

**2014 年第五届全国大学生数学竞赛决赛**  
**(数学类一、二年级) 参考答案**

一、【参考证明】: 设  $l$  是过  $P$  点的抛物面  $S$  的一条切线, 它的方向向量为  $V = (u, v, w)$ , 则切点可以表示为

$$Q = P + tV = (a + tu, b + tv, c + tw),$$

其中  $t$  是二次方程  $2(c + tw) = (a + tu)^2 + (b + tv)^2$ , 也就是

$$(u^2 + v^2)t^2 + 2(au + bv - w)t + (a^2 + b^2 - 2c) = 0$$

的唯一重根.

$$\text{这时, } (au + bv - w)^2 = (u^2 + v^2)(a^2 + b^2 - 2c), \text{ 得 } t = \frac{w - au - bv}{u^2 + v^2} = \frac{a^2 + b^2 - 2c}{w - au - bv}. \text{ 于}$$

是切点

$$Q = (X, Y, Z) = (a + tu, b + tv, c + tw)$$

满足

$$aX + bY - Z = (a^2 + b^2 - c) + t(au + bv - w) = c.$$

于是所有切点  $Q$  落在平面  $ax + by - z = c$  上.

二、【参考证明】: (1) 由于  $\text{tr}(A)$  是  $A$  的特征值之和, 得  $\lambda_1$  的代数重数也是 3, 而  $A$  的另一特征值  $\lambda_2 = 0$ , 且  $\lambda_2 = 0$  的代数重数为 1. 结果  $A$  有四个线性无关的特征向量. 故  $A$  可对角化.

(2) 由于  $\lambda_1 = 2$  的重数为 3, 故有

$$\text{rank}(A - 2E) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -2 \\ a & -2 & b & c \\ d & e & -2 & f \\ g & h & k & 2 \end{pmatrix}.$$

进而  $a/0 = -2/2 = b/2 = c/-2$ , 得  $a = 0, b = -2, c = 2$ ;

$d/0 = e/2 = -2/2 = f/-2$ , 得  $d = 0, e = -2, f = 2$ ;

$g/0 = h/2 = k/2 = 2/-2$ , 得  $g = 0, h = -2, k = -2$ ,

于是  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ . 注意到  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T A x = x^T B x$ , 其中

$$B = \frac{A + A^T}{2}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$B$  的特征值为  $\lambda_1 = 2$  (二重),  $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{3}$  (一重). 故  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  在正交变换下的标准型为  $2y_1^2 + 2y_2^2 + (1 + 2\sqrt{3})y_3^2 + (1 - 2\sqrt{3})y_4^2$ .

三、【参考证明】: (1)  $A$  有  $n$  各线性无关的特征向量, 故  $A$  可对角化. 设  $\lambda_0$  是  $A$  的一个特征值, 考察  $A - \lambda_0 I$ , 它有一个  $n - 1$  阶子式不为 0, 结果  $\text{rank}(A - \lambda_0 I) = n - 1$ . 故  $\lambda_0$  的重数为 1, 从而  $A$  有  $n$  个各不相同的特征值:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

(2)  $\forall X_1, X_2 \in W, \forall \mu \in R$ , 显然  $X_1 + \mu X_2 \in W$ , 故  $W$  为  $R$  上的向量空间. 让

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned} XA = AX &\Leftrightarrow XP \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} X \\ &\Leftrightarrow P^{-1}XP \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}XP. \end{aligned}$$

故若记

$$V = \left\{ Y \in R^{n \times n} \mid Y \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} Y \right\},$$

则  $W$  与  $V$  有线性同构  $\sigma: X \rightarrow P^{-1}XP$ . 从而

$$\dim V = \dim W.$$

$$\text{注意到 } V = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} \mid d_1, \dots, d_n \in R \right\}, \text{ 故}$$

$$\dim V = \dim W = n.$$

(3) 显然,  $I, A, \dots, A^{n-1} \in W$ . 下面证  $I, A, \dots, A^{n-1}$  线性无关. 事实上, 若

$$x_0 I + x_1 A + \dots + x_{n-1} A^{n-1} = 0,$$

则得

$$x_0 + x_1 \lambda_1 + \cdots + x_{n-1} \lambda_1^{n-1} = 0$$

.....

$$x_0 + x_1 \lambda_n + \cdots + x_{n-1} \lambda_n^{n-1} = 0$$

其系数行列式为范德蒙行列式, 由  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  各不相同, 故  $I, A, \dots, A^{n-1}$  线性无关, 即  $I, A, \dots, A^{n-1}$  为某一组基.

