2017 年第八届全国大学生数学竞赛决赛
(数学三、四年级)参考答案

一、填空题:

(1)【参考解答】: 0.

因为该多项式无 3 次项，故 4 个根之和为 0. 行列式的每一列加到第一列即可得到行列式的值为 0.

(2)【参考解答】: $a > 27$ 或 $a < -37$.

记 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + a$，则

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 60x + 72 = 12(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$$
$$= 12(x-1)(x-3)(x+2)$$

$f(x)$ 在 -2 和 3 取得极小值 $-152 + a$ 和 $-27 + a$. $f(x)$ 在 1 取得极大值 $37 + a$. 因此，当且仅当 $a > 27$ 或 $a < -37$ 时方程有虚根.

(3)【参考解答】: $-\dfrac{\pi}{2}a^3$.

令曲面 $S_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 \le a^2 \\ z = 0 \end{cases}$ 取下侧，则 $S_1 \cup S$ 为闭下半球面的内侧. 设其内部区域为 Ω，令 D 为 xOy 平面上的圆域 $x^2 + y^2 \le a^2$，则利用高斯公式，得

$$I = \frac{1}{a}\left\{ \iint_{S \cup S_1} - \iint_{S_1} \left[ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right] \right\}$$
$$= \frac{1}{a}\left\{ -\iiint_{\Omega} (3a + 2z)\,\mathrm{d}V + \iint_{D} a^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right\}$$
$$= \frac{1}{a}\left\{ -2\pi a^4 - 2\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}V + \pi a^4 \right\}$$
$$= -\pi a^3 - \frac{2}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^a r\,\mathrm{d}r \int_{-\sqrt{a^2 - r^2}}^{0} z\,\mathrm{d}z$$
$$= -\frac{\pi}{2}a^3.$$

(4)【参考解答】: $-\dfrac{1}{2}$.

$A = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}Q^T$，$Q$ 可以表示为 $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$，所以 $a_{21} = -\sin t \cos t$，立即

得到结果.

第二题：【参考解答】：交线为抛物线或椭圆.

(1)如果平面 P 平行于$z-$轴，则相交曲线$C=\Gamma\cap P$可以经过以$z-$为旋转轴的旋转，使得 P 平行于$yz-$平面，C 的形式不变. 所以可不妨设 P 的方程为$x=c$，交线 C 的方程为

$$z=\frac{1}{2}\left(c^2+y^2\right).$$

将 C 投影到$yz-$平面上，得到抛物线$z-\frac{c^2}{2}=\frac{1}{2}y^2$. 由于平面 P 平行于$yz-$平面，故交线为抛物线.

(2)如果平面 P 不平行于$z-$轴，设 P 的方程为$z=ax+by+c$. 代入Γ的方程$z=\frac{1}{2}\left(c^2+y^2\right)$，得

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=a^2+b^2+2c:=R^2$$

将$C=\Gamma\cap P$垂直投影到$xy-$平面，得到圆周

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=R^2$$

令 Q 是以这个圆为底的圆柱，则 C 也是圆柱 Q 与平面 P 的交线. 在圆柱 Q 中从上或从下放置半径为 R 的球体，它与平面 P 相切于F_1,F_2，与圆柱 Q 相交于圆D_1,D_2. 对$C=Q\cap P$上的任意一点 A，过 A 点的圆柱母线交圆D_1于B_1，交圆D_2于B_2，则线段B_1B_2为定长. 这时，由于球的切线长相等，得到$\left|AF_1\right|+\left|AF_2\right|=\left|AB_1\right|+\left|AB_2\right|=\left|B_1B_2\right|$为常数，故曲线 C 为椭圆.

第三题：【参考证明】：设$A=P\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q,B=Q^{-1}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}P^{-1}$，其中 P，Q 为可逆方阵，$B_1$为$r$阶方阵，则有

$$AB=P\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1},BA=Q^{-1}\begin{pmatrix}B_1 & O\\ B_3 & O\end{pmatrix}Q$$

$$ABA=P\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$$

由$\operatorname{rank}ABA=\operatorname{rank}B_1=\operatorname{rank}B$可得，存在矩阵$X,Y$使得$B_2=B_1X,B_3=YB_1$，从而有

$$AB=P\begin{pmatrix}I & -X\\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & X\\ O & I\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$BA=Q^{-1}\begin{pmatrix}I & O\\ Y & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & O\\ -Y & I\end{pmatrix}Q$$

因此，AB与BA相似.

