姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考场号:______ 座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

第十三届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案
(数学类低年级组, 2023 年 3 月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	20	10	14	20	10	16	10	100
得分								

注意: 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.

一、 (本题 20 分, 每小题 5 分) 填空题

1. 设函数 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 附近由方程 $y+2y^2+y^3=e^{-x}+x-1$ 所确定, 且 $y=Ax^2+Bx^3+o(x^3)\,(x\to 0)$. 则 $(A,B)=$ $\underline{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{6}\right)}$.

2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(|x|+|y|\right)^{|xy|}=$ $\underline{\quad 1 \quad}$.

3. 设 A 为 $n\times n$ 实矩阵, m 为正整数, I 为 $n\times n$ 单位矩阵. 若 $(I+A)^m=0$, 则 A 的行列式$|A|=$ $\underline{\quad (-1)^n \quad}$.

4. 常微分方程 $y'-\cos x\cdot\sin^2 y=\frac{1}{2}\sin 2y$ 的通解为 $\underline{\frac{\cos y}{\sin y}=-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)+Ce^{-x}}$,其中 C 为任意常数.

二、(本题 10 分) 空间中有不相交的固定球 S 和固定平面 Σ，S 的球心在 P 点，半径为 r. 设 B 是一个球心在 M 点的球，它与 S 外切并和 Σ 相切.
问：1）所有可能的 M 构成何种曲面？2）点 P 与该曲面有何关系？证明你的结论.

解答. (1) (几何法)：过 P 作平面 Σ 的垂线，垂足为 O. 在垂线 PO 的延长线上取一点 Q，使得 $|OQ| = r$. 过 Q 点作平面 Σ 的平行平面 Σ^*. 这样两平行平面 Σ 和 Σ^* 的距离为 r. 于是，M 到 P 的距离，等于 M 到平面 Σ^* 的距离. 于是，在过直线 PQ 和 M 的平面 Λ 上，M 到点 P 的距离等于到交线$\Lambda \cap \Sigma^*$ 的距离，M 的的轨迹为抛物线，并以 P 为抛物线的焦点. 以 PQ 为轴作空间的旋转时，球 B 保持与球面 S 和平面 Σ 相切，M 画出一个圆周. 故所有可能的 M 构成一个旋转抛物面，并以 P 为其焦点.

....(5 分)

(2) (坐标法)：过 P 作平面 Σ 的垂线，垂足为 O. 以 O 为原点，向量 $\overrightarrow{OP}$ 所在直线为 $z-$ 轴，平面 Σ 为 $xy-$ 平面，建立空间直角坐标系. 设球 B 的球心坐标为 $M = (x, y, z)$，P 点坐标为 $(0, 0, R)$, 则有 $|MO| = z + r$. 于是，有

$$(z + r)^2 = |MO|^2 = x^2 + y^2 + (z - R)^2;$$

$$z - \frac{R - r}{2} = \frac{1}{2(R + r)}(x^2 + y^2).$$

故所有的 M 构成一个旋转抛物面. 因为标准的抛物面方程为

$$z - z_0 = \frac{1}{4F}(x^2 + y^2),$$

其中 $(0, 0, z_0)$ 为旋转抛物面的顶点，F 为焦点到顶点的距离. 故该旋转抛物面的顶点 $Q = (0, 0, \frac{R-r}{2})$, 它的焦点到顶点 Q 的长度 F 为 $4F = 2(R + r)$. 于是旋转抛物面焦点坐标为

$$(0, 0, \frac{R - r}{2}) + (0, 0, F) = (0, 0, R) = P.$$

于是. P 点恰为旋转抛物面的焦点.

....(10 分)

三、(本题 14 分) 给定 n 阶复方阵 $A \neq 0, b \in \mathbb{C}^n$ 为n 维列向量. 复系数多项式 $f(x)$ 被称为向量 b 关于A 的零化多项式是指 $f(x)$ 满足 $f(A)b = 0$ 且 $f(x) \neq 0$. 在向量 b 关于 A 的零化多项式中其次数最低的首 1 多项式称为向量 b 关于 A 的最小多项式. 现设 $p(\lambda)$ 为矩阵 A 的最小多项式. 证明: $p(\lambda)$ 必为 $\mathbb{C}^n$ 中某向量 b 关于 A 的最小多项式.

