Xixi's CMC Classes of 2014 Lecture Notes

2014 年西西大学数学竞赛辅导班 讲义

西西大学数学竞赛辅导班

wir müssen wissen,wir werden wissen.

授课人：西西
编辑整理：曾熊
整理时间：March 31, 2015
Email: 2609480070@qq.com

第 2 期

目　　录

第 1 课时 多元函数微分学 1

习题 1.1: 设正值函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且满足 $\int_a^b f(x)dx = A$. 证明:

$$\int_a^b f(x)\, e^{f(x)} dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \ge (b-a)(b-a+A).$$

习题 1.2: 证明不等式:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos\frac{2n+1}{2}t\right| \cdot \left|\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4n+2}\right)} - \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4n+2}\right)}\right| dt < 8\pi^2, \forall n \in \mathbb{N}^+$$

习题 1.3: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且对任意 (a,b)，都有

$$f(a)+f(b) \ge \int_a^b (f(x))^2\, dx.$$

证明: $f(x)$ 是零函数.

证: 如果存在一点 c，使得 $f(c)<0$，则在小邻域内存在两点 a,b，使 $f(a)<0, f(b)<0$. 则 $0 > f(a)+f(b)\int_a^b (f(x))^2\, dx > 0$，显然矛盾. 也就是说 $f(x)\ge 0$ 恒成立.

如果存在一点 c，使得 $f(c)>0$，则令

$$A = \lim_{x\to-\infty} f(x) \ge 0, B = \lim_{x\to+\infty} f(x) \ge 0.$$

如果 $A=B=0$，则 $\forall\varepsilon>0, \exists a<c<b, s.t.\ f(a)<\varepsilon, f(b)<\varepsilon$. 从而

$$2\varepsilon > f(a)+f(b) \ge \int_a^b (f(x))^2\, dx = t > 0.$$

由 ε 的任意性可知，此式不恒成立. 也就是说此时 $A=B=0$ 不成立.

如果 $A+B>0$，不妨设 $B>0$，则 $\forall 0<\varepsilon<B, \exists M>c, s.t. \forall x>M, f(x)>B-\varepsilon>0$. 另外由 $B=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 可知，$\exists b>M, s.t.\ f(b)<B+\varepsilon$. 于是

$$f(c)+B+\varepsilon > f(c)+f(b) \ge \int_c^b (f(x))^2 dx \ge \int_M^b (f(x))^2 dx \ge (b-M)(B-\varepsilon).$$

从而只要让 b 足够大即可让此不等式产生矛盾. 也就是说此时 $A+B>0$ 也不成立.

也就是说不存在 c，使得 $f(c)>0$. 综上所述 $f(x)\equiv 0$. □

习题 1.4: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，我们可以证明一般的，$\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] + \frac{f''(\xi)}{12}(a-b)^3.$$

证: 我们令

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] + k(a-b)^3.$$

只要证明 $k=\frac{f''(\xi)}{12}$ 即可，故我们构造函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt-\frac{1}{2}(x-a)\left[f(a)+f(x)\right]+k(x-a)^3.$$

显然

$$F(a)=F(b)=0.$$

由 Rolle 定理，存在 $\xi_1\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi_1)=0$，即

$$f(\xi_1)-\frac{1}{2}\left[f(a)+f(\xi_1)\right]-\frac{1}{2}(\xi_1-a)f'(\xi_1)+3k(\xi_1-a)^2=0.$$

整理得

$$f(a)=f(\xi_1)+f'(\xi_1)(a-\xi_1)+6k(\xi_1-a)^2. \tag{1.1}$$

另外一方面：将 $f(a)$ 在 $x=\xi$ 处进行泰勒展开，即

$$f(a)=f(\xi_1)+f'(\xi_1)(a-\xi_1)+\frac{f''(\xi)}{2}(\xi_1-a)^2,\xi\in(a,\xi_1). \tag{1.2}$$

由(1.1),(1.2)比较得

$$k=\frac{f''(\xi)}{12}.$$

□

习题 1.5: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\int_0^1\left((1-x)e^x\right)^n dx\right).$$

习题 1.6: 设 A,B 是 n 阶方阵，且满足 $A^2+B^2=AB$，若 $BA-AB$ 是可逆的. 证明: n 一定是 3 的倍数.

习题 1.7: 设 $a_n=\frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi\cos(nx)\cdot\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx\right|$，研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\left(\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{b}}}}{a_n^{-a}}(a,b>0)$ 的敛散性.

习题 1.8: 设 A,B 是 n 阶正定矩阵, 且满足 $A-B$ 也是正定的, 证明:

(1) $A^{-1}-B^{-1}$ 存在, 并且是非正定的;
(2) A^2-B^2 是否是正定的?
(3) 研究：A^n-B^n（n 是正整数）是否都是正定的?

习题 1.9: A,B 是 n 阶非零矩阵, 若 $ABABAB$ 是零矩阵, 是否有 $BABABA$ 也是零矩阵?

例 1.1: 设函数 $u(x,y)$ 有二阶连续偏导数，满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，且 $u(x,2x)=x,u'_x(x,2x)=x^2$，求 $u''_{x^2}(x,2x)$.

证:

$$u(x.2x)=x$$

两边同时对 x 求偏导得

$$u_x{}'(x.2x)+2u_{2x}{}'(x.2x)=1.$$

两边再次对 x 求偏导有

$$u_{x^2}''(x,2x)+2u_{x,2x}''(x,2x)=2x \Rightarrow 2u_{x,2x}''(x,2x)=2x-u_{x^2}''(x,2x).$$

由

$$u_x'(x.2x)=x^2.$$

得

$$u_{2x}'(x,2x)=\frac{1-x^2}{2}.$$

两边对 x 求偏导有

$$u_{2x,x}''(x,2x)+2u_{(2x)^2}''(x,2x)=-x \Rightarrow u_{2x,x}''(x,2x)=-x-2u_{(2x)^2}''(x,2x).$$

注意到

$$u_{2x,x}''(x,2x)=u_{x,2x}''(x,2x), u_{x^2}''(x,2x)+u_{(2x)^2}''(x,2x)=0.$$

我们有

$$2x-u_{x^2}''(x,2x)=-2x-4u_{(2x)^2}''(x,2x)=-2x+4u_{x^2}''(x,2x) \Rightarrow u_{x^2}''(x,2x)=\frac{4}{5}x.$$

□

例 1.2: 已知函数 $z=f(x,y)$ 有连续的二阶偏导数,且 $f_x'(x,y)\neq 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$，又设 $x=x(y,z)$ 是由 $z=f(x,y)$ 确定的函数，求

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2.$$

☞ **证:** 由于 $x=x(y,z)$ 是由 $z=f(x,y)$ 确定的，因此求 $\frac{\partial x}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial x}{\partial z}$ 等偏导数的运算都要利用隐函数的求导方法，要将 y 与 z 看成无关的.

$$z=f(x,y). \tag{1.3}$$

两边对 y 求偏导

$$0=f_x'\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+f_y'.$$

解得

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{f_y'}{f_x'}. \tag{1.4}$$

(1.3)两边对 z 求偏导

$$1=f_x'\cdot\frac{\partial x}{\partial z}.$$

故

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{f_x'}. \tag{1.5}$$

由(1.4)对 y 求偏导，并将(1.4)代入得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} &= \frac{\left(f_{yx}{}''\frac{\partial x}{\partial y}+f_{y^2}{}''\right)f_x{}'-f_y{}'\left(f_{x^2}{}''\frac{\partial x}{\partial y}+f_{xy}{}''\right)}{-\left(f_x{}'\right)^2}\\ &= \frac{2f_{xy}{}''\cdot f_x{}'\cdot f_y{}'-f_{y^2}{}''\cdot\left(f_x{}'\right)^2-f_{x^2}{}''\cdot\left(f_y{}'\right)^2}{\left(f_x{}'\right)^3}.\end{aligned}$$

由(1.5)对 z 求偏导，并将(1.5)代入得

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=\frac{-f_{x^2}{}''\frac{\partial x}{\partial z}}{\left(f_x{}'\right)^2}=\frac{-f_{x^2}{}''}{\left(f_x{}'\right)^3}.$$

由(1.4)对 z 求偏导，并将(1.5)代入得

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}=\frac{f_{yx}{}''\cdot\frac{\partial x}{\partial z}\cdot f_x{}'-f_y{}'\cdot f_{x^2}{}''\cdot\frac{\partial x}{\partial z}}{-\left(f_x{}'\right)^2}=\frac{f_{x^2}{}''\cdot f_y{}'-f_{xy}{}''\cdot f_x{}'}{\left(f_x{}'\right)^3}.$$

由已知条件 $f_{x^2}{}''\cdot f_{y^2}{}''-\left(f_{xy}{}''\right)^2=0$，故

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2\\ =&\frac{\left[2f_{xy}{}''\cdot f_x{}'\cdot f_y{}'-f_{y^2}{}''\cdot\left(f_x{}'\right)^2-f_{x^2}{}''\cdot\left(f_y{}'\right)^2\right]\times\left(-f_{x^2}{}''\right)-\left(f_{x^2}{}''\cdot f_y{}'-f_{xy}{}''\cdot f_x{}'\right)^2}{\left(f_x{}'\right)^6}\\ =&\frac{f_{x^2}{}''\cdot f_{y^2}{}''\cdot\left(f_x{}'\right)^2-\left(f_{xy}{}''\right)^2\left(f_x{}'\right)^2}{\left(f_x{}'\right)^6}=0.\end{aligned}$$

□

例 1.3: 设函数 $f(x,y)$ 满足

$$f(x,y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

证明： $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$.

☞ **证:** 由题意知

$$f(x,y)f_{xy}{}''(x,y)=f_x{}'(x,y)f_y{}'(x,y).$$

等价于

$$\frac{f_{xy}{}''(x,y)}{f_x{}'(x,y)}=\frac{f_y{}'(x,y)}{f(x,y)}.$$

我们有

$$\left(\ln\left|f_x{}'(x,y)\right|\right)'=\left(\ln\left|f(x,y)\right|\right)'.$$

从而

$$f_x{}'(x,y)=C(x)f(x,y).$$

故

$$\ln f(x,y)=\int_0^x C(t)\,dt+h(y).$$

由此得

$$f(x,y)=\varphi(x)\psi(y).$$

□

例 1.4: 设 $f(x),g(x)$ 为连续可微函数，且

$$w=yf(xy)dx+xg(xy)dy.$$

(1) 若存在 u，使得 $du=w$，求 $f-g$;

(2) 若 $f(x)=\varphi'(x)$，求 u，使得 $du=w$.

☞ **证:**

(1) 由题意

$$g(xy)+xyg'(xy)=f(xy)+xyf'(xy).$$

令 $u=xy$，我们有

$$g(u)+ug'(u)=f(u)+uf'(u).$$

即

$$[ug(u)]'=[uf(u)]'.$$

从而有

$$uf(u)=ug(u)+C\Rightarrow f(u)-g(u)=\frac{C}{u}.$$

(2) 当 $f(x)=\varphi'(x)$ 时，由 (1) 的结果

$$g(s)=\varphi'(s)-\frac{C}{s}.$$

从而有

$$\begin{aligned}w&=y\varphi'(xy)dx+x\left(\varphi'(xy)-\frac{C}{xy}\right)dy\\&=y\varphi'(xy)dx+x\varphi'(xy)dy-\frac{C}{y}dy\\&=d\varphi(xy)+d(-C\ln|y|)\\&=d(\varphi(xy)-C\ln|y|).\end{aligned}$$

故

$$u=\varphi(xy)-C\ln|y|+C_0\quad(C,C_0\text{是任意常数.})$$

□

例 1.5: 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 m 次齐次函数，且在有界区域上有界，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

☞ 证: 考察有界区域 $x^2+y^2\le 1$ 内. 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则由题设知 $f(x)$ 在此区域内有界且 $f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=r^m f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. 从而有

$$|f(x,y)|\le r^m|f(r\cos\theta,r\sin\theta)|\le Mr^m\to 0\,((x,y)\to(0,0)).$$

□

例 1.6: 令 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1\right\}$, $f\in C(D)$ 且有偏导数. 若 $|f(x,y)|\le 1\,((x,y)\in D)$，则存在 $(x_0,y_0)\in D$，使得

$$\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)^2\le 16.$$

☞ 证: 令 $F(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)((x,y)\in D)$，则 $F(0,0)\le 1$，且 $F(x,y)\ge 1(x^2+y^2=1)$. 从而可知存在点 $(x_0,y_0): x_0^2+y_0^2<1$，使得 $F(x_0,y_0)$ 达到最大（小）值. 由此得 $F_x'(x_0,y_0)=0=F_y'(x_0,y_0)$. 从而得到

$$f_x{}'(x_0,y_0)=-4x_0, f_y{}'(x_0,y_0)=-4y_0.$$

因此我们有

$$\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)^2=16\left(x_0^2+y_0^2\right)\le 16.$$

□

例 1.7: 设定义在区域 D 上的 $f(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=0, \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0, (x,y)\in D,$$

则 $f(x,y)=C$（常数），$(x,y)\in D$.

☞ 证: 对 D 中任意两点 $\mathbf{X}_0=(x_0,y_0), \mathbf{X}=(x,y)$，则有位于 D 内的以 $\mathbf{X}_0,\mathbf{X}$ 为端点的连续折线，不妨设为 D 中有点组: $\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_{n-1},\mathbf{X}_n=\mathbf{X}$:

$$\overline{\mathbf{X}_0\mathbf{X}_1},\overline{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2},\ldots,\overline{\mathbf{X}_{n-1}\mathbf{X}_n}\subset D.$$

对于线段 $\overline{\mathbf{X}_0\mathbf{X}_1}(\mathbf{X}_1=(x_1,y_1))$，应用中值公式可知

$$\begin{aligned}f(\mathbf{X}_1)-f(\mathbf{X}_0)=f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)&=f_x{}'(x_0+\theta(x_1-x_0),y_0+\theta(y_1-y_0))(x-x_0)\\&\quad+f_y{}'(x_0+\theta(x_1-x_0),y_0+\theta(y_1-y_0))(y-y_0)=0.\end{aligned}$$

由此推得 $f(\mathbf{X}_0)=f(\mathbf{X}_1)$. 类似地可得到 $f(\mathbf{X}_1)=f(\mathbf{X}_2)=\cdots=f(\mathbf{X}_n)$. 这说明 $f(x_0,y_0)=f(x,y)$. 证毕. □

例 1.8: 设 $f(x,y),g(x,y)$ 在区域 D 上存在偏导数，若有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}, f^2(x,y)+g^2(x,y)=1\,((x,y)\in D),$$

则 $f(x,y),g(x,y)$ 在 D 上皆为常数.

☞ 证: 只需指出 $g'_x = 0 = g'_y, f'_x = 0 = f'_y((x,y) \in D)$. 由于 $f^2(x,y) + g^2(x,y) = 1$，故对 x, y 求偏导可得

$$f(x,y)\, f_x{}'(x,y) + g(x,y)\, g_x{}'(x,y) = 0,$$
$$f(x,y)\, f_y{}'(x,y) + g(x,y)\, g_y{}'(x,y) = 0.$$

即

$$f(x,y)\, f_x{}'(x,y) = -g(x,y)\, g_x{}'(x,y)\,, f(x,y)\, f_y{}'(x,y) = -g(x,y)\, g_y{}'(x,y)\,.$$

再根据 $f_x{}'(x,y) = g_y{}'(x,y)\,, f_y{}'(x,y) = -g_x{}'(x,y)\,((x,y) \in D)$，又可知

$$f(x,y)\, g_y{}'(x,y) = -g(x,y)\, g_x{}'(x,y)\,, f(x,y)\, g_x{}'(x,y) = g(x,y)\, g_y{}'(x,y)\,,$$

从而得到对 $(x,y) \in D$ 时，有

$$\left[f^2(x,y) + g^2(x,y)\right] g_y{}'(x,y) = 0, \left[f^2(x,y) + g^2(x,y)\right] g_x{}'(x,y) = 0.$$

这说明 $g_x{}'(x,y) = 0 = g_y{}'(x,y)\,, (x,y) \in D$. 类似地可推得

$$f_x{}'(x,y) = 0 = f_y{}'(x,y)\,, (x,y) \in D.$$

□

例 1.9: 设 $f(x,y)$ 在原点的邻域 $U_0(\delta)$ 上定义，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，在 $U_0(\delta) \backslash \{(0,0)\}$ 上可微. 若有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x{}'(x,y) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y{}'(x,y)\,,$$

则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

☞ 证: 依题设知，对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|^2 < \frac{\varepsilon}{2}, \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|^2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta\right),$$

从而应用中值定理与 Cauchy-Schwarz 公式，我们有

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &= \left|\frac{\partial f(\theta x, \theta y)}{\partial x} x + \frac{\partial f(\theta x, \theta y)}{\partial y} y\right| \\ &\le \left[\left(\frac{\partial f(\theta x, \theta y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\theta x, \theta y)}{\partial y}\right)^2\right] \cdot \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon \cdot \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

□

例 1.10: 设 $f(x,y) = |x - y| g(x,y), g(x,y)$ 在零点的邻域 $U_0(\delta)$ 上连续，且 $g(0,0) = 0$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

☞ 证: 由于

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{|x|\, g(x,0)}{x}, \frac{f(0,y) - f(0,0)}{x} = \frac{|y|\, g(0,y)}{y}.$$

所以 $f'_x(0,0) = 0 = f'_y(0,0)$. 注意到

$$\begin{aligned}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{|x-y|\,g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= |\cos\theta-\sin\theta|\,g(r\cos\theta,r\sin\theta) \\ &\le 2g(r\cos\theta,r\sin\theta)=\varepsilon.\end{aligned}$$

□

例 1.11: 设 $f(x,y)=\varphi(|xy|)$，其中 $\varphi(0)=0$；在 $u=0$ 的附近满足 $|\varphi(u)|\le u^2$. 试证：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

☞ **证:** 由题设知 $f(0,0)=\varphi(0)=0, f(x,0)=f(0,y)=\varphi(0)=0$,

$$f_x{}'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0, f_y{}'(0,0)=0.$$

因为在 $u=0$ 附近，有 $|\varphi(u)|\le u^2$，故当 x^2+y^2 在 $(0,0)$ 附近有

$$\left|\frac{\varphi(|xy|)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{|xy|^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{4}\sqrt{(x^2+y^2)^3}.$$

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt[3]{4\varepsilon}$，当 $\sqrt{x^2+y^2}=\rho((x,y),(0,0))<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{\varphi(|xy|)}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\le\frac{1}{4}\sqrt{(x^2+y^2)^3}<\frac{1}{4}\delta^3=\varepsilon.$$

因此有 $\varphi(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$，从而

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\varphi(|xy|)=0+0\cdot x+0\cdot y+\varphi(|xy|)\\ &=f(0,0)+f_x{}'(0,0)\,x+f_y{}'(0,0)\,y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).\end{aligned}$$

故 f 在 $(0,0)$ 处可微. □

例 1.12: 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个开邻域内连续. 问:

(1) $\varphi(x,y)$ 在什么条件下，偏导数 $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$ 存在;

(2) $\varphi(x,y)$ 在什么条件下，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

☞ **证:**

(1) 由条件 $f(0,0)=0$，而

$$\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{|\Delta x|\,\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{-\Delta x\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}=-\varphi(0,0),$$

$$\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{\Delta x\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}=\varphi(0,0).$$

同理

$$\lim_{\Delta y\to0^-}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=-\varphi(0,0),\ \lim_{\Delta y\to0^+}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\varphi(0,0).$$

所以，偏导数 $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$ 存在 $\Leftrightarrow\varphi(0,0)=0=-\varphi(0,0)$.

(2) $.f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微 $\Leftrightarrow$

$$f(x,y)=f(x,y)-f(0,0)=f_x{}'(0,0)\,x+f_y{}'(0,0)\,y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$
$$\Rightarrow \varphi(0,0)=0 \Rightarrow f_x{}'(0,0)=f_y{}'(0,0)=\varphi(0,0)=0$$
$$\Rightarrow f(x,y)=|x-y|\,\varphi(x,y)\,.$$

由于 $\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 2$，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)=\varphi(0,0)=0$，所以，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x-y|\,\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

即 $|x-y|\,\varphi(x,y)=o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)((x,y)\to(0,0))$. 由此得 f 在 $(0,0)$ 处可微 $\Leftrightarrow\varphi(0,0)=0$.

□

例 1.13: 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数.

$$u=\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,d\theta,\ \frac{du}{dr}=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,d\theta$$
$$\frac{d^2u}{dr^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial r^2}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,d\theta,\ f_{11}{}''+f_{22}{}''=\frac{1}{r}.$$

求 $r\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{dr}$ 的值.

☞ **证:** 由已知条件得

$$\frac{du}{dr}=\int_0^{2\pi}\left(f_1{}'\cdot\cos\theta+f_2{}'\cdot\sin\theta\right)d\theta$$
$$9=\frac{d^2u}{dr^2}=\int_0^{2\pi}\left(f_{11}{}''\cdot\cos^2\theta+2f_{12}{}''\cdot\sin\theta\cos\theta+f_{22}{}''\cdot\sin^2\theta\right)d\theta$$

又

$$\begin{aligned}\frac{du}{dr}&=\int_0^{2\pi}f_1{}'d\sin\theta+\int_0^{2\pi}f_2{}'d\cos\theta\\&=f_1{}'\cdot\sin\theta\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\left[f_{11}{}''\cdot(-r\sin\theta)+f_{12}{}''\cdot r\cos\theta\right]\sin\theta d\theta\\&-f_2{}'\cdot\cos\theta\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\left[f_{21}{}''\cdot(-r\sin\theta)+f_{22}{}''\cdot r\cos\theta\right]\cos\theta d\theta\\&=\int_0^{2\pi}r\left(f_{11}{}''\cdot\sin^2\theta-2f_{12}{}''\cdot\sin\theta\cos\theta+f_{22}{}''\cdot\cos^2\theta\right)d\theta\end{aligned}$$

故

$$r\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{dr}=r\int_0^{2\pi}\left(f_{11}{}''+f_{22}{}''\right)d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi.$$

□

习题 1.10: 设 $k\ge1,p\ge2$ 是两个给定的正整数，正数列满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt[p]{n}}=L>0.$$

求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{kn}}{nx_n}=\frac{p}{p+1}\left(k^{\frac{p+1}{p}}-1\right).$$

习题 1.11: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\int_0^n\frac{n^2+x^2}{5^{-x}+7}dx.$$

第 2 课时　多元函数微分学 2

例 2.1: 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}+\frac{x^5}{y-x}\right)$.

解：取 $y=2x$，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}+\frac{x^5}{y-x}\right)&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+8x^3}}+\frac{x^5}{2x-x}\right)\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{2x}{\sqrt[3]{9}}+x^4\right)=0.\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{xy}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}}}.$$

我们取 $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=1$，即 $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$. 这时有

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}+\frac{x^5}{y-x}\right)&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(1+\frac{x^5}{\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}-x}\right)\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(1+\frac{x^4}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}-1}\right)=1.\end{aligned}$$

故所求的极限不存在. □

笔记:

(1) 对于后面的极限，可考察函数 $y-x=kx^5$，即 $y=kx^5+x$ 知其极限不存在；

(2) 对于极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

注意到

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$$

可知其极限为 0，亦可变形为

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\pm1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}}.$$

显然分母极限为 $+\infty$，因此整体的极限为 0.

例 2.2: 设变换 $\begin{cases} u = x + a\sqrt{y} \\ v = x + 2\sqrt{y} \end{cases}$ 把方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$，求 a 的值.

✎ **解:** 令 $z = z(u,v), u = x + a\sqrt{y}, v = x + 2\sqrt{y}$. 于是

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{a}{2\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial v}. \end{cases}$$

以及

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{a}{4\sqrt{y^3}}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{a^2}{4y}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{a}{2y}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{a}{2y}\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{1}{2\sqrt{y^3}}\frac{\partial z}{\partial v} \\ &= \frac{a^2}{4y}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{a}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{1}{2y}\frac{\partial z}{\partial y}. \end{aligned}$$

从而有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (2-a)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

由题意得 $a = -2$.

另一种解法：显然 $a \neq 2$，又

$$\begin{cases} x = \frac{2u - av}{2-a} \\ y = \left(\frac{u-v}{a-2}\right)^2 \end{cases},$$

有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = -\frac{2a}{(a-2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{(4+2a)\sqrt{y}}{(a-2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{4y}{(a-2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{2}{(a-2)^2}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

比较得 $a = -2$. □

例 2.3: 设二元函数 $f(x,y)$ 有一阶连续偏导数，且 $f(0,1) = f(1,0)$，证明：在单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上至少存在两个不同的点满足方程 $y\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial f}{\partial y}$.

✎ **解:** 令 $g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$，则 $g(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数. 又 $g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g(2\pi)$. 故由 Rolle 定理可知 $\exists\theta_1, \theta_2$ 分别属于 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$，使得

$$g'(\theta_1) = g'(\theta_2) = 0.$$

而

$$g' = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y},$$

将 θ_1, θ_2 代入即可. □

习题 2.1: 设二元函数 $f(x,y)$ 在圆周上 $C: x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 上连续, 证明：存在 C 的一条直经，其两个端点分别为 $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$，满足 $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$.

☞ **证:** 记 $F(t) = f(a\cos t, a\sin t), G(t) = F(t+\pi) - F(t)$，我们有

$$\begin{aligned} &G(0)\,G(\pi) = [F(\pi) - F(0)]\,[F(2\pi) - F(\pi)] \\ &= -[F(\pi) - F(0)]^2 \le 0 \end{aligned}$$

由介值定理，必存在 $\theta \in (0,\pi)$ 使得 $G(\theta)=0$. 取

$$\begin{cases} x_0 = a\cos\theta \\ x_1 = a\cos(\theta+\pi) \end{cases}$$

即可. □

习题 2.2: **设 $f(x,y)$ 有一阶连续偏导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$. 试证：若 $\lim\limits_{r\to+\infty}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)=1$，则 $f(x,y)$ 有最小值.**

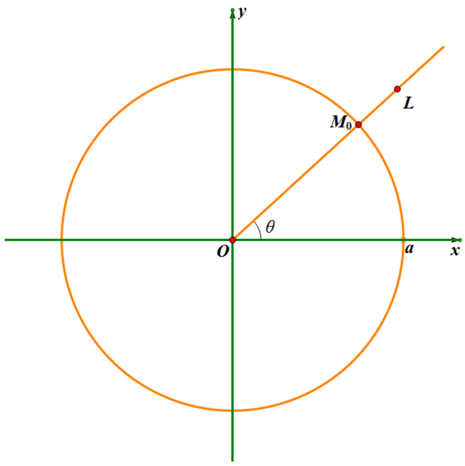
证: 由题设，$\exists a>0$，当 $r\geq a$ 时，

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}>0.$$

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, \mathbf{e}=(\cos\theta,\sin\theta)$，则有

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta=\frac{1}{r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)>0.$$

如图，设 M_0 是圆 $r=a$ 上的点，L 是过 O,M_0 的射线，则当 $M\in L$，且 $OM>OM_0$ 时，有



$f(M)>f(M_0)$. 因此，当 $r\geq a$,，$f(x,y)$ 在 $x^2+y^2=a^2$ 上取得最小值. 又 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $x^2+y^2\leq a^2$ 上有最小值，则该最小值也是 $f(x,y)$ 在全平面上的最小值. □

习题 2.3: **设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续偏导数，且有**

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|\leq M,\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\leq M,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

则 $|f(\mathbf{P})-f(\mathbf{Q})|\leq\sqrt{2}M||\mathbf{P}-\mathbf{Q}||$，其中 $\mathbf{P}=(x',y'),\mathbf{Q}=(x'',y'')$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中任意两点，$||\mathbf{P}-\mathbf{Q}||=\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}$.

证: 采用插入项并用 Taylor（中值）公式

$$\begin{aligned}
&|f(\mathbf{P})-f(\mathbf{Q})|=|f(x',y')-f(x'',y'')|\\
\leq&|f(x',y')-f(x'',y')|+|f(x'',y')-f(x'',y'')|\\
=&|f_x{}'(x'+\theta(x''-x'),y')|\,|x'-x''|+|f_y{}'(x'',y'+\theta(y''-y'))|\,|y''-y'|\\
\leq& M(|x'-x''|+|y''-y'|)\leq\sqrt{2}M\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}.
\end{aligned}$$

□

习题 2.4: 设 $f(x,y)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上可微，给定两个方向：$\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2$，记它们之间的夹角为 $\varphi(0<\varphi<\pi)$，则

(i) $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\le\frac{\sqrt{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_2}\right)^2}$;

(ii) $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\le\frac{\sqrt{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_2}\right)^2}$.

