第十届清疏竞赛班非数学类 7:

连续函数的处理

为了不再重复经典的结果,我们将第九届非数学类 6 纳入自己学习的正课,视频和 pdf 都可以在 cctalk 找到,内容主要由连续单射等价严格单调以及 cauchy 方程的处理手法.

重要的简单结论：

$(Darboux$中值定理$)$设$f(x)$在$[a,b]$可导，则$f'(x)$在$[a,b]$具有介值性.

证明：

不妨设$f'(b)\geq f'(a)$,对$s\in(f'(a),f'(b))$,

不妨设$f'(a)<0, f'(b)>0, s=0$

否则我们可以用$f(x)-sx$去代替, 此时

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, f'(b)=\lim_{x\to b^+}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

由极限保号性, 我们知道存在$\delta_1,\delta_2>0$

$$\forall x\in(a,a+\delta_1),\text{有}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0, \forall x\in(b-\delta_2,b),\text{有}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$$

即$\forall x\in(a,a+\delta_1), f(x)<f(a), \forall x\in(b-\delta_2,b)$, 有$f(x)<f(b)$

因此$f(x)$的最小值点在(a,b)取得, 所以$\exists x_0\in(a,b), f'(x_0)=0.$

导数极限定理：

设$f(x)\in D(a,b]\cap C[a,b]$,如果$\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)$存在,则$f'(a)$存在, 且$f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f$

证明：

$$f'(\theta(x))=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, a<\theta(x)<x\Rightarrow\lim_{x\to a^+}\theta(x)=a$$

$$\lim_{x\to a^+}f'(x)=\lim_{x\to a^+}f'(\theta(x))=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\text{因此}f\text{在}x=a\text{可导且}$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}f'(x).$$

导函数无第一类间断点和无穷间断点, 单调函数无第二类间断点.

即$f(x)\in D(a,b)$,则$f(x)$在(a,b)上没有第一类间断点和无穷间断点

证明：

设$x_0\in(a,b)$,使得x_0是第一类间断点,$\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$存在

因此由导数极限定理,$f'(x_0)$存在,并且$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$

因此x_0是$f'(x)$连续点,矛盾！

设$x_0\in(a,b)$,使得x_0是无穷间断点, 不妨设$\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=+\infty$,

那么$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(\theta(x))=+\infty$, 矛盾！

因此完成了证明.

推论：有第一类间断点和无穷间断点的函数没有原函数.

设$f(x)$在$[a,b]$上单调,则$f(x)$在$[a,b]$上没有第二类间断点.

注意：

函数版本的单调有界定理仍然成立,并且可以无脑直接使用

证明：不妨设$f(x)$递增, 对任何$x_0\in[a,b]$,有$f(b)\ge f(x)\ge f(a)$

则$f(x)$单调有界, 所以$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$存在,因此

$f(x)$在$[a,b]$上没有第二类间断点.

设$f\left(x\right)$在$\left[a,b\right]$取得最值且具有介值性,$p_i>0,\sum_{i=1}^{n}p_i=1$

则对$x_i\in\left[a,b\right],i=1,2,\cdots,m$，存在$y\in\left[a,b\right]$,使得$f\left(y\right)=\sum_{i=1}^{m}p_i f\left(x_i\right)$

证明：

设$M=\max_{x\in\left[a,b\right]}f\left(x\right),m=\min_{x\in\left[a,b\right]}f\left(x\right)$，则

$m=\sum_{i=1}^{m}p_i m\le\sum_{i=1}^{m}p_i f\left(x_i\right)\le\sum_{i=1}^{m}p_i M=M$,因此

$\sum_{i=1}^{m}p_i f\left(x_i\right)$是介于最小最大之间的一个数字,由介值性,我们知道

存在$y\in\left[a,b\right]$,使得$f\left(y\right)=\sum_{i=1}^{m}p_i f\left(x_i\right)$.

$f\in C[0,1], f(0)=f(1)$, 证明对任何$n\in\mathbb{N}$, 都存在$x_n\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$, 使得

$f(x_n)=f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$

证明：

$$f_n(x)\triangleq f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x),$$

$$\sum_{k=1}^{n}f_n\left(\frac{k-1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k-1}{n}+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]=f(1)-f(0)=0$$

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f_n\left(\frac{k-1}{n}\right)=0$,由刚才的基本结论,

存在$x_n\in(0,1)$,使得$f_n(x_n)=0$,

这恰好就是$f(x_n)=f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$.

$f\in C[0,1], f(0)=f(1)=0$且f非负，证明对$a\in(0,1)$, 都存在$\xi\in[0,1)$, 使得 $f(\xi)=f(a+\xi)$.

