

1、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域具有二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3$, 试求 $f(0)$, $f'(0)$ 及 $f''(0)$.

分析: 这种类型的题目, 先要取对数将指数去掉化成分式。再根据分式极限为常数而分母极限为零, 得到分子极限为零。另外求一点的导数往往要用定义。

解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3$ 得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + x + \frac{f(x)}{x}]}{x} = 3$,

因为分母极限为零, 从而分子极限为零, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln[1 + x + \frac{f(x)}{x}] = 0$,

可以得到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$,

同样, 我们有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$,

由导数的定义得 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

另外, 注意: $\frac{x + \frac{f(x)}{x}}{x} \rightarrow 3$, 得 $f''(0) = 4$.

2、设 $a > 0$, 且 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 满足:

$\forall x, y \in [a, +\infty)$, 有 $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ ($K \geq 0$ 为常数)。

证明: $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[a, +\infty)$ 有界。

证明: 由条件知, $\forall x \in [a, +\infty)$, 有 $|f(x) - f(a)| \leq K|x - a|$,

则 $|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq K|x - a| + |f(a)|$.

从而 $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq K \frac{|x - a|}{|x|} + \frac{|f(a)|}{|x|} = K \frac{x - a}{x} + \frac{|f(a)|}{x} \leq K + \frac{|f(a)|}{a}$,

故 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[a, +\infty)$ 有界。

3、设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0; \\ ax^2 + bx + c, & x \geq 0 \end{cases}$ 且 $f''(0)$ 存在, 试确定常数 a , b , c .

解: 由条件可知函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 故 $c = f(0) = 1$ 。

由条件可知 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $f'(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ 2ax + b, & x > 0 \end{cases}$, 故 $b = f'(0) = 1$ 。

因此 $f'(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0; \\ 2ax + 1, & x \geq 0, \end{cases}$ 从而 $f''(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ 2a, & x > 0 \end{cases}$, 故 $2a = f''(0) = 1$, 则 $a = \frac{1}{2}$ 。

4、设当 $x > -1$ 时, 可微函数 $f(x)$ 满足条件 $f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int^x f(t) dt = 0$, 且 $f(0) = 1$, 试证: 当 $x \geq 0$ 时, 有

4、设当 $x > -1$ 时, 可微函数 $f(x)$ 满足条件 $f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0$, 且 $f(0) = 1$, 试证: 当 $x \geq 0$ 时, 有 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$ 成立.

证明: 设由题设知 $f'(0) = -1$, 则所给方程可变形为

$$(x+1)f'(x) + (x+1)f(x) - \int_0^x f(t) dt = 0.$$

两端对 x 求导并整理得

$$(x+1)f''(x) + (x+2)f'(x) = 0.$$

这是一个可降阶的二阶微分方程, 可用分离变量法求得

$$f'(x) = \frac{Ce^{-x}}{1+x}.$$

由 $f'(0) = -1$ 得 $c = -1$, $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{1+x} < 0$, 可见 $f(x)$ 单减.

而 $f(0) = 1$, 所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq 1$.

对 $f'(t) = -\frac{e^{-t}}{1+t} < 0$ 在 $[0, x]$ 上进行积分得

$$f(x) = f(0) - \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t} dt \geq 1 - \int_0^x e^{-t} dt = e^{-x}.$$

5、计算三重积分

$$I = \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz.$$

其中 V 是椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

解: 由于 $\iiint_V \frac{x^2}{a^2} dx dy dz = \int_a^a \frac{\pi b c}{a^2} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{15} \pi abc$.

同理可得 $\iiint_V \frac{y^2}{b^2} dx dy dz = \frac{4}{15} \pi abc$, $\iiint_V \frac{z^2}{c^2} dx dy dz = \frac{4}{15} \pi abc$.

所以 $I = 3 \left(\frac{4}{15} \pi abc \right) = \frac{4}{5} \pi abc$.

6、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $f(0) = f(1)$, $f'(1) = 1$,

6、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $f(0) = f(1), f'(1) = 1$,

求证: $\exists \xi \in (0, 1)$ 使 $f''(\xi) = 2$.

分析: 罗尔定理、拉格朗日定理和柯西中值定理是高等数学的重要内容, 往往也是研究生考试和数学竞赛的命题的重点。平时练习时, 采用多种方法去解决, 能有效地提高解题能力。这种题目难点是构造出一个合适的函数。

证 1 令 $F(x) = f(x) - x^2 + x$, 则 $F(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$, $F(0) = F(1)$

由洛尔定理知 $\exists \eta \in (0, 1)$, $F'(\eta) = 0$

$F'(x) = f'(x) - 2x + 1$, $F'(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$, $F'(1) = f'(1) - 1 = 0 = F'(\eta)$

由洛尔定理知 $\exists \xi \in (0, 1)$, $F''(\xi) = 0$, $F''(x) = f''(x) - 2$, $f''(\xi) = 2$

证 2 在 $x=1$ 展开为一阶泰勒公式

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-1)^2, \quad \xi_1 \in (x, 1)$$

$$f(0) = f(1) - f'(1) + \frac{1}{2}f''(\xi), \quad \xi \in (0, 1)$$

因 $f(0) = f(1)$, $f'(1) = 1$, 故 $\exists \xi \in (0, 1)$, $f''(\xi) = 2$

证 3 令 $F(x) = f(x) - (x - \frac{1}{2})^2$, 用两次洛尔定理。

7、设 f 在 $[a, b]$ 上可微, 且 a 与 b 同号, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$(1) \quad 2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi);$$

$$(2) \quad f(b) - f(a) = \xi \left(\ln \frac{b}{a} \right) f'(\xi).$$

证: (1) 令 $g(x) = x^2$, 显然 f, g 在 $[a, b]$ 上满足 Cauchy 中值定理的条件, 所以

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

即 $2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$.

(2) 令 $g(x) = \ln|x|$, 显然 f, g 在 $[a, b]$ 上满足 Cauchy 中值定理的条件, 所以

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln|b| - \ln|a|} = \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}} = \xi f'(\xi),$$

即 $f(b) - f(a) = \xi \ln \left| \frac{b}{a} \right| f'(\xi) = \xi \left(\ln \frac{b}{a} \right) f'(\xi)$

8、设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数, $f(x) \neq 0$, $f'(0) = 1$.

