2018 年第九届全国大学生数学竞赛决赛
(数学专业一、二年级)参考答案

一、填空题

(1) **【参考解答】**: 10

H_n 是 $m=2^n$ 阶对称方阵，存在正交方阵 P 使得 $P^{-1}H_nP=D$ 是对角方阵. 从而,

$$H_{n+1}=\begin{pmatrix}P & O\\ O & P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D & I\\ I & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P & O\\ O & P\end{pmatrix}^{-1}$$

与 $\begin{pmatrix}D & I\\ I & D\end{pmatrix}$ 相似. 设 H_n 的所有特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，则 H_{n+1} 的所有特征值是

$$\lambda_1+1,\lambda_1-1,\lambda_2+1,\lambda_2-1,\cdots,\lambda_m+1,\lambda_m-1$$

利用数学归纳法容易证明: H_n 的所有不同特征值 $\{n-2k\mid k=0,1,\cdots,n\}$ ，并且每个特征值 $n-2k$ 的代数重数为 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. 因此，$\operatorname{rank}\left(H_4\right)=2^4-C_4^2=10.$

(2) **【参考解答】**: $\dfrac{1}{2}$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

(3) **【参考解答】**: -2

考虑直接法计算，直接代入参数表达式，得定积分被积函数为

$$\begin{aligned}f\left(t\right)=2\cos(2t)\cos(\sin(2t))+e^{\sin\left(\pi\sin\frac{t}{2}\right)}&\left[\frac{1}{2}\pi\cos\frac{t}{2}\cos\left(\pi\sin\frac{t}{2}\right)\cos(t-\sin t)\right.\\&\left.-\sin(t-\sin t)(1-\cos t)\right]\end{aligned}$$

可得原函数为

$$F\left(t\right)=\sin(\sin(2t))+e^{\sin\left(\pi\sin\frac{t}{2}\right)}\cos(t-\sin t)\,,$$

所以原积分$=\int_0^{\pi}f\left(t\right)\mathrm{d}\,t=\left[F\left(t\right)\right]_0^{\pi}=-2.$

(4) **【参考解答】**: $((n-1)a+1)y_1^2-(a-1)y_2^2-\cdots-(a-1)y_n^2$

只需要求出 A 的全部特征值即可. 显然 $A+(a-1)I$ 的秩 ≤ 1，所以 $A+(a-1)I$ 的零空间的维数为 $\ge n-1$，从而可设 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1=1-a,\lambda_2=1-a,\cdots,\lambda_{n-1}=1-a,\lambda_n$. 注意到 $\operatorname{tr}A=n$，所以得 $\lambda_n=(n-1)a+1$. 结果就是 f 在正交变换下的标准形为

$$((n-1)a+1)y_1^2-(a-1)y_2^2-\cdots-(a-1)y_n^2$$

二、**【参考解析】**: **【思路一】** 因为 A 在 S 的外部，故有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1>0 \quad (1)$$

对于任意的 $M(x,y,z)\in S\cap\Sigma$，连接 A,M 的直线记为 l_M，其参数方程可设为

$$\begin{cases}\tilde{x}=x+t(x-x_0)\\ \tilde{y}=y+t(y-y_0)\\ \tilde{z}=z+t(z-z_0)\end{cases}\left(-\infty<t<+\infty\right) \quad (2)$$

代入椭球面的方程得

$$\frac{(x+t(x-x_0))^2}{a^2}+\frac{(y+t(y-y_0))^2}{b^2}+\frac{(z+t(z-z_0))^2}{c^2}=1$$

整理得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+t^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-2\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)$$
$$+2t\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)=1$$

因点 M 在椭球面 S 上，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 所以上式化为

$$\begin{aligned}&t^2\left(1+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-2\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)\\&+2t\left(1-\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)=0\end{aligned} \quad (3)$$

由于 l_M 与 S 在 M 点相切，方程（3）有一个二重根 $t=0$. 故有

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0 \quad (4)$$

此时由（1）知，方程（3）的首项系数化为

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1>0$$

特别地，(4) 的系数均不为零因而是一个平面方程，确定的平面记为 Π. 上述的推导证明了 $S\cap\Sigma\subset\Pi$，从而证明了 $S\cap\Sigma\subset S\cap\Pi$

反之，对于截线 $S\cap\Pi$ 上的任一点 $M(x,y,z)$，由 (3)、(4) 两式即知，由 A,M 两点确定的直线 l_M 一定在点 M 与 S 相切. 故由定义，l_M 在锥面 Σ 上. 特别地 $M\in\Sigma$，由 M 的任意性，$S\cap\Pi\subset S\cap\Sigma$.

