第十届清疏竞赛班非数学类 16

反常积分初等计算

$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx$存在,则值记为$\int_0^{+\infty}f(x)dx.$

(1): $cauchy$收敛准则：$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx$存在$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists A_0>0,$使得:

$\forall A_2,A_1>A_0,$都有$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|<\varepsilon.$

(2): $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$收敛$\Leftrightarrow p<1,\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$收敛$\Leftrightarrow p>1$

(3): 对于反常多重积分,可以转化为一重积分判断收敛性.

(4)：多个瑕点的情形,每个瑕点需要单独判断.

(5): $f(x)$连续,$\int_0^{+\infty}f(x)dx$存在,则存在$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty,\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$

对于不变号反常积分,有如下判别法:

(1): $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq0,$同敛散

(2)：$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=0,\int g$收敛，则$\int f$也收敛

(3)：$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\infty,\int g$发散，则$\int f$也发散

绝对 ± 条件 = 条件

绝对 ± 绝对=绝对

条件 ± 条件=无法判断

$A-D$判别法:$\int f(x)g(x)dx$在如下条件之一的情况下收敛:

(1): 变限$\left|\int f(x)dx\right|\le M,g(x)$递减趋于0.

(2): $\int f(x)dx$收敛,$g(x)$单调有界.

收敛性判断：

$$\int_2^{\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^p \ln\frac{x+1}{x-1}dx$$

证明：

瑕点只有∞,$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\sim\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\ln\dfrac{x+1}{x-1}\sim\dfrac{2}{x}\Rightarrow\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^p\ln\dfrac{x+1}{x-1}$同阶于$\dfrac{1}{x^{\frac{p}{2}+1}}$收敛.

故$p>0$收敛.

$p,q>0:\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$

瑕点$0,1,\infty$,

$1:\dfrac{1}{x^p\ln^q x}\sim\dfrac{1}{(1-x)^q},q<1$收敛.

$\infty:p>1,$就相当于判断$\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{x^p}dx,$所以$p>1$收敛

原因是$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^p\ln^q x}}{\frac{1}{x^p}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln^q x}=0.$

$p=1:\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^q x}dx=\int_2^{\infty}\frac{1}{\ln^q x}d\ln x=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{1}{y^q}dy,q>1$收敛,$q\le 1$发散

$0:$若$0<p<1,$相当于判断$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^p}dx,$所以$p<1$收敛

原因是$\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x^p\ln^q x}}{\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{1-p}{2}}}{\ln^q x}=0.$

若$p=1,\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x\ln^q x}dx=\int_{-\infty}^{\ln\frac{1}{2}}\frac{1}{y^q}dy$在$q>1$收敛,$q\le 1$发散

合计来说要保证三个点同时收敛，则一定发散.

$$\int_{e^2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{\ln x}x}dx$$

证明：

$$\ln^{\ln x}x=e^{\ln x\cdot\ln\ln x}=x^{\ln\ln x},\int_{e^{100}}^{\infty}\frac{1}{x^{\ln\ln x}}dx\le\int_{e^{100}}^{\infty}\frac{1}{x^{\ln\ln 100}}dx<\infty.$$

判断绝对收敛性:$\int_2^{\infty}\frac{\sin x}{x^p\left(x^p+\sin x\right)}dx$

证明：

$p\le 0$显然发散, 当$p>0$,

利用$\frac{t}{1+t}=t-t^2+t^3+\cdots+o\left(t^n\right)$

$$\frac{\frac{\sin x}{x^p}}{x^p\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)}=\frac{\sin x}{x^{2p}}-\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}+\cdots+\frac{\sin^m x}{x^{mp}}+o\left(\frac{\sin^m x}{x^{(m+1)p}}\right)$$

注意上述展开，一定要展开到O里面的表达式的积分绝对收敛.

因此$\left(m+1\right)p>1\Rightarrow$即取$\frac{1}{p}\ge m>\frac{1}{p}-1$.

现在如果$2p>1$,上面是一堆绝对收敛之和,因此绝对收敛.

