十三届决赛解析非数学类

设A是实n阶矩阵,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$A$的$n$个非0列向量, 证明：

$$r(A)\ge\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}^2}{a_i^T a_i}.$$

证明：

用λa_i替代a_i不影响不等式,因此我们不妨设$a_i^T a_i=1$, 只需证明$r(A)\ge\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2$.

回忆：

设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\in\mathbb{R}^n$是标准正交基, 则对任何向量$\alpha\in\mathbb{R}^n$, 都有

$$\alpha=\sum_{j=1}^{n}c_j\eta_j,(\alpha,\eta_i)=\left(\sum_{j=1}^{n}c_j\eta_j,\eta_i\right)=\sum_{j=1}^{n}c_j(\eta_j,\eta_i)=c_i$$

因此证明了傅里叶展开：$\alpha=\sum_{j=1}^{n}(\alpha,\eta_j)\eta_j$.

帕塞瓦尔恒等式： $\|\alpha\|^2=(\alpha，\alpha)=\sum_{j=1}^{n}\left|(\alpha,\eta_j)\right|^2$

实际上,$(\alpha，\alpha)=\left(\sum_{j=1}^{n}(\alpha,\eta_j)\eta_j,\sum_{i=1}^{n}(\alpha,\eta_i)\eta_i\right)$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha,\eta_j)(\alpha,\eta_i)(\eta_j,\eta_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\alpha,\eta_j)(\alpha,\eta_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left|(\alpha,\eta_j)\right|^2.$$

内积$Cauchy$不等式:$|(x,y)|\le\|x\|\cdot\|y\|$

留做习题：设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k\in\mathbb{R}^n$是标准正交向量组, 证明$bessel$不等式：

$$(\alpha，\alpha)\ge\sum_{i=1}^{k}\left|(\alpha,\eta_j)\right|^2.$$

回到原题：

设$e_1,e_2,\cdots,e_n\in\mathbb{R}^n$是标准的标准正交基,$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\left(a_i,e_i\right)\right|^2$

设和全体a_i等价的标准正交向量组为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$,此时

设$a_i=\sum\limits_{j=1}^{k}\left(a_i,\eta_j\right)\eta_j$,从而

$$\left|\left(a_i,e_i\right)\right|^2=\left|\left(\sum_{j=1}^{k}\left(a_i,\eta_j\right)\eta_j,e_i\right)\right|^2=\left|\sum_{j=1}^{k}\left(a_i,\eta_j\right)\left(\eta_j,e_i\right)\right|^2\le\sum_{j=1}^{k}\left|\left(a_i,\eta_j\right)\right|^2\sum_{j=1}^{k}\left|\left(\eta_j,e_i\right)\right|^2$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\left|\left(\eta_j,e_i\right)\right|^2$$

从而$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}^2\le\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{k}\left|\left(\eta_j,e_i\right)\right|^2=\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\left(\eta_j,e_i\right)\right|^2=\sum\limits_{j=1}^{k}1=k=r\left(A\right)$.证毕！

设$a>0,b>0,a+b=1,a^b+b^a\le\sqrt{a}+\sqrt{b}\le a^a+b^b.$

证明：

由轮换对称性, 不妨设$a\le b$

$f(x)=a^x+b^{1-x}$, 只需证明$f(b)\le f\left(\frac{1}{2}\right)\le f(a)$，下证$f$递减

$f'(x)=\ln a\cdot a^x-\ln b\cdot b^{1-x}, f''(x)=\ln^2 a\cdot a^x+\ln^2 b\cdot b^{1-x}>0.$

故f'递增, 只需证明$f'(b)\le 0$, 即$\ln a\cdot a^b\le\ln b\cdot b^{1-b}.$

只需证明$\frac{\ln a^a}{a^a}=\ln a\cdot a^{1-a}\le\ln b\cdot b^{1-b}=\frac{\ln b^b}{b^b}.$

注意到$0<a^a,b^b\le 1$

$\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}>0, x\in(0,1]$，只需证明$a^a\le b^b=(1-a)^{1-a}$