第四题：【参考证明】：由于$f\in\mathscr{S}$，因此存在$M_1>0$使得

$$\left|2\pi ixf\left(x\right)\right|\le\frac{M_1}{x^2+1},\forall x\in R\qquad(1)$$

这样$\int_R\left(-2\pi iy\right)f\left(y\right)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}\,y$关于$x\in R$一致收敛，从而可得

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{f}\left(x\right)}{\mathrm{d}\,x}=\int_R -2\pi iyf\left(y\right)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}\,y.\quad (2)$$

同理可得

$$\frac{\mathrm{d}^n\,\hat{f}\left(x\right)}{\mathrm{d}\,x^n}=\int_R\left(-2\pi iy\right)^n f\left(y\right)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}\,y.\quad (3)$$

利用分部积分法可得

$$\left(f^{(n)}\right)^\wedge\left(x\right)=\left(2\pi ix\right)^n\hat{f}\left(x\right),\forall n\geq 0\quad (4)$$

结合(3)(4)并利用$f\in\mathscr{S}$，可得对任何$m,k\geq 0$，有

$$x^m\frac{\mathrm{d}^k\,\hat{f}\left(x\right)}{\mathrm{d}\,x^k}=\frac{1}{\left(2\pi i\right)^m}\int_R\frac{\mathrm{d}^m\left(\left(-2\pi iy\right)^k f\left(y\right)\right)}{\mathrm{d}\,y^m}e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}\,y$$

在R上有界. 从而$\hat{f}\in\mathscr{S}$. 于是$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}\left(y\right)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}\,y$收敛，

$$\begin{aligned}&\int_{-A}^{A}\hat{f}\left(y\right)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}\,y=\int_{-A}^{A}\mathrm{d}\,y\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(t\right)e^{2\pi i\left(x-t\right)y}\,\mathrm{d}\,t\\&=\int_{-A}^{A}\mathrm{d}\,y\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x-t\right)e^{2\pi ity}\,\mathrm{d}\,t=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\,t\int_{-A}^{A}f\left(x-t\right)e^{2\pi ity}\,\mathrm{d}\,t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x-t\right)\frac{\sin\left(2\pi At\right)}{\pi t}\mathrm{d}\,t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f\left(x-t\right)-f\left(x\right)}{\pi t}\sin\left(2\pi At\right)\mathrm{d}\,t+f\left(x\right)\quad (5)\end{aligned}$$

由于$f\in\mathscr{S}$易得积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{f\left(x-t\right)-f\left(x\right)}{\pi t}\right|\mathrm{d}\,t$收敛，从而由黎曼引理可得

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f\left(x-t\right)-f\left(x\right)}{\pi t}\sin\left(2\pi At\right)\mathrm{d}\,t=0.(6)$$

组合(5)(6)即得结论成立.

第五题:【参考证明】: 假设φ不恒为0，则$\exists a\in F$使得$\varphi\left(a\right)\neq 0$.于是由$\varphi\left(0+a\right)=\varphi\left(a\right)$可知

$$\varphi\left(a\right)=\varphi\left(0\right)\varphi\left(a\right)$$

导致$\varphi\left(0\right)=1$.进而$\forall x\in F$有

$$1=\varphi\left(0\right)=\varphi\underbrace{\left(x+\cdots+x\right)}_{p}=\left(\varphi\left(x\right)\right)^p,\ \left(\varphi\left(x\right)\right)^p-1=0$$

注意到$ChF=p$，p为素数，故有$\forall a,b\in F$，

$$\left(a+b\right)^p=a^p+b^p，进而\left(a-b\right)^p=a^p-b^p.$$

结果由$\left(\varphi\left(x\right)\right)^p-1=0$可得$\left(\varphi\left(x\right)-1\right)^p=0$，即$\varphi\left(x\right)=1$.

