

# 第十一届全国大学生数学竞赛(非数学类)试题

## 参考解答及评分标准

### 一、填空题(每小题6分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{\sin x} + \sqrt[3]{1 - \cos x}) - \sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1 - \cos x})} = \frac{1}{4}.$

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{\sin x} + \sqrt[3]{1 - \cos x}) - \sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1 - \cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin x} - 1) + \sqrt[3]{1 - \cos x}}{4\sqrt[3]{1 - \cos x}} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4\sqrt[3]{1 - \cos x}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin x} - 1)}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{1/3}} + \frac{1}{4} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{1/3}} = \frac{1}{4}.$

2. 设隐函数  $y = y(x)$  由方程  $y^2(x - y) = x^2$  所确定, 则  $\int \frac{dx}{y^2} = \frac{3y}{x} - 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| + C.$

解: 令  $y = tx$ , 则  $x = \frac{1}{t^2(1-t)}, y = \frac{1}{t(1-t)}, dx = \frac{-2+3t}{t^3(1-t)^2} dt,$

这样,  $\int \frac{dx}{y^2} = \int \frac{-2+3t}{t} dt = 3t - 2\ln|t| + C = \frac{3y}{x} - 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| + C.$

3. 定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(1 + \sin x)}{1 + \cos x} dx = e^{\frac{\pi}{2}}.$

解:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(1 + \sin x)}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1 + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} de^x$   
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1 + \cos x} dx + \left. \frac{\sin x e^x}{1 + \cos x} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} dx$   
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1 + \cos x} dx + \left. \frac{\sin x e^x}{1 + \cos x} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1 + \cos x} dx = e^{\frac{\pi}{2}}.$

4. 已知  $du(x, y) = \frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$ , 则  $u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{3}\right) + C.$

解:  $du(x, y) = \frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2} = \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2x}{y} + 3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} d \arctan \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{3}\right).$

所以,  $u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{3}\right) + C.$

5. 设  $a, b, c, \mu > 0$ , 曲面  $xyz = \mu$  与曲面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  相切, 则  $\mu = \frac{abc}{3\sqrt{3}}$ .

解: 根据题意有:  $yz = \frac{2x}{a^2} \lambda$ ,  $xz = \frac{2y}{b^2} \lambda$ ,  $xy = \frac{2z}{c^2} \lambda$ , 以及

$$\mu = 2\lambda \frac{x^2}{a^2}, \quad \mu = 2\lambda \frac{y^2}{b^2}, \quad \mu = 2\lambda \frac{z^2}{c^2}, \quad \text{从而得: } \mu = \frac{8\lambda^3}{a^2 b^2 c^2}, \quad 3\mu = 2\lambda,$$

$$\text{联立解得: } \mu = \frac{abc}{3\sqrt{3}}.$$

二、(14 分) 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} \frac{xyz}{x^2 + y^2} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2xy$  围成的区域在第一卦限部分.

解: 采用“球面坐标”计算, 并利用对称性, 得

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2} \sin \varphi \sqrt{\sin \theta \cos \theta}} \frac{\rho^3 \sin^2 \varphi \cos \theta \sin \theta \cos \varphi}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \rho^2 \sin \varphi d\rho \quad \text{-----5 分}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2} \sin \varphi \sqrt{\sin \theta \cos \theta}} \rho^3 d\rho$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \theta \cos^3 \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \varphi \cos \varphi d\varphi \quad \text{-----10 分}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \varphi d(\sin \varphi)$$

$$= \frac{1}{48} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = \frac{1}{48} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{72} \quad \text{-----14 分}$$

三、(14 分) 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可微,  $f(0) = 0$ , 且存在常数  $A > 0$ , 使得  $|f'(x)| \leq A|f(x)|$  在  $[0, +\infty)$  上成立, 试证明: 在  $(0, +\infty)$  上有  $f(x) \equiv 0$ .

证明: 设  $x_0 \in [0, \frac{1}{2A}]$ , 使得  $|f(x_0)| = \max \left\{ |f(x)| \mid x \in [0, \frac{1}{2A}] \right\}$ , -----5 分

$$|f(x_0)| = |f(0) + f'(\xi)x_0| \leq A|f(x_0)| \frac{1}{2A} = \frac{1}{2}|f(x_0)|, \quad \text{只有 } |f(x_0)| = 0.$$

故当  $x \in [0, \frac{1}{2A}]$  时,  $f(x) \equiv 0$ . -----12 分

递推可得, 对所有的  $x \in [\frac{k-1}{2A}, \frac{k}{2A}]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , 均有  $f(x) \equiv 0$ . -----14 分

四、(14 分) 计算积分  $I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} e^{\sin \theta (\cos \phi - \sin \phi)} \sin \theta d\theta$

解: 设球面  $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 由球面参数方程

$$x = \sin \theta \cos \phi, \quad y = \sin \theta \sin \phi, \quad z = \cos \theta$$

知  $dS = \sin \theta d\theta d\phi$ , 所以, 所求积分可化为第一型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} e^{x-y} dS \quad \text{-----4 分}$$

设平面  $P_t$ :  $\frac{x-y}{\sqrt{2}} = t$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ , 其中  $t$  为平面  $P_t$  被球面截下部分中心到原点距离. 用平面  $P_t$  分割球面  $\Sigma$ , 球面在平面  $P_t, P_{t+dt}$  之间的部分形如圆台外表面状, 记为  $\Sigma_{t,dt}$ . 被积函数在其上为  $e^{x-y} = e^{\sqrt{2}t}$ . -----8 分

