

2、

解：因为 $y'=-\dfrac{3x+y}{x+3y}$，故曲面上任意一点 (x,y) 的切线方程为

$$(3x+y)(X-x)+(x+3y)(Y-y)=0$$

得切线在 x,y 轴截距为 $\dfrac{(x+3y)y}{3x+y}+x,\qquad \dfrac{(3x+y)x}{x+3y}+y$

于是三角形面积

$$S=\frac{1}{2}\left|[\frac{(x+3y)y}{3x+y}+x][\frac{(3x+y)x}{x+3y}+y]\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{(3x^2+2xy+3y^2)^2}{(3x+y)(x+3y)}\right|=\frac{1}{2}\frac{1}{|(3x+y)(x+3y)|}$$

问题变为在 $3x^2+2xy+3y^2=1$ 下的 $f(x,y)=(3x+y)(x+3y)$ 的条件极值

令 $L(x,y)=(3x+y)(x+3y)+\lambda(3x^2+2xy+3y^2-1)$

$$\begin{cases}L'_x=6x+10y+6\lambda x+2\lambda y=0\\ L'_y=10x+6y+2\lambda x+6\lambda y=0\\ L'_\lambda=3x^2+2xy+3y^2-1=0\end{cases},$$

得 $\begin{cases}x=-y\\4x^2=1\end{cases},S=\dfrac{1}{2}$ 和 $\begin{cases}x=y\\8x^2=1\end{cases},S=\dfrac{1}{4}$，故三角形面积最小值为 $\dfrac{1}{4}$

3、

解：令 $x=\dfrac{1}{t}$， $\displaystyle\int_0^1([\frac{2}{x}]-2[\frac{1}{x}])dx=\int_1^{+\infty}\frac{[2x]-2[x]}{x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{[2x]-2[x]}{x^2}dx$

由于 $\displaystyle\int_1^n\frac{[2x]}{x^2}dx=2\int_2^{2n}\frac{[x]}{x^2}dx$，故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{[2x]-2[x]}{x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\{2\int_2^{2n}\frac{[x]}{x^2}dx-2\int_1^n\frac{[x]}{x^2}dx\}$

考虑积分 $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{[x]}{x^2}dx=\int_k^{k+1}\frac{k}{x^2}dx=\frac{1}{k+1}$，

$$\int_1^n\frac{[x]}{x^2}dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{[x]}{x^2}dx=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\int_2^{2n}\frac{[x]}{x^2}dx=\sum_{k=2}^{2n-1}\int_k^{k+1}\frac{[x]}{x^2}dx=\sum_{k=2}^{2n-1}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

所以，$\displaystyle\int_0^1([\frac{2}{x}]-2[\frac{1}{x}])dx=\int_1^{+\infty}\frac{[2x]-2[x]}{x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{[2x]-2[x]}{x^2}dx$

$$=\lim_{n\to\infty}\{2\int_2^{2n}\frac{[x]}{x^2}dx-2\int_1^n\frac{[x]}{x^2}dx\}=2\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})-1$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})-1=2\int_0^1\frac{1}{x+1}dx-1=2\ln 2-1$$