# 2013 年第四届全国大学生数学竞赛决赛

# （数学类）参考答案

**一、【参考证明】:** 将双曲线图形进行 45 度旋转，可以假定双曲线方程为 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$. 设直线 $l$ 交双曲线于 $\left(a,\dfrac{1}{a}\right),\left(ta,\dfrac{1}{ta}\right),(t>1)$，与双曲线所围的面积为 $A$，则有

$$A=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)(t-1)-\int_a^{ta}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)(t-1)-\ln t=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)-\ln t.$$

令 $f(t)=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)-\ln t$. 由

$$f(1)=0,f(+\infty)=+\infty,f'(t)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right)^2>0\,(t>1)$$

所以对于常数 $A$，存在唯一常数 $t$，使得 $A=f(t)$. $l$ 与双曲线的截线段中点坐标为

$$x=\frac{1}{2}(1+t)a,y=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{a}.$$

于是，中点的轨迹曲线为 $xy=\dfrac{1}{4}(1+t)\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$. 故终点轨迹为双曲线，也就是函数

$$y=\frac{1}{4}(1+t)\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{x}$$

给出的曲线. 该曲线在上述终点处的切线的斜率为

$$k=-\frac{1}{4}(1+t)\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{ta^2},$$

它恰好等于过两交点 $\left(a,\dfrac{1}{a}\right),\left(ta,\dfrac{1}{ta}\right)$ 的直线 $l$ 的斜率:

$$\frac{\dfrac{1}{ta}-\dfrac{1}{a}}{ta-a}=-\frac{1}{ta^2}.$$

故 $l$ 为轨迹曲线的切线.

**二、【参考证明】:** 由题设 $x_1\in[a,b],f(x)\in[a,b]$，$x_2=\dfrac{1}{2}\left(x_1+f(x_1)\right)\in[a,b],\cdots$ 继续下去，对于任意 $n\geq 1$，有 $a\leq x_n\leq b_n$，所以 $x_n$ 对任意 $n\geq 1$ 有意义. 由条件(ii)，有

$$\left|x_3-x_2\right|=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)+\left(f(x_2)-f(x_1)\right)\right|\leq\frac{1}{2}\left(\left|x_2-x_1\right|+\left|f(x_2)-f(x_1)\right|\right)$$
$$\leq\frac{1}{2}\left(\left|x_2-x_1\right|+L\left|x_2-x_1\right|\right)=\frac{1}{2}(1+L)\left|x_2-x_1\right|.$$

类似可以推出$\left|x_4-x_3\right|=\le\left(\frac{1+L}{2}\right)^2\left|x_2-x_1\right|$. 继续下去，有

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|=\le\left(\frac{1+L}{2}\right)^{n-1}\left|x_2-x_1\right|,\forall n\ge 3.$$

由于$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+L}{2}\right)^k$收敛，从而$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_{k+1}-x_k\right|$收敛，当然$\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_{k+1}-x_k\right)$也收敛. 故其前$n$ 项部分和$\sum_{k=1}^{n}\left(x_{k+1}-x_k\right)=x_{n+1}-x_1$. 当$n\to\infty$时极限尽，即$\lim_{n\to\infty}x_n$存在. 记

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda,a\le\lambda\le b.$$

由条件(2)可知，$f(x)$满足 Lipschitz 条件，从而是连续的. 在$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+f\left(x_n\right)\right)$中令$n\to\infty$，得$\lambda=\frac{1}{2}\left(\lambda+f\left(\lambda\right)\right)$，即$f\left(\lambda\right)=\lambda$.

**三、【参考证明】**: 1) 首先，$|A|=2^n\left|A_1\right|$，其中$A_1=\frac{1}{2}A$, 它的所有元素为 1 或$-1$.

2)当$n=3$时，$\left|A_1\right|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}\\&\triangleq b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6.\end{aligned}$$

上式$b_i$每项为$\pm1$，且六项的乘积为$-1$，至少有一个$b_i$为$-1$. 从而这六项中至少有两项抵消，故有$|A_1|\le\frac{1}{3}\cdot2\cdot3!$. 于是命题对于$n=3$成立.

3)设此命题对于一切这样的$\left(n-1\right)$阶方阵成立，那么对于$n$阶矩阵的情形，将$|A|$按第一行展开，记 1 行$k$列的代数余子式为$M_{1k}$，便有

$$\begin{aligned}|A|&=\pm2M_{11}\pm2M_{12}+\cdots\pm2M_{1n}\le2\left(\left|M_{11}\right|+\left|M_{12}\right|+\cdots+\left|M_{1n}\right|\right)\\&\le2n\cdot\frac{1}{3}\cdot2^n\cdot\left(n-1\right)!=\frac{1}{3}\cdot2^{n+1}\cdot n!.\end{aligned}$$

**四、【参考证明】**: 因为$f(x)$不是一次函数，故存在$a<x_1<x_2<x_3<b$，使得三点

$$\left(x_1,f\left(x_1\right)\right),\left(x_2,f\left(x_2\right)\right),\left(x_3,f\left(x_3\right)\right)$$

不共线. 不妨设$f\left(x_2\right)-\left(f\left(x_1\right)+\frac{f\left(x_3\right)-f\left(x_1\right)}{x_3-x_1}\left(x_2-x_1\right)\right)>0$. 令

$$g\left(x\right)=-\varepsilon\left(x-x_2\right)^2+f\left(x_2\right)+\frac{f\left(x_3\right)-f\left(x_1\right)}{x_3-x_1}\left(x-x_2\right).$$

取定$\varepsilon>0$充分小，使得

$$g(x_1)>f(x_1),g(x_3)>f(x_3).$$

令$h(x)=g(x)-f(x)$，则

$$h(x_1)>0,h(x_3)>0\text{且}h(x_2)=0.$$

令$h(\xi)=\min\limits_{x\in[x_1,x_3]}h(x)$，则$h(\xi)\le 0,\xi\in(x_1,x_3)$，且$f'(\xi)=g'(\xi)$. 故

$$f(x)\le g(x)-h(\xi),x\in(x_1,x_3).$$

注意到$g(x)-h(\xi)$的图像是一个看看向下的抛物线，故对$x\ne\xi$有

$$g(x)-h(\xi)<g'(\xi)(x-\xi)+g(\xi)-h(\xi)\ =f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi),$$

即$f(x)<f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi),x\in(x_1,x_3)\setminus\{\xi\}$.

