全国大学生数学竞赛非数学类模拟八

清疏竞赛考研数学

2023 年 10 月 16 日

摘要

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}, \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

模拟试题应当规定时间独立完成并给予反馈.

1 填空题

填空题 1.1 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\int_0^n \frac{|\sin x|}{x} dx}{\ln n} =$ $\underline{\quad \frac{2}{\pi} \quad}$

填空题 1.2 $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^2 - 6x + 2y + 1$ 的所有极值之和为 $=$ $\underline{\quad 9 \quad}$

填空题 1.3 设 $z = f(x, y)$ 连续可微, 且它与平面 xoy 之交线为 $y = 2x^2 - 3x + 4$. 若 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,3)} = 2$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,3)} =$ $\underline{\quad -2 \quad}$

填空题 1.4 设 $a > 0$, 可微函数 $f : (0, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ 满足 $f'\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}, \forall x > 0$, 则 $f(x) =$ $\underline{\quad \frac{1}{\sqrt{ra^{r-1}}} \quad}\cdot x^r, \ r>0$

填空题 1.5 对 $n \in \mathbb{N}$, 计算 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin x} dx =$ $\underline{\quad \begin{cases} \pi, & n\text{为奇} \\ 0, & n\text{为偶.} \end{cases} \quad}$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin x|}{x} dx}{\ln x} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx}{\ln(n\pi)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx}{\ln(1+\frac{1}{n})}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} n \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x+n\pi} dx$

$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| dx$

$= \frac{2}{\pi}$

2. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y - 6 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-2, -2)$

$= (\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$

$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3$, $C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2$

$AC-B^2=-12x-9$，当 $x=-2$，$AC-B^2>0$，$A<0$，极大值.

$x=\frac{1}{2}$，$AC-B^2<0$，不是极值点.

2 选择题答案区

3. $f(x, 2x^2-3x+4)=0$，$\frac{\partial f}{\partial x}+(4x-3)\frac{\partial f}{\partial y}=0$

$$2+\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

4. $f'\left(\frac{a}{x}\right)=\frac{x}{f(x)}$，令 $g(x)=f\left(\frac{a}{x}\right)f(x)$，$g'(x)=-\frac{a}{x^2}f'\left(\frac{a}{x}\right)f(x)+f\left(\frac{a}{x}\right)f'(x)$

$$=-\frac{a}{x}+\frac{a}{x}=0.$$

$f'(x)=\frac{\frac{a}{x}}{f\left(\frac{a}{x}\right)}$

故 $f\left(\frac{a}{x}\right)\cdot f(x)=C=f(x)\cdot\frac{\frac{a}{x}}{f'(x)}$ $\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{c}{x}=\frac{r}{x}$

$\Longrightarrow \ln f(x)=r\ln x+B$

$\Longrightarrow f(x)=Bx^r$. $B>0, r>0$.

$\frac{x}{f(x)}=\frac{1}{Bx^{r-1}}=rB\left(\frac{a}{x}\right)^{r-1}\Rightarrow B^2=\frac{1}{ra^{r-1}}\Rightarrow B=\frac{1}{\sqrt{ra^{r-1}}}$

5. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin x}dx=\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{(1+2^{-x})\sin x}+\frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin x}\right]dx$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\,\frac{2^x+1}{1+2^x}dx$$

$=I_n$

$I_{n+2}-I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+2)x-\sin nx}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{2\cos(n+1)x\cdot\sin x}{\sin x}dx$

$$=2\int_0^{\pi}\cos(n+1)x\,dx$$

$$=0.$$

$I_{2n}=I_0=0$，$I_{2n+1}=I_1=\int_0^{\pi}1\,dx=\pi$

3　解答题

解答题 3.1 设二阶连续可微函数 $u=u(x,t)$ 满足方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，证明

$$v=v(x,t)=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\cdot u\left(\frac{x}{a^2t},-\frac{1}{a^4t}\right)$$

在 $t>0$ 也满足方程 $\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

证：

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{2at^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u+\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\frac{x^2}{4a^2t^2}u+\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left[-u_x\frac{x}{a^2t^2}+u_{xx}\frac{1}{a^2t^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{1}{a^3t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(-\frac{x}{2a^2t}\right)\left(-\frac{x}{2}u+u_x\right)+\frac{1}{a^3t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(u_{xx}\frac{1}{a^2t}-\frac{u}{2}-\frac{x}{2}u_x\frac{1}{a^2t}\right)$$

故 $a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial v}{\partial t}$.

