

第十一届全国大学生数学竞赛初赛试卷
(数学类A卷, 2019年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 空间中有两个圆球面 B_1 和 B_2 , B_2 包含在 B_1 所围球体的内部, 两球面之间的闭区域为 D . 设 B 是含在 D 中的一个圆球, 它与球面 B_1 和 B_2 均相切. 问:

- (i) (4分) B 的球心轨迹构成的曲面 S 是何种曲面;
- (ii) (2分) B_1 的球心和 B_2 的球心是曲面 S 的何种点.

证明你的论断 (9分).

答: B 的球心轨迹构成的曲面 S 为旋转椭球面 (2分+2分=4分); B_1 和 B_2 的球心为 S 的两个焦点 (2分).

证明: 设 B_1 的球心为 O_1 , 半径为 R_1 , B_2 的球心为 O_2 , 半径为 R_2 . 设 B 是含在 D 中的一个球, 球心在 P 点, 半径为 r , 它与球 B_1 和 B_2 均相切. 因为 B 与 B_1 内切, 所以 $PO_1 = R_1 - r$. 因为 B 与 B_2 外切, 所以 $PO_2 = R_2 + r$. 于是有

$$PO_1 + PO_2 = R_1 + R_2$$

总是常数. (4分)

设 ℓ 是过球心 O_1 和 O_2 的直线. 因为 B_1 和 B_2 在以 ℓ 为不动轴的空间旋转下不变, 故区域 D 也在以 ℓ 为不动轴的空间旋转下不变. B 在以 ℓ 为不动轴的空间旋转下保持与 B_1 和 B_2 均相切, 它的球心 P 在以 ℓ 为不动轴的空间旋转下是一个圆周. 在每个过直线 ℓ 的平面 Σ 上, 由于 $PO_1 + PO_2 = R_1 + R_2$ 总是常数, B 的球心轨迹 P 在平面 Σ 上

是一个椭圆. 故 B 的球心轨迹构成的曲面 S 为旋转椭球, 旋转轴为过 O_1 和 O_2 的直线,
并且两球心 O_1 和 O_2 为旋转椭球的两个焦点. (9分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分)设 $\alpha > 0$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非负, 有二阶导函数, $f(0) = 0$, 且在 $[0, 1]$ 上不恒为零. 求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得

$$\xi f''(\xi) + (\alpha + 1)f'(\xi) > \alpha f(\xi).$$

证明 (反证法) 若结论不对, 则对一切 $x \in [0, 1]$ 有

$$xf''(x) + (\alpha + 1)f'(x) \leq \alpha f(x).$$

这说明函数 $xf'(x) + \alpha f(x) - \alpha \int_0^x f(u) du$ 的导数非正, 因而单调递减, 但它在 0 取 0, 故,

$$xf'(x) + \alpha f(x) \leq \alpha \int_0^x f(u) du, \quad x \in [0, 1]. \quad (\dots\dots 5\text{分})$$

因而

$$x^\alpha f'(x) + \alpha x^{\alpha-1} f(x) \leq \alpha x^{\alpha-1} \int_0^x f(u) du, \quad x \in [0, 1].$$

将上式在 $[0, x]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned} x^\alpha f(x) &\leq \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} \left(\int_0^t f(u) du \right) dt \\ &\leq \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} \left(\int_0^x f(u) du \right) dt \\ &= x^\alpha \int_0^x f(u) du. \end{aligned}$$

故,

$$f(x) \leq \int_0^x f(u) du. \quad (\dots\dots 10\text{分})$$

记, $g(x) = \int_0^x f(u) du$. 则从上式可得 $g'(x) \leq f(x)$. 因此

$$(e^{-x} g(x))' \leq 0.$$

这说明 $e^{-x} g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上递减. 注意到 $g(0) = 0$, 可得 $g(x) \leq 0$. 但从 $f(x)$ 非负可知 $g(x) \geq 0$. 故, $g(x) \equiv 0$. 从而 $f(x) \equiv 0$. 这与 $f(x)$ 不恒为零矛盾! $(\dots\dots 15\text{分})$

得分	
评阅人	

三、(本题15分) 设 A 为 n 阶复方阵, $p(x)$ 为 $I - \bar{A}A$ 的特征多项式, 其中 \bar{A} 表 A 的共轭矩阵. 证明: $p(x)$ 必为实系数多项式.

