第十届清疏竞赛班非数学类 26

级数计算(1)

裂项法：

普通裂项：

$$1:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(n+1\right)\right]}{\ln n^{n}\ln\left(n+1\right)^{n+1}}$$

分析：如果你不能直接代数变形裂项,我们直接猜裂项.

证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln n^{n}}-\frac{1}{\ln\left(n+1\right)^{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln\left(n+1\right)^{n+1}-\ln n^{n}}{\ln n^{n}\cdot\ln\left(n+1\right)^{n+1}}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln\frac{\left(n+1\right)^{n+1}}{n^{n}}}{\ln n^{n}\cdot\ln\left(n+1\right)^{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(n+1\right)\right]}{\ln n^{n}\ln\left(n+1\right)^{n+1}}$$

$$2:\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{2n^{2}}\right)$$

计算：

$\arctan x-\arctan y=\arctan\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$, x,y 在题目中涉及的范围.

注意到: $-\dfrac{1}{2n^{2}}=\dfrac{\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n+1}}{1+\frac{n-1}{n}\frac{n}{n+1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{2n^{2}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)-\arctan\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

$3:$ 计算$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-1}$, 这里设$x^{2^j}\neq 1, \forall j\in\mathbb{N}$.

证明：

显然$\left|x\right|\neq\pm 1$, 注意到

$$\frac{1}{x^{2^{n-1}}-1}-\frac{1}{x^{2^n}-1}=\frac{x^{2^{n-1}}+1}{\left(x^{2^{n-1}}\right)^2-1}-\frac{1}{x^{2^n}-1}=\frac{x^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-1}$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{x^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-1}=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{x^{2^{n-1}}-1}-\frac{1}{x^{2^n}-1}\right)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^{2^m}-1}$$

当$\left|x\right|<1$, 我们知道$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{x^{2^m}-1}=-1$,

当$\left|x\right|>1$，我们知道$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{x^{2^m}-1}=0$.

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-1}=\begin{cases}\frac{x}{x-1}, \left|x\right|<1\\ \frac{1}{x-1}, \left|x\right|>1\end{cases}$.

强行裂项类:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+2}}{n\left(n+2\right)}$, $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

计算：

因为$H_n\sim\ln n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+2}}{n\left(n+2\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)H_{n+2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_{n+2}}{n}-\frac{H_{n+2}}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_{n+2}}{n}-\frac{H_{n+4}}{n+2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_{n+4}}{n+2}-\frac{H_{n+2}}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{H_3}{1}+\frac{H_4}{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+2\right)\left(n+3\right)\left(n+4\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{H_3}{1}+\frac{H_4}{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+2\right)\left(n+3\right)\left(n+4\right)}$$

$$=\frac{23}{16}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\left(n+2\right)\left(n+3\right)}-\frac{1}{\left(n+3\right)\left(n+4\right)}\right]$$

$$=\frac{23}{16}+\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1+2\right)\left(1+3\right)}=\frac{35}{24}.$$

技巧类：计算$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sinh\left(2^{n+1}x\right)}, x>0$

定义：$\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

计算：

方法1：$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{\sinh\left(2^{n+1}x\right)}=\sum_{n=0}^{m}\frac{2}{e^{2^{n+1}x}-e^{-2^{n+1}x}}=2\sum_{n=0}^{m}\frac{e^{2^{n+1}x}}{e^{2^{n+2}x}-1}$

$$=2\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{1}{e^{2^{n+1}x}-1}-\frac{1}{e^{2^{n+2}x}-1}\right)=2\left(\frac{1}{e^{2x}-1}-\lim_{m\to\infty}\frac{1}{e^{2^{m+2}x}-1}\right)=\frac{2}{e^{2x}-1}.$$

方法2：

利用$\sinh x=2\sinh x\cosh x, \cosh\left(2x\right)=2\cosh^{2}x-1, \frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sinh\left(2^{n+2}x\right)}=\frac{1}{\sinh x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}\cosh\left(x\right)\cosh\left(2x\right)\cdots\cosh\left(2^{n+1}x\right)}$$

$$=\frac{1}{\sinh x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2\cosh\left(x\right)\right)\left(2\cosh\left(2x\right)\right)\cdots\left(2\cosh\left(2^{n+1}x\right)\right)}$$

$$=\frac{1}{\sinh x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\cosh\left(2^{n+1}x\right)}{\left(2\cosh\left(x\right)\right)\left(2\cosh\left(2x\right)\right)\cdots\left(2\cosh\left(2^{n}x\right)\right)}-\frac{\cosh\left(2^{n+2}x\right)}{\left(2\cosh\left(x\right)\right)\left(2\cosh\left(2x\right)\right)\cdots\left(2\cosh\left(2^{n+1}x\right)\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{\sinh x}\left(\frac{\cosh\left(2x\right)}{2\cosh x}-\lim_{n\to\infty}\frac{\cosh\left(2^{n+2}x\right)}{\left(2\cosh\left(x\right)\right)\left(2\cosh\left(2x\right)\right)\cdots\left(2\cosh\left(2^{n+1}x\right)\right)}\right)$$

$$=\frac{\cosh\left(2x\right)}{\sinh\left(2x\right)}-\lim_{n\to\infty}\frac{\cosh\left(2^{n+2}x\right)}{\sinh\left(2^{n+2}x\right)}=\frac{\cosh\left(2x\right)}{\sinh\left(2x\right)}-1$$

