2017 年第八届全国大学生数学竞赛决赛
《非数学专业》参考答案

一、填空题:

1、**【参考答案】**: $y-3z=0$.

【思路一】: 取 $x=0$，则有 $\begin{cases} y^2-4z^2=2 \\ y^2+z^2=4 \end{cases}$，解该方程组，得 $5z^2=2\Rightarrow z=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$，代入第二个方程，得 $y^2+\frac{2}{5}=4\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}=\pm3\sqrt{\frac{2}{5}}$，于是取点为 $\left(0,\sqrt{\frac{2}{5}},3\sqrt{\frac{18}{5}}\right)$ 为交线上的点，且与直线垂直，直线的参数方程可以记成 $\begin{cases} x=0, \\ y=t, \\ z=-3t \end{cases}$ 所以直线的方向向量可以取为 $\vec{s}=(0,1,-3)$，从而由直线的点法式方程，可得平面方程为

$$y-3\sqrt{\frac{2}{5}}-3\left(z-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)=0\Rightarrow y-3z-3\sqrt{\frac{2}{5}}+3\sqrt{\frac{2}{5}}=0\Rightarrow y-3z=0.$$

【思路二】: 在 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-2z^2=1 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$ 中消去 z，得

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-2\left(4-x^2-y^2\right)=1\text{，即}9x^2+10y^2=36$$

直线 $\begin{cases} x=0 \\ 3y+z=0 \end{cases}$ 的方向向量为 $\vec{s}=(1,0,0)\times(0,3,1)=(0,-1,3)$，并且所求平面方程与直线垂直，所以所求平面的一个法向量为 $\vec{n}=(0,-1,3)$，交线上其中一点为 $(2,0,0)$，因此所求平面方程为 $y-3z=0.$

2、**【参考答案】** $f(x,y)=e^{-x}\sin y$

【思路一】 因为 $\frac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$，所以两边积分，其中 y 为常数，并且根据结论

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=-f(x)\Rightarrow f(x)=Ce^{-x},$$

所以函数 $f(x,y)$ 的结构为 $f(x,y)=C(y)e^{-x}+g(y)$. 由于不需要取到所有的原函数和 $C(y)$ 的任意性，尝试取 $g(y)=0$，即取 $f(x,y)=C(y)e^{-x}$. 这样只要 $C(y)$ 取值得当，同样可以满足

$$f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1\text{，即}f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=C\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

于是由第二个条件

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(0,y+1/n\right)}{f\left(0,y\right)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{C\left(y+1/n\right)}{C\left(y\right)}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{C\left(y+1/n\right)-C\left(y\right)}{C\left(y\right)}\right)^n$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(1+\frac{C\left(y+1/n\right)-C\left(y\right)}{C\left(y\right)}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{C\left(y+1/n\right)-C\left(y\right)}{C\left(y\right)}}$$

$$=e^{\frac{1}{C\left(y\right)}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C\left(y+1/n\right)-C\left(y\right)}{\frac{1}{n}}}$$

$$=e^{\frac{1}{C\left(y\right)}\cdot C'\left(y\right)}=e^{\cot y}\Rightarrow\frac{C'\left(y\right)}{C\left(y\right)}=\frac{\cos y}{\sin y}\Rightarrow C\left(y\right)=C_1\sin y\cdot$$

所以有 $f\left(x,y\right)=C_1\sin ye^{-x}$，从而由 $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$，即 $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=C_1=1$，即函数

$$f\left(x,y\right)=\sin ye^{-x}$$

即为满足条件的函数.

【思路二】利用偏导数的定义，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(0,y+1/n\right)}{f(0,y)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f\left(0,y+1/n\right)-f(0,y)}{f(0,y)}\right)^n$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(0,y+1/n\right)-f(0,y)}{\frac{1}{n}f(0,y)}}=\mathrm{e}^{\frac{f_y(0,y)}{f(0,y)}}$$

所给等式化为 $\mathrm{e}^{\frac{fy(0,y)}{f(0,y)}}=\mathrm{e}^{\cot y}$，即 $\frac{f_y(0,y)}{f(0,y)}=\cot y$．对 y 积分得 $\ln f(0,y)=\ln\sin y+\ln C$，即 $f(0,y)=C\sin y$.

