2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛

（数学类一、二年级）试卷

一、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

(1) 设Γ为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体：矩阵的每行每列只有一个非零元素，且该非零元素为 1，则 $\sum\limits_{A\in\Gamma}\left|A\right| =$______.

(2) 令$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}\, x$. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛，则p取值范围________.

(3) 设$D: x^2+2y^2 \le 2x+4y$，则积分$I = \iint\limits_D \left(x+y\right)\mathrm{d}\, x\,\mathrm{d}\, y =$_______.

(4) 若实向量$X=\left(a,b,c\right)$的三个分量a,b,c满足$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{2016} = I_2$，则$X=$_____或_____或________或________.

二、（本题 15 分） 在空间直角坐标系中，设S为椭圆柱面$x^2+2y^2=1$，σ是空间中的平面，它与S的交集为一个圆. 求所有这样平面σ的法向量.

三、（本题 15 分） 设A,B为n阶实对称矩阵. 证明$\mathrm{tr}\left(\left(AB\right)^2\right) \le \mathrm{tr}\left(A^2B^2\right)$.

四、（本题 20 分） 设单位圆Γ的外切n边形$A_1A_2\cdots A_n$各边与Γ分别切于$B_1,B_2,\cdots,B_n$. 令P_A,P_B分别表示多边形$A_1A_2\cdots A_n$与$B_1,B_2,\cdots,B_n$的周长. 求证：$P_A^{\frac{1}{3}}P_B^{\frac{2}{3}} > 2\pi$.

五、（本题 15 分） 设$a\left(x\right),f\left(x\right)$为$R$上的连续函数，且对任意$x\in R$有$a\left(x\right)>0$. 已知

$$\int_0^{\infty} a\left(x\right)\mathrm{d}\, x = +\infty, \lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{a\left(x\right)} = 0, y'\left(x\right)+a\left(x\right)y\left(x\right) = f\left(x\right), x\in R$$

求证：$\lim\limits_{x\to+\infty} y\left(x\right) = 0$.

六、（本题 15 分） 设$f\left(x\right)$是定义在R上的连续函数，且满足方程

$$xf\left(x\right) = 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f\left(t\right)\mathrm{d}\, t + \frac{x^2}{4}.$$

求$f\left(x\right)$.