第十届清疏竞赛班非数学类 29

具体级数敛散判断

重要模型$\left(\text{记忆, 直接做很难做出来}\right)$：

设正数列a_n递减到0, 证明：$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

证明：

若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,回忆经典结论：$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(a_k - a_{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(ka_k - \left(k+1\right)a_{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\left(k+1\right)a_{k+1} - ka_{k+1}\right)$$

$$= a_1 - \left(n+1\right)a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \left(n+1\right)a_{n+1}$$

因此两边令$n \to \infty$, 就有$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

假设$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right) < \infty$, 仍然有：$\sum_{k=1}^{n} k\left(a_k - a_{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \left(n+1\right)a_{n+1}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k \ge \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{m} a_k + \left(n-m\right)a_n, \forall n \ge m.$$

因此$\sum_{k=1}^{m} a_k \le \sum_{k=1}^{n} a_k - na_n + ma_n, \forall n \ge m$.

现在令$n \to \infty$, $\sum_{k=1}^{m} a_k \le \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right), \forall m \ge 1$.

因此$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$收敛, 此时回到另一边的情况就知道

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

运用：第十三届补赛压轴题:

设a_n递减到0且$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^n x^n$, 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散, 证明积分$\int_1^{\infty}\frac{\ln f(x)}{x^2}dx$也发散.

证明：

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n^n}=0$, 所以$f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 当$x>0$, $f(x)>0$且$f'(x)>0$.

待定递增且趋于$+\infty$的正数列b_n

$$\int_{b_1}^{\infty}\frac{\ln f(x)}{x^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{b_n}^{b_{n+1}}\frac{\ln f(x)}{x^2}dx\geq\sum_{n=1}^{\infty}\int_{b_n}^{b_{n+1}}\frac{\ln f(b_n)}{x^2}dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\ln f(b_n)\left[\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right]\geq\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(a_n^n b_n^n\right)\left[\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\left(a_n b_n\right)\left[\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right]$$

取$b_n=\frac{c}{a_n}$, $c>1$, 此时b_n递增到无穷且

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\left(a_n b_n\right)\left[\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right]=\ln c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\left[\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right]=\ln c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$$

$$=c\ln c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{发散.}$$

因此$\int_1^{\infty}\frac{\ln f(x)}{x^2}dx$也发散.

正项级数判别的本质仍然是估阶：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(e^{n}+n^{2}\right)}{\sqrt[4]{n^{8}+n^{2}+1}\cdot\ln^{2}\left(n+1\right)},\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^{2}k}{n^{p}}$$

证明：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(e^{n}+n^{2}\right)}{\sqrt[4]{n^{8}+n^{2}+1}\cdot\ln^{2}\left(n+1\right)}\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln e^{n}}{n^{2}\cdot\ln^{2}n}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{2}n}\overset{\text{积分判别, 默认都会了}}{\sim}\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x\ln^{2}x}dx=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{1}{y^{2}}dy\text{收敛.}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^{2}k}{n^{p}}\overset{\text{和化积分,常用方法}}{\sim}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\int_{2}^{n}\ln^{2}x\,dx}{n^{p}}\overset{\text{算出值再等价}}{\sim}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\ln^{2}n}{n^{p}}$$

或者

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^{2}k}{n\ln^{2}n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{2}n}{n\ln^{2}n-\left(n-1\right)\ln^{2}\left(n-1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{2}n}{\ln^{2}n+2\ln n}=1$$

即$\sum_{k=1}^{n}\ln^{2}k\sim n\ln^{2}n.$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\ln^{2}n}{n^{p}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^{2}n}{n^{p-1}},\text{当}p>2\text{收敛, 当}p\le 2\text{发散.}$$

带对数的一个小技巧：都是换底

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{r^{\ln n}}\left(r>0\right),\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{\ln n}n},\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\left(\ln\ln n\right)^{\ln n}},\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\left(\ln n\right)^{\ln\ln n}}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{r^{\ln n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln r}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln r}},\text{故}r>e\text{级数收敛,}r\le e\text{级数发散.}$$

$$\sum_{n=\text{非常大}}^{\infty}\frac{1}{\ln^{\ln n}n}=\sum_{n=\text{非常大}}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln\ln n}}=\sum_{n=\text{非常大}}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln\ln n}}\le\sum_{n=\text{非常大}}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}\text{收敛.}$$

$$\sum_{n=\text{非常大}}^{\infty}\frac{1}{\left(\ln\ln n\right)^{\ln n}}=\sum_{n=\text{非常大}}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln\ln\ln n}}=\sum_{n=\text{非常大}}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}}\le\sum_{n=\text{非常大}}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}\text{收敛.}$$

$$\sum_{n=\text{非常大}}^{\infty}\frac{1}{\left(\ln n\right)^{\ln\ln n}}=\sum_{n=\text{非常大}}^{\infty}\frac{1}{ne^{\left(\ln\ln n\right)^{2}-\ln n}}\sim\int_{\text{非常大}}^{\infty}\frac{1}{xe^{\left(\ln\ln x\right)^{2}-\ln x}}dx$$

$$=\int_{\text{非常大}}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln^{2}y-y}}dy=\int_{\text{非常大}}^{\infty}e^{y-\ln^{2}y}dy\text{发散.}$$

设$m\in\mathbb{N}$,判断下列级数收敛性：

$$\sum\left(-1\right)^{j}\ln\left[\left(1+\frac{1}{j}\right)^{m}-\frac{1}{j^{m}}\right]$$

当$1-\frac{1}{m}<\alpha<1,\sum\left(-1\right)^{j}\left[\left(\left(j+1\right)^{m}-1\right)^{1-\alpha}-j^{m\left(1-\alpha\right)}\right]$.

