

第十三届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案 (数学 A 类, 2021 年)

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 考场号: _____ 座位号: _____ 专业: _____

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 设不全为零的 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 求直线 $\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-1}{c}$ 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面方程.

解答. 设点 $M_1(0, 0, 0)$, 方向 $\vec{s}_1 = (0, 0, 1)$, 则 z 轴为直线 L_1 :

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}.$$

直线 L_2

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-1}{c}$$

过点 $M_2(1, 1, 1)$, 方向为 $\vec{s}_2 = (a, b, c)$.

$\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1 M_2}$ 的混合积为

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1 M_2}) = a - b.$$

..... (2 分)

(1). 当 $a = b$ 时, L_2 与 L_1 共面. 分以下三种情况讨论.

1). 当 $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$, 即 $c = 0$ 时, L_2 与 L_1 垂直, 此时所得的旋转面是 $z = 1$ 的平面.

当 $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \neq 0$, 即 $c \neq 0$ 时, L_2 与 L_1 平行或者相交于一点, 于是有以下两种情形.

2). 当 L_2 平行于 L_1 时, 所得的旋转曲面是一个圆柱面 $x^2 + y^2 = 2$.

3). 当 L_1 与 L_2 相交于一点时, 所得的旋转面为一个圆锥面, 顶点为它们的交点 $(0, 0, \frac{a-c}{a})$ 的锥面方程 $x^2 + y^2 - \frac{2a^2}{c^2}(z - \frac{a-c}{a}) = 0$.

..... (8 分)

(2). 当 $a \neq b$ 时, 即 L_2 与 L_1 不共面时, 首先考虑 L_2 与 L_1 不垂直时的情形. 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 L_2 上的任意一点, $M(x, y, z)$ 为过 M_0 的旋转曲面上的纬圆上的任意一点, 则有

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{s}_1 = 0, \\ |\overrightarrow{M_1M_0}| = |\overrightarrow{M_1M}|, \\ \frac{x_0-1}{a} = \frac{y_0-1}{b} = \frac{z_0-1}{c}. \end{cases}$$

由此得到

$$\begin{cases} z - z_0 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ x_0 = 1 + at, \\ y_0 = 1 + bt, \\ z_0 = 1 + ct, \end{cases}$$

其中 $t \in \mathbb{R}$ 为参数. 因 L_1 与 L_2 不垂直, 由 $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = c \neq 0$, 得到 $t = \frac{z_0-1}{c} = \frac{z-1}{c}$, 以及

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x_0^2 + y_0^2 \\ &= \left[1 + \frac{a}{c}(z-1)\right]^2 + \left[1 + \frac{b}{c}(z-1)\right]^2 \\ &= Az^2 + Bz + C, \end{aligned}$$

其中

$$A = \frac{a^2 + b^2}{c^2}, \quad B = \frac{a(c-a) + b(c-b)}{c^2}, \quad C = \frac{(c-a)^2 + (c-b)^2}{c^2}.$$

经计算可得

$$AC - B^2 = \frac{(a-b)}{c^2} > 0.$$

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

注意到 $A > 0$, 以及

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= Az^2 + 2Bz + C \\&= A \left(z + \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}\end{aligned}$$

得到

$$\frac{A}{AC - B^2} (x^2 + y^2) - \frac{A^2}{AC - B^2} \left(z + \frac{B}{A} \right) = 1.$$

它是旋转单叶双曲面.

..... (13 分)

当 L_1 与 L_2 为异面直线而且垂直时, $c = 0$. 所得旋转曲面是一个挖去一个圆盘(半径为 L_1 与 L_2 之间的距离 $\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$) 的平面.

..... (15 分)

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $B \subset R^n (n \geq 2)$ 是单位开球, 函数 u, v 在 \bar{B} 上连续, 在 B 内二阶连续可导, 满足

$$\begin{cases} -\Delta u - (1 - u^2 - v^2)u = 0, & x \in B, \\ -\Delta v - (1 - u^2 - v^2)v = 0, & x \in B, \\ u(x) = v(x) = 0, & x \in \partial B, \end{cases}$$

其中, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, ∂B 表示 B 的边界. 证明: $u^2(x) + v^2(x) \leq 1 (\forall x \in \bar{B})$.

证明. 记 $w = w(x) = u^2(x) + v^2(x)$, 则 w 满足问题

$$\begin{cases} -\Delta w - 2(1 - w)w = -2(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2), & x \in B, \\ w(x) = 0, & x \in \partial B. \end{cases} \quad (1)$$

..... (6 分)

显然, $w(x) \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$. 所以, $w(x)$ 必然在 \bar{B} 上达到最大值. 设最大值点为 x_1 .

