第十届清疏竞赛班非数学类 30

分组估计,

(1)：设$a_n,b_n,c_n>0$且$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{b_n},\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{-\sqrt{2}}$收敛,$b_n=1+\frac{1}{\ln c_n}$，证明:$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

(2)：设$a_n>0,\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 证明:$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\frac{n}{n+1}}$收敛,

(3)：设$a_n>0,\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 证明:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^{\frac{1}{p}}}{n^s}$收敛,$s>1-\frac{1}{p},p>1$.

解:

(1):

记$M=\left\{n\in\mathbb{N}:a_n\le c_n^{-\sqrt{2}}\right\},N=\left\{n\in\mathbb{N}:a_n>c_n^{-\sqrt{2}}\right\}$.

对$n\in N,a_n^{b_n}=a_n^{1+\frac{1}{\ln c_n}}$且$\ln a_n>-\sqrt{2}\ln c_n$, 则

$$a_n^{b_n}=a_n^{1+\frac{1}{\ln c_n}}>a_n^{1-\frac{\sqrt{2}}{\ln a_n}}=a_n\cdot a_n^{-\frac{\sqrt{2}}{\ln a_n}}=a_n\cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\ln a_n}\ln a_n}=e^{-\sqrt{2}}a_n$$

因此:$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n\in M}a_n+\sum_{n\in N}a_n\le\sum_{n\in M}c_n^{-\sqrt{2}}+e^{\sqrt{2}}\sum_{n\in N}a_n^{b_n}$

因此原级数收敛.

(2): 记$M=\left\{n\in\mathbb{N}:a_n\le ca_n^{\frac{n}{n+1}}\right\},N=\left\{n\in\mathbb{N}:a_n>c\cdot a_n^{\frac{n}{n+1}}\right\}$.

对$n\in M,a_n^{\frac{1}{n+1}}\le c\Rightarrow a_n\le c^{n+1}\Rightarrow a_n^{\frac{n}{n+1}}\le c^n$, 可取$c=\frac{1}{2}$.

此时就有$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\frac{n}{n+1}}=\sum_{n\in M}a_n^{\frac{n}{n+1}}+\sum_{n\in N}a_n^{\frac{n}{n+1}}\le\sum_{n\in M}\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\sum_{n\in N}a_n<\infty$.

因此$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\frac{n}{n+1}}$收敛性.

(3): 利用$young$不等式$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,p,q>1,a,b\ge0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^{\frac{1}{p}}}{n^s}\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{p}+\frac{1}{qn^{sq}}\right),\text{而}sq=s\frac{1}{1-\frac{1}{p}}>1.$$

所以原级数收敛.

回忆$abel$变换：

$$\sum_{n=1}^{m} a_n b_n = \sum_{n=1}^{m-1}\left[\left(a_n - a_{n+1}\right)\sum_{j=1}^{n} b_j\right] + a_m \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j$$

设$a_n > 0$,级数$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$收敛,$b_n > 0$且递增, 证明下述级数收敛.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(b_{k+1} - b_k\right)\sum_{n=1}^{k} a_n b_n}{b_k b_{k+1}}.$$

证明：

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(b_{k+1} - b_k\right)\sum_{n=1}^{k} a_n b_n}{b_k b_{k+1}} = \sum_{k=1}^{m}\left[\left(\sum_{n=1}^{k} a_n b_n\right)\cdot\left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}\right)\right]$$

$$= -a_2 b_2\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right) - a_3 b_3\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_3}\right) - \cdots$$

$$-a_m b_m\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_m}\right) + \sum_{n=1}^{m} a_n b_n \cdot\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{m+1}}\right)$$

$$= -\frac{a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_m b_m}{b_1} + a_2 + a_3 + \cdots + a_m + \sum_{n=1}^{m} a_n b_n \cdot\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{m+1}}\right)$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m - \frac{\sum_{n=1}^{m} a_n b_n}{b_{m+1}} \le a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m .$$

因此$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(b_{k+1} - b_k\right)\sum_{n=1}^{k} a_n b_n}{b_k b_{k+1}}$收敛,且从证明中可以看到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(b_{k+1} - b_k\right)\sum_{n=1}^{k} a_n b_n}{b_k b_{k+1}} \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

第十届非数学类压轴题.

$\{a_k\},\{b_k\}\subset\mathbb{R}^+, b_{k+1}-b_k\geq\delta>0, k=1,2,\cdots,$ 证明：

若$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$收敛,则$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_kb_{k+1}}$

证明:$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_kb_{k+1}}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sum_{j=1}^{k}a_jb_j}{b_kb_{k+1}}\leq\frac{1}{\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(b_{k+1}-b_k)\cdot\sum_{j=1}^{k}a_jb_j}{b_kb_{k+1}},$

运用上一题我们就知道$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_kb_{k+1}}<\infty.$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k, T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)a_k$, 若$\sum_{k=1}^{\infty}\left|S_k-T_k\right|^2<\infty$, 证明:$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛.