由于  $\Sigma_{t,dt}$  半径为  $r_t = \sqrt{1-t^2}$ , 半径的增长率为  $d\sqrt{1-t^2} = \frac{-tdt}{\sqrt{1-t^2}}$  就是  $\Sigma_{t,dt}$  上下底半径之差. 记圆台外表面斜高为  $h_t$ , 则由微元法知  $dt^2 + (d\sqrt{1-t^2})^2 = h_t^2$ , 得到  $h_t = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ , 所以  $\Sigma_{t,dt}$  的面积为  $dS = 2\pi r_t h_t = 2\pi dt$ , -----12 分

$$I = \int_{-1}^1 e^{\sqrt{2}t} 2\pi dt = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}t} \Big|_{-1}^1 = \sqrt{2}\pi(e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}). \quad \text{-----14 分}$$

五、(14 分) 设  $f(x)$  是仅有正实根的多项式函数, 满足  $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ . 试证:  $c_n > 0$ , ( $n \geq 0$ ), 极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{c_n}}$  存在, 且等于  $f(x)$  的最小根.

证明: 由  $f(x)$  为仅有正实根的多项式, 不妨设  $f(x)$  的全部根为  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$ , 这样,

$$f(x) = A(x-a_1)^{r_1} \dots (x-a_k)^{r_k},$$

其中  $r_i$  为对应根  $a_i$  的重数 ( $i=1, \dots, k, r_k \geq 1$ ). -----2 分

$$f'(x) = Ar_1(x-a_1)^{r_1-1} \dots (x-a_k)^{r_k} + \dots + Ar_k(x-a_1)^{r_1} \dots (x-a_k)^{r_k-1},$$

$$\text{所以, } f'(x) = f(x) \left( \frac{r_1}{x-a_1} + \dots + \frac{r_k}{x-a_k} \right), \text{ 从而, } -\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{r_1}{a_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a_1}} + \dots + \frac{r_k}{a_k} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a_k}}.$$

-----6 分

若  $|x| < a_1$ , 则

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{r_1}{a_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a_1}\right)^n + \dots + \frac{r_k}{a_k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a_k}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r_1}{a_1^{n+1}} + \dots + \frac{r_k}{a_k^{n+1}} \right) x^n.$$

而  $-\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , 由幂级数的唯一性知

$$c_n = \frac{r_1}{a_1^{n+1}} + \dots + \frac{r_k}{a_k^{n+1}} > 0, \quad \text{-----9 分}$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\frac{r_1}{a_1^{n+1}} + \dots + \frac{r_k}{a_k^{n+1}}}{\frac{r_1}{a_1^{n+2}} + \dots + \frac{r_k}{a_k^{n+2}}} = a_1 \cdot \frac{r_1 + \dots + \left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+1} r_k}{r_1 + \dots + \left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+2} r_k}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = a_1 \cdot \frac{r_1 + 0 + \dots + 0}{r_1 + 0 + \dots + 0} = a_1 > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{a_1}, \quad \text{-----12 分}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left( \ln \frac{c_2}{c_1} + \dots + \ln \frac{c_{n+1}}{c_n} \right) = \ln \frac{1}{a_1},$$

$$\sqrt[n]{c_n} = e^{\frac{\ln c_n}{n}} = e^{\frac{\ln c_1}{n} + \frac{1}{n} \left( \ln \frac{c_2}{c_1} + \dots + \ln \frac{c_{n+1}}{c_n} \right)} \rightarrow e^{\ln \frac{1}{a_1}} = \frac{1}{a_1}.$$

从而,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}} = a_1$ , 即  $f(x)$  的最小正根.

-----14 分

六、(14 分) 设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上具有连续导数, 满足

$$3[3 + f^2(x)]f'(x) = 2[1 + f^2(x)]^2 e^{-x^2},$$

且  $f(0) \leq 1$ . 证明: 存在常数  $M > 0$ , 使得  $x \in [0, +\infty)$  时, 恒有  $|f(x)| \leq M$ .

证明: 由于  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  是  $[0, +\infty)$  上的严格增函数, 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  (有限或  $+\infty$ ). 下面证明  $L \neq +\infty$ .

-----2 分

记  $y = f(x)$ , 将所给等式分离变量并积分得  $\int \frac{3+y^2}{(1+y^2)^2} dy = \frac{2}{3} \int e^{-x^2} dx$ , 即

$$\frac{y}{1+y^2} + 2 \arctan y = \frac{2}{3} \int_0^x e^{-t^2} dt + C,$$

-----6 分

其中  $C = \frac{f(0)}{1+f^2(0)} + 2 \arctan f(0)$ .

-----8 分

若  $L = +\infty$ , 则对上式取极限  $x \rightarrow +\infty$ , 并利用  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , 得  $C = \pi - \frac{\sqrt{\pi}}{3}$ .

-----10 分

另一方面, 令  $g(u) = \frac{u}{1+u^2} + 2 \arctan u$ , 则  $g'(u) = \frac{3+u^2}{(1+u^2)^2} > 0$ , 所以函数  $g(u)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上严格单调增加. 因此, 当  $f(0) \leq 1$  时,  $C = g(f(0)) \leq g(1) = \frac{1+\pi}{2}$ , 但

$C > \frac{2\pi - \sqrt{\pi}}{2} > \frac{1+\pi}{2}$ , 矛盾, 这就证明了  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  为有限数.

最后, 取  $M = \max\{|f(0)|, |L|\}$ , 则  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [0, +\infty)$ .

-----14 分