全国大学生数学竞赛非数学类模拟五

清疏竞赛考研数学

2023 年 9 月 24 日

摘要

$$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\},\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}.$$

模拟试题应当规定时间独立完成并给予反馈.

$\frac{x}{2}=\frac{x}{2}=\frac{4}{x^2}$

$x+\frac{4}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{4}{x^2}$

$\geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{4}{x^2}}=3$

1 填空题

填空题 1.1 设正数列 $x_n, n=1,2,\cdots$ 满足 $x_n+\frac{4}{x_{n+1}^2}<3, \forall n\in\mathbb{N}$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=$ 2

$x_n+\frac{4}{x_{n+1}^2}<x_n+\frac{4}{x_n^2} \Rightarrow x_{n+1}>x_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x.$

$x_n<3$

而 $x+\frac{4}{x^2}\leq 3, x=2$

填空题 1.2 函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\int_0^t e^{u^2-2u}du \\ y=\int_0^t e^{u^2-2u+2\ln u}du \end{cases}$ 所确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=1}=$ 2e

填空题 1.3 做换元 $\begin{cases} u=\frac{1}{x} \\ v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x} \\ w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x} \end{cases}$ $, w=w(u,v)$ 之后, 方程 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$ 变为 0

$z(x,y)$

填空题 1.4 若某个 $x^2+y^2=2z$ 的切平面过 $\begin{cases} 3x^2+y^2+z^2=5 \\ 2x^5+y^2-4z=7 \end{cases}$ 在 $(1,-1,-1)$ 的切线, 则这个切平面方程为 $x+y-z=1$ 或 $3x-y-z=5$

填空题 1.5 设连续可微函数 f 满足 $f(-x)+\int\limits_0^x tf(x-t)dt=x, \forall x\in\mathbb{R}$, 则 $f(x)=$ ______

1.2 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=t^2$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{dt^2}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$

$=2t\cdot\frac{1}{e^{t^2-2t}}$

当 $t=1$, 有 $2e=\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=1}$

2 选择题答案区

1.3: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{y^2}$$

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{u^2}\left(-u^2\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot u^2\right) + y^2\left(-\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{\partial z}{\partial u} = z^2$$

$w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \frac{1}{z} - u$, $z = \frac{1}{w+u}$, $-\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\frac{\partial w}{\partial u}+1}{(w+u)^2} = \frac{1}{(w+u)^2}$

故 $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$

1.4: 积累两曲面交线上的一点切线方向的求法.

第一个曲面: $(6x, 2y, 2z)$, 第二个曲面: $(10x, 2y, -4)$.

$(6, -2, -2)$ $(10, -2, -4)$

切线方向 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -2 & -2 \\ 10 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$, 切线方程 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2}$

切平面 $x_0x + y_0y = 2\frac{z+z_0}{2} = z+z_0$, 故 $x_0+y_0-2=0$.

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2 = 2z_0 \\ x_0-y_0 = z_0-1 \end{cases}$$

故 $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$ 或 $(3,-1,5)$

1.5. $x = f(-x) + \int_0^x t f(x-t)\,dt = f(-x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = f(-x) + x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t f(t)\,dt$

求导: $1 = -f'(-x) + \int_0^x f(t)\,dt$, $f''(-x) + f(x) = 0$, $-f'''(-x) + f'(x) = 0$, $f''''(-x) + f''(x) = 0$

$f''''(x) = -f''(-x) = f(x)$, 有四个初值条件, 可唯一确定 f 表达式.

法1: 直接猜 $f(x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}$

法2: 直接套四阶线性常系数微分方程解.

$f(0)=0,\ f'(0)=-1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1$，法3: $f''''+f''=f+f''\triangleq g$, 则 $g''=g$, 解 g, 再解 f.

3 解答题

解答题 3.1 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$f(x)+f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\arctan x,\forall x\neq 0.$$

(1): 求 f 的表达式.

(2): 计算 $\int_0^1 f(x)\,dx$.

解: 对 $x\neq 0,1$, $f(x)+f(1-\frac{1}{x})=\arctan x$

令 $x=1-\frac{1}{x}$, $f(1-\frac{1}{x})+f(\frac{1}{1-x})=\arctan(1-\frac{1}{x})$

令 $x=\frac{1}{1-x}$, $f(\frac{1}{1-x})+f(x)=\arctan(\frac{1}{1-x})$

视为 $f(x), f(\frac{1}{1-x}), f(1-\frac{1}{x})$ 的三元线性方程组得 $f(x)=\frac{\arctan x+\arctan\frac{1-x}{x}+\arctan\frac{1}{1-x}}{2}$

且 $f(0)=C$, $f(1)=\frac{\pi}{4}-C$, $C\in R$

(2): $\int_0^1 f(x)dx=\frac{\int_0^1\arctan x\,dx+\int_0^1\arctan\frac{1-x}{x}dx+\int_0^1\arctan\frac{1}{1-x}dx}{2}$

$=\frac{\int_0^1\frac{\pi}{2}dx+\int_0^1\arctan\frac{1-x}{x}dx}{2}=\frac{3}{8}\pi$,

这里 $\int_0^1\arctan\frac{1-x}{x}dx=x\arctan\frac{1-x}{x}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{x}{2x^2-2x+1}dx=\frac{\pi}{4}$.

