第十届清疏竞赛班非数学类 22
解析几何

课后看第九届非数学类 19,没有视频，只有 pdf

二次曲面分类,直线平面位置关系等应该熟记,见教材.

柱面求法（也是柱面定义）：

求准线是$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=0 \end{cases}$, 母线方向$(5,3,2)$的柱面方程.

解：

第一步：在准线上任取点$\begin{cases} x_0^2+y_0^2=25 \\ z_0=0 \end{cases}$,

过点(x_0,y_0,z_0)以方向$(5,3,2)$做直线得$\dfrac{x-x_0}{5}=\dfrac{y-y_0}{3}=\dfrac{z-z_0}{2}$.

第二步：消去参数(x_0,y_0,z_0)即得柱面方程.

$$\frac{x-x_0}{5}=\frac{y-y_0}{3}=\frac{z-z_0}{2}=t\Rightarrow x=5t+x_0,y=3t+y_0,z=2t+z_0$$

$$\Rightarrow x-5t=x_0,y-3t=y_0,z=2t\Rightarrow x-\frac{5z}{2}=x_0,y-\frac{3z}{2}=y_0$$

$$\Rightarrow\left(x-\frac{5z}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3z}{2}\right)^2=25.$$

求半径为2，对称轴为$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$的圆柱面方程

证明：

设圆柱面上的点$\left(x_0,y_0,z_0\right)$,所以用点到直线距离的求法

$\left(0,0,0\right)$在直线上,考虑两点连线$\left(x_0,y_0,z_0\right)$,

则距离为$=\frac{\left|\left(x_0,y_0,z_0\right)\times\left(2,3,4\right)\right|}{\left|\left(2,3,4\right)\right|}=2$,因此

$$\left|\left(x_0,y_0,z_0\right)\times\left(2,3,4\right)\right|=\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix}\right\|$$

$$=\left|\left(4y_0-3z_0\right)i-\left(4x_0-2z_0\right)j+\left(3x_0-2y_0\right)k\right|$$

$$=\sqrt{\left(4y_0-3z_0\right)^2+\left(4x_0-2z_0\right)^2+\left(3x_0-2y_0\right)^2}=2\sqrt{2^2+3^2+4^2}$$

因此所求柱面方程为$\left(4y-3z\right)^2+\left(4x-2z\right)^2+\left(3x-2y\right)^2=116.$

以知圆柱面三条母线为$x=y=z, x+1=y=z-1, x-1=y+1=z$,
求这个圆柱面方程.

证明：注意母线方向是$(1,1,1)$,过$(0,0,0)$做母线的垂面$x+y+z=0$
则垂面分别和三个直线交于$(0,0,0),(-1,0,1),(1,-1,0)$.
下求过这三个点的圆的圆心.
设圆心为(a,b,c),则

$$a^2+b^2+c^2=(a+1)^2+b^2+(c-1)^2=(a-1)^2+(b+1)^2+c^2$$

$$2c-1=c^2-(c-1)^2=(a+1)^2-a^2=2a+1$$

$$2a-1=2b+1$$

因此$(a,b,c)=(0,-1,1)$

因此半径$=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$,

方法1：因此用上一题的方法

圆柱到中心轴$\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$的半径为$\sqrt{2}$,因此可求出
圆柱面为$(y-z+2)^2+(z-x-1)^2+(x-y-1)^2=6$.

方法2:

准线:$\begin{cases} x^2+(y+1)^2+(z-1)^2=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$和方向$(1,1,1)$

可以用第一题方法计算柱面方程.

题型：证明下述曲面为柱面.

$$\left(y-z+2\right)^2+\left(z-x-1\right)^2+\left(x-y-1\right)^2=6.$$

通法：

随便取一个平面和柱面相交, 其都是准线.

准线：$\begin{cases} z=0 \\ \left(y-z+2\right)^2+\left(z-x-1\right)^2+\left(x-y-1\right)^2=6. \end{cases}$

猜测$\left(a,b,c\right)$是母线方向, 则求出柱面.

