

## 2018 年第九届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类三、四年级) 参考答案

### 一、填空题

(1) 【参考解析】: 10

$H_n$  是  $m = 2^n$  阶对称方阵, 存在正交方阵  $P$  使得  $P^{-1}H_nP = D$  是对角方阵. 从而,

$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & I \\ I & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix}^{-1}$$

与  $\begin{pmatrix} D & I \\ I & D \end{pmatrix}$  相似. 设  $H_n$  的所有特征值是  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , 则  $H_{n+1}$  的所有特征值是

$$\lambda_1 + 1, \lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_m + 1, \lambda_m - 1$$

利用数学归纳法容易证明:  $H_n$  的所有不同特征值  $\{n - 2k \mid k = 0, 1, \dots, n\}$ , 并且每个特征值  $n - 2k$  的代数重数为  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . 因此,  $\text{rank}(H_4) = 2^4 - C_4^2 = 10$ .

(2) 【参考解答】:  $\frac{1}{2}$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(3) 【参考解答】: -2

考虑直接法计算, 直接代入参数表达式, 得定积分被积函数为

$$f(t) = 2 \cos(2t) \cos(\sin(2t)) + e^{\sin\left(\frac{\pi \sin t}{2}\right)} \left[ \frac{1}{2} \pi \cos \frac{t}{2} \cos\left(\pi \sin \frac{t}{2}\right) \cos(t - \sin t) \right. \\ \left. - \sin(t - \sin t)(1 - \cos t) \right]$$

可得原函数为

$$F(t) = \sin(\sin(2t)) + e^{\sin\left(\frac{\pi \sin t}{2}\right)} \cos(t - \sin t),$$

所以原积分 =  $\int_0^\pi f(t) dt = [F(t)]_0^\pi = -2$ .

(4) 【参考解析】:  $((n-1)a+1)y_1^2 - (a-1)y_2^2 - \cdots - (a-1)y_n^2$

只需要求出  $A$  全部特征值即可. 显然  $A + (a-1)I$  的秩  $\leq 1$ . 故  $A + (a-1)I$  的零空间的维数为  $\geq n-1$ , 从而可设  $A$  的  $n$  个特征值为  $\lambda_1 = 1-a, \lambda_2 = 1-a, \dots, \lambda_{n-1} = 1-a, \lambda_n$ . 注意到  $\text{tr } A = n$ , 故得  $\lambda_n = (n-1)a+1$ . 结果,  $f$  在正交变换下的标准形为

$$((n-1)a+1)y_1^2 - (a-1)y_2^2 - \cdots - (a-1)y_n^2$$

二、【参考解析】: 【思路一】因为  $A$  在  $S$  的外部, 故有

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 > 0 \quad (1)$$

对于任意的  $M(x, y, z) \in S \cap \Sigma$ , 连接  $A, M$  的直线记为  $l_M$ , 其参数方程可设为

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + t(x - x_0) \\ \tilde{y} = y + t(y - y_0) \quad (-\infty < t < +\infty) \\ \tilde{z} = z + t(z - z_0) \end{cases} \quad (2)$$

代入椭球面的方程得  $\frac{(x+t(x-x_0))^2}{a^2} + \frac{(y+t(y-y_0))^2}{b^2} + \frac{(z+t(z-z_0))^2}{c^2} = 1$ , 整理得

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + t^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 2 \left( \frac{x_0}{a^2} x + \frac{y_0}{b^2} y + \frac{z_0}{c^2} z \right) \right) \\ & + 2t \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \left( \frac{x_0}{a^2} x + \frac{y_0}{b^2} y + \frac{z_0}{c^2} z \right) \right) = 1 \end{aligned}$$

因为点  $M$  在椭球面  $S$  上,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . 上式化为

$$\begin{aligned} & t^2 \left( 1 + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 2 \left( \frac{x_0}{a^2} x + \frac{y_0}{b^2} y + \frac{z_0}{c^2} z \right) \right) \\ & + 2t \left( 1 - \left( \frac{x_0}{a^2} x + \frac{y_0}{b^2} y + \frac{z_0}{c^2} z \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

