2013年西西寒假大学数学竞赛讲义

Edited by 陈洪葛

2013 年 2 月 1 日

Chapter 1

序列与极限

例1：设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$,正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$收敛,设$n_0$是某一自然数，若当$n > n_0$时，有

$$x_n < x_{n+1}, x_n < \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n+1}),\ y_{n+1} \le y_n$$

求证：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_{n+1} - x_n} = 0$$

证明：不妨设对所有的n,有$0 < x_n < x_{n+1}$，$y_{n+1} \le y_n$,对于任何$n > 1$,有$x_n \le \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n+1})$，因为正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$收敛,所以存在$c > \frac{x_1 y_2}{x_2 - x_1}$，使得

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{c}{2} - \frac{x_1 y_2}{2(x_2 - x_1)}, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

又由$x_n \le \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n+1})$得

$$\frac{1}{x_{n+1} - x_n} \le \frac{1}{x_n - x_{n-1}}, \qquad n = 2, 3, \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{x_n}{x_{n+1} - x_n} - \frac{x_n}{x_n - x_{n-1}} \le 0, \qquad n = 2, 3, \cdots$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{n-1}\left|\frac{x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}y_{k+1}-\frac{x_k}{x_k-x_{k-1}}y_k\right| \\
&=\sum_{k=2}^{n-1}\left|y_{k+1}+\frac{x_k}{x_k-x_{k-1}}(y_{k+1}-y_k)+\left(\frac{x_k}{x_{k+1}-x_k}-\frac{x_k}{x_k-x_{k-1}}\right)y_{k+1}\right| \\
&\le\sum_{k=2}^{n-1}\left[y_{k+1}+\frac{x_k}{x_k-x_{k-1}}(y_k-y_{k+1})+\left(\frac{x_k}{x_k-x_{k-1}}-\frac{x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)y_{k+1}\right] \\
&=\sum_{k=2}^{n-1}\left(y_{k+1}+y_k+\frac{x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}y_k-\frac{x_k}{x_{k+1}-x_k}y_{k+1}\right) \\
&<2\left[\frac{c}{2}-\frac{x_1y_2}{2(x_2-x_2)}\right]+\frac{x_1y_2}{x_2-x_1}=c, \qquad n=2,3,\cdots
\end{aligned}
$$

即序列$\{\dfrac{x_ny_n}{x_n-x_{n-1}}\}$,(定义$x_0=0$)有有界变差，从而收敛，由O.Stolz定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_ny_n}{x_n-x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{x_n}=0$$

但

$$0\le\frac{x_ny_n}{x_{n+1}-x_n}\le\frac{x_ny_n}{x_n-x_{n-1}}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_ny_n}{x_{n+1}-x_n}=0$$

□

变式：设$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是一正项收敛级数，且有

$$a_{n+1}<\frac{1}{2}(a_n+a_{n+2}), \qquad \frac{1}{a_{n+2}}-\frac{1}{a_{n+1}}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_{n+3}}-\frac{1}{a_n}\right)$$

求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+2}(a_n-a_{n+1})}{a_na_{n+1}-2a_na_{n+2}+a_{n+1}a_{n+2}}$$

例2：如果序列$\{a_n\}$单调，级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^a a_n$收敛，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n^{a+1}a_n = 0$$

证明：不妨设$\{a_n\}$单调递减，则当$n \geq 2$时，

$$\sum_{i=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} i^a a_i \geq a_n \sum_{i=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} i^a \geq \left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)\left[\frac{n}{2}\right]^a a_n \geq \frac{n}{2}\left[\frac{n}{2}\right]^a a_n$$
$$\geq \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)^a a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)^a n^{a+1}a_n$$

$$\sum_{i=n}^{2n} i^a a_i \leq a_n \sum_{i=n}^{2n} i^a \leq n(2n)^a a_n = 2^a n^{a+1} a_n$$

由上述不等式即得$\lim_{n\to\infty} n^{a+1}a_n = 0$ □

变式1：设$f(x)$在$(0,1]$上单调，又积分$\int_0^1 x^a f(x)dx$存在。证明：

$$\lim_{x\to 0^+} x^{a+1}f(x) = 0$$

变式2：若序列$\{na_n\}$单调，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，证明：

$$\lim_{x\to\infty} n\ln n \cdot a_n = 0$$

变式3：若$x \to +\infty$时，$xf(x)$单调递减趋于零，且$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，证明:

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)\ln x = 0$$

证明： 由$xf(x) \searrow 0$,不妨设$xf(x) > 0$.因为$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛,故

$$\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} f(t)dt \to 0, \qquad x \to +\infty$$

但

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)dt = \int_{\sqrt{x}}^{x} tf(t)\cdot\frac{1}{t}dt > xf(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{1}{t}dt$$
$$= \frac{1}{2}xf(x)\ln x > 0$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)\ln x = 0$$

□

例3 设$b > a > 0, d > 0$,且

$$x_n = \frac{a(a+d)(a+2d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)(b+2d)\cdots(b+nd)}$$

