

2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛
(非数学类) 试卷

一、解答下列各题(共 4 小题,每小题 6 分,共 24 分) .

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \pi \sqrt{1 + 4n^2}\right)^n$.

2. 证明广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 不是绝对收敛的.

3. 设 $y = y(x)$ 由 $x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2$ 所确定, 求 $y(x)$ 的极值.

4. 过曲线 $y = \sqrt[3]{x} (x \geq 0)$ 上的点 A 作切线, 使得该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$. 求点 A 的坐标.

第二题: (12 分) 计算定积分 $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx$.

第三题: (12 分) 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \text{ 收敛.}$$

第四题: (10 分) 设 $|f(x)| \leq \pi, f'(x) \geq m > 0 (a \leq x \leq b)$, 证明: $\left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \leq \frac{2}{m}$.

第五题: (14 分) 设 Σ 是一个光滑封闭曲面, 方向朝外, 给定第二型的曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3 - x) dy dz + (2y^3 - y) dz dx + (3z^3 - z) dx dy.$$

试确定曲面 Σ , 使得积分 I 的值最小, 并求该最小值.

第六题: (14 分) 设 $I_a(r) = \int_C \frac{y dx - x dy}{(x^2 + y^2)^a}$, 其中 a 为常数, 曲线 C 为椭圆

$$x^2 + xy + y^2 = r^2, \text{ 取正向. 求极限 } \lim_{r \rightarrow +\infty} I_a(r).$$

第七题: (14 分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性, 若收敛, 求其和.