

第十四届全国大学生数学竞赛初赛第二次补赛试卷参考答案 (数学 A 类, 2022 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中设单叶双曲面 S 的方程为 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. 求 S 上所有可能的点 $P = (a, b, c)$, 使得过 P 点且落在 S 上的两条直线均平行于平面 $x + y - z = 0$.

解答. 设过 $P = (a, b, c)$ 点且落在 S 上的两条直线的方向向量 v_1 和 v_2 为

$$(1) \quad v_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad v_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \quad v_1 \times v_2 \neq 0.$$

则过 $P = (a, b, c)$ 点的这两条直线的参数方程为

$$(x, y, z) = (a, b, c) + (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)t, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$(x, y, z) = (a, b, c) + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

因为它们整体落在单叶双曲面 S 上, 代入 S 的方程, 得到

$$(a + \alpha_1 t)^2 + (b + \beta_1 t)^2 - (c + \gamma_1 t)^2 = 1, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$(a + \alpha_2 t)^2 + (b + \beta_2 t)^2 - (c + \gamma_2 t)^2 = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

..... (5 分)

于是有

$$2(a\alpha_1 + b\beta_1 - c\gamma_1)t + (\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2)t^2 = 0, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$2(a\alpha_2 + b\beta_2 - c\gamma_2)t + (\alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2)t^2 = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

因此

$$(2) \quad a\alpha_1 + b\beta_1 - c\gamma_1 = 0, \quad a\alpha_2 + b\beta_2 - c\gamma_2 = 0.$$

..... (10 分)

由方程 (1) 和 (2) 得到

$$(a, b, -c) \perp v_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad (a, b, -c) \perp v_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2).$$

由于 v_1 和 v_2 平行于平面 $x + y - z = 0$, 该平面法向量为 $(1, 1, -1)$, 故

$$(1, 1, -1) \perp v_1, \quad (1, 1, -1) \perp v_2.$$

于是

$$(a, b, -c) = \lambda(1, 1, -1), \quad (a, b, c) = \lambda(1, 1, 1).$$

由于 $P = (a, b, c)$ 落在 S 上, $a^2 + b^2 - c^2 = 1$, 故 $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$. 这样求出

$$P = (a, b, c) = \pm(1, 1, 1).$$

..... (15 分)

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $\Gamma = \{\{x_n\} | x_n = 0, 2\}$, 即 Γ 为全体各项为 0 或 2 的数列构成的集合. 对于任何 $x = \{x_n\} \in \Gamma$, 令

$$\Pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, \quad f(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

证明: 1. Π 是单射; 2. 集合 $\Pi(\Gamma)$ 中的每一点均为 $\Pi(\Gamma)$ 的聚点; 3. $f(\Gamma) = [0, 2]$.

解答. 1. 设 $\{x_n\}, \{y_n\} \in \Gamma$ 且 $\{x_n\} \neq \{y_n\}$. 设正整数 k 是使得 $x_\ell \neq y_\ell$ 的最小整数 ℓ . 则 $|x_k - y_k| = 2$, 而 $x_n = y_n, \quad n < k$. 从而

$$|\Pi(\{x_n\}) - \Pi(\{y_n\})| \geq \frac{2}{3^k} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^n} \geq \frac{2}{3^k} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^k}.$$

故 Π 是单射.

..... (5 分)

2. 任取 $\{x_n\} \in \Gamma$, 记 $A = \Pi(\{x_n\})$. 用 Y_n 表示第 n 项为 2 而其余各项为 0 的数列, $X_n = \sum_{n=1}^k \frac{x_n}{3^n}$. 则 $X_n + Y_{2n} \in \Gamma$ 且两两不同. 易见

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A - (X_n + Y_n)| = 0.$$

于是, 集合 $\Pi(\Gamma)$ 中的每一点均为 $\Pi(\Gamma)$ 的聚点.

..... (10 分)

3. 首先易见 $f(\Gamma) \subseteq [0, 2]$. 我们来证明 $f(\Gamma) = [0, 2]$. 任取 $\alpha \in [0, 2]$, 归纳地定义 x_n 如下: 记 $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$. 首先取 $x_1 = 0$, 依次取

$$x_{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{若 } S_n \geq n\alpha, \\ 2, & \text{若 } S_n < n\alpha. \end{cases}$$

则 $\{x_n\} \in \Gamma$. 易见 $0 \times \alpha \leq S_1 \leq 0 \times \alpha + 2$. 进一步, 若对某个 n 成立 $(n-1)\alpha \leq S_n \leq (n-1)\alpha + 2$, 则当 $S_n \geq n\alpha$ 时, 有 $n\alpha \leq S_{n+1} = S_n \leq n\alpha + 2$. 而当 $S_n < n\alpha$ 时, $n\alpha < S_n \leq S_{n+1} = S_n + 2 \leq n\alpha + 2$. 由数学归纳法, 我们得到了对任何 $n \geq 1$ 成立 $(n-1)\alpha \leq S_n \leq (n-1)\alpha + 2$. 因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \alpha$.

