2017 年第九届全国大学生数学竞赛初赛
(数学类) 参考答案

一、【参考解答】: 设平面 P 上的抛物线 C 的顶点为 $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$. 取平面 P 上 X_0 处相互正交的两单位向量 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 和 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$，使得 β 是抛物线 C 在平面 P 上的对称轴方向，则抛物线的参数方程为

$$X(t) = X_0 + t\alpha + \lambda t^2 \beta, t \in \mathbf{R}$$

λ 为不等于 0 的常数.

记 $X(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$，则

$$x(t) = x_0 + \alpha_1 t + \lambda \beta_1 t^2, y(t) = y_0 + \alpha_2 t + \lambda \beta_2 t^2, z(t) = z_0 + \alpha_3 t + \lambda \beta_3 t^2$$

因为 $X(t)$ 落在单叶双曲面 Γ 上，代入方程 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$，得到对任意 t 要满足的方程

$$\lambda^2 \left(\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 \right) t^4 + 2\lambda \left(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 \right) t^3 + A_1 t^2 + A_2 t + A_3 = 0$$

其中 A_1, A_2, A_3 是与 X_0, α, β 相关的常数. 于是得到

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 = 0, \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 = 0$$

因为 $\{\alpha, \beta\}$ 是平面 P 上正交的两单位向量，则有

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$$

于是得到

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \beta_3^2 = \frac{1}{2}, \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0), \beta = \left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\alpha_2, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\alpha_1, \beta_3 \right), \quad \varepsilon = \pm 1$$

于是得到平面 P 的法向量为 $n = \alpha \times \beta = \left(A, B, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right)$，它与 $z-$ 轴方向 $e = (0, 0, 1)$ 的夹角 θ 满足 $\cos\theta = n \cdot e = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$.

二、【参考证明】: 充分性: 若 $\{a_n\}$ 有界，则可设 $a_n \leq M$.

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}} \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1 \ln a_1} = \frac{a_{m+1} - a_1}{a_1 \ln a_1} \leq \frac{M}{a_1 \ln a_1}$$

由此可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛.

必要性: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛. 由于

$$\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \ln\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \right) \leq \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}$$

所以 $\dfrac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}} \le \dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$，其中 $b_n = \ln a_n$．因此，级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}}$ 收敛．

由 Cauchy 收敛准则，存在自然数 m，使得对一切自然数 p，有

$$\frac{1}{2} > \sum_{n=m}^{m+p} \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}} \ge \sum_{n=m}^{m+p} \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{m+p+1}} = \frac{b_{m+p+1}-b_m}{b_{m+p+1}} = 1 - \frac{b_m}{b_{m+p+1}}$$

由此可知 $\{b_n\}$ 有界，因为 p 是任意的，因而 $\{a_n\}$ 有界．

题中级数的分母 a_n 不能换成 a_{n+1}．例如：$a_n = e^{n^2}$ 无界，但 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1} \ln a_{n+1}}$ 收敛．

三、【参考证明】：必要性：由迹的性质直接得．

充分性：首先，对于可逆矩阵 $W \in \Gamma$，有 $WW_1,\ldots,WW_r$ 各不相同．故有

$$W\Gamma \equiv \{WW_1, WW_2, \ldots, WW_r\} = \{W_1, W_2, \ldots, W_r\}$$

即 $W\Gamma = \Gamma, \forall W \in \Gamma$．

记 $S = \Sigma_{i=1}^{r} W_i$，则 $WS = S, \forall W \in \Gamma$．进而 $S^2 = rS$，即 $S^2 - rS = 0$．若 λ 为 S 的特征值，则 $\lambda^2 - r\lambda = 0$，即 $\lambda = 0$ 或 r．

结合条件 $\Sigma_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(W_i) = 0$ 知，S 的特征值只能为 0．因此有 $S - rI$ 可逆（例如取 S 的约当分解就可以直接看出）．

再次注意到 $S(S - rI) = S^2 - rS = 0$，此时右乘 $(S - rI)^{-1}$，即得 $S = 0$．证毕．

四、【参考证明】：反证：若 $XN + Y^T M^T = 0$，则 $N^T X^T + MY = 0$．

另外，由 $(X, Y) \in T$ 得 $XY + (XY)^T = 2aI$，即 $XY + Y^T X^T = 2aI$．

类似有 $MN + N^T M^T = 2aI$．因此

$$\begin{pmatrix} X & Y^T \\ M & N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & N \\ X^T & M^T \end{pmatrix} = 2a \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

进而 $\dfrac{1}{2a} \begin{pmatrix} Y & N \\ X^T & M^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y^T \\ M & N^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$，得 $YY^T + NN^T = 0$，所以 $Y = 0, N = 0$．

导致 $XY = 0$，与 $XY = aI + A \ne 0$ 矛盾．证毕．

五、【参考解答】：**【思路一】** 由定积分的定义，有

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

对于 $x \in \left(\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right), (1 \le k \le n)$，由中值定理，存在 $\xi_{n,k} \in \left(\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right)$ 使得

$$f(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right) + \frac{f''\left(\xi_{n,k}\right)}{2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2$$

于是

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - nA + \sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right) - f(x)\right]\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant M\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{M}{3n}$$