解答题 3.2 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是由光滑简单闭曲面 Σ 围成的区域. 对 $(x,y,z) \notin \overline{\Omega}$, 记 $\boldsymbol{r} = (\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$, $r = |\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位外法向量, 然后证明

(1):

$$\iiint_\Omega \frac{1}{r} d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{2} \iint_\Sigma \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\, dS.$$

(2): 计算

$$\iint_\Sigma \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2} dS.$$

解:(1): $\vec{r} \cdot \vec{n} = |\vec{r}| \cdot \underbrace{|\vec{n}|}_{1} \cdot \cos(\vec{r}, \vec{n})$, 因此, $\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r}$

因此 $\frac{1}{2} \iint_\Sigma \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS = \frac{1}{2} \iint_\Sigma \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r} dS$

$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 由两类曲面积分关系.

$\frac{1}{2} \iint_\Sigma \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r} dS = \frac{1}{2} \iint_\Sigma \frac{(\xi - x) d\eta d\zeta + (\eta - y) d\xi d\zeta + (\zeta - z) d\xi d\eta}{r}$

又 $(x,y,z) \notin \overline{\Omega}$, 因此由 Gauss 公式就有:

先算: $\frac{\partial\left(\frac{\xi - x}{r}\right)}{\partial x} = \frac{r - \frac{\partial r}{\partial x} \cdot (\xi - x)}{r^2} = \frac{r - \frac{(\xi - x)^2}{r}}{r^2}$

其中 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}{\partial x} = \frac{\xi - x}{r}$.

故 $\frac{1}{2} \iint_\Sigma \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r} dS = \frac{1}{2} \iiint_\Sigma \frac{3r - r}{r^2} d\xi d\eta d\zeta = \iiint_\Sigma \frac{1}{r} d\xi d\eta d\zeta$.

(2): $\iint_\Sigma \frac{\cos(\vec{r} \cdot \vec{n})}{r^2} dS = \iint_\Sigma \frac{(\xi - x) d\eta d\zeta + (\eta - y) d\xi d\zeta + (\zeta - z) d\xi d\eta}{r^3}$

$\frac{\partial\left(\frac{\xi - x}{r^3}\right)}{\partial x} = \frac{r^3 - 3r^2(\xi - x) \cdot \frac{\xi - x}{r}}{r^6}$

$= \iiint_\Sigma \frac{3r^3 - 3r^2 \cdot \frac{r^2}{r}}{r^6} d\xi d\eta d\zeta = 0.$

解答题 3.3 考虑连续函数 $f:[0,1]\to[0,1]$, 证明数列 $x_{n+1}=f(x_n), n=1,2,\cdots$ 收敛的充要条件是 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$.

证明：结论：设 $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，则 x_n 的所有可能的子列极限，要么是一个点，要么是一个区间.

结论证明：仅考虑 x_n 有界情况，其余情况学有余力的同学考虑.

记 x_n 最大子列极限为 β，最小子列极限为 α，只须对 $\beta>\alpha$ 时证明 $[\alpha,\beta]$ 中任何一个点都是 x_n 某个子列的极限.

若 $\exists x_0\in(\alpha,\beta)$，使 $\exists\delta>0$，在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(\alpha,\beta)$ 中只含 x_n 有限项.

由 $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，$\exists N\geq1$，$\forall n\geq N$，有 $|x_{n+1}-x_n|\leq\delta$ 且 $x_n\notin(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

又 α 是 x_n 的最小子列极限，因此，$\exists n_1\geq N$，使 $x_{n_1}\leq x_0-\delta$.
β 大 $n_2\geq n_1\geq N$，使 $x_{n_2}\geq x_0+\delta$

故在 $x_{n_1}, x_{n_1+1},\dots,x_{n_2}$ 这些项中必有 x_k，使 $x_k\leq x_0-\delta$，$x_{k+1}\geq x_0+\delta$.
故 $\delta\geq x_{k+1}-x_k\geq2\delta$，故矛盾，这就证明了结论.

原题证明：若 $\lim_{n\to+\infty}x_n$ 存在，则 $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$.

