2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛
(数学类) 试卷

一、(本题 15 分) 已知空间的两条直线:

$$l_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-8}{1}, l_2: \frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1},$$

1) 证明 l_1 和 l_2 异面;

2) 求 l_1 和 l_2 公垂线的标准方程;

3) 求连接 l_1 上任一点和 l_2 上的任一点线段中点的轨迹的一般方程。

二、(本题 15 分) 设 $f \in C[0,1]$ 是非负的严格单调增函数。

1) 证明: 对任意 $n \in N$, 存在唯一的 $x_n \in [0,1]$, 使得 $\left(f(x_n)\right)^n = \int_0^1 \left(f(x)\right)^n \mathrm{d}\, x.$

2) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1.$

三、(本题 15 分) 设 V 为闭区间 $[0,1]$ 上全体实函数构成的实向量空间, 其中向量加法和纯量乘法均为通常的。$f_1, \cdots, f_n \in V$. 证明以下两条等价:

1) $f_1, \cdots, f_n$ 线性无关;

2) $\exists a_1, \cdots, a_n \in [0,1]$ 使得 $\det\left[f_i(a_j)\right] \neq 0$, $\det$ 为求行列式.

四、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 R 上有二阶导函数, $f(x), f'(x), f''(x)$ 均大于零, 假设存在正数 a, b, 使得 $f''(x) \le af(x) + bf'(x)$ 对于一切 $x \in R$ 成立。

(1) 求证: $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0;$

(2) 求证: 存在常数 c 使得 $f'(x) \le cf(x).$

(3) 求使上面不等式成立的最小常数 c .

五、(本题 20 分) 设 m 为给定的正整数。证明: 对任何的正整数 n, l, 存在 m 阶方阵 X 使得

$$X^n + X^l = I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m-1 & m-2 & m-3 & \cdots & 1 & 0 \\ m & m-1 & m-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

六、(本题 20 分) 设 $\alpha \in (0,1), \{a_n\}$ 是正数列且满足

$$\lim_{n\to\infty} \inf n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lambda \in (0, +\infty).$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n = 0$, 其中 $k > 0$.