证: 不妨设 $\mathbf{l}_1=(\cos\alpha_1,\sin\alpha_1),\mathbf{l}_2=(\cos\alpha_2,\sin\alpha_2),\alpha_2-\alpha_1=\varphi$. 则

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_1}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha_1+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha_1,\\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_2}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha_2+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha_2,\end{cases}\quad\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2\end{vmatrix}=\sin\varphi.$$

由此知

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|=\frac{1}{\sin\varphi}\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_1} & \sin\alpha_1\\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_2} & \sin\alpha_2\end{vmatrix}\le\frac{1}{\sin\varphi}\sum_{i=1}^{2}\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_i}\sin\alpha_i\right|\le\frac{\sqrt{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_2}\right)^2}.$$

从而 (i) 得证，类似地可推得 (ii). □

例 2.4: 取 $u=x+z,v=y+z,w=x+y+z$，假定 $w=w(u,v)$ 变换方程

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(1+p+q+2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+p(1-p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

其中

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

证: 可用全微分法. 由

$$dz=pdx+qdy\quad 及\quad u=x+z,v=y+z,w=x+y+z$$

可得

$$du=dx+dz=(1+p)dx+qdy,dv=dy+dz=pdx+(1+q)dy,d^2u=d^2v=d^2w=d^2z.$$

把上述结果代入新变量的全微分式

$$d^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial w}{\partial u}d^2u+\frac{\partial w}{\partial v}d^2v,$$

并记 $S=1-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}$，即得

$$\begin{aligned}Sd^2z=&\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}[(p+1)dx+qdy]^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}[(p+1)dx+qdy][pdx+(q+1)dy]\\&+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}[pdx+(q+1)dy]^2.\end{aligned}$$

将上式与

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

比较，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{1}{S}\left[(1+p)^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2p(1+p)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} + p^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right],\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{1}{S}\left[q(1+p)\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + (1+p+q+2pq)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} + p(q+1)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right],\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{1}{S}\left[q^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2q(q+1)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} + (q+1)^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right].
\end{aligned}$$

代入原方程，并注意到

$$\begin{aligned}
&q(1+q)(1+p)^2 - (1+p+q+2pq)q(p+1) + p(1+p)q^2\\
=&q(1+p)[(1+p)(1+q) - (1+p+q+2pq) + pq] = 0,\\
&p^2q(1+q) - (1+p+q+2pq)p(q+1) + p(1+p)(q+1)^2 = 0
\end{aligned}$$

及

$$2p(1+p)q(1+q) - (1+p+q+2pq)^2 + 2q(q+1)p(1+p) = -(1+p+q)^2,$$

原方程变换为

$$-\frac{(1+p+q)^2}{S}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} = 0 \text{或} \frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} = 0.$$

□

例 2.5: 在三角形 $\triangle ABC$ 中，求 $\sin A\sin^2 B\sin^3 C$ 的最大值.

解: 显然 $A,B,C \in (0,\pi)$. 注意到

$$\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5} + \arcsin\frac{3\sqrt{10}}{10} = \pi.$$

又

$$\begin{cases}
\ln\sin A \le A - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}\\
2\ln\sin B \le B - \arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5} + 2\ln 2 - \ln 5\\
3\ln\sin C \le C - \arcsin\frac{3\sqrt{10}}{10} + 3\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 10
\end{cases}.$$

事实上，对于第一个式子，令 $f(x) = x - \ln\sin x - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}, x \in (0,\pi)$，我们有 $f'(x) = 1 - \frac{\cos x}{\sin x}, f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, f''(x) = \frac{1}{\sin^2 x} > 0$，所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上递减，在区间 $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$ 上递增，所以有 $f(x) \ge f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. 其他两式同理可证得.

由此我们有

$$\ln\sin A + 2\ln\sin B + 3\ln\sin C \le 3\ln 3 - \frac{5}{2}\ln 5.$$

即

$$\sin A\sin^2 B\sin^3 C \le \frac{27\sqrt{5}}{125}.$$

当且仅当

$$A = \frac{\pi}{4}, B = \arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}, C = \arcsin\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

时取等成立.

解法二：令

$$f(A,B,C)=\ln\sin A+2\ln\sin B+3\ln\sin C-\lambda(A+B+C-\pi),$$

则有

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial A}=\cot A-\lambda=0\\ \frac{\partial f}{\partial B}=\cot B-\lambda=0\\ \frac{\partial f}{\partial C}=\cot C-\lambda=0\end{cases}.$$

所以

$$\tan A:\tan B:\tan C=1:2:3.$$

利用

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

我们有

$$k+2k+3k=6k^3\Rightarrow k=1.$$

利用

$$\sin x=\sqrt{\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}.$$

所以

$$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2},\sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5},\sin C=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

因此

$$\sin A\sin^2 B\sin^3 C=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{27}{10\sqrt{10}}=\frac{27\sqrt{5}}{125}.$$

我们必须验证

$$\begin{cases}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial A^2}\right|_{A=\frac{\pi}{4}}=-2\\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial B^2}\right|_{\sin^2 B=\frac{4}{5}}=-\frac{5}{4}\\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial C^2}\right|_{\sin^2 C=\frac{9}{10}}=-\frac{10}{9}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial A\partial B}=0\\ \frac{\partial^2 f}{\partial A\partial C}=0\\ \frac{\partial^2 f}{\partial B\partial C}=0\end{cases}.$$

则 Hessian 矩阵

$$H=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial A^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial A\partial B} & \frac{\partial^2 f}{\partial A\partial C}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial B\partial A} & \frac{\partial^2 f}{\partial B^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial B\partial C}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial C\partial A} & \frac{\partial^2 f}{\partial C\partial B} & \frac{\partial^2 f}{\partial C^2}\end{vmatrix}=(-2)\times\left(-\frac{5}{4}\right)\times\left(-\frac{10}{9}\right)<0.$$

□

笔记: *2011* 年第三届全国大学生数学竞赛数学类有一道这样的题：对于 $\triangle ABC$，求 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 的最大值.

同样可采用拉格朗日乘数法给出解答.

✎ **解**：因为 $3\sin A+4\sin B+18\sin C = 3\sin A+4\sin B+18\sin(A+B), A,B\in(0,\pi)$. 设 $f(x,y)=3\sin x+4\sin y+18\sin(x+y), 0<x,y<\pi$，则

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=3\cos x+18\cos(x+y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=4\cos y+18\cos(x+y)=0 \end{cases}.$$

两式相减得到 $3\cos x=4\cos y$. 令 $t=\cos y, t\in[-frac34, frac34]$，代入到上面第二个式子有

$$2t+12t^2=3\sqrt{1-t^2}\sqrt{9-16t^2}.$$

去根号得

$$(16t-9)\left(3t^2+16t+9\right)=0.$$

即

$$\begin{cases} \cos x=\frac{3}{4} \\ \cos y=\frac{9}{16} \end{cases} \text{或} \begin{cases} \cos x=\frac{4\left(\sqrt{37}-8\right)}{9} \\ \cos y=\frac{\sqrt{37}-8}{3}<-\frac{3}{4} \end{cases} \text{（舍）},$$

则

$$\begin{aligned} A&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-3\sin x-18\sin(x+y), \\ B&=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-18\sin(x+y), \\ C&=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-3\sin y-18\sin(x+y). \end{aligned}$$

所以

$$D=AC-B^2=12\sin x\sin y+18\sin(x+y)\left[3\sin x+4\sin y\right].$$

当 $x=\arccos\frac{3}{4}, y=\arccos\frac{9}{16}$ 时，我们计算得 $D=\frac{1617}{16}>0, A=-\frac{15\sqrt{7}}{2}<0$，故此时取得最大值，且最大值为 $\frac{35\sqrt{7}}{4}$. □

当然，我们可以把这一问题推广到一般情况：

定理 2.1

在 $\triangle ABC$ 中，对于 $a,b,c>0$，我们有

$$a\sin A+b\sin B+c\sin C\le\sqrt{\frac{(ab+cw)(bc+aw)(ac+bw)}{abcw}},$$

其中 w 是满足方程 $2abcw^3+(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)w^2-a^2b^2c^2=0$ 的一个根.

例 2.6: 设 $F(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中有连续的一阶偏导数，并满足

$$y\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\ge a>0$$

求证：当点 (x,y,z) 沿着曲线 $T: x=-\cos t, y=\sin t, z=t(t\ge 0)$ 趋向无穷时，$F(x,y,z)\to+\infty$.

☞ 证：记 $g(t)=F(-\cos t,\sin t,t)$，则

$$g'(t)=\sin t\frac{\partial F}{\partial x}+\cos t\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}=y\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\geq a>0.$$

由泰勒公式，我们知 $\exists\xi\in(0,t)$ 使得

$$g(t)=g(0)+g'(\xi)t\geq g(0)+at.$$

令 $t\to+\infty$，我们得到 $F(x,y,z)=g(t)\to+\infty$. □

例 2.7: 举一个例子，变量 x,y 的函数在域 $U=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2<1\right\}$，对每个变量二次连续可导，但在点 $(0,0)$ 不具有混合偏导数.

☞ 证：考查函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sqrt{-\ln(x^2+y^2)}, & \text{当}\,(x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{当}\,(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

□

例 2.8: 设二元函数 $f(x,y)=0$ 在平面上的图像为曲线 l，若曲线 l 上任意一点处的切线在坐标轴的正半轴截下的线段之和为定值 C，求该二元函数方程.

☞ 证：曲线 l 上的切线方程为

$$Y-f=f'(X-x).$$

分别令 $X=0,Y=0$ 我们得到正半轴上的两个截距为 $f-xf',x-\frac{f}{f'}$. 因此

$$\left(1-\frac{1}{f'}\right)f=(f'-1)x+C\Rightarrow f=xf'+\frac{Cf'}{f'-1}.$$

两边同时求导得

$$f'=f'+xf''+\frac{Cf''(f'-1)-Cf'f''}{(f'-1)^2}.$$

从而有

$$\frac{f''}{(f'-1)^2}\left[x(f'-1)^2-C\right]=0.$$

若 $f''=0$，我们得到

$$f(x)=C_1x+C_2.$$

若 $x(f'-1)^2-C=0$，则

$$f'=\pm\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{x}}+1\Rightarrow f=\pm2\sqrt{Cx}+x+C'.$$

□

笔记: 显然三元函数 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=C(x,y,z,C>0\text{且}C\text{为常数})$ 在空间直角坐标系坐标轴的正半轴截下的线段之和为定值，于是我们有以下问题：

Open Problem: 设三元函数 $f(x,y,z)=0$ 在空间上的图像为曲面 S，若曲面 S 上任意一点处的切面在坐标轴的正半轴截下的线段之和为定值 C，求该三元函数方程，假定该曲面既不是直线，也非平面.

例 2.9: 设 $D: x^2+y^2<1, f(x,y)$ 为有界正值函数，在 D 上有二阶连续偏导数，且满足

$$\triangle \ln(f(x,y)) \geq f^2(x,y).$$

证明： $f(x,y) \leq \frac{2}{1-x^2-y^2}, \forall (x,y) \in D$($\triangle$ 为拉普拉斯算符，即 $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$).

☞ **证:** 令

$$g(x,y) \xlongequal{\text{定义}} \frac{2}{1-x^2-y^2},$$

则

$$\triangle \ln g(x,y) = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} = g^2(x,y),$$

所以

$$\triangle(\ln g(x,y) - \ln f(x,y)) \leq g^2(x,y) - f^2(x,y). \tag{2.1}$$

记函数 $F(x,y) = \ln g(x,y) - \ln f(x,y) = \ln \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$，由条件可得出

$$\lim_{(x,y)\to\partial D} F(x,y) = +\infty.$$

所以函数 $F(x,y)$ 在 D 内某一点达到最小值，设最小值点为 (x_0,y_0)，则

$$(\ln g(x,y) - \ln f(x,y)) \leq g^2(x,y) - f^2(x,y), \tag{2.2}$$

且在该点处 $\frac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial x^2} \geq 0, \frac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial y^2} \geq 0$（否则与 (x_0,y_0) 是 F 最小值矛盾）. 相加即得

$$\triangle(\ln g(x_0,y_0) - \ln f(x_0,y_0)) \geq 0.$$

再由(2.1)式得出

$$g^2(x_0,y_0) - f^2(x_0,y_0) \geq 0,$$

进而可得

$$\frac{g(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)} \geq 1.$$

把结果代入(2.2)式得到

$$\ln \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \geq \ln \frac{g(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)} \geq 0, \quad (\forall (x,y) \in D).$$

即有

$$f(x,y) \leq g(x,y) = \frac{2}{1-x^2-y^2}, \quad (\forall (x,y) \in D).$$

□

例 2.10: 设 $f \in C^2(\mathbb{R})$，证明以下条件是等价的.

(1) 对任何矩形 $ABCD \subset \mathbb{R}^2$,

$$f(A)+f(C) = f(B)+f(D);$$

(2) 对某些数 a,b,c,d 有

$$f(x,y)=a(x^2+y^2)+bx+cy+d.$$

☞ **证:** 考虑矩形

$$A\left(x,y\right),B\left(x+\Delta x,y\right),D\left(x,y+\Delta y\right),C\left(x+\Delta x,y+\Delta y\right).$$

由题知

$$f(A)+f(C)=f(B)+f(D).$$

由于 $f\in C^2(\mathbb{R})$，则由泰勒公式

$$f\left(A\right)+\left(f\left(A\right)+f_y\left(A\right)\Delta y+\frac{1}{2}f_{yy}\left(A\right)\Delta y^2+f_x\left(A\right)\Delta x+\frac{1}{2}f_{xx}\left(A\right)\Delta x^2+f_{xy}\left(A\right)\Delta x\Delta y\right)$$
$$=\left(f\left(A\right)+f_y\left(A\right)\Delta x+\frac{1}{2}f_{xx}\left(A\right)\Delta x^2\right)+\left(f\left(A\right)+f_y\left(A\right)\Delta y+\frac{1}{2}f_{yy}\left(A\right)\Delta y^2\right)+o\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right).$$

由此得到

$$f_{xy}\left(A\right)\Delta x\Delta y=o\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right),\Delta x^2+\Delta y^2\to 0.$$

即

$$f_{xy}\left(x,y\right)=0. \tag{2.3}$$

令 $\sqrt{2}u=x+y,\sqrt{2}v=x-y$，则经过简单计算有

$$f_{uu}(u,v)=f_{vv}(u,v) \tag{2.4}$$

由(2.3),(2.4)显然得

$$f(x,y)=a(x^2+y^2)+bx+cy+d.$$

□

笔记: 这是 *14* 年北大期末最后一题。

第 3 课时 多元函数积分学 1

例 3.1: 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^6}\sum\limits_{m=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(5m^4-18m^2k^2+5k^4\right)$.

解：运用二重积分

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^6}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(5m^4-18m^2k^2+5k^4\right)=\int_0^1\int_0^1 5x^4-18x^2y^2+5y^4\,dxdy=0.$$

□

笔记: 事实上

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)=\int_0^1\int_0^1 f\left(x,y\right)dxdy.$$

例 3.2: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，证明

$$\iint\limits_{0\le x^2+y^2\le 1}e^{f(x)-f(y)}\,dxdy\ge\pi.$$

解：利用均值不等式

$$\begin{aligned}\iint\limits_{0\le x^2+y^2\le 1}e^{f(x)-f(y)}dxdy&=\frac{1}{2}\left[\iint\limits_{0\le x^2+y^2\le 1}e^{f(x)-f(y)}dxdy+\iint\limits_{0\le x^2+y^2\le 1}e^{f(y)-f(x)}dxdy\right]\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_{0\le x^2+y^2\le 1}\left[\frac{e^{f(x)}}{e^{f(y)}}+\frac{e^{f(y)}}{e^{f(x)}}\right]dxdy\ge\frac{1}{2}\iint\limits_{0\le x^2+y^2\le 1}2dxdy=\pi.\end{aligned}$$

解法二：注意到

$$e^x\ge 1+x.$$

我们有

$$\iint\limits_{0\le x^2+y^2\le 1}e^{f(x)-f(y)}dxdy\ge\iint\limits_{0\le x^2+y^2\le 1}\left(1+f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)dxdy=\pi.$$

□

笔记: 第一届数学竞赛有这么一道题：

习题 ***3.1:*** 已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证：

(1) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,dy-ye^{-\sin x}\,dx=\oint\limits_L xe^{-\sin y}\,dy-ye^{\sin x}\,dx$;

(2) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,dy-ye^{-\sin x}\,dx\ge\frac{5}{2}\pi^2$.

☞ 证：

(1) 因被积函数的偏导数在 D 上连续，故由格林公式知

$$\oint_L xe^{\sin y}\,dy - ye^{-\sin x}\,dx = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{\sin y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-ye^{-\sin x}\right)\right] dxdy = \iint_D \left(e^{-\sin x} + e^{\sin y}\right) dxdy$$

$$\oint_L xe^{-\sin y}\,dy - ye^{\sin x}\,dx = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{-\sin y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-ye^{\sin x}\right)\right] dxdy = \iint_D \left(e^{\sin x} + e^{-\sin y}\right) dxdy.$$

由对称性知

$$\iint_D \left(e^{-\sin x} + e^{\sin y}\right) dxdy = \iint_D \left(e^{\sin x} + e^{-\sin y}\right) dxdy.$$

故

$$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \oint_L xe^{-\sin y}dy - ye^{\sin x}dx.$$

(2) 由于

$$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \iint_D \left(e^{\sin x} + e^{-\sin y}\right) dxdy = \int_0^\pi \int_0^\pi \left(e^{\sin x} + e^{-\sin y}\right) dxdy$$

$$=\pi \int_0^\pi \left(e^{\sin x} + e^{-\sin x}\right) dx.$$

注意到

$$e^x + e^{-x} \geq 2 + x^2.$$

事实上，这可以利用泰勒公式直接给出.

我们有

$$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \pi \int_0^\pi \left(e^{\sin x} + e^{-\sin x}\right) dx \geq \pi \int_0^\pi \left(2 + \sin^2 x\right) dx = \frac{5}{2}\pi^2.$$

□

例 3.3: 求抛物面 $z = 1 + x^2 + y^2$ 的一个切平面，使得它与该抛物面及圆柱面 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 围成的体积最小，试写出切平面方程并求出最小体积.

✎ 解：设切点为 $A(a,b,c)$，记 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z + 1$，则 A 点处切平面的一个法向量为 $(2a, 2b, -1)$，该切平面方程为

$$2a(x-a) + 2b(y-b) - (z-c) = 0 \Rightarrow 2ax + 2by - z = 2a^2 + 2b^2 - c = a^2 + b^2 - 1.$$

即

$$z = 2ax + 2by - a^2 - b^2 + 1.$$

记 $D : (x-1)^2 + y^2 \leq 1$，我们有

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D \left(\left(1 + x^2 + y^2\right) - \left(2ax + 2by + 1 - a^2 - b^2\right)\right) dxdy \\
&= \iint_D \left(x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2\right) dxdy \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \left(\rho^2 - 2a\rho\cos\theta - 2b\rho\sin\theta\right)\rho d\rho + \left(a^2 + b^2\right)\pi \\
&= \frac{3}{2}\pi - 2a\pi + \left(a^2 + b^2\right)\pi = \frac{\pi}{2} + \pi(a-1)^2 + \pi b^2 \geq \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

当且仅当 $a=1,b=0$ 时取等号成立. 由问题的实际意义，V 确有最小值，故当 $a=1,b=0$ 时 V 最小，此时切平面方程为

$$2(x-1)-(z-2)=0.$$

即

$$2x-z=0.$$

且最小体积为 $V=\frac{\pi}{2}$. □

例 3.4: 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，证明：

$$2\int_0^a f(x)\,dx\int_x^a f(y)\,dy=\left[\int_0^a f(x)\,dx\right]^2.$$

✎ 解：

$$\begin{aligned}
&2\int_0^a f(x)\,dx\int_x^a f(y)\,dy=\int_0^a f(x)\,dx\int_x^a f(y)\,dy+\int_0^a f(x)\,dx\int_x^a f(y)\,dy\\
=&\int_0^a f(x)\,dx\int_x^a f(y)\,dy+\int_0^a f(y)\,dy\int_0^y f(x)\,dx(\text{交换积分次序})\\
=&\int_0^a f(x)\,dx\int_x^a f(y)\,dy+\int_0^a f(x)\,dx\int_0^x f(y)\,dy(\text{用 } x,y \text{ 分别替换 } y,x)\\
=&\int_0^a f(x)\,dx\int_0^a f(y)\,dy=\left[\int_0^a f(x)\,dx\right]^2.
\end{aligned}$$

□

例 3.5: 已知 $y'(x)=\arctan(x-1)^2$ 及 $y(0)=0$，求 $I=\int_0^1 y(x)dx$.

✎ 解：

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^1 y(x)\,dx=\int_0^1 dx\int_0^x y'(t)\,dt\\
&=\int_0^1 dx\int_0^x \arctan(t-1)^2dt\\
&=\int_0^1 dt\int_t^1 \arctan(t-1)^2dx\\
&=-\int_0^1 (t-1)\arctan(t-1)^2dt\\
&\xlongequal{u=(t-1)^2}\frac{1}{2}\int_0^1 \arctan u\,du\\
&=\frac{1}{2}u\arctan u\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u}{1+u^2}du\\
&=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.
\end{aligned}$$

□

例 3.6: 求 $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ (0<a<b)$.

✎ **解:**

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\int_a^b x^y dy\\
&\xlongequal{\text{令}u=\ln\frac{1}{x}}\int_a^b dy\int_0^{+\infty} e^{-(y+1)u}\sin u du\\
&=\int_a^b \frac{1}{1+(1+y)^2}dy=\arctan(1+b)-\arctan(1+a).
\end{aligned}$$

□

例 3.7: 设 $D: x^2+y^2\le 1$，试证明不等式

$$\frac{61}{165}\pi\le\iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}dxdy\le\frac{2}{5}\pi.$$

☞ **证:**

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}dxdy\\
&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \sin\rho^3\cdot\rho d\rho=2\pi\int_0^1\sin\rho^3\cdot\rho d\rho\\
&=2\pi\int_0^1\rho\left(\rho^3-\frac{(\rho^3)^3}{3!}+\frac{(\rho^3)^5}{5!}-\cdots\right)d\rho\\
&=2\pi\int_0^1\left(\rho^4-\frac{1}{3!}\rho^{10}+\frac{1}{5!}\rho^{16}-\cdots\right)d\rho
\end{aligned}$$

被积函数是莱布尼茨型级数，因此有

$$2\pi\int_0^1\left(\rho^4-\frac{1}{3!}\rho^{10}\right)d\rho\le I\le 2\pi\int_0^1\rho^4 d\rho.$$

由于

$$2\pi\int_0^1\left(\rho^4-\frac{1}{3!}\rho^{10}\right)d\rho=\frac{61}{165}\pi,2\pi\int_0^1\rho^4d\rho=\frac{2}{5}\pi.$$

故

$$\frac{61}{165}\pi\le I\le\frac{2}{5}\pi.$$

□

例 3.8: 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且恒为正，对一切 t，$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-x|}f(x)dx\le 1$，证明对一切 a 与 $b(a<b)$ 有

$$\int_a^b f(x)dx\le\frac{b-a}{2}+1.$$

☞ **证:** 令 $F(t)=\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)dx$，则 $F(t)$ 是连续函数.

$$\begin{aligned}
\int_a^b F(t)dt&=\int_a^b dt\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)dx\\
&=\int_a^b f(x)dx\int_a^b e^{-|t-x|}dt\\
&=\int_a^b f(x)dx\left[\int_a^x e^{-|t-x|}dt+\int_x^b e^{-|t-x|}dt\right]\\
&=\int_a^b f(x)\left(2-e^{a-x}-e^{x-b}\right)dx.
\end{aligned}$$

由于

$$F(t) \le \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\,dx \le 1.$$

故有

$$\int_a^b F(t)\,dt \le b-a.$$

即

$$2\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b e^{a-x} f(x)\,dx - \int_a^b e^{x-b} f(x)\,dx \le b-a.$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\le \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b e^{a-x} f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b e^{x-b} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b e^{-|a-x|} f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b e^{-|b-x|} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{2}F(b) + \frac{1}{2}F(a) \\
&\le \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(b-a) + 1.
\end{aligned}$$

□

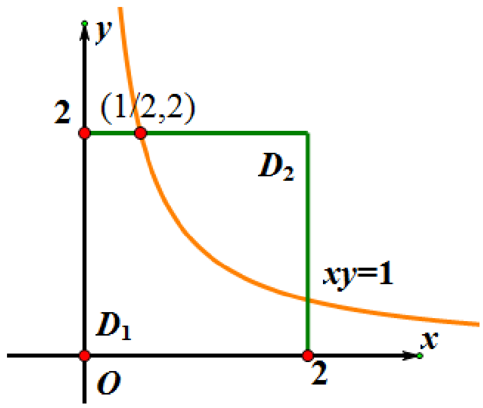
例 3.9: 设 $D: 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$.

(1) 求 $\iint\limits_D |xy-1|dxdy$;

(2) 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，且 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0, \iint\limits_D xyf(x,y)dxdy = 1$，试证：存在 $(\xi,\eta) \in D$，使 $|f(\xi,\eta)| \ge \frac{1}{B}$.

☞ **证:**

(1) 如图，



$$\begin{aligned}
B &= \iint\limits_{D_1} (1-xy)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} (xy-1)\,dxdy \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 (1-xy)\,dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} (1-xy)\,dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 (xy-1)\,dy \\
&= \frac{3}{2} + 2\ln 2.
\end{aligned}$$

(2) 由题设

$$
\begin{aligned}
1 &= \iint\limits_D xyf(x,y)\,dxdy - \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \\
&= \iint\limits_D (xy-1)\,f(x,y)\,dxdy \\
&\le \iint\limits_D |xy-1|\,|f(x,y)|\,dxdy(\text{利用广义积分中值定理}) \\
&= |f(\xi,\eta)| \iint\limits_D |xy-1|\,dxdy(\xi,\eta)\in D \\
&= f(\xi,\eta)\,B.
\end{aligned}
$$

□

例 3.10: 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D:0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 上具有连续的四阶偏导数，且 $\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right| \le 3$，在 D 的边界上 $f(x,y)$ 恒为零，试证明

$$
\left|\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma\right| \le \frac{1}{48}.
$$

☞ **证:** 设

$$
I = \iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}dxdy.
$$

由题意 $f(x,1)\equiv 0, f(x,0)\equiv 0(0\le x\le 1)$，不断使用分部积分法有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 x(1-x)\,dx\int_0^1 y(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}dy = \int_0^1 x(1-x)\,dx\int_0^1 y(1-y)\,d\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} \\
&= \int_0^1 x(1-x)\left[y(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y}\bigg|_0^1 - \int_0^1 (1-2y)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dy\right]dx \\
&= \int_0^1 x(1-x)\left[\int_0^1 (2y-1)\,d\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]dx = \int_0^1 x(1-x)\left[(2y-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_0^1 - \int_0^1 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dy\right]dx \\
&= \int_0^1 x(1-x)\left[f_{x^2}''(x,1)+f_{x^2}''(x,0) - \int_0^1 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dy\right]dx = \int_0^1 -2x(1-x)\,dx\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dy \\
&= \int_0^1 -2dy\int_0^1 x(1-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx = -2\int_0^1\left[x(1-x)\,f_x'\big|_0^1 - \int_0^1 (1-2x)\,f_x'dx\right]dy \\
&= -2\int_0^1\left[(2x-1)\,f\big|_0^1 - \int_0^1 2fdx\right]dy = -2\int_0^1\left[\int_0^1 -2fdx\right]dy = 4\int\limits_D f(x,y)\,d\sigma
\end{aligned}
$$

故

$$\begin{aligned}\left|\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma\right| &= \frac{1}{4}\left|\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}d\sigma\right|\\ &\le \frac{1}{4}\iint\limits_D |xy(1-x)(1-y)|\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right|d\sigma\\ &\le \frac{3}{4}\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\,d\sigma\\ &= \frac{3}{4}\left(\int_0^1 x(1-x)\,dx\right)^2 = \frac{1}{48}.\end{aligned}$$

□

例 3.11: 设 $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$，$f(x,y)$ 在 D 上四次连续可微. 若 $f(x,y) = 0\,((x,y) \in \partial D)$，且有

$$\left|\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\right| \le M \quad ((x,y) \in D),$$

则

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\right| \le \frac{M}{144}.$$

证: 作 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 $g(x,y) = x(1-x)y(1-y)$，则

$$\frac{\partial^4 g(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} = 4, \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy = \frac{1}{36}.$$

注意到 $f(0,y) = f(1,y) = 0$，可知

$$\frac{\partial^2 f(0,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(1,y)}{\partial y^2} = 0.$$

又有 $g(0,y) = g(1,y) = 0$，从而得到

$$\iint\limits_D \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\,dxdy = \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\,dx\right)dy = \iint\limits_D \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2}dxdy.$$

同理也可得

$$\int\limits_D \frac{\partial^4 g(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}f(x,y)\,dxdy = \int\limits_D \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dxdy.$$

从而我们有

$$\iint\limits_D \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D \frac{\partial^4 g(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}f(x,y)\,dxdy = 4\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

$$
\begin{aligned}
\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\right| &= \frac{1}{4}\left|\iint\limits_D \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} g(x,y)\,dxdy\right| \\
&\le \frac{1}{4}\iint\limits_D \left|\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} g(x,y)\right| dxdy \\
&\le \frac{M}{4}\iint\limits_D g(x,y)\,dxdy = \frac{M}{144}.
\end{aligned}
$$

□

例 3.12: 试证明下列命题：

(1) 设 $f \in C^{(1)}([a,b])$，且 $f(a)=0$，则

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx - \frac{1}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 (x-a)^2 dx.$$

(2) 设 $f \in C([0,1])$. 若有等式 $f(x) = 1 + a\int_x^1 f(y)f(y-x)\,dy$，则 $a \le \frac{1}{2}$.

