第十一届全国大学生数学竞赛初赛试卷
(数学类A卷, 2019年10月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 空间中有两个圆球面B_1和B_2, B_2包含在B_1所围球体的内部, 两球面之间的闭区域为D. 设B是含在D中的一个圆球，它与球面B_1和B_2均相切. 问：

(i)（4分）B的球心轨迹构成的曲面S是何种曲面；

(ii)（2分）B_1的球心和B_2的球心是曲面S的何种点.

证明你的论断（9分）.

答：B的球心轨迹构成的曲面S为旋转椭球面（2分+2分=4分）；B_1和B_2的球心为S的两个焦点（2分）.

证明: 设B_1的球心为O_1, 半径为R_1, B_2的球心为O_2, 半径为R_2. 设B是含在D中的一个球，球心在P点，半径为r, 它与球B_1和B_2均相切. 因为B与B_1内切，所以$PO_1 = R_1 - r$. 因为B与B_2外切，所以$PO_2 = R_2 + r$. 于是有

$$PO_1 + PO_2 = R_1 + R_2$$

总是常数.（4分）

设ℓ是过球心O_1和O_2的直线. 因为B_1和B_2在以ℓ为不动轴的空间旋转下不变, 故区域D也在以ℓ为不动轴的空间旋转下不变. B在以ℓ为不动轴的空间旋转下保持与B_1和B_2均相切，它的球心P在以ℓ为不动轴的空间旋转下是一个圆周. 在每个过直线ℓ的平面Σ上，由于$PO_1 + PO_2 = R_1 + R_2$总是常数, B的球心轨迹P在平面Σ上

是一个椭圆. 故B的球心轨迹构成的曲面S为旋转椭球，旋转轴为过O_1和O_2的直线，并且两球心O_1和O_2为旋转椭球的两个焦点.　（9分）

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分)设 $\alpha > 0$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负, 有二阶导函数, $f(0)=0$, 且在 $[0,1]$ 上不恒为零. 求证: 存在 $\xi \in (0,1)$ 使得

$$\xi f''(\xi) + (\alpha+1)f'(\xi) > \alpha f(\xi).$$

证明 (反证法) 若结论不对, 则对一切 $x \in [0,1)$ 有

$$x f''(x) + (\alpha+1)f'(x) \leqslant \alpha f(x).$$

这说明函数 $xf'(x) + \alpha f(x) - \alpha \int_0^x f(u)\,du$ 的导数非正, 因而单调递减, 但它在 0 取 0, 故,

$$xf'(x) + \alpha f(x) \leqslant \alpha \int_0^x f(u)\,du,\ x \in [0,1]. \qquad (\text{...... 5分})$$

因而

$$x^\alpha f'(x) + \alpha x^{\alpha-1} f(x) \leqslant \alpha x^{\alpha-1}\int_0^x f(u)\,du,\ x \in [0,1].$$

将上式在 $[0,x]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned} x^\alpha f(x) &\leqslant \alpha \int_0^x t^{\alpha-1}\left(\int_0^t f(u)\,du\right)dt \\ &\leqslant \alpha \int_0^x t^{\alpha-1}\left(\int_0^x f(u)\,du\right)dt \\ &= x^\alpha \int_0^x f(u)\,du. \end{aligned}$$

故,

$$f(x) \leqslant \int_0^x f(u)\,du. \qquad (\text{...... 10分})$$

记, $g(x) = \int_0^x f(u)\,du$. 则从上式可得 $g'(x) \leqslant g(x)$. 因此

$$(e^{-x}g(x))' \leqslant 0.$$

这说明 $e^{-x}g(x)$ 在 $[0,1]$ 上递减. 注意到 $g(0)=0$, 可得 $g(x) \leqslant 0$. 但从 $f(x)$ 非负可知 $g(x) \geqslant 0$. 故, $g(x) \equiv 0$. 从而 $f(x) \equiv 0$. 这与 $f(x)$ 不恒为零矛盾! (...... 15分)

得分	
评阅人	

三、（本题15分）设A为n阶复方阵, $p(x)$为$I-\overline{A}A$的特征多项式,其中$\overline{A}$表A的共轭矩阵. 证明：$p(x)$必为实系数多项式.

