2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类三、四年级）参考答案

一、填空题

(1) 0　(2) $p>1$　(3) $3\sqrt{2}\pi$　(4) $(1,0,1),(-1,0,-1),(1,t,-1),(-1,t,1),\ t\in R$.

二、【参考解答】：由于形如 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ 的平面与 S 只能交于直线或空集，所以可以设平面 σ 的方程为 $z=\alpha x+\beta y+\gamma$，它与 S 交线为圆.

令 $x=\cos\theta, y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$，则 σ 与 S 的交线可表示为

$$\Gamma(\theta)=\left(\cos\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta,\alpha\cos\theta+\frac{\beta}{\sqrt{2}}\sin\theta+\gamma\right),\theta\in[0,2\pi].$$

由于 $\Gamma(\theta)$ 是一个圆，所以它到一个定点 $P=(a,b,c)$ 的距离为常数 R. 于是有恒等式

$$(\cos\theta-a)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-b\right)^2+\left(\alpha\cos\theta+\frac{\beta}{\sqrt{2}}\sin\theta+\gamma-c\right)^2=R^2.$$

利用 $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2},\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$，可以将上式写成

$$A\cos 2\theta+B\sin 2\theta+C\cos\theta+D\sin\theta+E=0,$$

其中 A,B,C,D,E 为常数. 由于这样的方程对所有的 $\theta\in[0,2\pi]$ 恒成立，所以

$$A=B=C=D=E=0.$$

特别地，我们得到

$$A=\frac{1}{2}(\alpha^2+1)-\frac{1}{4}(\beta^2+1)=0, B=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\beta=0.$$

于是得到 $\alpha=0,\beta=\pm1$，平面 σ 的法向量为

$(-\alpha,-\beta,1)=(0,1,1)$ 或 $(0,-1,1)$ 的非零倍数.

三、【参考证明】：存在可逆方阵 T 使得 $T^{-1}AT=\tilde{A}$ 为对角阵. 令 $T^{-1}BT=\tilde{B}$，则

$$\operatorname{tr}\left((AB)^2\right)=\operatorname{tr}\left((\tilde{A}\tilde{B})^2\right),\operatorname{tr}\left(A^2B^2\right)=\operatorname{tr}\left(\tilde{A}^2\tilde{B}^2\right).$$

令 $\tilde{A}=\operatorname{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn}),\tilde{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$\operatorname{tr}\left((\tilde{A}\tilde{B})^2\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ii}a_{jj}b_{ij}b_{ji}=\sum_{1\le i<j\le n}2a_{ii}a_{jj}b_{ij}^2+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2b_{ii}^2$$

$$\operatorname{tr}\left(\tilde{A}^2\tilde{B}^2\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ii}^2b_{ij}^2=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_{ii}^2+a_{jj}^2\right)b_{ij}^2+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2b_{ii}^2$$

于是 $\operatorname{tr}\left((\tilde{A}\tilde{B})^2\right)-\operatorname{tr}\left(\tilde{A}^2\tilde{B}^2\right)=-\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_{ii}-a_{jj}\right)^2b_{ij}^2\le 0.$

四、【参考证明】：设Γ的圆心为$O,\alpha_i=\frac{1}{2}\angle B_iOB_{i+1},B_{n+1}=B_1$，则

$$P_A=2\sum_{i=1}^{n}\tan\alpha_i,P_B=2\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i.$$

先证：当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，有

$$\tan^{\frac{1}{3}}x\sin^{\frac{2}{3}}x>x. \qquad (1)$$

令$g(x)=\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}-x$，则$g(0)=0,$

$$g'(x)=\frac{\cos^{\frac{4}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}x\sin^2x}{\cos^{\frac{2}{3}}x}-1=\frac{2\cos^2x+1}{3\cos^{\frac{4}{3}}x}-1>\frac{3\sqrt[3]{\cos^2x\cos^2x\cdot 1}}{3\cos^{\frac{4}{3}}x}-1=0$$

故$g(x)$严格单调递增，因而$g(x)>g(0)=0.$ (1)得证.