☞ 证:

(1) 由题设知，对 $x \ge a$ 有（用 Cauchy-Schwarz 不等式）

$$f(x) = \int_a^x f'(t)\,dt, f^2(x) \le (x-a)\int_a^x [f'(t)]^2 dt.$$

在上述右端不等式对 x 在 $[a,b]$ 上作积分，可得

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f^2(x)\,dx &\le \int_a^b (x-a)\int_a^x [f'(t)]^2 dtdx = \int_a^b [f'(t)]^2 dt \int_t^b (x-a)\,dx \\
&= \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx - \frac{1}{2}\int_a^b [f'(t)]^2 (t-a)^2 dt.
\end{aligned}
$$

(2) 令 $A = \int_0^1 f(x)\,dx$，则由题设知

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 1dx + a\int_0^1 1dx \cdot \int_x^1 f(y)f(y-x)\,dy \\
&= 1 + a\int_0^1 f(y)\,dy\int_0^y f(y-x)\,dx = 1 + a\int_0^1 f(y)\,dy\int_0^y f(t)\,dt \\
&= 1 + a\int_0^1 \left(\int_0^y f(t)\,dt\right) d\left(\int_0^y f(t)\,dt\right) = 1 + \frac{a}{2}\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2 \\
&= 1 + \frac{a}{2}A^2.
\end{aligned}
$$

由此可得 $\frac{a}{2}A^2 - A + 1 = 0$. 注意到 $A \in \mathbb{R}^1$，故 $a \le \frac{1}{2}$.

□

例 3.13: 试证明下列命题（转换成二重积分）：

(1) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上递减正值函数，则

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\,dx}{\int_0^1 xf(x)\,dx} \le \frac{\int_0^1 f^2(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}.$$

(2) 设 $f \in C([a,b])$，且 $0 < f(x) \le M(a \le x \le b)$，则

$$0 < I = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 - \left(\int_a^b f(x)\cos x dx\right)^2 - \left(\int_a^b f(x)\sin x dx\right)^2 \le \frac{M^2}{24}(b-a)^4.$$

(3) 设 $p(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负可积，函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增，则

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx \cdot \int_a^b p(x) g(x)\,dx \le \int_a^b p(x)\,dx \cdot \int_a^b p(x) f(x) g(x)\,dx.$$

☞ **证:**

(1) 只需指出

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \cdot \int_0^1 y f(y)\,dy - \int_0^1 y f^2(y)\,dy \cdot \int_0^1 f(x)\,dx \ge 0.$$

将上式左端改写为

$$I = \int_0^1 \int_0^1 f(x) f(y)\, y\,[f(x) - f(y)]\,dxdy.$$

并在积分中的变量 x 和 y 给予交换，又可写出

$$I = \int_0^1 \int_0^1 f(x) f(y)\, x\,[f(y) - f(x)]\,dxdy.$$

两式相加得

$$2I = \int_0^1 \int_0^1 f(x) f(y)\,(y-x)\,[f(x) - f(y)]\,dxdy.$$

根据 f 的递减性，我们有 $(y-x)[f(x)-f(y)] \ge 0 (0 \le x, y \le 1)$. 这说明 $2I \ge 0$，即 $I \ge 0$.

(2) 令 $D = \{(x,y) : a \le x, y \le b\}$，则积分式 I 可写为

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x) f(y)\,[1 - \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y]\,dxdy \\ &= \iint_D f(x) f(y)\,[1 - \cos(x-y)]\,dxdy. \end{aligned}$$

由此即知

$$\begin{aligned} 0 < I &\le M^2 \iint_D [1 - \cos(x-y)]\,dxdy \\ &= M^2 (b-a)^2 \left[1 - \left(\frac{\sin\frac{b-a}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)^2\right] \le \frac{M^2}{24}(b-a)^4 \end{aligned}$$

最后一个不等式是由 $t - t^3/6 < sint < t(t > 0)$ 给出的.

(3) 只需指出

$$I = \int_a^b p(x) f(x) g(x)\,dx \cdot \int_a^b p(x)\,dx - \int_a^b p(x) f(x)\,dx \cdot \int_a^b p(x) g(x)\,dx \ge 0.$$

更换变量符号，将 I 改写为

$$J=\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx\cdot\int_a^b p(y)\,dy-\int_a^b p(x)f(x)\,dx\cdot\int_a^b p(y)g(y)\,dy$$
$$=\iint_D p(x)p(y)f(x)[g(x)-g(y)]\,dxdy$$

由 x,y 的对称性，同样可得

$$J=\iint_D p(x)p(y)f(y)[g(y)-g(x)]\,dxdy.$$

将上面相加可得到

$$J=\frac{1}{2}\iint_D p(x)p(y)[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\,dxdy.$$

因为 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，故上式两个方括号同号，即上式被积函数在 D 上取非负值，因而有 $J\geq 0$.

□

习题 3.2: **已知** $f(x)$ **为** $[0,1]$ **上单调递增的正值连续函数，且** $\int_0^1 xf(x)\,dx=s\int_0^1 f(x)\,dx$**. 求证：**

$$\int_0^s f(x)\,dx\leq\int_s^1 f(x)\,dx.$$

证: 不失一般性，令 $\int_0^1 f(x)\,dx=1$，令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，我们有 $F(0)=0,F(1)=1,F'(x)=f(x)$，则由琴声不等式

$$F(s)=F\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)\leq\int_0^1 F(x)f(x)\,dx=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\int_0^s f(x)\,dx=F(s)\leq 1-F(s)=\int_s^1 f(x)\,dx.$$

□

习题 3.3: **设** $0<a<b$**，求证**

$$\int_a^b (x-a)^b(b-x)^a dx<\frac{b^{a+b+1}-a^{a+b+1}}{a+b+1}\cdot\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{a+b}.$$

证: 注意到

$$\frac{(b-a)x}{b+a}=\frac{b(x-a)}{b+a}+\frac{a(b-x)}{b+a}\geq(x-a)^{\frac{b}{a+b}}(b-x)^{\frac{a}{a+b}}.$$

我们有

$$\int_a^b (x-a)^b(b-x)^a dx\leq\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{a+b}\int_a^b x^{a+b}dx=\frac{b^{a+b+1}-a^{a+b+1}}{a+b+1}\cdot\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{a+b}.$$

□

第 4 课时 数学竞赛模拟试卷 1

习题 4.1: 设 $a_k > 0(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 且 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = 1$，定义函数 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k - x$. 证明:

(1) $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 内的下凸函数.
(2) $f(x) = 0$ 是 $[0, 1)$ 内有根的充要条件是 $f'(1) > 0$.

习题 4.2: 设 $f(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的非负连续的凹函数，$f(0) = 1$. 证明:

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\,dx + \frac{1}{12} \leq \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

证: 设

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, I = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx, U = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

由于

$$f(ax) = f(ax + (1-a)\cdot 0) \geq af(x) + (1-a)f(0) = af(x) + (1-a).$$

对上面式子 a 从零到一上积分得

$$\int_0^1 f(tx)\,dt \geq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}.$$

换元即得

$$2F(x) \geq xf(x) + x.$$

另外我们有

$$I = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = x^2 F(x)\big|_0^1 - 2\int_0^1 xF(x)\,dx \leq F(1) - 2\int_0^1 x(xf(x) + x)\,dx.$$

即

$$2I \leq F(1) - \frac{1}{3} = U - \frac{1}{3}.$$

所以

$$U^2 - 2I - \frac{1}{12} \geq \left(2I + \frac{1}{3}\right)^2 - 2I - \frac{1}{12} = \left(2I - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0.$$

□

习题 4.3: 设 a, b, c 是三个正数，且满足 $abc = \frac{1}{16}$，求证:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)}dx \leq \pi.$$

习题 4.4: 设 $a_i(i=1,2,\ldots,n)$ 是任意实数，求

$$F(n)=(n+1)\int_0^{+\infty}e^{-x}\left(1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\right)^2dx$$

的最小值.

例 4.1: 一、(本题 15 分) 证明：对所有的实数 x，有

$$\left|e^x(12-6x+x^2)-(12+6x+x^2)\right|\le\frac{1}{60}|x|^5e^{|x|}.$$

证: 证法一：这是一个很普通也较为繁琐的的证法.

令 $f(x)=e^x\left(x^2-6x+12\right)-\left(x^2+6x+12\right)$，注意到

$$\begin{cases}f(x)=e^x\left(x^2-6x+12\right)-\left(x^2+6x+12\right)\\ f'(x)=e^x\left(x^2-4x+6\right)-2x-6\\ f''(x)=e^x\left(x^2-2x+2\right)-2\\ f'''(x)=x^2e^x\ge0\end{cases}\quad\text{以及}\begin{cases}f(0)=0\\ f'(0)=0\\ f''(0)=0\end{cases}$$

我们知道 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，在 $(-\infty,0)$ 上递减，又 $f(0)=0$. 因此当 $x\ge0$ 时，有 $f(x)\ge0$；当 $x\in(-\infty,0)$ 时，有 $f(x)<0$.

(1) 当 $x\ge0$ 时，等价于证明

$$g(x)=\left(\frac{x^5}{60}-x^2+6x-12\right)e^x+x^2+6x+12\ge0.$$

又

$$\begin{cases}g(x)=\left(\frac{x^5}{60}-x^2+6x-12\right)e^x+x^2+6x+12\\ g'(x)=\left(\frac{x^5}{60}+\frac{x^4}{12}-x^2+4x-6\right)e^x+2x+6\\ g''(x)=\left(\frac{x^5}{60}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^3}{3}-x^2+2x-2\right)e^x+2\\ g'''(x)=\left(\frac{x^5}{60}+\frac{x^4}{4}+x^3\right)e^x=\frac{x^3}{60}\left(x^2+15x+60\right)e^x\end{cases}\quad\text{以及}\begin{cases}g(0)=0\\ g'(0)=0\\ g''(0)=0\end{cases}.$$

易知此时 $g(x)$ 是单调递增的，故 $g(x)\ge g(0)=0$.

(2) 当 $x<0$ 时，等价于证明

$$\left(x^2-6x+12\right)e^x-\frac{x^5}{60}e^{-x}-x^2-6x-12>0.$$

又

$$\begin{cases}h(x)=\left(x^2-6x+12\right)e^x-\frac{x^5}{60}e^{-x}-x^2-6x-12\\ h'(x)=\left(x^2-4x+6\right)e^x+\left(\frac{x^5}{60}-\frac{x^4}{12}\right)e^{-x}-2x-6\\ h''(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x-\left(\frac{x^5}{60}+\frac{x^3}{3}\right)e^{-x}-2\\ h'''(x)=x^2e^x+\left(\frac{x^5}{60}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)e^{-x}\end{cases}\quad\text{以及}\begin{cases}h(0)=0\\ h'(0)=0\\ h''(0)=0\end{cases}.$$

而

$$h'''(x)=x^2e^x+\left(\frac{x^5}{60}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)e^{-x}=x^2e^{-x}\left(e^{2x}+\frac{x^3}{60}-\frac{x^2}{12}+\frac{x}{3}-1\right).$$

注意到

$$\begin{cases} k(x) = e^{2x} + \frac{x^3}{60} - \frac{x^2}{12} + \frac{x}{3} - 1 \\ k'(x) = 2e^{2x} + \frac{x^2}{20} - \frac{x}{6} + \frac{1}{3} > 0 \end{cases} \text{以及} k(0) = 0.$$

我们可知 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递减，故 $h(x) > h(0) = 0$.

综上，不等式得证.

证法二：

$$\begin{aligned} \text{左边} &= e^x\left(12 - 6x + x^2\right) - \left(12 + 6x + x^2\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\left(12 - 6x + x^2\right) - \left(12 + 6x + x^2\right) \\ &= \sum_{n=5}^{\infty} \frac{12 + n(n-7)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

故有

$$\left|e^x\left(12 - 6x + x^2\right) - \left(12 + 6x + x^2\right)\right| \le \sum_{n=5}^{\infty} \frac{12 + n(n-7)}{n!} |x|^n.$$

$$\text{左边} = \frac{1}{60}|x|^5 e^{|x|} = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{60(n-5)!}|x|^n.$$

只需证明

$$\frac{12 + n(n-7)}{n!} \le \frac{1}{60(n-5)!}, \quad n \ge 5.$$

亦即只需证明

$$60 \times 12 \le n\left[(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) - 60(n-7)\right].$$

经检验 $n = 5, 6$ 时不等式成立.

当 $n \ge 7$ 时，

$$\begin{aligned} & n\left[(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) - 60(n-7)\right] \\ \ge & n\left[(n-1)(n-2)(n-3) - 60\right](n-4) \\ \ge & 7 \times [6 \times 5 \times 4 - 60] \times 3 = 1260 > 12 \times 60. \end{aligned}$$

由此不等式得证.

证法三：考虑恒等式：

$$\frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{x^3} = \frac{1}{3!} + \frac{x}{4!} + \frac{x^2}{5!} + \cdots.$$

求导两次得到

$$\begin{aligned} & \frac{e^x\left(12 - 6x + x^2\right) - \left(12 + 6x + x^2\right)}{x^5} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+5)!} x^n \\ = & \frac{1}{60} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)} \frac{x^n}{n!} \\ = & \frac{1}{60}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{60}{(n+3)(n+4)(n+5)} \frac{x^n}{n!}\right). \end{aligned}$$

由于

$$\frac{60}{(n+3)(n+4)(n+5)}\frac{|x|^n}{n!} \le \frac{|x|^n}{n!}.$$

我们得到

$$60\left|\frac{e^x\left(12-6x+x^2\right)-\left(12+6x+x^2\right)}{x^5}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!} = e^{|x|}.$$

因此有

$$\left|e^x\left(12-6x+x^2\right)-\left(12+6x+x^2\right)\right| \le \frac{1}{60}|x|^5 e^{|x|}.$$

□

例 4.2: **二、(本题 10 分)$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是一个棱长为 2 的正方体，点 M 是棱 AA_1 的中点，过 M,B_1,C,D_1 作一个球，试求该球的半径.**

✎ 解: 解法一：以 D_1 为坐标原点，D_1A_1,D_1C_1,D_1D 分别为 x,y,z 轴建立平面直角坐标系，则 $M(2,0,1)B_1(2,2,0),C(0,2,2),D_1(0,0,0)$. 设所求球的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$. 我们知

$$\begin{cases}(2-a)^2+b^2+(1-c)^2=r^2 & (4.1)\\ a^2+(2-b)^2+(2-c)^2=r^2 & (4.2)\\ (2-a)^2+(2-b)^2+c^2=r^2 & (4.3)\\ a^2+b^2+c^2=r^2. & (4.4)\end{cases}$$

由(4.1)-(4.2)得

$$4a-2c=3.$$

由(4.3)-(4.4)得

$$a+c=2.$$

则 $a=\frac{7}{6},c=\frac{5}{6}$. 由(4.1)-(4.4)得

$$2c-4b+3=0.$$

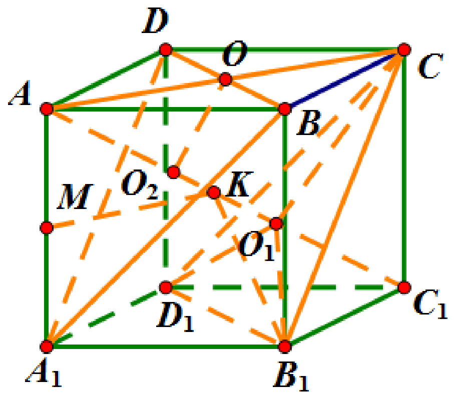
故 $b=\frac{7}{6}$，代入得 $r=\frac{\sqrt{11}}{2}$，即

$$\begin{cases}a=\frac{5}{6}\\ b=\frac{7}{6}\\ c=\frac{5}{6}\\ r=\frac{\sqrt{11}}{2}\end{cases}.$$

因此球的半径为 $\frac{\sqrt{11}}{2}$.

解法二：（纯几何方法）如图，联结 B_1C,CD_1,D_1B_1，设体对角线 AC_1 交正 $\triangle B_1CD_1$ 所在平面于点 O_1，显然，点 O_1 是正 $\triangle B_1CD_1$ 的中心（对称性），且 $AC_1\perp$ 平面 B_1CD_1. 联结 A_B,BD,DA_1, 设 AC_1 交正 $\triangle A_1BD$（所在平面）于点 O_2. 由于 $DB\parallel D_1B_1,A_1B\parallel CD_1,DA_1\parallel B_1C$. 所以，平面 $A_1BD\parallel$ 平面 B_1CD_1.

设 O 是正方形 $ABCD$ 的中心, 平面 A_1BD 平分线段 AC 于点 O. 联结 OO_2, 则 $OO_2\parallel CO_1$. 从而，$AO_2=O_2O_1$. 同理，$C_1O_1=O_1O_2$. 故 $C_1O_1=\frac{1}{3}AC_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 设球的中心为 K，则点 K 在体对角线 AC_1 上.



记 $AK = x, \angle A_1AC_1 = \theta$，由余弦定理得

$$\begin{aligned} R^2 = MK^2 &= 1^2 + x^2 - 2x\cos\theta \\ &= 1^2 + x^2 - 2x \times \frac{\sqrt{3}}{3} = x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 1. \end{aligned}$$

易得 $AO_1 = \frac{2}{3}AC_1 = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, KO_1 = \left|\frac{4\sqrt{3}}{3} - x\right|, O_1B = \frac{B_1C}{2\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. 由勾股定理得

$$R^2 = KB_1^2 = KO_1^2 + O_1B^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - x\right)^2 + \frac{8}{3}.$$

所以

$$x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 1 = \frac{16}{3} + x^2 - \frac{8\sqrt{3}}{3}x + \frac{8}{3}.$$

即 $x = \frac{7\sqrt{3}}{6}$. 由此得 $R = \frac{\sqrt{11}}{2}$. □

例 4.3: 三、(本题 15 分) 设 $f(x) > 0$，且在 $[0,1]$ 上是凸函数，且对任意的 $x, y \in [0,1]$ 有

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y).$$

求证:

$$\frac{3}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \le \frac{1}{8} + \int_0^1 f^3(x)\,dx.$$

☞ **证:** 注意到:

$$t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{16} = \frac{(4t+1)(2t-1)^2}{16} \ge 0.$$

故有

$$\int_0^1 \left(f^3(x) - \frac{3}{4}f^2(x) + \frac{1}{16}\right)dx \ge 0 \Rightarrow \int_0^1 f^3(x)\,dx + \frac{1}{16} \ge \frac{3}{4}\int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

再利用柯西不等式有

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 1^2 dx \ge \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

故有

$$\int_0^1 f^3(x)\,dx + \frac{1}{16} \ge \frac{3}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

□

笔记: 对于上面那道积分不等式

习题 *4.5:* 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续的凹函数，$f(0)=1$. 证明：

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\,dx+\frac{1}{12}\le\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

证: 设

$$\begin{aligned}a=\int_0^1 x^2 f(x)\,dx&=\left[x^2\int_0^x f(t)\,dt\right]_0^1-\int_0^1\left(2x\int_0^x f(t)\,dt\right)dx\\&=\int_0^1 f(t)\,dt-2\int_0^1\int_0^x xf(t)\,dtdx.\end{aligned}$$

因为 f 在区间 $[0,1]$ 上是凹函数，则有 $f(t)\ge\frac{f(x)-f(0)}{x-0}t+f(0)$ 对于 $0\le t\le x\le 1$ 恒成立. 所以

$$\begin{aligned}a&\le\int_0^1 f(x)\,dx-2\int_0^1\int_0^x x\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}t+f(0)\right)dtdx\\&=\int_0^1 f(x)\,dx-2\int_0^1 x^2\left[f(x)+f(0)\right]dx\\&=\int_0^1 f(x)\,dx-a-\frac{f(0)}{3}.\end{aligned}$$

即

$$2a\le\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{3}.$$

从而有

$$2a+\frac{1}{12}\le\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{4}=\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2-\left(\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{2}\right)^2\le\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

当且仅当 $f(x)=c\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ 时等号成立. 因此有

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\,dx+\frac{1}{12}\le\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

□

当然，我们有以下的推广：

定理 4.1

设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续的凹函数，对任意给定的正数 p 我们有：

$$\frac{p+2}{2}\int_0^1 x^p f(x)\,dx+\frac{2pf(0)-(p+1)}{4(p+1)}\le\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

☞ 证：事实上，仿照以上的解法，设

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 x^p f(x)\,dx = \left[x^p \int_0^1 f(t)\,dt\right]_0^1 - p\int_0^1\int_0^x x^{p-1} f(t)\,dtdx \\ &= \int_0^1 f(x)\,dx - p\int_0^1\int_0^x x^{p-1} f(t)\,dtdx. \end{aligned}$$

因为 f 在区间 $[0,1]$ 上是凹函数，则有 $f(t) \geq \frac{f(x)-f(0)}{x-0}t + f(0)$ 对于 $0 \leq t \leq x \leq 1$ 恒成立. 所以

$$\begin{aligned} a &\leq \int_0^1 f(x)\,dx - p\int_0^1\int_0^x x^{p-1}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}t + f(0)\right)dtdx \\ &= \int_0^1 f(x)\,dx - p\int_0^1\int_0^x \left[\left(x^{p-2}f(x) - x^{p-2}f(0)\right)t + x^{p-1}f(0)\right]dtdx \\ &= \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{p}{2}\int_0^1 x^p f(x)\,dx - \frac{pf(0)}{2(p+1)} \\ &= \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{p}{2}a - \frac{pf(0)}{2(p+1)}. \end{aligned}$$

即

$$\frac{p+2}{2}a \leq \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{pf(0)}{2(p+1)}.$$

从而有

$$\begin{aligned} &\frac{p+2}{2}a + \frac{2pf(0)-(p+1)}{4(p+1)} \leq \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{4} \\ &= \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 - \left(\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2. \end{aligned}$$

因此有

$$\frac{p+2}{2}\int_0^1 x^p f(x)\,dx + \frac{2pf(0)-(p+1)}{4(p+1)} \leq \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

□

例 4.4: **四、(本题 12 分) 设** $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix}$**，试求一个对称阵** X**，使得** $A = X^3 - 10X^7$.

✎ 解：由

$$|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+9)(\lambda-9) = 0$$

可知存在正交矩阵 Q 使得 $A = Q\mathrm{diag}(-9,0,9)Q'$. 我们分析 X 的对角元素应当满足 $x^3 - 10x^7$ =-9,0,9，故 x 分别为 1,0，-1. 题意只是找一个对称矩阵 X，我们可取为

$$X = Q\mathrm{diag}(1,0,-1)Q' = -\frac{1}{9}Q\mathrm{diag}(-9,0,9)Q' = -\frac{1}{9}\mathrm{A} = \mathrm{X} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{TP} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

□

例 4.5: 五、(本题 18 分) 是否存在正数列 a_n 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛，且满足 $\prod\limits_{k=1}^{n}a_k < n^{\frac{n}{2}}$.

证: 证法一：利用 Carleman 不等式有

$$+\infty=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}}\le e\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}<+\infty.$$

矛盾.

证法二：可采用调和-几何平均值不等式得到

$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\le\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}<\sqrt{n}.$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}>\sqrt{n}.$$

与题意产生矛盾. 因此不存在满足上述条件的数列. □

笔记:

证: 先看一个著名的不等式：

引理 4.1 Hardy-Landau 不等式

设 $p>1$，$a_n(n\in N)$ 是递增的正数列，则

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^p<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{m}a_n^p.$$

记 $A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，先证明

$$\sum_{n=1}^{m}A_n^p<\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{m}A_n^{p-1}a_n.$$

由 $A_n^{p-1}A_{n-1}\le\frac{p-1}{p}A_n^p+\frac{1}{p}A_{n-1}^p$（不等式：$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{a^{p'}}{p'}, a>0,b>0,p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$）可知

$$\begin{aligned}A_n^p-\frac{p}{p-1}A_n^{p-1}a_n&=A_n^p-\frac{p}{p-1}\left[nA_n-(n-1)A_{n-1}\right]A_n^{-1}A_n^p\\&=A_n^p\left(1-\frac{np}{p-1}\right)+\frac{(n-1)p}{p-1}A_n^{p-1}A_{n-1}\\&\le A_n^p\left(1-\frac{np}{p-1}\right)+\frac{n-1}{p-1}\left[(p-1)A_n^p+A_{n-1}^p\right]\\&=\frac{1}{p-1}\left[(n-1)A_{n-1}^p-nA_n^p\right].\end{aligned}$$

由上面的结论以及 *Holder* 不等式，我们有

$$\sum_{n=1}^{m}A_n^p<\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{m}A_n^{p-1}\cdot a_n\le\frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{m}a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{m}A_n^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

整理后立得

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^p<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{m}a_n^p.$$

再回到 *Carleman* 不等式的证明.

引理 4.2 Carleman 不等式

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}\le e\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

事实上，由几何 -算术平均值不等式以及上面的 *Hardy* 不等式，我们有

$$\sum_{n=1}^{m}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_1^{\frac{1}{p}}\cdot a_2^{\frac{1}{p}}\cdots a_n^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{n}}$$
$$\le\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{p}}+a_2^{\frac{1}{p}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{m}a_n<e\cdot\sum_{n=1}^{m}a_n.$$

再令 $m\to\infty$ 即得所证.

此外，我们还有种证法. 对任意的自然数 N，根据 $\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n\ (n=1,2,\cdots)$ 以及算术 -几何平均值不等式我们得到

$$\begin{aligned}
&e^{-1}\sum_{n=1}^{N}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}<\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}\sqrt[n]{1a_12a_2\cdots na_n}}{n+1}<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)\\
&=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)-\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1})\\
&\le a_1+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n}[(a_1+2a_2+\cdots+na_n)-(a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1})]\\
&=\sum_{n=1}^{N}a_n.
\end{aligned}$$

注　记 $a_n=\frac{(n+1)^n}{n!}$，那么 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$，从而 $\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n,n=1,2,\cdots$. □

接下来是一道 *2011* 年北大数分考研题：

习题 *4.6*: 设正项级数 $\sum\limits_{n}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$ 存在.

证: 由算术 -几何均值不等式，有

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\ge\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}.$$

故

$$\frac{n^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

下面对 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 进行估计.