证明: 记

$$p(t) = \det(tI - (I - A\bar{A})) = \det((t-1)I + A\bar{A})$$

为 $I - A\bar{A}$ 的特征多项式. 对任何实数 t , 有

$$(*) \quad \overline{p(t)} = \overline{\det((t-1)I + A\bar{A})} = \det((t-1)I + \bar{A}A). \quad (5 \text{分})$$

对任何两个方阵 A 和 B , 有 $\det(sI + AB) = \det(sI + BA)$, 证明如下: 取可逆矩阵序列 B_n 使得 $B_n \rightarrow B$ (例如, 对充分大的 n 取 $B_n = B + \frac{1}{n}I$), 则

$$\det(sI + AB_n) = \det(sB_n^{-1} + A)\det B_n = \det B_n \det(sB_n^{-1} + A) = \det(sI + B_n A).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得到公式 $\det(sI + AB) = \det(sI + BA)$. 用 $B = \bar{A}$ 代入公式, 则有

$$\overline{p(t)} = \det((t-1)I + \bar{A}A) = \det((t-1)I + A\bar{A}) = p(t)$$

对所有的实数 t 成立, 故 $p(t)$ 的系数都是实数. (15分)

注: 也可通过利用分块矩阵初等变换求 $\begin{pmatrix} I & B \\ A & sI \end{pmatrix}$ 的行列式来证明公式 $\det(sI - AB) = \det(sI - BA)$. 具体地:

$$\begin{aligned} \forall s \neq 0, \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ A & sI \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & sI - AB \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I & B \\ A & sI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A/s & I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I - BA/s & B \\ 0 & sI \end{pmatrix} \end{aligned}$$

对上两矩阵等式两边取行列式即得 $\det(sI - AB) = \det(sI - BA)$ 对一切非零的实数均成立. 从而多项式 $\det(sI - AB) - \det(sI - BA) \equiv 0$, 因为多项式 $\det(sI - AB) - \det(sI - BA)$ 至多是 n 次多项式. 获证.

得分	
评阅人	

四、(本题20分) 已知 f_1 为实 n 元正定二次型. 令 $V = \{f \mid f \text{ 为实 } n \text{ 元二次型, 满足: 对任何实数 } k \text{ 有 } kf + f_1 \text{ 属于恒号二次型}\}$,

这里恒号二次型为 0 二次型, 正定二次型及负定二次型的总称. 证明: V 按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间, 并求这个向量空间的维数.

证法1: 设 $f \in V$, f 与 f_1 所对应的二次型矩阵分别为 A 和 B . 由 B 正定可推得

$$\exists P \text{ 可逆, 使得 } B = PP^T, A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^T. \quad (10 \text{ 分})$$

由条件: 对任何实数 k 有 $kf + f_1$ 属于恒号二次型可推得 $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$.

事实上, 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 则由式子

$$kf + f_1 = (z_1, \dots, z_n)P \begin{pmatrix} k\lambda_1 + 1 & & \\ & \ddots & \\ & & k\lambda_n + 1 \end{pmatrix} P^T \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

知, 总可取某实数 q , 使得 $(q\lambda_1 + 1)(q\lambda_2 + 1) < 0$. 从而可取两点: $(z_1, \dots, z_n)P = (0, 1, 0, \dots, 0)$ 及 $(z_1, \dots, z_n)P = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $qf + f_1$ 在该两点取值异号, 矛盾.

到此, 我们实际上得到 $V = \{kf_1 \mid k \in \mathbb{R}\}$.