证明：

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)a_k=S_n-\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n+1},$$ 由$\sum_{k=1}^{\infty}\left|S_k-T_k\right|^2<\infty$知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n+1}\right|^2<\infty,$$ 因此$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}ka_k\right)^2}{n\left(n+1\right)}<\infty.$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n\left(n+1\right)}=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n}-\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n+1}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n}-\frac{\sum_{k=1}^{n+1}ka_k}{n+1}\right)+\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1}ka_k}{n+1}-\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n+1}\right)$$

$$=a_1-\frac{\sum_{k=1}^{m+1}ka_k}{m+1}+\sum_{n=1}^{m}a_{n+1}=S_{m+1}-\frac{\sum_{k=1}^{m+1}ka_k}{m+1}.$$

注意到由$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n+1}\right|^2<\infty\Rightarrow\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{m+1}ka_k}{m+1}=0.$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n\left(n+1\right)}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n^2}\le\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}ka_k\right)^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)<\infty.$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n\left(n+1\right)}$收敛且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n\left(n+1\right)}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k.$

设a_n单调递减趋于0且$b_n=a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}\ge 0, n=1,2,\cdots$.

证明:$\sum_{n=1}^{\infty} nb_n$收敛.

证明:

$$\sum_{n=1}^{m} nb_n=\sum_{n=1}^{m} n\left(a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}\right)=\sum_{n=1}^{m} n\left(a_n-a_{n+1}-\left(a_{n+1}-a_{n+2}\right)\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{m} n\left(a_n-a_{n+1}\right)-\sum_{n=1}^{m} n\left(a_{n+1}-a_{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{m} n\left(a_n-a_{n+1}\right)-\sum_{n=1}^{m} \left(n+1\right)\left(a_{n+1}-a_{n+2}\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{m} \left(n+1\right)\left(a_{n+1}-a_{n+2}\right)-\sum_{n=1}^{m} n\left(a_{n+1}-a_{n+2}\right)$$

$$=a_1-a_2-\left(m+1\right)\left(a_{m+1}-a_{m+2}\right)+\sum_{n=1}^{m}\left(a_{n+1}-a_{n+2}\right)$$

$$=a_1-a_2-\left(m+1\right)\left(a_{m+1}-a_{m+2}\right)+a_2-a_{m+2}$$

注意$b_n\ge 0$意味着a_n-a_{n+1}单调递减, 并且a_n递减到0意味着

$\sum\left(a_n-a_{n+1}\right)$是收敛的正项级数, 因此由经典结论我们知道$\lim_{n\to\infty} n\left(a_n-a_{n+1}\right)=0$

因此$\sum_{n=1}^{\infty} nb_n=a_1$.

我们完成了证明.

设$a_n > 0$且$a_n - a_{n+1}$递减以及$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 证明:$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = +\infty.$

证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{收敛} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(a_n - a_{n+1}\right) = 0 \Rightarrow a_n \geq a_{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}a_n} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^2}.$$

现在$a_n^2 = \sum_{k=n}^{\infty}\left(a_k^2 - a_{k+1}^2\right) \leq \left(a_n - a_{n+1}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\left(a_k + a_{k+1}\right)$

因此$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^2} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum_{k=n}^{\infty}\left(a_k + a_{k+1}\right)} = +\infty.$

因此就证明了$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = +\infty.$

对正项级数$\sum a_n$, 设$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, p > 0$, 讨论$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$收敛性.

证明：

如果$p > 1$, 那么$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p} = \frac{a_1}{a_1^p} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} \le \sum_{n=2}^{\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^p} dx = \int_{S_1}^{\lim_{n\to\infty} S_n} \frac{1}{x^p} dx < \infty$.

因此级数收敛.

如果$0 < p \le 1$, 当$\lim_{n\to\infty} S_n$存在, 那么$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{S_n^p}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_n^p}$存在且非0.

所以$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$收敛.

当$\lim_{n\to\infty} S_n$发散, 若$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$收敛, 那么$\sum_{k=n+1}^{n+t} \frac{a_k}{S_k^p} \ge \frac{1}{S_{n+t}^p} \sum_{k=n+1}^{n+t} a_k = \frac{S_{n+t} - S_n}{S_{n+t}^p}$

$= S_{n+t}^{1-p} - \frac{S_n}{S_{n+t}^p}$

注意到t是任意的, 因此令$t \to +\infty$.由$S_{n+t}^p \to \infty$知

$\lim_{t\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+t} \frac{a_k}{S_k^p} = \begin{cases} 1, p = 1 \\ +\infty, 0 < p < 1 \end{cases}$, 因此这个时候$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$发散

总结一下(记忆)：

当$p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$收敛, 当$0 < p \le 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$和$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$同敛散.

