全国大学生数学竞赛非数学类模拟三

清疏竞赛考研数学

2023 年 9 月 5 日

摘要

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}$

$$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\},\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}.$$

模拟试题应当规定时间独立完成并给予反馈.

$\cos(\pi n e^{\frac{1}{2n}})$

$=\cos[\pi n(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{8n^2}+o(\frac{1}{n^2})]$

$=\cos[\pi n+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8n}+o(\frac{1}{n})]$

$=(-1)^n\cos[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8n}+o(\frac{1}{n})]$

1 填空题

填空题 1.1 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\pi n\sqrt[2n]{e}\right)=$ $\underline{\quad 0 \quad}$

$u=f(x,\sin x,z)$, $g(x^2,e^{\sin x},z)=0$,

填空题 1.2 设 $u=f(x,y,z),g\left(x^2,e^y,z\right)=0,y=\sin x$, 且 f,g 都有一阶连续偏导数, $\frac{\partial g}{\partial z}\neq 0$, 则 $\frac{du}{dx}=$ $\underline{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cos x+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}}$, 其中 $\frac{dz}{dx}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}\cdot 2x+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot e^{\sin x}\cdot\cos x}{\frac{\partial g}{\partial z}}$

填空题 1.3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx=$ $\underline{\sqrt{2}\cdot\pi}$

填空题 1.4 直线 $\begin{cases}x+y-z=1\\x-y+z=-1\end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 投影直线方程为 $\underline{\begin{cases}x+y+z=0\\y-z=1\end{cases}}$

填空题 1.5 计算 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-2n-4}{n^4+4n^2+16}=$ $\underline{\frac{1}{14}}$

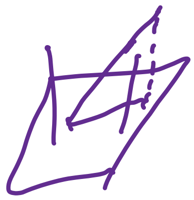
1.3: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\,dx\xlongequal{x=\arctan y^2}\int_0^{+\infty}(y+\frac{1}{y})\,d\arctan y^2$

$=\int_0^{+\infty}\frac{y+\frac{1}{y}}{1+(y^2)^2}\cdot 2y\,dy=2\int_0^{+\infty}\frac{y^2+1}{1+y^4}dy=2\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{y^2}}{y^2+\frac{1}{y^2}}dy$

$=2\int_0^{+\infty}\frac{d(y-\frac{1}{y})}{(y-\frac{1}{y})^2+2}=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2}=\sqrt{2}\pi$

2 选择题答案区

1.4：平面束：过直线的所有平面为 $\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0$



$(\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y-(\lambda-\mu)z-\lambda+\mu=0$ 和 $x+y+z=0$ 垂直.

故 $\lambda+\mu+\lambda-\mu-(\lambda-\mu)=0$，故 $\lambda=-\mu$.

不妨设 $\lambda=1,\ \mu=-1$，故 $y-z=1$ 和 $x+y+z=0$ 垂直.

1.5：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-2n-4}{n^4+4n^2+16}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-2n-4}{(n^2+4)^2-4n^2}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-2n-4}{(n^2-2n+4)(n^2+2n+4)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\frac{n-2}{n(n-2)+4}-\frac{n}{n(n+2)+4}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[0+\frac{1}{3+4}\right]=\frac{1}{14}.$$

3 解答题

解答题 3.1 设 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ 满足

$$c_1^k + c_2^k + \cdots + c_n^k > 0, k = 1, 2, \cdots.$$

令 $f(x) = \frac{1}{(1-c_1x)(1-c_2x)\cdots(1-c_nx)}$，证明 $f^{(k)}(0) > 0, \forall k = 1, 2, \cdots$.

证: $\ln f(x) = -\sum_{j=1}^{n} \ln(1-c_jx)$

$F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{1-c_jx}$, $f(0)=1$, $f'(0) = \sum_{j=1}^{n} c_j > 0$.

$f'(x) = F(x) \cdot f(x)$. $F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=0}^{+\infty} c_j^i x^i$

$= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^{i+1} \right) x^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{F^{(i)}(0)}{i!} x^i$.

故 $F^{(i)}(0) > 0$, $\forall i \geq 0$.