若 $x_1 \in B$, 则 $\nabla w(x_1) = 0$, $-\Delta w(x_1) \geq 0$. 于是由 (1) 得到, 在 x_1 处,

$$0 \leq -\Delta w \leq 2(1 - w)w - 2(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \leq 2(1 - w)w.$$

..... (12 分)

而 $w(x_1) \geq 0$, 故上式表明 $w(x_1) \leq 1$.

若 $x_1 \in \partial B$, 则由 (1), $w(x_1) = 0$.

综合之, 恒有 $0 \leq w \leq 1, x \in \bar{B}$.

..... (15 分)

□

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 $f(x) = x^{2021} + a_{2020}x^{2020} + a_{2019}x^{2019} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 为整系数多项式, $a_0 \neq 0$. 设对任意 $0 \leq k \leq 2020$ 有 $|a_k| \leq 40$, 证明: $f(x) = 0$ 的根不可能全为实数.

证明. 设 $f(x) = 0$ 的 2021 个根分别为 $x_1, x_2, \dots, x_{2021}$. 由于 $a_0 \neq 0$, 所以 $x_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 2021$. 若 $x_1, x_2, \dots, x_{2021}$ 都是实数, 由 Cauchy 不等式有

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} \geq \left(\sum_{i=1}^{2021} x_i \cdot \frac{1}{x_i} \right)^2 = 2021^2. \quad \dots \quad (5 \text{ 分})$$

由 Vieta 定理,

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i = -a_{2020}, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 2021} x_i x_j = a_{2019},$$

由此得到

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{2021} x_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2021} x_i x_j = a_{2020}^2 - 2a_{2019}.$$

注意到 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_{2021}}$ 是多项式

$$g(x) = x^{2021} f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 x^{2021} + a_1 x^{2020} + a_2 x^{2019} + \dots + a_{2019} x^2 + a_{2020} x + 1$$

的根. 继续由 Vieta 定理,

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i} = -\frac{a_1}{a_0}, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 2021} \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{x_j} = \frac{a_2}{a_0},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} = \left(\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i} \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2021} \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{x_j} = \frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0}.$$

..... (10 分)

因为对任意 $0 \leq k \leq 2020$ 有 $|a_k| \leq 40$, 又 a_0 为非零整数, 故 $|a_0| \geq 1$, 所以

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} = (a_{2020}^2 - 2a_{2019}) \left(\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0} \right) \leq (40^2 + 2 \cdot 40)(40^2 + 2 \cdot 40) = 1680^2,$$

矛盾. 证毕 (15 分)

□

得分	
评阅人	

四、(本题 20 分) 设 P 为对称酉矩阵, 证明: 存在可逆复矩阵 Q 使得 $P = \bar{Q}Q^{-1}$.

解答. 设 P 为 n 阶矩阵. 因为 P 为酉矩阵, 自然为正规矩阵, 所以存在酉矩阵 U 使得 $U^{-1}PU = D$ 为对角阵.

..... (2 分)

设

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

并设 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 为复数满足 $\beta_i^2 = \alpha_i$, $1 \leq i \leq n$, 令

$$E = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n \end{pmatrix}.$$

由 Lagrange 插值公式知存在复系数多项式 $f(x)$ 使得 $f(\alpha_i) = \beta_i$, $1 \leq i \leq n$, 从而

$$E = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) & & & \\ & f(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\alpha_n) \end{pmatrix} = f(D),$$

且

$$E^2 = \begin{pmatrix} \beta_1^2 & & & \\ & \beta_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} = D.$$

..... (10 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

现在 $D^T = D$, $P^T = P$, $U^T = \bar{U}^{-1}$, 所以

$$D = D^T = (U^{-1}PU)^T = U^T P^T (U^{-1})^T = \bar{U}^{-1} P \bar{U} = \bar{U}^{-1} U D U^{-1} \bar{U},$$

从而 $U^{-1}\bar{U}$ 与 D 可交换. 又 $E = f(D)$, 所以 E 也与 $U^{-1}\bar{U}$ 可交换, 即 $EU^{-1}\bar{U} = U^{-1}\bar{U}E$, 或写为

$$UEU^{-1} = \bar{U}E\bar{U}^{-1}.$$

..... (15 分)

由于 P 为酉矩阵, 即 $\bar{P}^T P = I$, 这里 I 为单位矩阵, 再由 U 也是酉矩阵得到

$$\bar{D}D = \bar{D}^T D = \bar{U}^{-1} P \bar{U}^T U^{-1} P U = \bar{U}^T \bar{P}^T (\bar{U}^{-1})^T U^{-1} P U = \bar{U}^T U = I.$$