判断收敛性$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{\left(-1\right)^{n-1}+\sqrt[3]{n}}$收敛性.

证明：

$$\sum\left(-1\right)^{j}\ln\left[\left(1+\frac{1}{j}\right)^{m}-\frac{1}{j^{m}}\right]=\sum\left(-1\right)^{j}\ln\left[1+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{C_{m}^{k}}{j^{k}}\right]\text{收敛}.$$

对于$\sum\left(-1\right)^{j}\left[\left(\left(j+1\right)^{m}-1\right)^{1-\alpha}-j^{m\left(1-\alpha\right)}\right]$,

$\left(\left(j+1\right)^{m}-1\right)^{1-\alpha}-j^{m\left(1-\alpha\right)}$不太好判断单调性.

直接对$\left(\left(j+1\right)^{m}-1\right)^{1-\alpha}-j^{m\left(1-\alpha\right)}$渐进$\left(\text{初等函数即直接}taylor\right)$.

$$\left(\left(j+1\right)^{m}-1\right)^{1-\alpha}-j^{m\left(1-\alpha\right)}=j^{m\left(1-\alpha\right)}\left[\left(\left(1+\frac{1}{j}\right)^{m}-\frac{1}{j^{m}}\right)^{1-\alpha}-1\right]$$

$$=j^{m\left(1-\alpha\right)}\left[\left(1+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{C_{m}^{k}}{j^{k}}\right)^{1-\alpha}-1\right]$$

$$=j^{m\left(1-\alpha\right)}\left[\left(1-\alpha\right)\sum_{k=1}^{m-1}\frac{C_{m}^{k}}{j^{k}}+O\left(\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{C_{m}^{k}}{j^{k}}\right)^{2}\right)\right]$$

$$=j^{m\left(1-\alpha\right)}\left[\frac{\left(1-\alpha\right)m}{j}+O\left(\frac{1}{j^{2}}\right)\right]$$

这里用到了$\left(1+x\right)^{1-\alpha}=1+\left(1-\alpha\right)x+O\left(x^{2}\right)$

因为$1>m\left(1-\alpha\right)>0$,所以$\sum\left(-1\right)^{j}O\left(\frac{1}{j^{2-m\left(1-\alpha\right)}}\right)<\infty$.

由交错级数判别法,故$\sum\left(-1\right)^{j}\frac{\left(1-\alpha\right)m}{j^{1-m\left(1-\alpha\right)}}<\infty$.

判断收敛性$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+\sqrt[3]{n}}$收敛性.

证明：

如果利用$\frac{x}{1-x}=x+x^2+O\left(x^3\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}}{1-\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

显然$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$发散,$\sum_{n=1}^{\infty}O\left(\frac{1}{n}\right)$无法判断.

所以和积分一样,适用$taylor$方法要保证余项部分级数绝对收敛!!!

利用$\frac{x}{1-x}=x+x^2+x^3+O\left(x^4\right)$

那么$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}}{1-\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)\right)$

故收敛+发散+收敛+收敛=发散,因此原级数发散.

和积分一样有小结论：

绝对+绝对=绝对

绝对+条件=条件

条件+条件=无法判断.

判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)$收敛性

事实上:$\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)\right)$

条件+绝对,因此原级数条件收敛.

注意余项部分一定要保证绝对收敛,没有条件收敛一说.

作业：若$a\in(0,1]$，求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\ln n)}{n^a}x^n$收敛域

判断：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\left(a+1\right)\cdots\left(a+n-1\right)}{b\left(b+1\right)\cdots\left(b+n-1\right)}$$收敛性,$a,b>0$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{\dfrac{a\left(a+1\right)\cdots\left(a+n\right)}{b\left(b+1\right)\cdots\left(b+n\right)}}{\dfrac{a\left(a+1\right)\cdots\left(a+n-1\right)}{b\left(b+1\right)\cdots\left(b+n-1\right)}}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a+n}{b+n}\right)=b-a$$

由$Raabe$判别法知, $b-a>1$收敛,$b-a<1$发散.

当$b=a+1,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a\left(a+1\right)\cdots\left(a+n-1\right)}{b\left(b+1\right)\cdots\left(b+n-1\right)}$

此时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a\left(a+1\right)\cdots\left(a+n-1\right)}{\left(a+1\right)\cdots\left(a+n\right)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a}{a+n}$发散.

