华教杯全国大学生数学竞赛真题

（数学类专业组）

（扫描上方二维码即可报名）

一、选择题

1．【2019 年真题】当 $x \to 0$ 时，下列与 x 不是等价无穷小的是（　　）

A．$\sin x$　　　　B．$\tan x$　　　　C．$\arctan x$　　　　D．$(1+x)^n$

【答案】D

解：当 $x \to 0$ 时，对 $(1+x)^n$ 泰勒展开得 $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + o\left(x^2\right)$，易知与 x 不是等价无穷小。

2．【2019 年真题】在区间(0,1)上，函数 $f(x)=e^x$ 与 $g(x)=3-x$ 图象的交点个数为（　　）

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

【答案】B

解：当 $x=1$ 时，$f(x)=e, g(x)=2, e \approx 2.718$

所以 $x=1$ 时，$f(x)>g(x)$，在(0,1)上有 1 个交点。

3．【2019 年真题】设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n > 0)$ 为正项级数，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$（　　）

A．收敛　　　　B．发散　　　　C．可能收敛也可能发散　　　　D．既不收敛也不发散

【答案】C

解：设 $u_n = \frac{1}{n}$

则 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n+1}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$（满足条件）

但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，排除 A、D

设$u_n=\frac{1}{n^2}$

则 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n+1}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=1$（满足条件）

但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，排除 B。

4. 【2019 年真题】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}xdx=$（　　）

A. $\frac{(2n)!}{(2n+1)!}$　　B. $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!}$　　C. $\frac{(2n)!}{(2n+1)!!}$　　D. $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

【答案】D

解：使用华里士公式易得$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}xdx=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$。

5. 【2020 年真题】已知$\sqrt{3}\le x\le 3$，则$f(x)=x+\frac{7}{5}\sqrt{4-\frac{x^2}{3}}+\frac{8}{5}\sqrt[3]{\frac{3}{x}}$的最小值为（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【答案】C

解：令$h(x)=x$，$g(x)=4-\frac{x^2}{3}$，$k(x)=\frac{3}{x}$，易知$g(x),k(x)$在$\sqrt{3}\le x\le 3$上为减函数，$h(x)$在$\sqrt{3}\le x\le 3$上为增函数，由于$h(x)$一次函数增长速度没有$g(x)$二次函数下降速度快，由此推得$f(x)$在$\sqrt{3}\le x\le 3$上为减函数，故有最小值$f(3)=6$。

6. 【2020 年真题】设D为平面上由$y=x$和$y=x^2$所围成的有界区域，则D分别绕$y=-x-1$旋转所成立体的体积为（　　）

A. $\frac{19\sqrt{2}}{60}\pi$　　B. $\frac{19\sqrt{2}}{40}\pi$　　C. $\frac{19\sqrt{3}}{60}\pi$　　D. $\frac{21\sqrt{2}}{60}\pi$

【答案】A

解：本题使用二重积分求解，由题易得被积区域为 $y=x$ 和 $y=x^2$ 所围成的有界区域

$$V=2\pi\iint_D r(x,y)d\sigma, r(x,y)=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

代入旋转体体积公式 $V=2\pi\iint_D \frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}}d\sigma=\frac{19\sqrt{2}}{60}\pi$ 。

7. 【2021 年真题】已知 $\int_0^x f\left(t^2\right)dt=2x^3$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$（　　）

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

【答案】D

解：由 $\int_0^x f\left(t^2\right)dt=2x^3$，两边求导，得 $f(x^2)=6x^2$

因此 $f(x)=6x$，从而 $\int_0^1 f(x)dx=3$。

8. 【2021 年真题】定积分 $\int_{-1}^1 \frac{x^{2021}\cos x}{1+x^2}dx=$（　　）

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．4

【答案】A

解：令 $f(x)=\frac{x^{2021}\cos x}{1+x^2}$

则 $f(-x)=\frac{(-x)^{2021}\cos(-x)}{1+(-x)^2}=-f(x)$

所以 $f(x)$ 为奇函数，积分区间[-1,1]关于原点对称。

所以 $\int_{-1}^1 \frac{x^{2021}\cos x}{1+x^2}dx=0$。

9. 【2019 年真题】五阶行列式中 $a_{12}=0$，则展开式中为零的项至少有（　　）个

A．12　　　　B．24　　　　C．36　　　　D．48

【答案】B

解：根据行列式定义可知至少为的个数为：$4\times3\times2=24$。

10. 【2019 年真题】若 A、B 为 n 阶方阵，则下列说法错误的是（　　）

A. 如果 $AB=E$，必有 $BA=E$

B. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

C. 如果 B 及 $E+AB$ 可逆，则 $E+BA$ 可逆

D. $|AB|=|BA|$

【答案】B

解：矩阵不满足乘法交换性，选 B。

二、填空题

1. 【2022 年真题】常微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-xy=0$ 的通解是__________。

【答案】 $y=Ce^{\frac{1}{2}x^2}$

解：$\dfrac{dy}{dx}-xy=0$，$\dfrac{dy}{y}=xdx$ 两边积分得 $\int\dfrac{dy}{y}=\int xdx$ ，$\ln y=\dfrac{1}{2}x^2+C_1$ 化简得 $y=Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ 。