所以对任意 $1 \leq i \leq n$, $\bar{\alpha}_i \alpha_i = 1$, 即复数 α_i 的模为 1, 从而复数 β_i 的模也是 1, 故 $\bar{\beta}_i = \beta_i^{-1}$, 由此得到 $\bar{E} = E^{-1}$. 令 $Q = U\bar{E}U^{-1}$, 则显然 Q 可逆且有 $\bar{Q} = \bar{U}E\bar{U}^{-1} = UEU^{-1}$, 又 $Q^{-1} = U\bar{E}^{-1}U^{-1} = UEU^{-1}$, 所以

$$\bar{Q}Q^{-1} = (UEU^{-1})^2 = UE^2U^{-1} = UDU^{-1} = P.$$

..... (20 分)

□

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 $\alpha > 1$, 证明:

$$(1) \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dx.$$

$$(2) \text{计算 } \int_0^{+\infty} \sin x^3 dx \cdot \int_0^{+\infty} \sin x^{\frac{3}{2}} dx.$$

解答. (1) 证明: 对于 $s > 0$ 以及 $0 \leq a < b \leq +\infty$, 我们有

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-sx} \sin x dx &= \operatorname{Im} \int_a^b e^{-(s-i)x} dx = \operatorname{Im} \frac{e^{-(s-i)a} - e^{-(s-i)b}}{s-i} \\ &= \frac{se^{-sa} \sin a - se^{-sb} \sin b + e^{-sa} \cos a - e^{-sb} \cos b}{s^2 + 1}. \end{aligned} \quad (1)$$

..... (2 分)

由 (1),

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{2\alpha} + 1} dt$$

收敛.

..... (4 分)

任取 $A > \varepsilon > 0$, 由 Weierstrass 判别法, $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dt$ 关于 $x \in [\varepsilon, A]$ 一致收敛, 因此, 结合 (1),

$$\begin{aligned} &\left| \int_\varepsilon^A dx \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dt - \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dx \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} dt \int_\varepsilon^A e^{-t^\alpha x} \sin x dx - \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dx \right| \\ &\leq \left| \int_0^{+\infty} \left(\left| \int_A^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dx \right| + \left| \int_0^\varepsilon e^{-t^\alpha x} \sin x dx \right| \right) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{+\infty} \frac{|t^\alpha e^{-t^\alpha A} \sin A + e^{-t^\alpha A} \cos A| + |-t^\alpha e^{-t^\alpha \varepsilon} \sin \varepsilon + 1 - e^{-t^\alpha \varepsilon} \cos \varepsilon|}{t^{2\alpha} + 1} dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{+\infty} \left(e^{-t^\alpha A} + |\sin \varepsilon| + |1 - e^{-t^\alpha \varepsilon} \cos \varepsilon| \right) \frac{t^\alpha + 1}{t^{2\alpha} + 1} dt \right|. \end{aligned}$$

利用一致收敛性, 或控制收敛定理, 得到

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dx.$$

..... (8 分)

(2) 对于 $\alpha > 1$, 以及 $x > 0$, 有

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} dt = \frac{1}{\alpha} x^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-s} ds = \frac{1}{\alpha} x^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

以及

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha + 1} dt &= \frac{1}{\alpha} \int_0^1 s \left(\frac{1}{s} - 1\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{1}{s^2} ds \\ &= \frac{1}{\alpha} B\left(1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}. \end{aligned}$$

..... (11 分)

从而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin x^\alpha dx &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \sin x dx \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)} \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}x} \sin x dt \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)} \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}x} \sin x dx \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} + 1} dt \\ &= \frac{\pi}{2\alpha\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{(\alpha-1)\pi}{2\alpha}\right)} = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \sin\frac{\pi}{2\alpha}. \end{aligned}$$

最后得到

$$\int_0^{+\infty} \sin x^3 dx \cdot \int_0^{+\infty} \sin x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \sin\frac{\pi}{6} \cdot \frac{2}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}.$$

..... (15 分)

注: 可以利用第二型曲线积分计算, 对于 $\alpha > 1$, 在以 0 为顶点的锥形区域

$$D := \{re^{i\theta} \mid r > 0, \theta \in (0, \beta)\}$$

内, 定义 $\ln z$ 如下:

$$\ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta, \quad \forall re^{i\theta} \in D,$$

其中 $\beta = \frac{\pi}{2\alpha}$. 则易见 $\ln z$ 可以连续地把定义域延伸到 D 的边界. 又易见, 在 D 内成立 $\ln z$ 在 D 内解析.

令 $z^\alpha := e^{\alpha \ln z}$, ($z \in \overline{D}$), 则 e^{iz^α} 在 D 内解析在 \overline{D} 上连续.