解答题 3.2 计算

$$\oint_{x^2+y^2=4}\left[\frac{4x-y}{4x^2+y^2}-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\right]dx+\left[\frac{x+y}{4x^2+y^2}+\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right]dy.$$

解： $I_1=\oint_{x^2+y^2=4}\left(\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy\right)$

$I_2=\oint_{x^2+y^2=4}\left(-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}dx+\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}dy\right)$

容易验证 I_1, I_2 均满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\left(\int_L Pdx+Qdy\right)$. 因此

对 I_1： $4x^2+y^2=\varepsilon^2$， $I_1=\oint_{4x^2+y^2=\varepsilon^2}\left(\frac{4x-y}{\varepsilon^2}dx+\frac{x+y}{\varepsilon^2}dy\right)$

$=\iint_{4x^2+y^2\le\varepsilon^2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)dxdy=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^2$

$=\pi.$

(积累 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 面积 πab)

对 I_2： $(x-1)^2+y^2=\varepsilon^2$，则 $I_2=\oint_{(x-1)^2+y^2=\varepsilon^2}\left(-\frac{y}{\varepsilon^2}dx+\frac{x-1}{\varepsilon^2}dy\right)$

$=\iint_{(x-1)^2+y^2\le\varepsilon^2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)dxdy$

$=\pi\varepsilon^2\cdot\frac{2}{\varepsilon^2}=2\pi.$

故 $I_1+I_2=3\pi$. 因题目未定向，故所求积分为 $\pm3\pi$.

解答题 3.3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续以及 (a,b) 上可微，对任何 $n \in \mathbb{N}$，证明必然存在 n 个互不相同的点 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n \in (a,b)$，使得

$$f'(\zeta_1) f'(\zeta_2) \cdots f'(\zeta_n) = \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^n.$$

证：由 Cauchy 中值定理，我们有

$$\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)^n = \frac{[f(b)-f(a)]^n - [f(a)-f(a)]^n}{(b-a)^n - (a-a)^n}$$

$$= \frac{f'(\zeta_1)[f(\zeta_1)-f(a)]^{n-1}}{(\zeta_1-a)^{n-1}} \quad (\zeta_1 \in (a,b))$$

$$= \frac{f'(\zeta_1) f'(\zeta_2)[f(\zeta_2)-f(a)]^{n-2}}{(\zeta_2-a)^{n-2}} \quad (\zeta_2 \in (\zeta_1, b))$$

$$\vdots$$

$$= f'(\zeta_1) f'(\zeta_2) \cdots f'(\zeta_n).$$

这里 $a < \zeta_1 < \zeta_2 < \cdots < \zeta_n < b$. 证毕!

解答题 3.4 设 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$, f 二阶连续可微且 $f(1)=0, f'(1)=1$. 若在 $0<x^2+y^2\leqslant 1$ 上满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 计算

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\iint_{\epsilon\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1} z dxdy.$$

解: $r=x^2+y^2$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=[f(r)+rf'(r)]\cdot 2x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2[f(r)+rf'(r)]+(2x)^2\cdot[2f'(r)+rf''(r)]$$

故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4[f(r)+rf'(r)]+4r[2f'(r)+rf''(r)]=0$,

即 $r^2f''(r)+3rf'(r)+f(r)=0$, 这是欧拉方程. $f(1)=0, f'(1)=1$

解得 $f(r)=\frac{\ln r}{r}$, 故 $z=\ln r=\ln(x^2+y^2)$

$$\iint_{\epsilon\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq 1}\ln(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\epsilon^1 r\ln r^2 dr$$

故 $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\iint_{\epsilon\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq 1}\ln(x^2+y^2)dxdy=2\pi\int_0^1 r\ln r^2 dr$

$$=\pi\int_0^1\ln x\,dx=-\pi$$

解答题 3.5 设 $f\in C^1[0,1]$, 记 $A=f(1), B=\int_0^1 x^{-\frac{1}{m}}f(x)\,dx, C=f(0), m\in\mathbb{N}$, 计算

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^m}{n^m}-\frac{(k-1)^m}{n^m}\right)f\left(\frac{(k-1)^m}{n^m}\right)\right).$$

你应该用 A,B,C 表示.

