第十届清疏竞赛班非数学类 21

微分方程

第九届非数学类 18(没有视频)可以作为训练

课内的微分方程方法复习课本,包括 Bernouli,欧拉方程,齐次方程等

应试角度, 二阶足以, 高阶当然也有类似的结果，考试绝不会考, 平时需要的时候查即可.

高阶线性微分方程的常数变易法,

对于$y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$

先求出齐次通解$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$

常数变易,$y(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$

把$y(x)$代入原方程, 并加上条件$c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)=0$

解出$c_1(x),c_2(x)$,这样得到的$y(x)$就是我们的解。

例子：求解$y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$

解：先求齐次通解：$y''+y=0\Rightarrow y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$

常数变易：$y(x)=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$

直接承认$c_1'\cos x+c_2'\sin x=0$

$$y'=c_1'\cos x-c_1\sin x+c_2'\sin x+c_2\cos x=-c_1\sin x+c_2\cos x$$

$$y''=-c_1'\sin x-c_1\cos x+c_2'\cos x-c_2\sin x$$

$$y''+y=-c_1'\sin x+c_2'\cos x=\frac{1}{\cos x}$$

$$\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1'\\ c_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{\cos x}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}c_1'\\ c_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{\cos x}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}c_1'\\ c_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\tan x\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow c_1=\ln|\cos x|+C_1,c_2=x+C_2$$

因此$y(x)=(\ln|\cos x|+C_1)\cos x+(x+C_2)\sin x$

对于$y''+ay'+by=f(x),a,b$是常数

(1):算出$y(0)=0,y'(0)=1$的齐次解$g(x)$

(2):算出非齐次特解$\int_0^x g(x-t)f(t)dt$

则解为:$y(x)=$齐通$+\int_0^x g(x-t)f(t)dt$

例子：$y''+3y'+2y=f(x)$,已知f的信息,如何得到解的信息？
例如如此出题：
设$y(x)\in C^2[0,+\infty)$使得$y''+3y'+2y$有界，证明y有界.
证明：
记$f(x)=y''(x)+3y'(x)+2y(x)$,那么：
齐次通解:$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$.
$y(0)=0,y'(0)=1\Rightarrow c_1+c_2=0,-c_1-2c_2=1\Rightarrow c_1=1,c_2=-1$
因此非齐次解为$y^*(x)=\int_0^x\left(e^{-(x-y)}-e^{-2(x-y)}\right)f(y)dy$
$\left|y^*(x)\right|\leq M\int_0^x\left(e^{-(x-y)}-e^{-2(x-y)}\right)dy=M\int_0^x\left(e^{-y}-e^{-2y}\right)dy$
因此$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+y^*(x)$有界.

$f\in C\left(\mathbb{R}\right)$且有界,并设$\int_{-\infty}^{0} f\left(x\right)e^{x}dx$收敛，证明：

$\left(1\right)$: $y'+y=f\left(x\right)$只有一个解在$\mathbb{R}$上有界;

$\left(2\right)$: 若$f\left(x\right)$以$T>0$为周期, 证明上述方程只有一个解以T为周期.

证明

$\left(1\right)$: 若有两个解y_1,y_2都在$\mathbb{R}$上有界, 那么$\left(y_1-y_2\right)'+\left(y_1-y_2\right)=0$

则$y_1-y_2=ce^{-x}$,y_1-y_2有界暗示$c=0$，从而$y_1=y_2$.

现在只需给出一个有界解:

注意到通解$y\left(x\right)=ce^{-x}+\int_{-\infty}^{x}e^{y-x}f\left(y\right)dy$

注意到$\left|\int_{-\infty}^{x}e^{y-x}f\left(y\right)dy\right|\le\sup\left|f\right|\cdot\int_{-\infty}^{x}e^{y-x}dy=\sup\left|f\right|$

因此可取$c=0$此时我们就完成了证明.

$\left(2\right)$:

虽然本题不用，但是如下技巧仍然需要掌握.

$y'\left(x+T\right)+y\left(x+T\right)=f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$, 即$y\left(x+T\right)$也满足微分方程.

配合解的存在唯一性定理是重要技巧.

回到原题：

首先周期为T的解一定有界, 由$\left(1\right)$知周期解唯一且恰好是

$y\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x}e^{y-x}f\left(y\right)dy$, 下面验证$y$的周期是$T$.

$y\left(x+T\right)=\int_{-\infty}^{x+T}e^{y-x-T}f\left(y\right)dy=\int_{-\infty}^{x}e^{y-x}f\left(y+T\right)dy=\int_{-\infty}^{x}e^{y-x}f\left(y\right)dy=y\left(x\right)$

因此有唯一周期解.

y和y的各阶导数齐次类型$\left(\text{换元}y=e^{\int zdx}\right)$

例：$x^2yy''=\left(y-xy'\right)^2$.

