2014 年第五届全国大学生数学竞赛决赛

（非数学类）试卷

一、解答下列各题（本题共 28 分，每小题 7 分）

1．计算积分$\int_0^{2\pi} x\int_x^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,x.$

2．设$f(x)$是$\left[0,1\right]$上的连续函数，且满足$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=1$，求一个这样的函数$f(x)$，使得积分$I=\int_0^1\left(1+x^2\right)f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$取到最小值.

3．设$F\left(x,y,z\right),G\left(x,y,z\right)$有连续偏导数，$\frac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(x,z\right)}\neq 0$，曲线$\begin{cases}F\left(x,y,z\right)=0,\\ G\left(x,y,z\right)=0\end{cases}$过点$P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$．记$\Gamma$在$xOy$面上的投影曲线为$S$．求$S$上过点$\left(x_0,y_0\right)$的切线方程.

4．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&a\\1&2&2\end{pmatrix}$，其中$a$为常数，矩阵$B$满足关系式$AB=A-B+E$，其中$E$是单位矩阵且$B\neq E$．若秩$rank\left(A+B\right)=3,$ 求常数a的值.

二、（12 分） 设$f\in C^4\left(-\infty,+\infty\right)$，

$$f\left(x+h\right)=f\left(x\right)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''\left(x+\theta h\right)h^2,$$

其中θ是与x,h无关的常数. 证明f是不超过三次的多项式.

三、（12 分） 设当$x>-1$时，可微函数$f(x)$满足条件

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{1+x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t=0\text{且}f(0)=1.$$

试证：当$x\geq 0$时，有$e^{-x}\leq f(x)\leq 1$成立.

四、（10 分） 设$D=\left\{\left(x,y\right)\mid 0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1\right\}, I=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$，其中函数$f(x,y)$在$D$上有连续二阶偏导数，若对任何$x,y$有$f\left(0,y\right)=f\left(x,0\right)=0$且$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\leq A$.

证明$I \le \dfrac{A}{4}$.

五、(12 分) 设函数$f(x)$连续可导，$P=Q=R=f\left(\left(x^2+y^2\right)z\right)$，有向曲面$\Sigma_1$是圆柱体$x^2+y^2 \le t^2, 0 \le z \le 1$的表面，方向朝外. 记第二型曲面积分

$$I_t=\iint_{\Sigma_1} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ .$$

求极限$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{I_t}{t^4}$.

六、(12 分) 设A,B是两个n阶正定矩阵，求证AB正定的充要条件是$AB=BA$.

七、(12 分) 假设$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为 1，$\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$，且$\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$. 证明$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$收敛且$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$.