若 $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$ 但 $\lim_{n\to+\infty}x_n$ 不存在，由结论，x_n 的所有子列极限为 $[\alpha,\beta]$. 又 $x_{n+1}-x_n=f(x_n)-x_n$. 设 $x_{n_k}\to x_0\in[\alpha,\beta]$
则 $f(x_{n_k})-x_{n_k}\to f(x_0)-x_0=0\Rightarrow f(x_0)=x_0\Rightarrow f(x)=x, \forall x\in[\alpha,\beta]$
又当 n 充分大，$x_n\in[\alpha,\beta]$，此时 x_n 在 n 充分大是常数列，矛盾.
因此 $\lim_{n\to+\infty}x_n$ 存在，我们完成了证明.

解答题 3.4 给定 $\alpha, c > 0$ 和数列 $x_1 = c, x_{n+1} = x_n e^{-x_n^\alpha}, n = 1, 2, \cdots$, 对所有 $\beta \in \mathbb{R}$, 判断级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_n^\beta$ 收敛性.

证明: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{-x_n^a} \le 1$, 又 $x_n \ge 0$, 故设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A \ge 0$.

故 $A = Ae^{-A^a} \Rightarrow A(1-e^{-A^a}) \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n x_n^\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^\lambda}} \overset{\text{Stolz}}{=\!=} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^\lambda} - \frac{1}{x_n^\lambda}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n^{-\lambda} e^{\lambda x_n^a} - x_n^{-\lambda}}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n^{-\lambda}(e^{\lambda x_n^a} - 1)}$

取 $\lambda = a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} n x_n^\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{a}$. 故

$x_n^a \sim \frac{1}{an} \ (n\to+\infty)$, 故 $x_n^\beta \sim \frac{1}{a^{\frac{\beta}{a}}} \frac{1}{n^{\frac{\beta}{a}}}$, 故 $\sum x_n^\beta < +\infty \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{\beta}{a}}} < +\infty$

$\Leftrightarrow \beta > a$.

故 $\beta > a$, 级数收敛, $\beta \le a$, 级数发散.

解答题 3.5 记

$$\mathcal{M}=\left\{f\in C^1[0,1]: f(0)=0, \int_0^1 |f'(x)|^2\,dx\leqslant 1\right\},$$

计算

$$\max_{f\in\mathcal{M}}\int_0^1 \frac{|f(x)|\cdot|f'(x)|^2}{\sqrt{x}}dx.$$

解: $f(x)=\int_0^x f'(y)\,dy,\quad f\in\mathcal{M}.$

故 $|f(x)|\leq\left[\int_0^x|f'(y)|^2dy\right]^{\frac12}\cdot\left[\int_0^x 1\,dy\right]^{\frac12}$

故 $\frac{|f(x)|}{\sqrt{x}}\leq\left[\int_0^x|f'(y)|^2dy\right]^{\frac12}$

故 $\int_0^1\frac{|f(x)|}{\sqrt{x}}\cdot|f'(x)|^2dx\leq\int_0^1\left[\int_0^x|f'(y)|^2dy\right]^{\frac12}\cdot|f'(x)|^2dx$

$=\int_0^1\left[\int_0^x|f'(y)|^2dy\right]^{\frac12}d\int_0^x|f'(y)|^2dy$

$=\frac23\left[\int_0^x|f'(y)|^2dy\right]^{\frac32}\Big|_0^1$

$=\frac23\left[\int_0^1|f'(y)|^2dy\right]^{\frac32}$

$\leq\frac23.$

再取 $f(x)=x$, 则 $\int_0^1\frac{|f(x)|}{\sqrt{x}}|f'(x)|^2dx=\frac23$ 且 $f\in\mathcal{M}$.

故所求最大值为 $\frac23$.

解答题 3.6 设 $C, D > 0$, 二阶连续可微函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足

$$|x^3 f(x)| \leqslant C, |xf''(x)| \leqslant D.$$

证明对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $x_0 \geqslant 0$, 使得对任何 $|x| > x_0$, 都有

$$|x^2 f'(x)| < \sqrt{2CD} + \epsilon.$$

证明：不妨先考虑 $x>0$，$x<0$ 同理.

由taylor，$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\theta)}{2}h^2$，$x, h>0$，$\theta \in [x, x+h]$.

