# 第十届清疏竞赛班非数学类 9:

## 中值定理基本框架 2

课后需要看第九届非数学类(10).

构造函数类:

设$f(x)\in C[1,2]\cap D(1,2),f(2)=2,f(1)=\frac{1}{2}$, 证明存在$\theta\in(1,2)$, 使得

$$f'(\theta)=\frac{2f(\theta)}{\theta}.$$

分析：

第一步：$y'=\frac{2y}{x}\Rightarrow\ln y=2\ln x\Rightarrow y=cx^2$

第二步:分离变量$c$得到构造函数$c(x)=\frac{y}{x^2}$

证明：

构造$c(x)=\frac{f(x)}{x^2},c(1)=\frac{1}{2},c(2)=\frac{1}{2}$,由罗尔中值定理

存在$\theta\in(1,2)$,使得$c'(\theta)=0,c'(x)=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$

此时就是$f'(\theta)=\frac{2f(\theta)}{\theta}$.

$f(x)\in C[0,\pi]\cap D(0,\pi),f(0)=0$, 证明存在$\theta\in(0,\pi)$,使得

$$2f'(\theta)=\tan\frac{\theta}{2}f(\theta)$$

分析:$2y'=y\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\ln y=-\ln\cos\frac{x}{2}+c\Rightarrow y=\frac{c}{\cos\frac{x}{2}}$

证明:

构造$c(x)=f(x)\cos\frac{x}{2},c'(x)=f'(x)\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}f(x)$

$f(0)=f(\pi)=0$,由罗尔中值定理存在$\theta\in(0,\pi)$, 使得$c'(\theta)=0$,

即$2f'(\theta)=\tan\frac{\theta}{2}f(\theta)$.

$f(x)\in D^2[0,1], f(0)=f(1)=0$, 证明存在$\theta\in(0,1)$, 使得

$$f''(\theta)=\frac{2f'(\theta)}{1-\theta}$$

分析：

$$\frac{y''}{y'}=\frac{2}{1-x}\Rightarrow \ln y'=-2\ln(1-x)+c\Rightarrow y'=\frac{c}{(1-x)^2}$$

证明：

构造$c(x)=(1-x)^2 f'(x), c(1)=0$,

$$c'(x)=-2(1-x)f'(x)+(1-x)^2 f''(x)$$

$f(0)=f(1)=0$知, $f'(x)$在$(0,1)$有一个零点, 因此

$c(x)$有两个零点, 所以存在$\theta\in(0,1)$, 使得$c'(\theta)=0$

化简即得$f''(\theta)=\dfrac{2f'(\theta)}{1-\theta}$.

较复杂的情况

$f\in C^2\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],f(0)=0,$ 证明存在 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 使得

$f''(\theta)=f(\theta)\left(1+2\tan^2\theta\right)$

分析：这种题不应该是猜该怎么构造, 而是必然该怎么构造

第一步解微分方程：$y''=y\left(1+2\tan^2 x\right)$

如果丢软件, $y(x)=\frac{c_1}{\cos x}+\frac{c_2\left(\sin(2x)+2x\right)}{\cos x}$

如果自己算：二阶变系数大部分情况下务必猜出一个解.

另外一个线性无关解可以通过刘维尔公式计算.

$y(x)\cos x=c_1+c_2\left(\sin(2x)+2x\right)$

$\left(y(x)\cos x\right)'=c_2\left(2\cos(2x)+2\right)$

$\frac{\left(y(x)\cos x\right)'}{1+\cos(2x)}=c_2,\left(\frac{\left(y(x)\cos x\right)'}{1+\cos(2x)}\right)'=0$

证明：

$g(x)=f(x)\cos x,h(x)=\left(\frac{g'(x)}{1+\cos(2x)}\right)'=\frac{f''(x)-f(x)\left(1+2\tan^2 x\right)}{2\cos x}$

$g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,$ 由罗尔

因此 $g'(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 至少有两个零点，两个零点之间 $1+\cos(2x)\neq 0$

所以继续由罗尔, $h(x)$ 至少有一个零点，因此

存在 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $f''(\theta)=f(\theta)\left(1+2\tan^2\theta\right)$.