对收敛正项级数$\sum a_n, p>0, R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, n=0,1,2,\cdots,$ 讨论$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_{n-1}^p}$收敛性

证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_{n-1}^p}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{n-1}-R_n}{R_{n-1}^p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{1}{x^p} dx=\int_0^{R_0} \frac{1}{x^p} dx,$$

因此当$0<p<1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_{n-1}^p}$收敛, 当$p \geq 1$.

$$\sum_{n=m}^{m+t} \frac{a_n}{R_{n-1}^p}=\sum_{n=m}^{m+t} \frac{R_{n-1}-R_n}{R_{n-1}^p} \geq \sum_{n=m}^{m+t} \frac{R_{n-1}-R_n}{R_{m-1}^p}=\frac{R_{m-1}-R_{m+t}}{R_{m-1}^p}$$

$=R_{m-1}^{1-p}-\frac{R_{m+t}}{R_{m-1}^p}$, 由于$\lim_{t \rightarrow \infty} R_{m+t}=0$

当$p=1, \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{m+t} \frac{a_n}{R_{n-1}^p} \geq R_{m-1}^{1-p}=1$, 因此$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_{n-1}^p}$发散

当$p>1, \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{m+t} \frac{a_n}{R_{n-1}^p} \geq \frac{1}{R_{m-1}^{p-1}} \geq \frac{1}{R_0^{p-1}}>0$, 仍然有$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_{n-1}^p}$发散

数学类真题：

设a_n递增,$a_1>1$,求证:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$收敛充要条件是$a_n$有界，

并判断是否可以把分母a_n换成a_{n+1}.

证明：

充分性：若$|a_n|\le M$，则$\sum\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}\le\sum\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1\ln a_2}$,而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在

因此就说明了$\sum\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1\ln a_2}$收敛,从而$\sum\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$收敛.

必要性：

$$\text{若}\sum\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}\text{收敛,则}\sum\frac{\frac{a_{n+1}}{a_n}-1}{\ln a_{n+1}}\ge\sum\frac{\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}}{\ln a_{n+1}}=\sum\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{\ln a_{n+1}}$$

回忆$\sum\frac{a_n}{S_n^p}$和$\sum a_n$收敛性关系:

记$x_n=\ln a_{n+1}-\ln a_n,S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$,则$\sum\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{\ln a_{n+1}}=\sum\frac{x_n}{S_n+\ln a_1}$

如果a_n无界,那么$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}S_n$无穷$\Rightarrow\sum\frac{x_n}{S_n+\ln a_1}\sim\sum\frac{x_n}{S_n}$收敛

因此$\sum x_n$收敛$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n$收敛$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n$收敛,矛盾！

因此a_n有界.

取$a_n=e^{n^2}$即可,此时$\sum\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}\ln a_{n+1}}$收敛(留做习题)但$a_n$无界.

取的想法就是要让a_n非常快,为了替换失效,需要比值极限不为常数

通常的指数函数比值是常数，更快的指数函数的指数当然是二次函数.

设$p_n > 0$且递增,证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n p_{n-1}^a}$在$a \geq 1$收敛

分析：总的来说这种类型题就两种方法,一种是放缩为积分,另外一种走交错级数判别法.

$\sum(-1)^n a_n$

证明：

$$\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n p_{n-1}^a} \leq \frac{p_n - p_{n-1}}{p_n p_1^a}, \forall n \geq 2.$$

若$\lim\limits_{n\to\infty} p_n = A > 0$,那么$\sum\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n} \sim \frac{1}{A}\sum(p_n - p_{n-1}) < \infty$,

因此$\sum\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n p_{n-1}^a} < \infty$.

若$\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$,要证明$\lim\limits_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n p_{n-1}^a}\right)$收敛

因此把$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{p_{n-1}^a} - \frac{1}{p_n p_{n-1}^{a-1}}\right)$视为交错级数.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{p_{n-1}^a} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{p_n p_{n-1}^{a-1}} = 0$,再证明末项单调递减.

事实上$\frac{1}{p_n p_{n-1}^{a-1}} \leq \frac{1}{p_{n-1}^a} \Leftrightarrow \frac{1}{p_n} \leq \frac{1}{p_{n-1}} \Leftrightarrow p_n \geq p_{n-1}$

$$\frac{1}{p_n^a} \leq \frac{1}{p_n p_{n-1}^{a-1}} \Leftrightarrow \frac{1}{p_n^{a-1}} \leq \frac{1}{p_{n-1}^{a-1}} \Leftrightarrow p_n \geq p_{n-1}.$$

因此由交错级数判别法,原级数收敛.