姓名: 准考证号: 所在院校: 考场号: 座位号: 专业:

密封线 答题时不要超过此线

第十五届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案
(数学类低年级组, 2024 年 4 月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	20	10	14	20	10	16	10	100
得分								

注意: 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.

一、(本题 20 分, 每小题 5 分) 填空题

1. 将 24 阶实对称矩阵按合同关系进行分类, 即两个 24 阶实对称矩阵属于同一类当且仅当它们相互合同, 则共有 325 类.

2. 设 $f(x)=e^{-x^2}$, 则极限
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\underline{\quad 0 \quad}.$$

3. 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数, $\int_0^1 x^k f(x)\,dx=a_k\ (k=0,1,2)$, 则
$$\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y f(z)\,dz=\underline{\quad\frac{a_0-2a_1+a_2}{2}\quad}.$$

4. 微分方程 $xy'+y=\cos x$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的全局解为
$$y(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

二、(本题 10 分) 在空间直角坐标系中, 设椭球 S 的方程为

$$x^2+2y^2+3z^2=4.$$

过动点 $P=(x,y,z)$ 存在三条互相垂直的射线与椭球 S 相切, 求动点 P 满足的方程.

解答. 设 $P=(x,y,z)$, 过 P 有三条互相垂直的射线与椭球 S 相切. 又设这三条射线的单位方向向量为

$$e_1=(A_{11},A_{12},A_{13}),\ \ e_2=(A_{21},A_{22},A_{23}),\ \ e_3=(A_{31},A_{32},A_{33}).$$

则

$$A=\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}$$

是一个 3 阶正交矩阵. .... (3 分)

因为每条射线与椭球相切，射线所在直线

$$P+te_j=(x+A_{j1}t,y+A_{j2}t,z+A_{j3}t),\ \ t\in\mathbb{R},\ \ j=1,2,3$$

与椭球 S 仅交于一点，即 t 的二次方程

$$(x+A_{j1}t)^2+2(y+A_{j2}t)^2+3(z+A_{j3}t)^2=4$$

有重根, 也就是方程

$$(A_{j1}^2+2A_{j2}^2+3A_{j3}^2)t^2+2(xA_{j1}+2yA_{j2}+3zA_{j3})t+(x^2+2y^2+3z^2-4)=0$$

的判别式

$$\Delta=4[(xA_{j1}+2yA_{j2}+3zA_{j3})^2-(A_{j1}^2+2A_{j2}^2+3A_{j3}^2)(x^2+2y^2+3z^2-4)]=0.$$

.... (6 分)

由此得到三个方程

$$A_{j1}^2x^2+4A_{j2}^2y^2+9A_{j3}^2z^2+4A_{j1}A_{j2}xy+6A_{j1}A_{j3}xz+12A_{j2}A_{j3}yz$$

$$-(A_{j1}^2+2A_{j2}^2+3A_{j3}^2)(x^2+2y^2+3z^2-4)=0,\ \ j=1,2,3.$$

因为矩阵 A 为正交矩阵，三个列向量为单位向量，并相互垂直. 将三个方程相加得到

$$x^2+4y^2+9z^2-6(x^2+2y^2+3z^2-4)=0.$$

于是 $P=(x,y,z)$ 点满足方程

$$5x^2+8y^2+9z^2=24.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (10 分)

三、(本题 14 分) 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, E 为单位矩阵. 求证 $A^4 = E$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(E-A) + \operatorname{rank}(E+A+A^2+A^3) = n$.

证明. 考虑多项式 $p = 1-x, q = 1+x+x^2+x^3$. 则有: $(p,q)=1$. 故存在 $f(x), g(x)$ 使得

$$f(x)(1-x) + g(x)(1+x+x^2+x^3) = 1.$$

结果

$$f(A)(E-A) + g(A)(E+A+A^2+A^3) = E.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (5 分)

由初等变换可得:

$$\begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1+x+x^2+x^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-x & g(x)(1+x+x^2+x^3) \\ 0 & 1+x+x^2+x^3 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1-x & f(x)(1-x)+g(x)(1+x+x^2+x^3) \\ 0 & 1+x+x^2+x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1+x+x^2+x^3 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^4-1 & 1+x+x^2+x^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^4-1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^4-1 \end{pmatrix}.$$

故 $\begin{pmatrix} E-A & O \\ O & E+A+A^2+A^3 \end{pmatrix}$ 可经分块初等变换化为 $\begin{pmatrix} E & O \\ O & A^4-E \end{pmatrix}$.

从而

$$\operatorname{rank}(E-A) + \operatorname{rank}(E+A+A^2+A^3) = n + \operatorname{rank}(A^4-E).$$

故得:

$$A^4 = E \Leftrightarrow \operatorname{rank}(E-A) + \operatorname{rank}(E+A+A^2+A^3) = n.$$

证毕.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (14 分)

四、(本题 20 分) 设 f,g 是 $[0,1]$ 上有正下界的 Riemann 可积函数.
$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx, \delta = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx > 0.$

(i) 证明: $\int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^1 \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx.$

(ii) 若进一步假设 f,g 分段常值, $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$, $\delta = \frac{3}{2}$. 试给出在此种条件下 $\int_0^1 \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx$ 的下确界.