由于  $l_M$  与  $S$  在  $M$  点相切, 方程 (3) 有一个二重根  $t = 0$ . 故有

$$\frac{x_0}{a^2} x + \frac{y_0}{b^2} y + \frac{z_0}{c^2} z - 1 = 0 \quad (4)$$

此时由 (1) 知, 方程 (3) 的首项系数化为

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 > 0$$

特别地, (4) 的系数均不为零因而是一个平面方程, 确定的平面记为  $\Pi$ . 上述的推导证明了  $S \cap \Sigma \subset \Pi$ , 从而证明了  $S \cap \Sigma \subset S \cap \Pi$

反之, 对于截线  $S \cap \Pi$  上的任一点  $M(x, y, z)$ , 由 (3)、(4) 两式即知, 由  $A, M$  两点确定的直线  $l_M$  一定在点  $M$  与  $S$  相切. 故由定义,  $l_M$  在锥面  $\Sigma$  上. 特别地  $M \in \Sigma$ , 由  $M$  的任意性,  $S \cap \Pi \subset S \cap \Sigma$ .

**【思路二】** 因为  $A$  在  $S$  的外部, 故有  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} > 1 > 0$  (5)

对于任意的  $M(x_1, y_1, z_1) \in S \cap \Sigma$ , 椭球面  $S$  在  $M$  点的切平面方程可以写为

$$\frac{x_1}{a^2} x + \frac{y_1}{b^2} y + \frac{z_1}{c^2} z - 1 = 0$$

因为连接  $M$  和  $A$  两点的直线是  $S$  在点  $M$  的切线，所以  $A$  点在上述切平面上。故

$$\frac{x_1}{a^2}x_0 + \frac{y_1}{b^2}y_0 + \frac{z_1}{c^2}z_0 - 1 = 0$$

于是，点  $M(x_1, y_1, z_1)$  在平面（注意，由（6）式， $x_0, y_0, z_0$  不全为 0）

$$\Pi : \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z - 1 = 0$$

上，即  $M \in S \cap \Pi$ . 反之，对于任意  $M(x_1, y_1, z_1) \in S \cap \Pi$ , 有

$$\frac{x_0}{a^2}x_1 + \frac{y_0}{b^2}y_1 + \frac{z_0}{c^2}z_1 - 1 = 0$$

则  $S$  在  $M$  点的切平面  $\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y + \frac{z_1}{c^2}z - 1 = 0$  通过点  $A(x_0, y_0, z_0)$ ，因而  $M, A$  的连线在点  $M$  和椭球面  $S$  相切，它在锥面  $\Sigma$  上。故  $M \in S \cap \Sigma$ . 结论得证。

**三、【参考解析】：** (1) 设  $C$  的不同特征值为  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ，不妨设  $C$  具有 Jordan 标准型：

$C = \text{diag}(J_1, \dots, J_k)$ ，其中  $J_i$  为特征值  $\lambda_i$  对应的 Jordan 块。对矩阵  $B$  做与  $C$  相同的分块， $B = (B_{ij})_{k \times k}$ ，由  $BC = CB$  可得  $J_i B_{ij} = B_{ij} J_j, i, j = 1, 2, \dots, k$ .

这样对任意多项式  $p$  有  $p(J_i) B_{ij} = B_{ij} p(J_j)$ . 取  $p$  为  $J_i$  的最小多项式，则得

$$B_{ij} p(J_j) = 0.$$

当  $i \neq j$  时， $p(J_j)$  可逆，从而  $B_{ij} = 0$ . 因此， $B = \text{diag}(B_{11}, \dots, B_{kk})$ .

