

# 全国大学生数学竞赛初赛模拟试题

## ( 非数学专业类 )

一、填空题 (本题30分, 每小题6分)

(1) 若函数  $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^{2x} \tan u^2 du, & x \neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ , 在  $x=0$  处连续, 则  $a=$ \_\_\_\_\_.

(2) 设函数  $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)(e^{4x}-4)$ , 则  $f'(0)=$ \_\_\_\_\_.

(3) 设  $f(x)=|x(1-x)|$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , 则曲线  $y=f(x)$  的拐点为\_\_\_\_\_.

(4) 设  $f(u,v)$  为二元可微函数,  $z=f(x^{3y}-2, y^{x+5}+1)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x}=$ \_\_\_\_\_.

(5) 函数  $f(x)=\frac{x}{3+2x-x^2}$  展开成  $x$  的幂级数为  $f(x)=$ \_\_\_\_\_.

二、(本题14分) 求函数  $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x-1}$  的单调区间与极值.

三、(本题14分) 设函数  $y=y(x)$  由方程  $\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = x$  确定, 求  $y(x)$ .

四、(本题14分) 设  $0 < a < b < \pi$ , 证明不等式:  $\frac{b \sin b + 2 \cos b + \pi b}{a \sin a + 2 \cos a + \pi a} > 1$ .

五、(本题14分) 设  $a, b, c > 0$ , 计算:  $I = \iint_{\Sigma} \frac{dS}{(ax^2 + by^2 + cz^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$ , 其中  $\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

六、(本题14分) 设  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的连续函数. 证明: 若  $f(x)$  是以2为周期的周期函数, 则  $F(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt$  也是以2为周期的周期函数.

注: 模拟试题答案解析请参考全国大学生数学竞赛命题组编、科学出版社出版的《全国大学生数学竞赛真题解析与获奖名单(第11-15届)》。