这等价于$a\ln a\le(1-a)\ln(1-a).$

也等价于$\frac{\ln a}{1-a}\le\frac{\ln(1-a)}{a}$,

$$\left(\frac{\ln x}{1-x}\right)'=\frac{\frac{1}{x}-1+\ln x}{(1-x)^2}=\frac{\ln x-\frac{x-1}{x}}{(1-x)^2}$$

记忆经典不等式$\ln(1+x)\ge\frac{x}{1+x}, x>-1$, 所以$\ln x>\frac{x-1}{x}$,

因此$\frac{\ln x}{1-x}$递增, 而$a\le b=1-a$, 故就证明了不等式.

$a_1=\frac{\pi}{2}, a_{n+1}=a_n-\frac{1}{n+1}\sin a_n, n\ge 1$

求证明na_n收敛.

证明：

下证$0<a_{n+1}<a_n$, 事实上, $n=1$显然成立.

设$0<a_{k+1}<a_k, k=1,2,\cdots,n$, 则

$$a_{n+2}=a_{n+1}-\frac{1}{n+1}\sin a_{n+1}\ge a_{n+1}-\frac{1}{n+1}a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_{n+1}>0$$

现在$a_{n+1}<a_1=\frac{\pi}{2}$, 所以$a_{n+2}=a_{n+1}-\frac{1}{n+1}\sin a_{n+1}<a_{n+1}$,

由归纳法我们证明了断言.

$(n+1)a_{n+1}=(n+1)a_n-\sin a_n=na_n+a_n-\sin a_n\ge na_n$,

因此只需证明na_n有界.

显然$\left(x-\frac{1}{n+1}\sin x\right)'=1-\frac{\cos x}{n+1}\ge 0.$

为何上界需要技术改进？

待定$C>0$, 加强归纳证明$a_n\le\frac{C}{n}$,

$$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{n+1}\sin a_n\le\frac{C}{n}-\frac{1}{n+1}\sin\frac{C}{n}\le\frac{C}{n+1}$$

即$\frac{C}{n(n+1)}=\frac{C}{n}-\frac{C}{n+1}\le\frac{1}{n+1}\sin\frac{C}{n}\le\frac{1}{n+1}\frac{C}{n}$, 不等号方向反了！.

方法1：加强归纳，我们证明$a_n \le \dfrac{C}{\sqrt{n}}$.

分析：$a_{n+1} = a_n - \dfrac{1}{n+1}\sin a_n \le \dfrac{C}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n+1}\sin\dfrac{C}{\sqrt{n}} \le \dfrac{C}{\sqrt{n+1}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{C}{\sqrt{n}} - \dfrac{C}{\sqrt{n+1}} \le \dfrac{1}{n+1}\sin\dfrac{C}{\sqrt{n}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{C\left(\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \le \sin\dfrac{C}{\sqrt{n}}$, 注意左边$\sim \dfrac{C}{2\sqrt{n}}$, 右边$\sim \dfrac{C}{\sqrt{n}}$，果然左边比右边小

利用$\sin x \ge \dfrac{2}{\pi}x, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, 则希望$\dfrac{C\left(\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \le \dfrac{2}{\pi}\dfrac{C}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le \dfrac{2}{\pi}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{n+1}}} \le \dfrac{2}{\pi} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \le \dfrac{2}{\pi} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}+2} \le \dfrac{1}{\pi} \Leftrightarrow \sqrt{2}+2 \ge \pi.$

证明：归纳证明$a_n \le \dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}$.

$n=1$, 命题显然成立, 假设$a_n \le \dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}$, 利用$\left(x - \dfrac{1}{n+1}\sin x\right)' \ge 0$, 我们知道

$a_{n+1} = a_n - \dfrac{1}{n+1}\sin a_n \le \dfrac{\pi}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}.$

我们断言$\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}} \le \dfrac{\pi}{2\sqrt{n+1}}$,

即$\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}} - \dfrac{\pi}{2\sqrt{n+1}} \le \dfrac{1}{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}$.

