全国大学生数学竞赛决赛模拟试题

（数学专业类低年级组）

一、填空题（本题20分，每小题5分）

（1）三重积分 $\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ z\ge 0}} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2+1)^{\frac{3}{2}}}dxdydz =$_______.

（2）设 $G=\left\{\alpha\in R \mid \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\cos n+n^{\alpha}}\text{收敛}\right\}$. 则 $G=$_______.

（3）设矩阵 $A=(a_{ij})_{4\times 4}$，其中 $a_{ij}\in\{1,2,\cdots,16\}$ 且两两不同. 则 $rankA$ 的最小值为_______.

（4）设 $I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^2 dx$，则 $I=$_______.

二、（本题10分）求直线 $L:\begin{cases}x+y+2z=1\\ 2x+y+3z=4\end{cases}$ 上的一点 $P(x,y,z)$，使得点 P 到原点 $O(0,0,0)$ 的距离最近.

三、（本题14分）设V为有理数域上的4维向量空间，φ为V到V的一个线性变换，$\alpha_1,\cdots,\alpha_5$为V中的一组向量满足$\alpha_1\neq 0,\alpha_4\neq\alpha_1+\alpha_2,\varphi(\alpha_1)=\alpha_2,\varphi(\alpha_2)=\alpha_3$，$\varphi(\alpha_3)=\alpha_1+\alpha_2,\varphi(\alpha_4)=\alpha_5,\varphi(\alpha_5)=\alpha_3+\alpha_4$. 求$\varphi$的行列式.

四、（本题20分）任取$\alpha>0$，证明或举例否定：存在严格凸函数$f\in C^{\infty}(R)$使得$|x|\leq|f(x)|\leq|x|+\alpha$，$\forall x\in R$.

五、（本题10分）设L为(a,b)内的全体实函数所构成的实向量空间，其向量加法及数乘为通常的函数加法与数乘，$b>a$. 又设$f_1,f_2,f_3\in L$，其中f_1不为零向量（即f_1在(a,b)内不恒等于0），V为由f_1,f_2,f_3所生成的L的子空间（即$V=\{k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3\mid k_i\in R,i=1,2,3\}$）. 现若对任意的实数$c_1,c_2,c_3$均有$c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3$在$(a,b)$内不变号，求子空间$V$的维数并找出$V$的一组基. 这里所谓$f$在$(a,b)$内不变号是指$f$在$(a,b)$上恒大于0或恒小于0，除非$f\equiv 0$.

六、（本题16分）设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f'-2f\le 4$. 进一步，$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 证明：

（1）存在非零常数 λ 和 C 使得 $e^{\lambda x}(f(x)+C)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单减.

（2）存在数列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=0$，且对任何 $n\ge 1$ 有 $1\le x_{n+1}-x_n\le 3$.

（3）$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=0$.

七、（本题10分）设 F 在平面上连续可微满足 $F(x,y)=F(x+T,y)$（这里 T 为一给定的正实数）. 证明：若 $y=y(x)(x\in(-\infty,+\infty))$ 为方程 $\dfrac{dy}{dx}=F(x,y)$ 的一个周期解，则必有 $y(x)=y(x+T)(x\in(-\infty,+\infty))$.

注：模拟试题答案解析请参考全国大学生数学竞赛命题组编、科学出版社出版的《全国大学生数学竞赛真题解析与获奖名单（第11−15届）》。