华教杯全国大学生数学竞赛真题

（非数学类专业组）

（扫描上方二维码即可报名）

一、选择题

1. 【2019 年真题】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^2e^x-1}{2x(1+x)}=$（　　）

A. $\dfrac{2}{3}$　　　　B. $\dfrac{3}{2}$　　　　C. $\dfrac{1}{2}$　　　　D. 2

【答案】B

解：分母直接等价为 $2x$，分子使用泰勒展开，由于分母次幂最高到一次，故对 e^x 展开到 1 阶即可，分子等价为 $3x$，综上，原极限等于 $\dfrac{3}{2}$。

2. 【2019 年真题】不等式 $|x+1|-|2x-1|\geq\dfrac{3}{4}$ 的解集为（　　）

A. $[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}]$　　　　B. $[\dfrac{1}{4},1]$　　　　C. $[\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4}]$　　　　D. $[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{4}]$

【答案】D

解：$x<-1$ 时，不等式为：$-1-x-(1-2x)\geq\dfrac{3}{4}$，解得：$x\geq\dfrac{11}{4}$，无解；

$-1\leq x\leq\dfrac{1}{2}$ 时，不等式为：$x+1-(1-2x)\geq\dfrac{3}{4}$，解得：$\dfrac{1}{4}\leq x\leq\dfrac{1}{2}$；

$x>\dfrac{1}{2}$ 时，不等式为：$x+1-(2x-1)\geq\dfrac{3}{4}$，解得：$\dfrac{1}{2}<x\leq\dfrac{5}{4}$；

综上，不等式的解集为 $[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{4}]$。

3. 【2019 年真题】在区间[0,+∞)上，奇函数$f(x)$满足$f(x)=x^2-2x$，则$f(x)$的单调递减区间为（　　）

A. $(-1,1)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　C. $(-2,2)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

【答案】A

解：对$f(x)$在$[0,+\infty)$上求导$f'(x)=2x-2$令$f'(x)=0$得在$[0,+\infty)$上单调递减区间为$[0,1)$，又由于$f(x)$是奇函数，故单调递减区间关于原点对称即$(-1,1)$。

4. 【2019 年真题】已知$f^{'}(\ln x)=1+x$，则$f(x)=$（　　）

A. $x+e^x+C$　　B. $x-e^x+C$　　C. $-x+e^x+C$　　D. $-x-e^x+C$

【答案】A

解：

设$\ln x=a,x=e^a(x>0)$

$f^{'}(a)=1+e^a$

则$f(a)=a+e^a+c$

当$a=x$时$,f(x)=x+e^x+c$

所以选 A。

5. 【2020 年真题】已知$\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{2}$，其中$0\le\alpha$，$\beta\le\frac{\pi}{2}$，则$\beta=$（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】A

解：$\because 0\le\alpha,\beta\le\frac{\pi}{2}$　$\therefore 0\le\sin\alpha,\sin\beta\le 1$

观察若使$\cos(\alpha+\beta),\sin\alpha,\sin\beta$均为$\frac{1}{2}$，则题干即可成立。

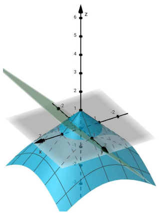
故$\alpha=\beta=\frac{\pi}{6}$，则有$\sin\alpha=\sin\beta=\frac{1}{2}$，

且$\cos(\alpha+\beta)=\cos\frac{\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，符合题干要求，故选 A。

6.【2020 年真题】由曲面$1-z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$x=z$，$x=0$在$x\ge 0$中所围成空间区域的体积为(　　)

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{2}{9}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{4}{9}$

【答案】B



解：

由函数图像可得被积区域 $D:\begin{cases}2x+y^2=1\\-1\le y\le 1\\x\ge 0\end{cases}$，故 $V=\iint\limits_D\left(1-\sqrt{x^2+y^2}-x\right)dxdy=\dfrac{2}{9}$。

7. 【2020 年真题】已知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，$f(0)=1$，且满足等式

$f^{'}(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$，则 $f^{'}(x)=$（　　）

A. $-\dfrac{e^x}{x-1}$　　B. $-\dfrac{e^x}{x+1}$　　C. $-\dfrac{e^{-x}}{x+1}$　　D. $-\dfrac{e^{-x}}{x-1}$

【答案】C

解：原方程两边乘 $x+1$ 再求导，得 $(x+1)f''(x)=-(x+2)f'(x)$，

解方程得 $f'(x)=\dfrac{Ce^{-x}}{x+1}$，由 $f(0)=1$，知 $f'(0)=-1$，从而 $C=-1$，故 $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x+1}$。