证明：记

$$p(t)=det(tI-(I-A\bar{A}))=det((t-1)I+A\bar{A})$$

为$I-A\bar{A}$的特征多项式. 对任何实数t，有

$$(*)\qquad \overline{p(t)}=\overline{det((t-1)I+A\bar{A})}=det((t-1)I+\bar{A}A).$$

（5分）

对任何两个方阵A和B，有$det(sI+AB)=det(sI+BA)$, 证明如下：取可逆矩阵序列B_n使得$B_n\to B$（例如，对充分大的n取$B_n=B+\frac{1}{n}I$），则

$$det(sI+AB_n)=det(sB_n^{-1}+A)detB_n=detB_n det(sB_n^{-1}+A)=det(sI+B_nA).$$

令$n\to\infty$, 得到公式$det(sI+AB)=det(sI+BA)$. 用$B=\bar{A}$代入公式，则有

$$\overline{p(t)}=det((t-1)I+\bar{A}A)=det((t-1)I+A\bar{A})=p(t)$$

对所有的实数t成立，故$p(t)$的系数都是实数. （15分）

注：也可通过利用分块矩阵初等变换求$\begin{pmatrix} I & B \\ A & sI \end{pmatrix}$的行列式来证明公式$det(sI-AB)=det(sI-BA)$.具体地:

$$\forall s\neq 0,\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B \\ A & sI \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & sI-AB \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & B \\ A & sI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A/s & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I-BA/s & B \\ 0 & sI \end{pmatrix}$$

对上两矩阵等式两边取行列式即得$det(sI-AB)=det(sI-BA)$对一切非零的实数均成立.从而多项式$det(sI-AB)-det(sI-BA)\equiv 0$，因为多项式$det(sI-AB)-det(sI-BA)$至多是n次多项式. 获证.

专业: 座位号: 考场号: 所在院校: 准考证号: 姓名:

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

四、（本题20分）已知f_1为实n元正定二次型. 令
$V=\{f \mid f$为实n元二次型，满足：对任何实数k有 $kf+f_1$ 属于恒号二次型$\}$,
这里恒号二次型为0二次型，正定二次型及负定二次型的总称. 证明：V按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间，并求这个向量空间的维数.

证法1： 设$f\in V, f$与 f_1 所对应的二次型矩阵分别为 A 和B. 由B 正定可推得

$\exists P$ 可逆，使得 $B=PP^T, A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^T.$ （10分）

由条件：对任何实数k有 $kf+f_1$ 属于恒号二次型可推得 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n$.

事实上，若$\lambda_1\neq\lambda_2$. 则由式子

$$kf+f_1=(z_1,\ldots,z_n)P\begin{pmatrix}k\lambda_1+1 & & \\ & \ddots & \\ & & k\lambda_n+1\end{pmatrix}P^T\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$$

知，总可取某实数 q, 使得$(q\lambda_1+1)(q\lambda_2+1)<0$. 从而可取两点：$(z_1,\ldots,z_n)P=(0,1,0,\ldots,0)$ 及 $(z_1,\ldots,z_n)P=(1,0,0,\ldots,0)$， $qf+f_1$在该两点取值异号，矛盾.

到此，我们实际上得到$V=\{kf_1|k\in\mathbb{R}\}$.

直接可知，V按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间，并这个向量空间的维数是 1. 证毕。 （20分）

证法2： 首先，$V\neq\emptyset$, 因为$0\in V$, 且对任何实数k有$kf_1\in V$. （2分）

其次，对任意非零$f\in V$, 若存在$k\in\mathbf{R}$, 使得$kf+f_1\equiv 0$, 则由f_1的正定性，可知$k\neq 0$，从而$f=-\frac{1}{k}f_1$; 若对任意的$k\in\mathbf{R}$, $kf+f_1\not\equiv 0$, 则由条件知，$kf+f_1$要么为正定二次型，要么为负定二次型. 断言：f和f_1必线性相关.

