2011 年第二届全国大学生数学竞赛决赛
(非数学专业）参考答案

一、 计算题

(1) **【参考解答】**: $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\ln\frac{\sin x}{x}\right)'\bigg/\left(\frac{x^2}{2}\right)'=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

所以原式$=e^{-1/3}$.

(2) **【参考解答】**: 因为$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$

$$=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

所以原式$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln 2$

(3) **【参考解答】**: 因为$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=1-\frac{e^t}{1+e^{2t}}=\frac{e^{2t}-e^t+1}{1+e^{2t}},$$

于是$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^{2t}-e^t+1}{2e^{2t}}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{e^t-2}{2e^{2t}}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\bigg/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{e^t-2}{2e^{2t}}\bigg/\frac{e^{2t}+1}{2e^{2t}}$$
$$=(e^t-2)(e^{2t}+1)$$

二、**【参考解答】**: 解$\begin{cases}2x+y-4=0\\x+y-1=0\end{cases}$，得$x_0=3,y_0=-2$.

作变换$x=t+3,y=u-2$. 代入方程得

$$(2t+u)\,\mathrm{d}t+(t+u)\,\mathrm{d}u=0,$$

即$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{2t+u}{t+u}=-\frac{2+\frac{u}{t}}{1+\frac{u}{t}}$. 令$v=-\frac{u}{t}$，则

$$u = vt, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = v + t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

代入上面方程，整理并分离变量可得

$$\frac{v+1}{v^2+2v+2}\mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

积分得$\frac{1}{2}\ln(v^2+2v+2) = -\ln|t| + C_1$. 化简得

$$v^2+2v+2 = \frac{C_2}{t^2}，其中 C_2 = e^{2C_1}.$$

代回$v = \frac{u}{t}$得$u^2+2ut+2t^2 = C_2$.

再代回$u = y+2, t = x-3$得到原方程通解

$$2x^2+2xy+y^2-8x-2y = C，其中 C = C_2-10.$$

三、【参考证明】： 如果结论成立，则

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}(k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0))\\&=(k_1+k_2+k_3-1)f(0)=0\end{aligned}$$

由于$f(0)\neq 0$，所以

$$k_1+k_2+k_3-1=0. \quad (1)$$

由洛必达法则

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}\frac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)}{h^2}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{k_1f'(h)+2k_2f'(2h)+3k_3f'(3h)}{2h}, \qquad (2)\end{aligned}$$

由(2)式知

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}(k_1f'(h)+2k_2f'(2h)+3k_3f'(3h))\\&=(k_1+2k_2+3k_3)f'(0)\end{aligned}$$

由于$f'(0)\neq 0$，所以

$$k_1+2k_2+3k_3=0 \qquad (3)$$

对(2)式再用一次洛必达法则，有

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}\frac{k_1f''(h)+4k_2f''(2h)+9k_3f''(3h)}{2}\\&=(k_1+4k_2+9k_3)f''(0)\end{aligned}$$

由于$f''(0)\neq 0$，所以

$$k_1+4k_2+9k_3=0 \qquad (4)$$

将(1)，(3)，(4)联立得关于k_1,k_2,k_3的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 1 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ k_1 + 4k_2 + 9k_3 = 0 \end{cases}$$

它的系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$，由克莱姆法则，存在唯一的一组实数$k_1, k_2, k_3$满足上述方程组，并得

$$k_1 = 3, k_2 = -3, k_3 = 1.$$

四、【参考解答】：椭球面的法向量为：$\vec{n} = (\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2})$，则椭球面在点$(x, y, z)$的切平面

$$\begin{aligned} \pi : &\frac{x}{a^2}(\xi - x) + \frac{y}{b^2}(\eta - y) + \frac{z}{c^2}(\zeta - z) \\ &= \frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta - 1 = 0 \end{aligned}$$