其中 $M = \frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}\left|f''(x)\right|.$　　因此，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - An\right) = -\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$$

【思路二】：由定积分的定义，有

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= x\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

对于 $x\in\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right), (1\leq k\leq n)$，由中值定理，存在 $\xi_{n,k}\in\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ 使得

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x) + f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right) + \frac{f''\left(\xi_{n,k}\right)}{2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2$$

于是

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - nA - \sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) - f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right)\right]\mathrm{d}x\right|$$

$$\leq M\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2\mathrm{d}x = \frac{M}{3n}$$

其中 $M = \frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}\left|f''(x)\right|.$ 因此，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - An\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} nf'\left(\eta_{n,k}\right)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n} - x\right)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\eta_{n,k}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$$

其中 $\eta_{n,k} \in \left(\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right)$.

【思路三】 由定积分的定义，有

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

对于 $x \in \left(\dfrac{k-1/2}{n}, \dfrac{k+1/2}{n}\right), (1 \le k \le n)$，由中值定理，存在

$$\xi_{n,k} \in \left(\frac{k-1/2}{n}, \frac{k+1/2}{n}\right)$$

使得 $f(x) = f\left(\dfrac{k}{n}\right) + f'\left(\dfrac{k}{n}\right)\left(x - \dfrac{k}{n}\right) + \dfrac{f''\left(\xi_{n,k}\right)}{2}\left(x - \dfrac{k}{n}\right)^2$. 于是

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - nA - n\int_1^{1+\frac{1}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x + n\int_0^{\frac{1}{2m}} f(x)\,\mathrm{d}x \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-\frac{1}{2}}{n}}^{\frac{k+\frac{1}{2}}{n}} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) + f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - x\right) \right]\mathrm{d}x \right|$$

$$\le M \sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{M}{3n}$$

其中 $M = \dfrac{1}{2} \max_{x \in [0,1]} \left| f''(x) \right|$. 因此

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - An \right) = \lim_{n \to \infty} n\int_1^{1+\frac{1}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{n \to \infty} n\int_0^{\frac{1}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{f(1)}{2} - \frac{f(0)}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

六、【参考解答】：容易知道 $f\left(x\right)$ 连续，注意到 $f(x) = 1 - x^2(1-x)$，于是有

$$0 < f(x) < 1 = f(0) = f(1), \forall x \in (0,1)$$

任取 $\delta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$，有 $\eta = \eta_\delta \in (0, \delta)$ 使得

$$m_\eta \equiv \min_{x \in [0,\eta]} f(x) > M_\delta \equiv \max_{x \in [\delta, 1-\delta]} f(x)$$

于是当 $n \ge \dfrac{1}{\delta^2}$ 时，

$$0 \leq \frac{\int_\delta^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^\delta f^n(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_{1-\delta}^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^\delta f^n(x)\,\mathrm{d}x} + \frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^\delta f^n(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{\int_0^\delta \left(1-x(1-x)^2\right)^n\,\mathrm{d}x}{\int_0^\delta \left(1-x^2(1-x)\right)^n\,\mathrm{d}x} + \frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^\delta f^n(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\leq \frac{\int_0^\delta \left(1-\frac{x}{4}\right)^n\,\mathrm{d}x}{\int_0^\delta \left(1-x^2\right)^n\,\mathrm{d}x} + \frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^\eta f^n(x)\,\mathrm{d}x} \leq \frac{\int_0^\delta \left(1-\frac{x}{4}\right)^n\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n\,\mathrm{d}x} + \frac{(1-2\delta)M_\delta^n}{\eta m_\eta^n}$$

$$= \frac{\frac{4}{n+1}\left(1-\left(1-\frac{\delta}{4}\right)^{n+1}\right)}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)} + \frac{(1-\delta)}{\eta}\left(\frac{M_\delta}{m_\eta^n}\right)^n$$

从而 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\int_\delta^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^\delta f^n(x)\,\mathrm{d}x} = 0.$

对于 $\varepsilon \in \left(0, \ln\frac{5}{4}\right)$，取 $\delta = 2\left(e^\varepsilon - 1\right)$，则 $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \ln\frac{2+\delta}{2} = \varepsilon$．

另一方面，由前述结论，存在 $N \geq 1$ 使得当 $n \geq N$ 时，有 $\displaystyle\frac{\int_\delta^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^\delta f^n(x)\,\mathrm{d}x} \leq \varepsilon$．

从而又有

$$\left| \frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x} - \ln 2 \right| = \frac{\int_0^1 f^n(x)\ln\frac{x+2}{2}\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\leq \frac{\int_0^\delta f^n(x)\ln\frac{x+2}{2}\,\mathrm{d}x}{\int_0^\delta f^n(x)\,\mathrm{d}x} + \frac{\int_\delta^1 f^n(x)\ln\frac{x+2}{2}\,\mathrm{d}x}{\int_0^\delta f^n(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\leq \ln\frac{\delta+2}{2} + \frac{\ln 2 \int_\delta^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^\delta f^n(x)\,\mathrm{d}x} \leq \varepsilon(1 + \ln 2)$$

因此 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x} = \ln 2.$