如果$2p\le 1$,主部需要判断$\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^{2p}}dx$的收敛性

注意到$\frac{1}{x^{2p}}$递减到0,$\left|\int_1^A\sin ydy\right|\le 2$,由$A-D$判别法知收敛

但是$\int_1^{\infty}\frac{\left|\sin x\right|}{x^{2p}}dx\ge\int_1^{\infty}\frac{\left|\sin x\right|^2}{x^{2p}}dx=\int_1^{\infty}\frac{1-\cos\left(2x\right)}{2x^{2p}}dx$

而$\int_1^{\infty}\frac{\cos\left(2x\right)}{2x^{2p}}dx$收敛但$\int_1^{\infty}\frac{1}{2x^{2p}}dx$发散,因此$\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^{2p}}dx$条件收敛

$\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}dx=\int_1^{\infty}\frac{1-\cos\left(2x\right)}{2x^{3p}}dx$在$p\le\frac{1}{3}$发散.

所以原积分在$\frac{1}{3}<p\le\frac{1}{2}$是条件收敛的，在$p>\frac{1}{2}$绝对收敛的.

$p<\frac{1}{3}$发散.

一开始展开m项会有困难,所以

严格的书写：

$$\frac{\frac{\sin x}{x^p}}{x^p\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)}=\frac{\sin x}{x^{2p}}-\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}+o\left(\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}\right)$$

此时$p>\frac{1}{3}$,

$$\frac{\frac{\sin x}{x^p}}{x^p\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)}=\frac{\sin x}{x^{2p}}-\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}+o\left(\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}\right)$$

此时$-\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}+o\left(\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}\right)$绝对收敛，收敛性由$\frac{\sin x}{x^{2p}}$唯一确定

所以$p>\frac{1}{2}$绝对,$\frac{1}{3}<p\le\frac{1}{2}$条件.

对$p\le\frac{1}{3}$,再去展开m项,此时$\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}$发散,

在它后面的项不管收敛发散都没有作用，所以此时积分发散.

判断绝对收敛性:$\int_1^{\infty}\tan\left(\frac{\sin x}{x}\right)dx$

证明:$\tan\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\sin x}{x}+O\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\right)$,

$\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$条件收敛,因此原积分条件收敛.

判断收敛性:$\int_1^{\infty}\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}dx$

$$\ln\cos\frac{1}{x}=\ln\left(1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

故原积分$p+2>1$收敛，即$p>-1$收敛.

判断收敛性：

$$\int_0^{\infty} x^2 \sin\left(\frac{\cos x^3}{1+x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\infty} x^2\left(\frac{\cos x^3}{1+x}-\frac{1}{6}\left(\frac{\cos x^3}{1+x}\right)^3+O\left(\left(\frac{\cos x^3}{1+x}\right)^5\right)\right)dx$$

$$=\int_0^{\infty} x^2\left(\frac{\cos x^3}{1+x}-\frac{\cos^3 x^3}{6\left(1+x\right)^3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{A\to\infty}\int_0^{A}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1-\sin^2 x^3}{6\left(1+x\right)^3}\right)d\sin x^3$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\infty}\sin x^3 d\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1-\sin^2 x^3}{6\left(1+x\right)^3}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\infty}\sin x^3\left(-\frac{1}{\left(1+x\right)^2}-\left(\frac{1}{6\left(1+x\right)^3}\right)'+\left(\frac{\sin^2 x^3}{6\left(1+x\right)^3}\right)'\right)dx$$

只需要判断$\int_0^{\infty}\sin x^3\cdot\frac{6x^2\sin x^3\cos x^3\left(1+x\right)-3\sin^2 x^3}{\left(1+x\right)^4}dx$

只需要判断$\int_0^{\infty}\frac{x^2\sin^2 x^3\cos x^3\left(1+x\right)}{\left(1+x\right)^4}dx$

只需要判断$\int_0^{\infty}\frac{x^2\sin^2 x^3\cos x^3}{\left(1+x\right)^3}dx=\frac{1}{6}\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(1+x\right)^3}d\sin^2 x^3$

$=-\frac{1}{6}\int_0^{\infty}\sin^2 x^3 d\frac{1}{\left(1+x\right)^3}$显然收敛.