证明：

令$y=e^{\int zdx},y'=ze^{\int zdx},y''=z'e^{\int zdx}+z^2e^{\int zdx}$

$x^2\left(z'+z^2\right)e^{2\int zdx}=\left(1-xz\right)^2e^{2\int zdx}$,因此

$x^2\left(z'+z^2\right)=\left(1-xz\right)^2=1+x^2z^2-2xz$

故$x^2z'=1-2xz\Rightarrow z'+\frac{2}{x}z=\frac{1}{x^2}\Rightarrow z=\frac{1}{x}+\frac{C}{x^2}$

故$y=e^{\int\frac{1}{x}+\frac{C}{x^2}dx}=c_2xe^{-\frac{C_1}{x}}$.

黎卡题微分方程(猜不出解就无法计算！！)：

$y'=p\left(x\right)y^2+q\left(x\right)y+r\left(x\right)$.

猜解y_0,做换元$z=y-y_0$变$bernouli$

例:$\frac{1}{e^x}y'+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$

$y'=-e^xy^2+2e^{2x}y+e^x-e^{3x}$

猜出$y_0=e^x$是一个特解, 那么做$y=z+e^x$

$y'=z'+e^x$

从而

$z'+e^x=-e^x\left(z+e^x\right)^2+2e^{2x}\left(z+e^x\right)+e^x-e^{3x}$

$=\left(-e^xz+e^{2x}\right)\left(z+e^x\right)+e^x-e^{3x}$

$=-e^xz^2+e^x$

故$z'=-z^2e^x$

$\frac{1}{z}=e^x+C\Rightarrow z=\frac{1}{e^x+C}$

故$y=\frac{1}{e^x+C}+e^x$

克莱罗微分方程：

$y = xy' + f\left(y'\right)$的通解为$y = Cx + f\left(C\right)$, 以及还有一个奇解.

例：$y = xy' + \dfrac{1}{y'}$

解：

令$p = y'$, 则$y = xp + \dfrac{1}{p}$, $p = p + xp' - \dfrac{p'}{p^2}$

因此$xp' - \dfrac{p'}{p^2} = 0 \Rightarrow p' = 0$或者$x = \dfrac{1}{p^2}$

对于第一种情况, 相当于$y'' = 0$, 此时$y = Cx + b$, 带回原方程

$Cx + b = Cx + f\left(C\right) \Rightarrow b = f\left(C\right)$

因此通解为$y = Cx + f\left(C\right)$.

此外还有一个奇解：

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{p} \\ x = \dfrac{1}{p^2} \end{cases} \Rightarrow \text{奇解} y^2 = 4x.$$

对于一般的变系数二阶线性微分方程$y''+a(x)y'+b(x)y=0$

一般来说只能先猜出一解,然后用降次方法求另外一解,我们有如下降次方法:

降次方法1：刘维尔公式

已知一非0特解y_1,则另一线性无关的特解是$y_1\int\frac{e^{\int -a(t)dt}}{y_1^2}dx.$

降次方法2：

习题：在方程中如果令$u=\frac{y'}{y}$,那么方程转化为一阶黎卡提方程.

降次方法3：

设y_1,y_2是无关解,定义郎基行列式$w(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

习题：验证$w'+pw=0$

可解一阶$w'+pw=0$,然后如果已知一非0解y_1,然后另外一解自然就给出了.

法3是法1的证明.

例子：

$y''-2xy'-2y=0$满足$y(0)=0, y'(0)=1$的解

显然：e^{x^2}是一个非0解, 他的线性无关的解为

$$e^{x^2}\int\frac{e^{\int 2tdt}}{e^{2z^2}}dz=e^{x^2}\int\frac{e^{z^2}}{e^{2z^2}}dz=\int e^{x^2-z^2}dz.$$

因此通解为$y(x)=c_1e^{x^2}+c_2\int_0^x e^{x^2-z^2}dz$

因此$y(x)=c_2\int_0^x e^{x^2-z^2}dz$

含参积分求导公式：

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)}f(x,t)dt=b'(x)f(x,b(x))-a'(x)f(x,a(x))+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt.$$

因此$y'(x)=c_2+c_2\int_0^x\frac{\partial}{\partial x}e^{x^2-z^2}dz=c_2+2c_2\int_0^x xe^{x^2-z^2}dz$

因此$y(x)=\int_0^x e^{x^2-z^2}dz$

对于$y=f\left(x,y'\right)$,可令$p=y'$，两边对x求导，之后就是x,p的微分方程

例子：

$$y=\left(y'\right)^2-xy'+\frac{x^2}{2}$$

解：

$$y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}$$

$$p=2pp'-p-xp'+x\Rightarrow 2p-x=\left(2p-x\right)p'$$

因此$p'=1$或者$2p-x=0$

对于$p'=1$,则$y=\dfrac{x^2}{2}+ax+b$带回原方程有$b=a^2$

因此通解为$y=\dfrac{x^2}{2}+ax+a^2$.