或者$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\ln\dfrac{b+n}{a+n}-1\right]\ln n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[-a+b-1+O\left(\left|\dfrac{1}{n}\right|\right)\right]\ln n=0.$

故级数发散.

$\alpha>0,$讨论$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\left(2-\sqrt{e}\right)\left(2-e^{\frac{1}{3}}\right)\cdots\left(2-\sqrt[n]{e}\right)\right]^{\alpha}$

利用$e^{x}\geq 1+x$

$$\prod_{k=2}^{n}\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right)\leq\prod_{k=2}^{n}\left(2-\frac{1}{k}-1\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)=\frac{1}{n}$$

$e^{\frac{1}{k}}\leq 1+\dfrac{1}{k-1}\Leftrightarrow e^{x}\leq 1+\dfrac{x}{1-x},x\in\left(0,1\right)$

$\Leftrightarrow\left(1-x\right)e^{x}\leq 1,x\in\left(0,1\right),$这可以通过求导证明

$$\prod_{k=3}^{n}\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right)\geq\prod_{k=3}^{n}\left(2-1-\frac{1}{k-1}\right)=\prod_{k=3}^{n}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)=\frac{1}{n-1}$$

$\prod\limits_{k=2}^{n}\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right)$同阶于$\dfrac{1}{n}.$

因此$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\left(2-\sqrt{e}\right)\left(2-e^{\frac{1}{3}}\right)\cdots\left(2-\sqrt[n]{e}\right)\right]^{\alpha}$同阶于$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$

$\alpha>1$收敛,$\alpha\leq 1$发散.

$\alpha\in\mathbb{N},\beta\geq 0$, 证明$\sum\limits_{n=2}^{\infty}n^{\beta}\left(\cos 1\cos 2\cdots\cos n\right)^{\alpha}$绝对收敛.

证明：

$$\left|\cos 1\cos 2\cdots\cos n\right|^{2}\leq\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos^{2}k}{n}\right)^{n}=\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\cos\left(2k\right)\right)}{2n}\right)^{n}$$

$$=\left(\frac{n+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\left(2k\right)}{2n}\right)^{n}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin n\cos\left(n+1\right)}{n\sin 1}\right)^{n}$$

因此当n充分大,我们知道$\frac{1}{2}+\frac{\sin n\cos\left(n+1\right)}{n\sin 1}<\frac{2}{3}$, 因此

$\left|\cos 1\cos 2\cdots\cos n\right|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}$, 因此

$$\sum_{n=\text{充分大}}^{\infty}n^{\beta}\left|\cos 1\cos 2\cdots\cos n\right|^{\alpha}\leq\sum_{n=\text{充分大}}^{\infty}n^{\beta}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}\alpha}<\infty.$$

因此原级数绝对收敛.

作业:$\sum\limits_{n=2}^{\infty}n^{\beta}\left(\sin 1\sin 2\cdots\sin n\right)^{\alpha}$绝对收敛.

判断:$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\cos 1\cdot\cos^{2}2\cdot\cdots\cdot\cos^{n}n$,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\cos 1\cdot\cos^{2}2\cdot\cdots\cdot\cos^{n}n\right|\leq\sum_{n=2}^{\infty}\left|\cos 1\cdot\cos 2\cdot\cdots\cdot\cos n\right|<\infty,$$

因此绝对收敛.

作业:$\sum_{n=2}^{\infty}\sin 1\sin^2 2\cdots\sin^n n$

判断收敛性:$\sum_{n=1}^{\infty}x^{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}},x\in\left(0,1\right)$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{x^{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n+1}}}{x^{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(1-x^{\sin\frac{1}{n+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(1-e^{\sin\frac{1}{n+1}\cdot\ln x}\right)$$

$$=-\lim_{n\to\infty}n\cdot\sin\frac{1}{n+1}\cdot\ln x$$

$$=\ln\frac{1}{x}.$$

因此$x<\frac{1}{e}$收敛,$x>\frac{1}{e}$发散.

当$x=\frac{1}{e}$,有

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\ln\frac{x^{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}}}{x^{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n+1}}}-1\right]\ln n=\lim_{n\to\infty}\left[n\ln\frac{1}{x^{\sin\frac{1}{n+1}}}-1\right]\ln n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[-n\sin\frac{1}{n+1}\cdot\ln x-1\right]\ln n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[n\sin\frac{1}{n+1}-1\right]\ln n$$

$$=\lim_{n\to\infty}O\left(\frac{1}{n}\right)\ln n=0$$

因此$x=\frac{1}{e}$发散.

检查下述判别法合理性$\left(\text{可跳过}\right)$：

$$\left[n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]\ln n=G$$

$$\ln a_n-\ln a_{n+1}=\frac{G}{n\ln n}+\frac{1}{n}$$

$$\ln a_2-\ln a_{n+1}\sim\int_2^n\left(\frac{G}{x\ln x}+\frac{1}{x}\right)dx=G\ln\ln n+\ln n+c$$

$$\ln a_{n+1}\sim -G\ln\ln n-\ln n+c$$

$a_{n+1}\sim\dfrac{c}{n\ln^G n}$，所以判别法是对的.