第十一届全国大学生数学竞赛(非数学类)试题

参考解答及评分标准

一、填空题（每小题 6 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=\dfrac{1}{4}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{e}^{\sin x}-1)+\sqrt[3]{1-\cos x}}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{\sin x}-1)}{4\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{1/3}}+\frac{1}{4}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{1/3}}=\frac{1}{4}.$$

2. 设隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定，则 $\displaystyle\int\frac{dx}{y^2}=\frac{3y}{x}-2\ln|\frac{y}{x}|+C$.

解：令 $y=tx$，则 $x=\dfrac{1}{t^2(1-t)}$， $y=\dfrac{1}{t(1-t)}$， $dx=\dfrac{-2+3t}{t^3(1-t)^2}dt$，

这样，$\displaystyle\int\frac{dx}{y^2}=\int\frac{-2+3t}{t}dt=3t-2\ln|t|+C=\frac{3y}{x}-2\ln|\frac{y}{x}|+C$.

3. 定积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}$.

解：$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}de^x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\frac{\sin xe^x}{1+\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\frac{\sin xe^x}{1+\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}.$$

4. 已知 $du(x,y)=\dfrac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$， 则 $u(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{3}{2\sqrt{2}}(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3})+\mathrm{C}$.

解：$du(x,y)=\dfrac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}=\dfrac{d(\dfrac{x}{y})}{3(\dfrac{x}{y})^2-\dfrac{2x}{y}+3}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}d\arctan\dfrac{3}{2\sqrt{2}}(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3})$.

所以，$u(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{3}{2\sqrt{2}}(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3})+\mathrm{C}$.

5. 设$a,b,c,\mu>0$，曲面$xyz=\mu$与曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$相切，则$\mu=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

解：根据题意有：$yz=\frac{2x}{a^2}\lambda$, $xz=\frac{2y}{b^2}\lambda$，$xy=\frac{2z}{c^2}\lambda$，以及

$\mu=2\lambda\frac{x^2}{a^2}$，$\mu=2\lambda\frac{y^2}{b^2}$，$\mu=2\lambda\frac{z^2}{c^2}$，从而得：$\mu=\frac{8\lambda^3}{a^2b^2c^2}$，$3\mu=2\lambda$，

联立解得：$\mu=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

二、(14 分) 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$围成的区域在第一卦限部分.

解：采用“球面坐标”计算，并利用对称性，得

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\frac{\rho^3\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}{\rho^2\sin^2\varphi}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$ --------5 分

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$ --------10 分

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\mathrm{d}(\sin\varphi)$$

$$=\frac{1}{48}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t=\frac{1}{48}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{72}.$$ --------14 分

三、(14 分) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可微，$f(0)=0$，且存在常数$A>0$，使得$|f'(x)|\le A|f(x)|$在$[0,+\infty)$上成立，试证明：在$(0,+\infty)$上有$f(x)\equiv 0$.

证明：设$x_0\in[0,\frac{1}{2A}]$，使得$|f(x_0)|=\max\left\{|f(x)|\,\middle|\,x\in[0,\frac{1}{2A}]\right\}$， --------5 分

$$|f(x_0)|=|f(0)+f'(\xi)x_0|\le A|f(x_0)|\frac{1}{2A}=\frac{1}{2}|f(x_0)|$$，只有$|f(x_0)|=0$.

故当 $x\in[0,\frac{1}{2A}]$时，$f(x)\equiv 0$. --------12 分

递推可得，对所有的$x\in[\frac{k-1}{2A},\frac{k}{2A}]$，$k=1,2,\cdots\cdots$，均有$f(x)\equiv 0$. --------14 分

四、(14 分) 计算积分$I=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}e^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta d\theta$

解：设球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$, 由球面参数方程

$$x=\sin\theta\cos\phi,\quad y=\sin\theta\sin\phi,\quad z=\cos\theta$$

知$dS=\sin\theta d\theta d\phi$，所以，所求积分可化为第一型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} e^{x-y}dS$$ --------4 分

设平面P_t：$\frac{x-y}{\sqrt{2}}=t$, $-1\le t\le 1$，其中t为平面P_t被球面截下部分中心到原点距离. 用平面P_t分割球面Σ，球面在平面P_t, P_{t+dt}之间的部分形如圆台外表面状，记为$\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$. 被积函数在其上为 $e^{x-y}=e^{\sqrt{2}t}$. --------8 分

由于$\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$半径为$r_t=\sqrt{1-\mathrm{t}^2}$，半径的增长率为 $d\sqrt{1-t^2}=\frac{-tdt}{\sqrt{1-t^2}}$ 就是 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$ 上下底半径之差. 记圆台外表面斜高为h_t，则由微元法知 $dt^2+\left(d\sqrt{1-t^2}\right)^2=h_t^2$, 得到 $h_t=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ，所以 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$ 的面积为 $dS=2\pi r_t h_t=2\pi dt$, --------12 分

$$I=\int_{-1}^{1}e^{\sqrt{2}t}\,2\pi\mathrm{dt}=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t}\Big|_{-1}^{1}=\sqrt{2}\pi(e^{\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}}).$$ --------14 分

五、（14 分）设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数，满足 $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sum_{n=0}^{+\infty}c_n x^n$. 试证：$c_n>0$，$(n\ge 0)$，极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在，且等于 $f(x)$ 的最小根.