对于$2p-x=0$,$\begin{cases}x=2p\\ y=p^2\text{，奇解为}y=\dfrac{x^2}{4}\end{cases}$

$x=f\left(y,y'\right)$, 记$p=y'$, 两边对y求导得关于y,p的方程

例：

$\left(y'\right)^3+2xy'-y=0$

解：

$$x=\frac{y-\left(y'\right)^3}{2y'}=\frac{y-p^3}{2p}=\frac{y}{2p}-\frac{p^2}{2}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2p}+\frac{y}{2}\frac{d\left(\frac{1}{p}\right)}{dy}-p\frac{dp}{dy}=\frac{1}{2p}-\frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}-p\frac{dp}{dy}$$

从而$\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}-\frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}-p\frac{dp}{dy}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}=\frac{y}{2p}\frac{dp}{dy}+p^2\frac{dp}{dy}$

$\Leftrightarrow -p=y\frac{dp}{dy}+2p^3\frac{dp}{dy}\Leftrightarrow-\frac{1}{p}=\frac{1}{y+2p^3}\frac{dy}{dp}$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dp}+\frac{y}{p}=-2p^2$

这是一阶线性微分方程，解得$y=\frac{c}{p}-\frac{p^3}{2}$

$$x=\frac{y}{2p}-\frac{p^2}{2}=\frac{\frac{c}{p}-\frac{p^3}{2}}{2p}-\frac{p^2}{2}=\frac{c}{2p^2}-\frac{3}{4}p^2$$

因此解为参数方程$\begin{cases}x=\frac{c}{2p^2}-\frac{3}{4}p^2\\ y=\frac{c}{p}-\frac{p^3}{2}\end{cases}$.

$F\left(x,y'\right)=0$或$F\left(y,y'\right)=0$可用参数方程表示曲线来求解.
例：

$$y^2\left(1-y'\right)=\left(2-y'\right)^2$$

解：

$$2-y'=ty,\text{则}t^2=ty-1\Rightarrow y=\frac{1+t^2}{t},y'=1-t^2$$

$$1-t^2=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{1+t^2}{t}\right)'}{x'\left(t\right)}$$

$$\text{从而}x'\left(t\right)=\frac{\left(\frac{1+t^2}{t}\right)'}{1-t^2}=-\frac{1}{t^2},\text{故}x\left(t\right)=\frac{1}{t}+C$$

$$\text{所以}\begin{cases}x=\frac{1}{t}+C\\ y=\frac{1+t^2}{t}\end{cases},\text{也即}t=\frac{1}{x-C},\text{因此通解为}y=x-C+\frac{1}{x-C}.$$

积分因子法我们省去.

杂例(作业):

$1:\frac{dy}{dx}\cdot x\ln x\cdot\sin y+\cos y\cdot\left(1-x\cos y\right)=0$的通解为.

解：$z=\cos y$,则$z'=-y'\sin y$

所以$-x\ln x\cdot z'+z\left(1-xz\right)=0$

$-x\ln x\cdot z'+z=xz^{2}$

$z'-\frac{1}{x\ln x}z=-\frac{z^{2}}{\ln x}$

这是$bernouli$微分方程, 令$u=\frac{1}{z}$,则$u'=-\frac{z'}{z^{2}}$,则

$-\frac{u'}{u^{2}}-\frac{1}{x\ln x\cdot u}=-\frac{1}{u^{2}\ln x}$

$\Leftrightarrow u'+\frac{u}{x\ln x}=\frac{1}{\ln x}.$

解得$u=\frac{c+x}{\ln x}\Rightarrow z=\frac{\ln x}{x+c}\Rightarrow \cos y=\frac{\ln x}{x+c}$

$2:\frac{d^{2}y}{dx^{2}}+\frac{d^{2}x}{dy^{2}}=0.$

解:$\frac{d^{2}x}{dy^{2}}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{d\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

故$\frac{d^{2}x}{dy^{2}}=-\frac{y''}{\left(y'\right)^{3}}$,因此$y''-\frac{y''}{\left(y'\right)^{3}}=0\Rightarrow y''=0$或者$y'=1$

故$y=ax+b$

$3:-xy''y^{2}=y'\left(xy'-y\right)^{2}.$

$4:y''+\left(x+e^{2y}\right)\left(y'\right)^{3}=0.$

$5:x\left(y'\right)^{2}+\left(y-2x^{2}\right)y'-2xy=0.$