

# 2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛 (非数学类)

## 试卷及参考答案

### 一、填空题(共有 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

(1) 已知  $y_1 = e^x$  和  $y_2 = xe^x$  是齐次二阶常系数线性微分方程的解, 则该微分方程是\_\_\_\_\_.

**【参考解答】:** 由解的表达式可知微分方程对应的特征方程有二重根  $r = 1$ , 故所求微分方程为

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$$

(2) 设有曲面  $S: z = x^2 + 2y^2$  和平面  $\pi: 2x + 2y + z = 0$ , 则与  $\pi$  平行的  $S$  的切平面方程是\_\_\_\_\_.

**【参考解答】:** 设  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  是  $S$  上一点, 则  $S$  在点  $P_0$  的切平面方程为  $-2x_0(x - x_0) - 4y_0(y - y_0) + (z - z_0) = 0$ 。由于该切平面与已知平面  $L$  平行, 则  $(-2x_0, -4y_0, 1)$  平行于  $(2, 2, 1)$ , 故存在常数  $k \neq 0$ , 使得  $(-2x_0, -4y_0, 1) = k(2, 2, 1)$ , 故得

$$x_0 = -1, y_0 = -\frac{1}{2}, z_0 = \frac{3}{2}, \text{ 所以切平面方程就为 } 2x + 2y + z + \frac{3}{2} = 0.$$

(3) 设  $y = y(x)$  由  $x = \int_1^{y-x} \sin^2 \left( \frac{\pi t}{4} \right) dt$  所确定, 则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \text{_____}$ .

**【参考解答】:** 易知  $y(0) = 1$ , 两边对变量  $x$  求导, 则

$$1 = \sin^2 \left( \frac{\pi}{4}(y-x) \right) (y' - 1) \Rightarrow y' = \csc^2 \left( \frac{\pi}{4}(y-x) \right) + 1$$

把  $x = 0$  代入可得  $y' = 3$ .

(4) 设  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \text{_____}$ .

**【参考解答】:**  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right], 1 - \frac{1}{(n+1)!} \rightarrow 1.$

(5) 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^3$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \text{_____}$ .

**【参考解答】:** 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^3$  可得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left( 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) = 3$ .

于是  $\frac{1}{x} \ln \left( 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) = 3 + \alpha, \alpha \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$ , 即有  $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{e^{3x+\alpha x} - 1}{x} - 1$ , 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x+\alpha x} - 1}{x} - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \alpha x}{x} - 1 = 2.$$

**第二题: (12 分)** 设  $n$  为正整数, 计算  $I = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos \left( \ln \frac{1}{x} \right) \right| dx$ .

**【参考解答】:**  $I = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos \left( \ln \frac{1}{x} \right) \right| dx = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos(\ln x) \right| dx = \int_{e^{-2n\pi}}^1 |\sin(\ln x)| \frac{1}{x} dx$

令  $\ln x = u$ , 则有  $I = \int_{-2n\pi}^0 |\sin(u)| du = \int_0^{2n\pi} |\sin t| dt = 4n \int_0^{\pi/2} |\sin t| dt = 4n.$

**第三题：(14 分)** 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上有二阶导数, 且有正常数  $A, B$  使得

$$|f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B, \text{ 证明: 对于任意 } x \in [0,1], \text{ 有 } |f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2}.$$

**【参考证明】:** 由泰勒公式, 有

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2, \xi \in (0,x)$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2, \eta \in (x,1)$$

$$\text{上面两式相减, 得到 } f'(x) = f(1) - f(0) - \frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2 + \frac{f''(\xi)}{2}x^2$$

$$\text{由条件 } |f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B, \text{ 得到 } |f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2} \left[ (1-x)^2 + x^2 \right]$$

$$\text{由于 } (1-x)^2 + x^2 \text{ 在 } [0,1] \text{ 的最大值为 } 1, \text{ 所以有 } |f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2}.$$

**第四题：(14 分)** (1) 设一球缺高为  $h$ , 所在球半径为  $R$ 。证明该球缺的体积为

$$\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2, \text{ 球冠的面积为 } 2\pi Rh.$$

(2) 设球体  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 12$  被平面  $P: x+y+z=6$  所截的小球缺为  $\Omega$ 。记球缺上的球冠为  $\Sigma$ , 方向指向球外, 求第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$

**【参考证明】(1):** 设球缺所在球表面方程为  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ , 球缺的中心线为  $z$  轴, 且设球缺所在的圆锥顶角为  $2\alpha$ 。

记球缺的区域为  $\Omega$ , 则其体积为

$$\iiint_{\Omega} dV = \int_{R-h}^R dz \iint_{D_z} dx dy = \int_{R-h}^R \pi(R^2 - z^2) dz = \frac{\pi}{3}(3R-h)h^2.$$

