

2019 年第十届全国大学生数学竞赛决赛

(数学类, 三、四年级) 试题

(第一到四题必做, 后面任选三题)

一、填空题 (本题满分 20 分, 每小题 5 分)

(1) 设 A 为实对称方阵, $(1, 0, 1)$ 和 $(1, 2, 0)$ 构成共行向量的一个极大无关组. 则有 $A =$ _____

(2) 设 $y(x) \in C^1[0, 1]$ 满足 $y(x) \in [0, \pi]$ 及 $x = \begin{cases} \frac{\sin y(x)}{y(x)}, & y \in (0, \pi] \\ 1, & y = 0 \end{cases}$, 则 $y'(0) =$ _____

(3) 设 $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$, 则 $\int_0^{+\infty} xf(x) dx =$ _____

(4) 设 U 为 8 阶实正交方阵, U 中元素皆为 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 的 3×3 子矩阵的个数记为 t , 则 t 最多为 _____

二、(本题 15 分) 给定空间直角坐标系中的两条直线: l_1 为 z 轴, l_2 过 $(-1, 0, 0)$ 及 $(0, 1, 1)$ 两点. 动直线 l 分别与 l_1, l_2 共面, 且与平面 $z = 0$ 平行.

(1) 求动直线 l 全体构成的曲面 S 的方程;

(2) 确定 S 是什么曲面.

三、(满分 15 分) 证明: 任意 n 阶实方阵 A 可以分解成 $A = A_0 + A_1 + A_2$, 其中 $A_0 = aI_n$, a 是实数, A_1 与 A_2 都是幂零方阵.

四、(满分 20 分) 设 $\alpha > 0, f(x) \in C^1[0, 1]$, 且对任何非负整数 $n, f^{(n)}(0)$ 均存在且为零. 进一步存在常数 $C > 0$ 使得 $|x^\alpha f'(x)| \leq C |f(x)| (\forall x \in [0, 1])$. 证明:

(1) 若 $\alpha = 1$, 则 $[0, 1]$ 在上 $f(x) \equiv 0$.

(2) 若 $\alpha > 1$, 举例说明在 $[0, 1]$ 上 $f(x) \equiv 0$ 可以不成立.

五、(满分 10 分) (抽象代数) 设 $(R, +, \cdot)$ 为含 $1 \neq 0$ 的结合环, $a, b \in R$. 若 $a + b = ba$, 且关于 x 的方程

$$\begin{cases} x^2 - (ax^2 + x^2a) + ax^2a = 1 \\ x + a - (ax + xa) + axa = 1 \end{cases}$$

在 R 中有解. 证明: $ab = ba$.

六、(满分 10 分) (实变函数) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 可测, 则 $G = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}\}$ 是 2-维

Lebesgue 零测集.

七、(满分 10 分)(微分几何) 在空间直角坐标系中设椭圆抛物面 S 的方程为

$$\gamma(u, v) = (u, v, u^2 + \frac{1}{2}v^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

(1) 求 S 的所有脐点;

(2) 设 σ 为与脐点处切平面平行的平面 S , 它截 S 于曲线 C , 证明 C 是一个圆周.

八、(满分 10 分) 设 $\delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 是 $[a, b]$ 区间的一个剖分. 用 $S[a, b]$ 表示满足下列条件的分片实系数多项式全体构成的集合: 对任意 $s(x) \in S[a, b]$.

(1) $S(x)|_{[x_i, x_{i+1}]}$ 是三次多项式, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

(2) $s(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上二阶连续可导.

九、(满分 10 分)(复变函数) 设 z_0 是复函数 $w = f(z)$ 的 n 阶极点. 试证明: 一定存在 $\rho > 0$ 及 $R > 0$, 使得对任意 $w \in \{w \in \mathbb{C} : |w| > R\}$, 函数 $f(z) - w$ 在 $|z - z_0| < \rho$ 中必有 n 个零点.

十、(满分 10 分)(概率统计) 设独立随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足 $P(X_n = \pm n^\theta) = \frac{1}{2}$,

其中 $\theta > 0$ 是常数. 记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(1) 当 $\theta < \frac{1}{2}$ 时, 证明 $\frac{S_n}{n}$ 依概率收敛于 0, 即对任意 $\epsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\frac{|S_n|}{n} \geq \epsilon) = 0$;

(2) 证明: $\frac{S_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$, 其中 $\text{Var}(S_n)$ 是表示 S_n 的方差, \xrightarrow{D} 表示

以分布收敛.