8、设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数, $f(x) \neq 0, f'(0) = 1$.

且 $\forall x, y \in (-\infty, +\infty), f(x+y) = f(x)f(y)$.

证明: f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x) = f(x)$.

分析: 由于已知条件: $\forall x, y \in (-\infty, +\infty), f(x+y) = f(x)f(y)$ 是一个很广的条件, 要充分利用它; 另外要用导数的定义。

证明: 由已知条件得 $f(0) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{因为 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)[f(\Delta x) - 1]}{\Delta x} \\ &= f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} \\ &= f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= f(x)f'(0) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x) = f(x)$.

9、设 $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin x_2 + \cdots + a_n \sin nx$ ($a_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$), 且 $|f(x)| \leq |\sin x|$, 证明:

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

分析: 从结论可以看出, 绝对值里面刚好是 $f'(0)$, 因此容易想到先求 $f(x)$ 的导数。再用导数的定义。

证明: 因为 $f'(x) = a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + \cdots + na_n \cos nx$, 所以

$$f'(0) = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$$

$$\text{又 } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n,$$

$$\text{所以 } |a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 1.$$

$$\text{即 } |a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

10、设 f 在 $[a, b]$ 上二阶可微, $f(a) = f(b) = 0, f'_+(a)f'_-(b) > 0$, 则方程 $f''(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一根。

证明: 因为 $f'_+(a)f'_-(b) > 0$, 不妨设 $f'_+(a) \geq 0, f'_-(b) \geq 0$,

10、设 f 在 $[a, b]$ 上二阶可微, $f(a) = f(b) = 0$, $f'_+(a)f'_-(b) > 0$, 则方程 $f''(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一根.

证明: 因为 $f'_+(a)f'_-(b) > 0$, 不妨设 $f'_+(a) > 0, f'_-(b) > 0$,

因 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, 故 $\exists (a, a + \delta)$, 使 $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$,

从而 $\exists x_1 > a$, 使 $f(x_1) > f(a) = 0$.

因 $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0$, 故 $\exists (b - \delta, b)$, 使 $\frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0$,

从而 $\exists x_2 < b$, 使得 $f(x_2) < f(b) = 0$.

又因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 所以 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, 由零点存在定理知, $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$, 使 $f(x_0) = 0$.

于是在 $[a, x_0]$ 及 $[x_0, b]$ 上分别利用 Rolle 定理得, 存在 $\xi_1 < \xi_2$, 使得

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0. \quad (a < \xi_1 < x_0, x_0 < \xi_2 < b).$$

再在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上用 Rolle 定理得, $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 使 $f''(\xi) = 0$. 即方程 $f''(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一根.

11、(浙江师范大学 2004) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且满足条件 $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$, 其中 a, b 都是非负

常数, c 是 $(0, 1)$ 内的任一点, 证明 $|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

分析: 如果函数高阶可导, 并给定了导数或函数值, 要求估计一个函数的界, 往往用 Taylor 展开式.

证明: 因 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 故存在 $\xi_1 \in (0, c)$ 使得

$$f(0) = f(c) + f'(c)(0 - c) + \frac{1}{2} f''(\xi_1)(0 - c)^2$$

同理存在 $\xi_2 \in (c, 1)$ 使得

$$f(1) = f(c) + f'(c)(1 - c) + \frac{1}{2} f''(\xi_2)(1 - c)^2$$

将上面的两个等式两边分别作差, 得

$$f(1) - f(0) = f'(c) + \frac{1}{2} f''(\xi_2)(1 - c)^2 - \frac{1}{2} f''(\xi_1)c^2$$

$$\text{即 } f'(c) = f(1) - f(0) - \frac{1}{2} f''(\xi_2)(1 - c)^2 + \frac{1}{2} f''(\xi_1)c^2$$

$$\text{因此 } |f'(c)| \leq |f(1)| + |f(0)| + \frac{1}{2} |f''(\xi_2)|(1 - c)^2 + \frac{1}{2} |f''(\xi_1)|c^2$$

$$\leq 2a + \frac{b}{2}(1 - c)^2 + \frac{b}{2}c^2$$

$$\text{而 } (1 - c)^2 + c^2 = 2c^2 - 2c + 1 = 2c(c - 1) + 1 \leq 1, \text{ 故 } |f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}.$$

12、设 $f \in C^3[0, 1]$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f'(\frac{1}{2}) = 0$. 证明: $\exists \xi \in (0, 1)$, 使 $|f''(\xi)| \geq 24$.

证明: 将 $f(x)$ 在点 $x = \frac{1}{2}$ 处展开泰勒公式, 得

12、设 $f \in C^3[0,1]$, $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'(\frac{1}{2})=0$. 证明: $\exists \xi \in (0,1)$, 使 $|f''(\xi)| \geq 24$.

证明: 将 $f(x)$ 在点 $x=\frac{1}{2}$ 处展开泰勒公式, 得

$$f(x) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6}f''(\xi)(x - \frac{1}{2})^3 \quad (\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } \frac{1}{2} \text{ 之间})$$

令 $x=0$ 得

$$f(0) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6}f''(\xi_1)(-\frac{1}{2})^3, \xi_1 \in (0, \frac{1}{2}).$$

令 $x=1$ 得

$$f(1) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})\frac{1}{2} + \frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6}f''(\xi_2)(\frac{1}{2})^3, \xi_2 \in (\frac{1}{2}, 1).$$

因为 $f'(\frac{1}{2})=0$, 所以

$$|f(1) - f(0)| \leq \frac{1}{6} [|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|] \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

$$\text{令 } f''(\xi) = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}, \text{ 则 } |f(1) - f(0)| \leq \frac{1}{24} |f''(\xi)|,$$

代入 $f(0)=1, f(1)=2$, 得 $|f''(\xi)| \geq 24$.