证明. (i) 由 $\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx > 0$, 可得存在区间 $[a,b] \subset [0,1]$ 使得 f,g 在 $[a,b]$ 上处处不相等. 因此

$$\frac{f^2(x)+g^2(x)}{g(x)} \geqslant \frac{2f(x)g(x)}{g(x)} = 2f(x), \qquad \forall x \in [0,1],$$

且当 $x \in [a,b]$ 时, 上式中严格不等号成立. 从而

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx &= \int_0^1 \frac{f^2(x)+g^2(x)}{g(x)}\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \\ &> \int_0^1 2f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.\end{aligned}$$

.... (10 分)

(ii) 记 $E = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant g(x)\}$, $F = [0,1] \setminus E$. 则 E,F 都是有限个区间和有限个单点集的并. 因此, f,g 都是 E,F 上的 Riemann 可积函数. 记

$$A = \int_E f(x)\,dx \equiv \int_0^1 f(x)\chi_E(x)\,dx, \quad B = \int_E g(x)\,dx.$$

则

$$\int_F f(x)\,dx = 1-A, \quad \int_F g(x)\,dx = 1-B, \quad \delta = 2(A-B).$$

因此,

$$0 < B = A - \frac{\delta}{2} < A < 1.$$

类似于 (i), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx = \int_E \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx + \int_F \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx \\
=&\frac{A^2}{B}\int_E \frac{\left(A^{-1}f(x)\right)^2}{\left(B^{-1}g(x)\right)}\,dx + \frac{(1-A)^2}{1-B}\int_F \frac{\left((1-A)f(x)\right)^2}{\left((1-B)g(x)\right)}\,dx \\
\geqslant&\frac{A^2}{B} + \frac{(1-A)^2}{1-B} = \frac{(B+\frac{\delta}{2})^2}{B} + \frac{(1-B-\frac{\delta}{2})^2}{1-B} \\
=&B+\delta+\frac{\delta^2}{4B}+1-B-\delta+\frac{\delta^2}{4(1-B)} = 1+\frac{\delta^2}{4B}+\frac{\delta^2}{4(1-B)}.
\end{aligned}
$$

令

$$h(t) = 1+\frac{\delta^2}{4t}+\frac{\delta^2}{4(1-t)}, \qquad t\in(0,1-\frac{\delta}{2})=(0,\frac{1}{4}).$$

则 h 在 $(0,\frac{1}{4}]$ 上单减, 进而

$$h(B) > h(\frac{1}{4}) = 4, \qquad B\in\left(0,\frac{1}{4}\right).$$

另一方面, 对于 $t\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$, 取

$$f(x)=\begin{cases} 2t+\frac{3}{2}, & x\in[0,\frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2}-2t, & x\in[\frac{1}{2},1], \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 2t, & x\in[0,\frac{1}{2}), \\ 2-2t, & x\in[\frac{1}{2},1], \end{cases}$$

则 f,g 满足题设条件, 而

$$\int_0^1 \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx = h(t).$$

因此, 所求下确界为 $h(\frac{1}{4})=4$. .... (20 分)

注: 将 (ii) 中 f,g 为分段常值函数改为 Riemann 可积函数, 结论仍然成立. 当 f,g 只是 Riemann 可积时, f,g 限制在相应的 E,F 上不一定 Riemann 可积. 但结论可以通过逼近得到, 或者直接将对应的 E,F 上的积分看作 Lebesgue 积分.

五、(本题 10 分) 设 A 为 $n(n \geqslant 3)$ 阶实可逆矩阵, 且 A^k 相似于 A 对 $k = 1, 2, \cdots, n! - 1, n!$ 成立, 证明: 对一切正整数 k 皆有 A^k 相似于 A.

证明. (i) 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 为 A 的所有互异的特征值, 它们的代数重数分别为 $n_1, \cdots, n_s$, $n_1 + \cdots + n_s = n$.于是 $s + 1 \leqslant n!$, A^k 的 n 个特征值为: λ_1^k (n_1 重), λ_2^k (n_2 重), $\cdots$, λ_s^k (n_s 重).

.... (3 分)

对 $k = 1, 2, \cdots, n!$, 由 $A^k \sim A$ 知 A^k 的特征值即为 A 的特征值. 因此, 对任一固定的 $i (1 \leqslant i \leqslant s)$, $\lambda_i, \lambda_i^2, \cdots, \lambda_i^{s+1}$ 是 A 的 $s+1$ 个特征值, 从而必有两个相等:

$$\lambda_i^p = \lambda_i^q, 1 \leqslant p < q \leqslant s + 1.$$

.... (5 分)

注意到 A 可逆,故 $\lambda_i \neq 0$, 从而 $\exists m_i$ 使得 $\lambda_i^{m_i} = 1$, $1 \leqslant m_i \leqslant s$. 取 $m = [m_1, \cdots, m_s]$, 即 m 为 $m_1, \cdots, m_s$ 的最小公倍数, 则必有: $m | n!$, 因为每个 m_i 均整除于 $n!$, 当然更有 $m \in \{1, \cdots, n!\}$. 结果

$$\lambda_1^m = 1, \cdots, \lambda_s^m = 1.$$

进而, A^m 的 n 个特征值皆为 1, 从而 A 的 n 个特征值也皆为 1.