因为

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_1(2a_2)\cdots(na_n)}{n!}}\le\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{a_1+(2a_2)+\cdots+(na_n)}{n}.$$

所以

$$\frac{n^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{a_1+(2a_2)+\cdots+(na_n)}{n}.$$

又正项级数 $\sum\limits_n a_n$ 收敛，由 *Abel* 变换可知 $\frac{a_1+(2a_2)+\cdots+(na_n)}{n}\to 0$. □

习题 4.7: 设 $\{a_n\}$ 是正数列使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛. 求证

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\le 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n},$$

而且上式右端的系数 2 是最佳的.

证: 由柯西不等式我们得

$$\begin{aligned}4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{a_j}&\ge 4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^2}{a_j}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\\&\ge 4\frac{(1+2+\cdots+n)^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}>2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}.\end{aligned}$$

注意到 $a_n=n^{\alpha},\alpha>1$ 时有

$$\lim_{\alpha\to1}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}}{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{a_j}}=\lim_{\alpha\to1}\lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{n}{1^{\alpha}+2^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha}}}{\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\alpha}}}=\lim_{\alpha\to1}\lim_{N\to\infty}\frac{\frac{N}{\frac{1}{\alpha+1}N^{\alpha+1}+O(N^{\alpha})}}{\frac{1}{N^{\alpha}}}=2.$$

□

习题 4.8: 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 为收敛的正项级数，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}a_n$ 收敛.

证: 设 $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,s_0=0$，那么

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{s_n^2}(s_n-s_{n-1})\\&<\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{s_ns_{n-1}}(s_n-s_{n-1})\\&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{s_ns_{n-1}}(s_n-s_{n-1})=\sum_{n=2}^{\infty}n^2\left(\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(n+1)^2}{s_n}-\frac{n^2}{s_n}\right]+\frac{1}{a_1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{s_n}+\frac{1}{a_1}.\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}a_n<\frac{2}{a_1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{s_n}<\frac{2}{a_1}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}.$$

从而命题成立. 证毕. □

我们把上面的问题推广为如下的推论：

推论 4.1

我们考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^{p-1}}$ 是收敛的，其中 p 是一个常数，满足 $p>1$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^p a_n$ 是收敛的.

☞ **证:** 设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，那么 $\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^p a_n=\frac{n^p}{S_n^p}(S_n-S_{n-1})$，其中 $S_0=0$，有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^p a_n &< a_1^{1-p}+\sum_{n=2}^{m}\frac{n^p}{S_{n-1}^{p-1}}-\sum_{n=2}^{m}\frac{n^p}{S_n^{p-1}}\\
&=a_1^{1-p}+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(n+1)^p}{S_n^{p-1}}-\sum_{n=2}^{m}\frac{n^p}{S_n^{p-1}}=2a_1^{1-p}+\sum_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^p-n^p}{S_n^{p-1}}\\
&<2a_1^{1-p}+p\sum_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^{p-1}}{S_n^{p-1}}.
\end{aligned}$$

取 $r=\frac{p}{p-1},s=p$，那么 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$. 由 *Holder* 不等式，我们得到

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^{p-1}}{S_n^{p-1}}=\sum_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^{p-1}}{S_n^{p-1}}a_n^{\frac{p-1}{p}}\frac{1}{a_n^{\frac{p-1}{p}}}<\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^p}{S_n^p}a_n\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{a_n^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

又

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{n^p}{S_n^p}a_n<2a_1^{1-p}+p2^{p-1}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{n^p}{S_n^p}a_n\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{a_n^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^{p-1}}$ 是收敛的，用反证法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{S_n^p}a_n$ 也是收敛的. 证毕. □

例 4.6: 设 σ,τ 是 n 维线性空间 V 的两个线性变换，证明：核空间的维数满足

$$\dim\sigma^{-1}(0)+\dim\tau^{-1}(0)\geq\dim(\sigma\tau)^{-1}(0)\geq\dim\tau^{-1}(0).$$

☞ **证:** $\forall\xi\in\tau^{-1}(0)\Rightarrow\tau(\xi)=0\Rightarrow\sigma\tau(\xi)=0\Rightarrow\xi\in(\sigma\tau)^{-1}(0)\Rightarrow\tau^{-1}(0)\subseteq(\sigma\tau)^{-1}(0)$，所以有

$$\dim\tau^{-1}(0)\leq\dim(\sigma\tau)^{-1}(0).$$

设 $\dim\tau^{-1}(0)=t,\dim(\sigma\tau)^{-1}(0)=t+s,\dim\sigma^{-1}(0)=k$，把 $\tau^{-1}(0)$ 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 扩充成 $(\sigma\tau)^{-1}(0)$ 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，有

$$\sigma(\tau\beta_j)=(\sigma\tau)\beta_j=0\Rightarrow\tau\beta_j\in\sigma^{-1}(0),j=1,2,\cdots,s.$$

下面证 $\tau(\beta_1),\tau(\beta_2),\cdots,\tau(\beta_s)$ 线性无关. 令 $x_1\tau(\beta_1)+x_2\tau(\beta_2)+\cdots+x_s\tau(\beta_s)=0$，则

$$\tau\left(x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s\right)=0.$$

从而 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s\in\tau^{-1}\left(0\right)$，于是

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_t\alpha_t.$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关，即得 $x_1=x_2=\cdots=x_s=0$. 可见 $\sigma^{-1}(0)$ 至少包含 s 个线性无关的变量，即 $k\geq s$，所以

$$\dim\sigma^{-1}\left(0\right)+\dim\tau^{-1}\left(0\right)=k+t\geq s+t=\dim\left(\sigma\tau\right)^{-1}\left(0\right).$$

□

例 4.7: 七、(本题 15 分)

(1) **若 $f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$，则称 $f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数. 设 $f(x,y,z)$ 有连续偏导数，证明 $f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数的充分必要条件为**

$$xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)=nf(x,y,z),n\in\mathbb{N}.$$

(2) **设四次齐次函数 $f(x,y,z)=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6z^2x^2+a_7x^2yz+a_8y^2zx+a_9xyz^2$. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}f\left(x,y,z\right)dS$，其中 $\sum:x^2+y^2+z^2=1$.**

☞ **证:**

(1) 先证必要性. 已知 $f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数，则有 $f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$，两边同时对 t 求导得

$$xf_{tx}{}'\left(tx,ty,tz\right)+yf_{ty}{}'\left(tx,ty,tz\right)+zf_{tz}{}'\left(tx,ty,tz\right)=nt^{n-1}f\left(tx,ty,tz\right).$$

令 $t=1$，我们立即得到

$$xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)=nf(x,y,z).$$

再证充分性. 若

$$xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)=nf(x,y,z),n\in\mathbb{N}.$$

令 $\varphi\left(t\right)=\frac{f(tx,ty,tz)}{t^n}$，则

$$\varphi'\left(t\right)=\frac{txf_{tx}{}'\left(tx,ty,tz\right)+tyf_{ty}{}'\left(tx,ty,tz\right)+tzf_{tz}{}'\left(tx,ty,tz\right)-f\left(tx,ty,tz\right)n}{t^{n+1}}.$$

将 tx,ty,tz 分别看成 x,y,z. 由题意知 $\varphi'(t)=0$，故 $\varphi(t)=\varphi(1)=f(x,y,z)$，从而得到 $f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$，因此 $f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数.

(2) 解法一：由对称性可知

$$\iint\limits_{\Sigma} x^4 dS = \iint\limits_{\Sigma} y^4 dS = \iint\limits_{\Sigma} z^4 dS;$$
$$\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2 dS = \iint\limits_{\Sigma} y^2z^2 dS = \iint\limits_{\Sigma} z^2x^2 dS;$$
$$\iint\limits_{\Sigma} x^2yz dS = \iint\limits_{\Sigma} y^2zx dS = \iint\limits_{\Sigma} xyz^2 dS.$$

故

$$I = \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, dS + (a_1 + a_2 + a_3) \iint\limits_{\Sigma} x^4 dS$$
$$+ (3a_4 + 3a_5 + 3a_6) \iint\limits_{\Sigma} x^2y^2 dS + (a_7 + a_8 + a_9) \iint\limits_{\Sigma} x^2yz dS.$$

令 $x = \sin\theta\cos\varphi, y = \sin\theta\sin\varphi, z = \cos\theta$，我们有

$$A = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \sin^2\theta\cos\varphi,$$
$$B = \begin{vmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix} = \sin^2\theta\sin\varphi,$$
$$C = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = \sin\theta\cos\theta,$$

故

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sin\theta.$$

又

$$\iint\limits_{\Sigma} x^4 dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^5\theta\cos^4\varphi d\theta d\varphi = \frac{4}{5}\pi$$
$$\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2 dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^5\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{15}$$
$$\iint\limits_{\Sigma} x^2yz dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^4\theta\cos\theta\sin\varphi\cos^2\varphi d\theta d\varphi = 0.$$

因此

$$I = \frac{4}{5}\pi(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6).$$

解法二：由 $f(x,y,z) = a_1x^4 + a_2y^4 + a_3z^4 + 3a_4x^2y^2 + 3a_5y^2z^2 + 3a_6z^2x^2 + a_7x^2yz + a_8y^2zx + a_9xyz^2$ 为 4 次齐次函数，故 $xf'_x + yf'_y + zf'_z = 4f$. 由于单位球面 $\sum$ 上任意一点 (x,y,z) 处的单位外向量的方向余弦就是该点的坐标，即

$$\cos\left(\vec{n},x\right) = x, \cos\left(\vec{n},y\right) = y, \cos\left(\vec{n},z\right) = z.$$

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \frac{1}{4}\iint\limits_{\Sigma}\left(x\frac{df}{dx}+y\frac{df}{dy}+z\frac{df}{dz}\right)dS\\
=&\frac{1}{4}\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{df}{dx}dydz+\frac{df}{dy}dzdx+\frac{df}{dz}dxdy\right)\\
=&\frac{1}{4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dxdydz.
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 12a_1x^2+6a_4y^2+6a_6z^2+2a_7yz\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 12a_2y^2+6a_4x^2+6a_5z^2+2a_8xz\\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= 12a_3z^2+6a_5y^2+6a_6x^2+2a_9xy.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS\\
&=\frac{1}{4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} 6\left[(2a_1+a_4+a_6)x^2+(2a_2+a_4+a_5)y^2+(2a_3+a_5+a_6)z^2\right]dxdydz.
\end{aligned}$$

又

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} x^2dxdydz = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} y^2dxdydz = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} z^2dxdydz = \frac{4}{15}\pi.$$

事实上，令 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$，我们有

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} x^2dxdydz &= \int_0^1 dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi} r^4\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi\\
&= -\frac{1}{5}\cdot 2\pi\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{4}{15}\pi.
\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS &= \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{15}\pi\left(2a_1+2a_2+2a_3+2a_4+2a_5+2a_6\right)\\
&= \frac{4}{5}\pi\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6\right).
\end{aligned}$$

□

第 5 课时 数学竞赛模拟试卷 2

例 5.1: 设数列 $\{a_n\}$ 由下列的条件定义

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$$

以及

$$\begin{vmatrix} 1 & a_n & a_{n-1} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-3} \end{vmatrix} = 1, n \geq 3.$$

求证:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

是存在的.

证: 证法一：由题意

$$\begin{vmatrix} 1 & a_n & a_{n-1} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_n - a_{n-1} & a_{n-1} - a_{n-2} \\ 0 & a_{n-1} - a_{n-2} & a_{n-2} - a_{n-3} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-3} \end{vmatrix} = 1.$$

因此

$$(a_n - a_{n-1})(a_{n-2} - a_{n-3}) = 1 + (a_{n-1} - a_{n-2})^2 \quad (n \geq 3).$$

计算其前几项可知:$1, 2, 3, 5, 10, 23$. 注意到他和斐波那契数列 F_n 有一定的相似性 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \cdots$.
因此我们猜测

$$a_n = F_{2n-2} + 2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}\right) + 2.$$

可用数归证得. 因此有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}\right) + 2}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right) + 2}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{4}{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

笔记: 事实上，本题涉及到斐波那契数列的一个重要的性质

$$(F_{n+1})^2 = F_n F_{n+2} + 1.$$

令 $n=2n$ 即可联系本题.

证法二：显然 a_n 是单调递增的，设

$$b_n=\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n+1}-a_n}.$$

由

$$(a_n-a_{n-1})(a_{n-2}-a_{n-3})>(a_{n-1}-a_{n-2})^2$$

即 $b_{n-2}>b_{n-1}$. 故 $\{b_n\}$ 是收敛的，利用 Stolz 公式得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}b_n$$

存在.

证法三：由

$$(a_n-a_{n-1})(a_{n-2}-a_{n-3})-(a_{n-1}-a_{n-2})^2=1.$$

令 $c_n=a_n-a_{n-1}$，则 $c_nc_{n-2}-c_{n-1}^2=1$. 只需证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_{n-1}}{c_n}$ 存在.

因为 $c_nc_{n-2}-c_{n-1}^2=1>0$，我们有 $\frac{c_n}{c_{n-1}}>\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}$，因此数列 $\left\{\frac{c_n}{c_{n-1}}\right\}$ 是单调递增的. 又

$$\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{1}{c_{n-1}c_{n-2}}+\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}.$$

而由 $c_1=1,c_2=1,c_3=2,c_4=5,c_5=13,c_6=34$ 知 $\frac{c_n}{c_{n-1}}>2$，所以 $\frac{c_n-c_{n-1}}{c_{n-1}}>1$，因此有 $c_n-c_{n-1}>c_{n-1}>1$，所以

$$\frac{c_n}{c_{n-1}}-\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}=\frac{1}{c_{n-1}c_{n-2}}<\frac{c_{n-1}-c_{n-2}}{c_{n-1}c_{n-2}}=\frac{1}{c_{n-2}}-\frac{1}{c_{n-1}}.$$

由此有

$$\frac{c_n}{c_{n-1}}<\frac{c_2}{c_1}+\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_{n-1}}=2-\frac{1}{c_{n-1}}<2.$$

因此根据单调有界定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n-1}}$ 存在，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}-a_{n-2}}$ 存在，由此知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 存在. □

例 5.2: 试求以三条直线 $L_1: x=y=z, L_2: y=x+1, z=x+2, L_3: y=x+2, z=x+1$ 为母线的圆柱面方程.

✎ 解: 柱面的母线方向为 $(1,1,1)$，过原点 O 作平面 π 与 $(1,1,1)$ 相垂直. 平面 π 与 L_1,L_2,L_3 三条母线依次交于点 $(0,0,0),(-1,0,1),(-1,1,0)$. 过此三点作一单位球面，其方程为

$$x^2+y^2+z^2+2x=0.$$

这样，柱面的准线方程可写为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2x=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$$

联立方程

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{1}=\frac{z-z_0}{1}=t \\ x_0+y_0+z_0=0 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2+2x_0=0 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} (x-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2+2(x-t)=0 \\ t=-\frac{1}{3}(x+y+z) \end{cases}.$$

消去参数 t，化简整理求得柱面方程为

$$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)+2x-y-z=0.$$

□

笔记: 设 Γ 是一条空间直线，l 是一个定方向. 过 Γ 上每一点作平行于 l 的直线，其所产生的曲面称为柱面.Γ 叫做柱面的准线，每一位置的动直线叫做柱面的母线，称 l 是柱面的方向.

假设 $l=(m,n,p)$,

$$\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases},$$

则以 Γ 为准线，以 l 为母线方向的柱面方程为

$$\begin{cases} F(x+mt,y+nt,z+pt)=0 \\ G(x+mt,y+nt,z+pt)=0 \end{cases}.$$

这里 t 是参数，消去参数 t 就是柱面方程.

事实上，设 $P(x,y,z)$ 是柱面上任意一点，过点 P 的母线 L 与准线 Γ 交于点 $Q(x',y',z')$，则 $\overrightarrow{PQ}\parallel l$. 于是 $\frac{x'-x}{m}=\frac{y'-y}{n}=\frac{z'-z}{p}=t$，这里 t 是参数，t 的值依赖于点 $P(x,y,z)$ 在柱面上的位置.

因为 $Q(x',y',z')\in\Gamma$，所以

$$\begin{cases} F(x',y',z')=0 \\ G(x',y',z')=0 \end{cases}.$$

在 $\frac{x'-x}{m}=\frac{y'-y}{n}=\frac{z'-z}{p}$ 中，独立方程只有两个. 如果取

$$\frac{x'-x}{m}=\frac{y'-y}{n},$$
$$\frac{y'-y}{n}=\frac{z'-z}{p},$$

那么，以上这四个方程中，将 x',y',z' 看成参数，从这四个方程中消去三个参数，所得到关于柱面的方程.

习题 5.1: **试求以**

$$\Gamma:\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3-1=0 \end{cases}$$

为准线，以直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 为母线的柱面方程.

例 5.3: 设 $\alpha > \beta > 0$，且 $f(x) = x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$，若 $0 < a < b < 1$，且 $f(a) = f(b)$，求证：$f'(a) + f'(b) < 0$.

☞ **证:** 由于 $f(a) = f(b), a^{\alpha}(1-a)^{\beta} = b^{\alpha}(1-b)^{\beta}$，简单计算有

$$f'(a) + f'(b) = \frac{\beta}{b} a^{\alpha}(1-a)^{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{b}{a}\right) - \frac{b}{1-a}\left(1+\frac{1-a}{1+b}\right)\right).$$

设 $r = \frac{\alpha}{\beta}, t = \frac{b}{a} > 1$，那么等式

$$a^{\alpha}(1-a)^{\beta} = b^{\alpha}(1-b)^{\beta}, \frac{1-a}{1-b} = t^{r}$$

且 $b = at$，故

$$a = \frac{t^{r}-1}{t^{r+1}-1}, b = \frac{t\left(t^{r}-1\right)}{t^{r+1}-1}.$$

代入得

$$f'(a) + f'(b) = -\frac{\beta a^{\alpha}(1-a)^{\beta}}{bt^{r-1}(t-1)}\left(t^{2r} - rt^{r+1} + rt^{r-1} - 1\right).$$

令

$$g(t) = t^{2r} - rt^{r+1} + rt^{r-1} - 1,$$

则

$$g'(t) = rt^{r-2}\left(2t^{r+1} - (r+1)t^{2} + r - 1\right) = rt^{r-2}h(t),$$

其中

$$h(t) = 2t^{r+1} - (r+1)t^{2} + r - 1, h'(t) = 2(r+1)\left(t^{r} - t\right) > 0, t > 1.$$

所以

$$f'(a) + f'(b) < 0.$$

□

例 5.4: 设 X 是二阶方阵，若有方阵 Y，使得 $XY - YX = X$，证明：$X^2 = 0$.

☞ **证:** 证法一：显然 $|X| = 0$，否则我们得到 $X\left(YX^{-1}\right) - YXX^{-1} = X\left(YX^{-1}\right) - \left(YX^{-1}\right)X = E$，因此有 $n = \mathrm{Tr}(\mathrm{E}) = \mathrm{Tr}\left[\mathrm{X}\left(\mathrm{YX}^{-1}\right) - \left(\mathrm{YX}^{-1}\right)\mathrm{X}\right] = \mathrm{Tr}\left[\mathrm{X}\left(\mathrm{YX}^{-1}\right)\right] - \mathrm{Tr}\left[\left(\mathrm{YX}^{-1}\right)\mathrm{X}\right] = 0$ 产生矛盾.

设 $X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}(y_1, y_2)$，则有 $X^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}(y_1, y_2)\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}(y_1, y_2) = cX$，又

$$0 = Tr(XY - YX) = Tr(X) = y_1 + xy_2 = c.$$

故

$$X^2 = cX = 0.$$

证法二：$\mathrm{TrX} = \mathrm{Tr}(\mathrm{XY} - \mathrm{YX}) = 0$，所以可设

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & a^2+bc \end{pmatrix}$$

另外 $X^2 = X^2Y - XYX, X^2 = XYX - YX^2$，即 $2X^2 = X^2Y - YX^2$，所以 $\mathrm{TrX}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{X}^2\mathrm{Y} - \mathrm{YX}^2) = 0$，即 $2(a^2+bc) = 0$，从而得知 $X^2 = 0$. □

例 5.5: 设正交矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$，其中 $a_{i,j}\in\mathbb{R}$，满足 $(\mathrm{A})=1$，求

$$(1-\mathrm{TrA})^2+\sum_{1\le i\le j\le 3}\left(a_{ij}-a_{ji}\right)^2$$

的取值范围.

✎ **解:** 首先 A 为正交阵，且 $\det(\mathrm{A})=1$，所以 A 的特征值为 $1,1,1$ 或 $1,-1,-1$. 也就是说 $\mathrm{TrA}=3$ 或 -1，我们有 $\mathrm{TrA}^2=3$，所以 $1-\mathrm{TrA}^2=4$.

另外

$$\begin{aligned}&\sum_{1\le i\le j\le 3}\left(a_{ij}-a_{ji}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le 3}\left(a_{ij}-a_{ji}\right)^2=\frac{1}{2}Tr\left[\left(A-A'\right)\left(A-A'\right)'\right]\\&=-\frac{1}{2}Tr\left[\left(A-A'\right)^2\right]=-\frac{1}{2}\left[Tr\left(A^2\right)+Tr\left(\left(A'\right)^2\right)-Tr\left(AA'\right)-Tr\left(A'A\right)\right]\\&=3-Tr\left(A^2\right)=0.\end{aligned}$$

综上所述题中式子的取值范围为 $\{4\}$. □

例 5.6: 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上四次可微，且 $f^{(4)}(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并且存在 $r>1$，使得

$$\int_0^1 f(x)\,dx+\left(r^2-1\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=r^3\int_{\frac{r-1}{2r}}^{\frac{r+1}{2r}}f(x)\,dx.$$

证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f^{(4)}(\xi)=0$.

☞ **证:** 令

$$F(x)=\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x}f(t)\,dt-\left(x-x^3\right)f\left(\frac{1}{2}\right)-x^3\int_0^1 f(t)\,dt.$$

由 $F(0)=F\left(\frac{1}{r}\right)=F(1)=0$ 和 Rolle 中值定理可知 $\exists\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$. 又

$$F'(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)+\left(3x^2-1\right)f\left(\frac{1}{2}\right)-3x^2\int_0^1 f(t)\,dt.$$

我们有 $F'(0)=0$. 由 Rolle 定理可知，$\exists\xi_3,\xi_4\in(0,1)$ 使得 $F''(\xi_3)=F''(\xi_4)=0$. 而

$$F''(x)=\frac{1}{4}f'\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{4}f'\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)+6xf\left(\frac{1}{2}\right)-6x\int_0^1 f(t)\,dt.$$

我们有 $F''(0)=0$. 由 Rolle 定理可知，$\exists\xi_5,\xi_6\in(0,1)$ 使得 $F'''(\xi_5)=F'''(\xi_6)=0$. 同时有 $\xi_7\in(0,1)$ 使得 $F^{(4)}(\xi_7)=0$.

$$\begin{aligned}&F'''(x)=\frac{1}{8}f''\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{8}f''\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)+6f\left(\frac{1}{2}\right)-6\int_0^1 f(t)\,dt\\&F^{(4)}(x)=\frac{1}{16}f'''\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{16}f'''\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right).\end{aligned}$$

因此有 $F^{(4)}(0)=0$. 故 $\exists\xi_8\in(0,1)$ 使得 $F^{(5)}(\xi_8)=0$. 即

$$F^{(5)}(\xi_8)=\frac{1}{32}f^{(4)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\xi_8\right)+\frac{1}{32}f^{(4)}(x)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\xi_8\right)=0.$$

由此知 $f^{(4)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\xi_8\right)$，$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\xi_8\right)$ 两者不同号，最后由介值定理，我们给出 $\exists\xi\in\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\xi_8,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\xi_8\right]$ 使得

$$f^{(4)}\left(\xi\right)=0.$$

□

笔记: *Fejer* 核定义：设

$$A_0\left(x\right)=\frac{1}{2},A_m\left(x\right)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\cos kx,m\geq 1.$$

将 $A_m(x)$ 的平均值记为

$$K_n\left(x\right)=\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}A_m\left(x\right).$$

Properties:

$$K_n\left(x\right)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cos kx.$$

☞ **证:**

$$\begin{aligned}K_n\left(x\right)&=\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\cos kx\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=k}^{n}\cos kx\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(n+1-k\right)\cos kx.\end{aligned}$$

□

Properties:

$$K_n(x)\geq 0.$$

☞ **证:** 注意到

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{x}{2}\cos kx.$$

累加即

$$\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\cos kx\right).$$

亦即

$$A_m\left(x\right)=\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

所以

$$K_n\left(x\right)=\frac{1}{2\left(n+1\right)\sin\frac{x}{2}}\sum_{m=0}^{n}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x.$$

注意到

$$\cos mx-\cos\left(m+1\right)x=2\sin x\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x.$$

所以

$$K_n\left(x\right)=\frac{1-\cos\left(n+1\right)x}{4\left(n+1\right)\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\left(n+1\right)}\left(\frac{\sin\left(n+1\right)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\geq 0.$$

□

例 5.7: 设 $f(x)$ 是 $(0,2\pi)$ 上的非负可积函数，有 Fourier 级数

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \cos(n_k x),$$

其中 n_k 是正整数，当 $k \neq l$ 时，n_k 不整除 n_l，证明：$|a_{n_k}| \leq a_0, k \geq 0$.

☞ **证:** 设 $K_n(x)$ 是 Fejer 核，它是如下的三角多项式

$$K_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kx.$$

利用我们已有的知识可以证明

$$K_n(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

由于 f 是非负的，故有

$$0 \leq \int_0^{2\pi} f(x) K_n(n_k x)\, dx = \pi \left(a_0 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) a_{n_k}\right).$$

（由于题设 n_k 的性质，上述积分只能产生一个含 a_{n_k} 项）令 n 趋于无穷大，则有

$$a_{n_k} \leq a_0.$$

又因为

$$K_n(x-\pi) = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cos x + \cdots$$

所以

$$0 \leq \int_0^{2\pi} f(x) K_n(n_k x - \pi)\, dx = \pi \left(a_0 - \left(1 - \frac{n_k}{n+1}\right) a_{n_k}\right).$$

令 $n \to \infty$，我们有

$$a_{n_k} \leq -a_0.$$

综上：

$$|a_{n_k}| \leq -a_0.$$

□

第 6 课时 多元函数积分学 2

习题 6.1: 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_0=1$，且

$$c_n=c_0c_{n-1}+c_1c_{n-2}+\cdots+c_{n-1}c_0.$$

若

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{2^{4n}(2An+3)}$$

的值可以写成 $u+v+w$ 形式，其中 u 是正整数，v 是无理数，w 是超越数，求 $\sqrt[3]{u}$.

证: 设 $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots$,$F(x)=xf(x)=c_0x+c_1x^2+\cdots+c_nx^{n+1}+\cdots$, 则有 $(F(x))^2=c_0^2x^2+(c_0c_1+c_1c_0)x^3+\cdots+(c_0c_{n-1}+c_1c_{n-2}+\cdots+c_{n-1}c_0)x^{n-1}+\cdots=F(x)-c_0x=F(x)-x$, 所以 $F(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$. 因为

$$\sqrt{1-4x}=1+C_{1/2}^{1}(-4x)+C_{1/2}^{2}(-4x)^2+\cdots+C_{1/2}^{n+1}(-4x)^{n+1}+\cdots,$$

所以 $F(x)$ 的 Taylor 级数展式中的 a_n 为

$$a_n=-\frac{1}{2}C_{1/2}^{n+1}(-4)^{n+1}=\frac{C_{2n}^{n}}{n+1}.$$

事实上, 我们知道 $c_0=1$, 由递推

$$c_n=c_0c_{n-1}+c_1c_{n-2}+\cdots+c_{n-1}c_0$$

得知 c_n 为 Catalan 数, 其表达式为

$$c_n=\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}.$$

所以问题变成

$$S=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n}\,(2n+3)\,n!\,(n+1)!}.$$

而我们知道

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k},\ \frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}x^{k}.$$

由此可知

$$\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t}}dt=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}k!\,(k+1)!}x^{k+1}=2\left(1-\sqrt{1-x}\right)$$

$$2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)=x^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}k!\,(k+1)!}x^{2k+2}$$

$$2\int_0^x\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)dt=\frac{1}{3}x^3+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}k!\,(k+1)!\,(2k+3)}x^{2k+3}$$

$$\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n}\,(2n+3)\,n!\,(n+1)!}=16\int_0^{1/2}\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)dt=8-2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi.$$

□

例 6.1: 设 $D=\left\{(x,y)\left|x^4+y^4\le 0=1\right.\right\}$, 计算 $I=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$.