故若 $f^{(l)}(0) > 0$, $l = 0, 1, 2, \cdots, k$, 则

$f^{(k+1)}(x) = \sum_{l=0}^{k} C_k^l F^{(k-l)}(x) f^{(l)}(x)$.

故 $f^{(k+1)}(0) = \sum_{l=0}^{k} C_k^l F^{(k-l)}(0) f^{(l)}(0) > 0$.

由数学归纳法，我们完成了证明.

解答题 3.2 设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 满足

$$f(x)-f(y)\leqslant|x-y|,\forall x,y\in[a,b].$$

设

$$x_{n+1}=\frac{x_n+f(x_n)}{2},n=1,2,\cdots,x_1\in[a,b],$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

证: $a\leq f\leq b$，则若 $a\leq x_n\leq b$，有

$$x_{n+1}=\frac{x_n+f(x_n)}{2}\leq\frac{b+b}{2}=b$$
$$\geq\frac{a+a}{2}=a.$$

故 $a\leq x_n\leq b$，$\forall n=1,2,\cdots$

$g(x)=\frac{x+f(x)}{2}$，若 $y\geq x$，则 $g(y)-g(x)=\frac{y-x-[f(x)-f(y)]}{2}\geq 0$.

故 g 是递增.

若 $x_2\geq x_1$，则设 $x_{n+1}\geq x_n$，有 $x_{n+2}=g(x_{n+1})\geq g(x_n)=x_{n+1}$.

故 x_n 递增.

若 $x_2\leq x_1$，则设 $x_{n+1}\leq x_n$，有 $x_{n+2}=g(x_{n+1})\leq g(x_n)=x_{n+1}$.

故 x_n 递减.

无论如何，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

解答题 3.3 求三重积分

$$\iiint_D \left(1-2x^2-3y^2-z^2\right)^{\frac{1}{3}} dxdydz$$

达到最大值的 D, 并在此时计算三重积分.

解: 复习 Gamma 函数和 Beta 函数性质.

$D=\{(x,y,z) \mid 2x^2+3y^2+z^2\le 1\}$, $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi. \end{cases}$

$$\iiint_D \left(1-2x^2-3y^2-z^2\right)^{\frac{1}{3}} dxdydz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{1}{3}}\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\rho$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi \int_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{1}{3}}\rho^2\, d\rho$$

$\rho=\sqrt{t}$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{6}}\int_0^1 \frac{(1-t)^{\frac{1}{3}}t}{2\sqrt{t}}\, dt$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{3}}t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\cdot\beta\left(\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right)$$

$$\beta(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$$

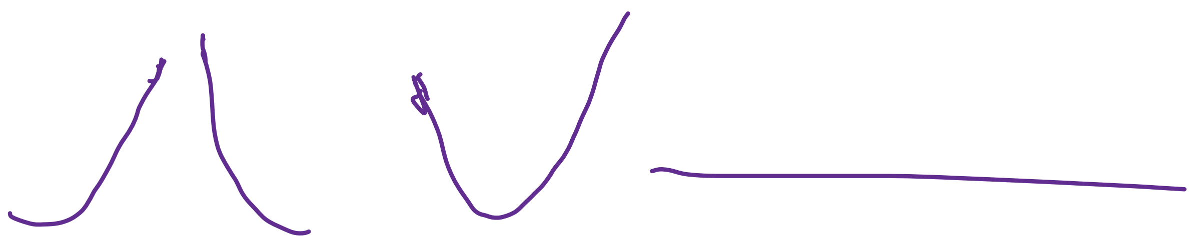
解答题 3.4 求全部二次可微函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得

$$f''(x)\cos f(x)\geqslant (f'(x))^2\sin f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明: $g(x)=\sin f(x)$, $g'(x)=f'(x)\cdot\cos f(x)$

$$g''(x)=f''(x)\cdot\cos f(x)-[f'(x)]^2\sin f(x)$$

故 $g''(x)\geq 0$.



若 $g'(x)\not\equiv 0$, 则 $\exists x_0\in\mathbb{R}$, 使 $g'(x_0)\neq 0$, 不妨设 $g'(x_0)>0$.

