

2014 年第五届全国大学生数学竞赛决赛

(数学类一、二年级) 试卷

一、(本题 15 分) 设 S 为 \mathbb{R}^3 中的抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $P = (a, b, c)$ 为 S 外一固定点,

满足 $a^2 + b^2 > 2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明: 这些切线的切点落在同一张平面上.

二、(本题 15 分) 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T A x$, 其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & a_0 & 2 & -2 \\ a & 0 & b & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & k & 4 \end{pmatrix},$$

$a_0, a, b, c, d, e, f, g, h, k$ 皆为实数. 已知 $\lambda_1 = 2$ 是 A 的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题:

(1) A 能否相似于对角矩阵; 若能, 请给出证明; 若不能, 请给出例子;

(2) 当 $a_0 = 2$ 时, 试求 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在正交变换下的标准型.

三、(本题 15 分) 设 n 阶实方阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ 有 n 各线性无关的特征向量,

b_1, \dots, b_{n-1} 均不为 0. 记 $W = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid XA = AX\}$. 证明: W 是实数域 \mathbb{R} 上的向量空间, 且 I, A, \dots, A^{n-1} 为其中一组基, 其中 I 为 n 阶单位阵.

四、(本题 15 分) 设 $f(x, y)$ 为 $[a, b] \times \mathbb{R}$ 上关于 y 单调下降的二元函数. 设 $y = y(x), z = z(x)$ 是可微函数, 且满足:

$$y' = f(x, y), z' \leq f(x, z), x \in [a, b]$$

已知 $z(a) \leq y(a)$. 求证: $z(x) \leq y(x), x \in [a, b]$.

五、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上非负可导函数,

$$f(0) = 0, f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

假设 $\int_0^{+\infty} f(x) \mathrm{d} x$ 收敛. 求证: 对于任意 $\alpha > 1$, $\int_0^{+\infty} f^\alpha(x) \mathrm{d} x$ 也收敛, 并且

$$\int_0^{+\infty} f^\alpha(x) \mathrm{d} x \leq \left(\int_0^{+\infty} f(x) \mathrm{d} x \right)^\beta, \beta = \frac{\alpha+1}{2}.$$

六、(本题 20 分) 对多项式 $f(x)$, 记 $d(f)$ 表示其最大和最小实根之间的距离. 设 $n \geq 2$ 为自然数. 求最大实数 C , 使得对任意所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$, 都有

$$d(f') \geq C d(f).$$