第六题：【参考证明】：(1)做$\left[0,1\right]$的划分$\Delta:0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$，其中

$$x_0\in E,x_2\in E,\cdots,x_n\in E;x_1\notin E,x_3\notin E,\cdots,\ x_{n-1}\notin E.$$

构造如下：$\forall n\geq 1$，先取$x_0=0,x_2,x_4,x_{n-2}\in E,x_n=1$。由$E$的构造知：

$$\left[x_0,x_2\right],\left[x_2,x_4\right],\cdots,\left[x_{n-2},x_n\right]$$

中有无穷多不属于E的点，取$x_1\in\left(x_0,x_2\right)\setminus E,x_3\in\left(x_2,x_4\right)\setminus E,\cdots,\ x_{n-1}\in\left(x_{n-2},x_n\right)\setminus E,$ 于是

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\chi_E\left(x_i\right)-\chi_E\left(x_{i-1}\right)\right|=n\text{。}$$

当$n\to\infty$时，$\sum_{i=1}^{n}\left|\chi_E\left(x_i\right)-\chi_E\left(x_{i-1}\right)\right|\to\infty$，即$\bigvee_0^1\left(\chi_E\left(x\right)\right)=+\infty.$

(2)证明：$\left(\Rightarrow\right)$反证法。假设E有无穷多边界点$\left\{c_j\right\}_{j=1}^{\infty}$. $\forall n>1$，造$\left[0,1\right]$的分划Δ如下：取$x_0=0$，在$\left\{c_j\right\}_{j=1}^{\infty}$中任取$n$个点按大小排列记作$\left\{c_1,\cdots,c_n\right\}$.

由边界点的定义：$\forall\varepsilon>0$，$U\left(c_i,\varepsilon\right)\cap E\neq\varnothing$且$U\left(c_i,\varepsilon\right)\cap\mathscr{C}E\neq\varnothing\left(1\leq i\leq n\right)$. 对

$$0<\varepsilon<\frac{1}{2}\min\left\{c_{i+1}-c_i,i=1,2,\cdots,n-1\right\},$$

若取$x_0\in E$，取$x_1\in\left(x_0,c_1+\varepsilon\right)\cap\mathscr{C}E$，$x_2\in\left(x_1,c_2+\varepsilon\right)\cap E,$

$$x_3\in\left(x_2,c_3+\varepsilon\right)\cap\mathscr{C}E,\ x_4\in\left(x_3,c_4+\varepsilon\right)\cap E,\cdots;$$

若$x_{n-2}\in\mathscr{C}E$，取

$$x_{n-1}\in\left(x_{n-2},c_{n-1}+\varepsilon\right)\cap E,x_n=1.$$

于是$\sum_{i=1}^{n}\left|\chi_E\left(x_i\right)-\chi_E\left(x_{i-1}\right)\right|\geq n-1$，当$n\to\infty$时，

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\chi_E\left(x_i\right)-\chi_E\left(x_{i-1}\right)\right|\to\infty,$$

即$\bigvee_0^1\left(\chi_E\left(x\right)\right)=+\infty.$ 与$\chi_E\left(x\right)$在$\left[0,1\right]$上有界变差矛盾，故假设不真。

$\left(\Leftarrow\right)$设$c_1,c_2,\cdots,c_m$是E的边界点，m有限。对任意$\left[0,1\right]$分划$\Delta:0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$，$n$各小区间

$$\left[x_i,x_{i+1}\right]\left(0\leq i\leq n-1\right)$$

中至多m个含有$\left\{c_i\right\}_{i=1}^{m}$的点，也即

$$\left[x_i,x_{i+1}\right]\left(0\leq i\leq n-1\right)$$

中至多m个小区间中既有E的点同时也有$\mathscr{C}E$的点。由$\chi_E\left(x\right)$的定义，有

$$\left|\chi_E\left(x_i\right)-\chi_E\left(x_{i-1}\right)\right|=\begin{cases}1, x_i\in E, x_{i-1}\in\mathscr{C}E, or\ x_{i-1}\in E, x_i\in\mathscr{C}E\\ 0, x_i, x_{i-1}\in E, or\ x_i, x_{i-1}\in\mathscr{C}E.\end{cases}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\chi_E\left(x_i\right)-\chi_E\left(x_{i-1}\right)\right|\le m\Rightarrow\bigvee_0^1\left(\chi_E\left(x\right)\right)\le m<\infty.$$

第七题：【参考证明】： 设k_1, k_2为曲面 S 的两个主曲率，它对应的单位主方向为e_1, e_2. 设v是$p\in S$点处单位切向量，它与e_1的交角为θ，则沿v的方向法曲率为

$$k_n\left(v\right)=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta.$$

在$p\in S$点记σ为曲面法向量 N 和v张成的平面，它截曲面 S 为曲线 C，C 称为 S 沿v方向的法截线，则法曲率$k_n\left(v\right)$等于法截线 C 在平面σ上p点处的相对曲率。