13、(2003 数一) 将函数 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

分析: 给定反正切函数不能直接展开, 它的导数是一个分式, 因此可以考虑先求导数.

$$\text{解: 因为 } f'(x) = -\frac{2}{1+4x^2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{2n}, x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

$$\text{又 } f(0) = \frac{\pi}{4}, \text{ 所以 } f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \frac{\pi}{4} - 2 \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n t^{2n} \right] dt$$

$$= \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛, 函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处连续, 所以

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

$$\text{令 } x = \frac{1}{2}, \text{ 得 } f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)4^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \right] = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

$$\text{再由 } f(\frac{1}{2}) = 0, \text{ 得 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} - f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}.$$

14、(2003 数一) 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$\iiint f(x^2 + y^2 + z^2) dv \quad \iint f(x^2 + y^2) d\sigma$$

14. (2003 数一) 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t) = \frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dv}{\iiint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}, \quad G(t) = \frac{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}{\int_{-t}^t f(x^2) dx},$$

其中 $\Omega(t) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$, $D(t) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的单调性.

(2) 证明当 $t > 0$ 时, $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$.

分析: 判定函数的单调性, 往往要求导数. 这是变限积分, 可利用变限积分的求导法则.

解: (1) 因为

$$F(t) = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t d\varphi \int_0^t f(r^2) r^2 \sin \varphi dr}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r^2) r dr} = \frac{2 \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{\int_0^t f(r^2) r dr},$$

$$F'(t) = 2 \frac{tf(t^2) \int_0^t f(r^2) r(t-r) dr}{[\int_0^t f(r^2) r dr]^2},$$

所以在 $(0, +\infty)$ 上 $F'(t) > 0$, 故 $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

(2) 因

$$G(t) = \frac{\pi \int_0^t f(r^2) r dr}{\int_0^t f(r^2) dr},$$

要证明 $t > 0$ 时 $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$, 只需证明 $t > 0$ 时, $F(t) - \frac{2}{\pi} G(t) > 0$, 即

$$\int_0^t f(r^2) r^2 dr \int_0^t f(r^2) dr - [\int_0^t f(r^2) r dr]^2 > 0.$$

令 $g(t) = \int_0^t f(r^2) r^2 dr \int_0^t f(r^2) dr - [\int_0^t f(r^2) r dr]^2$,

则 $g'(t) = f(t^2) \int_0^t f(r^2) (t-r)^2 dr > 0$, 故 $g(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

因为 $g(t)$ 在 $t=0$ 处连续, 所以当 $t > 0$ 时, 有 $g(t) > g(0)$.

又 $g(0)=0$, 故当 $t > 0$ 时, $g(t) > 0$,

因此, 当 $t > 0$ 时, $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$.

15. (2004 年上海交大) 计算积分: $\iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy$, 其中 D 是矩形区域 $|x| \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

分析: 关键在于去掉绝对值, 要去掉绝对值就要将积分区域分块.

15. (2004 年上海交大) 计算积分: $\iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy$, 其中 D 是矩形区域 $|x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ 。

分析: 关键在于去掉绝对值, 要去掉绝对值就要将积分区域分块。

解: $D_1 = \{(x, y) | |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2, y - x^2 \leq 0\}, D_2 = \{(x, y) | |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq y - x^2\}$,

$$\iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy = \iint_{D_1} \sqrt{x^2-y} dx dy + \iint_{D_2} \sqrt{y-x^2} dx dy$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 - y)^{\frac{1}{2}} dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 (y - x^2)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (x^2)^{\frac{3}{2}} dx + \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 (x^2)^{\frac{1}{2}} dx + \frac{4}{3} \int_0^1 (2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 x^3 dx + \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt \quad (\text{这里 } x = \sqrt{2} \sin t)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos t)^2 dt = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}$$

16. 求曲线积分 $I = \int_L (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy$, 其中 a 与 b 为正常数, L 为从点 $A(2a, 0)$ 沿曲线

$y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点 $O(0, 0)$ 的弧。

分析: 沿曲线积分的关键在于将所有变量都转化成某一变量, 因此将曲线写成参数方程就可以了。也可利用格林公式来解。

解: 因 $e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = d(e^x \sin y)$ 故

$$\int_L e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = e^x \sin y \Big|_{(2a, 0)}^{(0, 0)} = 0$$

而 L 的参数方程为 $x = a + a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq \pi$,

所以

$$-\int_L b(x+y)dx + axdy = -\int_0^\pi [-ba^2(\sin t + \sin t \cos t + \sin^2 t) + a^3(1 + \cos t) \cos t] dt = a^2 b \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) - \frac{1}{2} \pi a^3$$

$$\text{因此 } I = a^2 b \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) - \frac{1}{2} \pi a^3$$

17. 设函数 f 具有一阶连续导数, $f''(0)$ 存在, 且 $f'(0) = 0, f(0) = 0$,

$$\int f(x)$$

17. 设函数 f 具有一阶连续导数, $f''(0)$ 存在, 且 $f'(0)=0$, $f(0)=0$,

$$g(x)=\begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x=0. \end{cases}$$

(1) 确定 a , 使 $g(x)$ 处处连续; (2) 对以上所确定的 a , 证明 $g(x)$ 具有一阶连续导数.

分析: 分段函数的连续和导数, 在分段点的导数一般用定义来求.

解: (1) 因为若 $g(x)$ 处处连续, 则 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 于是 $f(0)=0$, 且

$$a=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0.$$

$$(2) \text{ 因 } g(x)=\begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

$$g'(0)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x}-0}{x}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2} f''(0)$$

$$\text{于是 } g'(x)=\begin{cases} \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2} f''(0), & x=0, \end{cases}$$

显然, 当 $x \neq 0$ 时, $g'(x)$ 连续, 当 $x=0$ 时, 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x)}{x}-\frac{f(x)}{x^2} \right)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x}-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \\ &= f''(0)-\frac{1}{2} f''(0)=\frac{1}{2} f''(0)=g'(0) \end{aligned}$$

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故 $g(x)$ 具有一阶连续导数.

18. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 当 $n>1$ 时 $a_{n-2}=n(n-1)a_n$, 且 $a_0=4$, $a_1=1$;

(1) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$; (2) 求和函数 $S(x)$ 的极值.

分析: 注意到 a_{n-2} 与 a_n 的关系, 容易想到要对级数求两次导.

