# 2018 年第九届全国大学生数学竞赛决赛
# (数学专业一、二年级）试卷

## 一、填空题(满分 20 分，每小题 5 分)

(1) 设实方阵 $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H_{n+1} = \begin{pmatrix} H_n & I \\ I & H_n \end{pmatrix}, n \geq 1$，其中 $I$ 是与 $H_n$ 同阶的单位方阵，则 $\operatorname{rank}\left(H_4\right) =$__________.

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+\tan x) - \ln(1+\sin x)}{x^3} =$______.

(3)设 $\Gamma$ 为空间曲线 $\begin{cases} x = \pi \sin\left(t/2\right) \\ y = t - \sin t \\ z = \sin 2t \end{cases}$ 从 $t = 0$ 到 $t = \pi$ 的一段，则第二型曲线积分

$\int_\Gamma e^{\sin x}(\cos x \cos y \,\mathrm{d}\, x - \sin y \,\mathrm{d}\, y) + \cos z \,\mathrm{d}\, z =$__________.

(4)设二次型 $f\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \left(x_1,\ldots,x_n\right) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 的矩阵 $A$ 为

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & \cdots & a & 1 & a \\ a & a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $n > 1, a \in R$，则 $f$ 在正交变换下的标准形为__________.

**二、(本题 15 分)** 在空间直角坐标系下，设有椭球面

$$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a,b,c > 0$$

及 $S$ 外部一点 $A(x_0, y_0, z_0)$，过 $A$ 点且与 $S$ 相切的所有直线构成锥面 $\Sigma$. 证明: 存在平面 $\Pi$，使得交线 $S \cap \Sigma = S \cap \Pi$；同时求出平面 $\Pi$ 的方程.

**三、(本题 15 分)** 设 $A, B, C$ 均为 $n$ 阶复方阵，且满足

$$AB - BA = C, \quad AC = CA, \quad BC = CB$$

(1) 证明：$C$ 是幂零方阵;

(2) 证明：$A, B, C$ 同时相似于上三角阵;

(3) 若 $C \neq 0$，求 $n$ 的最小值.

**四、(本题 20 分)** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导函数，且 $f(0)f(1) \geq 0$.求证:

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}\, x \leq 2\int_0^1 |f(x)\,|\, \mathrm{d}\, x + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}\, x$$

**五、(本题 15 分)** 设 $\alpha \in (1,2)$, $(1-x)^{\alpha}$ 的麦克劳林级数为 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $n \times n$ 实常数矩阵 $A$ 为幂零矩阵，$I$ 为单位阵. 设矩阵值函数 $G\left(x\right)$ 定义为

$$G(x) \equiv \left(g_{ij}(x)\right) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (xI + A)^k, \quad 0 \leq x < 1$$

试证对于 $1 \leq i, j \leq n$，积分 $\int_0^1 g_{ij}(x)\, \mathrm{d}\, x$ 均存在的充分必要条件是 $A^3 = 0.$

**六、(本题 15 分)** 有界连续函数 $g(t): \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 满足 $1 < g(t) < 2. x(t), t \in \mathrm{R}$ 是方程 $\ddot{x}(t) = g(t)x$ 的单调正解. 求证：存在常数 $C_2 > C_1 > 0$ 满足

$$C_1 x(t) < |\, \dot{x}(t)\, | < C_2 x(t), t \in \mathbb{R}.$$