.... (6 分)

(ii) 设 A 的 Jordan 标准形为: $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_t \end{pmatrix}$, 其中 $J_i = J_{l_i}(1)$ 是对角元全为 1 的 l_i 阶 Jordan 块, $l_1 + \cdots + l_t = n$.

对任意正整数 k, 由 $A \sim J \Rightarrow A^k \sim J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_t^k \end{pmatrix}$.

下面我们证: $J_i^k \sim J_i$. 为此, 不妨设 $J_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{l_i \times l_i}$. 设 $H =$

$J_i - E$, 于是

$$\begin{aligned} J_i^k = (E+H)^k &= E + C_k^1 H + \cdots + H^k \\ &= \begin{pmatrix} 1 & k & \cdots & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & k \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其初等因子为 $(\lambda-1)^{l_i}$. 所以 J_i^k 与 J_i 有相同的初等因子, 结果有相同的 Jordan 标准形,$J_i^k \sim J_i$. 至此我们有: $A^k \sim J^k \sim J \sim A$. 证毕.

.... (10 分)

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考场号:______ 座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

六、(本题 16 分) 设 $0 < a_1 < a_2$,

$$a_{n+1} = \ln\left(e^{a_n} + \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}}\right),\ n = 2, 3, \cdots.$$

求证: $\{a_n\}$ 单调递增且有界.

证明. 已知 $a_1 < a_2$. 假设 $a_{n-1} < a_n$, 则

$$a_{n+1} = \ln\left(e^{a_n} + \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}}\right) > \ln\left(e^{a_n}\right) = a_n.$$

由数学归纳法, 知 $\{a_n\}$ 单调递增.

.... (6 分)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \ln\left(e^{a_n} + \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}}\right) - a_n = \ln\left(1 + \frac{a_n - a_{n-1}}{e^{a_n} a_{n-1}}\right) \\ &< \frac{a_n - a_{n-1}}{e^{a_n} a_{n-1}} < \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}. \end{aligned}$$

因此

$$a_{n+1} + \frac{1}{a_n} < a_n + \frac{1}{a_{n-1}}.$$

由此知 a_n 有界. .... (16 分)

七、(本题 10 分) 设 f, g 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数且当 $x \neq 0$ 时, $xf(x) > 0$. 证明方程 $x'' + f(x') + g(x) = 0$ 没有非常数的周期解 $x(\cdot)$.

证明. 法 I. 设 $x(\cdot)$ 为一个周期函数, $T > 0$ 为它的周期. 则 $x'(\cdot)$ 也是一个周期为 T 的周期函数. 下面我们将证明 $x(\cdot)$ 恒为常数.

令 $V(t) = \int_0^{x(t)} g(s)ds + \frac{(x'(t))^2}{2}, 0 \leqslant t \leqslant T$. 则

$$\begin{aligned} V'(t) &= g((x(t))x'(t) + x'(t)x''(t) = g((x(t))x'(t) + x'(t)(-f(x'(t)) - g(x(t))) \\ &= -x'(t)f(x'(t)) \leqslant 0 \end{aligned}$$

于是, 函数 $V(\cdot)$ 在 $[0, T]$ 单调递减. 又 $V(0) = V(T)$, 从而 $V(\cdot)$ 在 $[0, T]$ 上恒为常数. 故有 $V'(t) = -x'(t)f(x'(t)) = 0\,(t \in [0, T])$, 从而 $x'(t) = 0\,(t \in [0, T])$, 此即说明 $x(\cdot)$ 恒为常数. ....(10 分)

法 II. 设 $x(\cdot)$ 为一个周期函数, $T > 0$ 为它的周期. 则 $x'(\cdot)$ 也是一个周期为 T 的周期函数. 设 $y(\cdot) = x'(\cdot)$, 则 $y'(t) = -f(y(t)) - g(x(t))$. 于是

$$\int_0^T (-y(t)f(y(t)) - y(t)g(x(t)))\,dt = \int_0^T y(t)y'(t)dt = \left.\frac{y^2(t)}{2}\right|_0^T = 0.$$

又因为

$$\int_0^T y(t)g(x(t))dt = \int_0^T g(x(t))dx(t) = \int_{x(0)}^{x(T)} g(s)ds = 0,$$

所以

$$\int_0^T y(t)f(y(t))dt = -\int_0^T y(t)g(x(t))dt = 0.$$

于是 $y(t) = 0\,(t \in [0, T])$. 即 $x(\cdot)$ 在 $[0, T]$ 上恒为常数.

....(10 分)

□