解 (1) 令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=S(x), \quad S''(x)-S(x)=0$$

$$S(x)=c_1 e^x+c_2 e^{-x} \quad \text{由 } S(0)=a_0=4, S'(0)=a_1=1, \text{ 求得 } c_1=\frac{5}{2}, c_2=\frac{3}{2}, S(x)=\frac{5}{2} e^x+\frac{3}{2} e^{-x}$$

$$(2) \text{ 由 } S'(x)=\frac{5}{2} e^x-\frac{3}{2} e^{-x}=0 \text{ 得 } x_0=\frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}, \text{ 又 } S''(x_0)>0, \therefore S(x_0) \text{ 为极小值 } S\left(\frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}\right)=\sqrt{15}.$$

19. (2003 数一) 某建筑工程打地基时, 需用汽锤将桩打进土层, 汽锤每次击打, 都将克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比 (比例系数为 k , $k > 0$). 汽锤第一次击打将桩打进地下 a m. 根据设计方案, 要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 r ($0 < r < 1$). 问

- (1) 汽锤击打 3 次后, 可将桩打进地下多深?
- (2) 若击打次数不限, 汽锤至多能将桩打进地下多深? (注: m 表示长度单位米.)

解: (1) 设第 n 次击打后, 桩被打进地下 x_n , 第 n 次击打时, 汽锤所作的功为 W_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). 由题设, 当桩被打进地下的深度为 x 时, 土层对桩的阻力的大小为 kx , 所以

$$W_1 = \int_0^a kx dx = \frac{k}{2} x_1^2 = \frac{k}{2} a^2,$$

$$W_2 = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2) = \frac{k}{2} (x_2^2 - a^2).$$

由 $W_2 = rW_1$ 可得

$$x_2^2 - a^2 = ra^2 \quad \text{即} \quad x_2^2 = (1+r)a^2.$$

$$W_3 = \int_{x_2}^{x_3} kx dx = \frac{k}{2} (x_3^2 - x_2^2) = \frac{k}{2} [x_3^2 - (1+r)a^2].$$

由 $W_3 = rW_2 = r^2W_1$ 可得 $x_3^2 - (1+r)a^2 = r^2a^2$,

从而 $x_3 = \sqrt{1+r+r^2}a$,

即汽锤击打 3 次后, 可将桩打进地下 $\sqrt{1+r+r^2}am$.

(2) 由归纳法, 设 $x_n = \sqrt{1+r+r^2+\dots+r^{n-1}}a$, 则

$$W_{n+1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} kx dx = \frac{k}{2} (x_{n+1}^2 - x_n^2)$$

$$= \frac{k}{2} [x_{n+1}^2 - (1+r+\dots+r^{n-1})a^2].$$

由于 $W_{n+1} = rW_n = r^2W_{n-1} = \dots = r^nW_1$, 故得

$$x_{n+1}^2 - (1+r+\dots+r^{n-1})a^2 = r^n a^2,$$

从而 $x_{n+1} = \sqrt{1+r+\dots+r^n}a = \sqrt{\frac{1-r^{n+1}}{1-r}}a$. 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{1-r}}a$,

即若击打次数不限, 汽锤至多能将桩打进地下 $\sqrt{\frac{1}{1-r}}a$ m.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) < 0$, 求证: $\int f(x)dx \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$.

分析: 考虑到题目涉及 $f(x)$ 、 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 与 $f''(x)$ 的关系, 首先联想到利用泰勒公式.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) < 0$, 求证: $\int_0^1 f(x)dx \leq f(\frac{1}{2})$.

分析: 考虑到题目涉及 $f(x)$ 、 $f(\frac{1}{2})$ 与 $f''(x)$ 的关系, 首先联想到利用泰勒公式.

证一 将 $f(x)$ 在 $x_0 = \frac{1}{2}$ 处展开为 $f(x) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + f''(\xi)(x - \frac{1}{2})^2$ (ξ 在 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间)

$\because f''(x) < 0$, $\therefore f(x) \leq f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$ (这一步也可由凹函数的性质直接得到)

由定积分的性质得 $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 f(\frac{1}{2})dx + \int_0^1 f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})dx = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2}) \int_0^1 (x - \frac{1}{2})dx = f(\frac{1}{2})$.

分析: 考虑到题目涉及定积分, 还可对 $f(x)$ 的原函数利用泰勒公式.

证二 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则 $F'(x) = f(x)$, $\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0)$.

将 $F(x)$ 在 $x_0 = \frac{1}{2}$ 处展开为 $F(x) = F(\frac{1}{2}) + F'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}F''(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6}F'''(\xi)(x - \frac{1}{2})^3$

$= F(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6}f''(\xi)(x - \frac{1}{2})^3$ (ξ 在 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间).

利用公式 $\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0)$ 容易得证.

分析: 所证不等式的几何意义是高为 $f(\frac{1}{2})$ 、宽为 1 的矩形面积不小于以 $y = f(x)$ 为曲边 ($0 \leq x \leq 1$) 的曲边

梯形的面积, 矩形可以认为是由曲边梯形增加一部分与减少一部分得到, 而增加的一部分面积大于减少的一部分面积;

为此, 可从 $x = \frac{1}{2}$ 的左右对称点出发.

证三 $\forall x \in (0, \frac{1}{2})$, 有 $1-x \in (\frac{1}{2}, 1)$, \because 在 $[0, 1]$ 上 $f''(x) < 0$

$\therefore f(\frac{1}{2}) \geq \frac{f(x) + f(1-x)}{2}$, 即 $f(\frac{1}{2}) - f(x) \geq f(1-x) - f(\frac{1}{2})$,

故 $\int_0^{\frac{1}{2}} [f(\frac{1}{2}) - f(x)]dx \geq \int_0^{\frac{1}{2}} [f(1-x) - f(\frac{1}{2})]dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 [f(x) - f(\frac{1}{2})]dx$ (令 $1-x=t$)

故 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} f(\frac{1}{2})dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\frac{1}{2})dx = \int_0^1 f(\frac{1}{2})dx = f(\frac{1}{2})$.

分析: 数字不等式可先设法转化为函数不等式, 再利用函数的单调性; 转化的方法是将结论中的积分上限 (或积分下限) 换成 x , 式中相同的字母也换成 x , 移项使不等式一端为零, 则另一端的表达式即为需作的辅助函数. $f(\frac{x}{2})$ 前面乘以 x 是由不等式的几何意义想到的.