解: 当 $m=1$, $n\left[\int_0^1 f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]$

$$=n\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)dx\right]$$

$$=n\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{f(x)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{x-\frac{k-1}{n}}\left(x-\frac{k-1}{n}\right)dx\right]$$

$$=n\left[\sum_{k=1}^{n}f'(\eta_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k-1}{n}\right)dx\right]=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f'(\eta_k),$$

这里 $\eta_k\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$, 由定积分定义有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}f'(\eta_k)}{2n}=\frac{\int_0^1 f'(x)dx}{2}=\frac{f(1)-f(0)}{2}$.

$$=\frac{A-C}{2}$$

当 $m>1$, 取 $g(x)=mx^{m-1}f(x^m)$

我们有 $B=m\int_0^1 x^{m-2}f(x^m)dx$, $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$.

$$\frac{k^m-(k-1)^m}{n^m}=\frac{(k-1+1)^m-(k-1)^m}{n^m}=\frac{(k-1)^m+m(k-1)^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}(k-1)^{m-2}+\cdots+1-(k-1)^m}{n^m}$$

$$=\frac{m(k-1)^{m-1}}{n^m}+\frac{m(m-1)}{2n^m}(k-1)^{m-2}+\underbrace{\cdots}_{n\text{太高可忽略}}$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[\int_0^1 f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^m}{n^m}-\frac{(k-1)^m}{n^m}\right)f\left(\frac{(k-1)^m}{n^m}\right)\right]$

$$=\lim_{n\to+\infty} n\left[\int_0^1 g(x)dx-\sum_{k=1}^{n}\frac{m(k-1)^{m-1}}{n^m}f\left(\left(\frac{k-1}{n}\right)^m\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{m(m-1)}{2n^m}(k-1)^{m-2}f\left(\left(\frac{k-1}{n}\right)^m\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty} n\left[\int_0^1 g(x)dx-\frac{\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n}\right]-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(m-1)\,m\left(\frac{k-1}{n}\right)^{m-2}f\left(\left(\frac{k-1}{n}\right)^m\right)$$

$$=\frac{g(1)-g(0)}{2}-\frac{(m-1)\int_0^1 mx^{m-2}f(x^m)dx}{2}=\frac{mf(1)}{2}-\frac{(m-1)B}{2}=\frac{mA}{2}+\frac{(1-m)B}{2}$$

解答题 3.6 定义 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 满足

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{如果}x\le e \\ xf(\ln x) & \text{如果}x>e \end{cases}.$$

(1): 证明, 对一切 $m\in\mathbb{N}, A>0$, 积分

$$\int_A^{\infty}\frac{1}{x\cdot\underbrace{\ln x\cdot\ln\ln x\cdot\cdots\cdot\ln\ln\cdots\ln x}_{m\text{次}}}dx$$

发散.

(2): 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$ 是发散级数.

(1): $\int_A^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x\cdot\ldots\cdot\underbrace{\ln\ln\cdots\ln x}_{m\text{次}}}dx=\underbrace{\ln\cdots\ln}_{m+1\text{次}}{+\infty}-\underbrace{\ln\cdots\ln}_{m+1\text{次}}A=$不存在

故积分发散.

(2): 积累: $\underbrace{\text{若}f(n)\text{单调, 则}\sum_{n=1}^{+\infty}f(n)\text{和}\int_A^{+\infty}f(x)dx\text{同敛散}}_{\text{积分判别法}}$.

证: 不妨设 $f\uparrow$, $\sum_{k=1}^{n}f(k)\le\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)dx=\int_1^{n+1}f(x)dx$

$\sum_{k=1}^{n}f(k)\ge f(1)+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}f(x)dx=f(1)+\int_1^n f(x)dx$. 故证毕!

回到原题

对 $e<x\le e^e$, $\ln x\le e$, 则 $f(x)=xf(\ln x)=x\ln x$

对 $e^e<x\le e^{e^e}$, $e<\ln x\le e^e$, 则 $f(x)=xf(\ln x)=x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x$

$\vdots$

对 $\underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}}_{n\text{次}}<x\le\underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}}_{n+1\text{次}}$, $f(x)=x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x\cdot\ldots\underbrace{\ln\ln\cdots\ln x}_{n\text{次}}$

显然 $f(x)$ 递增, 记 $a_n=\underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}}_{n\text{次}}$, 则由积分判别法, $\sum\frac{1}{f(n)}$ 和 $\int_A^{+\infty}\frac{dx}{f(x)}$

同敛散. 故 $\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{dx}{f(x)}=\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{x\ln x\ldots\ln\ln\cdots\ln x}$

$$= \underbrace{\ln\ln\cdots\ln}_{(n+1)次} a_{n+1} - \underbrace{\ln\ln\cdots\ln}_{(n+1)次} a_n$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

故 $\int_{a_1}^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{1}{f(x)} dx = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$. 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$ 发散.