同理， $A = \text{diag}(A_{11}, \dots, A_{kk})$ ，由  $AB - BA = C$  得

$$A_{ii} B_{ii} - B_{ii} A_{ii} = J_i, i = 1, \dots, k.$$

故  $\text{Tr}(J_i) = \text{Tr}(A_{ii} B_{ii} - B_{ii} A_{ii}) = 0, i = 1, 2, \dots, k$ . 从而  $\lambda_i = 0$ ，即  $C$  为幂零方阵。

(2) 令  $V_0 = \{v \in \mathbb{C}^n \mid Cv = 0\}$ . 对任意  $v \in V_0$ ，由于  $C(Av) = A(Cv) = 0$ ，因此

$$AV_0 \subseteq V_0, \text{ 同理, } BV_0 \subseteq V_0.$$

于是存在  $0 \neq v \in V_0$  和  $\lambda \in \mathbb{C}$  使得  $Av = \lambda v$ ，记  $V_1 = \{v \mid Av = \lambda v\} \subseteq V_0$ ，由  $AB - BA = C$  知，对任意  $u \in V_1$ ， $A(Bu) = B(Au) + Cu = \lambda Bu$ . 故  $BV_1 \subseteq V_1$ . 从而存在  $0 \neq v_1 \in V_1$  及  $\mu \in \mathbb{C}$  使得  $Bv_1 = \mu v_1$ ，同时有  $Av_1 = \lambda v_1, Cv_1 = 0$ .

将  $v_1$  扩充为  $\mathbb{C}^n$  的一组基  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，令  $P = (v_1, \dots, v_n)$ ，则

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad BP = P \begin{pmatrix} \mu & y \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \quad CP = P \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$$

并且  $A_1, B_1, C_1$  满足  $A_1 B_1 - B_1 A_1 = C_1, A_1 C_1 = C_1 A_1, B_1 C_1 = C_1 B_1$ .

由数学归纳法即可得知， $A, B, C$  同时相似于上三角阵。

(3) 当  $n \geq 3$  时, 取  $A = E_{12}, B = E_{23}, C = E_{13}$ , 则  $A, B, C$  满足题意. 对  $n = 2$ , 不妨设  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

则有  $AC = CA$ , 得  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$ . 类似由有  $BC = CB$  得  $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ . 于是

$$AB - BA = 0,$$

这与  $AB - BA = C$  矛盾! 故满足  $C \neq 0$  的  $n$  最小为 3.

四、【参考解析】: 设  $M = \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| = |f'(x_1)|, m = \min_{x \in [0,1]} |f'(x)| = |f'(x_0)|$ , 则有

$$\int_0^1 |f''(x)| dx \geq \left| \int_{x_0}^{x_1} f''(x) dx \right| = |f'(x_1) - f'(x_0)| \geq M - m$$

另一方面, 有  $\int_0^1 |f'(x)| dx \leq M \int_0^1 dx = M$  故, 只需证明  $m \leq 2 \int_0^1 |f(x)| dx$

若  $f'(x)$  在  $[0,1]$  中有零点, 则  $m = 0$ . 此时 (2) 显然成立. 现在假设  $f'(x)$  在  $[0,1]$  上无零点, 不妨设  $f'(x) > 0$ , 因而  $f(x)$  严格递增. 下面分两种情形讨论.

情形1  $f(0) \geq 0$  此时  $f(x) \geq 0 (x \in [0,1])$ . 由  $f'(x) = |f'(x)| \geq m$ , 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (f(x) - f(0)) dx + f(0) \\ &\geq \int_0^1 (f(x) - f(0)) dx = \int_0^1 f'(\xi)x dx \geq \int_0^1 mx dx = \frac{1}{2}m \end{aligned}$$

故, (2) 成立.

情形2  $f(0) < 0$ . 此时有  $f(1) \leq 0$ , 根据  $f$  的递增性, 有  $f(x) \leq 0 (x \in [0,1])$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= -\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (f(1) - f(x)) dx - f(1) \\ &\geq \int_0^1 |f(1) - f(x)| dx = \int_0^1 |f'(\xi)|(1-x) dx \geq \int_0^1 m(1-x) dx = \frac{1}{2}m \end{aligned}$$

此时, (2) 也成立. 注: 由  $f(0)f(1) \geq 0$ , 可不妨设  $f(x) \geq 0, x \in [0,1]$ .

可只考虑情形1.