8. 【2021 年真题】已知 $f(x)$ 是连续函数，且满足 $f(x)+\lim\limits_{x\to1}f(x)=3x^2-1$，则 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=$（　　）

A. 1　　B. 0　　C. 2　　D. -1

【答案】A

解：设 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=a$，对原式取极限 $\lim\limits_{x\to1}$ 则 $2a=\lim\limits_{x\to1}3x^2-1=2$，故 $a=1$。

9.【2021 年真题】已知点 $A(2,-1,7)$，$B(4,5,-2)$，AB 交 xOy 平面于点 P，且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，则 $\lambda=$（　　）

A. $-\dfrac{5}{2}$　　B. $-\dfrac{7}{2}$　　C. $\dfrac{5}{2}$　　D. $\dfrac{7}{2}$

【答案】D

解：点 P 在 xOy 平面上，可设点 P 的坐标为（$a,b,0$）

$\because A(2,-1,7), B(4,5,-2)$

$\therefore \vec{AP}=(a-2,b+1,-7)$,

$\vec{PB}=(4-a,5-b,-2)$,

$\because \vec{AP}=\lambda\vec{PB}$,

$\therefore \lambda=\dfrac{-7}{-2}=\dfrac{7}{2}$

10. 【2022 年真题】空间曲线 $\Gamma_1:\begin{cases}z=x^2+y^2,\\x^2+y^2=2y,\end{cases}$ $\Gamma_2:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\x+y+z=4,\end{cases}$ 在交点 $A(1,1,2)$ 处的夹角余弦为（　）

A. $\dfrac{3}{10}$　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

【答案】C

解：空间曲线 Γ_1 在 $(1,1,2)$ 点的切线为 $\vec{a}(0,-2,-4)$，在 Γ_2 $(1,1,2)$ 点的切线 $\vec{b}(-1,1,0)$，故 $|\cos\theta|=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$。

二、填空题

1. 【2019 年真题】若 f 在 x_0 二阶可导，则 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 为曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点的必要条件是________。

【答案】 $f''\left(x\right)=0$

解：拐点为在自变量处二阶导数等于零，且该自变量左右两侧的二阶导数符号相反，故若二阶可导，则拐点处 $f''\left(x\right)=0$ 反之不成立。

2. 【2019 年真题】 $y=\cos x+3x^2$ 在点 $\left(1,0\right)$ 的切线方程为________。

【答案】 $y=(-\sin 1+6)(x-1)$

解：$y'=-\sin x+6x$，当 $x=1$ 时 $y'=-\sin 1+6$，设 $y=kx+b$，代入 $\left(1,0\right)$ 和 $y'=-\sin 1+6$ 得 $b=\sin 1-6$

故 $y=(-\sin 1+6)(x-1)$。

3．【2019 年真题】已知函数 $f(x)$ 是周期为 $T(T>0)$ 的连续函数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=$____________。

【答案】$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$

解：当 $x=nT$ 时 $\frac{\int_0^{nT} f(t)dt}{nT}$ 的含义为一个周期上的平均值，故当 $n\to\infty$ 时，把极限改写为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^{nT+\alpha} f(t)dt}{nT+\alpha}$

其中 $\alpha\in(0，T)$，当 α 取定一个常数时，$n\to\infty$，α 可忽略不计，故原极限含义就是求一个周期上的平均值，故答案为 $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ 。

4．【2020 年真题】设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1-a\tan^2 x}-b}{\sin^2 x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $b-a=$__________。

【答案】5

解：因为函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，所以极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-a\tan^2 x}-b}{\sin^2 x}$ 必存在，则

$\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1-a\tan^2 x}-b)=0$，得 $b=1$．代入原函数后求极限：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-a\tan^2 x}-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+(-a\tan^2 x)}-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}a\tan^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{2}a,$$

所以 $-\frac{1}{2}a=2=f(0), a=-4$

因此 $b-a=5$。

5．【2020 年真题】求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(2^{\frac{1}{n}}-2^{\frac{1}{n+3}})=$__________。

【答案】$3\ln 2$

解：由拉格朗日中值定理得原极限为 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2 2^{\varepsilon}\ln 2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$ 其中 $\varepsilon\in\left(\frac{1}{n+3},\frac{1}{n}\right)$，由等价无穷小替换得

$$\lim_{n\to\infty}n^2\cdot 2^{\frac{1}{n}}\cdot\ln 2\cdot\frac{3}{n^2}=3\ln 2。$$