$$P_A^{\frac{1}{3}}P_B^{\frac{2}{3}}=2\left(\sum_{i=1}^{n}\tan\alpha_i\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i\right)^{\frac{2}{3}}=2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\tan^{\frac{1}{3}}\alpha_i\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sin^{\frac{2}{3}}\alpha_i\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\geq 2\sum_{i=1}^{n}\tan^{\frac{1}{3}}\alpha_i\sin^{\frac{2}{3}}\alpha_i>2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2\pi.$$

五、【参考证明】：首先，令

$$G_1=(u_1),G_2=(v_1),G_3=(u_2),G_4=(v_2),$$
$$T=\{g_1g_2\mid g_1\in G_1,g_2\in G_2\},H=\{g_3g_4\mid g_3\in G_3,g_4\in G_4\}$$

则T,H均为G的Abel群. 进一步，由$(8,13)=1$可知：

$$G_1\cap G_2=\{e\},G_3\cap G_4=\{e\},$$

结果，$T=G_1G_2$为内直积分解，$H=G_3G_4$为内直积分解.

其次，分别计算u_1v_1,u_2v_2的阶.

若$(u_1v_1)^x=e$，则$u_1^xv_1^x=e$，由$T=G_1G_2$为内直积分解，得$u_1^x=e,v_1^x=e$，从而$8\mid x,13\mid x$，故$o(u_1v_1)=8\times 13$，即有$T=(u_1v_1)$. 同理知，$o(u_2v_2)=8\times 13$，即有$H=(u_2v_2)$. 注意到$u_1v_1=u_2v_2$，故$T=H.$

第三，$u_2\in G_3\subseteq H=T$，故u_2可表示为$u_2=g_1g_2,g_1\in G_1,g_2\in G_2.$ 结果$u_2^8=g_1^8g_2^8$，即$g_2^8=e.$

令$g_2=v_1^t$，于是$v_1^{8t}=e,$ 得$13\mid 8t$，故$g_2=3,$ 由此得$u_2\in G_1$；同理可知$v_2\in G_2$.

第四，在此考虑$u_1v_1=u_2v_2$以及$T=G_1G_2$为内直积分解，因此有$u_1=u_2,v_1=v_2$.

最后，直接计算可知，u_1u_2的阶为 4，v_1v_2的阶为 13.

六、【参考证明】：令$E_1=E-Q$，其中Q是有理数集，则E_1无内点且$m(E_1)=m(E)$.

1) 存在闭集$E_2\subset E_1$，使得$a<m(E_2)<m(E_1)=m(E)$.

对$m(E_1)>a+q>a$的正实数q，由测度的连续性知，$\exists A\subset E_1$，使得$m(A)=a+q$. 由可测集的定义，对$\frac{q}{2}$，$\exists$闭集$E_2\subset A$，使得$m(A-E_2)<\frac{q}{2}$，于是

$$m(E_1)=m(A)-m(A-E_2)>a+q-\frac{q}{2}>a+\frac{q}{2}>a.$$

又$m(E_2)\le m(A)=a+q<m(E_1)$，即

$$a<m(E_2)<m(E_1)=m(E).$$

2) 令$f(x)=m(E_2\cap[-x,x]),x\in R$，可证$f(x)$是连续单增函数且

$$f(0)=0,\lim_{x\to+\infty}f(x)=m(E_2)>a.$$

由连续函数的介值性定理知：$\exists r>0$，使得

$$f(r)=m(E_2\cap[-r,r])=a.$$

令$F=E_2\cap[-r,r]$，则F为无内点的有界闭集且$F\subset E,m(F)=a$.

七、【参考证明】：设e_1,e_2,e_3为曲线γ的 Frenet 标架：

$$e_1=\frac{d\gamma}{ds},e_2=\frac{1}{k}\frac{d^2\gamma}{ds^2},e_3=e_1\times e_2.$$

则有$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}=ke_2,\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s}=-ke_1+\tau e_3,\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s}=-\tau e_2$，其中$\tau$为曲线$\gamma$的挠率.