用反证法. 若f和f_1线性无关，则由f_1正定知，存在点P_1使得$f_1(P_1)>0$. 此时考察二次型 $g=f_1(P_1)f-f(P_1)f_1$, 由f和f_1线性无关知$g\not\equiv 0$ (因为$\{f_1(P_1),-f(P_1)\}$是一组不全为零的数), 故存在P_2使得

$$(*)\qquad 0\neq g(P_2)=f_1(P_1)f(P_2)-f(P_1)f_1(P_2).$$

此时有

(i) $P_2\neq(0,\cdots,0), f_1(P_2)>0$;

(ii) $f(P_2), f(P_1)$不同时为零.

先考虑$f(P_1)\neq 0$的情形，由(*)式有

$$\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_2)+f_1(P_2)=\frac{g(P_2)}{-f(P_1)}\neq 0.$$

令 $k=\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}$, 由$kf+f_1$ 恒号可知：当$\frac{g(P_2)}{-f(P_1)}>0$时，$\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_1)+f_1(P_1)>0$, 明显上述不等式左边为零，矛盾.

当$\frac{g(P_2)}{-f(P_1)}<0$时, 得$\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_1)+f_1(P_1)<0$,不等式左边为零，矛盾.

接下来考虑$f(P_2)\neq 0$的情形. 同样由(*)式有

$$-\frac{f_1(P_2)}{f(P_2)}f(P_1)+f_1(P_1)=\frac{g(P_2)}{-f(P_2)}\neq 0.$$

令 $k=-\frac{f_1(P_2)}{f(P_2)}$, 类似地，由$kf+f_1$ 恒号可得矛盾.断言获证. （15分）

现在， f与f_1 线性相关，故存在一组不全为0 得数$\lambda_1\mu$, 使得 $\lambda_1 f_1+\mu f=0$.

若$\lambda_1=0$, 则 $\mu\neq 0$, 因此有 $f=-\frac{\lambda_1}{\mu}f_1$. 若$\lambda_1\neq 0$, 则由$\lambda_1 f_1\neq 0$ 知 $\mu\neq 0$, 因此仍然有 $f=-\frac{\lambda_1}{\mu}f_1$.

到此，我们实际上得到$V=\{kf_1|k\in\mathbb{R}\}$. （18分）

最后直接可知， V按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间，并这个向量空间的维数是 1. （20分）

专业: ______ 座位号: ______ 考场号: ______ 所在院校: ______ 准考证号: ______ 姓名: ______

密封线　答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、（本题15分）设 $\delta > 0$, $\alpha \in (0,1)$, 实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1} = x_n\left(1 - \frac{h_n}{n^\alpha}\right) + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}}, \qquad n \geqslant 1,$$

其中 $\{h_n\}$ 有正的上下界. 证明: $\{n^\delta x_n\}$ 有界.

证明. 记 $c := \inf\limits_{n\geqslant 1} h_n$.

由题设可知存在 $N \geqslant 1$ 使得当 $n \geqslant N$ 时, 成立

$$|x_{n+1}| \leqslant \left(1 - \frac{c}{n^\alpha}\right)|x_n| + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}}$$

……………………………………………………………………(+3 分= 3 分)

以及

$$\frac{\delta}{n} \leqslant \frac{c}{2n^\alpha}.$$

……………………………………………………………………(+3 分= 6 分)

取 $C := \max\left(N^\delta|x_N|, \dfrac{2}{c}\right)$. 我们来证明对于 $n \geqslant N$ 成立 $|x_n| \leqslant \dfrac{C}{n^\delta}$. 首先，由 C 的定义知当 $n = N$ 时, 有 $|x_n| \leqslant \dfrac{C}{n^\delta}$. 进一步, 若对某个 $n \geqslant N$ 成立 $|x_n| \leqslant \dfrac{C}{n^\delta}$, 则

$$
\begin{aligned}
& |x_{n+1}| - \frac{C}{(n+1)^\delta} \leqslant \left(1 - \frac{c}{n^\alpha}\right)\frac{C}{n^\delta} + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}} - \frac{C}{(n+1)^\delta} \\
= \;& C\left(\frac{1}{n^\delta} - \frac{1}{(n+1)^\delta}\right) - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}}
\end{aligned}
$$