**五、【参考解答】**：首先

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2\,|A|-x_2\begin{vmatrix}-x_2&a_{12}&a_{13}\\-x_3&a_{22}&a_{23}\\-x_4&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}+x_3\begin{vmatrix}-x_2&a_{11}&a_{13}\\-x_3&a_{12}&a_{23}\\-x_4&a_{13}&a_{33}\end{vmatrix}-x_4\begin{vmatrix}-x_2&a_{11}&a_{12}\\-x_3&a_{12}&a_{22}\\-x_4&a_{13}&a_{23}\end{vmatrix}$$

$$=-12x_1^2+(x_1,x_3,x_4)A^*\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

由此$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$为关于$x_1,x_2,x_3,x_4$的二次型.

其次，由$(A^*-4I)x=0$得$(|A|I-4A)x=0$，即$(A+3I)x=0$.

故由$(1,0,-2)^T$为$(A^*-4I)x=0$的一个解知，$A$有特征值$-3$. 现在设$A$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,-3$，于是由$|A|=-12$及$A$的特征值之和为 1，得方程组

$$\lambda_1+\lambda_2-3=1,3\lambda_1\lambda_2=-12,$$

得$\lambda_1=\lambda_2=2$. 所以$A$的特征值为$2,2,-3$. 结果，对应特征值$-3.$的特征空间$V_{-3}$的维数为 1，对应特征值 2 的特征空间的维数$V_2$为 2. 注意到$(1,0,-2)^T$是$A$对应于特征值$-3.$的一个特征向量，因此它是$V_{-3}$的基. 求解下列现象方程组的基础解系：$t_1-2t_3=0$，得到正交基础解：

$$\alpha=(0,1,0)^T,\beta=\left(\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right)^T,$$

且令$\gamma=\left(\frac{1}{\sqrt5},0,\frac{-2}{\sqrt5}\right)^T$，则$\alpha,\beta$为$V_2$的标准正交基，$\alpha,\beta,\gamma$为$R^3$的标准正交基.

事实上，因为$A$为实对称矩阵，$V_2=V_3^{\perp}$，它是唯一的，维数为 2. 现在$A$可写成

$$A=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}P^{-1},$$

其中$P=\begin{pmatrix}0&\dfrac{2}{\sqrt{5}}&\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\1&0&0\\0&\dfrac{1}{\sqrt{5}}&-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$. 从而得

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{pmatrix},A^{-1}=P\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1/2&0\\2&0&-1/3\end{pmatrix}P^{T},$$

$$A^{*}=|A|A^{-1}=-12P\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1/2&0\\2&0&-1/3\end{pmatrix}P^{T}=P\begin{pmatrix}-6&0&0\\0&-6&0\\2&0&4\end{pmatrix}P^{T}.$$

令$Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&P\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$，则由$P$为正交矩阵知$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$为正交变换，其中

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&2/\sqrt{5}&1/\sqrt{5}\\0&1&0&0\\0&0&1/\sqrt{5}&-2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$$

它使得

$$\begin{aligned}f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)&=-12x_1^2+\left(x_1,x_3,x_4\right)P\begin{pmatrix}-6&0&0\\0&-6&0\\2&0&4\end{pmatrix}P^{T}\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\\&=-12y_1^2-6y_2^2-6y_3^2+4y_4^2.\end{aligned}$$

为$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$的标准型.

**六、【参考证明】**: 我们证明对任意$n$次首一实系数多项式, 都有$\int_b^{b+a}|P(x)|\,\mathrm{d}x\geq c_n a^{n+1}$, 其中$c_n$满足$c_0=1,c_n=\dfrac{n}{2^{n+1}}c_{n-1},n\geq 0$. 对$n$用数学归纳法. $n=0,P(x)=1$，则

$$\int_b^{b+a}|P(x)|\,\mathrm{d}x=a\geq c_0 a,$$

结论成立. 设结论在$k \le n-1$时成立. 设$P(x)$是$n$次首一实系数多项式，则对任意给定的$a>0$，

$$Q(x)=\frac{2}{na}\left(P\left(x+\frac{a}{2}\right)-P(x)\right)$$

是一个$\left(n-1\right)$次首一多项式，由归纳法假设，有$\int_b^{b+a/2}|Q(x)|\,\mathrm{d}x \ge \frac{c_{n-1}}{2^n}a^n$. 由此推出

$$\int_b^{b+a}|P(x)|\,\mathrm{d}x=\int_b^{b+a/2}\left(|P(x)|+\left|P\left(x+\frac{a}{2}\right)\right|\right)\mathrm{d}x$$

$$\ge \int_b^{b+a/2}\left|P\left(x+\frac{a}{2}\right)-P(x)\right|\mathrm{d}x=\frac{na}{2}\int_b^{b+a/2}\left|Q(x)\right|\mathrm{d}x \ge \frac{na}{2}c_{n-1}\left(\frac{a}{2}\right)^n=c_n a^{n+1}.$$