由于球面的面积微元为  $dS = R^2 \sin \theta d\theta$ , 故球冠的面积为

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\alpha} R^2 \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha) = 2\pi Rh.$$

(2) 记球缺  $\Omega$  的底面圆为  $P_1$ , 方向指向球缺外, 且记  $J = \iint_{P_1} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ . 由高斯

公式, 有  $I + J = \iiint_{\Omega} 3dV = 3V(\Omega)$ , 其中  $V(\Omega)$  为  $\Omega$  的体积。由于平面  $P$  的正向单位法向

$$\text{量为 } \frac{-1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \text{ 故 } J = \frac{-1}{\sqrt{3}} \iint_{P_1} (x+y+z) dS = \frac{-6}{\sqrt{3}} \sigma(P_1) = -2\sqrt{3} \sigma(P_1),$$

其中  $\sigma(P_1)$  为  $P_1$  的面积。故  $I = 3V(\Omega) - J = 3V(\Omega) + 2\sqrt{3}\sigma(P_1)$ .

因为球缺底面圆心为  $Q(2,2,2)$ , 而球缺的顶点为  $D(3,3,3)$ , 故球缺的高度为

$h = |QD| = \sqrt{3}$ . 再由(1)所证并代入  $h = \sqrt{3}$  和  $R = 2\sqrt{3}$  得

$$I = 3 \cdot \frac{\pi}{3} (3R - h) h^2 + 2\sqrt{3}\pi (2Rh - h^2) = 33\sqrt{3}\pi.$$

**第五题: (15分)** 设  $f$  在  $[a, b]$  上非负连续, 严格单增, 且存在  $x_n \in [a, b]$  使得

$$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^n dx, \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

**【参考解答】:** 考虑特殊情形:  $a = 0, b = 1$ 。下面证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

首先,  $x_n \in [0, 1]$ , 即  $x_n \leq 1$ , 只要证明  $\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < 1)$ ,  $\exists N, \forall n > N$  时,  $1 - \varepsilon < x_n$ 。由  $f$  在  $[0, 1]$  上严格单增, 就是要证明  $f^n(1 - \varepsilon) < [f(x_n)]^n = \int_0^1 [f(x)]^n dx$ .

由于  $\forall c \in (0, 1)$ , 有  $\int_c^1 [f(x)]^n dx > f^n(c)(1 - c)$ . 取  $c = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ , 则  $f(1 - \varepsilon) < f(c)$ , 即

$\frac{f(1 - \varepsilon)}{f(c)} < 1$ , 于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(1 - \varepsilon)}{f(c)} \right]^n = 0$ , 所以  $\exists N, \forall n > N$  时有  $\left[ \frac{f(1 - \varepsilon)}{f(c)} \right]^n < \frac{\varepsilon}{2} = 1 - c$ . 即

$$f^n(1 - \varepsilon) < [f(c)]^n (1 - c) \leq \int_c^1 [f(x)]^n dx \leq \int_0^1 [f(x)]^n dx = f^n(x_n).$$

从而  $1 - \varepsilon < x_n$ , 由  $\varepsilon$  的任意性得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

再考虑一般情形。令  $F(t) = f(a + t(b - a))$ , 由  $f$  在  $[a, b]$  上非负连续, 严格单增, 知  $F$  在  $[0, 1]$  上非负连续, 严格单增。从而  $\exists t_n \in [0, 1]$ , 使得  $F^n(t_n) = \int_0^1 F^n(t) dt$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$ . 即

$$f^n(a + t_n(b - a)) = \int_0^1 f^n(a + t(b - a)) dt.$$

记  $x_n = a + t_n(b - a)$ , 则有  $[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^n dx$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + (b - a) = b$ .

**第六题: (15分)** 设  $A_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{\pi}{4} - A_n \right)$ .

**【参考解答】:** 令  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 因  $A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+i^2/n^2}$ , 所以有  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$ .

记  $x_i = \frac{i}{n}$ , 则  $A_n = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i) dx$ , 故  $J_n = n \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)] dx$ .

由拉格朗日中值, 存在  $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_i)$  使得  $J_n = n \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta_i)(x - x_i) dx$ .

记  $m_i, M_i$  分别是  $f'(x)$  在  $[x_{i-1}, x_i]$  上的最大值和最小值, 则  $m_i \leq f'(\zeta_i) \leq M_i$ , 故积分

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta_i)(x - x_i) dx \geq m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) dx, M_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) dx$$

之间, 所以存在  $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$  使得  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta_i)(x - x_i) dx = -f'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})^2 / 2$ .

于是, 有  $J_n = -\frac{n}{2} \sum_{i=1}^n f'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})^2 = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n f'(\eta_i)$ . 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{\pi}{4} - A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = -\frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = -\frac{1}{2} [f(1) - f(0)] = \frac{1}{4}.$$