证明. 1) 取 $p(\lambda)$ 的标准分解: $p = p_1 \cdots p_s$, 其中 $p_i = (\lambda - \lambda_i)^{l_i}, l_i \geqslant 1, i = 1, \cdots, s$. $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 各不相同. 记 $X_i = \{x \in \mathbb{C}^n \mid p_i(A)x = 0\}$, 则有下列断言真.

断言 1. $\mathbb{C}^n$ 有分解: $\mathbb{C}^n = X_1 \oplus \cdots \oplus X_s$, 其中$X_i$ 均是A 的不变子空间, A 在X_i 中的最小多项式即为 p_i.

事实上, 令 $V_1 = \{x \in \mathbb{C}^n \mid p_2 \cdots p_s(A)x = 0\}$. 于是由 $(p_1, p_2 \ldots p_s) = 1$ 知, $\mathbb{C}^n$ 有分解: $\mathbb{C}^n = X_1 \oplus V_1$, 其中 X_1, V_1均是 A 的不变子空间. 进一步, 若 A 在X_1 中的最小多项式为 g, A 在 V_1 中的最小多项式为 h, 则有 $g \mid p_1, h \mid p_2 \cdots p_s$.
倘若 $\deg g < \deg p_1$ 和 $\deg h < \deg p_2 \cdots p_s$ 有一个发生, 则导致 $\deg gh < \deg p$ 必发生, 从而矛盾于 p 为 A 的最小多项式(因为 $g(A)h(A)$ 零化 $\mathbb{C}^n$). 故有:
A 在X_1 中的最小多项式为p_1, A 在V_1 中的最小多项式为 $p_2 \cdots p_s$.
考虑 V_1. 由 A 在 V_1 中的最小多项式为 $p_2 \cdots p_s$, 重复前述过程有:

$$V_1 = X_2 \oplus V_2,$$

其中 $V_2 = \{x \in \mathbb{C}^n \mid p_3 \cdots p_s(A)x = 0\}$, X_2, V_2 均是A 的不变子空间, A 在X_2中的最小多项式即为p_2, A 在V_2中的最小多项式即为$p_3 \cdots p_s$. 类似推导, 得$\mathbb{C}^n = X_1 \oplus \cdots \oplus X_s$, 其中$X_i$ 均是A 的不变子空间, A 在X_i中的最小多项式即为p_i. 断言1获证.

…………………………………………………………………… (5 分)

2) 断言2. p_i 必是X_i 中某向量关于A 的最小多项式, $i = 1, \ldots, s$.
为此, 设$\xi_{i1}, \cdots, \xi_{it_i}$ 为X_i 的一组基, ξ_{ij} 关于 A 的最小多项式为$w_{ij}, j = 1, \cdots, t_i$.
于是由p_i 是 A 在X_i 中的最小多项式知:

$$w_{ij} \mid p_i, j = 1, \cdots, t_i.$$

w_{ij}皆具有$(\lambda - \lambda_i)^k$ 之形式, $k \leqslant l_i$.

另外, 注意到$[w_{i1},\cdots,w_{it_i}]$ 是A 在 X_i中的最小多项式, 从而有$[w_{i1},\cdots,w_{it_i}]=p_i$, 结果$\xi_{i1},\cdots,\xi_{it_i}$中必有某元, 其关于$A$ 的最小多项式为p_i. 断言 2 获证.

…………………………………………………………… (10 分)

3) 现设p_1 是X_1中向量 ξ_1 关于A的最小多项式, ..., p_s 是X_s中向量 ξ_s 关于A的最小多项式. 于是, p_1p_2是X 中向量$\xi_1+\xi_2$ 关于A 的最小多项式. 为此, 一方面有$p_1p_2(A)(\xi_1+\xi_2)=p_2(A)p_1(A)\xi_1+p_1(A)p_2(A)\xi_2=0$, 从而 $\xi_1+\xi_2$ 关于A 的最小多项式$f(\lambda)$ 必是p_1p_2 的因子. 另一方面, 由$f(A)(\xi_1+\xi_2)=0$ 得$f(A)\xi_1=-f(A)\xi_2$, 注意到 $\mathbb{C}^n=X_1\oplus\cdots\oplus X_s$, 因此有$X_1\cap X_2=0$, 从而 $f(A)\xi_1=-f(A)\xi_2\in X_1\cap X_2=0$. 结果$p_1\mid f, p_2\mid f$, 即有$p_1p_2\mid f$. 从而$p_1p_2$是$X$ 中向量$\xi_1+\xi_2$ 关于A 的最小多项式.

