

2012 年第四届全国大学生数学竞赛初赛 (非数学类)

试卷及参考答案

一、简答下列各题(本题共 5 个小题, 每题 6 分, 共 30 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

【参考答案】: 因为 $(n!)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n^2} \ln(n!)}$, 而

$$\frac{1}{n^2} \ln(n!) \leq \frac{1}{n} \left(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln n}{n} \right), \text{且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln n}{n} \right) = 0$. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln(n!) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$.

2. 求通过直线 $L : \begin{cases} 2x + y - 3z + 2 = 0, \\ 5x + 5y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1, π_2 , 使其中一个平面

过点 $(4, -3, 1)$.

【参考答案】: 过直线 L 的平面束方程为 $\lambda(2x + y - 3z + 2) + \mu(5x + 5y - 4z + 3) = 0$,

即 $(2\lambda + 5\mu)x + (\lambda + 5\mu)y - (3\lambda + 4\mu)z + 2\lambda + 3\mu = 0$.

若平面 π_1 过点 $(4, -3, 1)$, 代入得 $\lambda + \mu = 0$, 即 $\mu = -\lambda$, 从而 π_1 的方程为 $3x + 4y - z + 1 = 0$.

若平面束中的平面 π_2 与 π_1 垂直, 则 $3(2\lambda + 5\mu) + 4(\lambda + 5\mu) + 1(3\lambda + 4\mu) = 0$. 解得 $\lambda = -3\mu$,
从而平面 π_2 的方程为 $x - 2y - 5z + 3 = 0$.

3. 已知函数 $z = u(x, y)e^{ax+by}$, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, 确定常数 a, b , 使函数 $z = z(x, y)$ 满足

方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$.

【参考答案】: $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{ax+by} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + au(x, y) \right]$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{ax+by} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + bu(x, y) \right]$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{ax+by} \left[b \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} + abu(x, y) \right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = e^{ax+by} \left[(b-1) \frac{\partial u}{\partial x} + (a-1) \frac{\partial u}{\partial y} + (ab-a-b+1)u(x, y) \right],$$

若是上式等于 0, 只有 $(b-1) \frac{\partial u}{\partial x} + (a-1) \frac{\partial u}{\partial y} + (ab-a-b+1)u(x, y) = 0$, 由此可得 $a = b = 1$.

4. 设 $u = u(x)$ 连续可微, $u(2) = 1$, 且 $\int_L (x + 2y)u \, dx + (x + u^3)u \, dy$ 在右半平面

上与路径无关, 求 $u(x)$.

【参考答案】: 由 $\frac{\partial[(x+2y)u]}{\partial y} = \frac{\partial[u(x+u^3)]}{\partial x}$, 得

$$(x + 4u^3)u' = u, \text{ 即 } \frac{dx}{du} - \frac{1}{u}x = 4u^2,$$

这是一个一阶线性微分方程，于是由公式有通解为

$$x = e^{\ln u} \left(\int 4u^2 e^{-\ln u} du + C \right) = u \left(\int 4u du + C \right) = u(2u^2 + C)$$

由 $u(2) = 1$ 得 $C = 0$ ，所以 $u = \left(\frac{x}{2} \right)^{1/3}$.

5. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}} dt$.

【参考答案】：因为当 $x > 1$ 时，

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}} dt \right| &\leq \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt \\ &\leq 2\sqrt[3]{x} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) = \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}} dt = 0$.

第二题：(10 分) 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-2x} |\sin x| dx$.

【参考答案】：由于

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1} e^{-2x} \sin x dx$$

应用分部积分法，有

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1} e^{-2x} \sin x dx = \frac{1}{5} e^{-2k\pi} (1 + e^{2\pi})$$

$$\text{所以有 } \int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5} (1 + e^{2\pi}) \sum_{k=1}^n e^{-2k\pi} = \frac{1}{5} (1 + e^{2\pi}) \frac{e^{-2\pi} - e^{-2(n+1)\pi}}{1 - e^{-2\pi}}$$

$$\text{当 } n\pi \leq x \leq (n+1)\pi \text{ 时, } \int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx \leq \int_0^n e^{-2x} |\sin x| dx \leq \int_0^{(n+1)\pi} e^{-2x} |\sin x| dx$$

$$\text{当 } n \rightarrow \infty, \text{ 由两边夹法则, 得 } \int_0^\infty e^{-2x} |\sin x| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{(n+1)\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5} \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1}.$$

【注】 如果最后不用夹逼准则, 而用

$$\int_0^\infty e^{-2x} |\sin x| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5} \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1}.$$

需要先说明 $\int_0^\infty e^{-2x} |\sin x| dx$ 收敛。

第三题：(10 分) 求方程 $x^2 \sin \frac{1}{x} = 2x - 501$ 的近似解, 精确到 0.001.

