第十届清疏竞赛班非数学类 6:

经典极限问题解析

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{k}}$,计算$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

计算：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{k}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt[k]{k}}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{k}}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{k}}}\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$$

计算：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\geq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n^2}}\geq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{n}{n^2}}$$

因此$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}=\int_0^1(1+x)\,dx=\frac{3}{2}$

设$a_1,a_2,\cdots,a_n>0, F\left(x\right)=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, 求

$\left(1\right)\lim\limits_{x\to+\infty}F\left(x\right),\left(2\right)\lim\limits_{x\to-\infty}F\left(x\right),\left(3\right)\lim\limits_{x\to0}F\left(x\right)$

计算：

$\left(1\right)$其实就是$laplace$方法的离散版本.

记a_k是$a_1,a_2,\cdots,a_n$最大的项,那么

$$\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\le\left(\frac{a_k^x+a_k^x+\cdots+a_k^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=a_k$$

$$\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\ge\left(\frac{a_k^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{a_k}{n^{\frac{1}{x}}}$$

因此$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)\ge a_k\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=a_k$

$$\left(2\right):F\left(x\right)=\left[\left(\frac{\left(a_1^{-1}\right)^{-x}+\left(a_2^{-1}\right)^{-x}+\cdots+\left(a_n^{-1}\right)^{-x}}{n}\right)^{\frac{1}{-x}}\right]^{-1}$$

因此$\lim\limits_{x\to-\infty}F^{-1}\left(x\right)=a_j^{-1}$中最大项,即设记$a_k$是$a_1,a_2,\cdots,a_n$最小的项,

那么$\lim\limits_{x\to-\infty}F\left(x\right)=a_k$

$$\left(3\right):\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x\right)-\ln n}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\frac{\ln a_1\cdot a_1^x+\cdots+\ln a_n\cdot a_n^x}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}}{1}}$$

$$=e^{\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\sqrt{x^2+k}$$

回忆：$\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}=(x+y)^n$

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k=(-1+1)^n=0$$

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k=(x+1)^n$$

$$\sum_{k=1}^{n}kC_n^k x^k=nx(x+1)^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}kC_n^k=n2^{n-1}$$

不熟悉组合数的同学去算几个例子找找感觉

$$(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{m+n}$$

在上面恒等式左右分别使用二项式定理去建立范德蒙恒等式

证明：

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\sqrt{x^2+k}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k|x|\sqrt{1+\frac{k}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k|x|\left(1+O\left(\frac{k}{x^2}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\left(|x|+O\left(\frac{k}{|x|}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k O\left(\frac{k}{|x|}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}$$

证明：

$$C_{2n}^0 \le C_{2n}^1 \le C_{2n}^2 \cdots \le C_{2n}^n \ge C_{2n}^{n+1} \cdots \ge C_{2n}^{2n}$$

$$C_{2n-1}^0 \le C_{2n-1}^1 \le C_{2n-1}^2 \cdots \le C_{2n-1}^{n-1} = C_{2n-1}^n \ge C_{2n-1}^{n+1} \cdots \ge C_{2n}^{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k} = \lim_{n\to\infty}\left(2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{C_n^k}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}+\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{C_n^k}\right)$$

$$= 2+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{C_n^k}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{C_n^k} \le \lim_{n\to\infty}\frac{n}{C_n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{n(n-1)}{2}} = 0$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{C_n^k} = 2$

实际上我们可以求出$\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{C_n^k}$通项, 可以做蒲和平看到.

$\lim\limits_{x\to0^+} x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$,这里合计$n$重

证明：

$\lim\limits_{x\to0^+} x=0, \lim\limits_{x\to0^+} x^x=1,$因此我们来证明,当$n$为奇数时

$\lim\limits_{x\to0^+} x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}=0,$

当n为偶数时,$\lim\limits_{x\to0^+} x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}=1$

假设已经证明了n为偶数时,$\lim\limits_{x\to0^+} x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}=1,$

则n为奇数时，我们有

$\lim\limits_{x\to0^+} x^{\left(x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right)}=0^1=0,$

所以我们来证明n为偶数时,$\lim\limits_{x\to0^+} x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}=1,$

$n=2$显然成立,假定对n, n是偶数成立,当$n+2$时,我们有

要计算$\lim\limits_{x\to0^+} x^{x^{\left(x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}\right)}}$,运用归纳假设,我们有$\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}\right)=1$