同理可推得: $p_1p_2p_3$ 是 X 中向量 $\xi_1+\xi_2+\xi_3$ 关于 A 的最小多项式. 重复此过程, 最后得 $p_1p_2\cdots p_s$ 是 X 中向量 $\xi_1+\cdots+\xi_s$ 关于 A 的最小多项式, 即 $p(\lambda)$ 是 X 中向量 $\xi_1+\cdots+\xi_s$ 关于 A 的最小多项式, 证毕.

…………………………………………………………… (14 分)

四、(本题 20 分) 设 $\alpha > 0$, f 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|f(x)|}{x^\alpha}=0$, $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} x^\alpha|f''(x)|<+\infty$.

(1) 若 $\alpha\in(0,1]$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(2) 若 $\alpha>1$, 试构造满足题设条件的函数 f 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ 不成立, 且在 $[0,+\infty)$ 的任何子区间上, f' 不恒等于常数.

解答. (1) 任取 $s\in(0,1)$, 由 Taylor 公式, 对于任何 $x>1$, 存在 $\xi\in(x,x+sx^\alpha)$ 使得

$$f(x+sx^\alpha)=f(x)+f'(x)sx^\alpha+\frac{f''(\xi)}{2!}s^2x^{2\alpha}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (7 分)

因此, 注意到 $sx^\alpha\leqslant x$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|f'(x)\right|\leqslant&\left|\frac{f(x)}{sx^\alpha}\right|+\left|\frac{f(x+sx^\alpha)}{(x+sx^\alpha)^\alpha}\right|\cdot\frac{(x+sx^\alpha)^\alpha}{sx^\alpha}+\left|\xi^\alpha f''(\xi)\right|\frac{sx^\alpha}{\xi^\alpha}\\ \leqslant&\frac{1+2^\alpha}{s}\sup_{t\geqslant x}\left|\frac{f(t)}{t^\alpha}\right|+s\sup_{t\geqslant x}\left|t^\alpha f''(t)\right|.\end{aligned}$$

令 $x\to+\infty$ 得到

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\left|f'(x)\right|\leqslant s\varlimsup_{x\to+\infty}\left|x^\alpha f''(x)\right|.$$

再令 $s\to0^+$ 得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (14 分)

(2) 可以举出很多例子. 比如:

(a) $f(x)=x+\frac{1}{1+x^\alpha}\ (x\geqslant0)$, 则 $f'(x)=1-\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{(1+x^\alpha)^2}$, $f''(x)=-\frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{(1+x^\alpha)^2}+\frac{2\alpha^2x^{2\alpha-2}}{(1+x^\alpha)^2}$. 易见该 f 满足要求.

(b) $f(x)=x+\int_0^x\frac{1}{1+t^\alpha}\,dt\ (x\geqslant0)$. 则 $f'(x)=1+\frac{1}{1+x^\alpha}$, $f''(x)=-\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{(1+x^\alpha)^2}$. 易见该 f 满足要求.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (20 分)

五、(本题 10 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, 二元函数 $p(X,Y)$ 被定义为:

$$p(X,Y):\mathbb{R}^{2\times 2}\times\mathbb{R}^{2\times 2}\longrightarrow\mathbb{R},(X,Y)\mapsto \operatorname{tr}(XAY^T),$$

即 $p(X,Y)=\operatorname{tr}(XAY^T)$, 其中 $X,Y\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ 为变量, tr 表示矩阵的迹.