直接可知, V 按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间, 并这个向量空间的维数是 1. 证毕. (20 分)

证法2: 首先, $V \neq \emptyset$, 因为 $0 \in V$, 且对任何实数 k 有 $kf_1 \in V$. (2 分)

其次, 对任意非零 $f \in V$, 若存在 $k \in \mathbb{R}$, 使得 $kf + f_1 \equiv 0$, 则由 f_1 的正定性, 可知 $k \neq 0$, 从而 $f = -\frac{1}{k}f_1$; 若对任意的 $k \in \mathbb{R}$, $kf + f_1 \not\equiv 0$, 则由条件知, $kf + f_1$ 要么为正定二次型, 要么为负定二次型. 断言: f 和 f_1 必线性相关.

用反证法. 若 f 和 f_1 线性无关, 则由 f_1 正定知, 存在点 P_1 使得 $f_1(P_1) > 0$. 此时考察二次型 $g = f_1(P_1)f - f(P_1)f_1$, 由 f 和 f_1 线性无关知 $g \not\equiv 0$ (因为 $\{f_1(P_1), -f(P_1)\}$ 是一组不全为零的数), 故存在 P_2 使得

$$(*) \quad 0 \neq g(P_2) = f_1(P_1)f(P_2) - f(P_1)f_1(P_2).$$

此时有

- (i) $P_2 \neq (0, \dots, 0)$, $f_1(P_2) > 0$;

(ii) $f(P_2), f(P_1)$ 不同时为零.

先考虑 $f(P_1) \neq 0$ 的情形, 由(*)式有

$$\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_2) + f_1(P_2) = \frac{g(P_2)}{-f(P_1)} \neq 0.$$

令 $k = \frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}$, 由 $kf + f_1$ 恒号可知: 当 $\frac{g(P_2)}{-f(P_1)} > 0$ 时, $\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_1) + f_1(P_1) > 0$, 明显上述不等式左边为零, 矛盾.

当 $\frac{g(P_2)}{-f(P_1)} < 0$ 时, 得 $\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_1) + f_1(P_1) < 0$, 不等式左边为零, 矛盾.

接下来考虑 $f(P_2) \neq 0$ 的情形. 同样由(*)式有

$$-\frac{f_1(P_2)}{f(P_2)}f(P_1) + f_1(P_1) = \frac{g(P_2)}{-f(P_2)} \neq 0.$$

令 $k = -\frac{f_1(P_2)}{f(P_2)}$, 类似地, 由 $kf + f_1$ 恒号可得矛盾. 断言获证. (15分)

现在, f 与 f_1 线性相关, 故存在一组不全为0得数 $\lambda_1\mu$, 使得 $\lambda_1f_1 + \mu f = 0$.

若 $\lambda_1 = 0$, 则 $\mu \neq 0$, 因此有 $f = -\frac{\lambda_1}{\mu}f_1$. 若 $\lambda_1 \neq 0$, 则由 $\lambda_1f_1 \neq 0$ 知 $\mu \neq 0$, 因此仍然有 $f = -\frac{\lambda_1}{\mu}f_1$.

到此, 我们实际上得到 $V = \{kf_1 | k \in \mathbb{R}\}$. (18分)

最后直接可知, V 按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间, 并这个向量空间的维数是 1. (20分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

得分	
评阅人	

五、(本题15分) 设 $\delta > 0, \alpha \in (0, 1)$, 实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{h_n}{n^\alpha}\right) + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}}, \quad n \geq 1,$$

其中 $\{h_n\}$ 有正的上下界. 证明: $\{n^\delta x_n\}$ 有界.

证明. 记 $c := \inf_{n \geq 1} h_n$.

由题设可知存在 $N \geq 1$ 使得当 $n \geq N$ 时, 成立

$$|x_{n+1}| \leq \left(1 - \frac{c}{n^\alpha}\right)|x_n| + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}}$$

..... (+3 分= 3 分)

以及

$$\frac{\delta}{n} \leq \frac{c}{2n^\alpha}.$$

..... (+3 分= 6 分)