设$\beta=e_2:[0,l]\to S^2$为球面上的简单曲线，它的弧长参数为$\tilde{s}$，于是有：

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}=-ke_1+\tau e_3,\frac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}s}=\sqrt{k^2+\tau^2}.$$

球面在$\beta(s)$点的单位法向量为β，曲线$\beta(s)$的切向量为$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}=-ke_1+\tau e_3$，所以曲线$\beta(s)$的球面上的法向量$\tilde{e}_2$为

$$\tilde{e}_2=\frac{\beta\times\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}}{\left|\beta\times\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}\right|}=\frac{(\tau e_1+ke_3)}{\sqrt{k^2+\tau^2}}.$$

于是，曲线β在球面上的测地曲率

$$
\begin{aligned}
k_g &= \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\tilde{s}^2}\cdot\tilde{e}_2=\left(\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tilde{s}}\right)^2+\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\tilde{s}^2}\right)\cdot\tilde{e}_2\\
&=\frac{1}{\left(k^2+\tau^2\right)^{3/2}}\left(-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}e_1+\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}e_3\right)\cdot\left(\tau e_1+ke_3\right)\\
&=\frac{1}{\left(k^2+\tau^2\right)^{3/2}}\left(k\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}-\tau\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}\right).
\end{aligned}
$$

故有

$$
\int_B k_g\,\mathrm{d}\tilde{s}=\int_0^l\frac{1}{\left(k^2+\tau^2\right)^{3/2}}\left(k\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}-\tau\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}\right)\sqrt{k^2+\tau^2}\,\mathrm{d}s
$$

$$
=\int_0^l\frac{1}{k^2+\tau^2}\left(k\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}-\tau\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s=\int_0^l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\arg\tan\frac{\tau}{k}\right)\mathrm{d}s=\arg\tan\frac{\tau}{k}\bigg|_0^l=0,
$$

其中用到闭曲线性质: $k(0)=k(l),\tau(0)=\tau(l)$. 由于 B 为简单闭曲线, 它围成球面一个单连通区域 D. 由 Gauss-Bonett 定理，有

$$
\int_B k_g\,\mathrm{d}\tilde{s}=\int_D K\,\mathrm{d}S=2\pi.
$$

对球面而言，Gauss 曲率 $K=1$，故区域 D 的面积 $|D|=2\pi$，为球面面积的一半.

八、【参考解答】: 1. 令 $q(x)=x^3-p(x)$. 我们证明 $q(x)$ 具有形式: $q(x)=xJ^2(x)$，其中 $J(x)$ 为一次多项式. 首先说明 $q(x)$ 的根都为实数. 实际上 $q(x)$ 必有一个实根 α_1，如另两个为一对共轭复根，则 $q(x)$ 具有形式:

$$
q(x)=\left(x-\alpha_1\right)\left(x^2+ax+b\right)\text{，且 } a^2-4b<0.
$$

由于 $q(x)\geq 0,\alpha_1\leq 0,q(x)>x\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$，$\int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x>\int_0^1 x\left(x+\frac{a}{2}\right)^2\mathrm{d}x$. 这与 $\|q(x)\|_1$ 达到最小矛盾！因此，$q(x)$ 三个根都为实数，设为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

若 $q(x)$ 的三个互不相等，则

$$
\alpha_i\leq 0,\int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x\geq\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x>\int_0^1 x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x
$$

矛盾！因此 $q(x)$ 有两个相等，设 $\alpha_2=\alpha_3$. 故

$$
q(x)=\left(x-\alpha_1\right)\left(x-\alpha_2\right)^2,
$$

并且 $\alpha_1=0$ 时 $\int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x$ 会更小.

由于$\int_0^1 q(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}\left(6\alpha_2^2-8\alpha_2+3\right)$，当$\alpha_2=\frac{2}{3}$，即$p(x)=x^3-q(x)=\frac{4}{3}x^2-\frac{4}{9}x$时，$\left\|x^3-p(x)\right\|_1$最小.

