第十届清疏竞赛班非数学类 10:

中值不等式和极限

课后需要看第九届非数学类(9)

中值极限问题：

(1) 设$f(x)$存在$n+1$阶不等于0的导数$(n\geq 1)$, 由$taylor$, 存在$\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(x+h)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{h^j}{j!}f^{(j)}(x)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),\text{证明}\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

一句话总结：再使用一次中值定理把参数θ给暴露出来.

(1): 证明

使用拉格朗日中值定理, $f^{(n)}(x+\theta h)=f^{(n)}(x)+f^{(n+1)}(\xi)\theta h$

$$\theta=\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{hf^{(n+1)}(\xi)}=\frac{\frac{n!}{h^n}[f(x+h)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{h^j}{j!}f^{(j)}(x)]-f^{(n)}(x)}{hf^{(n+1)}(\xi)}$$

由夹逼准则, $\lim_{h\to 0}\xi=x,\lim_{h\to 0}f^{(n+1)}(\xi)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=f^{(n+1)}(x).$

因此只需要计算$\lim_{h\to 0}\frac{n![f(x+h)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{h^j}{j!}f^{(j)}(x)]-h^nf^{(n)}(x)}{h^{n+1}}$

$$=n!\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-\sum_{j=0}^{n}\frac{h^j}{j!}f^{(j)}(x)}{h^{n+1}}$$

$$=n!\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-\sum_{j=1}^{n}\frac{h^{j-1}}{(j-1)!}f^{(j)}(x)}{(n+1)h^n}$$

$$=n!\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-\sum_{j=2}^{n}\frac{h^{j-2}}{(j-2)!}f^{(j)}(x)}{(n+1)nh^{n-1}}$$

$\cdots$

$$=n!\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(x+h)-f^{(n)}(x)}{(n+1)!h}=\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}$$

因此$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$

$(2)\ f(x)\in C^{n}(\mathbb{R})(n\geq 2), f^{(k)}(x_0)=0, k=1,2,\cdots,n-1, f^{(k)}(x_0)\neq 0$

$\exists\theta\in(0,1)$，使得$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h)$, 证明$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

(2)：证明：

由$Taylor$中值定理,

$$f'(x_0+\theta h)=\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi)(\theta h)^{n-1}$$

于是$\theta^{n-1}=\dfrac{(n-1)!f'(x_0+\theta h)}{f^{(n)}(\xi)h^{n-1}}=\dfrac{(n-1)!\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]}{f^{(n)}(\xi)h^{n}}$

$$\lim_{h\to 0}f^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(n-1)!\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]}{h^n}=\lim_{h\to 0}\frac{(n-1)!\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n+o(h^n)}{h^n}$$

$$=\frac{1}{n}f^{(n)}(x_0)$$

所以$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

中值不等式问题.

标准构造类：

1：其典型例子是$gronwall$不等式微分形式

如果$\mu'(t)\le\beta(t)\mu(t),\forall t\ge a,$那么

$$\mu(t)\le\mu(a)e^{\int_a^t\beta(s)ds},\forall t\ge a$$

分析：

$$\mu'(t)=\beta(t)\mu(t)\Rightarrow\mu(t)=ce^{\int_a^t\beta(s)ds}$$

$$c(t)=\frac{\mu(t)}{e^{\int_a^t\beta(s)ds}}$$

证明：

令$c(t)=\dfrac{\mu(t)}{e^{\int_a^t\beta(s)ds}},c'(t)=\dfrac{\mu'(t)-\beta(t)\mu(t)}{e^{\int_a^t\beta(s)ds}}\le 0$

所以$c(t)$递减,因此$c(t)\le\dfrac{\mu(a)}{e^{\int_a^a\beta(s)ds}}=\mu(a),t\ge a$

$$\mu(t)\le\mu(a)e^{\int_a^t\beta(s)ds},\forall t\ge a.$$

$2:$双绝对值技巧.

