

# 2014 年第五届全国大学生数学竞赛决赛

## (数学类一、二年级) 试卷

**一、(本题 15 分)** 设  $S$  为  $\mathbf{R}^3$  中的抛物面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ,  $P = (a, b, c)$  为  $S$  外一固定点, 满足  $a^2 + b^2 > 2c$ . 过  $P$  作  $S$  的所有切线. 证明: 这些切线的切点落在同一张平面上.

**二、(本题 15 分)** 设实二次型  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T A x$ , 其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & a_0 & 2 & -2 \\ a & 0 & b & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & k & 4 \end{pmatrix},$$

$a_0, a, b, c, d, e, f, g, h, k$  皆为实数. 已知  $\lambda_1 = 2$  是  $A$  的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题:

(1)  $A$  能否相似于对角矩阵; 若能, 请给出证明; 若不能, 请给出例子;

(2) 当  $a_0 = 2$  时, 试求  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  在正交变换下的标准型.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

**三、(本题 15 分)** 设  $n$  阶实方阵  $A =$

$b_1, \dots, b_{n-1}$  均不为 0. 记  $W = \{X \in R^{n \times n} \mid XA = AX\}$ . 证明:  $W$  是实数域  $R$  上的向量空间, 且  $I, A, \dots, A^{n-1}$  为其一组基, 其中  $I$  为  $n$  阶单位阵.

**四、(本题 15 分)** 设  $f(x, y)$  为  $[a, b] \times R$  上关于  $y$  单调下降的二元函数. 设  $y = y(x), z = z(x)$  是可微函数, 且满足:

$$y' = f(x, y), z' \leq f(x, z), x \in [a, b]$$

已知  $z(a) \leq y(a)$ . 求证:  $z(x) \leq y(x), x \in [a, b]$ .

**五、(本题 20 分)** 设  $f(x)$  是  $[0, +\infty)$  上非负可导函数,

$$f(0) = 0, f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

假设  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛. 求证: 对于任意  $\alpha > 1$ ,  $\int_0^{+\infty} f^\alpha(x) dx$  也收敛, 并且

$$\int_0^{+\infty} f^\alpha(x) dx \leq \left( \int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^\beta, \beta = \frac{\alpha+1}{2}.$$

**六、(本题 20 分)** 对多项式  $f(x)$ , 记  $d(f)$  表示其最大和最小实根之间的距离. 设  $n \geq 2$  为自然数. 求最大实数  $C$ , 使得对任意所有根都是实数的  $n$  次多项式  $f(x)$ , 都有

$$d(f') \geq C d(f).$$