

第十三届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案 (数学 B 类, 2021 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 设球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 求以点 $M_0(0, 0, a)(a \in \mathbb{R}, |a| > 1)$ 为顶点的与 S 相切的锥面方程.

解答. 解法一:

设 L 为过顶点 $M_0(0, 0, a)$, 方向为 $\vec{s} = (l, m, n)$, 与 S 相切的锥面上的任意一条母线, 则对于 L 上任意一点 $M(x, y, z)$, L 的方程可以表示为

$$\frac{x-0}{l} = \frac{y-0}{m} = \frac{z-a}{n},$$

其中 $l, m, n \in \mathbb{R}$ 不全为零. 设 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = lt, \\ y = mt, \\ z = a + nt, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $t \in \mathbb{R}$ 为参数.

将直线的参数方程 (1) 代入 S 中可得

$$(l^2 + m^2 + n^2)t^2 + 2ant + a^2 - 1 = 0.$$

由直线 L 与球面 S 相切的条件可知

$$(2an)^2 - 4(l^2 + m^2 + n^2)(a^2 - 1) = 0,$$

亦即

$$(l^2 + m^2)a^2 = (l^2 + m^2 + n^2). \quad (2)$$

..... (12 分)

由 (1) 和 (2) 消去参数 t 可得锥面方程

$$(a^2 - 1)(x^2 + y^2) - (z - a)^2 = 0,$$

其中 $|a| > 1$.

..... (15 分)

解法二:

设 $O(0, 0, 0)$ 为球心坐标, $M(x, y, z)$ 为切锥面与球面的切点, 半顶角为 $\alpha = \angle(\overrightarrow{M_0O}, \overrightarrow{M_0M})$, 则有 $\sin \alpha = \frac{1}{|a|}$.

..... (7 分)

注意到

$$\cos^2 \alpha = \frac{|\overrightarrow{M_0O} \cdot \overrightarrow{M_0M}|^2}{|\overrightarrow{M_0O}|^2 |\overrightarrow{M_0M}|^2}, \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha,$$

得到

$$\frac{(z - a)^2}{x^2 + y^2 + (z - a)^2} = \frac{a^2 - 1}{a^2},$$

即

$$(a^2 - 1)(x^2 + y^2) - (z - a)^2 = 0,$$

其中 $|a| > 1$.

..... (15 分)

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $B \subset R^n (n \geq 2)$ 是单位开球, 函数 u, v 在 \bar{B} 上连续, 在 B 内二阶连续可导, 满足

$$\begin{cases} -\Delta u - (1 - u^2 - v^2)u = 0, & x \in B, \\ -\Delta v - (1 - u^2 - v^2)v = 0, & x \in B, \\ u(x) = v(x) = 0, & x \in \partial B, \end{cases}$$

其中, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, ∂B 表示 B 的边界. 证明: $u^2(x) + v^2(x) \leq 1 (\forall x \in \bar{B})$.

证明. 记 $w = w(x) = u^2(x) + v^2(x)$, 则 w 满足问题

$$\begin{cases} -\Delta w - 2(1 - w)w = -2(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2), & x \in B, \\ w(x) = 0, & x \in \partial B. \end{cases} \quad (1)$$

..... (6 分)

显然, $w(x) \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$. 所以, $w(x)$ 必然在 \bar{B} 上达到最大值. 设最大值为 x_1 .

若 $x_1 \in B$, 则 $\nabla w(x_1) = 0$, $-\Delta w(x_1) \geq 0$. 于是由 (1) 得到, 在 x_1 处,

$$0 \leq -\Delta w \leq 2(1 - w)w - 2(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \leq 2(1 - w)w.$$

..... (12 分)

而 $w(x_1) \geq 0$, 故上式表明 $w(x_1) \leq 1$.

若 $x_1 \in \partial B$, 则由 (1), $w(x_1) = 0$.

综合之, 恒有 $0 \leq w \leq 1, x \in \bar{B}$.

..... (15 分)

□

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 $f(x) = x^{2021} + a_{2020}x^{2020} + a_{2019}x^{2019} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 为整系数多项式, $a_0 \neq 0$. 设对任意 $0 \leq k \leq 2020$ 有 $|a_k| \leq 40$, 证明: $f(x) = 0$ 的根不可能全为实数.

证明. 设 $f(x) = 0$ 的 2021 个根分别为 $x_1, x_2, \dots, x_{2021}$. 由于 $a_0 \neq 0$, 所以 $x_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 2021$. 若 $x_1, x_2, \dots, x_{2021}$ 都是实数, 由 Cauchy 不等式有

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} \geq \left(\sum_{i=1}^{2021} x_i \cdot \frac{1}{x_i} \right)^2 = 2021^2.$$

..... (5 分)

由 Vieta 定理,

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i = -a_{2020}, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 2021} x_i x_j = a_{2019},$$

由此得到

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{2021} x_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2021} x_i x_j = a_{2020}^2 - 2a_{2019}.$$

注意到 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_{2021}}$ 是多项式

$$g(x) = x^{2021} f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 x^{2021} + a_1 x^{2020} + a_2 x^{2019} + \cdots + a_{2019} x^2 + a_{2020} x + 1$$

的根. 继续由 Vieta 定理,

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i} = -\frac{a_1}{a_0}, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 2021} \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{x_j} = \frac{a_2}{a_0},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} = \left(\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i} \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2021} \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{x_j} = \frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0}.$$