取 $C := \max\left(N^\delta|x_N|, \frac{2}{c}\right)$. 我们来证明对于 $n \geq N$ 成立 $|x_n| \leq \frac{C}{n^\delta}$. 首先, 由 C 的定义知当 $n = N$ 时, 有 $|x_n| \leq \frac{C}{n^\delta}$. 进一步, 若对某个 $n \geq N$ 成立 $|x_n| \leq \frac{C}{n^\delta}$, 则

$$\begin{aligned} |x_{n+1}| - \frac{C}{(n+1)^\delta} &\leq \left(1 - \frac{c}{n^\alpha}\right)\frac{C}{n^\delta} + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}} - \frac{C}{(n+1)^\delta} \\ &= C\left(\frac{1}{n^\delta} - \frac{1}{(n+1)^\delta}\right) - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} \end{aligned}$$

..... (+3 分= 9 分)

$$\leq \frac{C\delta}{n^{1+\delta}} - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} \leq \frac{Cc}{2n^{\alpha+\delta}} - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} = -\frac{Cc-2}{2n^{\alpha+\delta}} \leq 0.$$

..... (+3 分= 12 分)

因此, 由数学归纳法得到当 $n \geq N$ 时, 总成立 $|x_n| \leq \frac{C}{n^\delta}$. 因此, $\{n^\delta x_n\}$ 有界.

..... (+3 分= 15 分)

得分	
评阅人	

六、(本题20分) 设 $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

(i) 证明 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的凸函数. 进一步, 证明当 $x, y \geq 0$ 时成立 $f(x) + f(y) \leq f(0) + f(x+y)$.

(ii) 设 $n \geq 3$, 试确定集合 $E \equiv \left\{ \sum_{k=1}^n f(x_k) \mid \sum_{k=1}^n x_k = 0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$.

解:

(i) 我们有

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \quad f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}.$$

当 $x \geq 0$ 时, 成立 $f''(x) \geq 0$. 所以 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的凸函数.

..... (+4 分= 4 分)

从而 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 因此对于 $x, y \geq 0$, 有

$$f(x+y) - f(x) - f(y) + f(0) = \int_0^y (f'(t+x) - f'(t)) dt \geq 0.$$

..... (+2 分= 6 分)

(ii) 由连续性, 易见 E 是一个区间.

..... (+2 分= 8 分)

我们有 $f(x) + f(-x) = 1$.

..... (+2 分= 10 分)

下设 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$.

若 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, 则 $\sum_{j=1}^n f(x_j) = \frac{n}{2}$.

若 x_1, x_2, \dots, x_n 不全为零, 设其中负数的个数为 k , 非负数的个数为 m , 则 $m+k=n$, $1 \leq k \leq n-1$.

不妨设 $x_1, \dots, x_m \geq 0$, $x_{m+1}, \dots, x_n < 0$. 记 $y_1 = -x_{m+1}, y_2 = -x_{m+2}, \dots, y_k = -x_n$, $x = x_1 + \dots + x_m = y_1 + \dots + y_k$, 则由 (i) 易得

$$f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_k) \leq (k-1)f(0) + f(x).$$

注意到 $mf\left(\frac{x}{m}\right) - f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单减,

..... (+4 分= 14 分)

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n f(x_j) &= \sum_{j=1}^m f(x_j) + k - \sum_{j=1}^k f(y_j) \\ &\geq mf\left(\frac{x}{m}\right) + k - \left((k-1)f(0) + f(x)\right) \\ &> \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[mf\left(\frac{u}{m}\right) + k - \left((k-1)f(0) + f(u)\right) \right] \\ &= \frac{k+1}{2} \geq 1.\end{aligned}$$

这表明 $\inf E \geq 1$ 而 $1 \notin E$.

另一方面, 取 $u > 0$, $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = \frac{u}{n-1}$, $x_n = -u$, 则

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n f(x_j) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left((n-1)f\left(\frac{u}{n-1}\right) + 1 - f(u) \right) = 1.$$

因此, $\inf E = 1$.

..... (+4 分= 18 分)

另一方面, 由 $f(-x) = 1 - f(x)$ 可得

$$E = \{n - z | z \in E\}.$$

因此, $\sup E = n - 1$, 且 $n - 1 \notin E$.

所以 E 为开区间 $(1, n - 1)$.

..... (+2 分= 20 分)