✎ **解:** 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 此时 D 为 $0\le\theta\le 2\pi$, 以及 $0\le r\le 1/\sqrt[4]{\cos^4\theta+\sin^4\theta}$, 故可得

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1/\sqrt[4]{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}r^2rdr=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}\\
&=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\tan^2\theta}{1+\tan^4\theta}d\tan\theta\left(\text{令}\tan^4\theta=t\right)\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\left(1+\sqrt{t}\right)t^{-3/4}}{1+t}dt=\frac{1}{4}\left[B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)+B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

□

例 6.2: 设 D 是由 $x=0,y=0,x+y=1$ 所围成的区域，求积分 $I=\iint\limits_D\sqrt{\frac{xy}{x+y}}dxdy$.

✎ **解:** 作变换 $x=r\cos^2\theta, y=r\sin^2\theta$, 则区域 D 内部变换成为 $D=\{(\theta,r):0<\theta<\pi/2, 0<r<1\}$, 且 Jacobi 行列式 $J=2r\sin\theta\cos\theta$.

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_G\sqrt{r}\cos\theta\sin\theta\cdot 2r\cos\theta\sin\theta d\theta dr\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\cdot\int_0^1 r^{\frac{3}{2}}dr=\frac{2}{5}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\\
&=\frac{2}{5}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{1}{20}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{20}.
\end{aligned}$$

□

例 6.3: 设 $f\in C^{(1)}([0,a])$, 计算 $I=\int_0^a dx\int_0^x f'(y)/\sqrt{(a-x)(x-y)}dy$.

✎ **解:** 改写原积分为 $I=\int_0^a f'(y)\,dy\int_y^a 1/\left[\left(\frac{a-y}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+y}{2}\right)^2\right]dx$, 并令 $x=\frac{a+y}{2}+\frac{a-y}{2}\sin t$, 则可得

$$I=\int_0^a f'(y)\,dy\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{a-y}{2}\cos t/\frac{a-y}{2}\cos t\right)dt=\pi\left[f(a)-f(0)\right].$$

□

例 6.4: 求 $\int_0^\infty\int_y^\infty\frac{(x-y)^2\ln\frac{x+y}{x-y}}{xy\sinh(x+y)}dxdy$.

✎ **解:** 令 $u=x+y, v=\frac{x-y}{x+y}$, 得到

$$I=\int_{v=0}^1\int_{u=0}^\infty\frac{-(vu)^2\ln v}{\frac{(u^2(1-v^2))}{4}\sinh u}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv\right|=\left(\int_0^1\frac{-2v^2\ln v}{1-v^2}dv\right)\left(\int_0^\infty\frac{u}{\sinh u}du\right).$$

而

$$\int_0^1\frac{-2v^2\ln v}{1-v^2}dv=2\int_0^1\ln vdv-2\int_0^1\frac{\ln v}{1-v^2}dv=-2-2\int_0^1\frac{\ln v}{1-v^2}dv.$$

对于第二个, 令 $t=e^{-u}$, 则

$$\int_0^\infty\frac{u}{\sinh u}du=-2\int_1^0\frac{\ln t}{t^{-1}-t}\left(-\frac{1}{t}\right)dt=-2\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}dt.$$

又

$$
\begin{aligned}
2\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}dt &= \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}dt + \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx + [\ln t \ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt \\
&= -\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12} = -\frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}
$$

由此得

$$
I = \left(-2 + \frac{\pi^2}{4}\right)\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2(\pi^2-8)}{16}.
$$

□

例 6.5: 设 $\Omega: x,y,z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 1$, 计算 $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{\frac{1-x^2+y^2+z^2}{1+x^2+y^2+z^2}}dxdydz$.

✎ 解: 易知应采用球坐标变换, 我们有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r^2 dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{(1-r^2)\, r^2}{\sqrt{1-r^4}}dr \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^1 \frac{r^2dr}{\sqrt{1-r^4}} - \int_0^1 \frac{r^4dr}{\sqrt{1-r^4}}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\left(\frac{4\pi^2}{\Gamma^2(1/4)} - \frac{1}{6}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\right).
\end{aligned}
$$

□

例 6.6: 设 Ω 是由曲面 $z=(x^2+y^2)/m, z=(x^2+y^2)/n; xy=a^2, xy=b^2; y=\alpha x, y=\beta x (0<a<b, 0<\alpha<\beta, 0<m<n;$ 第一象限) 围成的立体. 计算

$$
I = \iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz.
$$

✎ 解: 作变换 $u=xy, y=ux, z=z$, 即 $x=\sqrt{\frac{u}{v}}, y=\sqrt{uv}, z=z, (u,v,z)\in\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}=\left\{(u,v,z): \frac{u(v+v^{-1})}{n} \leq z \leq \frac{u(v+v^{-1})}{m}, a^2<u<b^2, \alpha<v<\beta\right\}$.

此时 $J=1/2v>0$, 从而可得

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} udu \int_\alpha^\beta \frac{dv}{v}\int_{u(v+v^{-1})/n}^{u(v+v^{-1})/m} zdz \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\int_{a^2}^{b^2} u^3du \int_\alpha^\beta \left(v+\frac{1}{v}\right)^2\frac{dv}{v} \\
&= \frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right].
\end{aligned}
$$

□

例 6.7: 设 $f(u)$ 有连续的二阶导数, $g(x,y,z) = f\left(\frac{x}{z}\right) + f\left(\frac{y}{z}\right) \mp z\left[f\left(\frac{z}{x}\right) + f\left(\frac{z}{y}\right)\right]$.

(1) 求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - z^2\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$;

(2) 求 $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - z^2\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right)dxdydz$, 其中 Ω 由平面 $z=a_ix, z=b_iy$ 和曲面 $xyz=c_i i=1,2 (a_1<a_2, b_1<b_2, c_1<c_2)$ 围成.

✎ 解:

(1) 因为

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1}{z}f\left(\frac{x}{z}\right)\pm\frac{z^2}{x^2}f\left(\frac{z}{x}\right),x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{x^2}{z^2}f''\left(\frac{x}{z}\right)\mp\frac{2z^2}{x}f'\left(\frac{z}{x}\right)\mp\frac{z^3}{x^2}f''\left(\frac{z}{x}\right),$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)\pm\frac{z^2}{y^2}f\left(\frac{z}{y}\right),y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{y^2}{z^2}f''\left(\frac{y}{z}\right)\mp\frac{2z^2}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)\mp\frac{z^3}{y^2}f''\left(\frac{z}{y}\right),$$
$$\frac{\partial g}{\partial z}=-\frac{x}{z^2}f'\left(\frac{x}{z}\right)-\frac{y}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)\mp f\left(\frac{z}{x}\right)\mp f\left(\frac{z}{y}\right)\mp\frac{z}{x}f\left(\frac{z}{x}\right)\mp\frac{z}{y}f\left(\frac{z}{y}\right),$$
$$z^2\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}=\frac{2x}{z}f'\left(\frac{x}{z}\right)+\frac{x^2}{z^2}f''\left(\frac{x}{z}\right)+\frac{2y}{z}f'\left(\frac{y}{z}\right)+\frac{y^2}{z^2}f''\left(\frac{y}{z}\right)$$
$$\mp\frac{2z^2}{x}f'\left(\frac{z}{x}\right)\mp\frac{2z^2}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)\mp\frac{z^3}{x^2}f''\left(\frac{z}{x}\right)\mp\frac{z^3}{y^2}f''\left(\frac{z}{y}\right),$$

所以

$$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}-z^2\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}=-\frac{2x}{z}f'\left(\frac{x}{z}\right)-\frac{2y}{z}f'\left(\frac{y}{z}\right).$$

(2) 在积分式中令 $u^3=\frac{z}{x},v^3=\frac{z}{y},w^3=xyz$, 即有 $x=\frac{vw}{u^2},y=\frac{uw}{v^2},z=uvw$, 则有

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}-\frac{2vw}{u^3}&\frac{w}{u^2}&\frac{v}{u^2}\\\frac{w}{v^2}&-\frac{2uw}{v^3}&\frac{u}{v^2}\\vw&uw&uv\end{vmatrix}=\frac{w^2}{u^2v^2}\begin{vmatrix}-\frac{2v}{u}&1&v\\1&-\frac{2u}{v}&u\\v&u&uv\end{vmatrix}=\frac{w^2}{u^2v^2}\cdot 9uv=\frac{9w^2}{uv}.$$

其中

$$\begin{aligned}\Omega&=\left\{(x,y,z)\middle|a_1<\frac{z}{x}<a_2,b_1<\frac{z}{y}<b_2,c_1<xyz<c_2\right\}\\&=\left\{(u,v,w)\middle|a_1<u^3<a_2,b_1<v^3<b_2,c_1<w^3<c_2\right\}\\&=\left\{(u,v,w)\middle|\sqrt[3]{a_1}<u<\sqrt[3]{a_2},\sqrt[3]{b_1}<v^3<\sqrt[3]{b_2},\sqrt[3]{c_1}<w<\sqrt[3]{c_2}\right\}.\end{aligned}$$

由此得

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}-z^2\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}\left(-\frac{2x}{z}f'\left(\frac{x}{z}\right)-\frac{2y}{z}f'\left(\frac{y}{z}\right)\right)dxdydz$$
$$=2\int_{\sqrt[3]{a_1}}^{\sqrt[3]{a_2}}du\int_{\sqrt[3]{b_1}}^{\sqrt[3]{b_2}}dv\int_{\sqrt[3]{c_1}}^{\sqrt[3]{c_2}}\left[-\frac{1}{u^3}f'\left(\frac{1}{u^3}\right)-\frac{1}{v^3}f'\left(\frac{1}{v^3}\right)\right]\frac{9w^2}{uv}dw$$
$$=2\left[\int_{\sqrt[3]{a_1}}^{\sqrt[3]{a_2}}\left(-\frac{3}{u^4}\right)f'\left(\frac{1}{u^3}\right)du\int_{\sqrt[3]{b_1}}^{\sqrt[3]{b_2}}dv+\int_{\sqrt[3]{a_1}}^{\sqrt[3]{a_2}}du\int_{\sqrt[3]{b_1}}^{\sqrt[3]{b_2}}\left(-\frac{3}{v^4}\right)f'\left(\frac{1}{v^3}\right)dv\right]\int_{\sqrt[3]{c_1}}^{\sqrt[3]{c_2}}3w^2dw$$
$$=2\left[\int_{\sqrt[3]{a_1}}^{\sqrt[3]{a_2}}f'\left(\frac{1}{u^3}\right)d\left(\frac{1}{u^3}\right)\int_{\sqrt[3]{b_1}}^{\sqrt[3]{b_2}}dv+\int_{\sqrt[3]{a_1}}^{\sqrt[3]{a_2}}du\int_{\sqrt[3]{b_1}}^{\sqrt[3]{b_2}}f'\left(\frac{1}{v^3}\right)d\left(\frac{1}{v^3}\right)\right]\int_{\sqrt[3]{c_1}}^{\sqrt[3]{c_2}}d\left(w^3\right)$$
$$=2\left\{\left[f\left(\frac{1}{a_2}\right)-f\left(\frac{1}{a_1}\right)\right]\left(\sqrt[3]{b_2}-\sqrt[3]{b_1}\right)+\left(\sqrt[3]{a_2}-\sqrt[3]{a_1}\right)\left[f\left(\frac{1}{b_2}\right)-f\left(\frac{1}{b_1}\right)\right]\right\}(c_2-c_1).$$

□

例 6.8: 设 $h=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}>0$,$f(x)$ 在 $[-h,h]$ 上连续, 证明

$$\iiint\limits_{\Omega}f(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,dxdydz=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-\zeta^2\right)f(h\zeta)\,d\zeta,$$

其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

☞ **证:** 选 ζ 轴方向为平面 $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ 的单位法向量, 再选取 ξ,η 轴为此平面上的两垂直轴. 构造正交变换

$$\begin{cases} \xi = a_1x+b_1y+c_1z, \\ \eta = a_2x+b_2y+c_2z, \qquad |J|=1. \\ \eta = \frac{1}{h}(\alpha x+\beta y+\gamma z), \end{cases}$$

变换 T 把 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leq 1$ 变为 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, 于是有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leq 1} f(h\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta$$
$$= \int_{-1}^{1} d\zeta \iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leq 1-\zeta^2} f(h\zeta)\,d\xi d\eta = \pi\int_{-1}^{1}(1-\zeta^2)\,f(h\zeta)\,d\zeta.$$

□

定理 6.1

对 n 维空间我们也有球坐标变换:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1, \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\cos\theta_{n-1}, \\ x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-1} \end{cases},$$

其中 $0<r<+\infty, 0<\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-2}<\pi, 0<\theta_{n-1}<2\pi$, 其变换 T 的 Jacobi 行列式为 $J=J(r,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1})=r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}$.

例 6.9: 解答下列问题:

(1) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^4$ 中立体:$x,y,z,t\geq 0, x^2+y^2+z^2+t^2\leq 1$, 试求

$$I = \iiiint\limits_{\Omega}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-t^2}{1+x^2+y^2+z^2+t^2}}dxdydzdt.$$

(2) 求 $\mathbb{R}^4$ 中球体 $\Omega: x^2+y^2+z^2+t^2\leq a^2$ 的体积 V.

(3) 设 $\Omega: x^2+y^2+u^2+v^2\leq 1$, 求 $I=\iiiint\limits_{\Omega} e^{x^2+y^2-u^2-v^2}dxdydudv$.

✎ **解:**

(1) 采用四维极坐标变换:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta\cos\psi, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta\sin\psi, \\ z = r\sin\varphi\cos\theta, \\ t = r\cos\varphi \end{cases} \quad \left(0 \le \theta, \varphi, \psi \le \frac{\pi}{2}\right),$$

此时, 易知 $J = r^3\sin^2\varphi\sin\theta$. 从而可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r^3 \sin^2\varphi\sin\theta dr \\ &= \frac{\pi^2}{16}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} dr \underline{\underline{r^2 = \sin t}} \frac{\pi^2}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t - \sin^2 t\right) dt = \frac{\pi^2}{16}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

(2) 采用坐标变换:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\sin\theta\cos\psi, & 0 \le \varphi \le \pi, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta\sin\psi, & 0 \le \theta \le \pi, \\ z = r\sin\varphi\cos\theta, & 0 \le \psi \le 2\pi, \\ t = r\cos\varphi, & 0 \le r \le a. \end{cases}$$

易知 $|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z,t)}{\partial(r,\theta,\varphi,\psi)}\right| = r^3\sin^2\varphi\sin\theta$. 从而可得

$$V = \iiiint\limits_{\Omega} dxdydzdt = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a r^3\sin^2\varphi\sin\theta dr = \frac{\pi^2 a^4}{2}.$$

(3) 对积分 $I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} e^{x^2+y^2}\left\{\iint\limits_{u^2+v^2\le 1-x^2-y^2} e^{-\left(u^2+v^2\right)}dudv\right\}dxdy$ 采用极坐标, 易知 $I = \pi^2(\cosh - 1)$.

□

例 6.10: 求

$$I = \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} e^{-(x-y)^2}\sin^2\left(x^2+y^2\right) dydx.$$

✎ **解:** 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, r > 0, \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 则有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r\frac{r^2\cos 2\theta}{r^4} e^{-r^2(1-\sin 2\theta)}\sin^2\left(r^2\right) drd\theta = \int_0^{\infty}\frac{e^{-r^2}}{2r^3}\sin^2\left(r^2\right)\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{r^2\sin 2\theta} 2r^2\cos 2\theta d\theta\right) dr \\ &= \int_0^{\infty}\frac{e^{-r^2}}{2r^3}\sin^2\left(r^2\right)\left(1 - e^{r^2}\right) dr = \int_0^{\infty}\frac{\sin^2\left(r^2\right)}{2r^3}\left(e^{-r^2} - 1\right) dr \underline{\underline{x = r^2}} \int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{4x^2}\left(e^{-x} - 1\right) dx. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}e^{-x}dx = \int_0^{\infty}\frac{1-\cos 2x}{2}\int_0^{\infty} ye^{-x(y+1)}dydx = \int_0^{\infty} y\int_0^{\infty}\frac{1-\cos 2x}{2}e^{-x(y+1)}dxdy \\ &= \int_0^{\infty}\frac{2y}{4(y+1)+(y+1)^3}dy = \int_1^{\infty}\frac{2(y-1)}{4y+y^3}dy = \int_1^{\infty}\frac{2}{4+y^2}dy - \int_1^{\infty}\frac{2}{y\left(4+y^2\right)}dy = \arctan 2 - \frac{\ln 5}{4}. \end{aligned}$$

因此有

$$I=\int_0^{\infty}\int_x^{\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}e^{-(x-y)^2}\sin^2\left(x^2+y^2\right)dydx$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}e^{-x}dx-\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\arctan 2}{4}-\frac{\ln 5}{16}-\frac{\pi}{8}.$$

□

例 6.11: 若 $f(x)\geq 0, x\geq 0$, 且 $\int_0^{\infty}f(x)\,dx=1$, 求 $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x+y)}{x+y}\,dxdy$.

✎ **解:** 设 $x+y=u, x-y=v$, 则

$$\begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2}\end{cases}\Rightarrow |J|=\left|\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right|=\frac{1}{2}.$$

又 $\frac{u+v}{2}\geq 0, \frac{u-v}{2}\geq 0\Rightarrow -u\leq v\leq u$. 从而有

$$I=\int_0^{\infty}\int_{-u}^{u}\frac{1}{2}\frac{f(u)}{u}dvdu=\int_0^{\infty}f(u)\,du=1.$$

□

例 6.12: 求证

$$\int_0^1\int_0^1\left\{\frac{x}{y}\right\}^2dxdy=\frac{\ln(2\pi)}{2}-\frac{1}{3}-\frac{\gamma}{2},$$

其中 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分,γ 表示欧拉常数.

✎ **解:** 令 $x=u, \frac{x}{y}=v$, 则 $v>u, 0<u<1, \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{u}{v^2}$.

$$I=\int_0^1\int_u^{\infty}\{v\}^2\frac{u}{v^2}dvdu=\int_0^1\left(\int_u^1\{v\}^2\frac{u}{v^2}dv+\int_1^{\infty}\{v\}^2\frac{u}{v^2}dv\right)du$$
$$=\int_0^1\left(\int_u^1 v^2\cdot\frac{u}{v^2}dv\right)du+\int_0^1\left(\int_1^{\infty}\{v\}^2\frac{u}{v^2}dv\right)du.$$

又

$$\int_0^1\left(\int_u^1 v^2\cdot\frac{u}{v^2}dv\right)du=\int_0^1\left(\int_u^1 udv\right)du=\int_0^1 u(1-u)\,du=\frac{1}{6},$$
$$\int_0^1\left(\int_1^{\infty}\{v\}^2\frac{u}{v^2}dv\right)du=\int_0^1 u\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\{v\}^2\frac{1}{v^2}dv\right)du$$
$$=\int_0^1 udu\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{(v-n)^2}{v^2}dv=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{v^2-2vn+n^2}{v^2}dv$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-2n\ln\frac{n+1}{n}+\frac{n}{n+1}\right).$$

由于

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}\left(1-2n\ln\frac{n+1}{n}+\frac{n}{n+1}\right)=2N-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}-2\sum_{n=1}^{N}\ln\frac{(n+1)^n}{n^n}\\
&=2N-(\ln(N+1)-1+\gamma_N)-2\ln\frac{(N+1)^N}{N!}\\
&\approx 2N-(\ln(N+1)-1+\gamma_N)-2\ln\frac{(N+1)^N e^N}{\sqrt{2\pi N}N^N}\\
&=1+2N-\ln(N+1)-\gamma_N-2\left(-\frac{1}{2}\ln(2\pi N)+N+\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)^N\right)\\
&=-1+\ln(2\pi)-\ln(N+1)-\gamma_N+\ln N=\ln(2\pi)-1-\gamma.
\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-2n\ln\frac{n+1}{n}+\frac{n}{n+1}\right)=\frac{\ln(2\pi)}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}.$$

故

$$\int_0^1\int_0^1\left\{\frac{x}{y}\right\}^2dxdy=\frac{\ln(2\pi)}{2}-\frac{1}{3}-\frac{\gamma}{2}.$$

□

第 7 课时 多元函数积分学 3

定义 7.1

设函数 $f(x,y)$ 定义在二维光滑曲线上,

(1) 若 $f(x,y)$ 满足关系式 $f(-x,y)=f(x,y)$ 或 $f(x,-y)=f(x,y)$, 则称 $f(x,y)$ 为关于 x 或 y 的偶函数;

(2) 若 $f(x,y)$ 满足关系式 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 或 $f(x,-y)=-f(x,y)$, 则称 $f(x,y)$ 为关于 x 或 y 的奇函数.

定义 7.2

设函数 $f(x,y,z)$ 定义在三维光滑曲线上,

(1) 若 $f(x,y,z)$ 满足关系式 $f(-x,y,z)=f(x,y,z)$ 或 $f(x,-y,z)=f(x,y,z)$ 或 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$, 则称 $f(x,y,z)$ 为关于 x 或 y 或 z 的偶函数;

(2) 若 $f(x,y,z)$ 满足关系式 $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$ 或 $f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$ 或 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$, 则称 $f(x,y,z)$ 为关于 x 或 y 或 z 的奇函数.

定理 7.1

设函数 $f(x,y)$ 在二维光滑 (或分段光滑) 曲线 L 上可积, 且曲线 L 关于 ox(或 oy) 轴对称, 则:

(1) 当 $f(x,y)$ 是 y(或 x) 的偶函数时,$\int_L f(x,y)\,ds=2\int_{L_1} f(x,y)\,ds$(其中 L_1 是 L 位于对称轴一侧的部分);

(2) 当 $f(x,y)$ 是 y(或 x) 的奇函数时,$\int_L f(x,y)\,ds=0$.

定理 7.2

关于坐标的空间曲线积分, 有奇偶对称性.
奇偶对称性: 若 Γ 关于 xOy 面对称, 则

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)\,dz = \begin{cases} 2\int_{\Gamma_1} P(x,y,z)\,dz, & \text{当}P(x,y,z)\text{关于}z\text{为偶函数} \\ 0, & \text{当}P(x,y,z)\text{关于}z\text{为奇函数} \end{cases}$$

其中 Γ_1 为 Γ 在 xOy 面上方的部分.
若 Γ 关于 yOz 面对称, 则

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)\,dx = \begin{cases} 2\int_{\Gamma_2} P(x,y,z)\,dx, & \text{当}P(x,y,z)\text{关于}x\text{为偶函数} \\ 0, & \text{当}P(x,y,z)\text{关于}x\text{为奇函数} \end{cases}$$

其中 Γ_2 为 Γ 在 yOz 面上方的部分.

定理 7.3

曲面积分的对称性

(1) 关于面积的曲面积分
奇偶对称性: 若 Σ 关于 xOy 面对称, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dz = \begin{cases} 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,dS, & \text{当}f(x,y,z)\text{为}z\text{的偶函数,} \\ 0, & \text{当}f(x,y,z)\text{为}z\text{的奇函数.} \end{cases}$$

(2) 关于坐标的曲面积分
奇偶对称性: 若 Σ 关于 yOz 面对称, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz = \begin{cases} 2\iint\limits_{\Sigma_1} P(x,y,z)\,dydz, & \text{当}P(x,y,z)\text{为}x\text{的偶函数,} \\ 0, & \text{当}P(x,y,z)\text{为}x\text{的奇函数.} \end{cases}$$

对于 $\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\,dzdx$ 与 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy$ 有类似结论.

例 7.1: 如图一, 设曲线 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线, 试求 $\oint_{\Gamma}(x+y^2)\,dl$.

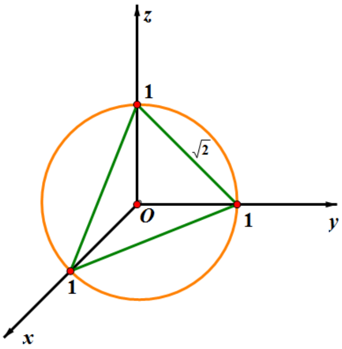


图 7.1: 一

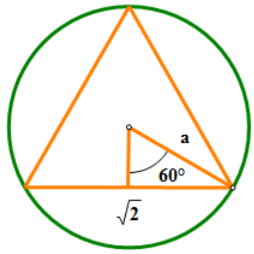


图 7.2: 二

✎ 解: 由轮换对称性

$$\begin{aligned}I &= \oint_\Gamma \left(x+y^2\right) dl = \oint_\Gamma x dl + \oint_\Gamma y^2 dl \\ &= \frac{1}{3}\oint_\Gamma (x+y+z)\, dl + \frac{1}{3}\oint_\Gamma \left(x^2+y^2+z^2\right) dl \\ &= \frac{1}{3}\oint_\Gamma dl + \frac{1}{3}\oint_\Gamma dl = \frac{2}{3}\oint_\Gamma dl.\end{aligned}$$

Γ 是一个圆, 其内接正三角形的边长为 $\sqrt{2}$. 如图二, 可求得 Γ 的半径为

$$a = \frac{\sqrt{2}/2}{\sin 60^\circ} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

故

$$I = \frac{2}{3} \times 2\pi a = \frac{4\sqrt{6}}{9}\pi.$$

□

例 7.2: 设曲线 $C: y = \sin x, x \in [0, \pi]$, 试证

$$\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2 \le \int_C x dl \le \frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2.$$

☞ 证:

$$\begin{aligned}\int_C x dl &= \int_0^\pi x\sqrt{1+\cos^2 x}dx \\ &\underline{\underline{令 t=\pi-x}} \int_\pi^0 (\pi - t)\sqrt{1+\cos^2 t}\,(-dt) \\ &= \pi\int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 t}dt - \int_0^\pi t\sqrt{1+\cos^2 t}dt\end{aligned}$$

解得

$$\int_C x dl = \int_0^\pi x\sqrt{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}dx.$$

令 $a = \sqrt{2}+\sin x, b = \sqrt{2}-\sin x$, 由

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a+b)$$

有
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\cos^2 x\right)\le\sqrt{1+\cos^2 x}\le\sqrt{2},$$
所以
$$\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\pi\left(1+\cos^2 x\right)dx\le\int_0^\pi\sqrt{1+\cos^2 x}dx\le\int_0^\pi\sqrt{2}dx=\sqrt{2}\pi.$$
故
$$\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2\le\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\sqrt{1+\cos^2 x}dx=\int_C xdl\le\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2.$$

□

例 7.3: 试证明: 在椭圆 $L: x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的离心率 e 的值较小时,L 的长度 s 有近似式 $s=\pi(a+b)+\pi ae^4/32$.

☞ **证:** 将 L 用参数式表示为 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$, 则知
$$\begin{aligned}s&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}d\theta\\&=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{e^2\cos^2\theta}{2}-\frac{e^4\cos^4\theta}{2\cdot 4}-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\cos^{2n}\theta-\cdots\right)d\theta.\end{aligned}$$
记上述级数的通项为 $u_n(\theta)$, 易得
$$|u_n(\theta)|\le\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n},\left|\frac{u_n(\theta)}{u_{n+1}(\theta)}\right|=\frac{2(n+1)}{2n-1}\frac{1}{e^2}\to\frac{1}{e^2}<1\,(n\to\infty).$$
依据 M 判别法, 该级数一致收敛, 故可进行逐项积分运算:
$$s=4a\left(\frac{\pi}{2}-\frac{e^2}{2}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{e^4}{8}\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\frac{\pi}{2}-\cdots\right)=2\pi a\left(1-\frac{e^2}{4}-\frac{3e^4}{64}-\cdots\right).$$
又由 $b=a\sqrt{1-e^2}=a(1-e^2/2-e^4/8-\cdots)$, 可知
$$\pi(a+b)=2\pi a(1-e^2/4-e^4/16-\cdots).$$
从而我们有
$$a-\pi(a+b)=2\pi a\left(\frac{1}{16}-\frac{3}{64}\right)e^4+\cdots=\frac{\pi}{32}ae^4+o\left(e^4\right)\,(e\to 0^+).$$

□

例 7.4: 设 $L: x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}(a>0), I=\int_L(x^{4/3}+y^{4/3})ds$.