证四 设辅助函数 $F(x) = \int_0^x f(t)dt - xf(\frac{x}{2})$, $x \in [0, 1]$.

$$F'(x) = f(x) - f(\frac{x}{2}) - \frac{x}{2}f'(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2}f'(\xi) - \frac{x}{2}f'(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2}[f'(\xi) - f'(\frac{x}{2})] \quad \xi \in (\frac{x}{2}, x)$$

$$= \frac{x}{2}(\xi - \frac{x}{2})f''(\eta) \leq 0 \quad \eta \in (\frac{x}{2}, \xi) \therefore F(x) 在 [0, 1] 单调减少, F(1) \leq F(0), 即 \int_0^1 f(t)dt - f(\frac{1}{2}) \leq 0, \int_0^1 f(x)dx \leq f(\frac{1}{2}).$$

分析: 利用分部积分法可将被积函数求导, 两次分部积分可得到二阶导, 从而利用已知条件.

$$\int_0^1 f(x)dx = xf(x)|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x)dx^2$$

$$= \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \left[x^2 f'(\frac{x}{2}) \Big|_0^1 - \int_0^1 x^2 f''(x)dx \right] \leq \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{8}f'(\frac{1}{2}). \text{ 同理 } \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx \leq \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{8}f'(\frac{1}{2}), \text{ 两式相加得证.}$$

21、设 Γ 是 $y = a \sin x (a > 0)$ 上从 $0(0,0)$ 到 $A(\pi, 0)$ 的一段曲线，求 α 的值，使曲线积分

$$\int_{\Gamma} (x^2 + y) dx + (2xy + e^{y^2}) dy \text{ 取最大值。}$$

$$\text{解: } \int_{\Gamma+AO} (x^2 + y) dx + (2xy + e^{y^2}) dy = - \iint_D (2y - 1) dx dy = 2a - \frac{\pi}{2} a^2$$

$$I = 2a - \frac{\pi}{2} a^2 + \int_0^{\pi} x^2 dx = 2a - \frac{\pi}{2} a^2 + \frac{1}{3} \pi^3 \text{ 得 } I \left(\frac{2}{\pi} \right) \text{ 为最大值。}$$

22、设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是导数连续的有界函数， $|f(x) - f'(x)| \leq 1$ ，求证： $|f(x)| \leq 1$ ， $x \in (-\infty, +\infty)$ 。

$$\text{证明: 由于 } \int_x^{+\infty} [e^{-x} f(x)]' dx = -e^{-x} f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-x} (f'(x) - f(x)) dx$$

$$\text{得 } e^{-x} |f(x)| \leq \int_x^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-x}。$$

23、设 Σ 为锥面 $z^2 = 3x^2 + 3y^2 (z \geq 0)$ 被平面 $x - \sqrt{3}z + 4 = 0$ 截下的（有限）部分，求 Σ 的面积。

解: Σ 在 xy 面上的投影为 $\frac{4}{9} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} y^2 = 1$ ，其面积为 $\frac{3}{2} \sqrt{2} \pi$ ，从而

$$S_{\Sigma} = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = 2 \iint_D dx dy = 3\sqrt{2}\pi$$

24、求 $\iiint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ ，其中 Ω 为曲线 $\begin{cases} x^2 = 2z \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而生成的曲面与 $z = 1, z = 2$ 所围成的区域。

解: 记 $D(z): x^2 + y^2 \leq 2z^2$ ，

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_1^2 dz \iint_{D(z)} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy = \int_1^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} \frac{\rho}{\rho^2 + z^2} d\rho \\ &= \pi \int_1^2 \ln \left(1 + \frac{2}{z} \right) dz = 3\pi \ln \frac{4}{3} \end{aligned}$$

25、(1) 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛域为 $[-1, 1]$ ，求证：幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n$ 也为 $[-1, 1]$ ；

(2) 上述命题的逆命题是否正确，为什么？

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都收敛，得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 在 ± 1 处收敛；

另外，当 n 充分大时有 $|a_n^2 r_1^n| = \left| \frac{a_n}{n} r_1^n \right| \cdot |a_n| \cdot n \left| \frac{r_1^n}{r_1^n} \right| \leq \left| \frac{a_n}{n} r_1^n \right|$ 其中 $1 < r_1 < r$ ，

(2) 反例: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

26、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}} x^n$ 的收敛域为 $([-1,1])$

27、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) e^x dx = 0$, 求证: $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有两个零点。

证明: $F(x) = \int_a^x f(x) dx$, $F(a) = 0$, $F(b) = 0$, $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x) e^x dx = \int_a^b e^x dF(x) = e^x F(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x) de^x = 0 - F(c) e^c (b-a) \text{ 得 } F(c) = 0$$

在 (a,c) 和 (c,b) 分别用罗尔定理可证。

28、求直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ 绕 y 轴旋转一周的旋转曲面方程, 并求该曲面与 $y=0, y=2$ 所包围的立体的体积。

解: 旋转曲面方程为 $x^2 + z^2 = 1 + 4y + 5y^2$ 。

$$\text{体积为 } V = \pi \int_0^2 (x^2 + z^2) dy = \pi \int_0^2 (1 + 4y + 5y^2) dy = \frac{70}{3} \pi.$$

29、设 k 为常数, 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^k \ln n}$ 的收敛性, 何时绝对收敛? 何时条件收敛? 何时发散?

解: $k \geq 1$ 时绝对收敛; $0 \leq k < 1$ 是条件收敛; $k < 0$ 时发散。

30、设 $f(x,y) = \begin{cases} y \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, 讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的连续性、可偏导性与可微性。

解: 连续、可偏导性且可微。

31、设 $f(u)$ 在 $u=0$ 可导, $f(0)=0$, $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \geq 2tz$, 求: $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^5} \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dV$

$$\text{解: } \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2t} dr \int_0^{\arccos \frac{r}{2t}} f(r^2) r^2 \sin \varphi d\varphi = 2\pi \int_0^{2t} r^r f(r^2) \cdot \left(1 - \frac{r}{2t}\right) dr$$

$$\text{从而原式} = \frac{32}{15} \pi f'(0)$$

32、设曲线 AB 的极坐标方程为 $\rho = 1 + \cos \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), 一质点 P 在力 F 的作用下沿曲线 AB 从点 $A(0, -1)$

运动到 $B(0, 1)$, 力 F 的大小等于点 P 到定点 $M(3, 4)$ 的距离, 其方向垂直于 MP , 且与 Y 轴正向成锐角, 求力 F 对质点 P 所做的功。

$$\text{解: } F = (y-4, 3-x), W = \int_{AB} (y-4) dx + (3-x) dy = 2 - \frac{3}{2} \pi$$

