

全国大学生数学竞赛非数学类模拟七

清疏竞赛考研数学

2023 年 10 月 9 日

摘要

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}, \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

模拟试题应当规定时间独立完成并给予反馈.

1 填空题

填空题 1.1 设 $f(x)$ 连续且 $f(0) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt} =$ _____

填空题 1.2 设函数 $y = y(x)$ 由 $\int_0^x x \sin t^2 dt = \int_0^{x+y} e^{-u^2} du$ 确定, 则 $y'(0) =$ _____

填空题 1.3 曲面 $r(u, v) = (\sin u, \cos u \sin v, \sin v)$ 在点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 的切平面方程为 _____

填空题 1.4 假如 z, w 是 x, y 的连续可微函数且满足 $xw^3 + yz^2 + z^3 = -1, zw^3 - xz^3 + y^2w = 1$, 在 $(x, y, z, w) = (1, -1, -1, 1)$. 计算 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____

填空题 1.5 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$, 则 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx =$ _____

2 选择题答案区

3 解答题

解答题 3.1 计算 $\iiint_D 2xdV$ 这里 D 由 $5(z^2 + y^2) = x, x = 5$ 围成的有界区域.

解答题 3.2 设 $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R})$, $\varphi(0) = -2, \psi(0) = 1$ 且对任意一光滑闭曲线 L , 都有

$$\int_L 2[x\varphi(y) + \psi(y)]dx + [x^2\varphi(y) + 2xy^2 - 2x\varphi(y)]dy = 0.$$

(1): 求 φ, ψ .

(2): 对简单曲线 $L: (0, 0) \rightarrow (\pi, \frac{\pi}{2})$, 计算上述积分.

解答题 3.3 设 $f, g \in C^1[a, b] \cap D^2(a, b)$ 且满足 $f''(x), g''(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, 证明存在 $c \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)}{g(b) - g(a) - (b-a)g'(a)} = \frac{f''(c)}{g''(c)}.$$

解答题 3.4 设 $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是两个正数列, 证明下述结果等价.

(a): 存在正实数列 $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n}$ 都收敛.

(b): $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ 收敛.

解答题 3.5 让 $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{na_n^2}{1+(n+1)a_n}, n \geq 1$, 证明 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ 收敛并求值.

解答题 3.6 设 $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy$, 证明

(1): f 是 $[0, +\infty)$ 的递减函数且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(2): 试计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x)$.