2016 年第八届全国大学生数学竞赛初赛

(数学类）试卷

一、(本题 15 分)设S是空间中的一个椭球面. 设方向为常向量V的一束平行光照射S，其中部分光线与S相切，它们的切点在S上形成一条曲线Γ. 证明：Γ落在一张过椭球中心的平面上。

二、(本题 15 分)设n为奇数，A, B为两个实n阶方阵，且$BA = 0$. 记$A + J_A$的特征值集合为S_1，$B + J_B$的特征值集合为S_2，其中J_A, J_B分别表示A, B的 Jordan 标准型. 求证：$0 \in S_1 \cup S_2$.

三、(本题 20 分)设$A_1, \cdots, A_{2017}$为 2016 阶实方阵. 证明关于$x_1, \cdots, x_{2017}$的方程

$$\det\left(x_1 A_1 + \cdots + x_{2017} A_{2017}\right) = 0$$

至少有一组非零实数解，其中 det 表示行列式.

四、(本题 20 分)设$f_0(x), f_1(x)$是$[0,1]$上正连续函数, 满足$\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

设$f_{n+1}(x) = \dfrac{2 f_n^2(x)}{f_n(x) + f_{n-1}(x)}, n = 1, 2, \cdots$.

求证：数列$a_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x, n = 1, 2, \cdots$单调递增且收敛.

五、(本题 15 分)设$\alpha > 1$. 求证：不存在$[0, +\infty)$上的正可导函数$f(x)$满足

$$f'(x) \ge f^{\alpha}(x), x \in [0, +\infty). \qquad (1)$$

六、(本题 15 分)设$f(x), g(x)$是$[0,1]$区间上的单调递增函数，满足

$$0 \le f(x), g(x) \le 1, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

求证：$\int_0^1 \left|f(x) - g(x)\right|\mathrm{d}x \le \dfrac{1}{2}$.