五、【参考解析】: 先证  $x^2y = yx^2$ . 事实上有  $x^2y = ((xy^{-1})y)^2y = (y(xy^{-1}))^2y = yxy^{-1}yx = yx^2$   
再证  $x^{-1}y^{-1}x = xy^{-1}x^{-1}$ , 这可由  $x^{-1}y^{-1}x = x(x^{-1})^2y^{-1}x = xy^{-1}(x^{-1})^2x = xy^{-1}x^{-1}$  看出.

最后验证  $(xyx^{-1}y^{-1})^2 = e$ . 这是因为

$$\begin{aligned} (xyx^{-1}y^{-1})^2 &= xy(x^{-1}y^{-1}x)yx^{-1}y^{-1} = xy(xy^{-1}x^{-1})yx^{-1}y^{-1} \\ &= (xyx)(y^{-1}x^{-1}y)x^{-1}y^{-1} = xyx(yx^{-1}y^{-1})x^{-1}y^{-1} = (xy)^2(x^{-1}y^{-1})^2 = (xy)^2(xy)^{-2} = e \end{aligned}$$

证毕.

六、【参考解析】: 先证任取  $F \subset E$  有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_F |f_k(t)|^2 dt = \int_F |f(t)|^2 dt \quad (*)$$

由 Fatou 引理

$$\begin{aligned}
& \int_F |f(t)|^2 dt = \int_F \liminf_{k \rightarrow \infty} |f_k(t)|^2 dt \\
& \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_F |f_k(t)|^2 dt \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_F |f_k(t)|^2 dt \\
& = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left[ \int_E |f_k(t)|^2 dt - \int_{E \setminus F} |f_k(t)|^2 dt \right] \\
& \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(t)|^2 dt - \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{E \setminus F} |f_k(t)|^2 dt \\
& \leq \int_E |f(t)|^2 dt - \int_{E \setminus F} \liminf_{k \rightarrow \infty} |f_k(t)|^2 dt \\
& = \int_E |f(t)|^2 dt - \int_{E \setminus F} |f(t)|^2 dt = \int_F |f(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

因此 (\*) 成立.

由于  $|f|^2$  可积, 任给  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得任取可测集  $F \subset E$  满足  $m(F) < \delta$  时, 有

$$\int_F |f(t)|^2 dt < \frac{\epsilon}{12} \quad (**)$$

由叶果洛夫定理, 存在  $E_\delta \subset E$ , 使得  $m(E \setminus E_\delta) < \delta$ , 且在  $E_\delta$  上  $f_k$ : 一致地收敛到  $f$ . 因此存在  $N_1$ , 任取  $k \geq N_1$ ,  $t \in E_\delta$ , 有

$$|f_k(t) - f(t)| \leq \left[ \frac{\epsilon}{3(1 + m(E))} \right]^{1/2}$$

由于  $m(E \setminus E_\delta) < \delta$ , 利用 (\*\*) 我们有

$$\int_{E \setminus E_\delta} |f(t)|^2 dt < \frac{\epsilon}{12}$$

由 (\*) 我们有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E \setminus E_\delta} |f_k(t)|^2 dt = \int_{E \setminus E_\delta} |f(t)|^2 dt$$

故存在  $N_2$ , 使得任取  $k \geq N_2$  有

$$\int_{E \setminus E_\delta} |f_k(t)|^2 dt < \frac{\epsilon}{12}$$

令  $N = \max(N_1, N_2)$ , 则  $k \geq N$  时, 有

$$\begin{aligned}
\int_E |f_k(t) - f(t)|^2 dt &= \int_{E_\delta} |f_k(t) - f(t)|^2 dt + \int_{E \setminus E_\delta} |f_k(t) - f(t)|^2 dt \\
&\leq \frac{\epsilon}{3(1 + m(E))} m(E_\delta) + 4 \int_{E \setminus E_\delta} |f_k(t)|^2 dt + 4 \int_{E \setminus E_\delta} |f(t)|^2 dt \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

七、【参考解析】: (1) 求  $S$  上任意测地线的方程

**【思路一】**  $\mathbf{r}_u = \{-a \sin u, b \cos u, 0\}$ ,  $\mathbf{r}_v = \{0, 0, 1\}$

所以,  $S$  的单位法向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \\ &= \left( a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u \right)^{-\frac{1}{2}} \{b \cos u, a \sin u, 0\} \end{aligned} \quad (1)$$