任取 $R > 0$, 考虑 $D_R := B_R(0) \cap D$, 则 $\int_{\partial D_R} e^{iz^\alpha} dz = 0$. 由此即得

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{ix^\alpha} dx &= \int_0^R e^{ir^\alpha e^{i\alpha\beta}} e^{i\beta} dr - \int_0^\beta e^{iR^\alpha e^{i\alpha\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \\ &= e^{i\beta} \int_0^R e^{-r^\alpha \sin(\alpha\beta)} e^{ir^\alpha \cos(\alpha\beta)} dr - i \int_0^\beta Re^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)} e^{iR^\alpha \cos(\alpha\theta)} e^{i\theta} d\theta \\ &= e^{\frac{\pi i}{2\alpha}} \int_0^R e^{-r^\alpha} dr - i \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)} e^{iR^\alpha \cos(\alpha\theta)} e^{i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

易见有常数 $C > 0$ 使得

$$\begin{aligned} &\left| i \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)} e^{iR^\alpha \cos(\alpha\theta)} e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leqslant \left| \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)} d\theta \right| \leqslant \left| \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-CR^\alpha \theta} d\theta \right| \leqslant \frac{1}{CR^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

于是, 可得

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^\alpha} dx = e^{\frac{i\pi}{2\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-r^\alpha} dr = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) e^{\frac{i\pi}{2\alpha}}.$$

得分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 设 f, g 为 \mathbb{R} 上的非负连续可微函数, 满足: $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $f'(x) \geq 6 + f(x) - f^2(x)$, $g'(x) \leq 6 + g(x) - g^2(x)$. 证明:

- (1) $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ 以及 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $\xi \in (-\infty, x)$ 使得 $f(\xi) \geq 3 - \varepsilon$.
- (2) $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $f(x) \geq 3$.
- (3) $\forall x \in \mathbb{R}$, 存在 $\eta \in (-\infty, x)$ 使得 $g(\eta) \leq 3$.
- (4) $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $g(x) \leq 3$.

解答. (1) 任取 $\varepsilon \in (0, 1)$ 以及 $x \in \mathbb{R}$, 若结论不真, 则 $f(t) \leq 3 - \varepsilon (\forall t \leq x)$. 因此,

$$f'(t) \geq 6 + f(t) - f^2(t) = (3 - f(t))(2 + f(t)) \geq 2\varepsilon, \quad \forall t \leq x.$$

于是

$$f(x) - f(t) \geq 2\varepsilon(x - t), \quad \forall t \leq x.$$

从而 $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty$. 与 f 非负矛盾.

因此, 存在 $\xi < x$ 使得 $f(\xi) \geq 3 - \varepsilon$.

..... (5 分)

(2) 任取 $x \in \mathbb{R}$, 由连续性, 我们只要证明对任何 $\varepsilon \in (0, 1)$, 成立 $f(x) \geq 3 - \varepsilon$.

由(1), 存在 $\xi < x$ 使得 $f(\xi) \geq 3 - \varepsilon$. 令 $h(t) = f(t) - (3 - \varepsilon)$, 我们有

$$h'(t) = f'(t) \geq (3 - f(t))(2 + f(t)) \geq -(2 + f(t))h(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

记 $F(t) = \int_0^t (2 + f(s)) ds$, 则

$$(e^{F(t)} h(t))' = e^{F(t)} (h'(t) + (2 + f(t))h(t)) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

因此,

$$e^{F(x)} h(x) \geq e^{F(\xi)} h(\xi) \geq 0.$$

因此, $h(x) \geq 0$. 即 $f(x) \geq 3 - \varepsilon$.

..... (10 分)

(3) 任取 $x \in \mathbb{R}$, 若结论不真, 则 $g(t) > 3 (\forall t < x)$. 因此,

$$g'(t) \leq 6 + g(t) - g^2(t) = -(g(t) - 3)^2 - 5(g(t) - 3) \leq -(g(t) - 3)^2, \quad \forall t < x.$$

于是

$$\frac{g'(t)}{(g(t) - 3)^2} \leq -1, \quad \forall t \leq x.$$

不等式两边在 $[t, x]$ 上积分, 得到

$$\frac{1}{g(t) - 3} - \frac{1}{g(x) - 3} \leq t - x, \quad \forall t < x.$$

进而

$$-\frac{1}{g(x) - 3} \leq t - x, \quad \forall t < x.$$

在上式令 $t \rightarrow -\infty$ 即得矛盾. 因此, 存在 $\eta \in (-\infty, x)$ 使得 $g(\eta) \leq 3$.

..... (17 分)

(4) 任取 $x \in \mathbb{R}$, 由 (3), 存在 $\eta \in (-\infty, x)$ 使得 $g(\eta) \leq 3$. 我们有

$$(g(t) - 3)' \leq -(g(t) - 3)(2 + g(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

因此,

$$(e^{G(t)}(g(t) - 3))' = e^{G(t)}((g(t) - 3)' + (2 + g(t))(g(t) - 3)) \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

其中 $G(t) = \int_0^t (2 + g(s)) ds$. 从而

$$e^{G(x)}(g(x) - 3) \leq e^{G(\eta)}(g(\eta) - 3) \leq 0.$$

因此, $g(x) \leq 3$. .

□

..... (20 分)