..... (15 分)

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 $n \geq 2$, A_1, A_2, \dots, A_n 为数域 K 上的方阵, 它们的极小多项式两两互素. 证明: 给定数域 K 上的任意多项式 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \in K[x]$, 存在多项式 $f(x) \in K[x]$ 使得对所有 $i = 1, 2, \dots, n$ 有 $f(A_i) =$

$f_i(A_i)$.

解答. 对于 $i = 1, 2, \dots, n$, 记矩阵 A_i 的极小多项式为 $p_i(x)$. 下面对 n 做归纳.

当 $n = 2$ 时, 由于 $p_1(x)$ 与 $p_2(x)$ 互素, 存在多项式 $u(x), v(x) \in K[x]$ 使得

$$u(x)p_1(x) + v(x)p_2(x) = 1,$$

从而

$$u(x)(f_1(x) - f_2(x))p_1(x) + v(x)(f_1(x) - f_2(x))p_2(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

即

$$u(x)(f_2(x) - f_1(x))p_1(x) + f_1(x) = v(x)(f_1(x) - f_2(x))p_2(x) + f_2(x).$$

令

$$f(x) = u(x)(f_2(x) - f_1(x))p_1(x) + f_1(x) = v(x)(f_1(x) - f_2(x))p_2(x) + f_2(x),$$

由于 $p_1(A_1) = 0$ 且 $p_2(A_2) = 0$, 故有 $f(A_1) = f_1(A_1), f(A_2) = f_2(A_2)$.

..... (7 分)

设结论对 $n = k$ 成立, 即存在多项式 $g(x) \in K[x]$ 使得 $g(A_j) = f_j(A_j), 1 \leq j \leq k$. 当 $n = k + 1$ 时, 令

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}.$$

显然矩阵 B 的极小多项式整除 $p_1(x)p_2(x) \cdots p_k(x)$, 由于矩阵 $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$ 的极小多项式 $p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x), p_{k+1}(x)$ 两两互素, 所以矩阵 B 的极小多项式与矩阵 A_{k+1} 的极小多项式互素, 对矩阵 B 和 A_{k+1} 利用前面证明的 $n = 2$ 时的结论, 存在多项式 $f(x) \in K[x]$ 使得 $f(B) = g(B)$ 且 $f(A_{k+1}) = f_{k+1}(A_{k+1})$.

从而对于 $1 \leq j \leq k$ 有 $f(A_j) = g(A_j) = f_j(A_j)$ 且 $f(A_{k+1}) = f_{k+1}(A_{k+1})$, 故结论对 $n = k + 1$ 成立.

..... (14 分)

根据数学归纳法, 结论对任意正整数 $n \geq 2$ 成立.

..... (15 分)

得分	
评阅人	

四、(本题 20 分) 设 A, B 都是秩为 r 的 n 阶不可逆实矩阵, I 和 J 是集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的两个 $r+1$ 元子集. 用 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 表示所有 n 阶实矩阵构成的集合, 令

$$V = \{C = (c_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid c_{ij} = 0 \text{ 若 } i \notin I \text{ 或 } j \notin J\}.$$

证明: 存在 $0 \neq C \in V$ 使得 $ACB = 0$.

证明. 首先可直接看出 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 是 \mathbb{R} 上的线性空间, $\dim \mathbb{R}^{n \times n} = n^2$, V 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间, 其维数 $\dim V = (r+1)^2$.

..... (5 分)

其次, 由矩阵 A, B 的秩都是 r 知存在 n 阶可逆矩阵 P_1, Q_1 和 P_2, Q_2 使得

$$A = P_1 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1, \quad B = P_2 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2.$$

..... (7 分)

第三, 现令 $W = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid AXB = 0\}$, 则显然有 W 也为 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间.

断言:

$$W = \left\{ Q_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P_2^{-1} \mid B_2 \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}, B_3 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}, B_4 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)} \right\},$$

从而 $\dim W = n^2 - r^2$.