33. 设 $f(x)$ 连续可导, $f(1)=1$, G 为不包含原点的单连通域, 任取 $M, N \in G$, 在 G 内曲线积分

$$\int_M \frac{1}{2x^2 + f(y)} (ydx - xdy)$$

与路径无关。

(1) 求 $f(x)$;

$$(2) \text{ 求 } \int_{\Gamma} \frac{1}{2x^2 + f(y)} (ydx - xdy), \text{ 其中 } \Gamma \text{ 为 } x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}, \text{ 取正向。}$$

解: (1) $f(x) = x^2$

$$(2) \text{ 取 } \Gamma_{\varepsilon}: 2x^2 + y^2 = \varepsilon^2, \int_{\Gamma} \frac{1}{2x^2 + f(y)} (ydx - xdy) = \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{1}{2x^2 + f(y)} (ydx - xdy)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-\varepsilon^2 \sin^2 \theta - \varepsilon^2 \cos^2 \theta}{\varepsilon^2} \right) d\theta = -\sqrt{2}\pi$$

34. 求证: $\frac{3}{2}\pi < \iiint_{\Omega} \sqrt[3]{x+2y-2z+5} dV < 3\pi$, 其中 Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 。

证明: $f = x + 2y - 2z + 5$ 在 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 上的最大和最小值分别是 8 和 2.

35. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3^n + (-2)^n)} x^n$ 的收敛域。

解: $[-3, 3)$

36. 已知点 $P(1, 0, -1)$ 与 $Q(3, 1, 2)$, 在平面 $x - 2y + z = 12$ 上求一点 M , 使得 $|PM| + |QM|$ 最小。

$$\text{解: } M\left(\frac{27}{7}, -\frac{20}{7}, \frac{17}{7}\right)$$

37. 设 $D: x^2 + y^2 \leq 4x, y \leq -x$, 在 D 的边界 $y = -x$ 上任取一点 P , 设 P 到原点的距离为 t , 作 PQ 垂直于 $y = -x$, 交 D 的边界 $x^2 + y^2 = 4x$ 于 Q .

(1) 试将 P, Q 的距离 $|PQ|$ 表示为 t 的函数。

(2) 求 D 绕 $y = -x$ 旋转一周的旋转体体积。

$$\text{解: (1) } |PQ| = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{4 + 4\sqrt{2}t - 2t^2} - 1 \right)$$

$$(2) V = \frac{20}{3} \sqrt{2}\pi - 2\sqrt{2}\pi^2$$

38. 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$, $\int_a^b f(x) dx = 0$, 求证:

(1) 在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = f(\xi)$ 。

38. 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$, $\int_a^b f(x)dx = 0$, 求证:

(1) 在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = f(\xi)$.

(2) 在 (a, b) 内至少有一点 η , $\eta \neq \xi$, 使得 $f''(\eta) = f(\eta)$

证明: (1) $\int_a^b f(x)dx = 0$, 得 $f(c) = 0$, 令 $G(x) = e^{-x}f(x)$

(2) $F(x) = e^x(f'(x) - f(x))$

39. $\int \frac{x + \sin x \cos x}{(\cos x - x \sin x)^2} dx = (\quad)$

解: 原式 $= \int \frac{x \sec^2 x + \tan x}{(1 - x \tan x)^2} dx = \int \frac{1}{(x \tan x - 1)^2} dx \tan x = \frac{1}{1 - x \tan x} + c$

40. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \arctan \frac{1}{x} \right)^{x^2} = (\quad)$

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \arctan \frac{1}{x} - 1 \right) \cdot x^2 = -\frac{1}{3}$, 原式 $= e^{-\frac{1}{3}}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n} = (\quad)$

解: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x} + \ln(1-x) + x$, 原式 $= 2(1 - \ln 2)$

42. 设 $u_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ 条件收敛.

解: $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1 \therefore u_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), $\exists N \in \mathbb{N}_+$, $\forall n > N$, $u_n > 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} \frac{1}{n} = 0$.

$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_{n+1}} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \frac{n+1}{u_{n+1}} = 2$; \therefore 级数不绝对收敛.

$\therefore S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_{k+1}} \right) = \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) - \left(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} \right) + \dots + (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \frac{1}{u_1} + (-1)^{n-1} \frac{1}{u_{n+1}}$,

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{u_1}$. 故级数收敛且为条件收敛.

43. 设函数 $f(x, y)$ 可微, $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x, y)$, $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1$, 且满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(0, y + \frac{1}{n})}{f(0, y)} \right)^n = e^{w(y)}$ 求 $f(x, y)$.

43. 设函数 $f(x, y)$ 可微, $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x, y)$, $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1$, 且满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(0, y + \frac{1}{n})}{f(0, y)} \right)^n = e^{\cot y}$ 求 $f(x, y)$.

分析: 利用重要极限公式求出已知极限的左边, 再与右边进行比较得到一个微分方程, 求此微分方程。

$$\text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(0, y + \frac{1}{n})}{f(0, y)} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{f(0, y + \frac{1}{n}) - f(0, y)}{f(0, y)} \right]^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0, y + \frac{1}{n}) - f(0, y)}{\frac{1}{n} f(0, y)}} = e^{\frac{f_y(0, y)}{f(0, y)}}$$

$$\frac{f_y(0, y)}{f(0, y)} = \frac{d \ln f(0, y)}{dy} = \cot y, \text{ 对 } y \text{ 积分得 } \ln f(0, y) = \ln \sin y + \ln c, f(0, y) = c \sin y$$

$$\text{代入 } f(0, \frac{\pi}{2}) = 1 \text{ 得 } c = 1, f(0, y) = \sin y \text{ 又已知 } \frac{\partial f}{\partial x} = -f \Rightarrow f(x, y) = c(y) e^{-x},$$

$$\because f(0, y) = \sin y, \therefore c(y) = \sin y \text{ 故 } f(x, y) = e^{-x} \sin y.$$