6．【2021 年真题】已知 a 为单位向量，$a+3b$ 垂直于 $7a-5b$，$a-4b$ 垂直于 $7a-2b$，则向量 a 与 b 的夹角为__________。

【答案】$\frac{\pi}{3}$

解：

$$\begin{cases}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(7\vec{a}-5\vec{b}\right)=0\\ \left(\vec{a}-4\vec{b}\right)\cdot\left(7\vec{a}-2\vec{b}\right)=0\end{cases}$$

得 $2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2$，将其代入 $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(7\vec{a}-5\vec{b}\right)=0$ 中得 $\vec{a}^2=\vec{b}^2$ 即 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$

故 $2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a}\quad\vec{b}\rangle=|\vec{b}||\vec{b}|$ 所以 $\cos\langle\vec{a}\quad\vec{b}\rangle=\frac{1}{2}$，a,b 夹角为 $\frac{\pi}{3}$。

7. 【2021 年真题】设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$（$p$ 为常数），则当________时级数绝对收敛。

【答案】$p>\frac{1}{2}$

解：因为要满足级数绝对收敛，所以 $0\le\left|(-1)^n\frac{\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^p}\right|=\left|\frac{\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^p}\right|$，$\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^p}=\frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$

由 P-级数的敛散性可知当 $P+\frac{1}{2}>1$ 即 $P>\frac{1}{2}$ 此级数绝对收敛。

三、解答题

1. 【2020 年真题】判定级数 $\sum\frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n}$ 的收敛性.

【答案】解：

$$a_n=\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\cdot(1+\frac{\sin n}{\sqrt{n}})^{-1}=\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\cdot(1-\frac{\sin n}{\sqrt{n}}+\frac{\sin^2 n}{n}+o(\frac{\sin^2 n}{n}))$$

$$=\frac{\sin n}{\sqrt{n}}-\frac{\sin^2 n}{n}+\frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}}+o(\frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}})(n\to\infty).$$

若记

$b_n=\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$，$c_n=\frac{\sin^2 n}{n}=\frac{\cos 2n}{2n}-\frac{1}{2n}$，$d_n=\frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}}$，则 $a_n-b_n+c_n\sim d_n$，且 $\sum d_n$ 绝对收敛，$\sum c_n$ 发

散（因为调和级数 $\sum\frac{1}{n}$ 发散，而由 Dirichlet 判别法知 $\sum\frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛），注意到由 Dirichlet 判别法知 $\sum b_n$ 收敛，则原级数 $\sum a_n$ 发散。

2．【2020 年真题】设函数 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续正值函数，比较 $e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}$，$\int_0^1 f(x)dx$ 的大小．

【答案】解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(\int_0^1\sqrt[n]{f(x)}dx)^n = e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}$，又取 $g(x)=1$，$k=\frac{1}{n}(n\ge 2)$，$k'=\frac{1}{1-n}$，

又 $\int_0^1 f(x)dx > (\int_0^1\sqrt[n]{f(x)}dx)^n\cdot(\int_0^1 1dx)^{\frac{1}{k}} = (\int_0^1\sqrt[n]{f(x)}dx)^n$，故对上式两边取极限，令 $n\to\infty$，即得 $\int_0^1 f(x)dx \ge \lim\limits_{n\to\infty}(\int_0^1\sqrt[n]{f(x)}dx)^n = e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}$。

3．【2020 年真题】证明：对任意 x_1，x_2，y_1，$y_2\in R$，$|\sin x_2\cos y_2-\sin x_1\cos y_1|\le|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$．

【答案】证明：

$|\sin x_2\cos y_2-\sin x_1\cos y_1|\le|\sin x_2\cos y_2-\sin x_1\cos y_2+\sin x_1\cos y_2-\sin x_1\cos y_1|$

$\le|\sin x_2\cos y_2-\sin x_1\cos y_2|+|\sin x_1\cos y_2-\sin x_1\cos y_1|$

$=|\cos y_2||\sin x_2-\sin x_1|+|\sin x_1||\cos y_2-\cos y_1|\le|\sin x_2-\sin x_1|+|\cos y_2-\cos y_1|$．

利用一元函数拉格朗日中值定理，有

$$|\sin x_2-\sin x_1|=|\cos\xi||x_2-x_1|\le|x_2-x_1|,$$

其中 $\xi\in(x_1, x_2)$，同理，有

$$|\cos y_2-\cos y_1|\le|y_2-y_1|$$

所以，有

$$|\sin x_2\cos y_2-\sin x_1\cos y_1|\le|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$$