事实上, 一方面, 将 $Q_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P_2^{-1}$ 作为 X 代入 AXB 中, 直接计算得

$$AXB = P_1 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 Q_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P_2^{-1} P_2 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 = 0.$$

另一方面, 若 X 满足 $AXB = 0$, 记 $Y = Q_1 X P_2$, 并将 Y 分块为 $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$,

其中 B_1 为 $r \times r$ 矩阵. 则有

$$\begin{aligned} 0 &= AXB = P_1 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 X P_2 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 \\ &= P_1 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 = P_1 \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2. \end{aligned}$$



由 P_1, Q_2 可逆知 $B_1 = 0$. 所以,

$$X = Q_1^{-1} Y P_2^{-1} = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P_2^{-1},$$

至此,我们证明了断言真.

..... (15 分)

最后, 由

$$\dim V + \dim W = (r + 1)^2 + n^2 - r^2 > n^2 = \dim \mathbb{R}^{n \times n}$$

可以得到 $\dim V \cap W \neq 0$, 因此 $V \cap W \neq \{0\}$. 故 $\exists C \in V \cap W, C \neq 0$. 此 C 满足 $ACB = 0, C \in V$ 且 $C \neq 0$. 证毕.

..... (20 分)

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 f 与 g 在 $[a, b]$ 上可导, 且对任何 $x \in [a, b]$, $g'(x) \neq 0$. 又 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明. 法 I. 由微分 Darboux 定理, g' 在 (a, b) 内恒正或恒负. 不妨设 g' 恒正. 则 g 在 $[a, b]$ 上严格单增.

..... (3 分)
由 $\int_a^b f(x) dx = 0$ 及中值定理, 存在 $\xi_1 \in (a, b)$ 使得 $f(\xi_1) = 0$.

..... (6 分)
我们断言 f 在 (a, b) 内至少有两个零点. 否则, 结合介值定理, 以下情形之一成立:

情形 1: f 在 (a, ξ_1) 内恒正, 在 (ξ_1, b) 恒负;

情形 2: f 在 (a, ξ_1) 内恒负, 在 (ξ_1, b) 恒正;

不妨设情形 1 成立.

..... (9 分)
于是 $f(x)(g(x) - g(\xi_1))$ 在 $(a, \xi_1) \cup (\xi_1, b)$ 内恒负, 因此

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x)(g(x) - g(\xi_1)) dx < 0.$$

得到矛盾.

因此, f 在 (a, b) 内必至少有两个零点. 从而由微分中值定理得到存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

..... (15 分)

法 II. 令 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. 则 $F(a) = F(b) = 0$. (为规避 g' 的 Riemann 可积性, 形式计算 $\int g'(x)F(x) dx$) 考虑

$$G(x) = g(x)F(x) - \int_a^x f(t)g(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

则 G 可微, $G(a) = G(b) = 0$. 由微分中值定理有 $\xi_1 \in (a, b)$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$. 即 $g'(\xi_1)F(\xi_1) = 0$. 因此, $F(\xi_1) = 0$.

..... (9 分)

进而由微分中值定理得到有 $\xi_2 \in (a, \xi_1), \xi_3 \in (\xi_1, b)$ 使得 $F'(\xi_2) = F'(\xi_3) = 0$. 进而有 $\xi \in (\xi_2, \xi_3)$ 使得 $F''(\xi) = 0$. 即 $f'(\xi) = 0$.

..... (15 分)

关于法 II 的分析及注:

(1) 如果 g' 可积, 则

$$0 = \int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b F(x)g'(x) dx.$$

由此可得 F 在 (a, b) 内有零点 ξ_1 . 进而由微分中值定理得到有 $\xi_2 \in (a, \xi_1), \xi_3 \in (\xi_1, b)$ 使得 $F'(\xi_2) = F'(\xi_3) = 0$. 进而有 $\xi \in (\xi_2, \xi_3)$ 使得 $F''(\xi) = 0$. 即 $f'(\xi) = 0$.

(2) 但问题是 g' 可能不是 Riemann 可积的.

(3) 但由于 g' 恒正, 因此在 Lebesgue 积分意义下, g' 是可积的, 且上述推导过程在 Lebesgue 积分意义下成立.

(4) 若采用上述方法解答, 并指出是在 Lebesgue 积分意义下讨论, 则可给满分. 否则, 可适当扣分.

(5) 若采用积分第二中值定理, 则有 $\xi_1 \in [a, b]$ 使得

$$0 = \int_a^b f(x)(g(x)-g(a)) dx = (g(\xi_1)-g(a)) \int_a^{\xi_1} f(x) dx = (g(\xi_1)-g(a))F(\xi_1).$$

自然, 事实上可以取到 $\xi_1 \in (a, b)$. 但为什么可以取到 $\xi_1 \in (a, b)$ 需要说明.