✎ **解:** 作替换:$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t(0\le t\le 2\pi)$, 则 $ds=3a|\sin t\cos t|dt$. 可知
$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}3a^{7/3}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)|\sin t\cdot\cos t|\,dt\\&=12a^{7/3}\int_0^{\pi/2}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)\sin t\cos tdt=4a^{7/3}.\end{aligned}$$

□

例 7.5: (单层对数位势) 设 $L: \xi^2+\eta^2=a^2\,(a>0), r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$, 计算
$$I=I(x,y)=\int_L\ln\frac{1}{r}ds.$$

✎ 解: 作新坐标系 $\xi' O\eta'$, 使得原点仍与坐标系 $\xi O\eta$ 的原点相同, 而点 (x,y) 位于 $O\xi'$ 轴上, 此时我们有 $(r' = \sqrt{(\xi'-\rho)^2+(\eta')^2}, \rho = \sqrt{x^2+y^2})$

$$I(x,y) = \int_{L'} \ln\frac{1}{r'} ds \quad \left(L' : (\xi')^2 + (\eta')^2 = a^2\right).$$

采用圆的参数方程式表示:

$$\xi' = a\cos\varphi, \eta' = a\sin\varphi\,(0 \le \varphi \le 2\pi); ds = ad\varphi.$$

$$\begin{aligned} I(x,y) &= -\frac{a}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left(a^2 - 2a\rho\cos\varphi + \rho^2\right) d\varphi \\ &= -2\pi a\ln a - \frac{a}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left(1 - \frac{2\rho}{a}\cos\varphi + \frac{\rho^2}{a^2}\right) d\varphi. \end{aligned}$$

令 $\rho/a = \alpha$, 以及 $J(a) = \int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2\right) d\varphi$, 则 (其中 $z = \alpha e^{i\varphi}, \bar{z} = ae^{-i\varphi}$)

$$J'(a) = 2\int_0^{2\pi} \frac{\alpha - \cos\varphi}{1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2} d\varphi = \frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi} \frac{2z\bar{z} - (z+\bar{z})}{(1-z)(1+\bar{z})} d\varphi.$$

若 $\alpha < 1$, 则得

$$\begin{aligned} J'(a) &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(\frac{z}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}}\right) d\varphi \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots + \bar{z} + \bar{z}^2 + \cdots + \bar{z}^n + \cdots\right) d\varphi \\ &= -\frac{2}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(\alpha\cos\varphi + \alpha^2\cos(2\varphi) + \cdots + \alpha^n\cos(n\varphi) + \cdots\right) d\varphi = 0. \end{aligned}$$

(积分号下的级数一致收敛, 可作逐项积分). 故 $J(\alpha) = C, C = J(0) = 0$, 且得

$$I(x,y) = -2\pi a\ln a = 2\pi a\ln(1/a) \quad (\rho < a).$$

若 $\rho > a$, 则 $\alpha > 1$, 我们有

$$\begin{aligned} J'(a) &= \frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{1-1/\bar{z}}\right) d\varphi \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(2 + \frac{1}{z} + \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots + \frac{1}{\bar{z}} + \cdots + \frac{1}{\bar{z}^n} + \cdots\right) d\varphi \\ &= \frac{2}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{\cos\varphi}{\alpha} + \frac{\cos(2\varphi)}{\alpha^2} + \cdots + \frac{\cos(n\varphi)}{\alpha^n} + \cdots\right) d\varphi = \frac{4\pi}{\alpha}. \end{aligned}$$

由此知 $J(\alpha) = 4\pi\ln\alpha + C, C = J(1) = 0$. 从而 $J(\alpha) = 4\pi\ln\alpha$, 且知

$$I(x,y) = -2\pi a\ln a - 2\pi a\ln\frac{\rho}{a} = 2\pi a\ln(1/\rho).$$

□

例 7.6: 设 L 是平面 $x+y+z=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的交圆. 计算

(1) $I = \int_L x^2 ds$.

(2) $I = \int_L (xy + xz + yz)\, ds$.

✎ 解:

(1) 解法一：先求其参数方程, 作证交变换

$$\xi=\frac{x-y}{\sqrt{2}},\eta=\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}},\zeta=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}},$$

则它在坐标系 $O_{\xi\eta\zeta}$ 中的参数方程为

$$\xi=a\cos t,\eta=a\sin t,\zeta=0\quad(0\leq t\leq 2\pi).$$

而在 $O_{\xi\eta\zeta}$ 坐标系中 L 的参数方程为

$$x=\frac{a\cos t}{\sqrt{2}}+\frac{a\sin t}{\sqrt{6}},y=-\frac{a\cos t}{\sqrt{2}}+\frac{a\sin t}{\sqrt{6}},z=-\frac{2a\sin t}{\sqrt{6}}\,(0\leq t\leq 2\pi).$$

从而我们有

$$I=\int_0^{2\pi}\left(\frac{a\cos t}{\sqrt{2}}+\frac{a\sin t}{\sqrt{6}}\right)^2 adt=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

解法二：由对称性可知积分等式 $\int_L x^2ds=\int_L y^2ds=\int_L z^2ds$. 从而得到

$$I=\frac{1}{3}\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)ds=\frac{a^2}{3}\int_L ds=\frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

(2) 由 $x+y+z=0$ 可知 $\int_L(x+y+z)^2ds=0$. 由题设可得 $xy+yz+xz=-a^2/2$, 从而我们有

$$I=\int_L x^2ds,I=-\int_L\frac{a^2}{2}ds=-\frac{a^2}{2}\cdot 2\pi a=-\pi a^3.$$

□

定理 7.4

设 $\overset{\frown}{AB}$ 是连续曲线, 且由 $y=f(x)(a\leq x\leq b)$ 给出,$A(a,f(a)),B(b,f(b))$ 为起点和终点. 若 $P(x,y)$ 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上连续, 则 $P(x,y)$ 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上 (关于 x 的) 存在第二型曲线积分, 且有

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}P\left(x,y\right)dx=\int_a^b P\left(x,f\left(x\right)\right)dx\quad(\text{定积分}).$$

❀ ***Remarks:*** 若又有 $Q(x,y)$ 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上连续, 则结合 $P(x,y)$ 可写成

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}Pdx+Qdy=\int_a^b\left[P\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)x'\left(t\right)+Q\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)y'\left(t\right)\right]dt.$$

❀ ***Remarks:*** 设 D 是由一条简单闭曲线 L 围成的区域, 则其面积为 $S=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx$.

❀ ***Remarks:*** 第一型与第二型线积分之间的联系. 给定光滑曲线 $\overset{\frown}{AB}$, 其参数方程为 $x=x(t),y=y(t)(a\leq t\leq b),t=a$ 对应于 A 点,$t=b$ 对应于 B 点.

定理 7.5

若 $\overset{\frown}{AB}$ 是逐段光滑曲线:$x = x(t), y = y(t)(a \le t \le b)$. 且 $A = (x(a), y(a)), B = (x(b), y(b))$. 若 $P(x,y)$ 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上连续, 则 $P(x,y)$ 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上的第二型曲线积分存在, 且有

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx = \int_a^b P[x(t), y(t)]\, x'(t)\,dt, \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dy = \int_a^b P[x(t), y(t)]\, y'(t)\,dt.$$

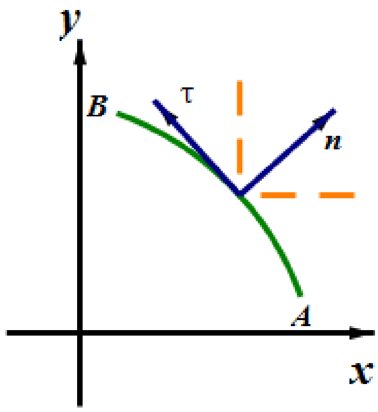
(1) 由曲线的方向决定曲线上每点 (x,y) 处单位切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 的方向.$\boldsymbol{\tau}$ 的方向余弦记为 $\cos\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{x}\rangle, \cos\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{y}\rangle$ 分别表示向量 $\boldsymbol{\tau}$ 与坐标向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 的内积, 用参数表示有

$$\cos\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{x}\rangle = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} = \frac{dx}{ds}, \cos\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{y}\rangle = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} = \frac{dy}{ds},$$

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} [P\cos\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{x}\rangle + Q\cos\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{y}\rangle]\, ds.$$

这就把被积函数为 P, Q 的第二型曲线积分化为被积函数为 $P\cos\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{x}\rangle + Q\cos\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{y}\rangle$ 的第一型曲线积分.

(2) 曲线上点 (x,y) 处的单位法向量记作 $\mathbf{n}$, 且使 $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ 成右手系. 由图可以看出



$$\cos\langle \mathbf{n}, \mathbf{x}\rangle = \cos\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{y}\rangle, \quad \cos\langle \mathbf{n}, \mathbf{y}\rangle = -\cos\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{x}\rangle.$$

因此, 第二型曲线积分也可化成如下的第一型曲线积分

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} [Q\cos\langle \mathbf{n}, \mathbf{x}\rangle - P\cos\langle \mathbf{n}, \mathbf{y}\rangle]\, ds.$$

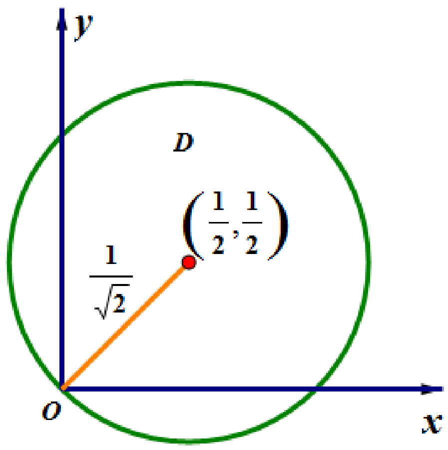
类似有

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} [P\cos\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{x}\rangle + Q\cos\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{y}\rangle + R\cos\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{z}\rangle]\, ds.$$

例 7.7: 设曲线 $L: x^2+y^2-x-y=0$ 的方向为逆时针方向, 证明:

$$\frac{\pi}{2} \le \int_L -y\sin x^2 dx + x\cos y^2 dy \le \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

☞ **证:** 曲线 L 为如图所示的圆.



$$\begin{aligned} I &= \int_L -y\sin x^2 dx + x\cos y^2 dy = \iint_D \left(\cos y^2 + \sin x^2\right) dxdy \\ &= \iint_D \left(\cos x^2 + \sin x^2\right) dxdy = \iint_D \sqrt{2}\sin\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right) dxdy. \end{aligned}$$

当 $(x,y)\in D$ 时, 有 $|x|-\frac{1}{2}\le\left|x-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{\sqrt{2}}, |x|\le\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}, x^2\le\frac{\pi}{2}$, 故有 $\frac{\pi}{4}\le x^2+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}\le\sin\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$. 又 D 的面积 $A=\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\pi}{2}$, 故得

$$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\le\int_D\sqrt{2}\sin\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)dxdy\le\sqrt{2}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2},$$

即

$$\frac{\pi}{2} \le \int_L -y\sin x^2 dx + x\cos y^2 dy \le \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

□

例 7.8: 证明:

$$\lim_{R\to+\infty}\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{ydx-xdy}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}=0.$$

☞ **证:**

$$X=\frac{y}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}, Y=\frac{-x}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}$$

在曲线 $C: x^2+y^2=R^2$ 上

$$\begin{aligned} \sqrt{X^2+Y^2} &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2} = \frac{R}{\left(R^2+xy\right)^2} \le \frac{R}{\left(R^2-|xy|\right)^2} \\ &\le \frac{R}{\left(R^2-\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2} = \frac{R}{\left(R^2-\frac{R^2}{2}\right)^2} = \frac{4}{R^3}. \end{aligned}$$

又曲线 C 的长为 $L=2\pi R$, 故

$$\left|\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{ydx-xdy}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}\right|\leq\frac{4}{R^3}\cdot 2\pi R=\frac{8\pi}{R^2}.$$

因此有

$$\lim_{R\to+\infty}\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{ydx-xdy}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}=0.$$

□

例 7.9: 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶连续导数, 曲线积分

$$\oint_C\left[y^2f\left(x\right)+2ye^x+2yg\left(x\right)\right]dx+2\left[yg\left(x\right)+f\left(x\right)\right]dy=0,$$

其中 C 为平面上任一简单封闭曲线.

(1) 求 $f(x), g(x)$, 使 $f(0)=g(0)=0$;

(2) 计算沿任一条曲线从点 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的积分.

✎ 解:

(1) 由 $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$ 得

$$2yg'\left(x\right)+2f'\left(x\right)=2yf\left(x\right)+2e^x+2g\left(x\right),$$

$$yg'\left(x\right)+f'\left(x\right)=yf\left(x\right)+e^x+g\left(x\right).$$

比较 y 的同次幂系数得

$$\begin{cases}g'(x)=f(x)\\ f'(x)=g(x)+e^x.\end{cases}$$

$g''(x)=f'(x)=g(x)+e^x, g''(x)-g(x)=e^x$ 解得

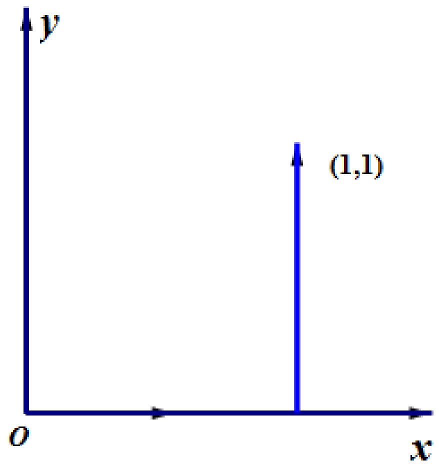
$$g(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{x}{2}e^x.$$

由 $g(0)=0, g'(0)=f(0)=0$, 得 $C_1=-\frac{1}{4}, C_2=\frac{1}{4}$. 故

$$g\left(x\right)=-\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{x}{2}e^x$$
$$f\left(x\right)=g'\left(x\right)=\frac{1}{4}e^x-\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{x}{2}e^x.$$

(2) 取如图所示的折线计算积分.

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}Xdx+Ydy=\int_0^1 0dx+\int_0^1 2\left[yg\left(1\right)+f\left(1\right)\right]dy$$
$$=g\left(1\right)+2f\left(1\right)=\frac{7}{4}e-\frac{1}{4e}.$$



□

习题 7.1: 设 $f(x)$ 连续可导,$f(1)=1$,G 为不包含原点的单连通域, 任取 $M,N\in G$, 在 G 内曲线积分 $\int_M^N \frac{ydx-xdy}{2x^2+f(y)}$ 与路径无关, 求曲线积分 $\int_\Gamma \frac{ydx-xdy}{2x^2+f(y)}$, 其中 Γ 为曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 取正向.

习题 7.2: 设函数 $f(x)$ 具有连续导数, 在围绕原点的任意光滑简单闭曲面 S 上, 积分

$$\oiint\limits_S xf(x)\,dydz-xyf(x)\,dzdx-e^{2x}zdxdy$$

的值恒为同一常数.

(1) 证明: 对空间区域 $x>0$ 内的任意光滑简单闭曲面 Σ, 有

$$\oiint\limits_\Sigma xf(x)\,dydz-xyf(x)\,dzdx-e^{2x}zdxdy=0.$$

(2) 求函数 $f(x)(x>0)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$ 的表达式.

例 7.10: 设函数 $f(x,y)$ 及它的二阶偏导数在全平面连续, 且 $f(0,0)=0,\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\le 2|x-y|,\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\le 2|x-y|$, 证明 $|f(5,4)|\le1$.

证:

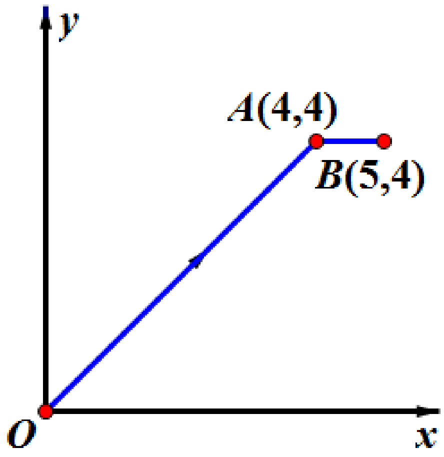
$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

曲线积分 $\int_L \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ 与路径无关, 取如图所示的折线 $O\bar{A}B$, 有

$$|f(5,4)|=|f(5,4)-f(0,0)|=\left|\int_{(0,0)}^{(5,4)}\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right|$$
$$=\left|\int_{OA}\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\int_{AB}\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right|.$$

由于在 $\bar{OA}$ 上,$y=x,\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\le2|x-x|=0,\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\le2|x-x|=0$,

$$|f(5,4)|=\left|\int_4^5\frac{\partial f(x,4)}{\partial x}dx\right|\le\int_4^5\left|\frac{\partial f(x,4)}{\partial x}\right|dx\le\int_4^5 2|x-4|\,dx=1.$$

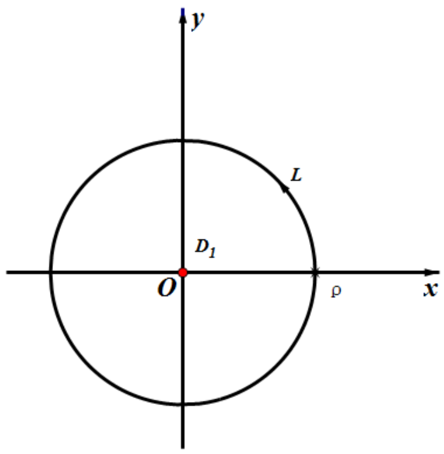


□

例 7.11: 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D: x^2+y^2 \le 1$ 上有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$, 证明

$$\iint_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy=\frac{\pi}{2e}.$$

☞ **证:** 如图, 设 $L: x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,$D_1$ 为 L 所谓区域.



$$\iint_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(\rho\cos\theta\cdot f_x'+\rho\sin\theta\cdot f_y'\right)\rho d\rho$$

$$=\int_0^1\rho d\rho\int_0^{2\pi}\left(\rho\cos\theta\cdot f_x'+\rho\sin\theta\cdot f_y'\right)d\theta=\int_0^1\left[\oint_L -f_y'dx+f_x'dy\right]\rho d\rho$$

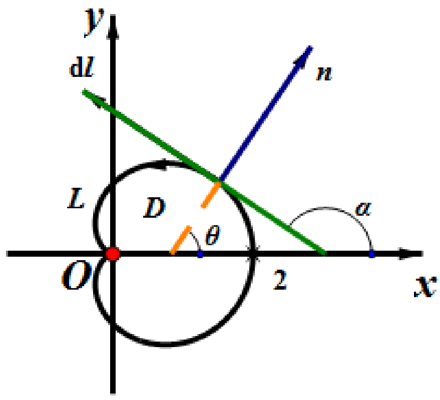
$$=\int_0^1\left[\iint_{D_1}\left(f_{x^2}''+f_{y^2}''\right)dxdy\right]\rho d\rho=\int_0^1\left[\iint_{D_1}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy\right]\rho d\rho$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\rho}e^{-r^2}rdr\right]\rho d\rho=\int_0^1\pi\left(1-e^{-\rho^2}\right)\rho d\rho=\frac{\pi}{2e}.$$

□

例 7.12: 设二元函数 u 在曲线 $L: \rho = 1 + \cos\theta$ 所围区域 D 上有二阶连续偏导数, 且 $u_{x^2}'' + u_{y^2}'' = 1$, 试证 $\oint_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dl = |D|$, 其中 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 是 u 沿 D 的边界外向法线方向导数, $|D|$ 是 D 的面积.

证: 如图. 设 $\mathbf{n} = \{\cos\theta, \sin\theta\}$, L 的正方向切向量为 $d\mathbf{l} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$, 则 $\theta = \alpha - \frac{\pi}{2}$, 故



$$
\begin{aligned}
\oint_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{l} &= \oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\theta \right) d\mathbf{l} \\
&= \oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right) d\mathbf{l} \\
&= \oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \sin\alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \cos\alpha \right) d\mathbf{l} = \oint_L -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \\
&= \iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy = \iint\limits_D 1 dxdy = |D|
\end{aligned}
$$

□

习题 7.3: 设 $f(x,y)$ 在平面区域 $D: \varepsilon^2 \le x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0$ 有连续的偏导数, 且在边界 $x^2 + y^2 = 1$, 有 $f(x,y) \equiv 0$, 而在边界 $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, 有 $f(x,y) = \frac{\sin\left(e^{x^2+y^2}-1\right) - \left(e^{\sin\left(x^2+y^2\right)}-1\right)}{\sin^4(3(x^2+y^2))} \ln^2\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)$. 求

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint\limits_D \frac{x f_x' + y f_y'}{x^2 + y^2} dxdy$$

的值.

习题 7.4: 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数, $u = \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta$, $\frac{du}{dr} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta$, $\frac{d^2u}{dr^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta$, 且 $f_{11}'' + f_{22}'' = \frac{\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}}{r}$, 求 $r\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr}$ 的值.

习题 7.5: 设 $f \in C(\mathbb{R}^1)$, 试证明:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(1 - \sin\theta\cos\varphi) \sin\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(x)\, dx$;

(2) 根据此公式求二重积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\ln(2-\sin\theta\cos\varphi)}{2\csc\theta-2\cos\varphi+\sin\theta\cos^2\varphi}+\frac{\ln(1-\sin\theta\cos\varphi)}{\csc\varphi(2-\sin\theta\cos\varphi)}\right)d\theta d\varphi.$$

习题 7.6: 设函数 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,$\Omega(t)$ 是由 $x^2+y^2+z^2\le t^2, z\ge 0$ 所确定的立体区域,$S(t)$ 是 $\Omega(t)$ 的表面,$D(t)$ 是 $\Omega(t)$ 在 xOy 平面的投影区域,$L(t)$ 是 $D(t)$ 的边界曲线, 已知当 $t\in(0,+\infty)$ 时, 恒有:

$$\begin{aligned}&\oint_{L(t)} f\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}ds+\oiint_{S(t)}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS\\ =&\iint_{D(t)} f\left(x^2+y^2\right)d\sigma+\iiint_{\Omega(t)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv,\end{aligned}$$

求 $f(t)$ 的表达式 (满足初始条件的 $f(1)=0$).

第 8 课时 矩阵的基本性质 1

例 8.1: 设 A 为域 F 上的 n 阶方阵 $(n>2)$，试求 $(A^*)^*$（用 A 表示，这里 A^* 表示 A 的古典伴随方阵，即 A^* 的 (i,j) 位元素是 A 的 (j,i) 位元素的代数余子式）.

✎ **解:** 若 A 可逆, 则 $A^*A=|A|I_n$, 于是

$$A^*(A^*)^*=(|A|\,I_n)^*=|A|^{n-1}I_n.$$

而 $A^*=|A|A^{-1}$, 代入可解得

$$(A^*)^*=|A|^{n-2}A. \tag{1}$$

若 A 不可逆, 则存在可逆矩阵 P,Q, 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

对于矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 注意到它的阶 $n>2$, 那么由它的伴随的秩 $\leq 1<n-1$, 可得它的伴随的伴随的秩必然为零, 即有

$$((PAQ)^*)^*=0.$$

于是有

$$(P^*)^*(A^*)^*(Q^*)^*=0.$$

可逆矩阵的伴随仍是可逆矩阵, 于是可得

$$(A^*)^*=0.$$

注意到 $|A|=0$, 因此它仍满足等式 (1).

综上所述, 可知

$$(A^*)^*=|A|^{n-2}A.$$

□

例 8.2: 判断以下论断是否成立，证明自己的判断：对任意 n 阶可逆方阵 A，存在方阵 P,L,T 使得 $PA=LT$，其中 P 为对换方阵（即对换单位方阵 I 的某两行所得方阵）之积，L 为下三角形方阵且对角线元素均为 1，T 为上三角形方阵.

☞ **证:** 对于 $n=1$ 的情形, 结论显然成立.

假定题目结论对于 $n-1$ 阶的时候成立, 那么对于 A 为 n 阶的时候, 注意到 A 为可逆矩阵, 那么 A 的第一列必不全为零, 那么总可以用一个 n 阶矩阵的转置 P_1 左乘 A, 使得 P_1A 的第一行第一列的元素不为零 (其中 P_1 是单位矩阵或对称矩阵).

不妨设 $P_1A=a_{ij_{n\times n}}$, 那么有 $a_{11}=0$.

记矩阵

$$L_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\-\frac{a_{21}}{a_{11}}&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-\frac{a_{n1}}{a_{11}}&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

显然有

$$L_1^{-1}P_1A=\begin{pmatrix}a_{11}&*\\O_{(n-1)\times 1}&A_1\end{pmatrix}. \tag{1}$$

由 $|A|\neq 0$ 知 $|A_1|\neq 0$, 即 A_1 也可逆.

于是利用归纳假设, 存在对称矩阵的乘积 Q, 使得

$$QA_1=L_2T_2,$$

其中 L_2 为下三角形方阵且对角线元素均为 1,T_2 为上三角形方阵.

注意到对于对换矩阵的乘积 Q, 它的转置也是对换矩阵的乘积. 且有

$$Q^T=Q^{-1}.$$

于是有

$$\begin{pmatrix}a_{11}&*\\O&A_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&O\\O&Q^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&O\\O&L_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&*\\O&T_2\end{pmatrix},$$

代入等式 (1), 可得

$$\begin{pmatrix}1&O\\O&Q\end{pmatrix}P_1A=\begin{pmatrix}1&O\\O&Q\end{pmatrix}L_1\begin{pmatrix}1&O\\O&Q^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&O\\O&L_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&*\\O&T_2\end{pmatrix}.$$

记

$$P=\begin{pmatrix}1&O\\O&Q\end{pmatrix}P_1, L=\begin{pmatrix}1&O\\O&Q\end{pmatrix}L_1\begin{pmatrix}1&O\\O&Q^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&O\\O&L_2\end{pmatrix}, T=\begin{pmatrix}a_{11}&*\\O&T_2\end{pmatrix},$$

显然,P 是对换矩阵的乘积,T 是上三角矩阵, 只需证明 L 是主对角线元素为 1 的下三角矩阵即可.

注意到

$$L_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\-\frac{a_{21}}{a_{11}}&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-\frac{a_{n1}}{a_{11}}&0&\cdots&1\end{pmatrix}.,$$

所以 L_1 的形式为

$$L_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\\frac{a_{21}}{a_{11}}&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{a_{n1}}{a_{11}}&0&\cdots&1\end{pmatrix}..$$

$\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} L_1 \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q^T \end{pmatrix}$ 则代表对矩阵 L_1 的第二列到第 n 行做一系列的变换. 然后又对它的第二列到第 n 列做相应的交换, 最后得到的矩阵使得 L_1 的第一行第一列的元素仍为 1, 而且 L_1 的第二列到第 n 列仍然保持不变, 那么显然 $\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} L_1 \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q^T \end{pmatrix}$ 为主对角线元素为 1 的下三角矩阵, 注意到 $\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & L_2 \end{pmatrix}$ 也是主对角线元素为 1 的下三角矩阵, 那么由下三角矩阵的乘积也为下三角矩阵, 可得

$$L = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} L_1 \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & L_2 \end{pmatrix}$$

也是下三角矩阵, 且它的对角线上的元素也为 1. □

例 8.3: 一个行列式为 1 的 n 阶方阵能否写成若干个行列式为 1 的初等矩阵之积? 若能, 给出证明. 若不能, 举出反例.

☞ **证:** 注意到一个行列式为 1 的 n 阶方阵 A 必是可逆矩阵, 那么它经过有限次初等变换可化为单位矩阵, 由于初等行变换的逆仍是初等行变换, 那么方阵 A 必然可以写成

$$A = P_1 P_2 \cdots P_i,$$

其中 $P_i (i = 1, 2, \cdots, l)$ 都是初等行变换矩阵, 注意到第三类的初等行变换的行列式都为 1. 若对于某个 $P_j (1 \leq j \leq l)$, 它是第一类的, 为简单起见, 先考虑 3 阶的第一类初等行变换矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

将它进行一系列的第三类初等行变换如下

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

最后一个矩阵的行列式为 -1, 为使得它的行列式变为 1, 将矩阵乘以 -1, 并将这个系数 $a_j = -1$ 乘到矩阵的最前方, 这时矩阵变为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

继续用第三类初等行变换

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \end{aligned}.$$

由于第三类初等行变换的逆仍是初等行变换, 于是第一类初等行变换

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可以写成 a_j 乘以一系列第三类初等行变换的乘积. 同理, 对于 n 阶第一类初等行变换矩阵 $P_j = P_{ks}(1 \le k, s \le n)$, 与上面相同的过程 (只不过上面是 P_{12}, 这里把 1 和 2 分别换成 k 和 s 即可, 而且对于对角线上有偶数个 -1 值的对角矩阵, 总可以通过一系列第三类初等行变换将这些 -1 全部化为 1) 可知, 它也可以写成 a_j 乘以一系列第三类初等行变换的乘积.

