全国大学生数学竞赛非数学类模拟五

清疏竞赛考研数学

2023 年 9 月 24 日

摘要

$$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\},\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}.$$

模拟试题应当规定时间独立完成并给予反馈.

1 填空题

填空题 1.1 设正数列 $x_n, n=1,2,\cdots$ 满足 $x_n+\frac{4}{x_{n+1}^2}<3, \forall n\in\mathbb{N}$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=$ __________

填空题 1.2 函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\int_0^t e^{u^2-2u}du \\ y=\int_0^t e^{u^2-2u+2\ln u}du \end{cases}$ 所确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=1}=$ __________

填空题 1.3 做换元 $\begin{cases} u=\frac{1}{x} \\ v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x} \\ w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x} \end{cases}$ $,w=w(u,v)$ 之后, 方程 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$ 变为 __________

填空题 1.4 若某个 $x^2+y^2=2z$ 的切平面过 $\begin{cases} 3x^2+y^2+z^2=5 \\ 2x^5+y^2-4z=7 \end{cases}$ 在 $(1,-1,-1)$ 的切线, 则这个切平面方程为 __________

填空题 1.5 设连续可微函数 f 满足 $f(-x)+\int\limits_0^x tf(x-t)dt=x, \forall x\in\mathbb{R}$, 则 $f(x)=$ __________

2　选择题答案区

3 解答题

解答题 3.1 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$f(x)+f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\arctan x,\forall x\neq 0.$$

(1): 求 f 的表达式.

(2): 计算 $\int_0^1 f\left(x\right)dx$.

解答题 3.2 计算

$$\oint_{x^2+y^2=4}\left[\frac{4x-y}{4x^2+y^2}-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\right]dx+\left[\frac{x+y}{4x^2+y^2}+\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right]dy.$$

解答题 3.3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续以及 (a,b) 上可微, 对任何 $n\in\mathbb{N}$, 证明必然存在 n 个互不相同的点 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n\in(a,b)$, 使得

$$f'(\zeta_1)\,f'(\zeta_2)\cdots f'(\zeta_n)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^n.$$

解答题 3.4 设 $z=(x^2+y^2)\,f\,(x^2+y^2)$, f 二阶连续可微且 $f\,(1)=0, f'\,(1)=1$. 若在 $0<x^2+y^2\leqslant 1$ 上满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 计算

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\iint_{\epsilon\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1} z dx dy.$$

解答题 3.5 设 $f \in C^1[0,1]$, 记 $A = f(1), B = \int_0^1 x^{-\frac{1}{m}} f(x)\,dx, C = f(0), m \in \mathbb{N}$, 计算

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int\limits_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^m}{n^m} - \frac{(k-1)^m}{n^m}\right) f\left(\frac{(k-1)^m}{n^m}\right)\right).$$

你应该用 A, B, C 表示.

解答题 3.6 定义 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 满足

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{如果} x\le e \\ xf(\ln x) & \text{如果} x>e \end{cases}.$$

(1): 证明, 对一切 $m\in\mathbb{N}, A>0$, 积分

$$\int_A^\infty \frac{1}{x\cdot\underbrace{\ln x\cdot\ln\ln x\cdot\dots\cdot\ln\ln\cdots\ln x}_{m\text{次}}}dx$$

发散.

(2): 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$ 是发散级数.