

全国大学生数学竞赛非数学类模拟一

清疏竞赛考研数学

2023 年 8 月 26 日

摘要

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

模拟试题应当规定时间独立完成并给予反馈.

1 填空题

填空题 1.1 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^{\sin x}}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$

填空题 1.2 $y(x) = \int_{\sin x}^{x^2} (x+t) dt$, 则 $y''(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

填空题 1.3 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续, 且有极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)+3x-4y}{x^2+y^2} = 2$, 则 $2f'_x(0,0) + f'_y(0,0) = \underline{\hspace{2cm}}$

填空题 1.4 计算积分 $\int \left(\frac{\arctan x}{x - \arctan x} \right)^2 dx = \underline{\hspace{2cm}}$

填空题 1.5 设 f 连续可微, 曲面 $z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x^3 f\left(\frac{y}{x}\right)$ 上任意一点处的切平面在 OZ 轴上的截距与切点到坐标原点距离之比为常数 $\underline{\hspace{2cm}}$

2 解答题

解答题 2.1 给定 $a + b \geq 0, b > a$, 设 f 在 $[a, b]$ 连续, (a, b) 可微, 且有

$$f(a) = f(b) = \frac{a}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = a+b.$$

证明对任意实数 λ , 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \lambda \left[f(\xi) - \frac{\xi}{2} \right] + \frac{1}{2}.$$

解答题 2.2 设

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

证明

(1): $f \in C(\mathbb{R}^2)$.

(2): f 限制在过原点的直线上, f 在原点取得局部极小值.

(3): f 在 $(0, 0)$ 不取局部极小值.

解答题 2.3 把 $(1 - 4x)^{-\frac{1}{2}}$ 在收敛域内展开为幂级数，并以此证明

$$\sum_{k+j=n, 0 \leq k, j \leq n} C_{2k}^k C_{2j}^j = 4^n.$$

解答题 2.4 设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$, 证明

$$\frac{\pi}{4\sqrt{4\sqrt{10} + 15}} \leq \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x+3y+2)^2 + 1}} \leq \frac{\sqrt{5}\pi}{20}.$$

解答题 2.5 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty, \lambda > 0$, 证明下述级数收敛并求和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(a_2 + \lambda)(a_3 + \lambda) \cdots (a_{n+1} + \lambda)}.$$

解答题 2.6 设 $p > 1$, 对任何 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$, 都有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{\frac{p}{p-1}} < \infty.$$