(1) 证明: $p(X,Y)$ 成为实向量空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的内积的充要条件是 $\begin{cases} a>0, \\ b=c, \\ ad>b^2. \end{cases}$

(2) 进一步, 若 A 还使得变换

$$\sigma:\mathbb{R}^{2\times 2}\mapsto\mathbb{R}^{2\times 2}, X\rightarrow\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}X\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

成为 (1) 中内积空间 $\left(\mathbb{R}^{2\times 2},p(X,Y)\right)$ 中的一个正交变换. 求 A.

解答. (1) 易知, p 为双线性函数, 且有下列三句话等价:

i) p 成为$\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的内积;

ii) A 对称, 且 $\forall X\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ 有 $p(X,X)\geqslant 0$, 且 $p(X,X)=0$ 当且仅当 $X=0$;

iii) A 对称, 且二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\operatorname{tr}(XAX^T)$ 为正定二次型, 其中$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$.

注意到

$$XAX^T=\begin{pmatrix} ax_1+cx_2 & bx_1+dx_2 \\ ax_3+cx_4 & bx_3+dx_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}.$$

直接计算可得:

$$\operatorname{tr}(XAX^T)=(x_1,\ldots,x_4)\begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} & 0 & 0 \\ \frac{b+c}{2} & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \frac{b+c}{2} \\ 0 & 0 & \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

因此, f 正定 $\Leftrightarrow\begin{cases} a>0, \\ b=c, \\ ad>b^2. \end{cases}$

.... (5 分)

(2) 在 $p(X,Y)$ 已成为 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的内积情况下, 要使 σ 成为此内积下的正交变换, 当且仅当 σ 保持内积不变即可. 因此又有

$$p(X,Y)=p(\sigma(X),\sigma(Y)),\forall X,Y\in\mathbb{R}^{2\times 2}.$$

现又设$Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$, 于是直接计算可知:

$$p(X,Y)=\operatorname{tr}(XAY^T)=(ax_1+cx_2)y_1+(bx_1+dx_2)y_2+(ax_3+cx_4)y_3+(bx_3+dx_4)y_4;$$

$$\sigma(X)=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(\sigma(Y))^T=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
&p(\sigma(X),\sigma(Y))\\
=&\operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right\}\\
=&(\frac{\sqrt{3}}{2}dx_1+\frac{d}{2}x_3-\frac{\sqrt{3}}{2}bx_2-\frac{b}{2}x_4)(\frac{\sqrt{3}}{2}y_1+\frac{1}{2}y_3)\\
&+(\frac{\sqrt{3}}{2}ax_2+\frac{a}{2}x_4-\frac{\sqrt{3}}{2}cx_1-\frac{c}{2}x_3)(\frac{\sqrt{3}}{2}y_2+\frac{1}{2}y_4)\\
&+(-\frac{d}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}dx_3+\frac{b}{2}x_2-\frac{\sqrt{3}}{2}bx_4)(\frac{\sqrt{3}}{2}y_3-\frac{1}{2}y_1)\\
&+(\frac{c}{2}x_1-\frac{\sqrt{3}}{2}cx_3-\frac{a}{2}x_2+\frac{\sqrt{3}}{2}ax_4)(-\frac{1}{2}y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}y_4).
\end{aligned}$$

比较 $p(X,Y)$ 与 $p(\sigma(X),\sigma(Y))$ 相应各项:

比较 x_1y_1 的系数可得: $a=d$; 比较 x_2y_1 的系数可得: $c=-b$. 从而 $c=b=0$.

进一步可直接看出, 在 $a=d$ 且 $b=c=0$ 的条件下, $p(X,Y)=p(\sigma(X),\sigma(Y))$ 已成为恒等式.

(3) 综上, 所需求的 A 为 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, 其中 $a > 0$ 为任意实数. 完毕.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (10 分)

六、(本题 16 分) 证明:

(1) 函数方程 $e^y - y = e^x - x$, 唯一地确定了一个连续函数 $y = y(x) \in C(-\infty, 0]$ 满足 $y(0) = 0$ 以及 $y(x) \geqslant 0$. 进一步, 证明当 $x < 0$ 时成立 $y(x) > 0$.

(2) $y(x) \in C^1(-\infty, 0]$, 且 $y'(0) = -1$.

(3) 对于 $x < 0$ 成立 $x + y(x) < 0$. 进一步, $y(x) \in C^2(-\infty, 0]$ 是凹函数, 且 $y''(0) = -\dfrac{2}{3}$.

