第十届清疏竞赛班非数学类 5:

二重求和换序法.

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}a_{nk}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{m}a_{nk}$$

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=k}^{m}a_{nk}$$

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}=\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{nk}\chi_{\{1,2,\cdots,n\}}(k)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m}a_{nk}\chi_{\{1,2,\cdots,n\}}(k)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=k}^{m}a_{nk}$$

其中$\chi_{\{1,2,\cdots,n\}}(k)\triangleq\begin{cases}1,k\in\{1,2,\cdots,n\}\\0,k\notin\{1,2,\cdots,n\}\end{cases}$

强求通项(重要考点):

(竞赛真题)$a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(n+1)(a_n+1)},n\geq1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n$

证明：

$$(n+1)a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}\Rightarrow\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}=\frac{a_n+1}{a_n}=1+\frac{1}{a_n}$$

$$\frac{1}{(n+1)!a_{n+1}}=\frac{1}{(n+1)n!a_{n+1}}=\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!a_n}$$

$$\frac{1}{(n+1)!a_{n+1}}-\frac{1}{n!a_n}=\frac{1}{n!}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)!a_{k+1}}-\frac{1}{k!a_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(n+1)!a_{n+1}}-1=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\Rightarrow(n+1)!a_{n+1}=\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}}\to e^{-1}$$

$a_1 \in (0,1), a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}}$, 求$\lim\limits_{n\to\infty} a_1 a_2 \cdots a_n$

证明：

$\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos(\theta)}{2}}$, 我们选取$\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得

$a_1 = \cos\theta, a_2 = \cos\dfrac{\theta}{2}, a_3 = \cos\dfrac{\theta}{2^2}, \cdots, a_n = \cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \cos\theta \cos\frac{\theta}{2} \cdots \cos\frac{\theta}{2^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}}{2\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-3}}\sin\frac{\theta}{2^{n-3}}}{2^2\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin 2\theta}{2^n \sin\frac{\theta}{2^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin 2\theta}{2^n \frac{\theta}{2^{n-1}}} = \frac{\sin(2\theta)}{2\theta} = \frac{\sin(2\arccos a_1)}{2\arccos a_1}$$

$$= \frac{2a_1 \sin\arccos a_1}{2\arccos a_1} = \frac{a_1 \sin\arccos a_1}{\arccos a_1} = \frac{a_1\sqrt{1-a_1^2}}{\arccos a_1}$$

$x_1=\sqrt{5}, x_{n+1}=x_n^2-2$, 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}}$

分析:双曲函数在同济上有,需要记熟,并知道他有和三角函数类似的性质

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\tanh x=1$$

注意到$\cos x=\frac{\sqrt{5}}{2}$在$\mathbb{R}$上无解,只能推测类似的双曲函数可以做到.

证明:

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=2\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2-1=\frac{e^x+e^{-x}+2}{2}-1$$

$$\cosh x=2\cos^2 h\frac{x}{2}-1,$$

$$\sinh(2x)=2\sinh x\cosh x$$

现在选取$\theta\in(0,+\infty)$,使得$\cosh\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$x_1=2\cosh\theta, x_2=4\cosh^2\theta-2=2\left(2\cos^2 h\theta-1\right)=2\cosh(2\theta)$$

$\cdots$

$$x_n=2\cosh\left(2^{n-1}\theta\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cosh(\theta)\cosh(2\theta)\cdots\cosh\left(2^{n-1}\theta\right)}{2\cosh\left(2^n\theta\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sinh\theta\cosh(\theta)\cosh(2\theta)\cdots\cosh\left(2^{n-1}\theta\right)}{2\sinh\theta\cosh\left(2^n\theta\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\sinh 2\theta\cosh(2\theta)\cosh\left(2^2\theta\right)\cdots\cosh\left(2^{n-1}\theta\right)}{2\sinh\theta\cosh\left(2^n\theta\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\sinh 2^2\theta\cosh\left(2^2\theta\right)\cdots\cosh\left(2^{n-1}\theta\right)}{2\sinh\theta\cosh\left(2^n\theta\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sinh 2^n\theta}{2\sinh\theta\cosh\left(2^n\theta\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tanh 2^n\theta}{2\sinh\theta}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sinh\theta}=1$$

习题：$a_{n+1}=b_n-\dfrac{na_n}{2n+1}$,若$b_n$收敛,则$a_n$收敛.