切平面到原点的距离为$\mathrm{d}(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

求$\mathrm{d}(x, y, z)$在Γ上的极大（小）值，等同于求

$$u = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$$

在Γ上的极小（大）值. 设

$$\begin{aligned} L = &\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} + \lambda(z^2 - x^2 - y^2) \\ &- \mu\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{2x}{a^4} - 2\lambda x - \frac{2\mu x}{a^2} = 2x\left(\frac{1}{a^4} - \lambda - \frac{\mu}{a^2}\right) = 0 \\ L_y &= \frac{2y}{b^4} - 2\lambda y - \frac{2\mu y}{b^2} = 2y\left(\frac{1}{b^4} - \lambda - \frac{\mu}{b^2}\right) = 0 \\ L_z &= \frac{2z}{c^4} + 2\lambda z - \frac{2\mu z}{c^2} = 2z\left(\frac{1}{c^4} + \lambda - \frac{\mu}{c^2}\right) = 0 \\ L_\lambda &= z^2 - x^2 - y^2 = 0 \\ L_\mu &= 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

则对上面等式构成的方程组，讨论解的情况：

(1) 如x, y, z都不为 0，则

$$\frac{1}{a^4}-\lambda-\frac{\mu}{a^2}=0,\frac{1}{b^4}-\lambda-\frac{\mu}{b^2}=0,\frac{1}{c^4}+\lambda-\frac{\mu}{c^2}=0 \quad (*)$$

此时必有

$\lambda=-\frac{1}{a^2b^2},\mu=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$，且 $a^2b^2=c^2(a^2+b^2+c^2)$. 由 $xL_x+yL_y+zL_z=2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)-2\mu=0$，得

$$\mu=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=u=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

这时，所有的切平面到原点的距离为常值.

(2) 若 x,y,z 至少有一个为 0. 取 $x=0$，则两个曲面为

$$z^2=y^2,1-(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})z^2=0,$$

于是 $z^2=y^2=\frac{b^2c^2}{b^2+c^2},u_1=\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{b^4+c^4}{b^2c^2(b^2+c^2)}$，这时

$$\lambda=\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{b^2}-\mu\right)=\frac{1}{c^2}\left(\mu-\frac{1}{c^2}\right),\mu=\frac{b^4+c^4}{b^2c^2(b^2+c^2)}.$$

类似地，取 $y=0$，可得

$$z^2=x^2=\frac{a^2c^2}{a^2+c^2},u_2=\frac{a^4+c^4}{a^2c^2(a^2+c^2)}.$$

若取 $z=0$，有 Σ_2 可得 $x=y=0$，而原点不在 Σ_1 上. 矛盾.

由于 $u_2-u_1=\frac{a^4+c^4}{a^2c^2(a^2+c^2)}-\frac{b^4+c^4}{b^2c^2(b^2+c^2)}$

$$=\frac{(a^4+c^4)b^2(b^2+c^2)-(b^4+c^4)a^2(a^2+c^2)}{a^2b^2c^4(a^2+c^2)(b^2+c^2)}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)c^2}{a^2b^2c^4(a^2+c^2)(b^2+c^2)}>0$$

综上所述，若 $a^2b^2=c^2(a^2+b^2+c^2)$，所求切平面到原点的距离为常值 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$；

若 $a^2b^2\neq c^2(a^2+b^2+c^2)$，则方程组（*）无解，这时，所求切平面中离原点最近距离和最远距离分别为

$$\mathrm{d}_{\max}=bc\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b^4+c^4}} \text{和} \mathrm{d}_{\min}=ac\sqrt{\frac{a^2+c^2}{a^4+c^4}}$$

分别在以下两点取得：

$$(0,\frac{\pm bc}{\sqrt{b^2+c^2}},\frac{\pm bc}{\sqrt{b^2+c^2}}),(\frac{\pm ac}{\sqrt{a^2+c^2}},0,\frac{\pm ac}{\sqrt{a^2+c^2}})$$

五、【参考解答】: Σ 的方程为 $x^2+3y^2+z^2=1$. 记

$$F(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2-1,$$

则椭球面 Σ 在点 $P(x,y,z)$ 处的法向量为: $\vec{n}=\left(F_x,F_y,F_z\right)|_P=2\left(x,3y,z\right)|_P$. 故 Σ 在点 $P(x,y,z)$ 处的切平面 Π 的方程为:

$$x(X-x)+3y(Y-y)+z(Z-z)=0 \text{ 即 } xX+3yY+zZ=1$$

从而 $\rho(x,y,z)=(x^2+9y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$.