解答. (1) 令 $f(s) = e^s - s$, 则 $f'(s) = e^s - 1$, $f'(0) = 0$, $f''(s) = e^s > 0$. 因此, f 是 $\mathbb{R}$ 上的严格凸函数, 在 $s = 0$ 取得严格最小值 1.

…………………………………………………………… (3 分)

定义 $(-\infty, 0]$ 上的函数 $\varphi(x) = e^x - x$, 定义 $[0, +\infty)$ 上的函数 $\psi(y) = e^y - y$. 则 φ 严格单减, ψ 严格单增, 值域均为 $[1, +\infty)$. 记它们的反函数为 φ^{-1}, ψ^{-1}.

对任何 $x \in (-\infty, 0]$, $t = \varphi(x) \in [1, +\infty)$, 存在唯一的 $y = y(x) \in [0, +\infty)$ 使得 $\psi(y) = t = \varphi(x)$. 即 $e^y - y = e^x - x$. 此时 $y(x) = \psi^{-1}(\varphi(x))$.

特别 $y(x) = 0$ 当且仅当 $\varphi(x) = 1$, 当且仅当 $x = 0$. 因此, 当 $x < 0$ 时, $y(x) > 0$.

而由反函数的连续性得到 $y = y(x) \in C(-\infty, 0]$.

…………………………………………………………… (5 分)

(2) 易见 $\varphi \in C^\infty(-\infty, 0)$, $\psi \in C^\infty(0, +\infty)$. 且

$$\varphi'(x) = e^x - 1, \qquad x < 0,$$
$$\psi'(y) = e^y - 1 > 0, \qquad y > 0.$$

因此, $y(x) \in C^\infty(0, +\infty)$. 进一步, 由单调性和连续性, $y(x) \to 0^+$ 当且仅当 $x \to 0^-$. 注意到

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\sqrt{e^t - t - 1}}{t} = -\lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{e^t - t - 1}}{t} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

可得

$$y'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2}\sqrt{e^y - y - 1}}{-\sqrt{2}\sqrt{e^x - x - 1}} = -1.$$

而

$$y'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{y(x)} - 1} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{y(x)} = -1.$$

因此, $y(x) \in C^1(-\infty, 0]$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (10 分)

(3) 注意到 $x < 0$ 当且仅当 $y > 0$, 可见 "$x < 0$ 时 $x + y < 0$" 等价于 "$y > 0$ 时 $x < -y$", 这又等价于 "$y > 0$ 时 $\varphi(-y) < \psi(y)$", 即 "$e^y - e^{-y} - 2y > 0\,(y > 0)$". 易证 $e^y - e^{-y} - 2y$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单增, 从而最后这一不等式成立. 因此, 当 $x < 0$ 时有 $x + y < 0$.

由隐函数求导法则, 可得

$$\begin{aligned}(e^y - 1)y' =& e^x - 1, \qquad x < 0, \qquad (1)\\ (e^y - 1)^3 y'' =& (e^y - 1)^2 e^x - (e^y - 1)^2 e^y (y')^2 = (e^y - 1)^2 e^x - (e^x - 1)^2 e^y\\ =& (e^y - e^x)(e^{x+y} - 1) < 0, \qquad x < 0.\end{aligned}$$

因此, $y''(x)$ 当 $x < 0$ 时为负. 因此, $y(x)$ 是 $(-\infty, 0]$ 上的严格凹函数.

最后, $y''_-(0)$ 的计算, 尤其是其存在性的证明有一定难度. 注意到 $u(s) = \sqrt{e^s - s - 1}$ 在 $(-\infty, 0]$ 和 $[0, +\infty)$ 上分别是"好函数". 我们有

$$\begin{aligned}&u(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}|s|\big(1 - \frac{s}{6}\big) + o(s^2), \qquad s \to 0,\\ &u'_-(0) = u'(0^-) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u'_+(0) = u'(0^+) = \frac{1}{\sqrt{2}},\\ &u''_-(0) = u''(0^-) = -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad u''_+(0) = u''(0^+) = \frac{1}{3\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

