全国大学生数学竞赛决赛模拟试题

（数学专业类高年级组）

一、填空题（本题20分，每小题5分）

（1）三重积分 $\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ z\ge 0}} \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2+1)^{\frac{3}{2}}}dxdydz=$________.

（2）设 $G=\left\{\alpha\in R \,\middle|\, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{\cos n+n^{\alpha}}\text{收敛}\right\}$. 则 $G=$________.

（3）设矩阵 $A=(a_{ij})_{4\times 4}$，其中 $a_{ij}\in\{1,2,\cdots,16\}$ 且两两不同. 则 $rankA$ 的最小值为________.

（4）设 $I=\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{1-e^{-x}}{x}\right)^2dx$，则 $I=$________.

二、（本题10分）求直线 $L:\begin{cases}x+y+2z=1\\2x+y+3z=4\end{cases}$ 上的一点 $P(x,y,z)$，使得点 P 到原点 $O(0,0,0)$ 的距离最近.

三、（本题14分）设V为有理数域上的4维向量空间，φ为V到V的一个线性变换，$\alpha_1,\cdots,\alpha_5$为V中的一组向量满足$\alpha_1\neq 0,\alpha_4\neq\alpha_1+\alpha_2,\varphi(\alpha_1)=\alpha_2,\varphi(\alpha_2)=\alpha_3$，$\varphi(\alpha_3)=\alpha_1+\alpha_2,\varphi(\alpha_4)=\alpha_5,\varphi(\alpha_5)=\alpha_3+\alpha_4$. 求$\varphi$的行列式.

四、（本题20分）任取$\alpha>0$，证明或举例否定：存在严格凸函数$f\in C^{\infty}(R)$使得$|x|\leq|f(x)|\leq|x|+\alpha$，$\forall x\in R$.

五、（本题12分）设$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$是$[0,1]$上的勒贝格可积函数列. 证明：存在严格单调递减收敛到0的数列$\{a_n\}$，使得对任意的$k\in N^{+}$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n|f_k(a_n)|=0$.

六、（本题12分）设函数 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上解析，$M(r)$ 和 $A(r)$ 分别表示 $|f(z)|$ 与 $\operatorname{Re} f(z)$ 在 $|z|=r(0<r<1)$ 上的最大值. 证明：当 $0<r<1$ 时，

$$M(r)\le \frac{2rA(1)}{1-r}+\frac{1+r}{1-r}|f(0)|.$$

七、（本题12分）设 n 为正整数，S_n 为 n 级对称群，A_n 为 n 级交错群. 设 H 为 S_n 的真子群，证明：当 $n\ge 5$ 时，若 H 在 S_n 中的指数 $[S_n:H]<n$，则 $H=A_n$；若 $[S_n:H]=n$，则 $H\cong S_{n-1}$.

八、（本题12分）设 $M=\{p(x;\mu,\sigma)\}$ 为由所有的正态分布构成的二维流形，其中 $p(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ 为分布的概率密度函数，$\mu\in(-\infty,+\infty)$ 和 $\sigma\in(0,+\infty)$ 分别为分布的均值与标准差，满足 $\int_R p(x;\mu,\sigma)dx=1$. 定义 *Riemann* 度量 $g_{ij}(\theta)=-\int_R\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^i\partial\theta^j}\log p(x;\theta)\right)p(x;\theta)dx$，其中 $\theta=(\theta^1,\theta^2)=(\mu,\sigma)$. 求证：$M$ 的截面曲率为 $-\frac{1}{2}$.

九、（本题12分） 设$(U_n)_{n\in N}$为$[0,1]$区间上独立同均匀分布的随机变量列. 给定$f:[0,1]\to R$，记$I_n(f):=\dfrac{f(U_1)+f(U_2)+\cdots+f(U_n)}{n}$.

（1）若$f\in L^1$，则$I_n(f)$依概率收敛到$I(f):=\int_0^1 f(x)dx$.

（2）若$f\in L^2$，则$I_n(f)$几乎处处收敛到$I(f)$.

十、（本题12分） 考虑求解线性方程组$Ax=b$的如下迭代格式：

$$(D-C)x^{(k+1)}=C^T x^{(k)}+b,$$

其中D是实对称正定方阵，C是满足$C+C^T=D-A$的实方阵. 若A是实对称正定方阵，且$D-C$可逆，证明：上述迭代格式对任意初始向量$x^{(0)}$都收敛.

注：模拟试题答案解析请参考全国大学生数学竞赛命题组编、科学出版社出版的《全国大学生数学竞赛真题解析与获奖名单（第11−15届）》。