因为p点处沿三个不同方向v_1, v_2, v_3的法截线 C 为直线，故存在不同的$\theta_1, \theta_2, \theta_3\left(0\le\theta_1, \theta_2, \theta_3<\pi\right)$使得

$$k_n\left(v_1\right)=k_1\cos^2\theta_1+k_2\sin^2\theta_1=0;$$

$$k_n\left(v_2\right)=k_1\cos^2\theta_2+k_2\sin^2\theta_2=0;$$

$$k_n\left(v_3\right)=k_1\cos^2\theta_3+k_2\sin^2\theta_3=0.$$

如果$\left(k_1, k_2\right)\ne\left(0,0\right)$，则存在$\varepsilon_1=\pm1, \varepsilon_2=\pm1$，有

$$\sin\theta_1\cos\theta_2+\varepsilon_1\cos\theta_1\sin\theta_2=\sin\left(\theta_1+\varepsilon_1\theta_2\right)=0;$$

$$\sin\theta_1\cos\theta_3+\varepsilon_2\cos\theta_1\sin\theta_3=\sin\left(\theta_1+\varepsilon_2\theta_3\right)=0;$$

$$\sin\theta_2\cos\theta_3-\varepsilon_1\varepsilon_2\cos\theta_2\sin\theta_3=\sin\left(\theta_2-\varepsilon_1\varepsilon_2\theta_3\right)=0.$$

由于$0\le\theta_1, \theta_2, \theta_3<\pi$，所以有

$$\theta_1+\varepsilon_1\theta_2=0, \theta_1+\varepsilon_2\theta_3=0, \theta_2-\varepsilon_1\varepsilon_2\theta_3=0.$$

于是推出$\theta_1, \theta_2, \theta_3$必有两个相同，矛盾。故在曲面 S 的任何点$p$有$k_1=k_2=0.$

由此推出 Weingarten 变换$W\equiv0$。将曲面 S 参数化为$x\left(u, v\right)$，它的法向量为$N\left(u, v\right)$，则有

$$W\left(x_u\right)=-N_u=0, W\left(x_v\right)=-N_v=0.$$

故法向量 N 为常向量。再由$x_u\cdot N=x_v\cdot N=0$，得到$x\cdot N=c$为常数，故 S 落在一张平面上。

第八题：【参考解答】： (1)对$y'=f\left(x, y\right)$两边取积分得

$$y\left(x_{n+1}\right)=y\left(x_n\right)+\int_{x_n}^{x_{n+1}}f\left(x, y\left(x\right)\right)\mathrm{d}x$$

由 Simpson 公式，有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{6}[f(x_n, y(x_n)) + 4f(x_n + h/2, y(x_n + h/2))$$

$$+ f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))] + o(h^5)$$

由此可令$c_1 = \frac{1}{6}, c_2 = \frac{4}{6}, c_3 = \frac{1}{6}$.

令$y_n = y(x_n)$，可得

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{2h}{3}[f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) - f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hK_1)]$$

$$+ \frac{h}{6}[f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) - f(x_n + a_3h, y_n + b_{32}hK_1 + b_{32}hK_2)]$$

我们只需要选取参数化$a_2, a_3, b_{21}, b_{31}, b_{32}$使得上式右端为$O(h^4)$.

注意到$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$，记$f_n = f(x_n, y(x_n))$，将$y(x_n + h/2)$做 Taylor 展开得

$$f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) - f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hK_1)$$

$$= f(x_n + h/2, y(x_n) + hf_n/2 + h^2y''(x_n)/8 + O(h^3))$$

$$-f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hK_1)$$

为了使得上式达到精度的要求，应取$a_2 = \frac{1}{2}, b_{21} = \frac{1}{2}$。于是利用 Taylor 展开有

$$f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) - f(x_n + h/2, y_n + hK_1/2)$$

$$= \frac{h^2}{8}y''(x_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^3)$$

另一方面

$$f(x_n + h, y(x_n + h)) - f(x_n + a_3h, y_n + b_{31}hf_n + b_{32}hf(x_n + h/2, y_n + h/2f_n))$$

$$= f(x_n + h, y(x_n) + hf_n + h^2y''(x_n)/2 + O(h^3))$$

$$-f(x_n + a_3h, y_n + (b_{31} + b_{32})hf_n + b_{32}h^2/2(f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f_n) + O(h^3))$$