若对于某个 $P_j(1 \le j \le l)$, 它是第二类的, 为简单起见, 先考虑 2 阶的第二类初等行变换矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\text{其中}a\text{为某个非零常数}).$$

对复数 a 总可以写成 $a = c^2$(从复数的极坐标表示易得) 的形式, 这个矩阵乘以 $a_j = \frac{1}{c}$, 并记矩阵变为

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}.$$

注意对矩阵 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$(其中 a, b 都不为零), 可以通过以下第三类初等行变换

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -ab \\ 1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & b-ab \\ 1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & b-ab \\ 0 & ab \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} \tag{1}$$

将矩阵 $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}$ 按照类似于序列 (1) 进行第三类初等行变换

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c & 0 \\ 1 & 1/c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1/c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \to &\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

即矩阵 $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}$ 可表示为第三类初等矩阵之积.

同样, 对于 n 阶的第二类初等行变换

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

记 $a=c^n$, 对矩阵乘以 $a_j=\frac{1}{c}$, 那么得到的矩阵为

$$\begin{pmatrix} c^{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/c & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/c \end{pmatrix}.$$

它的行列式为 1, 对矩阵的第一、二行做与序列 (1) 相类似的一系列第三类初等行变换, 可将左上角的二阶矩阵 $\begin{pmatrix} c^{n-1} & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}$ 化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{n-2} \end{pmatrix}$, 这样可以用一系列第三类初等行变换不断化下去, 使得右下角的 $n-1$ 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} c^{n-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/c & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

变为 I_{n-1}, 于是可得第二类初等行变换总可以写成某个常数 a_j 乘以一系列第三类初等行变换的乘积. 那么

$$A=(a_1a_2\cdots a_l)Q_1Q_2\cdots Q_l=((a_1a_2\cdots a_l)I_n)Q_1Q_2\cdots Q_l, \tag{2}$$

其中 $Q_i(i=1,2,\cdots,l)$ 为第三类初等行变换, 显然有 $|Q_i|=1(i=1,2,\cdots,l)$. 注意到 $|A|=1$, 令 $b=a_1a_2\cdots a_l$, 对等式 (2) 两边同取行列式, 即有对角矩阵

$$B=\begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b \end{pmatrix}$$

的行列式为 1, 与第二类初等矩阵的证明中序列 (1) 相类似的一系列第三类初等行变换可将左上角的二阶矩阵 $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$, 这时对右下角的 $n-1$ 阶与序列 (1) 相类似继续化下去, 注意到 $b^n=1$. 那么 B 总可用一系列第三类初等行变换化为 I_n, 这意味着 B 总可以写成第三类初等行变换的乘积, 而第三类初等行变换都是行列式为 1 的初等矩阵, 由 $A=BQ_1Q_2\cdots Q_l$, 即可得 A 可以写成若干个行列式为 1 的初等矩阵的乘积. □

例 8.4: 设 n 阶方阵 A 满足 $A^3-6A^2+11A-6E=0$. 试确定使得 $kE+A$ 可逆的数 k 的范围. (E 为单位矩阵.)

☞ **证:** 待定系数 $(kE+A)\left(A^2+xA+y\right)=A^3+(x+k)A^2+(kx+y)A+kyE$ 结合 $A^3-6A^2+11A-6E=0$ 可知

$$x+k=-6, kx+y=11 \Rightarrow y=k^2+6k+11,$$

只需保证

$$(kE+A)\left(A^2+xA+y\right)=\left(k^3+6k^2+11k+6\right)E\neq 0.$$

解得 $k \neq -1, -2, -3$. □

例 8.5: 设有分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，其中 A, D 都可逆，试证：

(1) $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det\left(A - BD^{-1}C\right)\det D$;

(2) $\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left(CA^{-1}B - D\right)^{-1}CA^{-1}$.

☞ **证:**

(1) 作初等变换

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det\left(A - BD^{-1}C\right)\det D.$$

(2) 显然

$$\begin{aligned}
&\left(A - BD^{-1}C\right)\left(A^{-1} - A^{-1}B\left(CA^{-1}B - D\right)^{-1}CA^{-1}\right)\\
&= E - B\left(CA^{-1}B - D\right)^{-1}CA^{-1} - BD^{-1}CA^{-1}\\
&+ BD^{-1}CA^{-1}B\left(CA^{-1}B - D\right)^{-1}CA^{-1} = E\\
&- BD^{-1}CA^{-1} + B\left(-E + D^{-1}CA^{-1}B\right)\left(CA^{-1}B - D\right)^{-1}CA^{-1}.
\end{aligned}$$

注意到

$$D^{-1}\left(CA^{-1}B - D\right) = -E + D^{-1}CA^{-1}B$$

即可.

□

例 8.6: 设 $A \in P^{n\times n}, f(x) \in P[x]$，已知 $f(A)$ 可逆. 求证：存在 $g(x) \in P[x]$ 使 $(f(A))^{-1} = g(A)$（注：P 是数域，$P^{n\times n}$ 表示元素在 P 中的 n 阶方阵的集合）.

☞ **证:** 设矩阵 A 的特征多项式为 $m(x)$(注意:$m(x) = |xI - A|$ 必为数域 P 上的多项式), 那么由 Hamilton-Cayley 定理有

$$m(A) = 0.$$

若 $f(A)$ 可逆, 用反证法证明它与 $m(x)$ 互素.

若 $f(x)$ 与 $m(x)$ 不互素, 那么有公因式 $d(x)$, 显然它在复数域上有根. 不妨设 $x = c$ 是 $d(x)$ 的根, 它也是 $m(x)$ 的根, 必为矩阵 A 的特征值, 于是有 $|A - cI| = 0$. 注意到 $x = c$ 也是 $f(x)$ 的根, 显然有 $|f(A)| = 0$, 将 $f(A)$ 看做数域 P 上的矩阵, 仍有 $|f(A)| = 0$, 知它在数域 P 上必不可逆, 导致矛盾. 于是 $f(x)$ 与 $m(x)$ 必互素. 那么 $(f(x), m(x)) = 1$, 在数域 P 上必存在两个多项式 $g(x), h(x)$ 使得

$$f(x)g(x) + h(x)m(x) = 1.$$

于是有
$$f(A)g(A)+h(A)m(A)=I.$$
把 $m(A)=0$ 代入, 有
$$f(A)g(A)=I,$$
即存在 $g(x)\in P[x]$, 使 $(f(A))^{-1}=g(A)$. □

例 8.7: 设 $A,B\in P^{n\times n}$，求证：$(AB)^*=B^*A^*$.

☞ **证:** 证法一:

(1) 当 $|AB|\neq 0$ 时，这时 $|A|\neq 0,|B|\neq 0$，由公式 $A^*=|A|A^{-1}$，可得
$$(AB)^*=|AB|\,(AB)^{-1}=|B|\,B^{-1}\cdot|A|\,A^{-1}=B^*A^*.$$
结论成立.

(2) 当 $|AB|=0$ 时，考虑矩阵 $A(\lambda)=A-\lambda E,B(\lambda)=B-\lambda E$，由于 A 和 B 都最多只有有限个特征值，因为存在无穷多个 λ，使
$$|A(\lambda)|\neq 0,|B(\lambda)|\neq 0. \tag{1}$$
那么由上面 (1) 的结论有
$$(A\left(\lambda\right)B\left(\lambda\right))^*=B^*\left(\lambda\right)A^*\left(\lambda\right). \tag{2}$$
令 $(A\left(\lambda\right)B\left(\lambda\right))^*=\left(f_{ij}\left(\lambda\right)\right)_{n\times n},B^*\left(\lambda\right)A^*\left(\lambda\right)=\left(g_{ij}\left(\lambda\right)\right)_{n\times n}$. 由 (2) 式有
$$f_{ij}\left(\lambda\right)=g_{ij}\left(\lambda\right),(i,j=1,2,\cdots,n). \tag{3}$$
由于有无穷多个 λ 使 (1) 式成立，从而有无穷多个 λ 使 (3) 式成立，但 $f_{ij}(\lambda),g_{ij}(\lambda)$ 都是多项式，从而 (3) 式对一切 λ 都成立，特别地令 $\lambda=0$，这时有
$$(AB)^*=(A\left(0\right)B\left(0\right))^*=B^*\left(0\right)A^*\left(0\right)=B^*A^*.$$

证法二: 先设 A,B 都是可逆矩阵, 由 $A^*=|A|A^{-1},B^*=|B|B^{-1}$ 及 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 即得结论.

对于一般情形, 引入参数 t, 使行列式
$$|tI_n+A|=0$$
的 t 只有有限个 (因为 $|tI_n+A|$ 是一个 t 的 n 次多项式, 最多只有 n 个根). 也就是说, 使得 tI_n+A 为奇异阵的 t 只有有限个. 同理, 使得 tI_n+B 是奇异阵的 t 也只有有限个. 因此存在一个无穷序列 $t_m,t_m\to 0$, 使 t_mI_n+A,t_mI_n+B 都是可逆矩阵, 故
$$((t_mI_n+A)(t_mI_n+B))^*=(t_mI_n+B)^*(t_mI_n+A)^*.$$
两边取极限利用连续性即得结论. □

例 8.8:

(1) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则矩阵 A 满足方程 $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$;

(2) 二阶矩阵满足 $A^k=0, k>2$，则 $A^2=0$.

☞ **证:** 证法一:

(1) 注意到

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}.$$

则有 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}+$
$\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=0.$

(2) 由于 $A^k=0, |A^k|=|A|^k=0 \Rightarrow |A|=0$，则 $\mathrm{rank(A)} \leq 1$. 若 $\mathrm{rank(A)}=0$，则 $A=0$. 显然有 $A^2=0$. 下面设 $\mathrm{rank(A)}=1$. 于是

$$A=\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}, \text{或} A=\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix},$$

其中 a,b 不全为 0，$k>2$.
若 A 为前者，则

$$A^2=(a+kb)A, A^k=(a+kb)^{k-1}A=0 \Rightarrow a+kb=0.$$

从而 $A^2=0$.
若 A 为后者，同理可得 $A^2=0$.

证法二:

(1) 注意到矩阵 A 的特征多项式为

$$|xI-A|=x^2-(a+d)x+ad-bc.$$

那么由 Hamilton-Cayley 定理, 显然矩阵 A 满足方程

$$x^2-(a+d)x+ad-bc=0.$$

(2) 设矩阵的极小多项式为 $m(\lambda)$, 由 $A^k=0, k>2$, 可知 $m(\lambda)|\lambda^k$, 而由 A 为 2 阶矩阵, 显然有 $m(\lambda)$ 的次数不超过 2, 则 $m(\lambda)|\lambda^2$. 于是有 $A^2=0$.

□

例 8.9: 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3}$，方阵 B 与 A 相似，设 B^* 是 B 的伴随矩阵，则行列式 $D=\left|\left(\frac{1}{2}B^2\right)^{-1}+12B^*-I_3\right|$ 的值为__________.

☞ **证:** 设 $B=P^{-1}AP, A=Q^{-1}SQ, S=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$,, 则有 $B=(QP)^{-1}S(QP), B^2=(QP)^{-1}S^2(QP)$，因此

$$
\begin{aligned}
D &= \left|\left(\frac{1}{2}B^2\right)^{-1}+12B^*-I_3\right| = \left|\left(\frac{1}{2}B^2\right)^{-1}\right|\left|E+6|B|B-\frac{1}{2}B^2\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{2}(QP)^{-1}S^2(QP)\right)^{-1}\right|\left|E+\frac{1}{2}(QP)^{-1}S(QP)-\frac{1}{2}(QP)^{-1}S^2(QP)\right| \\
&= 8\times 8\times 18\times\left|E+\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}S^2\right| = 1620.
\end{aligned}
$$

□

例 8.10: 证明：任一 n 阶方阵可以表示成一个数量矩阵（具有 kI 形式的矩阵）与一个迹为 0 的矩阵之和.

☞ **证:** 设方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}\end{pmatrix}$, $p=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$，令 $B=A-\frac{p}{n}E$，则 $A=B+\frac{p}{n}E, \mathrm{tr}(B)=\mathrm{tr}(A)-\frac{p}{n}\times n=\mathrm{tr}(A)-p=0$. □

例 8.11: 设 A 为 n 阶方阵，若存在唯一的 n 阶方阵 B，使得 $ABA=A$，证明 $BAB=B$.

☞ **证:** 标答: 首先证明 A 可逆, 利用反证法.

若 A 不可逆, 那么 A 的秩小于 n, 不妨设 $r(A)=r<n$, 于是有可逆矩阵 P,Q, 使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O\end{pmatrix}Q.$$

取

$$C=Q^{-1}\begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r}\end{pmatrix}.$$

显然有

$$ACA=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O\end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r}\end{pmatrix}A=P\begin{pmatrix} O & O \\ O & O\end{pmatrix}A=0.$$

若存在 B 使得 $ABA=A$, 那么对于矩阵 $B+C$, 也有

$$A(B+C)A=ABA+ACA=A+0=A,$$

这与 B 的唯一性相矛盾.

于是 A 必可逆, 那么对 $ABA=A$ 左乘 A^{-1}, 右乘 B 即可得

$$BAB=B.$$

金睿楠: 由于 $ABA=ABABA=A(BAB)A=A$，所以 $BAB=B$. □

例 8.12: 设 S 为有理数域 Q 上的二阶方阵全体集 $M_2(Q)$ 的一个子集，有

$$S=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 2\beta & \alpha\end{pmatrix}\middle|\alpha,\beta\in Q,\alpha^2+\beta^2\neq 0\right\}.$$

试问：S 对于矩阵的乘法是否构成 Abel 群？为什么？

定义 8.1

群与 Abel 群的定义.

(1) 设 S 是一个非空集合, 在 S 定义一个二元运算记为 “·” , 若对于这个运算满足

(a) $\forall x,y\in S$, 存在唯一的 $x\cdot y\in S$;

(b) 该运算适合结合律, 即对于 $\forall x,y,z\in S$, 有

$$(xy)z=x(yz).$$

(c) 在 S 中存在一个恒等元 (或称单位元、幺元)e, 使得对于 $\forall x\in S$, 有

$$e\cdot x=x\cdot e=x.$$

(d) 对于 $\forall x\in S$, 存在一个 x 的逆元 $x^{-1}\in S$, 使得

$$x^{-1}\cdot x=x\cdot x^{-1}=e,$$

那么称集合 S 为一个群.

(2) 若对于群 S, 还有如下性质

$$\forall x,y\in S,x\cdot y=y\cdot x,$$

即对运算满足交换律, 那么称群 S 是一个交换群或 Abel 群.

☞ **证:**

(1) 封闭性：令 $A_1=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ 2\beta_1 & \alpha_1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ 2\beta_2 & \alpha_2\end{pmatrix}$,

$$A_1A_2=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\\ 2\alpha_1\beta_2+2\alpha_2\beta_1 & \alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2\end{pmatrix}\in S$$

(2) 结合律：由矩阵乘法性质显然成立.

(3) 存在恒元：存在 $e=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in S$ 使得 $eA=A$ 对所有 $A\in S$ 成立.

(4) 存在逆元:对任意 $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 2\beta & \alpha\end{pmatrix}$,总存在 $B=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 2\beta & \alpha\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{\alpha^2-2\beta^2} & -\frac{\beta}{\alpha^2-2\beta^2}\\ -\frac{2\beta}{\alpha^2-2\beta^2} & \frac{\alpha}{\alpha^2-2\beta^2}\end{pmatrix}$ 使得 $AB=e$,而若 $\alpha^2=2\beta^2$,则存在矛盾.

(5) 可交换. 可知 $A_2A_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\\ 2\alpha_1\beta_2+2\alpha_2\beta_1 & \alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2\end{pmatrix}=A_1A_2$.

□

例 8.13: 设 A,B 都是 n 阶实矩阵,秩 $(A)\le\frac{n}{2}$,秩 $(B)<\frac{n}{2}$,证明:对任意实数 a,行列式 $|A+aB|=0$.

☞ **证:** 当 $a=0$ 时,由 $r(A)\le\frac{n}{2}$,知 $|A|=0$,结论显然成立.

当 $a\ne 0$ 时,记方程组

$$Ax=0,$$

并记它的解空间为 U,那么有

$$\dim(U)=n-r(A)\ge\frac{n}{2}.$$

同理,记方程组

$$aBx=0.$$

记它的解空间为 V,显然有

$$\dim(V)=n-r(B)>\frac{n}{2}.$$

若记方程组

$$(A+aB)x=0$$

的解空间为 W,注意到若 $x\in U,x\in V$,那么有 $Ax=0$ 且 $aBx=0$,相加得

$$(A+aB)x=0,$$

即有 $x\in W$,于是有

$$U\cap V\subseteq W.$$

那么

$$\dim(U\cap V)\le\dim(W).$$

注意到

$$\dim(U)+\dim(V)-\dim(U\cap V)=\dim(U+V)\le n,$$

那么有

$$\dim(W)\ge\dim(U\cap V)\ge\dim(U)+\dim(V)-n>0.$$

那么由 $\dim(W)=n-r(A+aB)>0$ 可得 $r(A+aB)<n$,即有 $|A+aB|=0$. □

例 8.14: 设 A 是一个 n 阶实矩阵. 证明:$(I-A)(I+A^{-1})$ 是正交矩阵,当且仅当 A 是反对称矩阵.

☞ **证:**

(1) $\Rightarrow$ 若 $(I-A)(I+A^{-1})$ 是正交矩阵, 那么有

$$\left((I-A)(I+A)^{-1}\right)^T=\left((I-A)(I+A)^{-1}\right)^{-1}.$$

于是

$$\left(I+A^T\right)^{-1}\left(I-A^T\right)=(I+A)(I-A)^{-1},$$

那么

$$\left(I-A^T\right)(I-A)=\left(I+A^T\right)(I+A).$$

展开可得

$$A^T=-A,$$

即 A 是反对称矩阵.

(2) $\Leftarrow$ 若 A 是反对称矩阵, 先证明 $I+A$ 是一个可逆矩阵.
注意到

$$B=(A+I)^T(A+I)=I+A+A^T+A^TA=I+A^TA.$$

对任何 $x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0$, 有

$$x^T(I+A^TA)x=x^Tx+(Ax)^T(Ax)\geq x^Tx>0.$$

显然 $B=I+A^TA$ 是一个正定阵 (注意, 正定阵要求有对称性).
于是有 $|B|\neq 0$. 由 $B=(A+I)^T(A+I)$ 可得

$$|I+A|\neq 0, |I+A^T|\neq 0,$$

即 $I+A, I+A^T$ 都为可逆矩阵, 同理有 $I-A, I-A^T$ 也为可逆矩阵.
于是由 $A^T=-A$ 可得

$$\begin{aligned}\left(I-A^T\right)(I-A)&=\left(I+A^T\right)(I+A)\\ \left(I+A^T\right)^{-1}\left(I-A^T\right)&=(I+A)(I-A)^{-1}.\end{aligned}$$

于是有

$$\left((I-A)(I+A)^{-1}\right)^T=\left((I-A)(I+A)^{-1}\right)^{-1},$$

即矩阵 $(I-A)(I+A^{-1})$ 为正交矩阵.

□

例 8.15: 设 A 是 n 阶方阵，证明：存在一可逆矩阵 B 及一个幂等矩阵 C 使 $A=BC$

☞ **证:** 设 $\text{rank(A)}=\text{r}$，则存在可逆矩阵 P, Q 使得

$$A=P\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q=(PQ)\left(Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q\right).$$

取 $B=PQ, C=Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q$ 即可. □

例 8.16: 设 A 是 n 阶矩阵，t 是复数. 证明：当复数的模 $|t|$ 充分大时，$tI+A$ 是可逆矩阵.

☞ **证:** 令

$$f(t)=|tI+A|,$$

那么显然 $f(t)$ 是一个首项系数为 1 的 n 次多项式. 不妨设为

$$f(t)=t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0.$$

当 $t\neq 0$ 时有

$$f(t)=t^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{t}+\cdots+\frac{a_0}{t^n}\right).$$

两边同时取模, 有

$$|f(t)|=|t^n|\left|1+\frac{a_{n-1}}{t}+\cdots+\frac{a_0}{t^n}\right|\geq |t|^n\left(1-\frac{|a_{n-1}|}{|t|}-\cdots-\frac{|a_0|}{|t^n|}\right).$$

显然可取到 t 的模 $|t|$ 充分大, 使得

$$1-\frac{|a_{n-1}|}{|t|}-\cdots-\frac{|a_0|}{|t^n|}>0.$$

这时有 $|f(t)|>0$, 即 $|f(t)|\neq 0$, 也即有 $f(t)\neq 0$. 这意味着矩阵 $tI+A$ 的行列式不为零, 于是有 $tI+A$ 为可逆阵. □

例 8.17: 设 H 是二阶正定矩阵，求证：存在正数 $p>0$ 使得

$$(x,y)\,H\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\geq p\left(x^2+y^2\right).$$

☞ **证:** 令 $v=[x,y]^T$ 并且 H 有特征分解 $H=P^TDP$，其中 D 是特征值为 λ_1,λ_2 的 2×2 对角矩阵. 令 $\lambda_1\geq\lambda_2$. 定义 $y=Pv=[y_1,y_2]^T$，则

$$v^THv=v^TP^TDPv=y^TDy=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2\geq\lambda_2(y_1^2+y_2^2)=\lambda_2(x^2+y^2)\tag{8.1}$$

记 $y_1^2+y_2^2=x^2+y^2$. Also check if you derive something in the same lines for any $N\times N$ positive definite matrix. □

例 8.18:

(1) 设 A,B,C 是正定矩阵，且假设 ABC 对称的，则 ABC 是否是正定的？为什么？

(2) 设 A,B,C,D 是正定的，且 $ABCD$ 是对称的，则是否有 $ABCD$ 是正定的，为什么？

☞ **证:**

(1) 设 $D=ABC$, 由于 B 是正定的, 所以我们可以定义开方 $B^{\frac{1}{2}}$. 令

$$A'=B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}},C'=B^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}},D'=B^{\frac{1}{2}}DB^{\frac{1}{2}}.$$

我们有

$$D' = A'C'.$$

且 A', C', D' 都是对称的, 其中 A', C' 是正定的.
于是我们可以对 A' 定义 $(A')^{-\frac{1}{2}}$, 注意我们有

$$(A')^{-\frac{1}{2}}D'(A')^{-\frac{1}{2}} = (A')^{\frac{1}{2}}C'(A')^{-\frac{1}{2}}.$$

注意到 C' 是正定的, 故 D' 是正定的, 那么 D 也是正定的.

(2) 存在反例, 考察

$$A = \begin{bmatrix} 58 & 50 & 30 \\ 50 & 66 & 38 \\ 30 & 38 & 22 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 65 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 34 & 26 & 46 \\ 26 & 56 & 52 \\ 46 & 52 & 83 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{176398144863}{734764024} & \frac{2084349747}{734764024} & -\frac{401393975}{91845503} \\ \frac{2084349747}{734764024} & 123 & 74 \\ -\frac{401393975}{91845503} & 74 & 45 \end{bmatrix}.$$

此时有

$$ABCD = \begin{bmatrix} \frac{3747748968739763}{91845503} & \frac{4372037328164921}{91845503} & \frac{2546983749851550}{91845503} \\ \frac{4372037328164921}{91845503} & \frac{5099682487522571}{91845503} & \frac{2970895299665430}{91845503} \\ \frac{2546983749851550}{91845503} & \frac{2970895299665430}{91845503} & \frac{1730738016057502}{91845503} \end{bmatrix}.$$

或者考察另一个稍微简单的例子

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -7 & 8 \end{pmatrix},$$

此时有

$$ABCD = \begin{pmatrix} -7 & 14 \\ 14 & -29 \end{pmatrix}.$$

□

例 8.19: 设实数 $a_i > 1, i = 1, 2, \ldots, n$ 是互不相等的数. 定义如下矩阵

$$B = \left(\frac{1}{\ln(a_i + a_j)} \right)_{n \times n}.$$

证明: B 是可逆的, 且是正定的.

☞ **证:** 对任意 $s > 0$, 记 $A(s) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 为矩阵

$$A(s)_{ij} = \frac{1}{(a_i + a_j)^s}$$

对任何由 $u_i, i = 1 \ldots n$ 组成的非零列向量 $u \in \mathbb{R}^n$, 我们有

$$u^T A(s)\, u = \sum_{1 \le i,j \le n} \frac{u_i u_j}{(a_i + a_j)^s} = \sum_{i \le i,j \le n} \frac{u_i u_j}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-(a_i + a_j)t} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \left(\sum_{i=1}^n u_i e^{-a_i t} \right)^2 dt > 0$$

由于 u_i 不全为零，这就表明 t 的函数 $\sum_{i=1}^{n} u_i e^{-a_i t}$ 总不等于 0.

注意到对 $x>1$, $\frac{1}{\log x}$ 可表示成绝对收敛的积分：

$$\frac{1}{\log x}=\int_0^{\infty}\frac{1}{x^s}ds$$

因此，我们有

$$u^TAu=\sum_{1\le i,j\le n}\frac{u_iu_j}{\log(a_i+a_j)}=\sum_{1\le i,j\le n}\int_0^{\infty}\frac{u_iu_j}{(a_i+a_j)^s}ds=\int_0^{\infty}u^TA(s)\,u\,ds>0$$

这就表明 A 是正定的，因此也是可逆的. □

例 8.20: 设 $A^n-I=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 且设 $f_n=\gcd(a_n,b_n,c_n,d_n)$. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{f_n}$ 存在，并求极限.

✎ **解:** 解法一: 设 $A^n=\begin{pmatrix}x_n & y_n\\ z_n & w_n\end{pmatrix}$, 则 $A^{n+1}=\begin{pmatrix}3x_n+4y_n & 2x_n+3y_n\\ 3z_n+4w_n & 2z_n+3w_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{n+1} & y_{n+1}\\ z_{n+1} & w_{n+1}\end{pmatrix}$,
我们得到递推关系

$$\begin{cases}x_{n+1}=3x_n+4y_n\\ y_{n+1}=2x_n+3y_n\\ z_{n+1}=3z_n+4w_n\\ w_{n+1}=2z_n+3w_n\end{cases}.$$

则 $\frac{x_{n+2}-3x_{n+1}}{4}=2x_n+3\frac{x_{n+1}-3x_n}{4}\Rightarrow x_{n+2}=6x_{n+1}-x_n$，可求得 $x_n=w_n=\frac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]$, $y_n=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n-\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]$, $z_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n-\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]$, 因此有 $a_n=d_n=\frac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]-1$, $b_n=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n-\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]$, $c_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n-\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]$，整理得

$$\begin{aligned}a_n=d_n&=\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^n-\left(\sqrt{2}-1\right)^n\right]^2,\\ b_n&=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^n+\left(\sqrt{2}-1\right)^n\right]\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^n-\left(\sqrt{2}-1\right)^n\right]\\ c_n&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^n+\left(\sqrt{2}-1\right)^n\right]\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^n-\left(\sqrt{2}-1\right)^n\right].\end{aligned}$$

由于 $n\to\infty$, $\left(\sqrt{2}+1\right)^n+\left(\sqrt{2}-1\right)^n$, $\left(\sqrt{2}+1\right)^n-\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ 均趋于 ∞，故 f_n 亦趋于 ∞，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{f_n}=0$.