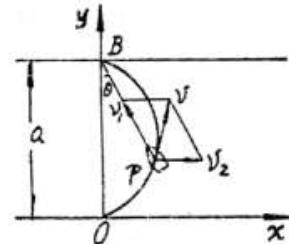
44. 如图所示, 设河宽为 a , 一条船从岸边一点 O 出发驶向对岸, 船头总是指向对岸与点 O 相对的一点 B 。假设在静水中船速为常数 v_1 , 河流中水的流速为常数 v_2 , 试求船过河所走的路线(曲线方程); 并讨论在什么条件下(1) 船能到达对岸; (2) 船能到达点 B 。

分析: 利用物理学知识容易建立运动轨迹的数学模型, 该模型是微分方程, 求解微分方程, 对字母进行讨论。

解: 如图所示, 设 $P(x, y)$ 为船在要时刻的位置

$$\text{此时两个分速度为 } \frac{dx}{dt} = v_2 - v_1 \sin \theta, \frac{dy}{dt} = v_1 \cos \theta \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2}).$$

$$\text{消去 } t \text{ 得 } \frac{dy}{dx} = \frac{v_1 \cos \theta}{v_2 - v_1 \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{k - \sin \theta} \quad (k = \frac{v_2}{v_1}) = \frac{1}{k \sec \theta - \tan \theta},$$



$$\text{又 } \tan \theta = \frac{x}{a - y}, \text{ 则 } \sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + (a - y)^2}}{a - y}, \text{ 代入得}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - y}{k \sqrt{x^2 + (a - y)^2} - x} \quad (\text{路线满足的微分方程}) \text{ 令 } a - y = ux, \text{ 则有}$$

$$-u - x \frac{du}{dx} = \frac{u}{k \sqrt{1 + u^2} - 1}, \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{ku \sqrt{1 + u^2}} - \frac{1}{u} \right) du \quad \text{积分} \ln x = -\frac{1}{k} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + u^2}}{u} \right) - \ln u + \ln c$$

$$(a - y)^k = c \frac{a - y}{x + \sqrt{x^2 + (y - a)^2}} \quad \text{由 } y(0) = 0 \text{ 得 } c = a, \text{ 化简得 } x = \frac{a}{2} \left[\left(\frac{a - y}{a} \right)^{1-k} - \left(\frac{a - y}{a} \right)^{1+k} \right]$$

讨论: ①当 $1 - k > 0$, 即 $k < 1, v_2 < v_1$ 时, 则 $\lim_{y \rightarrow a^-} x = 0$, 可到点 $B(0, a)$;

②当 $1 - k = 0$, 即 $k = 1, v_2 = v_1, 1 + k = 2$ 时, 则 $\lim_{y \rightarrow a^-} x = \frac{a}{2}$, 可达对岸点 $(\frac{a}{2}, a)$

③当 $1 - k < 0$ 即 $k > 1, v_2 > v_1, 1 + k > 2$ 时, $\lim_{y \rightarrow a^-} x$ 不存在, 不能对达对岸。

45. 已知 $x_0 = 1, x_1 = \frac{1}{x_0^3 + 4}, x_2 = \frac{1}{x_1^3 + 4}, \dots, x_{n+1} = \frac{1}{x_n^3 + 4}, \dots$

求证: (1) 数列 $\{x_n\}$ 收敛; (2) $\{x_n\}$ 的极限值 a 是方程 $x^4 + 4x - 1 = 0$ 的唯一正根。

$$45. \text{ 已知 } x_0 = 1, x_1 = \frac{1}{x_0^3 + 4}, x_2 = \frac{1}{x_1^3 + 4}, \dots, x_{n+1} = \frac{1}{x_n^3 + 4}, \dots.$$

求证：(1) 数列 $\{x_n\}$ 收敛；(2) $\{x_n\}$ 的极限值 a 是方程 $x^4 + 4x - 1 = 0$ 的唯一正根。

分析：要直接判断数列 $\{x_n\}$ 收敛有困难时，可以先构造一个级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|$ ，判断级数的收敛。也可以先判断偶数项

单调减少，奇数项单调增加，利用子序列相同的收敛性判断数列的收敛性。

$$\begin{aligned} \text{解一：(1)} \quad & \because 0 < x_n < 1, |x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{1}{x_n^3 + 4} - \frac{1}{x_{n-1}^3 + 4} \right| = \frac{|x_n^3 - x_{n-1}^3|}{(x_n^3 + 4)(x_{n-1}^3 + 4)} \\ & < \frac{|x_n - x_{n-1}|(x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2)}{4^2} < \frac{3|x_n - x_{n-1}|}{16} < \left(\frac{3}{16}\right)^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| < \dots < \left(\frac{3}{16}\right)^n |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{3}{16}\right)^n \left| \frac{1}{5} - 1 \right| = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{16}\right)^n; \quad \text{又} \because \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^n \text{ 收敛, } \therefore \sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| \text{ 收敛,}$$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 收敛，又因 $S_n = x_{n+1} - x_0$ ，故 $\{x_n\}$ 收敛。

(2) 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ， $\because 0 < x_n < 1$ ， $\therefore a \geq 0$ ，且 $a = \frac{1}{a^3 + 4}$ ， $a^4 + 4a - 1 = 0$ ，即 a 是 $x^4 + 4x - 1 = 0$ 的根，令

$$f(x) = x^4 + 4x - 1, \quad x \in (0, +\infty), \quad f'(x) = 4x^3 + 4 > 0, \quad f(0) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{故 } f(x) = 0 \text{ 根唯一。}$$

解二：由已知 $x_0 = 1, x_1 = \frac{1}{x_0^3 + 4} = 0.2, x_2 = \frac{1}{x_1^3 + 4} = 0.2495 \dots, x_3 = \frac{1}{x_2^3 + 4} = 0.2490 \dots$ ，由此可见， $x_0 > x_2, x_1 < x_3$ (用

归纳法证明偶数项单调减少，奇数项单调增加)。

设 $x_{2n-2} \geq x_{2n}, x_{2n-1} \leq x_{2n+1}$ 。

$$x_{2n} = \frac{1}{x_{2n-1}^3 + 4} \geq \frac{1}{x_{2n+1}^3 + 4} = x_{2n+2}, \quad x_{2n+1} = \frac{1}{x_{2n}^3 + 4} \leq \frac{1}{x_{2n+2}^3 + 4} = x_{2n+3}$$

由 $0 < x_n \leq 1$ 知 $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}$ 收敛，令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = b$ ；