即：

$$\begin{cases} z_0=0 \\ \left(y_0-z_0+2\right)^2+\left(z_0-x_0-1\right)^2+\left(x_0-y_0-1\right)^2=6. \end{cases}$$

$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}=t$,消去参数$x_0,y_0,z_0$

因此$x_0=x-at,y_0=y-bt,z_0=z-ct$

$$\left(y_0+2\right)^2+\left(x_0+1\right)^2+\left(x_0-y_0-1\right)^2=6,z=ct$$

$$\left(y-bt+2\right)^2+\left(x-at+1\right)^2+\left(x-at-y+bt-1\right)^2=6,z=ct$$

$$\left(y-\frac{bz}{c}+2\right)^2+\left(x-\frac{az}{c}+1\right)^2+\left(x-\frac{az}{c}-y+\frac{bz}{c}-1\right)^2=6,$$

取$b=c=a$,恰好是$\left(y-z+2\right)^2+\left(z-x-1\right)^2+\left(x-y-1\right)^2=6$

因此我们证明了所求曲面为柱面.

锥面的求法（也是定义）：

求顶点在原点，准线为$\begin{cases} x^2 = 2py \\ z = k \end{cases}$的锥面方程，这里$k, p \neq 0$.

证明：

第一步：任取准线上的点$\begin{cases} x_0^2 = 2py_0 \\ z_0 = k \end{cases}$，连接点$(x_0, y_0, z_0)$和顶点$(0,0,0)$得到母线方向$(x_0, y_0, z_0)$.

第二步：

母线：$\dfrac{x-0}{x_0} = \dfrac{y-0}{y_0} = \dfrac{z-0}{z_0} = t$，当$(x_0, y_0, z_0)$遍历整个准线即得锥面方程即消去参数$(x_0, y_0, z_0)$.

则$x_0 = \dfrac{x}{t}, y_0 = \dfrac{y}{t}, z_0 = \dfrac{z}{t} = k \Rightarrow x_0 = \dfrac{x}{t}, y_0 = \dfrac{y}{t}, t = \dfrac{z}{k}$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{t^2} = 2p\dfrac{y}{t} \Rightarrow t = \dfrac{x^2}{2py} = \dfrac{z}{k} \Rightarrow kx^2 - 2pzy = 0.$

求顶点为$(1,2,3)$，轴与平面$2x+2y-z+1=0$垂直，

母线和轴夹角为$\dfrac{\pi}{6}$的圆锥面方程

解：

轴线方程：$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$，设圆锥上的点为$(x_0, y_0, z_0)$

连接顶点得(x_0-1, y_0-2, z_0-3)

因此$\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\left|(x_0-1, y_0-2, z_0-3)\cdot(2,2,-1)\right|}{\left|(x_0-1, y_0-2, z_0-3)\right|\cdot\left|(2,2,-1)\right|}$

平方即得$4(2x+2y-z-3)^2 = 27\left[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\right]$

求顶点$(1,2,4)$，轴与平面$2x+2y+z=0$垂直且经过点$(3,2,1)$的圆锥面方程.

解：轴线方程:$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{1}$,连接点$(3,2,1)$和$(1,2,4)$

得到母线方向$(2,0,-3)$，则母线方向和轴夹锐角

$\arccos\dfrac{\left|(2,0,-3)\cdot(2,2,1)\right|}{\left|(2,0,-3)\right|\cdot\left|(2,2,1)\right|}=\arccos\dfrac{1}{3\sqrt{13}}$, 运用上一题的方法

可算出锥面$13(2x+2y+z-10)^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2$.

求经过点$(1,3,6)$且与三个坐标平面相切的球面方程.

解:

设球为$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

因为相切,则$a=b=c=r$,所以

$(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$.

代入$(1,2,3)$得$r=5-\sqrt{2}$.

求过点$(2,-4,3)$且包含圆$\begin{cases}x^2+y^2=5\\ z=0\end{cases}$的球面方程

证明:

球心应该在过圆的圆心的垂线上,因此球心$(0,0,z_0)$

因此球心到圆上任何一点$(x,y,0)$距离应该一致=球的半径

于是由$(2,-4,3)$在球上,因此

$(0-2)^2+(0+4)^2+(z_0-3)^2=5+z_0^2\Rightarrow z_0=4$

因此半径$=\sqrt{5+4^2}=\sqrt{21}$

因此所求的球方程为$x^2+y^2+(z-4)^2=21$.