$f(0)=0, f\in C^1(\mathbb{R})$且满足$|f'(x)|\le C|f(x)|$, 证明$f(x)=0$,

分析：

$y'=Cy, y'=-Cy$

那么第一个微分方程解为$y=ce^{Cx}$,第二个微分方程解为$y=ce^{-Cx}$

$c(x)=\dfrac{f(x)}{e^{Cx}}, c(x)=f(x)e^{Cx}$

证明：

构造$c(x)=\dfrac{f^2(x)}{e^{2Cx}}\ge 0, c'(x)=\dfrac{2ff'-2Cf^2}{e^{2Cx}}$

$ff'\le |f'f|\le C|f|^2=Cf^2 \Rightarrow c'(x)\le 0 \Rightarrow c(x)$递减

$c(x)\le c(0)=f^2(0)=0, \forall x\ge 0,$ 所以$c(x)=0, \forall x\ge 0,$

当$x\le 0,$可以使用第二个构造类似得到$c(x)=0, \forall x\le 0.$

我们完成了证明.

稍复杂的情形

$f,g\in C[a,b]$, g在(a,b)可微, 且$g(a)=0$, 若$\lambda\neq 0$, 使得

$\left|g(x)f(x)+\lambda g'(x)\right|\le\left|g(x)\right|, x\in(a,b)$

证明：$g(x)\equiv 0.$

分析：

$$g(x)f(x)+\lambda g'(x)=g(x),g(x)f(x)+\lambda g'(x)=-g(x)$$

$$(1-f)g=\lambda g', g=ce^{\frac{\int_a^x(1-f)dx}{\lambda}}$$

证明：

不妨设$\lambda>0$

$$c(x)=\frac{g^2(x)}{e^{2\frac{\int_a^x(1-f(y))dy}{\lambda}}},c'(x)=\frac{\lambda g'(x)g(x)-g^2(x)+f(x)g^2(x)}{\lambda e^{2\frac{\int_a^x(1-f(x))dx}{\lambda}}}$$

$g^2f+\lambda g'g\le\left|g^2f+\lambda g'g\right|\le g^2\Rightarrow c(x)$递减$\Rightarrow c(x)\le c(a)=0,\forall x\ge a$

$\Rightarrow g(x)=0,\forall x\ge a.$

类似的考虑另外一个构造就得到$g(x)=0,\forall x\le a.$

这样我们就完成了证明.

3：二阶微分方程的情形.

直接以第九届的题为例.

4:极值原理的想法

先来看一个简单的例子：

$f(x)\in C^2[0,1], f(0)=f(1)=0$且满足$f''(x)-g(x)f'(x)=f(x)$

证明：$f(x)\equiv 0.$

一句话总结：用极值去处理.

证明：如果$f(x)$在$x_0\in(0,1)$取正最大值，那么$f'(x_0)=0,$

$f''(x_0)=f(x_0)>0\Rightarrow x_0$是$f$严格极小值，因此矛盾！

所以$f(x)\le 0,\forall x\in[0,1],$

如果$f(x)$在$x_0\in(0,1)$取负最小值，那么$f'(x_0)=0,$

$f''(x_0)=f(x_0)<0\Rightarrow x_0$是$f$严格极大值，因此矛盾！

所以$f(x)\ge 0,\forall x\in[0,1].$

因此$f(x)\equiv 0,\forall x\in[0,1].$

5.迭代法.

$f(0)=f'(0)=0, f\in C^2[0,1]$, 满足$|f''(x)|\le |f'(x)|+|f(x)|$,

证明$f(x)=0, \forall x\in[0,1]$.

证明：

假设$M\ge \max\left\{\max\limits_{x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]}|f(x)|, \max\limits_{x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]}|f'(x)|\right\}$

对$x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$, 由$f(x)=\dfrac{f''(\theta)}{2}x^2$

我们有

$$|f(x)|\le \frac{|f'(\theta)|+|f(\theta)|}{2}x^2\le Mx^2\le \frac{M}{9}\le \frac{2M}{3}$$

$$|f'(x)|=|f''(\xi)|x\le\left(|f'(\xi)|+|f(\xi)|\right)x\le 2Mx\le \frac{2M}{3}$$

所以上述的M可以换成$\dfrac{2M}{3}$,这样就有

$$|f(x)|\le\left(\frac{2}{3}\right)^2 M, |f'(x)|\le\left(\frac{2}{3}\right)^2 M$$

…

$$|f(x)|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n M, |f'(x)|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n M$$

令$n\to\infty, f(x)=0, x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$

对于$x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$,考虑$f\left(x-\frac{1}{3}\right)$即可，

对于$x\in\left[\frac{2}{3},1\right]$,考虑$f\left(x-\frac{2}{3}\right)$即可.