证明：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

证法一： 容易看出，$\{x_n\}$单调递减有下界，故设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，由O,Stolz定理，有

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} \frac{nx_n}{n} = \lim_{n\to\infty} [nx_n - (n-1)x_{n-1}] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[n\frac{a+nd}{b+nd} x_{n-1} - (n-1)x_{n-1} \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(a-b+d)+b}{b+nd} x_{n-1} = \frac{a-b+d}{d} x \end{aligned}$$

从而$x = \dfrac{a-b+d}{d}x$.因为$b > a$,所以由上式即得$x = 0$ □

证法二: 首先，我们可以假定$d = 1$,因为我们可以用$\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{d}$替代$a, b$
由$Bernoulli$不等式，我们有

$$\left(\frac{b+k+1}{b+k}\right)^{a-b} = \left(1 + \frac{1}{b+k}\right)^{a-b} > 1 + \frac{a-b}{b+k} = \frac{a+k}{b+k}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)} &< \left(\frac{b+1}{b} \cdot \frac{b+2}{b+1} \cdots \frac{b+n+1}{b+n}\right)^{a-b} \\ &= \left(\frac{b+n+1}{b}\right)^{a-b} = \left(\frac{b}{b+n+1}\right)^{b-a} \end{aligned}$$

因为$b - a > 0$,所以$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{b}{b+n+1}\right)^{b-a} = 0$,于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)} = 0$$

从上面的证明不难看出下面变式成立。

变式：设$b > a > 0, d > 0$,且

$$x_n = \frac{a(a+d)(a+2d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)(b+2d)\cdots(b+nd)}$$

证明：

$$\lim_{n\to\infty} x_n \ln n = 0$$

例4 设$a > 0, b > a+1$,证明

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+1}{b+1} + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{a+2}{b+2} + \cdots = \frac{a}{d}$$

其中$d = b - a - 1$

证明：

记$a_n = \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}, \qquad A_n = a_n(a+n+1)$,则

$$A_{n-1} - A_n = a_n(b-a-1) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots); \qquad A_{-1} = a$$

令$a_{-1} = 1$

从$n = 0$到$n = N$求和，我们有(记$S_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$)

$$a - a_N = A_{-1} - A_N = (b-a-1)\sum_{n=0}^{N} a_n = (b-a-1)S_{N+1}$$

因此可得

$$a\left(1 - \frac{(a+1)\cdots(a+N)}{b(b+1)\cdots(b+N)}\right) = (b-a-1)S_{N+1}$$

从而可知

$$\lim_{N\to\infty} S_{N+1} = \frac{a}{b-a-1} = \frac{a}{d}$$

□

变式：设$a > 0, b > a+2$,则

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)} = \frac{(b-1)}{(b-a-1)(b-a-2)}$$

证明：由上面结论可知

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)} = 1 + \frac{a}{b-a-1} = \frac{b-1}{b-a-1}$$

以$a+1$代a则上式变为

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)} = 1 + \frac{a}{b-a-1} = \frac{b-1}{b-a-2}$$

两式相减(第二个减去第一个)

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$$
$$=\frac{b-1}{b-a-2}-\frac{b-1}{b-a-1}=\frac{b-1}{(b-a-1)(b-a-2)}$$

□

例5 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{0\le x<+\infty}\left|e^{-x}-\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}\right|\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

证明： 记

$$f(x)=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}-e^{-x}$$

易见$f(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,从而有一数$x_n>0$满足

$$|f(x_n)|=\max_{0\le x<+\infty}|f(x)|>0$$

则应有

$$f'(x_n)=0$$

由上面两式可得

$$e^{-x_n}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{x_n^k}{k!}}{\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x_n^k}{k!}\right)^2}$$

于是

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x_n^k}{k!}}-e^{-x_n}=\frac{x_n^n}{n!\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x_n^k}{k!}\right)^2}$$
$$<\frac{x_n^n}{n!\left[\frac{1}{n!}+\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{2!(n-2)!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right]x_n^n}$$
$$=\frac{1}{2^n}$$

因此得到

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\max_{0\le x<+\infty}\left|e^{-x}-\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}\right|\right)^{\frac{1}{n}}\le\frac{1}{2}$$

另一方面，取$y_n=\dfrac{n}{2}$,则

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{y_n^k}{k!}}-e^{-y_n} &= \frac{e^{y_n}-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{y_n^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{y_n^k}{k!}e^{y_n}} \\
&= \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{y_n^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{y_n^k}{k!}e^{y_n}} \\
&> \frac{\frac{y_n^{n+1}}{(n+1)!}}{e^{2y_n}}=\frac{n^{n+1}}{(n+1)!e^n2^{n+1}}
\end{aligned}
$$

由Striling公式知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{e}$易得

$$
\liminf_{n\to\infty}\left(\max_{0\le x<+\infty}\left|e^{-x}-\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}\right|\right)^{\frac{1}{n}}\ge\frac{1}{2}
$$

所以

$$
\lim_{n\to\infty}\left(\max_{0\le x<+\infty}\left|e^{-x}-\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}\right|\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}
$$

□