2．令$q(x)=x^4-p(x)$. 类似于 1 的分析，$q(x)$的根都为实数，且都为重根. 即$q(x)=J^2(x)$，其中$J(x)$为二次多项式. 设$J(x)=x^2+ax+b$，则

$$f(a,b):=\int_0^1 q(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}a^2+ab+b^2.$$

由$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{2}{3}a+b+\frac{1}{2}=0,\frac{\partial f}{\partial b}=a+2b+\frac{2}{3}=0,$ 解得$a=-1,b=\frac{1}{6}$，因此得

$$p(x)=x^4-\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)^2=2x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{36}.$$

九、【参考证明】: 设$\varepsilon>0,g(z)=1+\varepsilon-f(z)$,则$g(z)$在$D$上解析,

$$g(0)=1+\varepsilon>0,\mathrm{Re}\,g(z)=1+\varepsilon-\mathrm{Re}\,f(z)\geq\varepsilon>0.$$

因而

$$\left|\frac{g(z)-g(0)}{g(z)+g(0)}\right|^2=\frac{\left|g(z)\right|^2-2(1+\varepsilon)\mathrm{Re}\,g(z)+(1+\varepsilon)^2}{\left|g(z)\right|^2+2(1+\varepsilon)\mathrm{Re}\,g(z)+(1+\varepsilon)^2}<1.$$

所以$\frac{g(z)-g(0)}{g(z)+g(0)}$是一个将$D$映入$D$，将 0 映到 0 的解析函数，根据 Schwarz 引理，有

$$\left|\frac{g(z)-g(0)}{g(z)+g(0)}\right|\leq|z|.$$

令$\varepsilon\to 0$，得到$\frac{\left|f(z)\right|}{\left|2-f(z)\right|}\leq|z|$. 两边平方得

$$\left|f(z)\right|^2\leq|z|^2\left(4-4\,\mathrm{Re}\,f(z)+\left|f(z)\right|^2\right)$$

即$\left(1-|z|^2\right)\left|f(z)\right|^2\leq 4|z|^2\left(1-\mathrm{Re}\,f(z)\right).$

由于$\left(\mathrm{Re}\,f(z)\right)^2\leq\left|f(z)\right|^2$，从上式可得

$$\left(\mathrm{Re}\,f(z)+\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right)^2\leq\frac{4|z|^2}{\left(1-|z|^2\right)^2}.$$

由此即得

$$\operatorname{Re} f(z) \le \frac{2|z|}{1-|z|^2} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} = \frac{2|z|}{1+|z|}.$$

十、**【参考解答】**：用A_n表示事件："经n次试验后，黑球出现在甲袋中"，$\tilde{A}_n$表示事件"经n次试验后，黑球出现在乙袋中"，C_n表示事件"第n次从黑球所在的袋中取出一个白球"．记

$$p_n = P(A_n), q_n = P(\tilde{A}_n) = 1 - p_n, n = 1, 2, \cdots$$

当$n \ge 1$时，由全概率公式得

$$\begin{aligned} p_n &= P(A_n \mid A_{n-1})P(A_{n-1}) + P(A_n \mid \tilde{A}_{n-1})P(\tilde{A}_{n-1}) \\ &= P(C_n \mid A_{n-1})P(A_{n-1}) + P(\tilde{C}_n \mid \tilde{A}_{n-1})P(\tilde{A}_{n-1}) \\ &= p_{n-1} \cdot \frac{N-1}{N} + q_{n-1} \cdot \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N} p_{n-1} + \frac{1}{N}(1 - p_{n-1}). \end{aligned}$$

因此可得递推等式$p_n = \dfrac{N-2}{N} p_{n-1} + \dfrac{1}{N}(n \ge 1)$.

由初始条件$p_0 = 1$，于是由递推关系式并利用等比级数求和公式，得

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \cdot \frac{N-2}{N} + \cdots + \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{N}\right)^{n-1} + \left(\frac{N-2}{N}\right)^n \\ &= \frac{1}{N} \frac{1 - \left(\frac{N-2}{N}\right)^n}{1 - \left(\frac{N-2}{N}\right)} + \left(\frac{N-2}{N}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{N-2}{N}\right)^n. \end{aligned}$$

故黑球出现在甲袋中的概率为$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{N-2}{N}\right)^n$．若$N = 2$，则对任何$n$，有$p_n = \dfrac{1}{2}$；若$N > 2$，则有$\lim\limits_{n \to \infty} p_n = \dfrac{1}{2}$.