这样我们就完成了证明.

再来看一个稍难的例子：

$\alpha^2-4\beta>0, f(x)\in C[a,b]\cap D^2(a,b)$，满足

$(1): f''(x)+\alpha f'(x)+\beta f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b];$

$(2): f(a)=f(b)=0.$

证明$f(x)\leq 0.$

分析：

$g(x)=e^{\lambda x}f(x)$,代入原微分不等式,选取一个λ让g''和g前的系数相反

可以自行计算$\lambda=\dfrac{\alpha}{2}$是一个很好的系数.

证明：

令$g(x)=e^{\frac{\alpha}{2}x}f(x)$,代入原微分不等式$g''(x)-\left(\dfrac{\alpha^2}{4}-\beta\right)g(x)\geq 0,$

所以设$f(x_0)>0\Rightarrow g(x_0)>0\Rightarrow$不妨设$x_0$是$g(x)$最大值点,

此时$g''(x_0)\geq\left(\dfrac{\alpha^2}{4}-\beta\right)g(x_0)>0\Rightarrow x_0$严格极小值,矛盾！

所以$g(x)\leq 0\Rightarrow f(x)\leq 0.$

设$a>0, f(x)\in C^2[0,1]$非负$, f(0)=0, f(x)$不恒为0, 证明:
$\exists\xi\in(0,1)$,使得$\xi f''(\xi)+(a+1)f'(\xi)>af(\xi)$.
分析：
$xy'+ay=0\Rightarrow \ln y=c+a\ln x, y=cx^a$
证明：
如果对任何$x\in(0,1)$,都有
$xf''(x)+(a+1)f'(x)\le af(x)$.
因此$x\in[0,1]$,有$xf''(x)+(a+1)f'(x)\le af(x)$.
$$\int_0^x yf''(y)+(a+1)f'(y)dy=xf'(x)+af(x)\le a\int_0^x f(y)dy$$
$$x^a f'(x)+ax^{a-1}f(x)\le ax^{a-1}\int_0^x f(y)dy$$
$$x^a f(x)\le\int_0^x az^{a-1}\int_0^z f(y)dydz\le\int_0^x az^{a-1}\int_0^x f(y)dydz$$
$$=x^a\int_0^x f(y)dy$$
$$\Rightarrow f(x)\le\int_0^x f(y)dy$$
考虑$F(x)=\int_0^x f(y)dy$,则$F'\le F$,构$C(x)=\dfrac{F(x)}{e^x}$,则$C(x)$递减
因此$C(x)\le C(0)=0$，故$F(x)=0$,因此$f(x)=0$, 从而矛盾！

$f(x)\in D^2[0,1], f(x)\geq 0\geq f'(x), f''(x)\leq f(x), f(0)=1,$ 证明$f'(0)\geq -\sqrt{2}.$

分析：$f''+f'=f'+f$或者$f''f'=ff'$

本题采用第二种,实际上$c=\frac{1}{2}(f')^2-\frac{1}{2}f^2$

证明：

$c(x)=(f'(x))^2-f^2(x), c'(x)=2(f'f''-ff')=2f'(f''-f)\geq 0,$

$c(x)\geq c(0)=(f'(0))^2-1,$

$(f'(x))^2\geq f^2(x)+(f'(0))^2-1$

$f'(x)\leq -\sqrt{f^2(x)+(f'(0))^2-1}\leq -\sqrt{(f'(0))^2-1}$

$-1\leq f(1)-1=\int_0^1 f'(x)dx\leq -\sqrt{(f'(0))^2-1}$

$\Rightarrow f'(0)\geq -\sqrt{2}.$