2018 年第十届全国大学生数学竞赛初赛

（数学类）参考解答

一、【参考解答】: 设所求 P 点坐标为 $P=\left(a,b,c\right)$，满足 $a^2-b^2=2c$，则过点 P 的直线可以表示为

$$\ell=\ell(t)=(a,b,c)+t(u,v,w),u^2+v^2+w^2\neq 0,t\in\mathbb{R}$$

直线 $l\left(t\right)$ 落在马鞍面 S 上，得到

$$\left(u^2-v^2\right)t^2+2(au-bv-w)t=0,t\in\mathbb{R}$$
$$au-bv=w,u^2-v^2=0$$

于是有 $v=\varepsilon u,w=(a-\varepsilon b)u,\varepsilon=\pm 1$. 于是，过点 P 恰有两条直线落在马鞍面 S 上，为

$$\ell_1=\ell_1(t)=(a,b,c)+tu(1,1,a-b)$$
$$\ell_2=\ell_2(t)=(a,b,c)+tu(1,-1,a+b)$$

这两条直线的方向向量 $\left(1,1,a-b\right),\left(1,-1,a+b\right)$ 均平行于平面 σ，而平面 σ 的法向量为 $\left(\alpha,\beta,-1\right)$. 于是得到 $\alpha+\beta=a-b,\alpha-\beta=a+b$，由此得

$$a=\alpha,b=-\beta,c=\frac{1}{2}\left(\alpha^2-\beta^2\right)$$

所以所求 P 点的坐标为 $P=\left(\alpha,-\beta,\frac{1}{2}\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right)$.

二、【参考解答】: $f=\left(x_1,\ldots,x_n\right)\dfrac{A+A^T}{2}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$. 令 $B=\left(b_{ij}\right)=\dfrac{A+A^T}{2}$，则 B 为实对称矩阵且

$$b_{11}=b_{22}=\cdots=b_{nn}=a,\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|=\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{2}+\frac{a_{ji}}{2}\right|<2a$$

结果 $b_{ii}>\sum_{j\neq i}\left|b_{ij}\right|$.

若 λ 为 B 的特征值，$\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 为关于 λ 的非零特征向量，记

$$\left|x_i\right|=\max_{1\leq j\leq n}\left|x_j\right|>0$$

由于 $B\alpha=\lambda\alpha$，$\lambda=\dfrac{\sum_{j=i}^{n}b_{ij}x_j}{x_i}\geq a-\sum_{j\neq i}\left|b_{ij}\right|>0$. 所以 B 为正定矩阵，f 的规范形为 $y_1^2+\cdots+y_n^2$.

三、【参考证明】: 1) $i)\Rightarrow ii)$. 由 $AA^{-1}=I$ 知 $|A|\cdot\left|A^{-1}\right|=1$. 注意到 $|A|,\left|A^{-1}\right|$ 均为整数. 所以 A 的行列式的绝对值为 1.

$ii)\Rightarrow i)$: 由 $AA^{*}=|A|I$ 可知 $A^{-1}=A^{*}/|A|$ 即可知 i)成立.

2) 考虑多项式 $p(x)=|A-xB|^{2}$, 则由已知条件得 $p(0),p(2),p(4),\ldots,p(4n)$ 的值皆为 1. 结果多项式 $q\left(x\right)=p\left(x\right)-1$ 有超过 $2n$ 个零点，从而得出 $q\left(x\right)\equiv 0$，即 $p\left(x\right)\equiv 1$. 特别地，$p(-1)=|A+B|^{2}=1$，所以 $A+B$ 可逆.