又 $\frac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$，解得 $f(x,y)=\varphi\mathrm{e}^{-x}$（$\varphi(y)$为待定函数），又 $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$，得 $\varphi(y)=\sin y$，所以 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\sin y$.

3、【参考答案】 n． 由于进行初等变换矩阵的秩不变，所以

$$\begin{pmatrix}A & b\\ b^T & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & -b^TA^{-1}b\end{pmatrix}$$

由于 A 为 n 阶可逆反对称矩阵，所以 A^{-1} 也是反对称矩阵，于是有 $b^TA^{-1}b=0$. 因此

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & -b^TA^{-1}b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(A)=n$，所以$\mathrm{rank}(B)=n$.

4、**【参考答案】**18.

对求和式进行放大处理，得

$$\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} = 1+\sum_{n=2}^{100} n^{-\frac{1}{2}} = 1+\sum_{n=2}^{100}\int_{n-1}^{n} n^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$
$$< 1+\sum_{n=2}^{100}\int_{n-1}^{n} x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 1+\int_{1}^{100} x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 19$$

又对其进行缩小处理，可得

$$\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{100}\int_{n}^{n+1} n^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x > \sum_{n=1}^{100}\int_{n}^{n+1} x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$
$$= \int_{1}^{101} x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 2(\sqrt{101}-1)\approx 18.1$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$的整数部分为 18.

5、**【参考答案】**$\dfrac{\sqrt{5}\left(2\sqrt{2}-1\right)}{3}\pi.$

在曲线L_1上取点$P\left(x,y\right)$，则该点为旋转轴L_2的距离为$\mathrm{d}=\dfrac{1}{5}\left(x^3+2x\right)$，从而可得旋转曲面的面积微元可取为$\mathrm{d}A=2\pi\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}s$，其中弧微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+\left(x^2+2\right)^2}\mathrm{d}x$$

所以$\mathrm{d}A=\dfrac{2}{5}\pi\sqrt{1+\left(x^2+2\right)^2}\left(x^3+2x\right)\mathrm{d}x$，于是旋转曲面的面积为

$$A=\int_0^1\mathrm{d}A=\frac{2}{5}\pi\int_0^1\sqrt{1+\left(x^2+2\right)^2}\left(x^3+2x\right)\mathrm{d}x$$

令$x^2+2=t$，得

$$A=\frac{\pi}{5}\int_2^3 t\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{15}\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^3=\frac{\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)}{3}\pi$$

第二题:【参考证明】: 设$f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$f'\left(x\right)=-\frac{2}{x^3}+\frac{2\cos x}{\sin^3 x}=\frac{2\left(x^3\cos x-\sin^3 x\right)}{x^3\sin^3 x}(1)$$

令$\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}-x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\varphi'(x)=\frac{\cos^{4/3}x+\frac{1}{3}\cos^{-2/3}x\sin^2 x}{\cos^{2/3}x}-1$$
$$=\frac{2}{3}\cos^{2/3}x+\frac{1}{3}\cos^{-4/3}x-1$$

由均值不等式，得

$$\frac{2}{3}\cos^{2/3}x+\frac{1}{3}\cos^{-4/3}x=\frac{1}{3}\left(\cos^{2/3}x+\cos^{2/3}x+\cos^{-4/3}x\right)$$
$$>\sqrt[3]{\cos^{2/3}x\cdot\cos^{2/3}x\cdot\cos^{-4/3}x}=1$$

所以当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\varphi'(x)>0$，从而$\varphi(x)$单调增加. 又$\varphi(0)=0$，因此$\varphi(x)>0$，即

$$x^3\cos x-\sin^3 x<0.$$

因此由(1)可得$f'(x)<0$，从而$f(x)$在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递减. 由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\frac{4}{\pi^2},$$

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{\tan x+x}{x}\cdot\frac{\tan x-x}{x\tan^2 x}\right)$$
$$=2\lim_{x\to0+}\left(\frac{\tan x-x}{x^3}\right)=\frac{2}{3}.$$

所以当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，有$\dfrac{4}{\pi^2}<\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}<\dfrac{2}{3}$.