【思路二】 因为 A 在 S 的外部，故有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}>1>0 \qquad (5)$$

对于任意的$M(x_1,y_1,z_1)\in S\cap\Sigma$，椭球面$S$在$M$点的切平面方程可以写为

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y+\frac{z_1}{c^2}z-1=0$$

因为连接M和A两点的直线是S在点M的切线，所以A点在上述切平面上. 故

$$\frac{x_1}{a^2}x_0+\frac{y_1}{b^2}y_0+\frac{z_1}{c^2}z_0-1=0$$

于是，点$M(x_1,y_1,z_1)$在平面（注意，由（6）式，x_0,y_0,z_0不全为0）

$$\Pi:\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0$$

上，即$M\in S\cap\Pi$. 反之，对于任意的$M(x_1,y_1,z_1)\in S\cap\Pi$，有$\frac{x_0}{a^2}x_1+\frac{y_0}{b^2}y_1+\frac{z_0}{c^2}z_1-1=0$，则$S$在$M$点的切平面$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y+\frac{z_1}{c^2}z-1=0$通过点$A(x_0,y_0,z_0)$，因而$M,A$的连线在点$M$和椭球面$S$相切，它在锥面$\Sigma$上. 故$M\in S\cap\Sigma$. 结论得证

三、【参考解析】：(1) 设C的不同特征值为$\lambda_1,\ldots,\lambda_k$，不妨设$C$具有Jordan标准型：$C=\operatorname{diag}\left(J_1,\ldots,J_k\right)$，其中$J_i$为特征值$\lambda_i$对应的Jordan块.对矩阵$B$做与$C$相同的分块，$B=\left(B_{ij}\right)_{k\times k}$，由$BC=CB$可得$J_iB_{ij}=B_{ij}J_j,i,j=1,2,\ldots,k$.

这样对任意多项式p有$p\left(J_i\right)B_{ij}=B_{ij}p\left(J_j\right)$.取$p$为$J_i$的最小多项式，则得$B_{ij}p\left(J_j\right)=0$.

当$i\neq j$时，$p\left(J_j\right)$可逆，从而$B_{ij}=0$. 因此，$B=\operatorname{diag}\left(B_{11},\ldots,B_{kk}\right)$.

同理，$A=\operatorname{diag}\left(A_{11},\ldots,A_{kk}\right)$，由$AB-BA=C$得

$$A_{ii}B_{ii}-B_{ii}A_{ii}=J_i,i=1,\ldots,k.$$

故$\operatorname{Tr}\left(J_i\right)=\operatorname{Tr}(A_{ii}B_{ii}-B_{ii}A_{ii})=0,i=1,2,\ldots,k$.从而$\lambda_i=0$，即$C$为幂零方阵.

(2) 令$V_0=\left\{v\in\mathbb{C}^n\mid Cv=0\right\}$.对任意$v\in V_0$，由于$C(Av)=A(Cv)=0$，因此$AV_0\subseteq V_0$，同理，$BV_0\subseteq V_0$.

于是存在$0\neq v\in V_0$和$\lambda\in\mathbb{C}$使得$Av=\lambda v$，记$V_1=\{v\mid Av=\lambda v\}\subseteq V_0$，由$AB-BA=C$知，对任意$u\in V_1,A(Bu)=B(Au)+Cu=\lambda Bu$. 故$BV_1\subseteq V_1$.从而存在$0\neq v_1\in V_1$及$\mu\in\mathbb{C}$使得$Bv_1=\mu v_1$，同时有$Av_1=\lambda_1v_1,Cv_1=0$. 将$v_1$扩充为$\mathbb{C}^n$的一组基$\left\{v_1,v_2,\ldots,v_n\right\}$，令$P=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$，则

$$AP=P\begin{pmatrix}\lambda & x\\ 0 & A_1\end{pmatrix},\quad BP=P\begin{pmatrix}\mu & y\\ 0 & B_1\end{pmatrix},\quad CP=P\begin{pmatrix}0 & z\\ 0 & C_1\end{pmatrix}$$

并且A_1,B_1,C_1满足$A_1B_1-B_1A_1=C_1,A_1C_1=C_1A_1,B_1C_1=C_1B_1$. 由数学归纳法即可得知，

A,B,C 同时相似于上三角阵.

(3) 当$n\geq 3$时，取$A=E_{12},B=E_{23},C=E_{13}$，则$A,B,C$满足题意.

对$n=2$，不妨设$C=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则有$AC=CA$，得$A=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\0&a_1\end{pmatrix}$.

