

2014 年第五届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类一、二年级) 参考答案

一、【参考证明】: 设 l 是过 P 点的抛物面 S 的一条切线, 它的方向向量为 $V = (u, v, w)$, 则切点可以表示为

$$Q = P + tV = (a + tu, b + tv, c + tw),$$

其中 t 是二次方程 $2(c + tw) = (a + tu)^2 + (b + tv)^2$, 也就是

$$(u^2 + v^2)t^2 + 2(au + bv - w)t + (a^2 + b^2 - 2c) = 0$$

的唯一重根.

这时, $(au + bv - w)^2 = (u^2 + v^2)(a^2 + b^2 - 2c)$, 得 $t = \frac{w - au - bv}{u^2 + v^2} = \frac{a^2 + b^2 - 2c}{w - au - bv}$. 于

是切点

$$Q = (X, Y, Z) = (a + tu, b + tv, c + tw)$$

满足

$$aX + bY - Z = (a^2 + b^2 - c) + t(au + bv - w) = c.$$

于是所有切点 Q 落在平面 $ax + by - z = c$ 上.

二、【参考证明】: (1) 由于 $\text{tr}(A)$ 是 A 的特征值之和, 得 λ_1 的代数重数也是 3, 而 A 的另一特征值 $\lambda_2 = 0$, 且 $\lambda_2 = 0$ 的代数重数为 1. 结果 A 有四个线性无关的特征向量. 故 A 可对角化.

(2) 由于 $\lambda_1 = 2$ 的重数为 3, 故有

$$\text{rank}(A - 2E) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -2 \\ a & -2 & b & c \\ d & e & -2 & f \\ g & h & k & 2 \end{pmatrix}.$$

进而 $a / 0 = -2 / 2 = b / 2 = c / -2$, 得 $a = 0, b = -2, c = 2$;

$d / 0 = e / 2 = -2 / 2 = f / -2$, 得 $d = 0, e = -2, f = 2$;

$g / 0 = h / 2 = k / 2 = 2 / -2$, 得 $g = 0, h = -2, k = -2$,

于是 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. 注意到 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T A x = x^T B x$, 其中

$$B = \frac{A + A^T}{2}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

B 的特征值为 $\lambda_1 = 2$ (二重), $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{3}$ (一重). 故 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在正交变换下的标准型为 $2y_1^2 + 2y_2^2 + (1 + 2\sqrt{3})y_3^2 + (1 - 2\sqrt{3})y_4^2$.

三、【参考证明】: (1) A 有 n 个线性无关的特征向量, 故 A 可对角化. 设 λ_0 是 A 的一个特征值, 考察 $A - \lambda_0 I$, 它有一个 $n - 1$ 阶子式不为 0, 结果 $\text{rank}(A - \lambda_0 I) = n - 1$. 故 λ_0 的重数为 1, 从而 A 有 n 个各不相同的特征值: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

(2) $\forall X_1, X_2 \in W, \forall \mu \in R$, 显然 $X_1 + \mu X_2 \in W$, 故 W 为 R 上的向量空间. 让

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned} XA = AX &\Leftrightarrow XP \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} X \\ &\Leftrightarrow P^{-1}XP \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}XP. \end{aligned}$$

故若记

$$V = \left\{ Y \in R^{n \times n} \mid Y \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} Y \right\},$$

则 W 与 V 有线性同构 $\sigma : X \rightarrow P^{-1}XP$. 从而

$$\dim V = \dim W.$$

$$\text{注意到 } V = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} \mid d_1, \dots, d_n \in R \right\}, \text{ 故}$$

$$\dim V = \dim W = n.$$

(3) 显然, $I, A, \dots, A^{n-1} \in W$. 下面证 I, A, \dots, A^{n-1} 线性无关. 事实上, 若

$$x_0 I + x_1 A + \dots + x_{n-1} A^{n-1} = 0,$$

则得

$$x_0 + x_1 \lambda_1 + \cdots + x_{n-1} \lambda_1^{n-1} = 0$$

.....

$$x_0 + x_1 \lambda_n + \cdots + x_{n-1} \lambda_n^{n-1} = 0$$

其系数行列式为范德蒙行列式, 由 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 各不相同, 故 I, A, \dots, A^{n-1} 线性无关, 即 I, A, \dots, A^{n-1} 为其一组基.