【参考解答】：由泰勒公式 $\sin t = t - \frac{\sin(\theta t)}{2} t^2 (0 < \theta < 1)$ 。令 $t = \frac{1}{x}$ 得

$$\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^2,$$

代入原方程, 得

$$x - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{x}\right) = 2x - 501 \text{ 即 } x = 501 - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{x}\right).$$

由此知 $x > 500, 0 < \frac{\theta}{x} < \frac{1}{500}$, 所以有 $|x - 501| = \frac{1}{2} \left| \sin\left(\frac{\theta}{x}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \frac{\theta}{x} < \frac{1}{2 \cdot 500} = 0.001$, 即当 $x = 501$ 即为满足题设条件的解。

第四题：(12 分) 设函数 $y = f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) > 0, f(0) = 0, f'(0) = 0$. 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) \sin^3 u}, \text{ 其中 } u \text{ 是曲线 } y = f(x) \text{ 上点 } P(x, f(x)) \text{ 处切线在 } x \text{ 轴上的截距.}$$

【参考答案】: $y = f(x)$ 上点 $P(x, f(x))$ 处切线方程为 $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$. 令 $Y = 0$,

$$X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \text{ 由此得 } u = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ 且有}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right] = - \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{f(x) - f(0)}{x}}{\frac{f'(x) - f'(0)}{x}} \right] = \frac{f'(0)}{f''(0)} = 0.$$

由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的二阶泰勒公式,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \text{可得 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{x} &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{xf'(x)} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)}{xf'(x)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)}{f'(x) - f'(0)} = 1 - \frac{1}{2} \frac{f''(0)}{f''(0)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) \sin^3 u} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(\frac{f''(0)}{2} u^2 + o(u^2) \right)}{u^3 \left(\frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{u} = 2.$$

第五题：(12 分) 求最小实数 C , 使得满足 $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leq C.$$

【参考答案】: 由于 $\int_0^1 |f(\sqrt{x})| dx = \int_0^1 |f(t)| 2t dt \leq 2 \int_0^1 |f(t)| dt = 2$, 取 $f_n(x) = (n+1)x^n$, 则有

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 f_n(x) dx = 1$$

而 $\int_0^1 f_n(\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^1 t f_n(t) dt = 2 \frac{n+1}{n+2} = 2 \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) \rightarrow 2(n \rightarrow \infty)$. 因此最小的实数为 $C = 2$.

第六题：(12 分) 设 $f(x)$ 为连续函数, $t > 0$. Ω 是由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2(t > 0)$ 所围成起来的部分。定义 $F(t) = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dV$,

求 $F'(t)$.

【解法一】: 即 $g = g(t) = \frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$, 则 Ω 在 xOy 面上的投影为 $x^2 + y^2 \leq g$ 。在曲线

$S : \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \end{cases}$ 上任取一点 (x, y, z) , 则圆锥到点的射线和 z 轴的夹角为

$$\theta_t = \arccos \frac{z}{t} = \arccos \frac{g}{t}.$$

取 $\Delta t > 0$, 则 $\theta_t > \theta_{t+\Delta t}$ 。对于固定的 $t > 0$, 考虑积分差 $F(t+\Delta t) - F(t)$, 这是一个在厚度为 Δt 的球壳上的积分。原点到球壳边缘上的点的射线和 z 轴的夹角在 $\theta_t, \theta_{t+\Delta t}$ 之间。用球坐标计算积分, 由积分的连续性可知, 存在 $\alpha = \alpha(\Delta t)$, $\theta_{t+\Delta t} \leq \alpha \leq \theta_t$ 使得

$$F(t+\Delta t) - F(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha d\theta \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 \sin \theta dr$$

即 $F(t+\Delta t) - F(t) = 2\pi(1 - \cos \alpha) \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 dr$ 。当 $\Delta t \rightarrow 0^+$,

$$\cos \alpha \rightarrow \cos \theta_t = \frac{g(t)}{t}, \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 dr \rightarrow t^2 f(t^2).$$

故 $F(t)$ 的右导数为

$$2\pi \left(1 - \frac{g(t)}{t}\right) t^2 f(t^2) = \pi \left(2t + 1 - \sqrt{1+4t^2}\right) t f(t^2).$$

当 $\Delta t < 0$, 考虑 $F(t+\Delta t) - F(t)$ 可得到同样的左导数, 因此

$$F'(t) = \pi \left(2t + 1 - \sqrt{1+4t^2}\right) t f(t^2).$$

【解法二】: 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$, 则区域 Ω 表示为

$$\Omega : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, r^2 \leq z \leq \sqrt{t^2 - r^2} ,$$

其中 a 满足 $a^2 + a^4 = t^2$, $a = \frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$, 有

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2 + z^2) dz = 2\pi \int_0^a \left[\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2 + z^2) dz \right] r dr$$

从而有

$$F'(t) = 2\pi \left[a \int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}} f(a^2 + z^2) dz \frac{da}{dt} + \int_0^a r f(r^2 + t^2 - r^2) \frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}} dr \right]$$

注意到 $\sqrt{t^2-a^2}=a^2$, 第一个积分为 0, 所以有

$$F'(t) = 2\pi t f(t^2) \int_0^a \frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}} dr = -\pi t f(t^2) \int_0^a \frac{d(t^2-r^2)}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

所以 $F'(t) = \pi t f(t^2) \left(2t + 1 - \sqrt{1+4t^2}\right)$.

第七题: (14 分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数,

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

【参考证明】: (1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = 2\delta > \delta > 0$, 则存在 $N \in \mathbf{N}$, 对于任意的 $n \geq N$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} &> \delta, \quad \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \delta a_{n+1}, \quad a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) \\ \sum_{n=N}^m a_{n+1} &< \frac{1}{\delta} \sum_{n=N}^m \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) \leq \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \right) \leq \frac{1}{\delta} \frac{a_N}{b_N}, \end{aligned}$$

因而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有上界, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < \delta < 0$, 则存在 $N \in \mathbf{N}$, 对于任意的 $n \geq N$ 时, $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{b_{n+1}}$, 有

$$a_{n+1} > \frac{b_{n+1}}{b_n} a_n > \cdots > \frac{b_{n+1}}{b_n} \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdots \frac{b_{N+1}}{b_N} a_N = \frac{a_N}{b_N} b_{n+1},$$

于是由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 得到 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。