设  $\gamma$  是  $S$  上的任意测地线, 其曲纹坐标参数方程暂设为

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

首先, 由于任意曲面上的直线 (如果存在的话) 都是测地线,  $S$  上的直母线 (即  $u = \text{常数}$ ) 均为测地线. 于是只需求满足条件  $u'(t) \neq 0$  的测地线. 此时, 可作  $\gamma$  的参数变换使得它可以用显式函数  $v = f(u)$  ( $u \in [-\pi, \pi]$ ) 来表示. 于是,  $\gamma$  的向量式参数方程化为

$$\mathbf{r}(u) = \{a \cos u, b \sin u, f(u)\}, \quad u \in [-\pi, \pi] \quad (3)$$

关于参数  $u$  求导, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(u) &= \{-a \sin u, b \cos u, f'(u)\}, \\ \mathbf{r}''(u) &= \{-a \cos u, -b \sin u, f''(u)\} \end{aligned} \quad (4)$$

所以,  $\gamma$  的单位切向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(u) &= |\mathbf{r}'(u)|^{-1} \mathbf{r}'(u) \\ &= |\mathbf{r}'|^{-1} \{-a \sin u, b \cos u, f'(u)\} \end{aligned} \quad (5)$$

如果  $s$  是曲线  $\gamma$  的弧长, 则有  $\frac{ds}{du} = |\mathbf{r}'(u)|$ . 于是曲率向量为

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \left( \mathbf{r}'' |\mathbf{r}'(u)|^{-1} + \mathbf{r}' \frac{d}{dt} (|\mathbf{r}'|^{-1}) \right) \frac{dt}{ds} \\ &= \mathbf{r}'' |\mathbf{r}'|^{-2} - \mathbf{r}' |\mathbf{r}'|^{-3} \cdot |\mathbf{r}'|' \end{aligned} \quad (6)$$

因此, 曲线  $\gamma$  在曲面  $S$  上的测地曲率为

$$\kappa_g = \left( \frac{d\mathbf{T}}{ds}, \mathbf{n}, \mathbf{T} \right) = |\mathbf{r}'|^{-2} (\mathbf{r}'', \mathbf{n}, \mathbf{T})$$

所以,  $\gamma$  是测地线当且仅当  $(\mathbf{r}'', \mathbf{n}, \mathbf{T}) \equiv 0$ . 再由 (1), (4) 和 (5), 此式等价于

$$\begin{vmatrix} -a \cos u & -b \sin u & f''(u) \\ b \cos u & a \sin u & 0 \\ -a \sin u & b \cos u & f'(u) \end{vmatrix} \equiv 0$$

上式等价于

$$f''(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) = f'(a^2 - b^2) \sin u \cos u \quad (12)$$

1)  $f' \equiv 0$ , 则  $v = f(u) \equiv c$  是常数, 曲线  $\gamma$  是  $S$  上的正截线, 即椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = c$$

2)  $f' \neq 0$ , 则 (7) 等价于微分方程

$$\begin{aligned} (\log|f'|)' &= \frac{f''}{f'} = \frac{(a^2 - b^2)\sin u \cos u}{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a^2 - b^2)(\sin^2 u)'}{(a^2 - b^2)\sin^2 u + b^2} \\ &= \left( \log(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{1}{2}} \right)' \end{aligned}$$

两边关于  $u$  进行积分, 得

$$f' = c(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \neq c \in \mathbb{R}.$$

再积分即得

$$f = c \int (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{1}{2}} du, \quad 0 \neq c \in \mathbb{R} \quad (13)$$

所以,  $S$  上的测地线为如下三类曲线:

- (i)  $S$  上的直母线 ( $v = \text{常数}$ );
- (ii)  $S$  上的横截椭圆 ( $u = \text{常数}$ );
- (iii) 曲线 (3), 其中函数  $f$  由 (8) 确定.