四、【参考证明】: 用反证法. 设存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $z(x_0) > y(x_0)$. 令

$$M = \{x \in [a, b] \mid z(x) > y(x)\},$$

则 M 为 $[a, b]$ 的非空开子集. 故存在开区间 $(\alpha, \beta) \subset M$ 满足

$$y(\alpha) = z(\alpha), z(x) > y(x), x \in (\alpha, \beta).$$

这推出 $z(x) - y(x)$ 单调不增, 故 $z(x) - y(x) \leq z(a) - y(a) = 0$. 矛盾.

五、【参考证明】: 令 $g(t) = \left(\int_0^t f(x) dx \right)^\beta - \int_0^t f^\alpha(x) dx$, 则 $g(t)$ 可导,

$$g'(t) = f(t) \left[\beta \left(\int_0^t f(x) dx \right)^{\beta-1} - f^{\alpha-1}(t) \right].$$

令 $h(t) = \beta^{\frac{1}{\beta-1}} \int_0^t f(x) dx - f^2(t)$, 则有 $h'(t) = f(t) \left[\beta^{\frac{1}{\beta-1}} - 2f'(t) \right]$. 由于 $\beta > 1$, $f'(x) \leq \frac{1}{2}$,

我们有 $h'(t) \geq 0$. 这说明 $h(t)$ 单调递增, 从 $h(0) = 0$, 得 $h(t) \geq 0$. 因而 $g'(t) \geq 0$. 从 $g(0) = 0$, 得 $g(t) \geq 0$, 即

$$\int_0^t f^\alpha(x) dx \leq \left(\int_0^t f(x) dx \right)^\beta.$$

令 $t \rightarrow +\infty$, 即得所证.

六、【参考证明】: $C_{\max} = \sqrt{1 - \frac{2}{n}}$. 不妨设 $f(x)$ 的最小实根为 0, 最大实根为 a . 设

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

$$0 = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = a.$$

先证以下引理:

引理: 若存在 $2 \leq k, m \leq n-1$ 使得 $x_k < x_m$, 令

$$x_k < x'_k \leq x'_m < x_m \text{ 满足 } x_k + x_m = x'_k + x'_m, \text{ 令}$$

$$f_1(x) = (x - x'_1)(x - x'_2) \cdots (x - x'_n), x'_i = x_i, i \neq k, m. \text{ 则 } d(f'_1) \leq d(f').$$

证明: 注意到 $f(x) = f_1(x) - \delta F(x)$, 其中

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{(x - x'_k)(x - x'_m)}, \delta = x'_k x'_m - x_k x_m > 0.$$

设 α, β 分别为 $f_1'(x)$ 的最大最小实根, 则有

$$f_1(\alpha) \leq 0, f_1(\beta)(-1)^n \leq 0.$$

由罗尔定理 $\alpha \geq x_m, \beta \leq x_k$, 并且

$$f'(\alpha) = \delta \frac{(2\alpha - x'_k - x'_m)}{(\alpha - x'_k)^2 (\alpha - x'_m)^2} f_1(\alpha).$$

则 $f'(\alpha)f_1(\alpha) \geq 0$, 故 $f'(\alpha) \leq 0$. 这表明 $f'(x) = 0$ 的最大实根大于或等于 α . 同理, $f'(x) = 0$ 最小实根小于或等于 β . 引理证毕. 令

$$g(x) = x(x-a)(x-b)^{n-2}, b = \frac{x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1}}{n-2}.$$

由引理得到 $d(f') \geq d(g')$. 由于

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x-b)^{n-3} \left(nx^2 - ((n-1)a + 2b)x + ab \right), \\ d(g') &= \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{n} + \left(\frac{a-2b}{n} \right)^2} \geq \sqrt{1 - \frac{2}{n}}a. \end{aligned}$$

于是 C 的最大值 $C_{\max} \geq \sqrt{1 - \frac{2}{n}}$, 且当 $f(x) = x(x-a)\left(x-\frac{a}{2}\right)^{n-2}$ 时, $d(f') = \sqrt{1 - \frac{2}{n}}d(f)$.