为了使得上式达到给定的精度，令$a_3 = 1, b_{31} + b_{32} = 1$. 注意到

$$y''(x_n) = f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f_n,$$

再次利用泰勒展开得

$$f(x_n + h, y(x_n + h)) - f(x_n + a_3h, b_{31}hf_n + b_{32}hf(x_n + h/2, y_n + h/2f_n))$$

$$= \frac{h^2}{3}(1 - b_{32})y''(x_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^3)$$

综合上面的结果得

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=\frac{h^3}{12}(2-b_{32})y''(x_n)f_y(x_n,y_n)+O(h^4)$$

令 $h_{32}=2$，得到三级三阶 Runge-Kutta 格式的所有参数。

(2)下面讨论格式的稳定性。对微分方程 $y'=\lambda y$ 应用上述 Runge-Kutta 格式，得

$$K_1=\lambda y_n, K_2=\lambda\left(1+\frac{1}{2}\lambda h\right)y_n, K_3=\lambda\left(1+\lambda h+(\lambda h)^2\right)y_n$$

从而有 $y_{n+1}=\left(1+\lambda h+\frac{1}{2}(\lambda h)^2+\frac{1}{6}(\lambda h)^3\right)y_n$，故格式稳定的条件是

$$\left|1+\lambda h+\frac{1}{2}(\lambda h)^2+\frac{1}{6}(\lambda h)^3\right|<1.$$

第九题：**【参考证明】：**令 $w=w(z)=\frac{f(z)}{M}$，做变换 $F(z)=\frac{w(z)-w(0)}{1-\overline{w(0)}w(z)}$，这里 $w(0)=\frac{f(0)}{M}$.

则该变换把单位圆 $|w|<1$ 映射为 $|F(z)|<1$. 由施瓦兹引理 $|F'(0)|\le 1$. 由于

$$F'(z)|_{z=0}=\left(\frac{w(z)-w(0)}{1-\overline{w(0)}w(z)}\right)'\Bigg|_{z=0}=\frac{w'(0)}{1-|w(0)|^2}=\frac{f'(0)M}{M^2-|f(0)|^2}$$

则 $\left|\frac{f'(0)M}{M^2-|f(0)|^2}\right|\le 1, |f'(0)|M\le\left|M^2-|f(0)|^2\right|$。由于在单位圆 $|z|<1$ 内

$$|f(z)|\le M\ (M>0),$$

特别地有 $|f(0)|\le M$。

于是 $\left|M^2-|f(0)|^2\right|=M^2-|f(0)|^2$，即 $|f'(0)|M\le M^2-|f(0)|^2$.

第十题：**【参考解答】：**X_k 的特征函数为

$$f_{X_k}(t)=Ee^{itX_k}=\frac{1}{2}\left(e^{iat}+1\right)=\exp\left\{\frac{iat}{2}\right\}\cos\frac{at}{2}\ (k=1,2,\cdots)$$

所以 $X_k/2^k$ 的特征函数为

$$f_{X_k/2^k}(t)=f_{X_k}(t/2^k)=\exp\left\{\frac{iat}{2^{k+1}}\right\}\cos\frac{at}{2^{k+1}}$$

于是应用 $\cos\frac{at}{2^2}\cos\frac{at}{2^3}\cdots\cos\frac{at}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{at}{2}}{\sin\frac{at}{2^{n+1}}}$ 得 Y_n 的特征函数为

$$f_{Y_n}(t)=\prod_{k=1}^{n} f_{X_k/2^k}\left(t\right)=f_{X_k}\left(t/2^k\right)=\cos\frac{at}{2^2}\cos\frac{at}{2^3}\cdots\cos\frac{at}{2^{n+1}}\exp\left\{iat\left[\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{at}{2}}{\sin\frac{at}{2^{n+1}}}\exp\left\{\frac{iat}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right\}$$

应用 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{at}{2^{n+1}}}{\frac{at}{2^{n+1}}}=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$，以及

$$\exp\left(\frac{iat}{2}\right)-\exp\left(-\frac{iat}{2}\right)=2i\sin\frac{at}{2}$$

得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_{Y_n}(t)=\dfrac{2}{at}\exp\left(\dfrac{iat}{2}\right)\sin\dfrac{at}{2}=\dfrac{1}{iat}\left[\exp(iat)-1\right]$

由于在区间 $\left[0,a\right]$ 上均匀分布随机变量的特征函数

$$\varphi\left(t\right)=\frac{1}{iat}\left[\exp\left(iat\right)-1\right]$$

所以 Y_n 的分布收敛于区间 $\left[0,a\right]$ 上均匀分布.