$f(x)\in D^2[0,2\pi]$且$f''(x)\neq f(x)$, 证明存在$\theta\in(0,2\pi)$, 使得

$$\tan\theta=\frac{2f'(\theta)}{f(\theta)-f''(\theta)}$$

分析：

解微分方程$\tan x=\dfrac{2y'}{y-y''}$, $y(x)=\dfrac{c_1}{\sin x}+c_2\dfrac{x}{\sin x}$

$y\sin x=c_1+c_2x, (y\sin x)'=c_2, (y\sin x)''=0$

证明：

$g(x)=f(x)\sin x, g(0)=g(\pi)=g(2\pi)=0$

由罗尔, $g'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$至少有两个零点

继续由罗尔, $g''$有一个零点$\theta\in(0,2\pi)$

$g''(x)=f''(x)\sin x+2f'(x)\cos x-f(x)\sin x$

$f''(\theta)\tan\theta+2f'(\theta)-f(\theta)\tan\theta=0$

因此存在$\theta\in(0,2\pi)$, 使得$\tan\theta=\dfrac{2f'(\theta)}{f(\theta)-f''(\theta)}$.

多中值的情况.

$1: f(x)\in C[0,1], \int_0^1 f(x)dx\neq 0$, 证明存在互不相同的$\theta_1, \theta_2, \theta_3\in[0,1]$, 使得

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{1}{1+\theta_1^2}\int_0^{\theta_1} f(x)dx+f(\theta_1)\arctan\theta_1\right]\theta_3$$

$$=\left[\frac{1}{1+\theta_2^2}\int_0^{\theta_2} f(x)dx+f(\theta_2)\arctan\theta_2\right](1-\theta_3)$$

分析：

$g(x)=\arctan x\int_0^x f(y)dy$, 此时上述要证的变成

$$\frac{g(1)}{2}=g'(\theta_1)\theta_3=g'(\theta_2)(1-\theta_3)$$

条件就是$g(1)\neq 0, g(0)=0$

证明：

由介值定理, 选取$g(\theta_3)=\dfrac{g(1)}{2}$

由拉格朗日中值定理, 存在$\theta_1<\theta_3<\theta_2$, 使得

$$g'(\theta_2)=\frac{g(1)-g(\theta_3)}{1-\theta_3}=\frac{g(1)}{2(1-\theta_3)}, \frac{g(\theta_3)-g(0)}{\theta_3-0}=\frac{g(\theta_3)}{\theta_3}=\frac{g(1)}{2\theta_3}=g'(\theta_1)$$

此时恰好就是$\dfrac{g(1)}{2}=g'(\theta_1)\theta_3=g'(\theta_2)(1-\theta_3)$

$2: f,g\in D[0,1],\int_0^1 f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$, 证明存在$\theta\neq\eta\in(0,1)$

使得$f'(\theta)=g'(\theta)\left[f(\eta)-f(\theta)\right]$.

分析：解关于$y$的微分方程$y'=g'(k-y)$

得$y(x)=k+ce^{-g(x)}$

证明：

构造$c(x)=\left(f(x)-k\right)e^{g(x)},c'(x)=e^{g(x)}\left(f'(x)-g'(x)(k-f(x))\right)$

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx+\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx\Rightarrow\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx=2\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$$

由积分中值定理, 存在$\alpha_1\in\left(0,\frac{2}{3}\right),\alpha_2\in\left(\frac{2}{3},1\right)$，使得$\frac{2}{3}f(\alpha_1)=\frac{2}{3}f(\alpha_2)$

我们$\eta=\alpha_1,k=f(\eta)$, 此时$c(x)$有两个相等的点$c(\alpha_1),c(\alpha_2)$

因此由罗尔$c'(x)$必有零点$\theta\in(\alpha_1,\alpha_2)$, 此时

$\theta\neq\eta\in(0,1)$, 使得$f'(\theta)=g'(\theta)\left[f(\eta)-f(\theta)\right]$.