(竞赛真题压轴题)

$a_n,b_n>0,a_1=b_1=1,b_n=a_nb_{n-1}-2,n\geq 2,b_n$有界,求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1a_2\ldots a_n}$,

解：

待定$c_n,c_1=1$,然后

$c_nb_n=c_na_nb_{n-1}-2c_n$,期望可以裂项$c_na_n=c_{n-1}$

$$\Rightarrow\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{1}{a_n}\Rightarrow c_n=\frac{1}{a_1a_2\ldots a_n}$$

$$c_nb_n-c_{n-1}b_{n-1}=-2c_n,n\geq 2$$

$$c_nb_n-1=-2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_1a_2\ldots a_k}$$

$$c_nb_n-3=-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\ldots a_k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\ldots a_k}=\frac{3-c_nb_n}{2}\leq\frac{3}{2}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2\ldots a_k}\text{存在}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_1a_2\ldots a_n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}c_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_1a_2\ldots a_n}=0,$$

因此$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_1a_2\ldots a_k}=\dfrac{3}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\lambda a_{n-1}\right)=a,\left|\lambda\right|<1,$ 计算$\lim_{n\to\infty}a_n$

分析：

虽然有其他的方法,但我们来试试强求通项的方法

证明：

$\lambda=0,$ 显然有$\lim_{n\to\infty}a_n=a,$ 当$\lambda\neq0$时

记$b_n=a_n-\lambda a_{n-1}\Rightarrow\frac{b_n}{\lambda^n}=\frac{a_n-\lambda a_{n-1}}{\lambda^n}=\frac{a_n}{\lambda^n}-\frac{a_{n-1}}{\lambda^{n-1}},n\geq1$

因此$\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{\lambda^k}=\frac{a_n}{\lambda^n}-a_0\Rightarrow a_n=\lambda^n\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{\lambda^k}+a_0\lambda^n$

而$\lim_{n\to\infty}a_0\lambda^n=0,\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^n}}$

当$\lambda>0,$ 直接$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{n+1}}{\lambda^{n+1}}}{\frac{1}{\lambda^{n+1}}-\frac{1}{\lambda^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{1-\lambda}=\frac{a}{1-\lambda}$

当$\lambda<0,$ 对于偶子列$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{2n}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)^n}\overset{stolz}{=}\frac{a}{1-\lambda}$

对于奇子列$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2n-1}}=\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)^n}\overset{stolz}{=}\frac{a}{1-\lambda}$

因此无论如何,极限为$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{a}{1-\lambda}$

设$a_1>b_1>c_1>0$,定义

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n+c_n}{3},b_{n+1}=\sqrt[3]{a_nb_nc_n},\frac{1}{c_{n+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}\right)$$

证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$且存在

高中结论:

若$a_1,a_2,\cdots,a_n>0$,则下述函数是连续递增函数

$$f\left(r\right)=\begin{cases}\left(\dfrac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}},r\neq 0\\ \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},r=0\end{cases}$$

其中连续性的证明留作习题,递增可以直接记忆

其中对$r_2\neq r_1,f\left(r_2\right)=f\left(r_1\right)$的充分必要条件是所有$a_1,a_2,\cdots,a_n$相同.

证明:

由幂平均不等式,我们知道$a_n\geq b_n\geq c_n,n=1,2,\cdots$

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n+c_n}{3}\leq\frac{a_n+a_n+a_n}{3}=a_n$$

$$c_{n+1}=\frac{3}{\left(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{c_n}\right)}\geq\frac{3}{\left(\dfrac{1}{c_n}+\dfrac{1}{c_n}+\dfrac{1}{c_n}\right)}=c_n$$

故$c_1\leq\cdots c_n\leq c_{n+1}\leq a_{n+1}\leq a_n\cdots\leq a_1$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n,\lim\limits_{n\to\infty}c_n$存在

$$a_{n+1}-c_{n+1}\leq\frac{a_n+b_n+c_n}{3}-c_n=\frac{a_n-c_n+b_n-c_n}{3}\leq\frac{2}{3}\left(a_n-c_n\right)$$

所以$a_{n+1}-c_{n+1}\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\left(a_1-c_1\right)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-c_n\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$

由夹逼准则我们有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$.

结论:

闭区间套定理:

设I_n是一列递减$\left(I_{n+1}\subset I_n\right)$闭区间，则

(1)：必然有点属于每一个I_n,

(2)：若还有$\lim\limits_{n\to\infty}\left|I_n\right|=0$,则存在唯一一点属于每一个$I_n$.

回到原题：

$\left[c_n, a_n\right]$构成递减闭区间, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n - c_n\right) = 0$, 因此由闭区间套定理,

存在唯一一个点t, 使得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = t$.