证明：

$$F(x)=f(a+x)-f(x),$$

$F(0)=f(a), F(1-a)=-f(1-a)$，$F(0)F(1-a)=-f(1-a)f(a)\le 0$

由零点定理存在$\xi\in[0,1)$,使得$F(\xi)=0$, 此时恰好就是$f(\xi)=f(a+\xi)$.

函数方程的处理$\left(\text{先看第九届的}Cauchy\text{方程部分}\right)$：

设$\mathbb{R}$上的函数$f\left(x\right)$在$x=0$连续，且满足$f\left(x+y\right)-f\left(x-y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)$

求$f\left(x\right)$表达式.

证明：

令$y=x, f\left(2x\right)-f\left(0\right)=f^{2}\left(x\right)$, 令$x=0$, 知$f\left(0\right)=0$

所以$f^{2}\left(x\right)=f\left(2x\right)\geq 0\Rightarrow f\left(x\right)$非负.

则$f\left(x\right)=f^{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)=f^{2^{2}}\left(\dfrac{x}{2^{2}}\right)=\cdots=f^{2^{n}}\left(\dfrac{x}{2^{n}}\right)$

然后$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f^{2^{n}}\left(\dfrac{x}{2^{n}}\right)=0\Rightarrow f\left(x\right)\equiv 0$

$f\left(x\right)\in C\left(\mathbb{R}\right), f\left(xy\right)=xf\left(y\right)+yf\left(x\right), x,y\in\mathbb{R}$, 求$f\left(x\right)$

证明：

$f\left(0\right)=xf\left(0\right),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(0\right)=0$

$f\left(x\right)=xf\left(1\right)+f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(1\right)=0$

$f\left(1\right)=f\left(-1\right)-f\left(1\right)\Rightarrow f\left(-1\right)=0$

$f\left(-x\right)=xf\left(-1\right)-f\left(x\right)=-f\left(x\right), x\in\mathbb{R}$

考虑$x,y>0, x=e^{s}, y=e^{t}, s,t\in\mathbb{R}$

$$\frac{f\left(e^{s+t}\right)}{e^{s+t}}=\frac{f\left(e^{s}\right)}{e^{s}}+\frac{f\left(e^{t}\right)}{e^{t}},$$

$\dfrac{f\left(e^{x}\right)}{e^{x}}$满足$Cauchy$方程，所以$\dfrac{f\left(e^{x}\right)}{e^{x}}=\dfrac{f\left(e\right)}{e}x,$

$$f\left(x\right)=\begin{cases}f\left(e\right)\dfrac{x\ln x}{e}, x>0\\ 0, x=0\\ f\left(e\right)\dfrac{x\ln\left(-x\right)}{e}, x<0\end{cases}.$$

设$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\frac{f(x)+f(y)}{2},\forall x,y\in\mathbb{R}$,如果$f(x)$有下界,证明$f$为常数

证明：

不妨设$f(x)\geq 0$,否则用$f(x)-s$代替$f(x)$即可.

此时$f\left(\frac{x}{2}\right)\geq\frac{f(x)+f(0)}{2}\Rightarrow f(x)\leq 2f\left(\frac{x}{2}\right)-f(0)$

$$f(2x)\leq 2f(x)-f(0)$$

$$f(2^n x)\leq 2f(2^{n-1}x)-f(0)$$

$$\frac{f(2^n x)}{2^n}-\frac{f(2^{n-1}x)}{2^{n-1}}\leq-\frac{f(0)}{2^n}$$

$$\frac{f(2^n x)}{2^n}-f(x)\leq-\sum_{k=1}^{n}\frac{f(0)}{2^k}=f(0)\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=-f(0)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$f(2^n x)\leq 2^n f(x)-f(0)(2^n-1)=f(0)+2^n\left(f(x)-f(0)\right)$$

若$f(x)<f(0)$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}f(2^n x)=-\infty$,矛盾!

因此$f(x)\geq f(0),\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(0)\geq\frac{f(x)+f(-x)}{2}\geq\frac{f(0)+f(0)}{2}=f(0)$$

上面并没有放缩,因此$f(x)=f(0),\forall x\in\mathbb{R}$.

$f \in C[0,1]$且f的值域$[0,1]$,以及$f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),f_1(x)=f(x)$

若存在$n_0 \in \mathbb{N}, f_{n_0}(x)=x, x\in[0,1]$,证明$f(x)=x$，$\forall x\in[0,1]$

注意：以后看到$f(f)$,就要联想单射和单调的关系

证明：

设$f(x)=f(y), f(f(f(x)))=f(f(f(y)))\cdots$

$\Rightarrow f_{n_0}(x)=f_{n_0}(y)\Rightarrow x=y\Rightarrow f$单射$\Rightarrow f$严格单调.

