2015 年第六届全国大学生数学竞赛决赛
(数学类一、二年级)参考答案

一、填空题

(1) $z_1^2+z_2^2-z_3^2$.　　(2) $\dfrac{3}{4}$　　(3) 8π

(4) $(n-1)!$,【参考解答】:

秩 $A=n-1\Rightarrow$ 秩 $A^*=1$ 且 $Ax=0$ 的解空间维数为 1.

A 行和 $=0\Rightarrow A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=0\Rightarrow Ax=0$ 的一组基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$

注意到 $AA^*=0$,从而 A^* 的每一列均形如 $a\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$,又由于 A 为实对称矩阵,故 A^* 也为实对称矩阵,故

$$A^*=\begin{pmatrix}a&\cdots&a\\ \vdots&&\vdots\\ a&\cdots&a\end{pmatrix}.$$

考虑多项式 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-n)$,其一次项系数为 $(-1)^{n-1}n!$.

另一方面,由 $f(\lambda)=|\lambda I-A|$ 又知,其一次项系数为 $(-1)^{n-1}(A_{11}+\cdots+A_{nn})$,结果为 $a=(n-1)!$.

二、【参考解答】:设 l 为 z 轴,以过点 P 且垂直于 z 轴的直线为 x 轴来建立直角坐标系,可以设 $P:(p,0,0)$,l 的参数方程为:$l:x=0,y=0,z=t.$

设球面 C 的球心为 (x_0,y_0,z_0),由于 C 过点 P,则

$$C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(p-x_0)^2+{y_0}^2+{z_0}^2.$$

求 l 与 C 的交点:将 l 的参数方程代入 C,有

$${x_0}^2+{y_0}^2+(t-z_0)^2=(p-x_0)^2+{y_0}^2+{z_0}^2.$$

即
$$t^2-2z_0t+(2px_0-p^2)=0.\qquad(1)$$

由此可得两个解为 $t_{1,2}=z_0\pm\sqrt{z_0^2-(2px_0-p^2)}$. 故弦长 $a=|t_1-t_2|=2\sqrt{z_0^2-(2px_0-p^2)}$,从而

$$z_0^2-2px_0+p^2-\frac{a^2}{4}=0.\qquad(2)$$

反之,如果球面 C 的球心满足(2),如果 C 过点 P,此时二次方程(1)的判别式

$$\Delta = 4z_0^2 - 4\left(2px_0 - p^2\right) = a^2 \geq 0,$$

方程有两个实根$t_{1,2} = z_0 \pm \frac{a}{2}$. 从而$C$和$l$相交，而且截出来弦长为$a$. 所以所求轨迹方程为

$$z^2 - 2px\ + p^2 - \frac{a^2}{4} = 0.$$

三、【参考证明】: 对$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$，且特征方程为

$$0 = \left|\lambda I - A\right| = \lambda^2 - 2\operatorname{Re} z_1\lambda + \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2$$
$$\Delta = 4\left(\operatorname{Re} z_1\right)^2 - 4\left(\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2\right) \leq 0$$

情形 1: $\Delta = 0$. 此时，$z_2 = 0, z_1 = \operatorname{Re} z_1$，从而$A = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 & 0 \\ 0 & \operatorname{Re} z_1 \end{pmatrix} = J_A \in \Gamma$.

取$P = I$即有$P^{-1}AP = J_A$.

情形 2: $\Delta < 0$. 此时A的特征值为

$$\lambda_1 = \operatorname{Re} z_1 + i\sqrt{\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 - \left(\operatorname{Re} z_1\right)^2}$$
$$\lambda_2 = \operatorname{Re} z_1 - i\sqrt{\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 - \left(\operatorname{Re} z_1\right)^2}$$
$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1, \lambda_2 \neq \lambda_1$$

从而$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$.

现取A关于λ_1的一个非零特征向量$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，则有

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{z_1 x} + \overline{z_2 y} = \overline{\lambda_1}\bar{x} \\ z_2\bar{x} - z_1\bar{y} = -\bar{\lambda}_1\bar{y} \end{cases}$$

直接检验知$A\begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \bar{\lambda}_1\begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$，因此$\begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$为$A$关于$\bar{\lambda}_1$的一个非零特征向量. 令$P = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$，则有$P$可逆，且$P \in \Gamma, P^{-1}AP = J_A$.

四、【参考证明】: α的最大值为$\frac{1}{2}$.

若$\alpha > \frac{1}{2}$，取$x_n = (n\pi)^{-1}, y_n = \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right)^{-1}$，则

$$\frac{\left|f\left(x_n\right) - f\left(y_n\right)\right|}{\left|x_n - y_n\right|^\alpha} = 2^\alpha\pi^{\alpha-1}n^{2\alpha-1}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\alpha-1} \to \infty.$$

下面证明$\sup\limits_{x\neq y}\dfrac{\left|f(x)-f(y)\right|}{\left|x-y\right|^{\frac{1}{2}}}<+\infty$.

由于$f(x)$为偶函数，不妨设$0\le x<y$，令

$$z=\sup\left\{u\le y\mid f(u)=f(x)\right\}$$

则$z^{-1}\le y^{-1}+2\pi$.

$$\left|f(x)-f(y)\right|=\left|f(z)-f(y)\right|\le\int_z^y\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\le\left|y-z\right|^{\frac{1}{2}}\left(\int_z^y f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\left|x-y\right|^{\frac{1}{2}}\left(\int_z^y\left(\sin\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\cos\frac{1}{t}\right)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\xlongequal{s=\frac{1}{t}}\left|x-y\right|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{y^{-1}}^{z^{-1}}\left(\frac{\sin s}{s}-\cos s\right)^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\left|x-y\right|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{y^{-1}}^{y^{-1}+2\pi}4\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8\pi}\left|x-y\right|^{\frac{1}{2}}.$$

五、【参考证明】: 由$x''(t)\le -a(t)f\left(x(t)\right)<0$. 故$x(t)$是上凸的. 故$\lim\limits_{t\to\infty}x'(t)$存在或为$-\infty$.
若$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,x(t)=+\infty$，则$x'(t)>0$，$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=+\infty$. 故

$$x'(t)f\left(x(t)\right)\le a(t)x'(t)f\left(x(t)\right)\le -x'(t)x''(t),$$

积分得

$$\int_0^t f\left(x(s)\right)\mathrm{d}x(s)\le\frac{x'(0)^2-x'(t)^2}{2}\le\frac{x'(0)^2}{2}$$

令$t\to\infty$得$\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\le\dfrac{x'(0)^2}{2}$矛盾.

六、【参考证明】: 分部积分可得

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x$$

因此，根据牛顿-莱布尼兹公式，得

$$6\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-3x^2\right)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

再根据 Cauchy 积分不等式，得

$$36\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1\left(1-3x^2\right)^2\mathrm{d}x\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

由此可得$\left(\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}\,x\right)^2 \le \frac{1}{45}\int_0^1\left(f'\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}\,x$ ，等号成立当且仅当$f'\left(x\right)=A\left(1-3x^2\right)$，积分并由$f\left(0\right)=f\left(1\right)=0$，即得$f\left(x\right)=A\left(x-x^3\right)$.