得分	
评阅人	

六、 (本题 20 分) 设 $A = \left\{ \sqrt{\frac{m}{n}} \mid m, n \text{ 为正整数} \right\} \setminus \mathbb{Q}$,
 $x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$. 对于 $x > 0$, 定义 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数,} \\ \frac{1}{q^\alpha}, & x = \frac{p}{q} \text{ 为既约分数.} \end{cases}$

证明: 1. 对任何 $x \in A$, 存在常数 $M_x > 0$ 使得对任何既约分数 $\frac{p}{q}$ 都有 $\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{M_x}{q^2}$. 2. f 在 A 中每个点可微的充要条件是 $\alpha > 2$. 3. 对任何 α , 函数 f 在 x_0 处均不可微.

证明. 以下总设 $x = \sqrt{\frac{m}{n}} \in A$, $\frac{m}{n}$ 既约.

1. 我们来证明对任何正的既约分数 $\frac{p}{q}$ 成立

$$\left| \sqrt{\frac{m}{n}} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{3q^2\sqrt{mn}}. \quad (1)$$

即取 $M_x = \frac{1}{3\sqrt{mn}}$ 就满足要求.

若 $\left| \sqrt{\frac{m}{n}} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{mn}}$, 则 (1) 成立.

若 $\left| \sqrt{\frac{m}{n}} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{mn}}$, 则 $\frac{p}{q} \leq 2\sqrt{\frac{m}{n}}$. 从而注意到 x 为无理数时, 整数 $mq^2 - np^2$ 非零, 得到

$$\left| \sqrt{\frac{m}{n}} - \frac{p}{q} \right| = \frac{\left| \frac{m}{n} - \frac{p^2}{q^2} \right|}{\sqrt{\frac{m}{n}} + \frac{p}{q}} \geq \frac{\left| \frac{m}{n} - \frac{p^2}{q^2} \right|}{3\sqrt{\frac{m}{n}}} = \frac{|mq^2 - np^2|}{3q^2\sqrt{mn}} \geq \frac{1}{3q^2\sqrt{mn}}.$$

..... (6 分)

2. 充分性. 由第 1 小题的结果, 有常数 $M_x > 0$ 使得对任何既约分数 $\frac{p}{q}$ 都有 $\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{M_x}{q^2}$. 于是对任何 $t > 0$,

$$|f(t) - f(x)| = \begin{cases} 0, & \text{若 } t \text{ 为无理数,} \\ \frac{1}{q^\alpha}, & \text{若 } t = \frac{p}{q} \text{ 为既约分数} \end{cases} \leq \frac{1}{q^\alpha} \leq \frac{1}{M_x^{\frac{\alpha}{2}}} |t - x|^{\frac{\alpha}{2}}.$$

因此, 由 $\alpha > 2$ 得到 $\lim_{t \rightarrow x} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right| = 0$. 即 f 在 x 处可微且导数为零.
 (10 分)

必要性. 我们来证明更强的结果, 当 $\alpha \leq 2$ 时, f 在这点 x 就是不可微的.

由 Dirichlet 定理, 存在无穷多个既约分数 $\frac{p}{q}$ (特别, 其中的 q 可以充分大) 满足

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

于是对于满足上面不等式的既约分数 $\frac{p}{q}$, 我们有

$$\left| \frac{f(x) - f(\frac{p}{q})}{x - \frac{p}{q}} \right| = \frac{1}{q^\alpha |x - \frac{p}{q}|} > q^{2-\alpha}.$$

因此, f 在 x 处不可微.

..... (14 分)

3. 易见 x_0 为无理数. 对于 $n \geq 1$, 令 $\frac{p_n}{q_n}$ 为 $t_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{10^k!}$ 的既约分数, 则易见 $q_n = 10^{n!}$. 另一方面,

$$x_0 - t_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^k!} \leq \frac{2}{10^{(n+1)!}}$$

因此,

$$\left| \frac{f(t_n) - f(x_0)}{t_n - x_0} \right| = \frac{10^{-\alpha n!}}{x_0 - t_n} \geq \frac{10^{-\alpha n!}}{2 \times 10^{-(n+1)!}} = \frac{10^{(n+1-\alpha)n!}}{2}.$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(t_n) - f(x_0)}{t_n - x_0} \right| = +\infty.$$

从而无论 α 为何值, f 在 x_0 处均不可微.

..... (20 分)