因此$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sinh\left(2^{n+1}x\right)}=\frac{\cosh\left(2x\right)}{\sinh\left(2x\right)}-1+\frac{1}{\sinh\left(2x\right)}=\frac{2}{e^{2x}-1}.$

幂级数计算方法：

计算：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{3n+1}$

计算：$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}, f'\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\frac{1}{1-x^{3}}$

$$f\left(0\right)-f\left(-1\right)=\int_{-1}^{0}f'\left(x\right)dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1-x^{3}}dx$$

因此$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{3n+1}=-f\left(-1\right)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1-x^{3}}dx$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{x+2}{3\left(1+x+x^{2}\right)}dx-\int_{-1}^{0}\frac{1}{3\left(x-1\right)}dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi+3\ln 2}{9}$$

$Cauchy$积(特点幂级数系数有个求和)：

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的$Cauchy$积定义为$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$

计算$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$

计算考虑$a_n \equiv 1, b_0 = 0, b_n = \frac{1}{n}, n \geq 1.$

从而$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$

$= -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$

生成级数(重要题型)：

定义：给定$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$,我们定义其生成函数为$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$

设$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, n \geq 0,$ 求:$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$

解：

假设$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, 1 = (1-x-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$

$= a_0 + a_1 x - a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1} - a_{n-2}) x^n$

从而$a_0 = 1, a_1 = a_0 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 2.$

因为$a_n \in \mathbb{N}$,所以$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$,因此

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}}\right) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{3}{2}.$

设$a_0=1,a_1=\frac{5}{4},a_n=\frac{(2n+3)a_{n-1}+(2n-3)a_{n-2}}{4n}$, 证明$\lim_{n\to\infty}a_n$存在

分析：一个自然的问题是, 设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$去计算是否合理？

事实上形式计算的过程确实不严谨, 但是一旦我们确定了和函数f, 这个f往往就是好的函数, 展开f对比系数恰好知道a_n就是f的系数. 所以就说明了合理性.在卷子上可以形式的计算, 视为正确.

证明：

$4na_n=(2n+3)a_{n-1}+(2n-3)a_{n-2},n\geq 2$

即$\sum_{n=2}^{\infty}4na_nx^n=\sum_{n=2}^{\infty}\left((2n+3)a_{n-1}+(2n-3)a_{n-2}\right)x^n$

$\sum_{n=2}^{\infty}4na_n=4x\left(f'(x)-\frac{5}{4}\right)$, 后面部分可以类似上一题整理

读者可以自行验证：

$(2x^2+2x^3-4x)f'(x)+(5x+x^2)f(x)=0,f(0)=1,f'(0)=\frac{5}{4}.$

这是一个可分离变量微分方程, 解出$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x+2}}{1-x}$

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\sqrt{x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, 于是$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}b_j\right)x^n$

从而$a_n=\sum_{j=0}^{n}b_j,\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=0}^{\infty}b_j=\frac{\sqrt{1+2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$

快速判断幂级数收敛半径：

以展开点为中心, 一直做圆, 不停的扩大，

直到接触到和函数第一个奇点($\mathbb{C}$上)为止.

此时的圆的半径就是收敛半径！

例:$1-x-x^2=0\Rightarrow x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\frac{1}{1-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,|x|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 也给出了$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}$

注意：课本上说对于$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 如果$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r$, 那么收敛半径=$\frac{1}{r}$.

现在统一记为:$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r$的充分必要条件是收敛半径=$\frac{1}{r}$.

$\sqrt{x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,|x|<2$, 且$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\frac{1}{2}.$

(最难)构造微分方程计算幂级数：

计算$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$

证明：

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1},g'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}$$

$$=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}2nx^{2n-1}=1+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}\right)'$$

$$=1+x\left(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}\right)'=1+x\left(xg(x)\right)'$$

因此$g'(x)-\frac{x}{1-x^{2}}g(x)=\frac{1}{1-x^{2}},g(0)=0$

由常数变易法, 我们就有$g(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2}}}$.

注意到奇点±1, 因此$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2}}},|x|<1$

注意我们的找最近奇点确定收敛半径的方法不能确定恰好落在端点时的收敛性问题, 这类问题叫做$tauber$定理, 是我们接下来的课程数学类的内容.

由$wallis$公式我们知道, $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\frac{\sqrt{\pi n}}{2n+1}\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2n}$,

因此$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}1^{2n+1}=+\infty,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}(-1)^{2n+1}=-\infty$.

因此收敛域是$|x|<1$.

本幂级数结果需要记忆.

第十届真题：

计算：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\frac{2}{5}\frac{3}{7}\cdots\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$

计算：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\frac{2}{5}\frac{3}{7}\cdots\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\left(2n+1\right)!!}\cdot\frac{1}{n+1}$

注意$\left(2n\right)!!=2^{n}n!$

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n\right)!!}{\left(2n+1\right)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\left(2n+1\right)!!}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2}}{n+1}$$

因此所求级数为$2f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$f'\left(x\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n\right)!!}{\left(2n+1\right)!!}\cdot x^{2n+1}=2\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2}}}-x\right)$$

因此$2f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2f\left(0\right)=2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}2\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2}}}-x\right)dx=\frac{\pi^{2}}{8}-1$