习题(虽然考试来说太难了,但平时训练这种题非常好)

判断$\int_0^{\infty}\frac{x^p}{1+x^q\left|\sin x\right|^r}dx$

判断$\int_2^{\infty}\frac{\cos\left(2\sin x\right)}{x}dx$收敛性

证明：

由初等数学知$\cos\left(2\sin x\right)$是周期为π的函数且最正零点为

$$\arcsin\frac{\pi}{4},\pi-\arcsin\frac{\pi}{4},\pi+\arcsin\frac{\pi}{4},\ldots$$

对每一个$y\geq\arcsin\frac{\pi}{4}$, 存在唯一的$n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, 使得

$$\arcsin\frac{\pi}{4}+n\pi\leq y<\arcsin\frac{\pi}{4}+\left(n+1\right)\pi$$

$$\int_2^{y}\frac{\cos\left(2\sin x\right)}{x}dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\arcsin\frac{\pi}{4}+k\pi}^{\arcsin\frac{\pi}{4}+(k+1)\pi}\frac{\cos\left(2\sin x\right)}{x}dx+\int_{\arcsin\frac{\pi}{4}+n\pi}^{\arcsin\frac{\pi}{4}+(n+1)\pi}\frac{\cos\left(2\sin x\right)}{x}dx$$

$$\left|\int_{\arcsin\frac{\pi}{4}+n\pi}^{\arcsin\frac{\pi}{4}+(n+1)\pi}\frac{\cos\left(2\sin x\right)}{x}dx\right|\leq\int_{\arcsin\frac{\pi}{4}+n\pi}^{\arcsin\frac{\pi}{4}+(n+1)\pi}\frac{1}{x}dx=\ln\frac{\arcsin\frac{\pi}{4}+\left(n+1\right)\pi}{\arcsin\frac{\pi}{4}+n\pi}\to 0.$$

因此收敛性完全由$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\arcsin\frac{\pi}{4}+k\pi}^{\arcsin\frac{\pi}{4}+(k+1)\pi}\frac{\cos\left(2\sin x\right)}{x}dx$确定

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\arcsin\frac{\pi}{4}+k\pi}^{\arcsin\frac{\pi}{4}+(k+1)\pi}\frac{\cos\left(2\sin x\right)}{x}dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\arcsin\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\frac{\pi}{4}+\pi}\frac{\cos\left(2\sin x\right)}{x+k\pi}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{\arcsin\frac{\pi}{4}}^{\pi-\arcsin\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(2\sin x\right)}{x+k\pi}dx+\int_{\pi-\arcsin\frac{\pi}{4}}^{\pi+\arcsin\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(2\sin x\right)}{x+k\pi}dx\right]$$

以前一般这样之后前后积分都能合并在一起，因为零点是对称的

但是这里就没法那么漂亮合并了.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{\arcsin\frac{\pi}{4}}^{\pi-\arcsin\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(2\sin x\right)}{x+k\pi}dx+\int_{\pi-\arcsin\frac{\pi}{4}}^{\pi+\arcsin\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(2\sin x\right)}{x+k\pi}dx\right]$$

$$\geq\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{\arcsin\frac{\pi}{4}}^{\pi-\arcsin\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(2\sin x\right)}{\arcsin\frac{\pi}{4}+k\pi}dx+\int_{\pi-\arcsin\frac{\pi}{4}}^{\pi+\arcsin\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(2\sin x\right)}{\pi+\arcsin\frac{\pi}{4}+k\pi}dx\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{-0.37\cdots}{\arcsin\frac{\pi}{4}+k\pi}+\frac{1.07\cdots}{\pi+\arcsin\frac{\pi}{4}+k\pi}\right]$$

通分可以发现同阶于$\frac{1}{k}$，因此发散.