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f''(\theta)}{2}h$$

$$|x^2 f'(x)| = \left| \frac{x^2 f(x+h) - x^2 f(x)}{h} - \frac{f''(\theta)x^2 h}{2} \right|$$

$$\leq \frac{x^2 C}{h(x+h)^3} + \frac{C}{hx} + \frac{x^2 h D}{2\theta}$$

草稿：$\frac{2C}{hx} + \frac{xhD}{2} \geq 2\sqrt{\frac{2CxhD}{2hx}} = 2\sqrt{CD}$，$\frac{2C}{hx} = \frac{xhD}{2}$，$\frac{4C}{Dx^2} = h^2$，$h = \frac{2}{x}\sqrt{\frac{C}{D}}$.

取 $h = \frac{2}{x}\sqrt{\frac{C}{D}}$，当 x 充分大 $|x^2 f'(x)| \leq \frac{C}{hx}\left[\frac{x^3}{(x+h)^3} + 1\right] + \frac{xhD}{2}$

$$= \frac{2C}{hx} + \frac{xhD}{2} + \frac{C}{hx}\left[\frac{x^3}{(x+h)^3} - 1\right]$$

$$= 2\sqrt{CD} + \frac{C}{2\sqrt{\frac{C}{D}}}\left[\frac{x^3}{(x+h)^3} - 1\right]$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{C}{2\sqrt{\frac{C}{D}}}\left(\frac{x^3}{(x+h)^3} - 1\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{CD}\left(\frac{x^3}{(x+\frac{2}{x}\sqrt{\frac{C}{D}})^3} - 1\right)$

$= 0$

$\Rightarrow$ 故 $\forall \varepsilon>0$，$\exists x_0 \geq 0$，使 $\forall x \geq x_0$，有

$$\left| \frac{C}{2\sqrt{\frac{C}{D}}}\left[\frac{x^3}{(x+h)^3} - 1\right] \right| \leq \varepsilon.$$

于是 $x^2|f'(x)| \leq 2\sqrt{CD} + \varepsilon$，$\forall x \geq x_0$，证毕！

上述证明要作一定修正，使2到$\sqrt{CD}$里面去。

即 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\theta_1)}{2}h^2$，$x\le\theta_1\le x+h$，

$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\theta_2)}{2}h^2$，$x-h\le\theta_2\le x$.

故 $f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{h^2}{2}[f''(\theta_1)-f''(\theta_2)]$

故 $f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{h}{4}[f''(\theta_1)-f''(\theta_2)]$

故 $x^2|f'(x)|\le\frac{x^2|f(x+h)|}{2h}+\frac{x^2|f(x-h)|}{2h}+\frac{hx^2|f''(\theta_1)|}{4}+\frac{hx^2}{4}|f''(\theta_2)|$

$\le\frac{x^2C}{2h(x+h)^3}+\frac{Cx^2}{2h(x-h)^3}+\frac{hx^2D}{4\theta_1}+\frac{hx^2D}{4\theta_2}$

$\le\frac{Cx^2}{2h}\left[\frac{1}{(x+h)^3}+\frac{1}{(x-h)^3}\right]+\frac{hxD}{4}+\frac{hx^2D}{4(x-h)}$

草稿 $\frac{C}{hx}+\frac{hxD}{2}\ge2\sqrt{\frac{CD}{2}}=\sqrt{2CD}$，当且仅当 $h=\sqrt{\frac{2C}{x^2D}}$，等号成立.

故取 $h=\frac{\sqrt{\frac{2C}{D}}}{x}$，当$x$充分大，我们有

$x^2|f'(x)|\le\frac{C}{hx}+\frac{Cx^2}{2h}\left[\frac{1}{(x+h)^3}+\frac{1}{(x-h)^3}-\frac{2}{x^3}\right]$

$+\frac{hxD}{2}+\frac{hxD}{4}\left(\frac{x}{x-h}-1\right)$

$=\sqrt{2CD}+\frac{Cx^3}{2\sqrt{\frac{2C}{D}}}\left[\frac{1}{(x+h)^3}+\frac{1}{(x-h)^3}-\frac{2}{x^3}\right]+\frac{D\sqrt{\frac{2C}{D}}}{4}\left(\frac{x}{x-h}-1\right)$

利用 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-h}-1\right)=0$ 和 $\lim_{x\to+\infty}x^3\left[\frac{1}{(x+h)^3}+\frac{1}{(x-h)^3}-\frac{2}{x^3}\right]=0$.

于是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\ge0$，使 $\forall x\ge x_0$ 都有 $x^2|f'(x)|\le\sqrt{2CD}+\varepsilon$，证毕！