不妨设$f(x)$递增,那么若$f(x_0)>x_0$,则

$f(f(f(x_0)))>f(f(x_0))>f(x_0)>x_0\ldots$

因此类似的$f_{n_0}(x_0)>x_0$,矛盾！

$f(x_0)<x_0$,同理即知矛盾！

故$f(x_0)=x_0$.

经典结论：

(1)：若$f\in C[a,b]$, 且f值域是$[a,b]$子集, 则f在$[a,b]$有不动点

(2)：若$f\in C[a,b]$且(a,b)内, f无极值点, 则f在$[a,b]$严格单调

证明：

(1)：$[f(a)-a][f(b)-b]\le 0$，由零点定理即得(1).

(2):

若f在(a,b)内取最得在$[a,b]$上的最值点x_0, 那么x_0是极值点，矛盾！

因此不妨设$f(a)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x), f(b)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 下证明$f(x)$严格递增.

若$f(x)$在$[a,b]$不严格递增, 存在$x_1,x_2\in[a,b]$, 使得$x_2>x_1, f(x_1)\ge f(x_2)$,

注意我们不妨设$x_1,x_2\in(a,b)$,

至于他们属于端点的情况可以显然被排除, 读者自证.

因此在$[a,x_2]$上, 因为$f(x_1)\ge\max\{f(x_2),f(a)\}$, 所以$(a,x_2)$内

f取得$[a,x_2]$上最大值, 此时就是f的极大值点！矛盾！

因此f在$[a,b]$严格单调，我们完成了证明.

$f\left(x\right)\in C\left(\mathbb{R}\right)$,满足$\forall y\in\mathbb{R}$,存在且只存在$n$个不同的数$\left\{x_i\right\}_{i=1}^{n}$

使得$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=\cdots=f\left(x_n\right)=y$,求$n$的值.

证明:

当n为奇数时,

我们可以令$f\left(x\right)=\left(-1\right)^{\lfloor x\rfloor}\cos\left(n\pi x\right)-2\lfloor x\rfloor,x\in\mathbb{R}$

有兴趣的同学可以自己验证满足条件.

重点掌握n为偶数时,这样的f不存在.

设$n=2m$,取$y=0$,知$f\left(x\right)$恰好存在$2m$个零点

$x_1<x_2<\cdots<x_{2m}$,记$x_0=-\infty,x_{2m+1}=+\infty$.

由y任意性我们知f值域也是$\mathbb{R}$.

现在f在$\left(x_{i-1},x_i\right),i=1,2,\cdots,2m+1$不变号.

由抽屉原理,必有$m+1$个区间,f同号,即在些区间里面不妨设$f>0$.

注意这$m+1$个区间有m个区间不会到无穷.

(下面的步骤直接类似证明无极值必单调作图.)

取m个区间中最小的那个区间内的最大值c,

再取$y\in\left(0,c\right)$,由介值定理,

$f\left(x\right)$至少存在$2m+1$个点,使得$f\left(x\right)=c$,这是矛盾!

我们完成了证明.

$f\left(x\right)$在$\left[0,+\infty\right)$连续有界, 则对任何$T>0$, 证明存在$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,

使得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f\left(x_n+T\right)-f\left(x_n\right)\right)=0$

证明：

$f\left(x+T\right)-f\left(x\right)$有无穷多零点，那取$x_n$为这一串零点即可.

因此设$f\left(x+T\right)-f\left(x\right)$有有限多零点，存在$X>0$, 使得

$f\left(x+T\right)-f\left(x\right)$没有零点, 因此不妨设$f\left(x+T\right)-f\left(x\right)>0,\forall x\geq X$

假设不存在$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f\left(x_n+T\right)-f\left(x_n\right)\right)=0$,

即当$x\to\infty$, $f\left(x+T\right)-f\left(x\right)$最小的子列极限都比0大,即

$\exists\varepsilon_0>0, X'\geq X$, 使得$\forall x\geq X'$, 都有$f\left(x+T\right)-f\left(x\right)\geq\varepsilon_0$

此时$f\left(x+nT\right)-f\left(x+\left(n-1\right)T\right)\geq\varepsilon_0,\forall x\geq X',n\in\mathbb{N}$

因此$f\left(x+nT\right)-f\left(x\right)\geq n\varepsilon_0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x+nT\right)=+\infty$,

这和f有界矛盾！