于是存在$\delta>0$,当$x\in(0,\delta)$,$\left(x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}\right)>\dfrac{2}{3}$

那么对$x\in(0,\delta)$,我们有,

$x^{\left(x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}\right)}<x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow x^{x^{\left(x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}\right)}}>x^{x^{\frac{2}{3}}}$

$\lim\limits_{x\to0^+} x^{x^{\frac{2}{3}}}=\lim\limits_{x\to0^+} e^{x^{\frac{2}{3}}\ln x}=1$

因此$\lim\limits_{x\to0^+} x^{x^{\left(x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}\right)}}\geq1$,显然$\lim\limits_{x\to0^+} x^{x^{\left(x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}\right)}}\leq1$

当$n+2$时,由夹逼准则,我们就完成了证明.

$0 \le x_{n+m} \le x_m + x_n$, 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$收敛

需要掌握的数学分析知识点(我们以下确界为例, 上确界类似):

下确界理解为最精确的下界, 例: $\arctan x > -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$最精确

下确界严格定义:

设M是一个非空集合, 称$a \in \mathbb{R}$是M的下确界, 如果

$(1): \forall x \in M$, 都有$x \ge a$;

$(2): \forall \varepsilon > 0$, 存在$x_\varepsilon \in M$, 使得$x_\varepsilon \le a + \varepsilon$.

需要掌握的小学数论的知识点:

$\mathbb{Z} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k+1 : k \in \mathbb{Z}\}$,

类似的我们可以不按除以2的余数来分类, 而是按除以$m \in \mathbb{N}$的余数来分类

即: $\mathbb{Z} = \bigcup\limits_{r=0}^{m-1}\{mk + r : k \in \mathbb{Z}\}$

证明:

$x_{2n} \le 2x_n, x_{3n} \le x_{2n} + x_n \le 3x_n \ldots \Rightarrow x_{mn} \le m x_n, \forall m, n \in \mathbb{N}$,

现在对任何$p \in \mathbb{N}$, 对$r = 0, 1, 2, \cdots, p-1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{pn+r}}{pn+r} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{pn+r}}{pn} \le \lim_{n\to\infty}\frac{x_{pn} + x_r}{pn} \le \lim_{n\to\infty}\frac{nx_p + x_r}{pn} = \frac{x_p}{p}$$

记$\inf\limits_{p\in\mathbb{N}}\frac{x_p}{p} = a \ge 0$

此时$\frac{x_p}{p} \ge \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{pn+r}}{pn+r} \ge a$, 两边再对$p$取下确界, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{pn+r}}{pn+r} = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = a = \inf_{p\in\mathbb{N}}\frac{x_p}{p}.$$

$\left(\text{蒲和平答案有误}\right)0 \le x_{n+1} \le x_n + \frac{1}{n^2}$, 证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

证明：

对$n \ge 2$

$$0 \le x_{n+1} \le x_n + \frac{1}{n^2} \le x_n + \frac{1}{n(n-1)} = x_n + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

因此$0 \le x_{n+1} + \frac{1}{n} \le x_n + \frac{1}{n-1}$, 因此$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{1}{n-1}\right)$存在

所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

推广$\left(\text{类似于强求通项}\right)$：

已知x_n有下界, 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛, 若$x_{n+1} \le x_n + b_n$, 证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

$$c_{n+1} \le x_{n+1} + c_{n+1} \le x_n + b_n + c_{n+1}$$

期望$b_n + c_{n+1} = c_n \Rightarrow c_n - c_{n+1} = b_n \Rightarrow c_{n+1} = c_1 - \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$

现在$x_n + c_n$单调递减有下界, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n + c_n\right)$存在

要期望$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在, 只需要期望$\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$收敛。

设$a>0$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{s=1}^{n}\left(\frac{a+s}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{a+s}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{a+n-s+1}{n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\left(1+\frac{a-s+1}{n}\right)^n$$

方法1(考试方法):

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{a+n-s+1}{n}\right)^n\le\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}e^{n\ln\left(1+\frac{a-s+1}{n}\right)}\le\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}e^{a-s+1}=\sum_{s=1}^{\infty}e^{a-s+1},$$