利用$\sin x \ge \dfrac{2}{\pi}x$, 以及$\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{n+1}}} \le \dfrac{2}{\pi}$, 我们知道

$$\frac{\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi}{2\sqrt{n+1}} = \frac{\pi}{2\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n(n+1)}} \le \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} \le \frac{1}{n+1}\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}.$$

因此我们证明了断言.

$$(n+1)a_{n+1} = na_n + a_n - \sin a_n = na_n + O\left(a_n^3\right) = na_n + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

所以$\sum\left((n+1)a_{n+1} - na_n\right) = \sum O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right) < \infty$, 因此$\lim\limits_{n\to\infty} na_n$存在

方法2：联想$Taylor$展开首1要取倒数的方法.

$(n+1)a_{n+1}=na_n+a_n-\sin a_n$

$$\frac{1}{na_n}-\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}=\frac{a_n-\sin a_n}{n(n+1)a_na_{n+1}}\leq\frac{a_n-\sin a_n}{n^2a_n^2}\leq\frac{a_n}{6n^2}\leq\frac{a_1}{6n^2}$$

所以$\sum\left(\frac{1}{na_n}-\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}\right)\leq\sum\frac{a_1}{6n^2}$，所以$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}\leq\sum\frac{a_1}{6n^2}$

$(n+1)a_{n+1}\leq\frac{1}{\frac{1}{a_1}-\sum\frac{a_1}{6n^2}}<\infty$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$存在.

四:

$f(x)=\begin{cases}x,0<x<\pi;\\0,-\pi\leq x\leq 0\end{cases}$,以$2\pi$周期,$f$展开傅里叶级数, 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

证明：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2},n\geq 1$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{(-1)^{n+1}}{n},n=1,2,\cdots$$

故$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$

$x=0$代入, $0=\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\right)\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

,结合$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

曲面Σ由锥面$x=\sqrt{y^2+z^2}, x=1, x^2+y^2+z^2=4$围成区域外侧, 计算

$$\oiint_{\Sigma}\left[x^2+f(xy)\right]dydz+\left[y^2+f(xz)\right]dzdx+\left[z^2+f(yz)\right]dxdy$$

f连续可微奇函数.

证明：

$$\oiint_{\Sigma}\left[x^2+f(xy)\right]dydz+\left[y^2+f(xz)\right]dzdx+\left[z^2+f(yz)\right]dxdy$$

$$=\iiint\left[2x+yf'(xy)+2y+2z+yf'(yz)\right]dV$$

注意f'偶函数, 所以

$$=\iiint 2xdV=\iiint_{\Sigma'}2zdV, \Sigma': z=\sqrt{x^2+y^2}, z=1, x^2+y^2+z^2=4\text{围成区域外侧}$$

$$\iiint_{\Sigma'}2zdV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2\sin\psi d\psi\int_{\frac{1}{\cos\psi}}^{2}2r\cos\psi dr=\frac{7\pi}{2}.$$

$f\in C[0,1]$,

$$f(x)=1+(1-x)\int_0^x yf(y)dy+x\int_x^1(1-y)f(y)dy$$

求f:

证明：

$$f'=-\int_0^x yf(y)dy+(1-x)xf(x)+\int_x^1(1-y)f(y)dy+x(1-x)f(x)$$

在求导$f''=-f, f(0)=f(1)=1$

$$f(x)=\cos x+\frac{1-\cos 1}{\sin 1}\sin x$$

填空题：

1：$a,b\neq 0,|b|=1,a,b$夹角$\dfrac{\pi}{4}$, 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|a+xb|-|a|}{x}$

取$b=(1,0),a=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{|a+xb|-|a|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+x\right)^2+\frac{1}{2}}-1}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2：

$$\lim_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{2}{x}\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}=e$$

$$3:\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{1}{2}\int_{2}^{4}\frac{1}{t\sqrt{t-1}}dt=\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{(1+u^2)}du=\frac{\pi}{12}$$

5:

$$\iint\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)dxdy=\iint 4uv(u+2v)dudv=12\int_0^1 du\int_0^{1-u}u^2vdv=\frac{1}{5}.$$