

2013 年第四届全国大学生数学竞赛决赛

(数学类) 试卷

一、(本题 15 分) 设 A 为正常数, 直线 l 与双曲线 $x^2 - y^2 = 2(x > 0)$ 所围的有限部分的面积为 A . 证明:

(i) 所有上述 l 与双曲线 $x^2 - y^2 = 2(x > 0)$ 的截线段的中点的轨迹为双曲线.

(ii) l 总是(i)中的轨迹曲线的切线.

二、(本题 15 分) 设函数 $f(x)$, 满足条件:

1) $-\infty < a \leq f(x) \leq b < +\infty, a \leq x \leq b$;

2) 对于任意不同的 $x, y \in [a, b]$, 有 $|f(x) - f(y)| < L|x - y|$, 其中 L 是大于 0 小于 1 的常数. 设 $x_1 \in [a, b]$, 令 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$, $n = 1, 2, \dots$.

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ 存在, 且 $f(x) = x$.

三、(本题 15 分) 设 n 阶实方阵 A 的每个元素的绝对值为 2. 证明: 当 $n \geq 3$ 时,

$$|A| \leq \frac{1}{3} \cdot 2^{n+1} n!.$$

四、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 为区间 (a, b) 上的可导函数. 对于 $x_0 \in (a, b)$, 若存在 x_0 的邻域 U 使得任意的 $x \in U \setminus \{x_0\}$, 有

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的凹点. 类似地, 若存在 x_0 的邻域 U 使得任意的 $x \in U \setminus \{x_0\}$, 有

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的凸点. 证明: 若 $f(x)$ 为区间 (a, b) 上的可导函数, 且不是一次函数, 则 $f(x)$ 一定存在凹点或凸点.

五、(本题 20 分) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为实对称矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 记

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -x_3 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ -x_4 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

若 $|A| = -12$, A 的特征值之和为 1, 且 $(1, 0, -2)^T$ 为 $(A^* - 4I)x = 0$ 的一个解. 试给出一

正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ 使得 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 化为标准型.

六、(本题 20 分) 设 R 为实数域, n 为给定的自然数, A 表示所有 n 次首一实系数多项式组的几何. 证明:

$$\inf_{b \in R, a > 0, P(x) \in A} \frac{\int_b^{b+a} |P(x)| dx}{a^{n+1}} > 0.$$