$\forall m\in\mathbb{N}$,对$n\ge m$,我们都有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{a+n-s+1}{n}\right)^n\ge\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{a+n-s+1}{n}\right)^n=\sum_{s=1}^{m}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a+n-s+1}{n}\right)^n$$

$$=\sum_{s=1}^{m}e^{a-s+1},$$

然后由m任意性,我们对$m\to+\infty$,就有

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{s=1}^{n}\left(\frac{a+n-s+1}{n}\right)^n\ge\sum\limits_{s=1}^{\infty}e^{a-s+1}$,由夹逼准则, 得到方法2的结果

方法2(最专业的方法):

$$\sum_{s=1}^{n}\left(1+\frac{a-s+1}{n}\right)^n=\sum_{s=1}^{\infty}\left(1+\frac{a-s+1}{n}\right)^n\chi_{\{1,2,\cdots,n\}}(s)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left|\left(1+\frac{a-s+1}{n}\right)^n\chi_{\{1,2,\cdots,n\}}(s)\right|\le\sum_{s=1}^{\infty}e^{n\ln\left(1+\frac{a-s+1}{n}\right)}\le\sum_{s=1}^{\infty}e^{a-s+1}<\infty$$

由控制收敛定理(不到万不得已不直接用),我们可以直接换序

这个定理可以参考第九届非数2的PDF,直接记忆即可.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\left(1+\frac{a-s+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\left(1+\frac{a-s+1}{n}\right)^n\chi_{\{1,2,\cdots,n\}}(s)$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a-s+1}{n}\right)^n\chi_{\{1,2,\cdots,n\}}(s)\right]=\sum_{s=1}^{\infty}e^{a-s+1}$$

$$\overset{\text{记忆等比级数收敛时的和}}{=}\frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}=\frac{e^a}{1-e^{-1}}$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\}$

计算：

$\{x\} \triangleq x-[x]$

$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{3}, A_n, B_n \in \mathbb{N}$

$\left(2-\sqrt{3}\right)^n = A_n - B_n\sqrt{3}, A_n, B_n \in \mathbb{N}$

$B_n\sqrt{3} = A_n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right]\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(A_n + B_n\sqrt{3} - \left[A_n + B_n\sqrt{3}\right]\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(B_n\sqrt{3} - \left[B_n\sqrt{3}\right]\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(A_n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n - \left[A_n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\left(2-\sqrt{3}\right)^n - \left[-\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(-(-1)\right) = 1$

计算$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin 2\pi e n!$

分析：

如果使用Peano余项为什么不能严谨解决本题？

证明：

对$x>0$,运用taylor公式的拉格朗日余项,存在$\theta\in(0,x)$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^\theta x^{n+2}}{(n+2)!},$$

$$e=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}+\frac{e^\theta}{(n+2)!},$$

$$\lim_{n\to\infty} n\sin 2\pi e n!=\lim_{n\to\infty} n\sin 2\pi\left(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}+\frac{e^\theta}{(n+2)!}\right)n!$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\sin 2\pi\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{e^\theta}{(n+2)!}\right)n!$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\sin 2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{e^\theta}{(n+2)(n+1)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{e^\theta}{(n+2)(n+1)}\right)=2\pi,$$

注意如果没听懂为什么要展开到$\sum\limits_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}$而不是$\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

可以自己试试如果展开到$\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$会怎么样.

对于本题,展开的项足够高,就能实现高阶的渐进估计

有兴趣的同学可以参考朱尧辰的数学分析范例.

计算$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{2}{3k}\right)$

方法1：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{2}{3k}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\left(x^{3k-3}+x^{3k-2}-2x^{3k-1}\right)dx$$

$$=\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\left(x^{3k-3}+x^{3k-2}-2x^{3k-1}\right)dx$$

$$=\int_0^1\frac{1+x-2x^2}{1-x^3}dx$$

方法2：利用$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1)$

$$\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k}=\ln(3n)+\gamma+o(1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k}\right)=\ln(3n)+\gamma+o(1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}\right)+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(3n)+\gamma+o(1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}\right)=\ln(3n)+\gamma+o(1)-\frac{1}{3}\left(\ln n+\gamma+o(1)\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{2}{3k}\right)$$

$$=\ln(3n)+\gamma+o(1)-\frac{1}{3}\left(\ln n+\gamma+o(1)\right)-\frac{2}{3}\left(\ln n+\gamma+o(1)\right)$$

$$=\ln(3n)-\frac{1}{3}(\ln n)-\frac{2}{3}(\ln n)+o(1)$$

$$=\ln 3+o(1)$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{2}{3k}\right)=\ln 3.$