类似有$BC=CB$得$B=\begin{pmatrix}b_1&b_2\\0&b_1\end{pmatrix}$. 于是$AB-BA=0$，这与$AB-BA=C$矛盾！故满足$C\neq 0$的$n$最小为$3$.

四、【参考解析】: 设$M=\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|=\left|f'(x_1)\right|,m=\min\limits_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|=\left|f'(x_0)\right|$，则有

$$\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\geq\left|\int_{x_0}^{x_1}f''(x)\mathrm{d}x\right|=\left|f'\left(x_1\right)-f'\left(x_0\right)\right|\geq M-m$$

另一方面，有$\int_0^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\leq M\int_0^1\mathrm{d}x=M$故，只需证明$m\leq 2\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

若$f'(x)$在$[0,1]$中有零点，则$m=0$.此时（2）显然成立.现在假设$f'(x)$在$[0,1]$上无零点，不妨设$f'(x)>0$，因而$f(x)$严格递增.下面分两种情形讨论.

情形1 $f(0)\geq 0$此时$f(x)\geq 0(x\in[0,1])$. 由$f'(x)=\left|f'(x)\right|\geq m$，得

$$\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(f(x)-f(0))\mathrm{d}x+f(0)$$

$$\geq\int_0^1(f(x)-f(0))\mathrm{d}x=\int_0^1 f'(\xi)x\,\mathrm{d}x\geq\int_0^1 mx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}m$$

故，（2）成立.

情形2 $f(0)<0$.此时有$f(1)\leq 0$，根据f的递增性，有$f(x)\leq 0(x\in[0,1])$

$$\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(f(1)-f(x))\mathrm{d}x-f(1)$$

$$\geq\int_0^1|f(1)-f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left|f'(\xi)\right|(1-x)\mathrm{d}x\geq\int_0^1 m(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}m$$

五、【参考证明】 A为幂零矩阵，所以$A^n=0$. 记$f(x)=(1-x)^\alpha$，当$j>k$时，记$C_k^j=0$，则

$$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(xI+A)^k=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}a_kC_k^jx^{k-j}A^j=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}A^j,\quad x\in(-1,1)$$

若有$2<m<n$使得$A^m\neq 0,A^{m+1}=0$，则

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{m-\alpha}G(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)}{m!}A^m$$

若$m\geq 3$，则$m-\alpha>1$，此时$\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x$发散. 另一方面，若$m\leq 2$，则$m-\alpha<1$，此时$\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x$收敛. 总之，使得对于$1\leq i,j\leq n$，积分$\int_0^1 g_{ij}(x)\mathrm{d}x$均存在的充分必要条件是$A^3=0$.

六、【参考证明】【思路一】令$y=\dfrac{x'(t)}{x(t)}$，则y定号. 不妨设$y(t)\geq 0$（否则考虑$t\to -t$）.

下证结论对于$C_1=1,C_2=\sqrt{3}$成立. 若存在$t_0,y(t_0)>\sqrt{3}$，则

$$y'(t)=\frac{x''(t)x(t)-x'(t)^2}{x^2(t)}=g(t)-y^2<2-y^2<-1,t<t_0$$

则$y'(t)\big|_{t<t_0}<0\Rightarrow\dfrac{y'}{y^2-2}<-1,t<t_0\Rightarrow\displaystyle\int_t^{t_0}\frac{y'\,\mathrm{d}s}{y^2-2}<t-t_0,t<t_0$，即

$$t>t_0+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{y(s)-2}{y(s)+2}\bigg|_t^{t_0}>-L>-\infty,$$

其中$L>0$为一个常数. 这与$y(t)$在$\mathbf{R}$上有定义矛盾.

若存在$t_0,y(t_0)<1$，则$y'=g(t)-y^2>\delta>0,t<t_0$，也就$\exists t_1<t_0,y(t_1)<0$.矛盾.

【思路二】不妨设$x(t)$递增（否则考虑方程$\ddot{x}=g(-t)x$）. 注意到$\ddot{x}=g(t)x>0$，则$x(-\infty)=\dot{x}(-\infty)=0$. 于是$\dot{x}\ddot{x}=g(t)x\dot{x}$，则

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2=\int_{-\infty}^t\dot{x}\ddot{x}\,\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^t g(s)x\dot{x}\,\mathrm{d}s\\&\Rightarrow\int_{-\infty}^t x\dot{x}\,\mathrm{d}s<\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2<2\int_{-\infty}^t x\dot{x}\,\mathrm{d}s\\&\Rightarrow\frac{1}{2}x(t)^2<\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2<x(t)^2\Rightarrow x(t)<\dot{x}(t)<\sqrt{2}x(t)\end{aligned}$$