第三题：**【参考证明】**：由条件$0\le f(x)\le1$，有

$$\int_0^{\sqrt{x}}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}}f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\le\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}$$

由柯西不等式：$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$，等号当$a_i$与$b_i$成比例时成立. 于是有

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}=1\cdot\sqrt{x}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(x+27)}+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}(13-x)}$$
$$\le\sqrt{1+2+\frac{2}{3}}\sqrt{x+\frac{1}{2}(x+27)+\frac{3}{2}(13-x)}=11.$$

且等号成立的充分必要条件是

$$\sqrt{x}=\frac{1}{2}\sqrt{x+27}=\frac{3}{2}\sqrt{13-x}\text{，即}x=9\,.$$

所以

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t\le 11$$

特别当$x=9$时，有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &=\int_0^{3} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{6} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{2} f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

根据周期性以及$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$，有

$$\int_0^{3} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{6} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{2} f(t)\,\mathrm{d}t=11\int_0^{1} f(t)\,\mathrm{d}t=11.$$

所以取等号的充分必要条件是$x=9.$

第四题:**【参考解答】**记球面为$\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$外侧的单位法向量为$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$，考虑区间积分等式:

$$\oiint_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}S\quad(1)$$

对两边都利用高斯公式，得

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}S&=\oiint_{\Sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\ &=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}V\qquad(2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\oiint_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}S\\ &=\oiint_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\ &=2\iiint_{\Omega}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}V+\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}V\ (3)\end{aligned}$$

将(2)(3)代入(1)并整理得

$$I=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left[1-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left(1-r^2\right)r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}.$$

第五题:【参考证明】: 由$AB=A+B\Rightarrow\left(A-E\right)\left(B-E\right)=E$，则

$$\left(A-E\right)\left(B-E\right)=\left(B-E\right)\left(A-E\right);$$

化简后可得$AB=BA$.

(1)若B可逆，则由$AB=BA$可得$B^{-1}A=AB^{-1}$，从而$\left(B^{-1}A\right)^k=\left(B^{-1}\right)^kA^k=O$，所以$B^{-1}A$的特征值全部为0，则$E+2017B^{-1}A$的特征值全为1，因此$\left|E+2017B^{-1}A\right|=1$，所以

$$\left|B+2017A\right|=\left|B\right|\left|E+2017B^{-1}A\right|=\left|B\right|.$$

(2)若B不可逆，则存在无穷多个数t，使得$B_t=tE+B$可逆，且有$AB_t=B_tA$. 利用(I)的结论，有恒等式

$$\left|B_t+2017A\right|=\left|B_t\right|,$$

取$t=0$，则有$\left|B+2017A\right|=\left|B\right|$.

第六题:【参考解答】(1)利用不等式：当$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln\left(1+x\right)<x$，有

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}$$

$$=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\le\frac{1}{n}-\frac{\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n-1}}=0$$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k}{k-1}=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k}{k-1}\right)$$

$$=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)\right)\ge1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right)=\frac{1}{n}>0$$

所以$\left\{a_n\right\}$单调减少有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

(2) 显然，以a_n为部分和的级数为$1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln n+\ln\left(n-1\right)\right)$，则该级数收敛于$C$，且$a_n-C>0$，记余项为$r_n$，则有

$$a_n - C = -r_n = -\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln k + \ln\left(k-1\right)\right)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right)$$

根据泰勒公式，当$x>0$时，$\ln\left(1+x\right) > x - \dfrac{x^2}{2}$，所以

$$a_n - C > \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2\left(k-1\right)^2} - \frac{1}{k}\right)$$

记$b_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2\left(k-1\right)^2} - \frac{1}{k}\right)$，下面证明正项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散. 因为

$$c_n \triangleq n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2\left(k-1\right)\left(k-2\right)}\right) < nb_n$$

$$< n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k\left(k-1\right)}\right) = \frac{1}{2}$$

而当$n\to\infty$时，$c_n = \dfrac{n-2}{2\left(n-1\right)} \to \dfrac{1}{2}$,所以$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nb_n = \frac{1}{2}$. 根据比较判别法可知，级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散. 因此级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - C\right)$发散.