**四、【参考证明】:** 用反证法. 设存在  $x_0 \in [a, b]$  使得  $z(x_0) > y(x_0)$ . 令

$$M = \{x \in [a, b] \mid z(x) > y(x)\},$$

则  $M$  为  $[a, b]$  的非空开子集. 故存在开区间  $(\alpha, \beta) \subset M$  满足

$$y(\alpha) = z(\alpha), z(x) > y(x), x \in (\alpha, \beta).$$

这推出  $z(x) - y(x)$  单调不减, 故  $z(x) - y(x) \leq z(\alpha) - y(\alpha) = 0$ . 矛盾.

**五、【参考证明】:** 令  $g(t) = \left( \int_0^t f(x) dx \right)^\beta - \int_0^t f^\alpha(x) dx$ , 则  $g(t)$  可导,

$$g'(t) = f(t) \left[ \beta \left( \int_0^t f(x) dx \right)^{\beta-1} - f^{\alpha-1}(t) \right].$$

令  $h(t) = \beta^{\frac{1}{\beta-1}} \int_0^t f(x) dx - f^2(t)$ , 则有  $h'(t) = f(t) \left[ \beta^{\frac{1}{\beta-1}} - 2f'(t) \right]$ . 由于  $\beta > 1, f'(x) \leq \frac{1}{2}$ ,

我们有  $h'(t) \geq 0$ . 这说明  $h(t)$  单调递增, 从  $h(0) = 0$ , 得  $h(t) \geq 0$ . 因而  $g'(t) \geq 0$ . 从  $g(0) = 0$ , 得  $g(t) \geq 0$ , 即

$$\int_0^t f^\alpha(x) dx \leq \left( \int_0^t f(x) dx \right)^\beta.$$

令  $t \rightarrow +\infty$ , 即得所证.

**六、【参考证明】:**  $C_{\max} = \sqrt{1 - \frac{2}{n}}$ . 不妨设  $f(x)$  的最小实根为 0, 最大实根为  $a$ . 设

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n), \\ 0 = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = a.$$

先证以下引理:

**引理:** 若存在  $2 \leq k, m \leq n-1$  使得  $x_k < x_m$ , 令

$$x_k < x'_k \leq x'_m < x_m \text{ 满足 } x_k + x_m = x'_k + x'_m, \text{ 令}$$

$$f_1(x) = (x - x'_1)(x - x'_2) \cdots (x - x'_n), x'_i = x_i, i \neq k, m. \text{ 则 } d(f_1') \leq d(f').$$

**证明:** 注意到  $f(x) = f_1(x) - \delta F(x)$ , 其中

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{(x-x'_k)(x-x'_m)}, \delta = x'_k x'_m - x_k x_m > 0.$$

设  $\alpha, \beta$  分别为  $f'_1(x)$  的最大最小实根, 则有

$$f_1(\alpha) \leq 0, f_1(\beta)(-1)^n \leq 0.$$

由罗尔定理  $\alpha \geq x_m, \beta \leq x_k$ , 并且

$$f'(\alpha) = \delta \frac{(2\alpha - x'_k - x'_m)}{(\alpha - x'_k)^2 (\alpha - x'_m)^2} f_1(\alpha).$$

则  $f'(\alpha)f_1(\alpha) \geq 0$ , 故  $f'(\alpha) \leq 0$ . 这表明  $f'(x) = 0$  的最大实根大于或等于  $\alpha$ . 同理,  $f'(x) = 0$  最小实根小于或等于  $\beta$ . 引理证毕. 令

$$g(x) = x(x-a)(x-b)^{n-2}, b = \frac{x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1}}{n-2}.$$

由引理得到  $d(f') \geq d(g')$ . 由于

$$g'(x) = (x-b)^{n-3} (nx^2 - ((n-1)a + 2b)x + ab),$$

$$d(g') = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{n} + \left(\frac{a-2b}{n}\right)^2} \geq \sqrt{1 - \frac{2}{n}}a.$$

于是  $C$  的最大值  $C_{\max} \geq \sqrt{1 - \frac{2}{n}}$ , 且当  $f(x) = x(x-a)\left(x - \frac{a}{2}\right)^{n-2}$  时,  $d(f') = \sqrt{1 - \frac{2}{n}}d(f)$ .