**【思路二】** 把椭圆柱面沿一条直母线剪开展为平面上的一个带形区域:

$$s_1 < s < s_2, \quad -\infty < v < +\infty$$

其中  $s = s(u)$  是椭圆

$$\mathbf{r}(u) = \{a \cos u, b \sin u, 0\}, \quad -\pi \leq u \leq \pi$$

的弧长函数.

因为把柱面展开为平面对应的变换保持曲面上曲线的弧长不变, 而保长变换 (即等距) 把测地线变为测地线, 所以已知椭圆柱面上的测地线对应于上述带形区域中的测地线即直线.

根据平面上直线的方程, 带形区域中直线方程为

$$As + Bv + C = 0$$

另一方面, 由弧长微分公式知:

$$ds = |\mathbf{r}'(u)| du = (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{1}{2}} du$$

故得

$$s = \int (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{1}{2}} du$$

所以, 已知椭球面上所求的测地线方程为

$$A \int (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{1}{2}} du + Bv + C = 0,$$

$A, B$  不全为 0

i) 如果  $A = 0$ , 则有  $v = \text{常数}$ , 对应椭圆柱面上的横截椭圆;

ii) 如果  $B = 0$ , 则有  $\int (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{1}{2}} du = \text{常数}$

iii) 如果  $A \neq 0, B \neq 0$ , 则有

$$v \equiv f(u) = c \int (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{1}{2}} du, \quad c \neq 0$$

(2) 由于  $b = a$ , 由 (8) 确定的测地线方程 (3) 简化为

$$\mathbf{r}(u) = \{a \cos u, a \sin u, c_1 u + c_2\}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0 \quad (9)$$

因此, 对于给定的点  $Q(a \cos u_0, a \sin u_0, v_0)$

i) 如果  $u_0 = 0$ , 则所求的最短曲线为连接  $P, Q$  的直母线段:  $0 \leq v \leq v_0$ ;

ii) 如果  $u_0 = 0$ , 则所求的最短曲线为连接  $P, Q$  的正截椭圆劣弧段:

$u_0 \leq u \leq 0$  (如果  $u_0 < 0$ ) 或  $0 \leq u \leq u_0$  (如果  $u_0 > 0$ );

iii) 如果  $u_0 \neq 0, v_0 \neq 0$ , 则当测地线通过点  $P$  时, 可设  $c_2 = 0$ . 再令  $c_1 u_0 = v_0$  得  $c_1 = u_0^{-1} v_0$ . 从而所求的最短曲线方程为  $\mathbf{r}(u) = \{a \cos u, a \sin u, (u_0^{-1} v_0) u\}$ , 其中当  $u_0 < 0$  时,  $u \in [u_0, 0]$ ; 当  $u_0 > 0$  时,  $u \in [0, u_0]$ .

**八、【参考解析】:** 考虑  $n$  阶线性方程组  $Ax = b$ , 这里  $A$  为  $n$  阶实对称正定方阵,  $b$  为  $n$  维列向量. 求解

该方程组等价于求二次函数  $f(x) := \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$  的最小值. 迭代法求解该问题的一般格式为:

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i \mathbf{d}_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

其中  $x_0$  为给定初值,  $x_i$  是  $x$  的第  $i$  步迭代值,  $\mathbf{d}_i$  是第  $i$  步前进方向,  $\alpha_i$  为步长. 选取  $\alpha_i$  使得  $f(x_i + \alpha_i \mathbf{d}_i)$  达到最下, 易得

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{d}_i^T \mathbf{r}_i}{\mathbf{d}_i^T A \mathbf{d}_i}$$

其中  $\mathbf{r}_i = b - Ax_i$  为残差. 显然残差满足递推关系

$$\mathbf{r}_{i+1} = b - A(x_i + \alpha_i \mathbf{d}_i) = \mathbf{r}_i - \alpha_i A \mathbf{d}_i$$

在共轭梯度法中, 我们要求迭代方向彼此  $A$ - 正交, 即  $\mathbf{d}_i^T A \mathbf{d}_j = 0, i \neq j$ , 并且  $\mathbf{r}_i$  与  $\mathbf{r}_j (i \neq j)$  彼此正交, 因此, 可以构造共轭方向  $\mathbf{d}_i$  如下:

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{r}_{i+1} + \beta_{i+1} \mathbf{d}_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

由  $\mathbf{d}_i$  与  $\mathbf{d}_{i+1}$   $A$ - 正交得

$$\mathbf{d}_i^T A \mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i^T A (\mathbf{r}_{i+1} + \beta_{i+1} \mathbf{d}_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

故  $\beta_{i+1} = -\frac{\mathbf{d}_i^T A \mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{d}_i^T A \mathbf{d}_i}$ . 由于

$$\mathbf{d}_i^T A \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_{i+1}^T A \mathbf{d}_i = \frac{1}{\alpha_i} \mathbf{r}_{i+1}^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i+1}) = -\frac{1}{\alpha_i} \mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{r}_{i+1}$$

以及  $\mathbf{d}_i^T \mathbf{r}_i = (\mathbf{r}_i + \beta_i \mathbf{d}_{i-1})^T \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i$ , 其中用到了  $\mathbf{d}_{i-1}^T \mathbf{r}_i = 0$ . 将以上两式代入  $\beta_{i+1}$  的表达式即可得

$$\beta_{i+1} = \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i}$$

于是求解线性方程组  $Ax = b$  的共轭梯度法如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_0 &= \mathbf{r}_0 = b - Ax_0, \quad \alpha_i = \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i}{\mathbf{d}_i^T A \mathbf{d}_i} \\ x_{i+1} &= x_i + \alpha_i \mathbf{d}_i, \quad \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \alpha_i A \mathbf{d}_i \\ \beta_{i+1} &= \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i}, \quad \mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{r}_{i+1} + \beta_{i+1} \mathbf{d}_i \end{aligned}$$

$i = 0, 1, 2, \dots, n$

下面证明, 共轭梯度法最多在  $n$  步得到解的精确值.

实际上, 由  $Ax_{i+1} = Ax_i + \alpha_i A \mathbf{d}_i$ ; 有,

$$Ax_n = Ax_0 + \alpha_1 A \mathbf{d}_1 + \dots + \alpha_{n-1} A \mathbf{d}_{n-1}$$

这样

$$\mathbf{d}_i^T (Ax_n - b) = \mathbf{d}_i^T (Ax_0 - b) + \alpha_i \mathbf{d}_i^T A \mathbf{d}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

下面我们说明上式右边为零. 实际上,

$$\begin{aligned} \alpha_i \mathbf{d}_i^T A \mathbf{d}_i &= \mathbf{d}_i^T (b - Ax^i) = \mathbf{d}_i^T (b - Ax_0) + \sum_{k=1}^i \mathbf{d}_i^T (Ax_{k-1} - Ax_k) \\ &= \mathbf{d}_i^T (b - Ax_0) - \sum_{k=1}^i \alpha_{k-1} \mathbf{d}_i^T A \mathbf{d}_{k-1} = \mathbf{d}_i^T (b - Ax_0) \end{aligned}$$

也就是说,  $Ax_n - b$  与所有  $\mathbf{d}_i$  正交,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . 从而  $Ax_n = b$

**九、【参考证明】:** 因函数  $f(z)$  在单位圆  $|z| < 1$  内解析, 在  $|z| = 1$  上  $|f(z)| = 1$ , 则  $f(z)$  在单位圆  $|z| < 1$  内的零点只有有限多个, 设为  $z_1, z_2, \dots, z_n$  ( $k$  重零点算  $k$  个单零点).

做变换  $f_k(z) = e^{i\alpha_k} \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}$  ( $1 \leq k \leq n$ ),  $\alpha_k$  为实数, 则  $f_k(z)$  把  $|z| < 1$  保形映射为  $|f_k(z)| < 1$ , 且

当  $|z| = 1$  时,  $|f(z)| = 1$ ,  $f_k(z_k) = 0$  ( $1 \leq k \leq n$ ). 作函数

$$F(z) = \prod_{k=1}^n f_k^{-1}(z) f(z) = f(z) e^{-i\alpha} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \bar{z}_k z}{z - z_k}$$

其中  $\alpha = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ . 则函数  $F(z)$  在单位圆  $|z| < 1$  内解析, 没有零点, 在  $|z| = 1$  上  $|F(z)| = 1$

由解析函数的最大最小模原理, 在在  $|z| \leq 1$  上  $F(z) = C$  (常数), 且  $|C| = 1$ . 于是

$$f(z) = Ce^{i\alpha} \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} = C' \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}$$

为有理函数.