(1)在曲面 S 上,

$$z=\sqrt{1-x^2-3y^2},z_x=-\frac{x}{z},z_y=-\frac{3y}{z},$$

所以 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{\sqrt{1+6y^2}}{z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

$$\rho(x,y,z)=(1+6y^2)^{-\frac{1}{2}},$$

记 $D_{xy}:x^2+3y^2\le 1$, 令

$x=r\cos\theta,y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta,0\le r\le 1,0\le\theta\le 2\pi$, 得

$$\begin{aligned}
\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S&=\iint_{D_{xy}}(1+6y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1+2r^2\sin^2\theta)r\,\mathrm{d}r\\
&=\frac{\sqrt{3}}{3}(\pi+2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r)\\
&=\frac{\sqrt{3}}{3}(\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta)\\
&=\frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi
\end{aligned}$$

(2) 补充 xOy 面上椭圆围成的部分坐标面 S_1 与 S 构成闭合曲面记为 S_0, 由于 S_1: $z=0$, 从而

$$\iint_{S_1}z(\lambda x+3\mu y+\nu z)\,\mathrm{d}S=0.$$

故

$$\begin{aligned}&\iint_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)\,\mathrm{d}S\\&=\oiint_{S_0} z(\lambda x+3\mu y+\nu z)\,\mathrm{d}S=6\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

其中$V: x^2+3y^3+z^2\le 1, z\ge 0$.

令$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\sin\varphi\sin\theta, z=\cos\varphi$，得

$$\begin{aligned}&\iint_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)\,\mathrm{d}S\\&=2\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\end{aligned}$$

六、【参考证明】：由微分中值定理

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-1}&=\ln f(a_{n-1})-\ln f(a_{n-2})\\&=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(a_{n-1}-a_{n-2}),\end{aligned}$$

其中ξ_{n-1}在a_{n-1},a_n之间. 于是

$$|a_n-a_{n-1}|\le\left|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\right|\left|a_{n-1}-a_{n-2}\right|\le m\left|a_{n-1}-a_{n-2}\right|,$$

由归纳法知

$$\begin{aligned}&\left|a_{n-1}-a_{n-2}\right|\le m^{n-1}\left|a_1-a_0\right|,\left|a_n-a_{n-1}\right|\\&\le m^n\left|a_1-a_0\right|\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|a_k-a_{k-1}\right|\\&\le(m^{n+p-1}+\cdots+m^n)\left|a_1-a_0\right|\end{aligned}$$

由于$m<1$，故$\forall\varepsilon>0,\exists N$，当$n>N$时，

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|a_k-a_{k-1}\right|<\varepsilon,$$

由 Cauchy 准则知级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛.

七、【参考证明】：不存在. 利用定积分的区间可加性

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

对右端第一项，利用微分中值定理，并注意到条件$f(0)=1$及$\left|f'(x)\right|\le 1$，存在$0<\varepsilon<x$，

$f(x)=f(0)+f'(\varepsilon)x=1+f'(\varepsilon)x\ge 1-x(\forall x\in[0,1])$.

从而$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

类似地，当$x\in[1,2]$时，

$$f(x)=f(2)+f'(\eta)(x-2)\geq x-1.$$

所以$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}$，于是，

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x\geq 1.$$

利用反证法，假设这种f存在，由$\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x\right|\leq 1$ 及$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x\geq 1$ 知

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x=1=\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}\,x+\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}\,x.$$

记$g(x)\equiv\begin{cases}1-x, & 0\leq x\leq 1\\ x-1, & 1<x\leq 2\end{cases}$ 由此表明二连续函数$f(x)\geq g(x)$的积分值相等，从而$f(x)=g(x)$在$\left[0,2\right]$上，但这与f的可微性矛盾，所以f不存在.