2018 年第十届全国大学生数学竞赛初赛

（数学类）试卷

一、（本题 15 分） 在空间直角坐标系中，设马鞍面S的方程为$x^2-y^2=2z$. 设σ为平面$z=\alpha x+\beta y+\gamma$, 其中$\alpha,\beta,\gamma$为给定常数. 求马鞍面$S$上点$P$的坐标, 使得过$P$且落在马鞍面$S$上的直线均平行于平面$\sigma$.

二、（本题 15 分） $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$为$n$阶实方阵，满足

1) $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a>0$;

2)对每个$i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，有$\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|+\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ji}|<4a.$

求$f\left(x_1,\cdots,x_n\right)=\left(x_1,\cdots,x_n\right)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$的规范形.

三、（本题 20 分） 元素皆为整数的矩阵称为整矩阵. 设n阶方阵A,B皆为整矩阵.

1) 证明以下两条等价：i) A可逆且A^{-1}仍为整矩阵；ii) A的行列式的绝对值为 1;

2) 若又知$A,A-2B,A-4B,\cdots,A-2nB,A-2\left(n+1\right)B,$

$A-2(n+n)B$皆可逆，且它们的逆矩阵皆为整矩阵. 证明：$A+B$可逆.

四、（本题 15 分） 设$f\left(x\right)$在$\left[0,1\right]$上连续可微，在$x=0$处有任意阶导数,

$$f^{(n)}\left(0\right)=0\left(\forall n\geq 0\right),$$

且存在常数$C>0$使得

$$\left|xf'\left(x\right)\right|\leq C\,|\,f\left(x\right)|,\forall x\in\left[0,1\right].$$

证明：(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f\left(x\right)}{x^n}=0\left(\forall n\geq 0\right)$; (2)在$\left[0,1\right]$上成立$f\left(x\right)\equiv 0.$

五、（本题 15 分） 设$\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$是两个数列，$a_n>0\left(n\geq 0\right)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leq 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+b_n, n\geq 2.$$

求证：(1)$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{\ln\left(n+1\right)}{\ln n}+b_n\left(n\geq 2\right)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

六、（本题 20 分） 设$f:\mathbb{R}\to\left(0,+\infty\right)$是一可微函数，且对所有$x,y\in\mathbb{R}$，有

$$\left|f'\left(x\right)-f'\left(y\right)\right|\leq\left|x-y\right|^{\alpha},\text{ 其中 }\alpha\in(0,1]\text{是常数.}$$

求证：对所有$x\in\mathbb{R}$，有$\left|f'\left(x\right)\right|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\dfrac{\alpha+1}{\alpha}f\left(x\right).$