

# 全国大学生数学竞赛非数学类模拟一

清疏竞赛考研数学

2023 年 8 月 26 日

## 摘要

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}, \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

模拟试题应当规定时间独立完成并给予反馈.

## 1 填空题

填空题 1.1 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^{\sin x}}{x^3} =$  \_\_\_\_\_

填空题 1.2  $y(x) = \int_{\sin x}^{x^2} (x+t) dt$ , 则  $y''(0) =$  \_\_\_\_\_

填空题 1.3  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  连续, 且有极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)+3x-4y}{x^2+y^2} = 2$ , 则  $2f'_x(0, 0) + f'_y(0, 0) =$  \_\_\_\_\_

填空题 1.4 计算积分  $\int \left( \frac{\arctan x}{x - \arctan x} \right)^2 dx =$  \_\_\_\_\_

填空题 1.5 设  $f$  连续可微, 曲面  $z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x^3 f\left(\frac{y}{x}\right)$  上任意一点处的切平面在  $OZ$  轴上的截距与切点到坐标原点距离之比为常数 \_\_\_\_\_

## 2 解答题

**解答题 2.1** 给定  $a + b \geq 0, b > a$ , 设  $f$  在  $[a, b]$  连续,  $(a, b)$  可微, 且有

$$f(a) = f(b) = \frac{a}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = a + b.$$

证明对任意实数  $\lambda$ , 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) = \lambda \left[ f(\xi) - \frac{\xi}{2} \right] + \frac{1}{2}.$$

**解答题 2.2** 设

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

证明

(1):  $f \in C(\mathbb{R}^2)$ .

(2):  $f$  限制在过原点的直线上,  $f$  在原点取得局部极小值.

(3):  $f$  在  $(0, 0)$  不取局部极小值.

**解答题 2.3** 把  $(1 - 4x)^{-\frac{1}{2}}$  在收敛域内展开为幂级数, 并以此证明

$$\sum_{k+j=n, 0 \leq k, j \leq n} C_{2k}^k C_{2j}^j = 4^n.$$

**解答题 2.4** 设  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 证明

$$\frac{\pi}{4\sqrt{4\sqrt{10}+15}} \leq \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x+3y+2)^2+1}} \leq \frac{\sqrt{5}\pi}{20}.$$

**解答题 2.5** 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty, \lambda > 0$ , 证明下述级数收敛并求和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(a_2 + \lambda)(a_3 + \lambda) \cdots (a_{n+1} + \lambda)}.$$

**解答题 2.6** 设  $p > 1$ , 对任何  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$ , 都有  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{\frac{p}{p-1}} < \infty.$$