..... (10 分)

因为对任意 $0 \leq k \leq 2020$ 有 $|a_k| \leq 40$, 又 a_0 为非零整数, 故 $|a_0| \geq 1$, 所以

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} = (a_{2020}^2 - 2a_{2019}) \left(\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0} \right) \leq (40^2 + 2 \cdot 40)(40^2 + 2 \cdot 40) = 1680^2,$$

矛盾. 证毕 (15 分)

□

得分	
评阅人	

四、(本题 20 分) 设 $R = \{0, 1, -1\}$, S 为 R 上的 3 阶行列式全体, 即 $S = \{\det(a_{ij})_{3 \times 3} | a_{ij} \in R\}$. 证明: $S = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

解答. 首先, 通过直接检验可知

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

..... (5 分)

其次, 由于交换两行, 行列式值改变符号, 因此有 $\Gamma \supseteq \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

..... (10 分)

第三, 我们证明: $\forall (a_{ij})_{3 \times 3}, a_{ij} \in R$, 总有 $|\det(a_{ij})| \leq 4$.

事实上, 由对角线法则可知

$$\det(a_{ij}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

记

$$b_1 = a_{11}a_{22}a_{33}, b_2 = a_{12}a_{23}a_{31}, b_3 = a_{13}a_{32}a_{21},$$

$$b_4 = -a_{13}a_{22}a_{31}, b_5 = -a_{12}a_{21}a_{33}, b_6 = -a_{11}a_{32}a_{23}.$$

直接观察可知: 每个 a_{ij} 在单项 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ 中共出现两次, 且

$$b_1b_2b_3b_4b_5b_6 = -a_{11}^2a_{12}^2a_{13}^2a_{21}^2a_{22}^2a_{23}^2a_{31}^2a_{32}^2a_{33}^2.$$

因此立即可得: 若有某个 $a_{ij} = 0$, 则 b_1, \dots, b_6 中至少有两个为 0, 从而 $|\det(a_{ij})| \leq 4$. 倘若每个 a_{ij} 都不等于 0, 则由 $a_{ij} = \pm 1$ 得 b_1, \dots, b_6 之积 $= -1$, 从而至少有一个 b_i 为 -1 , 同时也至少有一个 b_j 为 1, 否则与 $b_1b_2b_3b_4b_5b_6 = -1$ 矛盾. 结果 b_i 与 b_j 互相抵消, 仍有 $|\det(a_{ij})| \leq 4$.

至此, 综上所述, $\Gamma = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, Γ 共由 9 个元素所组成.

..... (20 分)

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设函数 f 在 $[-1, 1]$ 内有定义, 在 $x = 0$ 的某邻域内连续可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a > 0$. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 发散.

证明. 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = a > 0$, 知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. 又 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续可导, 则 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.
..... (3 分)

于是 $0 < a = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$. 由于 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续, 存在正数 $\delta > 0$, 使得 $\forall x \in [0, \delta]$, 有 $f'(x) > 0$ 因此, 在 $[0, \delta]$ 上 $f(x)$ 单调增加.
..... (8 分)

于是存在正整数 $N > \frac{1}{\delta}$, 当 $n > N$ 时, $f(\frac{1}{n}) > 0$ 且 $f(\frac{1}{n}) > f(\frac{1}{n+1})$. 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 知 $\lim_{N \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = 0$, 且 $\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n f(\frac{1}{n})$ 为交错级数, 由莱布尼兹判别法, 级数 $\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛.
..... (12 分)

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{n})}{1/n} = a > 0$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 发散.
..... (15 分)

得分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 设 $f(x) = \ln \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}$. 证明函数 f 在 $(-\infty, 0)$ 内为严格凸的, 并且对任意 $\xi \in (-\infty, 0)$, 存在 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

(称 (a, b) 内的函数 S 为严格凸的, 如果对任何 $\alpha \in (0, 1)$, 以及 $x, y \in (a, b)$, $x \neq y$ 成立 $S(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha S(x) + (1 - \alpha)S(y)$.)

证明. 记 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}$. 我们有

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}, \quad f''(x) = \frac{g''(x)g(x) - (g'(x))^2}{g^2(x)}.$$

又因为

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}, \quad g''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}.$$

..... (4 分)

于是, 由 Hölder 不等式,

$$g''(x)g(x) - (g'(x))^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2} \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n} \right)^2 > 0,$$

从而函数 $f(x)$ 为严格凸的.

..... (10 分)

记 $h(x) = f(x) - (f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi))$. 则 $h''(x) > 0$ 及 $h'(\xi) = h(\xi) = 0$. 于是函数 $h(x)$ 在 $(-\infty, \xi)$ 上严格递减, 在 $(\xi, 0)$ 上严格增加. 任取 $a \in (-\infty, \xi)$, $b \in (\xi, 0)$. 则 $h(a) > 0$, $h(b) > 0$. 取 $c \in (0, \min\{h(a), h(b)\})$, 则存在 $x_1 \in (a, \xi)$, $x_2 \in (\xi, b)$ 使得 $h(x_1) = h(x_2) = c$.

..... (16 分)

于是

$$\begin{aligned} 0 &= h(x_2) - h(x_1) = f(x_2) - (f(\xi) + f'(\xi)(x_2 - \xi)) - f(x_1) + f(\xi) + f'(\xi)(x_1 - \xi) \\ &= f(x_2) - f(x_1) - f'(\xi)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

于是

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

..... (20 分)