2017 年第八届全国大学生数学竞赛决赛
（数学一、二年级）试卷

一、填空题：

(1)设$x^4+3x^2+2x+1=0$的 4 个根为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$,则

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

(2)设a为实数, 关于x的方程$3x^4-8x^3-30x^2+72x+a=0$有虚根的充分必要条件是a满足______________.

(3) 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S}\dfrac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$（$a>0$ 为常数），其中 $S:z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，取上侧，则$I=$____________.

(4)记两个特征值为 1，2 的 2 阶实对称矩阵的全体为Γ．$\forall A\in\Gamma, a_{12}$表示$A$的$(2,1)$位置元素，则集合$\cup_{A\in\Gamma}\{a_{21}\}$的最小元等于______.

第二题：在空间直角坐标系中设旋转抛物面Γ的方程为$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设P为空间中的平面，它交抛物面Γ于交线C．问：C是何种类型的曲线？证明你的结论.

第三题：证明题：设n阶方阵A,B满足：秩(ABA)=秩(B)．证明：AB与BA相似.

第四题：对 R 上无穷次可微的（复值）函数$\varphi(x)$，称$\varphi\in\mathscr{S}$，如果$\forall m,k\geq 0$成立$\sup\limits_{x\in R}\left|x^m\varphi^{(k)}(x)\right|<+\infty$．若$f\in\mathscr{S}$，可定义$\hat{f}(x)=\int_R f(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y\,(\forall x\in R)$.

证明：$\hat{f}\in\mathscr{S}$，且$f(x)=\int_R \hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y\,(\forall x\in R)$.

第五题： 设$n>1$为正整数，令$S_n=\left(\dfrac{1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$.

1．证明：数列S_n单调增加且有界，从而极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在；

2．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

第六题：求证：常微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^3+\sin x, x\in[0,2\pi]$有唯一的满足$y(0)=y(2\pi)$的解.