注意：事实上可利用 $f(x) = \frac{1}{x^3 + 4}$ 是减函数证明偶数项单调减少，奇数项单调增加。

$$\text{对 } x_{2n} = \frac{1}{x_{2n-1}^3 + 4} \text{ 两边取极限得 } a = \frac{1}{b^3 + 4}, \quad ab^3 + 4a = 1 \quad \text{①}$$

$$\text{对 } x_{2n+1} = \frac{1}{x_{2n}^3 + 4} \text{ 两边取极限得 } b = \frac{1}{a^3 + 4}, \quad a^3b + 4b = 1 \quad \text{②}$$

$$\text{由①—②得 } ab(b^2 - a^2) + 4(a - b) = 0, \quad \text{解得 } a - b = 0$$

由 $a = b$ 知 $\{x_n\}$ 收敛，且为方程 $x^4 + 4x - 1 = 0$ 的根 (再证唯一性)。

46-60 为 2000 年赛题

$$46. \text{ 计算曲面积分 } \iint_{\Sigma} (x^3 + y^3 + z^3) dS, \quad \text{其中 } \Sigma \text{ 为曲面 } z = \sqrt{a - x^2 - y^2}, \quad a > 0.$$

46-60 为 2000 年赛题

46、计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^3 + y^3 + z^3) dS$ ，其中 Σ 为曲面 $z = \sqrt{a - x^2 - y^2}$ ， $a > 0$ 。

$$\text{解: } \iint_{\Sigma} (x^3 + y^3 + z^3) dS = \iint_D z^3 dS = \iint_D (a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2} dx dy = a \iint_D (a^2 - x^2 - y^2) dx dy = \frac{5}{2} a^5$$

47、已知两个球的半径分别是 a 和 b ($a > b$)，且小球球心在大球表面上，试求小球在大球内的那一部分的体积。

解: 大球心为原点, 小球心在 Y 轴正半轴上。

大球方程为: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 小球方程为 $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = b^2$

$$\text{两球交线在 } xy \text{ 面的投影为 } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \left(\frac{b}{2a} \sqrt{4a^2 - b^2} \right)^2 \\ z = 0 \end{cases}, \text{ 记 } k = \frac{b}{2a} \sqrt{4a^2 - b^2}$$

$$\text{则 } V = \iint_D \left[\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - (a - \sqrt{b^2 - x^2 - y^2}) \right] dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k \left(\sqrt{a^2 - \rho^2} + \sqrt{b^2 - \rho^2} \right) \rho d\rho - \iint_D adx dy$$

$$= \pi b^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{b}{4a} \right)$$

48、设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 连续且大于零, 证明: $\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$

49、求级数 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \dots$ 的和。

$$\text{解: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x), \quad (-1 \leq x < 1), \quad \text{令 } x = \frac{1}{3} \text{ 得, } s\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

50、过抛物线 $y = x^2$ 上一点 (a, a^2) 做切线, 问 a 为何值时切线与抛物线围成的面积最小?

解: 切线方程为: $y = 2ax - a^2$, 与 $y = -x^2 + 4x - 1$ 联立得 $x^2 + 2(a-2)x + 1 - a^2 = 0$, 设此方程的两个根为

$$x_1, x_2, \text{ 有 } x_1 \cdot x_2 = 1 - a^2, \quad x_1 + x_2 = 2(2-a), \quad x_2 - x_1 = 2\sqrt{2a^2 - 4a + 3}$$

$$\text{从而 } S = \int_{x_1}^{x_2} (-x^2 + 4x - 1 - 2ax + a^2) dx = (x_2 - x_1) \left[-\frac{1}{3} ((x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2) + (2-a)((x_1 + x_2) + a^2 - 1) \right]$$

$$= (x_2 - x_1) \frac{2}{3} (2a^2 - 4a + 3) = \frac{4}{3} (2a^2 - 4a + 3)^{\frac{3}{2}} \quad \text{易得最小值为 } S(1)$$

51、已知 $u = u(x, y)$ 由方程 $u = f(x, y, z, t)$, $g(y, z, t) = 0$ 和 $h(z, t) = 0$ 确定 (f, g, h 均可微), 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 。

解: 注意到 z, t 都是 y 的函数, 易得 $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = f'(y) + \frac{-f'_z \cdot g'_y \cdot h'_t + f'_t \cdot g'_y \cdot h'_z}{g'_z \cdot h'_t - g'_t \cdot h'_z}$

52、设 $f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi, & \text{otherwise} \end{cases}$, 那么 $F(x) = \int_0^x f(t)g(x-t) dt = (\quad)$

52. 设 $f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 那么 $F(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt = (\quad)$

解: 令 $x-t=u$ 得 $F(x) = \begin{cases} x-\sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x-1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

53. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且 $g'(x) \neq 0$, 证明: 存在一点 $c \in (a, b)$ 使得 $\frac{f(a)-f(c)}{g(c)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

证明: 令 $F(x) = f(a)g(x) + g(b)f(x) - f(x)g(x)$

54. 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x+t(1-t)=0 \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定, 求 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0}$.

解: $x'(t) = 2t-1$, $x''(t) = 2$; $y = y(t)$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = \frac{2}{e^2}$

从而 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{x'(0)y''(0) - x''(0)y'(0)}{[x'(0)]^3} = \frac{2}{e^2} - \frac{2}{e}$

55. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} = (\quad -2 \quad)$

56. $\int \frac{x^{14}}{(x^5+1)} dx = (\quad -\frac{(1+3x^5+3x^{10})}{15(1+x^5)^3} + C \quad)$

57. 函数 $y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ 在点 $x=0$ 是 (B)

A. 连续点; B. 第一类间断点; C. 第二类间断点; D. 可去间断点

58. 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1+|\sin x|)$, 欲使 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导, 有 (B)

A. $f'(0)=0$; B. $f(0)=0$; C. $f'(0)+f(0)=0$; D. $f'(0)-f(0)=0$

59. 设 α 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(n\alpha)}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right] (\quad C \quad)$

A. 绝对收敛; B. 条件收敛; C. 发散; D. 收敛性与 α 有关

60. 设 $f'(x)$ 连续, $f(0)=0$, $f'(0) \neq 0$, 那么 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2 \int_0^x f(t)dt} = (\quad 1 \quad)$