则 $g(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{g''(\theta)}{2}(x-x_0)^2$

$\geq g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)$, $\forall x\geq x_0$.

因此, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, 这和 $|g(x)|\leq 1$ 矛盾.

故 $g'(x)\equiv 0$, 从而 $\sin f(x)\equiv C\in[-1,1]$

故 $f(x)\equiv C'\in\mathbb{R}$. 证毕!

看到凹凸性就联想切割线放缩.

解答题 3.5 设 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ 是二次可微函数满足

$$\left(f''(x)-f(x)\right)\tan x+2f'(x)\geqslant 1.$$

(1)：求 g 使得

$$\left(g''(x)-g(x)\right)\tan x+2g'(x)=1.$$

(2)：证明

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx\geqslant \pi-2,$$

并说明等号可以成立.

(1)： 注意 $\frac{1}{\sin x}$ 满足 $(g''-g)\tan x+2g'=0$.

由刘维尔公式， $g''-g+\frac{2}{\tan x}g'=0$.

$$y_2=\frac{1}{\sin x}\int \sin^2 x\cdot e^{\int -\frac{2}{\tan x}dx}dx$$

$$=\frac{1}{\sin x}\int \sin^2 x\, e^{-2\ln\sin x}dx$$

$$=\frac{x}{\sin x}.$$

故齐通 $y=\frac{c_1}{\sin x}+\frac{c_2 x}{\sin x}$.

非齐特：法1：常数变易，自行计算.

法2：令 $g(x)\cdot\sin x=h(x)$，则 h 满足二阶常系数线性微分方程. 皆特解形式或者用卷积公式.

可得 $-\cot x$ 为特解. 故 $g(x)=\frac{c_1}{\sin x}+\frac{c_2 x}{\sin x}-\cot x$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

(2): 分析: $g(x)\cdot\sin x=c_1+c_2x-\cos x\Rightarrow\left[g(x)\cdot\sin x+\cos x\right]''=0$

故构造 $h(x)=f(x)\sin x+\cos x$.

证明：令 $h(x)=f(x)\sin x+\cos x$，则 $h'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x-\sin x$

$$h''(x)=f''(x)\sin x+2\cos x f'(x)-f(x)\sin x-\cos x$$

$$=\cos x\left[(f''-f)\tan x+2f'-1\right]\geqslant 0$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{h(x)+h(-x)}{2}dx$$

$$\geqslant\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}h(0)dx=\pi.$$

由 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2$，故 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x dx\geqslant\pi-2$. 证毕!

解答题 3.6 设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个一一映射, 证明

(1): 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nf(n)}$ 收敛. (视解说法有误)

(2): 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+f(n)}$ 是否一定发散?

(1): $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{nf(n)} \le \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{f^2(n)}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty.$

(2): 取 $f(n)=n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}$ 发散.

目标构造: $\mathbb{N}=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\{a_n,b_n\}$, $S_n=\{a_n,b_n\}$, $S_n\cap S_m=\phi$, $\forall n\neq m$.

且 $a_n+b_n\geq n^2$.

事实上: 取 $S_1=\{1,2\}$, 假设定 $S_1,S_2,\dots,S_{n-1}$ 已构造好,

那么 $\mathbb{N}-\bigcup\limits_{j=1}^{n-1}S_j$ 中存在最小元 a_n, 再取 $\mathbb{N}-\bigcup\limits_{j=1}^{n-1}S_j$ 中的元 b_n

使 $b_n>a_n$ 且 $b_n+a_n\geq n^2$. 记 $S_n=\{a_n,b_n\}$.

故我们得到了 $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 且 $S_n\cap S_m=\phi$, $\forall n\neq m$.

若 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}S_n\subsetneq\mathbb{N}$, 则 $\exists\, p\in\mathbb{N}$, $p\notin\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}S_n$. 注意 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.

a_n 总是取最小元, 因此这样的 p 不存在. 矛盾!

故 $\mathbb{N}=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\{a_n,b_n\}$.

现在取 $f(a_n)=b_n$, $f(b_n)=a_n$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+f(n)}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n+f(b_n)}$

$\leq\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty.$

故可能发散也可能收敛.