解法二: 我们发现有 $A=B^2$, 其中

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

令

$$B^n=\begin{pmatrix}x_n & y_n\\ z_n & x_n\end{pmatrix}.$$

由于 $\det B^n=(-1)^n$, 则有 $x_n^2=z_ny_n+(-1)^n$. 且容易归纳得到 $z_n=2y_n$. 假设 n 是奇数, 则有 $2x_n$ 都整除 A^n-I 的元素. 这是因为

$$A^n=(B^n)^2=\begin{pmatrix} x_n^2+y_nz_n & 2x_ny_n \\ 2x_nz_n & x_n^2+y_nz_n \end{pmatrix}.$$

那么 $y_nz_n=x_n^2+1$, 所以

$$A^n-I=\begin{pmatrix} 2x_n^2 & 2x_ny_n \\ 2x_nz_n & 2x_n^2 \end{pmatrix}.$$

同理 n 是偶数时, 则矩阵 A^n-I 每个元素都整除 $2y_n$, 对于偶数 n 我们有 $y_nz_n=x_n^2-1$,s 是因为

$$A^n-I=\begin{pmatrix} 2y_nz_n & 2x_ny_n \\ 2x_nz_n & 2y_nz_n \end{pmatrix},$$

所以当 $n\to\infty$ 时有 $x_n,y_n\to\infty$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{f_n}=0$. □

例 8.21: 设两个非零矩阵 $M,N\in M_2(C)$，满足 $M^2=N^2=O_2,MN+NM=I_2$，其中 O_2,I_2 分别是二阶零矩阵和二阶单位阵，证明：存在可逆矩阵 $A\in M_2(C)$ 使得 $M=A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}A^{-1},N=A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}A^{-1}$.

☞ **证:** 由 $M^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 知 M 的 Jordan 标准型要么是 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 要么是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

对于前者, 得 $M=0$, 则与 $MN+NM=I_2$ 矛盾, 从而有可逆矩阵 P_1 使 $P_1^{-1}MP_1=M_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 记 $P_1^{-1}NP_1=N_1$, 则有 $N_1^2=0,M_1N_1+N_1M_1=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$.

设 $N_1=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则由

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

得 $c=1,d=-a$. 又由

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -a \end{pmatrix}^2=0$$

得 $b=-a^2$, 从而

$$N_1=\begin{pmatrix} a & -a^2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}.$$

取 $Q_1^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ & 1 \end{pmatrix}$, 则 $Q_1=\begin{pmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{pmatrix}$ 有

$$Q_1^{-1}N_1Q_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

且

$$Q_1^{-1}M_1Q_1 = M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

取 $A = P_1Q_1$, 有

$$M = A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}A^{-1}, N = A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}A^{-1}.$$

□

例 8.22: 设 $M_2(R)$ 表示所有二阶实矩阵的集合，证明：

(1) 对任意 $A \in M_2(R)$，存在矩阵 $B, C \in M_2(R)$ 使得 $A = B^2 + C^2$;

(2) 是否存在矩阵 $B, C \in M_2(R)$ 使得 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B^2 + C^2, BC = CB$.

证:

(1) 由熟悉结论: 对于任意的二阶矩阵 A, 满足

$$A^2 - (\mathrm{tr}A)\,A + (\det(A))\,E = 0,$$

则显然有

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{tr}\,(A+tE) = +\infty$$

且

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\det(A+tE)}{\mathrm{tr}\,(A+tE)} - t = \lim_{t\to\infty} \frac{\det(A) - t^2}{\mathrm{tr}\,(A+tE)} = -\infty,$$

则有

$$\begin{aligned} A = (A+tE) - tE &= \frac{1}{\mathrm{tr}\,(A+tE)}(A+tE)^2 + \left(\frac{\det(A+tE)}{\mathrm{tr}\,(A+tE)} - t\right)E \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{tr}\,(A+tE)}}(A+tE)\right)^2 + \left(\sqrt{t - \frac{\det(A+tE)}{\mathrm{tr}\,(A+tE)}}\right)^2(-E) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{tr}\,(A+tE)}}(A+tE)\right)^2 + \left(\sqrt{t - \frac{\det(A+tE)}{\mathrm{tr}\,(A+tE)}}\right)^2\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2. \end{aligned}$$

(2) 不存在. 考虑 $B, C \in M_2(R)$, 考虑 $B + \mathrm{i}C, B - \mathrm{i}C \in M_2(R)$, 若 $BC = CB$, 则有

$$(B+\mathrm{i}C)(B-\mathrm{i}C) = B^2 + C^2,$$

则有

$$\det(B^2+C^2) = \det(B+\mathrm{i}C)\det(B-\mathrm{i}C) = |B+\mathrm{i}C|^2 > 0.$$

这和 $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ 矛盾.

□

第 9 课时 矩阵的基本性质 2

例 9.1: 设 $\mathrm{SL}_2(Z) = \{A \mid A_{2\times 2}, \det(A) = 1\}$.

(1) 给出一组例子使得 $A^2 + B^2 = C^2, A, B, C \in \mathrm{SL}_2(Z)$;

(2) 证明不存在矩阵 $A, B, C \in \mathrm{SL}_2(Z)$ 满足

$$A^4 + B^4 = C^4.$$

✎ 解:

(1) 取

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 对任意二阶矩阵 A 满足 $A^2 - (\mathrm{tr}A)A + (\det(A))E = 0$, 其中 $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$. 假设有 $A, B, C \in \mathrm{SL}_2(Z), A^4 + B^4 = C^4$, 令

$$a = \mathrm{tr}(A), b = \mathrm{tr}(B), c = \mathrm{tr}(C),$$

则有

$$A^4 = (aA - E)^2 = a^2A^2 - 2aA + E = \left(a^3 - 2a\right)A + \left(1 - a^2\right)E,$$

则等价

$$(a^3 - 2a)A + (b^3 - 2b)B + (2 - a^2 - b^2)E = (c^3 - 2c)C + (1 - c^2)E.$$

两边的迹相等, 则有

$$a^4 + b^4 - 4(a^2 + b^2) = c^4 - 4c^2 - 2,$$

则

$$a^4 + b^4 - c^4 \equiv -2 \pmod{4},$$

则 a, b 是奇数, 且 c 是偶数, 则有

$$a^4 + b^4 - 4\left(a^2 + b^2\right) \equiv 2 \pmod{8}$$

且

$$c^4 - 4c^2 - 2 \equiv -2 \pmod{8}$$

矛盾.

□

例 9.2: A, B 是不同的两个矩阵, 满足

$$A^3 = B^3, A^2B = B^2A,$$

求 $\det(A^2 + B^2)$.

✎ 解: 注意到

$$(A^2 + B^2)(A - B) = A^3 - A^2B + AB^2 - B^3 = 0.$$

□

例 9.3: 设 A, B 是 n 阶实数矩阵, 且满足 $AB = 0$, 求证

$$\det(I_n + A^{2p} + B^{2q}) \geq 0, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}^+.$$

☞ 证: 先介绍一个引理. 由上面引理知

引理 9.1

$$A^2 + I_n = (A + iI_n)(A - iI_n).$$

♣

$$\det\left(A^2 + I_n\right) = \left|\det\left(A + iI_n\right)\right|^2 \geq 0,$$

故有

$$\begin{aligned}
\det\left(I_n + A^{2p} + B^{2q}\right) &= \det\left(I_n + A^{2p} + B^{2q} + A^{2p}B^{2q}\right) \\
&= \det\left(I_n + A^{2p}\right)\det\left(I_n + B^{2q}\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

□

例 9.4: 设 A, B, C 是 n 阶实数矩阵, 满足两两可交换, 且 $ABC = 0$, 求证

$$\det\left(A^3 + B^3 + C^3\right)\det\left(A + B + C\right) \geq 0.$$

☞ 证: 注意到

$$\begin{aligned}
A^3 + B^3 + C^3 &= A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC \\
&= \left(A + B + C\right)\left(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - AC\right) \\
&= \left(A + B + C\right)\left(A + \omega B + \omega^2 C\right)\left(A + \omega^2 B + \omega C\right) \\
&= \left(A + B + C\right)\left(A + \omega B + \omega^2 C\right)\overline{\left(A + \omega B + \omega^2 C\right)}.
\end{aligned}$$

所以

$$\det\left(A^3 + B^3 + C^3\right)\det\left(A + B + C\right) = \left(\det\left(A + B + C\right)\right)^2\left|\det\left(A + \omega B + \omega^2 C\right)\right|^2 \geq 0.$$

□

例 9.5: 设 A, B 是两个 2 阶实数矩阵, 求证:

$$\det\left(A^2+B^2+(A-B)^2\right) \geq 3\det(AB-BA).$$

☞ **证:**

引理 9.2

我们有

$$\det(A+B) = \det A + \det B + \operatorname{tr}(A\cdot \operatorname{adj}(B))$$
$$\operatorname{tr}(A\cdot \operatorname{adj}(B)) = \operatorname{tr}(B\cdot \operatorname{adj}(A)).$$

这些结果从许以超矩阵论可以找到.

设 $t = \operatorname{tr}(T\cdot \operatorname{adj}(U)) = \operatorname{tr}(U\cdot \operatorname{adj}(T))$, 则有

$$\det(T-U) = \det(T) + \det(U) - t$$
$$\det(T+U) = \det(T) + \det(U) + t.$$

设 $A = TU-UT, B = T^2-U^2$, 则有

$$\det(T-U)\det(T+U) = \det(TU-UT) + \det\left(T^2-U^2\right).$$

即有

$$-\det\left(T^2-U^2\right) = \det(TU-UT) + t^2 - (\det(T)+\det(U))^2.$$

设 $A = T^2, B = U^2, A = T^2, B = -U^2$ 相加有平行四边形公式

$$\det\left(T^2+U^2\right) + \det\left(T^2-U^2\right) = 2\det\left(T^2\right) + 2\det\left(U^2\right).$$

从而有

$$\begin{aligned}\det\left(T^2+U^2\right) &= 2\det\left(T^2\right) + 2\det\left(U^2\right) - \det\left(T^2-U^2\right)\\ &= 2\det\left(T^2\right) + 2\det\left(U^2\right) + \det(TU-UT) + t^2 - (\det(T)+\det(U))^2\\ &= \det(TU-UT) + (\det(T)-\det(U))^2 + t^2 \geq \det(TU-UT).\end{aligned}$$

取

$$T = \sqrt{3}(A-B), U = A+B.$$

□

第 10 课时 线性空间

例 10.1: 以 $P^{3\times 3}$ 表示数域 P 上所有 3×3 矩阵组成的线性空间. 对于 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}$, 求所有与 A 可交换 (即满足 $AB=BA$) 的矩阵 B 组成的线性子空间的维数及一组基.

✎ **解:** 对于矩阵 A, 利用 $|\lambda I-A|=0$ 可解得它的三个特征值分别为 0,1,3.

对于特征值 0, 利用 $(0I-A)x=0$ 找到它的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$..

对于特征值 1, 利用 $(I-A)x=0$ 找到它的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$..

对于特征值 3, 利用 $(3I-A)x=0$ 找到它的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$..

那么若取矩阵

$$P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&0&1\\1&0&2\end{pmatrix},$$

易求得它的逆矩阵为

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\1&-1&0\\0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

注意到

$$A=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}.$$

那么若取 $B=PCP^{-1}$. 由 $AB=BA$ 易得

$$C\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}C,$$

知 C 的非主对角线上的元素必都为零, 且主对角线上的三个元素可以任取.

那么可取 $E_{11}, E22, E_{33}$, 使得

$$B = P\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} P^{-1} = c_1 PE_{11}P^{-1} + c_2 PE_{22}P^{-1} + c_3 PE_{33}P^{-1}.$$

可知由矩阵 B 组成的线性子空间的维数是 3, 它的一组基为

$$PE_{11}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, PE_{22}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, PE_{33}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

□

例 10.2: 设 V 是实函数空间, 又 V_1 与 V_2 是 V 的子空间, 其中 $V_1 = L(1, x, \sin x), V_2 = L(\cos 2x, \cos^2 x)$.

(1) **求 V_1 的一组基和维数.**
(2) **求 V_2 的一组基和维数.**
(3) **求 $V_1 + V_2$ 的一组基和维数.**
(4) **求 $V_1 \cap V_2$ 的一组基和维数.**

✎ 解:

(1) 若令

$$k_1 \cdot 1 + k_2 x + k_3 \sin x = 0.$$

那么取 $x = 0$ 代入可得 $k_1 = 0$, 于是有

$$k_2 x + k_3 \sin x = 0.$$

把 $x = \pi$ 代入可得 $k_2 = 0$, 于是有

$$k_3 \sin x = 0.$$

然后将 $x = \frac{\pi}{2}$ 代入可得 $k_3 = 0$.

于是 $1, x, \sin x$ 线性无关, 得 V_1 的一组基为 $1, x, \sin x$, 维数为 3.

(2) 注意到 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$. 那么比较 1 与 $\cos 2x$ 是否线性无关即可. 令

$$l_1 \cdot 1 + l_2 \cos 2x = 0.$$

令 $x = \frac{\pi}{4}$ 可得 $l_1 = 0$, 于是

$$l_2 \cos 2x = 0.$$

再令 $x = 0$ 可得 $l_2 = 0$.

于是 1 与 $\cos 2x$ 线性无关, 那么 V_2 的一组基为 $1, \cos 2x$, 维数为 2.

(3) 看以下线性组合

$$h_1 \cdot 1 + h_2 x + h_3 \sin x + h_4 \cos 2x = 0.$$

将 $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 分别代入可得到以下线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & 1 & -1 \\ 1 & \pi & 0 & 1 \\ 1 & \frac{3\pi}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

易解得 $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0$, 即知 $1, x, \sin x, \cos 2x$ 线性无关. 于是有 $V_1 + V_2$ 的维数为 4, 它的一组基为 $1, x, \sin x, \cos 2x$.

(4) 注意到 $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) = 3 + 2 - 4 = 1$, 且 $1 \in V_1 \cap V_2$, 那么有 $V_1 \cap V_2$ 的维数为 1, 它的一个基为 1.

□

例 10.3: 已知 $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$. **求** $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$ **的基与维数.**

✎ **解:** W_1 中的任意一个元素可写成

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + b\left(E_{13} + E_{23}\right) + c\left(E_{21} + E_{32}\right) + dE_{33}$$

知 $\dim W_1 = 4$.

W_2 中的任意一个元素可写成

$$\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = xE_{11} + yE_{13} + zE_{22}$$

知 $\dim W_2 = 3$.

那么有

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a + x)\, E_{11} + (b + y)\, E_{13}$$
$$+ bE_{23} + (c + z)\, E_{21} + cE_{32} + dE_{33}.$$

由 z 的任意性, 固定 c,$c + z$ 可取任何实数.

由 y 的任意性, 固定 b,$b + y$ 可取任何实数.

显然 $a + x$ 可取任意实数.

那么可得空间 $W_1 + W_2$ 是由 $E_{11}, E_{13}, E_{23}, E_{21}, E_{32}, E_{33}$ 张成的, 于是 $\dim(W_1 + W_2) = 6$, 且 $W_1 + W_2$ 的基可取为 $E_{11}, E_{13}, E_{23}, E_{21}, E_{32}, E_{33}$.

注意到

$$\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1+W_2)=1$$

且显然有 $E_{11}\in W_1\cap W_2$, 那么空间 $W_1\cap W_2$ 的维数为 1, 基可取为 E_{11}. □

例 10.4: 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$($\mathbb{R}$ 表示实数域). 记 $S(A)=\{Z\,|AZ=ZA,Z\in\mathbb{R}^{n\times n}\}$.

(1) 证明:$S(A)$ 为 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间.

(2) 若取 A 为对角阵 $\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & n\end{pmatrix}$, 求 $S(A)$ 的基与维数.

✎ 解:

(1) 显然只要验证 $S(A)$ 对加法和数乘封闭即可.
对 $\forall Z_1,Z_2\in S(A),\forall k\in\mathbb{R}$, 有

$$A(Z_1+Z_2)=AZ_1+AZ_2=Z_1A+Z_2A=(Z_1+Z_2)A$$

知 $Z_1+Z_2\in S(A)$.

$$(kZ_1)A=kAZ_1=A(kZ_1)$$

知 $kZ_1\in S(A)$. 即知 $S(A)$ 为一个子空间.

(2) 对任何矩阵 C, 若

$$C\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & n\end{pmatrix}C,$$

那么比较等式两边易得

$$C(i,j)=0(i\neq j).$$

于是 $S(A)$ 的维数为 n 维它的一组基可取为

$$E_{11},E_{22},\cdots,E_{nn}.$$

□

注意到以下定理.

例 10.5: 设 V 是由矩阵 A 的全体实系数多项式组成的线性空间, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \omega & 0\\ 0 & 0 & \omega^2\end{pmatrix},\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},$$

则 V 的一组基是__________.

✎ 解: 答案是 “I,A,A^2” .

显然有 $A^3=I$, 那么 $A^k(k\geq 3)$ 都可表示为 I,A,A^2 的线性组合, 于是任意次数的多项式都可表为 I,A,A^2 的线性组合. 现在只需证 I,A,A^2 是线性无关的即可.

定理 10.1

域 F 上线性空间 V 的一个非空子集 U, 如果对于 V 的加法与数量乘法都封闭, 即

$$u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U,$$
$$u \in U, k \in F \Rightarrow ku \in U.$$

这是因为若 U 对加法与数量乘法都封闭, 那么可以验证它满足构成线性空间所需的 8 个条件.

做线性组合

$$K_1 I + k_2 A + k_3 A^2 = 0$$

可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

它的系数矩阵是关于 $1, \omega, \omega^2$ 的 Vander Monde 行列式, 由于 $1, \omega, \omega^2$ 互不相等, 显然这个系数矩阵的行列式不为零, 那么方程组只有零解, 即

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

于是 I, A, A^2 是线性无关的. □

例 10.6: 设 $A \in F^{n\times n}$(F 是数域).

(1) 证明: 所有与 A 可交换的矩阵之集合 $C(A)$ 是 $F^{n\times n}$ 的一个子空间.

(2) 对于对角阵 $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 当诸 a_i 互不相同时求 $C(A)$ 的维数和一组基.

(3) 若 $n = 3$, 并设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $C(A)$ 的维数和一组基.

✎ 解:

(1) 设 $B, C \in C(A), k \in F$, 那么由

$$(B + C)A = BA + CA = AB + AC = A(B + C),$$
$$(kB)A = kBA = kAB = A(kB)$$

知 $B + C \in C(A), kB \in C(A)$, 即 $C(A)$ 对于加法和数乘封闭, 显然 $C(A)$ 是个子空间.

(2) 若取 $B \in C(A)$, 对于 $A = \mathrm{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 由

$$B\mathrm{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \mathrm{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}B$$

有 $(a_i - a_j)B(i,j) = 0$, 由诸 a_i 各不相同可得

$$B(i,j) = 0 \quad (i \neq j)$$
$$B(i,j) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)\text{则可任取}$$

显然此时 $C(A)$ 中的矩阵必是个对角阵, 它的维数是 n, 其一组基是

$$E_{11}, E_{22}, \cdots, E_{nn}.$$

(3) 若令矩阵

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

那么有 $A = I - J$, 对于 $B \in C(A)$, 有

$$AB = BA \Leftrightarrow JB = BJ.$$

那么利用 $JB = BJ$, 把 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ 代入这个等式, 比较等式两边易得 $C(A)$ 的一个基为 I, J, J^2, 显然它的维数为 3.

□

例 10.7: 设 V 是数域 P 上的一个 3 维线性空间,ξ_1, ξ_2, ξ_3 是它的一组基,f 是 V 上的一个线性函数, 已知 $f(\xi_1 + \xi_3) = 1, f(\xi_2 - 2\xi_3) = -1, f(\xi_1 + \xi_2) = -3$, 则 $f(\xi + 2\xi_2 + 3\xi_3) =$__________.

✎ 解: 答案为 "-19" .

由题目条件并注意 f 是线性的, 可得 $f(\xi_1) = 4, f(\xi_2) = -7, f(\xi_3) = -3$, 那么有

$$f(\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3) = f(\xi_1) + 2f(\xi_2) + 3f(\xi_3) = -19.$$

□

例 10.8: 复数域上全体 5 阶反对称矩阵, 对于矩阵的加法与数乘是实数域上的线性空间, 它的维数等于__________.

✎ 解: 答案是 "10" .

对于 n 阶反对称矩阵, 它的维数为 $\frac{n^2-n}{2}$, 把 $n = 5$ 代入即可得答案为 10. □

例 10.9: 四元多项式环 $C[x_1, x_2, x_3, x_4]$ 中由所有 6 次齐次多项式生成的复空间的维数等于__________.

✎ 解: 答案是 "210" .

四元多项式环 $C[x_1, x_2, x_3, x_4]$ 中由 6 次齐次多项式生成的复空间的基共有 $C_{6+4}^4 = C_{10}^4 =$ 210 个, 那么它的维数必为 210. □

第 11 课时 线性子空间

例 11.1: 设 A 为数域 P 上 n 阶可逆矩阵. 任意将 A 分为两个子块 $A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$. 证明 n 维线性空间 P^n 是齐次线性方程组 $A_1X=0$ 的解空间 V_1 与 $A_2X=0$ 的解空间 V_2 的直和.

证: 由于 A 是可逆矩阵, 那么 A 的所有行向量线性无关, 不妨设 $r(A_1)=r$, 那么显然有

$$r(A_2)=n-r.$$

注意到 $AA^{-1}=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}A^{-1}=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}$, 那么有

$$A_1A^{-1}=\begin{pmatrix} I_r & O \end{pmatrix}, A_2A^{-1}=\begin{pmatrix} O & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

对任意的 $X\in\mathbb{R}^n$, 不妨设

$$AX=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \text{其中}\alpha,\beta\text{分别是}r\text{维和}n-r\text{维向量}.$$

那么有

$$X=A^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} O \\ \beta \end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ O \end{pmatrix}:=X_1+X_2.$$

有

$$A_1X_1=A_1A^{-1}\begin{pmatrix} O \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O \\ \beta \end{pmatrix}=0,$$
$$A_2X_2=A_2A^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ O \end{pmatrix}=0,$$

知 $X_1\in V_1, X_2\in V_2$. 显然 V 为 V_1 和 V_2 的和. 又有 $\dim V_1=n-r, \dim V_2=n-(n-r)=r, \dim(V_1+V_2)\le\dim V=n$. 于是由维数公式

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2$$

可知 $\dim(V_1\cap V_2)\le 0$, 必有 $\dim(V_1\cap V_2)=0$, 也即

$$V_1\cap V_2=\{0\}.$$

显然 V 为 V_1 和 V_2 的直和. $\square$

笔记: 下面几点在解题过程中经常会用到.

(1) 子空间的维数公式.

设 V_1, V_2 都是域 F 上线性空间 V 的有限维子空间, 则 $V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$ 也是有限维空间, 并且

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim\left(V_1 + V_2\right) + \dim\left(V_1 \cap V_2\right).$$

(2) 直和的定义.

设 V_1, V_2 都是域 F 上线性空间 V 的子空间, 如果 $V_1 + V_2$ 中的每个向量 α 能唯一地表示成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2,$$

则称 $V_1 + V_2$ 是直和, 记为 $V_1 \oplus V_2$.

(3) 设 V_1, V_2 都是域 F 上线性空间 V 的有限维子空间, 则下列命题互相等价:

(a) $V_1 + V_2$ 是直和;

(b) $V_1 + V_2$ 中零向量的表示法唯一;

(c) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$;

(d) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$;

(e) V_1 的一个基与 V_2 的一个基合起来是 $V_1 + V_2$ 的一个基.

(4) 设 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间, 如果它们满足:

(a) $V_1 + V_2 = V$;

(b) $V_1 + V_2$ 是直和.

则称 V 是 V_1 与 V_2 的直和, 记为 $V = V_1 \oplus V_2$. 此时称 V_1 是 V_2 的一个补空间, 也称 V_2 是 V_1 的一个补空间.

例 11.2: 设 W, W_1, W_3 是向量空间 V 的子空间,$W_1 \subseteq W_2, W_1 \cap W = W_2 \cap W, W_1 + W = W_2 + W$. 证明:$W_1 = W_2$.

☞ **证:** 对于 $i = 1, 2$, 都有

$$\dim\left(W_i + W\right) = \dim W_i + \dim W - \dim\left(W_i \cap W\right).$$

由题目条件有

$$\dim\left(W_1 + W\right) = \dim\left(W_2 + W\right), \dim\left(W_1 \cap W\right) = \dim\left(W_2 \cap W\right).$$

那么显然有

$$\dim W_1 = \dim W_2.$$

又由 $W_1 \subseteq W_2$, 可知

$$W_1 = W_2.$$

□

例 11.3: **设** $M \in P^{n\times n}, f(x), g(x) \in P[x]$, **且** $(f(x), g(x)) = 1$. **令** $A = f(M), B = g(M), W, W_1, W_2$ **分别为线性方程组** $ABX = 0, AX = 0, BX = 0$ **的解空间. 证明:**

$$W = W_1 \oplus W_2.$$

☞ **证:** 由题 $(f(x), g(x)) = 1$, 那么存在 $u(x), v(x) \in P[x]$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

于是有

$$u(M)f(M) + v(M)g(M) = I. \tag{1}$$

若 $\alpha \in W$, 那么有 $f(M)g(M)\alpha = 0$, 给等式 (1) 两边同时作用 α, 有

$$\alpha = v(M)g(M)\alpha + u(M)f(M)\alpha := \alpha_1 + \alpha_2.$$

注意到

$$A\alpha_1 = v(M)f(M)g(M)\alpha = 0,$$
$$A\alpha_2 = u(M)f(M)g(M)\alpha = 0.$$

于是有 $\alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2$, 即有 $W = W_1 + W_2$.

若 $\beta \in W_1 \cap W_2$, 则有

$$f(M)\beta = g(M)\beta = 0.$$

于是将等式 (1) 两边同时作用 β, 有

$$\beta = u(M)f(M)\beta + v(M)g(M)\beta = 0 + 0 = 0.$$

即知 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, 于是有 $W = W_1 \oplus W_2$. □

例 11.4: **设数域** K **上的** n **维矩阵** A, B, C, D **关于矩阵的乘法两两交换, 且满足** $AC + BD = I$, **又设线性方程组** $ABX = 0, BX = 0$ **与** $AX = 0$ **的解空间分别是** W, I, M. **证明:**W **是** I **与** M **的直和.**

☞ **证:** 任取 $\alpha \in W$, 那么有 $AB\alpha = 0$, 注意到

$$AC + BD = I_n. \tag{1}$$

将等式 (1) 两边同时作用 α, 那么有

$$\alpha = AC\alpha + BD\alpha := \alpha_1 + \alpha_2.$$

注意到 A, B, C, D 关于乘法两两可交换, 于是有

$$B\alpha_1 = CAB\alpha = 0, A\alpha_2 = DAB\alpha = 0,$$

则有

$$\alpha_1 \in I, \alpha_2 \in M.$$

即有 $W = I + M$.

若 $\beta \in I \cap M$, 那么有 $B\beta = A\beta = 0$, 于是将等式 (1) 两边同时作用 β 有

$$\beta = CA\beta + DB\beta = 0 + 0 = 0.$$

即有 $I \cap M = \{0\}$. 那么有 $W = I \oplus M$. □

例 11.5: 设 A 为数域 F 上的 n 阶矩阵,$f(x), g(x) \in F[x]$. 证明: 如果 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式, 那么齐次线性方程组 $d(A)X = 0$ 的解空间等于 $f(A)X = 0$ 的解空间与 $g(A)X = 0$ 的解空间的交集.

☞ **证:** 由题知, 存在 $u(x), v(x) \in F[x]$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$$

且存在 $h(x), k(x)$ 使得

$$f(x) = h(x)d(x), g(x) = k(x)d(x),$$

那么有

$$u(A)f(A) + v(A)g(A) = d(A), \tag{1}$$

$$f(A) = h(A)d(A), g(A) = k(A)d(A). \tag{2}$$

不妨设 $d(A)X = 0$ 的解空间为 W,$f(A)X = 0$ 的解空间为 U,$g(A)X = 0$ 的解空间为 V.

若 $d(A)X = 0$, 那么由 (2) 知

$$f(A)X = h(A)d(A)X = 0, g(A)X = k(A)d(A)X = 0.$$

于是有

$$W \subseteq U \cap V.$$

若 $f(A)X = 0$ 且 $g(A)X = 0$, 那么由 (1) 可知

$$d(A)X = u(A)f(A)X + v(A)g(A)X = 0.$$

于是有

$$U \cap V \subseteq W.$$

那么可得

$$W = U \cap V.$$

□

参考文献

[1] 数学分析习题演练, 周民强, 科学出版社

[2] 数学分析精选习题全解, 徐森林, 清华大学出版社

[3] 高等数学竞赛与提高, 毛京中, 北京理工大学出版社

[4] 研究生入学考试考点解析与真题详解 (高等代数), 电子工业出版社

[5] 西西主页 1

[6] 西西主页 2