……………………………………………………………………(+3 分= 9 分)

$$\leqslant \frac{C\delta}{n^{1+\delta}} - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} \leqslant \frac{Cc}{2n^{\alpha+\delta}} - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} = -\frac{Cc-2}{2n^{\alpha+\delta}} \leqslant 0.$$

……………………………………………………………………(+3 分= 12 分)

因此, 由数学归纳法得到当 $n \geqslant N$ 时, 总成立 $|x_n| \leqslant \dfrac{C}{n^\delta}$. 因此, $\{n^\delta x_n\}$ 有界.

……………………………………………………………………(+3 分= 15 分)

得分	
评阅人	

六、（本题20分）设 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.

(i) 证明 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数. 进一步, 证明当 $x,y\geqslant 0$ 时成立 $f(x)+f(y)\leqslant f(0)+f(x+y)$.

(ii) 设 $n\geqslant 3$, 试确定集合 $E\equiv\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)\,\middle|\,\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=0, x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}\right\}$.

解:

(i) 我们有

$$f'(x)=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2},\qquad f''(x)=\frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}.$$

当 $x\geqslant 0$ 时, 成立 $f''(x)\geqslant 0$. 所以 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数.

…………………………………………………………… (+4 分= 4 分)

从而 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加, 因此对于 $x,y\geqslant 0$, 有

$$f(x+y)-f(x)-f(y)+f(0)=\int_0^y\big(f'(t+x)-f'(t)\big)\,dt\geqslant 0.$$

…………………………………………………………… (+2 分= 6 分)

(ii) 由连续性, 易见 E 是一个区间.

…………………………………………………………… (+2 分= 8 分)

我们有 $f(x)+f(-x)=1$.

…………………………………………………………… (+2 分= 10 分)

下设 $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$.

若 $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, 则 $\sum\limits_{j=1}^{n}f(x_j)=\dfrac{n}{2}$.

若 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 不全为零, 设其中负数的个数为 k, 非负数的个数为 m, 则 $m+k=n$, $1\leqslant k\leqslant n-1$.

不妨设 $x_1,\ldots,x_m\geqslant 0$, $x_{m+1},\ldots,x_n<0$. 记 $y_1=-x_{m+1}, y_2=-x_{m+2},\ldots,y_k=-x_n$, $x=x_1+\ldots+x_m=y_1+\ldots+y_k$, 则由 (i) 易得

$$f(y_1)+f(y_2)+\ldots+f(y_k)\leqslant(k-1)f(0)+f(x).$$

注意到 $mf\big(\dfrac{x}{m}\big)-f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单减,

…………………………………………………………… (+4 分= 14 分)

我们有

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j) + k - \sum_{j=1}^{k} f(y_j) \\
\geqslant\ & mf\Big(\frac{x}{m}\Big) + k - \Big((k-1)f(0) + f(x)\Big) \\
>\ & \lim_{u\to+\infty} \Big[mf\Big(\frac{u}{m}\Big) + k - \big((k-1)f(0) + f(u)\big)\Big] \\
=\ & \frac{k+1}{2} \geqslant 1.
\end{aligned}
$$

这表明 $\inf E \geqslant 1$ 而 $1 \notin E$.

另一方面, 取 $u > 0$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = \frac{u}{n-1}$, $x_n = -u$, 则

$$\lim_{u\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \lim_{u\to+\infty} \Big((n-1)f\Big(\frac{u}{n-1}\Big) + 1 - f(u)\Big) = 1.$$

因此, $\inf E = 1$.

. . . . (+4 分= 18 分)

另一方面, 由 $f(-x) = 1 - f(x)$ 可得

$$E = \{n - z | z \in E\}.$$

因此, $\sup E = n - 1$, 且 $n - 1 \notin E$.

所以 E 为开区间 $(1, n-1)$.

. . . . (+2 分= 20 分)