2017 年第八届全国大学生数学竞赛决赛

《非数学专业》试卷

一、填空题:

1、过单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}-2z^2=1$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交线且与直线 $\begin{cases} x=0, \\ 3y+z=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程为____________.

2、设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y),\ f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(0,y+1/n)}{f(0,y)}\right)^n=e^{\cot y},$$

则 $f(x,y)=$__________.

3、已知 A 为 n 阶可逆反对称矩阵，b 为 n 元列向量，设 $B=\begin{pmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{pmatrix}$，则 $\operatorname{rank}(B)=$____.

4、$\displaystyle\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分为__________.

5、曲线 $L_1: y=\dfrac{1}{3}x^3+2x\ (0\le x\le 1)$ 绕直线 $L_2: y=\dfrac{4}{3}x$ 旋转所生成的旋转曲面的面积为__________.

第二题：设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，证明：$\dfrac{4}{\pi^2}<\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}<\dfrac{2}{3}$.

第三题：设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数，且满足 $0\le f(x)\le 1$ 与 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$. 证明：当 $0\le x\le 13$ 时，有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t\le 11,$$

并给出取等号的条件.

第四题：设函数$f\left(x,y,z\right)$在区域$\Omega=\left\{\left(x,y,z\right)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$上具有连续的二阶偏导数，且满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，计算

$$I=\iiint\limits_{W}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

第五题: 设n阶方阵A,B满足$AB=A+B$，证明：若存在正整数k，使得$A^k=O$(O为零矩阵)，则行列式$\left|B+2017A\right|=\left|B\right|$.

第六题：设$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n$.

(1)证明：极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在;

(2)记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=C$，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-C\right)$的敛散性.