**+、【参考解析】:** (1) 记  $(X_{n1}, X_{nn})$  的联合分布函数为  $F_{X_{n1}X_{nn}}(x, y)$ , 若  $x < y$ , 则

$$\begin{aligned} F_{X_{n1}X_{nn}}(x, y) &= P(X_{n1} \leq x, X_{nn} \leq y) = P(X_{nn} \leq y) - P(X_{n1} > x, X_{nn} \leq y) \\ &= P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_n \leq y) - P(x < X_1 \leq y, x < X_2 \leq y, \dots, x < X_n \leq y) \\ &= [F(y)]^n - [F(y) - F(x)]^n \end{aligned}$$

若  $x \geq y$ , 则

$$F_{X_{n1}X_{nn}}(x, y) = P(X_{n1} \leq x, X_{nn} \leq y) = P(X_{nn} \leq y) = [F(y)]^n$$

故  $(X_{n1}, X_{nn})$  的联合密度函数为

$$f_{1n}(x, y) = \begin{cases} n(n-1)[F(y) - F(x)]^{n-2} f(x)f(y), & x < y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 由于  $X_i$  服从区间  $[0, 1]$  上的均匀分布, 所以

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

于是由 (1) 得的联合密度函数为

$$f_{1n}(x, y) = \begin{cases} n(n-1)(y-x)^{n-2}, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

**【思路一】** 记  $v = x_{nn} - x_{n1}$ , 则

$$\begin{cases} u = x_{nn} + x_{n1} \\ v = x_{nn} - x_{n1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n1} = \frac{u-v}{2} \\ x_{nn} = \frac{u+v}{2} \end{cases}$$

该变换雅可比行列式  $J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x_{n1}, x_{nn})} = \frac{1}{2}$ , 则由  $(X_{n1}, X_{nn})$  的联合密度得  $(U, V)$  的联合密度为

$$f_{UV}(u, v) = f_{1n} \left( \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2} \right) |J|$$

$$= \begin{cases} \frac{n(n-1)}{2} v^{n-2}, & 0 < v < 1, 0 < u-v < 2, 0 < u+v < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则  $U = X_{nn} + X_{n1}$  的密度函数  $f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u, v) dv =$

$$\begin{cases} \frac{n(n-1)}{2} \int_0^u v^{n-2} dv = \frac{n}{2} u^{n-1}, & 0 < u < 1 \\ \frac{n(n-1)}{2} \int_0^{2-u} v^{n-2} dv = \frac{n}{2} (2-u)^{n-1}, & 1 < u < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

**【思路二】** 求  $U$  的分布函数  $F_U(u)$ . 显然  $U$  的取值范围是  $[0, 2]$ . 所以, 当  $u \leq 0$  时,

$$F_U(u) = P(U \leq u) = 0;$$

当  $u \geq 2$  时,  $F_U(u) = 1$ ; 当  $0 < u < 1$  时,

$$F_U(u) = P(U \leq u) = \iint_{x+y \leq u} f_{1n}(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^{u/2} dx \int_x^{u-x} n(n-1)(y-x)^{n-2} dy = \frac{1}{2} u^n$$

当  $1 < u < 2$  时,

$$F_U(u) = P(U \leq u) = \iint_{x+y \leq u} f_{1n}(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^{u-1} dx \int_x^1 n(n-1)(y-x)^{n-2} dy + \int_{u-1}^{u/2} dx \int_x^{u-x} n(n-1)(y-x)^{n-2} dy$$

$$= 1 - \frac{1}{2} (2-u)^n$$

故  $U = X_{nn} + X_{n1}$  的密度函数  $f_U(u) =$

$$\begin{cases} n u^{n-1} / 2, & 0 < u < 1 \\ n (2-u)^{n-1} / 2, & 1 < u < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$