四、【参考证明】: (1) 由假设, 对任何 $m\geq 0, f(x)$ 的零点附近有 $m+1$ 阶导数, 从而 $f^{(m)}(x)$ 在 $x=0$ 连续，因此，$\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{f(x)}{x^{0}}=f(0)=0.$

对于 $n\geq 1$，利用洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)}{x^{n}}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f'(x)}{nx^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=0$$

(2) $xf(x)f'(x)\leq x|f(x)|\left|f'(x)\right|\leq C|f(x)|^{2},\forall x\in[0,1]$，从而

$$\left(\frac{f^{2}(x)}{x^{2C}}\right)'=\frac{2\left(xf(x)f'(x)-Cf^{2}(x)\right)}{x^{2C+1}}\leq 0,\quad \forall x\in(0,1]$$

因此 $\dfrac{f^{2}(x)}{x^{2C}}$ 在 $(0,1]$ 上单调减少，从而 $\dfrac{f^{2}(x)}{x^{2C}}\leq\left(\dfrac{f(t)}{t^{C}}\right)^{2}$，$\forall 0<t<x\leq 1$. 所以

$$\frac{f^{2}(x)}{x^{2C}}\leq\lim_{t\to 0^{+}}\left(\frac{f(t)}{t^{C}}\right)^{2}=0,\quad \forall x\in(0,1]$$

因此 $f\left(x\right)\equiv 0.$

五、【参考证明】: (1) 因为 $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)>\dfrac{1}{n+1}(n\geq 2)$，所以根据条件，有

$$\begin{aligned}\frac{a_{n}}{a_{n+1}}&\leq 1+\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n\ln n}\frac{1}{n+1}+b_{n}\\&<1+\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+b_{n}=\frac{n+1}{n}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}+b_{n}\end{aligned}$$

(2)【思路一】 令 $c_{n}=(n\ln n)a_{n},d_{n}=\dfrac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}\left|b_{n}\right|$，则有 $\dfrac{c_{n}}{c_{n+1}}<1+d_{n}$. 取对数得

$$\ln c_{n}-\ln c_{n+1}<\ln\left(1+d_{n}\right)\leq d_{n}$$

于是 $\ln c_{2}-\ln c_{n}<\sum\limits_{k=2}^{n-1}d_{k}$, $(n\geq 3)$. 由于 $0\leq d_{n}<\left|b_{n}\right|$，从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{n}$ 绝对收敛，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{d}_{n}$ 收敛，所以，由上式可知存在常数 c，使得

$$c \le \ln c_n, n \ge 3\text{，即} a_n \ge \frac{e^c}{n\ln n}, n \ge 3$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(2)【思路二】由条件可得

$$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} \le \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+\left|b_n\right|\right) \le \frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+\left|b_n\right|$$

从 3 到n 求和，然后利用积分的性质可知存在常数$C>0$，使得

$$\ln\frac{a_3}{a_{n+1}} \le \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k\ln k}+\left|b_k\right|\right) \le C+\ln n+\ln\ln n$$

于是$a_{n+1} \ge \frac{a_3 e^C}{n\ln n}$. 所以$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

六、【参考证明】: 对固定的$x\in\mathbb{R}$，若$f'\left(x\right)=0$，则成立. 若$f'\left(x\right)<0$，则

$$h=\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}>0$$

根据牛顿莱布尼兹公式和条件，得

$$\begin{aligned}
0<f(x+h)&=f(x)+\int_x^{x+h} f'(t)\,\mathrm{d}t\\
&=f(x)+\int_x^{x+h}\left(f'(t)-f'(x)\right)\mathrm{d}t+f'(x)h\\
&\le f(x)+\int_x^{x+h}(t-x)^{\alpha}\,\mathrm{d}t+f'(x)h=f(x)+\frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1}+f'(x)h
\end{aligned}$$

故$\frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1}+f'(x)h+f(x)>0$. 将$h=\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$代入，得

$$\left|f'(x)\right|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x)$$

若$f'\left(x\right)>0$，记$h=\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. 根据牛顿莱布尼兹公式和条件，得

$$\begin{aligned}
0<f(x-h)&=-\int_{x-h}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t+f(x)\\
&=\int_{x-h}^{x}\left(f'(x)-f'(t)\right)\mathrm{d}t-f'(x)h+f(x)\\
&\le\int_{x-h}^{x}(x-t)^{\alpha}\,\mathrm{d}t-f'(x)h+f(x)\\
&=\frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1}-f'(x)h+f(x)
\end{aligned}$$

将$h=\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$代入上式仍得$\left(f'(x)\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x)$.

总之，始终有$\left|f'(x)\right|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x)$. 证毕.