2. 【2022 年真题】函数 $f(x)=2(x+1)|x^2-2x-3|$ 有__________个不可导点。

【答案】1

解：由函数图像可知 $x=3$ 点是不可导点，故只有一个不可导点。

3. 【2022 年真题】已知 $f(x)=\int_0^x \arctan(x-t)^3 dt$，则 $f'(x)=$__________。

【答案】 $\arctan x^3$

解：设：$x-t=u$，则 $\int_0^x \arctan(x-t)^3 dt=\int_0^x \arctan u^3 du$

故原式 $=\arctan x^3$。

4. 【2022 年真题】函数 $y(x)$ 由隐函数 $x^2+2xy-y^2=2$ 确定，则 $y''=$__________。

【答案】 $\dfrac{2y^2-4xy-2x^2}{(y-x)^3}$

解：对隐函数两边求导得

$$y'=\frac{y+x}{y-x}$$

再上式两边求导得

$$y''=\frac{(y-x)(y'+1)-(y+x)(y'-1)}{(y-x)^2}$$
$$=\frac{2y^2-4xy-2x^2}{(y-x)^3}$$

5．【2022 年真题】设两曲面：$xyz=\lambda \quad (\lambda>0)$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 相切，则 $\lambda=$__________。

【答案】$\frac{abc}{3\sqrt{3}}$

解：曲面 $xyz=\lambda$ 在点 (x,y,z) 处切平面法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(yz,zx,xy)$,

曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在点 (x,y,z) 处切平面法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})$, 两平面在点 (x,y,z) 处相切，则

$\frac{x}{a^2yz}=\frac{y}{b^2zx}=\frac{z}{c^2xy}=t$，即 $\frac{x^2}{a^2\lambda}=\frac{y^2}{b^2\lambda}=\frac{z^2}{c^2\lambda}=3t, 3\lambda t=1$，解得：$\lambda=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$。

6．【2022 年真题】曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 $0\le x\le 3$ 的一段弧的长度等于__________。

【答案】$\frac{14}{3}$

解：弧长元素 $ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+x}dx$，

$$S=\int_0^3\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}}-1)=\frac{14}{3}。$$

7．【2022 年真题】函数 $f(x)=(\frac{1}{3}x+2)e^{\frac{1}{x}}$ 在其定义域内的极小值等于__________。

【答案】$3e^{\frac{1}{3}}$

解：$y'=\frac{x^2-x-6}{3x^2}e^{\frac{1}{x}}$，由函数的单调性可得 $x=3$ 是函数的极小值点，即 $f(3)=3e^{\frac{1}{3}}$。

三、解答题

1．【2021 年真题】一均匀物体（密度 ρ 为常量）占有的闭区域 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0,|x|=a,|y|=a$ 所围成，求：

(1)物体的体积；

(2)物体的质心；

(3)物体关于 z 轴的转动惯量。

【答案】(1)解：由对称可知

$$V=4\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2} dz$$

$$=4\int_0^a dx\int_0^a (x^2+y^2)dy=4\int_0^a (ax^2+\frac{a^3}{3})dx=\frac{8}{3}a^4.$$

(2) 解：由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\rho z dv=\frac{4}{V}\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2} zdz$$

$$=\frac{2}{V}\int_0^a dx\int_0^a (x^4+2x^2y^2+y^4)dy$$

$$=\frac{2}{V}\int_0^a (ax^4+\frac{2}{3}a^3x^2+\frac{a^5}{5})dx=\frac{7}{15}a^2.$$

(3) 解： $I_z=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x^2+y^2)dv=4\rho\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2}(x^2+y^2)dz$

$$=4\rho\int_0^a dx\int_0^a (x^4+2x^2y^2+y^4)dy=4\rho\frac{28}{45}a^6=\frac{112}{45}\rho a^6$$

2.【2020 年真题】设 Γ 为以点 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$ 为顶点的三角形区域的有向边界曲线 $\overrightarrow{ABCA}$，函数 $f(t)$ 具有一阶连续导数，证明：$\oint_{\Gamma} f'(xyz)(xyzdx+x^2zdy+x^2ydz)=0$。

【答案】证明：记 $I=\oint_{\Gamma} f'(xyz)(xyzdx+x^2zdy+x^2ydz)$，则有

$I=\oint_{\Gamma} xf'(xyz)(yzdx+xzdy+xydz)=\oint_{\Gamma} xdf(xyz)$.

又 $I=-\oint_{\Gamma} f(xyz)dx$，再有轮换对称性知 $I=-\oint_{\Gamma} f(xyz)dy=-\oint_{\Gamma} f(xyz)dz$，所以

$I=-\frac{1}{3}\oint_{\Gamma} f(xyz)d(x+y+z)$. 由于 Γ 位于平面 $x+y+z=1$ 上，故 $I=0$，即

$\oint_{\Gamma} f'(xyz)(xyzdx+x^2zdy+x^2ydz)=0$

3. 【2020 年真题】将 $\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}{x^2(x^2+1)}$ 分解为部分分式之和。

【答案】解：记 $Q(x)=x^2(x^2+1)$，则

$$V_Q=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^2+1},\frac{x}{x^2+1}\right),$$

$$Q(x)V_Q=\left(\frac{Q(x)}{x},\frac{Q(x)}{x^2},\frac{Q(x)}{x^2+1},\frac{xQ(x)}{x^2+1}\right)$$

$$=(1,\ x,\ x^2,\ x^3)\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

于是 $M_Q=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$， $M_Q^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$

对任意 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，有

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}{x^2(x^2+1)}=V_QM_Q^{-1}(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)^T=\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2}+\frac{a_2-a_0}{x^2+1}+\frac{(a_3-a_1)x}{x^2+1}$$

（扫描上方二维码即可报名）