设$a_1,b_1,c_1>0,$且$a_1+b_1+c_1=1,$令

$a_{n+1}=a_n^2+2b_nc_n,b_{n+1}=b_n^2+2a_nc_n,c_{n+1}=c_n^2+2a_nb_n$

求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n,\lim\limits_{n\to\infty}b_n,\lim\limits_{n\to\infty}c_n$

证明：

显然$a_n,b_n,c_n>0,$所以$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=\left(a_n+b_n+c_n\right)^2$

$\Rightarrow a_n+b_n+c_n=1,\forall n\in\mathbb{N},$

记$T_n=\max\left\{a_n,b_n,c_n\right\},S_n=\min\left\{a_n,b_n,c_n\right\}$

对n_0时，不妨设$a_{n_0}\ge b_{n_0}\ge c_{n_0}$

$a_{n_0+1}=a_{n_0}^2+2b_{n_0}c_{n_0}\le a_{n_0}^2+a_{n_0}c_{n_0}+b_{n_0}a_{n_0}=a_{n_0}$

$b_{n_0+1}=b_{n_0}^2+2a_{n_0}c_{n_0}\le a_{n_0}b_{n_0}+a_{n_0}c_{n_0}+a_{n_0}a_{n_0}=a_{n_0}$

$c_{n_0+1}=c_{n_0}^2+2a_{n_0}b_{n_0}\le c_{n_0}a_{n_0}+a_{n_0}b_{n_0}+a_{n_0}a_{n_0}=a_{n_0}$

因此$T_{n_0+1}\le T_{n_0}$

$a_{n_0+1}=a_{n_0}^2+2b_{n_0}c_{n_0}\ge a_{n_0}c_{n_0}+b_{n_0}c_{n_0}+c_{n_0}c_{n_0}=c_{n_0}$

$b_{n_0+1}=b_{n_0}^2+2a_{n_0}c_{n_0}\ge b_{n_0}c_{n_0}+a_{n_0}c_{n_0}+c_{n_0}c_{n_0}=c_{n_0}$

$c_{n_0+1}=c_{n_0}^2+2a_{n_0}b_{n_0}\ge c_{n_0}^2+a_{n_0}c_{n_0}+b_{n_0}c_{n_0}=c_{n_0}$

因此$S_{n_0+1}\ge S_{n_0}$

所以$S_1\le\cdots\le S_n\le S_{n+1}\le T_{n+1}\le T_n\le\cdots\le T_1$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}T_n,\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在

$\left|a_{n_0+1}-c_{n_0+1}\right|=\left|a_{n_0}^2+2b_{n_0}c_{n_0}-c_{n_0}^2-2a_{n_0}b_{n_0}\right|$

$=\left|\left(a_{n_0}-c_{n_0}\right)\left(a_{n_0}+c_{n_0}\right)-2b_{n_0}\left(a_{n_0}-c_{n_0}\right)\right|$

$=\left|\left(a_{n_0}-c_{n_0}\right)\left(a_{n_0}+c_{n_0}-2b_{n_0}\right)\right|$

$=\left|\left(a_{n_0}-c_{n_0}\right)\left(a_{n_0}-b_{n_0}-\left(b_{n_0}-c_{n_0}\right)\right)\right|\le\left|a_{n_0}-c_{n_0}\right|^2$

$\left|b_{n_0+1}-c_{n_0+1}\right|$

$=\left|\left(b_{n_0}-c_{n_0}\right)\left(b_{n_0}+c_{n_0}-2a_{n_0}\right)\right|$

$=\left|\left(a_{n_0}-b_{n_0}-\left(a_{n_0}-c_{n_0}\right)\right)\left(a_{n_0}-b_{n_0}+a_{n_0}-c_{n_0}\right)\right|$

$=\left(a_{n_0}-c_{n_0}\right)^2-\left(a_{n_0}-b_{n_0}\right)^2\le\left(a_{n_0}-c_{n_0}\right)^2$

$$\left|a_{n_0+1}-b_{n_0+1}\right|$$

$$=\left|a_{n_0}-b_{n_0}\right|\left|a_{n_0}+b_{n_0}-2c_{n_0}\right|$$

$$\le\left|a_{n_0}-c_{n_0}-\left(b_{n_0}-c_{n_0}\right)\right|\left|a_{n_0}-c_{n_0}+b_{n_0}-c_{n_0}\right|$$

$$=\left(a_{n_0}-c_{n_0}\right)^2-\left(b_{n_0}-c_{n_0}\right)^2\le\left(a_{n_0}-c_{n_0}\right)^2$$

综上所述,

$$T_{n+1}-S_{n+1}\le\left(T_n-S_n\right)^2\le\cdots\le\left(T_1-S_1\right)^{2^n}\le T_1{}^{2^n}$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\left(T_{n+1}-S_{n+1}\right)=0$

故$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$

$S_n\le a_n,b_n,c_n\le T_n$,由夹逼准则,我们有

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=x$,因此$3x=1\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{3}$$