证明：由$f(x)$为仅有正实根的多项式，不妨设 $f(x)$ 的全部根为 $0<a_1<a_2<\cdots<a_k$，这样，

$$f(x)=A(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k},$$

其中 r_i 为对应根a_i的重数 $(i=1,\cdots,k,r_k\ge 1)$. --------2 分

$$f'(x)=Ar_1(x-a_1)^{r_1-1}\cdots(x-a_k)^{r_k}+\cdots+Ar_k(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k-1},$$

所以，$f'(x)$=$f(x)\left(\frac{r_1}{x-a_1}+\cdots+\frac{r_k}{x-a_k}\right)$，从而， $-\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{r_1}{a_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a_1}}+\cdots+\frac{r_k}{a_k}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a_k}}$.

--------6 分

若$|x|<a_1$, 则

$$-\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{r_1}{a_1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a_1}\right)^n+\cdots+\frac{r_k}{a_k}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a_k}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{{a_1}^{n+1}}+\cdots+\frac{r_k}{{a_k}^{n+1}}\right)x^n.$$

而 $-\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$，由幂级数的唯一性知

$$c_n=\frac{r_1}{{a_1}^{n+1}}+\cdots+\frac{r_k}{{a_k}^{n+1}}>0,$$ -------9 分

$$\frac{c_n}{c_{n+1}}=\frac{\frac{r_1}{{a_1}^{n+1}}+\cdots+\frac{r_k}{{a_k}^{n+1}}}{\frac{r_1}{{a_1}^{n+2}}+\cdots+\frac{r_k}{{a_k}^{n+2}}}=a_1\cdot\frac{r_1+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+1}r_k}{r_1+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+2}r_k}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}=a_1\cdot\frac{r_1+0+\cdots+0}{r_1+0+\cdots+0}=a_1>0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{1}{a_1},$$ -----12 分

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(ln\frac{c_2}{c_1}+\cdots+ln\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)=ln\frac{1}{a_1},$$

$$\sqrt[n]{c_n}=e^{\frac{lnc_n}{n}}=e^{\frac{lnc_1}{n}+\frac{1}{n}\left(ln\frac{c_2}{c_1}+\cdots+ln\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)}\to e^{ln\frac{1}{a_1}}=\frac{1}{a_1}.$$

从而，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}=a_1$, 即$f(x)$的最小正根. -----14 分

六、（14 分）设函数 $f(x)$ 在$[0,\ +\infty)$上具有连续导数，满足

$$3[3+f^2(x)]f'(x)=2[1+f^2(x)]^2e^{-x^2},$$

且 $f(0)\le 1$. 证明：存在常数 $M>0$，使得 $x\in[0,+\infty)$ 时，恒有$|f(x)|\le M$.

证明：由于 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 是$[0,\ +\infty)$上的严格增函数，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$（有限或为$+\infty$）. 下面证明 $L\ne+\infty$. -----2 分

记 $y=f(x)$，将所给等式分离变量并积分得 $\int\frac{3+y^2}{(1+y^2)^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$，即

$$\frac{y}{1+y^2}+2\arctan y=\frac{2}{3}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t+C,$$ ------6 分

其中 $C=\frac{f(0)}{1+f^2(0)}+2\arctan f(0)$. ------8 分

若 $L=+\infty$，则对上式取极限 $x\to+\infty$，并利用$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，得$C=\pi-\frac{\sqrt{\pi}}{3}$. -----10 分

另一方面，令 $g(u)=\frac{u}{1+u^2}+2\arctan u$，则 $g'(u)=\frac{3+u^2}{(1+u^2)^2}>0$，所以函数 $g(u)$ 在$(-\infty,\ +\infty)$ 上严格单调增加. 因此，当 $f(0)\le 1$ 时，$C=g(f(0))\le g(1)=\frac{1+\pi}{2}$，但 $C>\frac{2\pi-\sqrt{\pi}}{2}>\frac{1+\pi}{2}$，矛盾， 这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ 为有限数.

最后，取 $M=\max\{|f(0)|,|L|\}$，则 $|f(x)|\le M$，$\forall x\in[0,+\infty)$. -----14 分