旋转曲面的求法$\left(\text{定义}\right)$:

求$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$绕$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$旋转一周的旋转曲面方程.

解:

第一步:

在旋转轴上任取一点$\left(0,0,1\right)$,

对于旋转曲线上的点$\frac{x_0-1}{1}=\frac{y_0+1}{-1}=\frac{z_0-1}{2}=t$

过此点做旋转轴垂面$1\left(x-x_0\right)+\left(-1\right)\left(y-y_0\right)+2\left(z-z_0\right)=0$

连接此点和$\left(0,0,1\right)$,以$\left(0,0,1\right)$为球心作球

$x^2+y^2+\left(z-1\right)^2=x_0^2+y_0^2+\left(z_0-1\right)^2$

第二步:当$\left(x_0,y_0,z_0\right)$遍历整个旋转曲线即得旋转曲面方程,

即消去参数$\left(x_0,y_0,z_0\right)$.

$x_0=t+1,y_0=-t-1,z_0=2t+1$

$\Rightarrow x^2+y^2+\left(z-1\right)^2=\left(t+1\right)^2+\left(-t-1\right)^2+\left(2t+1-1\right)^2$

$x-y+2z=x_0-y_0+2z_0=2t+2+2\left(2t+1\right)=6t+4$

$\Rightarrow t=\frac{x-y+2z-4}{6},x^2+y^2+\left(z-1\right)^2=2\left(t+1\right)^2+4t^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+\left(z-1\right)^2=2\left(\frac{x-y+2z-4}{6}+1\right)^2+4\left(\frac{x-y+2z-4}{6}\right)^2$

记忆:

平面曲线绕直线$\left(\text{若不穿过}\right)$旋转一周表面积:

求曲线L上点到旋转轴距离$d\left(x,y\right)$

然后计算$\int_L 2\pi d\left(x,y\right)ds$

平面区域D绕直线$\left(\text{若不穿过}\right)$旋转一周体积:

求区域D上点到旋转轴距离$d\left(x,y\right)$,计算

$\iint_D 2\pi d\left(x,y\right)dxdy.$

例子：

$y=\frac{1}{3}x^3+2x, 0\le x\le 1$绕$y=\frac{4}{3}x$旋转一周表面积为.

$$表面积S=\int_L 2\pi d\left(x,y\right)ds=\int_L 2\pi\frac{\left|y-\frac{4}{3}x\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}ds$$

$$=\int_0^1 2\pi\frac{\left|y-\frac{4}{3}x\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}\sqrt{1+\left(x^2+2\right)^2}dx$$

$$=\int_0^1 2\pi\frac{\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{4}{3}x}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}\sqrt{1+\left(x^2+2\right)^2}dx$$

$$=\frac{2\pi\sqrt{10}-\pi\sqrt{5}}{3}$$

$y=x^2, y=mx\left(m>0\right)$在第一象限围成区域绕$y=mx$旋转一周体积.

解：

$$V=2\pi\iint d\left(x,y\right)dxdy=2\pi\iint\frac{mx-y}{\sqrt{1+m^2}}dxdy$$

$$=2\pi\int_0^m dx\int_{x^2}^{mx}\frac{mx-y}{\sqrt{1+m^2}}dy=\frac{2\pi}{2\sqrt{m^2+1}}\int_0^m x^2\left(x-m\right)^2dx$$

$$=\frac{\pi m^5}{30\sqrt{m^2+1}}.$$

求$\left(x-2\right)^2+y^2=1$绕y轴旋转一周所得旋转体表面积和体积.

$S=2\pi\int_{\left(x-2\right)^2+y^2=1}xds=2\pi\int_{\left(x-2\right)^2+y^2=1}\left(x-2+2\right)ds=4\pi\int_{\left(x-2\right)^2+y^2=1}ds=8\pi^2,$

$V=2\pi\iint_{\left(x-2\right)^2+y^2\le 1}xdxdy=2\pi\iint_{\left(x-2\right)^2+y^2\le 1}\left(x-2+2\right)dxdy$

$=4\pi\iint_{\left(x-2\right)^2+y^2\le 1}dxdy=4\pi^2.$