真题：

$p>0, f(x)=\int_0^x\left(1-\frac{[u]}{u}\right)du$, 讨论$\int_1^{\infty}\frac{e^{f(x)}}{x^p}\cos\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$收敛性.

留个兴趣题：

实际上可以证明$e^{f(x)}=\sqrt{2\pi x}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

解:

$f(x)=x-[x]\ln x+\sum_{k=1}^{[x]}\ln k$, 运用$E-M$，有

$$f(x)=x-[x]\ln x+\frac{\ln[x]}{2}+[x]\ln[x]-[x]+O(1)=\frac{\ln x}{2}+O(1).$$

$e^{f(x)}=e^{\frac{\ln x}{2}+O(1)}=\sqrt{x}e^{O(1)}$, 所以$c_1\sqrt{x}\le e^{f(x)}\le c_2\sqrt{x}$.

$$\int_1^{\infty}\frac{e^{f(x)}}{x^p}\frac{1}{2x+\frac{2}{x^3}}\left(2x+\frac{2}{x^3}\right)\cos\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

所以我们有$\left|\int_1^A\left(2x+\frac{2}{x^3}\right)\cos\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx\right|\le A$

而$\frac{e^{f(x)}}{x^p\left(2x+\frac{2}{x^3}\right)}=\frac{e^{x-[x]\ln x+\sum_{k=1}^{[x]}\ln k}}{x}\frac{x^4}{\left(2x^{p+4}+2x^p\right)}$

注意到求导可知$\frac{x^4}{\left(2x^{p+4}+2x^p\right)}$在$x$充分大递减.

$$\frac{e^{x-[x]\ln x+\sum_{k=1}^{[x]}\ln k}}{x}=e^{\int_0^x\left(1-\frac{[u]}{u}\right)du-\ln x}=e^{\int_0^1\left(1-\frac{[u]}{u}\right)du+\int_1^x\left(1-\frac{[u]+1}{u}\right)du}$$

因此$\frac{e^{x-[x]\ln x+\sum_{k=1}^{[x]}\ln k}}{x}$递减,即两个正的递减函数之积当然也递减.

又$\frac{e^{x-[x]\ln x+\sum_{k=1}^{[x]}\ln k}}{x}\frac{x^4}{\left(2x^{p+4}+2x^p\right)}\le\frac{c_2\sqrt{x}}{x}\frac{x^4}{\left(2x^{p+4}+2x^p\right)}\to 0$,

所以积分一定收敛.

$e^{f\left(\sqrt{x}\right)}$同阶于$x^{\frac{1}{4}}$

$$\int_1^{\infty}\frac{e^{f(x)}}{x^p}\cos\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{e^{f\left(\sqrt{x}\right)}}{x^{\frac{p+1}{2}}}\cos\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{e^{f\left(\sqrt{x}\right)}}{x^{\frac{p+1}{2}}}\cos x\cdot\cos\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{e^{f\left(\sqrt{x}\right)}}{x^{\frac{p+1}{2}}}\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}dx$$

$\frac{e^{f\left(\sqrt{x}\right)}}{x^{\frac{p+1}{2}}}\sin\frac{1}{x}$同阶于$\frac{1}{x^{\frac{2p+5}{4}}}$绝对收敛.

因此是否绝对收敛由$\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{e^{f\left(\sqrt{x}\right)}}{x^{\frac{p+1}{2}}}\left|\cos x\right|\cdot\cos\frac{1}{x}dx$收敛性确定

那么$\frac{e^{f\left(\sqrt{x}\right)}}{x^{\frac{p+1}{2}}}\left|\cos x\right|\cdot\cos\frac{1}{x}$同阶于$\frac{1}{x^{\frac{2p+1}{4}}}\left|\cos x\right|$

所以这个积分收敛等价于$\frac{2p+1}{4}>1\Leftrightarrow p>\frac{3}{2}$

因此$p>\frac{3}{2}$绝对收敛,$0<p\le\frac{3}{2}$条件收敛.

作业：判断:$\int_0^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}dx$收敛性