由 $u(y) = u(x)$, 得到

$$\begin{aligned}y''_-(0) =& \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{u'(x)}{u'(y)} + 1}{x} = \frac{1}{u'_+(0)} \lim_{x \to 0^-} \frac{u'(x) + u'(y)}{x}\\ =& \sqrt{2} \lim_{x \to 0^-} \big(u''(x) + u''(y) y'(x)\big) = -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

$y''_-(0)$ 的计算也可以利用 $e^y - y = e^x - x$ 作 Taylor 展开, 注意到 $y'(0^-) = -1$, 得到

$$\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad x \to 0^-.$$

因此,

$$y^2 - x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} + o(x^2), \qquad x \to 0^-.$$

由此得到

$$
\begin{aligned}
y''(0) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{y'(x)-y'(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} y''(x)\\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{(e^y-e^x)(e^{x+y}-1)}{(e^y-1)^3} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(y-x)\left(x+y+\frac{(x+y)^2}{2}\right)}{y^3}\\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{(y^2-x^2)(1+x+y)}{y^3} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-y^3}{3y^3}\\
&=\frac{1}{3(y'_-(0))^3}-\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

…………………………………………………………… (16 分)

七、(本题 10 分) 设 n 为正整数. 证明微分方程

$$y^{(2n)} - x^2 y = |\sin x|$$

满足初值条件 $y(0) = y''(0) = \cdots = y^{(2n-2)}(0) = 1, y'(0) = y'''(0) = \cdots = y^{(2n-1)}(0) = 0$ 的解为 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数并且 $y(x) > 1, x \neq 0$.

证明. 所给的线性方程在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一满足所给初值条件的解 $y(x)$. 下面证明 $y(x) = y(-x)$. 记$h(x) = y(-x)$, 由

$$y^{(2n)}(x) - x^2 y(x) = |\sin x|$$

可得

$$y^{(2n)}(-x) - (-x)^2 y(-x) = |\sin(-x)|$$

注意到 $h^{(2n)}(x) = y^{(2n)}(-x)$, 于是我们有

$$h^{(2n)}(x) - x^2 h(x) = |\sin x|$$

因为 $h(0) = y(0) = 1, h^{(2\ell)}(0) = y^{(2\ell)}(0) = 1, h^{(2\ell-1)}(0) = -y^{(2\ell-1)}(0) = 0$, 所以 $h(x)$ 也为满足所给的初值条件的解. 于是 $y(x) = h(x) = y(-x)$.

.... (7 分)

下面证明 $y(x) > 1$, $x \neq 0$. 假设结果不真, 则可以取 $x_0 > 0$ 满足 $y(x_0) \leqslant 1$, $y(x) > 0, x \in [0, x_0]$. 使用泰勒公式可得: 对 $x > 0$, 存在 $\eta \in (0, x)$ 使得

$$y(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{y^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{(2n-2)!} x^{2n-2} + \frac{y^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} x^{2n}.$$

将$x = x_0$代入上式并注意到$y^{(2n)}(\eta) = \eta^2 y(\eta) + |\sin \eta| > 0$, 可得

$$1 \geqslant y(x_0) = 1 + \frac{1}{2!} x_0^2 + \cdots + \frac{1}{(2n-2)!} x_0^{2n-2} + \frac{y^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} x_0^{2n}$$

矛盾!

.... (10 分)

注. 或者: 下面证明 $y(x) > 1$, $x \neq 0$. 假设结果不真, 则可以取 $x_0 > 0$ 满足 $y(x_0) \leqslant 1$, $y(x) > 0, x \in [0, x_0]$. 使用中值定理可得: 存在 $x_1 \in (0, x_0)$ 使得 $y'(x_1) \leqslant 0$. 再对函数 $y'(x)$ 在区间 $[0, x_1]$ 上使用中值定理可得: 存

在 $x_2 \in (0, x_1)$ 使得 $y''(x_2) \leqslant 0$. 继续使用该方法可得 $0 < x_{2n} < x_0$ 使得 $y^{(2n)}(x_{2n}) \leqslant 0$. 另一方面, 我们有 $y^{(2n)}(x_{2n}) = x_{2n}^2 y(x_{2n}) + |\sin x_{2n}| > 0$, 产生矛盾!