分部积分应该有0边界条件的观点：

决赛真题：

若$f \in C^1[0,1]$且满足$\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{2},\int_0^1 xf(x)dx=\frac{3}{2}$

证明存在$\eta \in (0,1)$使得$f'(\eta)=3.$

分析：

想法:分部积分转移导数,

$$\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}b=\int_0^1 (ax+b)f(x)dx=\int_0^1 p'(x)f(x)dx$$

$$=f(1)p(1)-f(0)p(0)-\int_0^1 p(x)f'(x)dx$$

前面的部分是逐点值,必须选取$p(1)=p(0)=0.$

这个方法是本质的,答案为会迎合方法.

证明：

$$\int_0^1 [x(x-1)]'f(x)dx=-\int_0^1 x(x-1)f'(x)dx$$

左边$=\int_0^1 (2x-1)f(x)dx=\frac{1}{2}$

右边$=-f'(\eta)\int_0^1 x(x-1)dx=\frac{f'(\eta)}{6}$

就得到$f'(\eta)=3.$

性态分析法：

本方法不必优先考虑,实在毫无下手的点再考虑适用.

$f(x)\in C[0,1],\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=0,$ 证明存在互不相同的 $\eta,\xi\in(0,1)$.

使得 $2f(\eta)=\frac{f(\xi)}{\xi^2}$.

证明：

令 $g(x,y)=2y^2f(x)-f(y),\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2y^2f(x)-f(y)\right)dxdy=0$

如果要证的不对

那么 $g$ 在 $\left\{(x.y)\in(0,1)^2:y>x\right\}$ 和 $\left\{(x.y)\in(0,1)^2:y<x\right\}$ 分别恒正或者恒负

结合 $\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} g(x,y)dxdy=0\Rightarrow$

$g$ 在 $\left\{(x.y)\in(0,1)^2:y>x\right\}$ 和 $\left\{(x.y)\in(0,1)^2:y<x\right\}$ 符号相反

由连续函数保证号性，我们知道在 $y=x$ 必有 $g\equiv 0$

从而 $\left(2y^2-1\right)f(y)=0,\forall y\in[0,1]\Rightarrow f\equiv 0,$ 矛盾！

因此存在互不相同的 $\eta,\xi\in(0,1)$, 使得 $2f(\eta)=\frac{f(\xi)}{\xi^2}$.

$f(x)\in C^n[0,1], \int_0^1 x^k f(x)dx=0, k=0,1,2,\cdots,n$

证明：存在$\theta\in(0,1)$使得$f^{(n)}(\theta)=0.$

分析：

条件是说对任何不超过$n$次的多项式$p$都有

$\int_0^1 p(x)f(x)dx=0.$

$0=\int_0^1 g^{(n)}(x)f(x)dx=(-1)^n\int_0^1 g(x)f^{(n)}(x)dx.$

$g^{(n)}(x)$应该是一个不超过$n$次的多项式, 所以$g(x)$是一个不超过$2n$次多项式

为了中值定理, 期望$g$不变号, 为了分部积分有零边界条件

$g^{(j)}(0)=g^{(j)}(1)=0, j=0,1,2,\cdots,n-1$

$g(x)=x^n(x-1)^n$

证明：

注意到$\int_0^1 x^n(x-1)^n f^{(n)}(x)dx=(-1)^n\int_0^1\left(x^n(x-1)^n\right)^{(n)}f(x)dx=0$

由积分中值定理, 存在$\theta\in(0,1)$使得$f^{(n)}(\theta)=0.$

迭代法：相对比较深刻的方法并且蕴含了非常强的结果.

$f(x)\in C[0,1],\int_0^1 f(x)dx=0,$求证存在$\theta\in(0,1),$使得

$\theta^2 f(\theta)=\int_0^\theta (x^2+x)f(x)dx.$

分析：令$g(x)=\int_0^x (y^2+y)f(y)dy.$解微分方程$g=\frac{x}{x+1}g'$

解得$g(x)=cxe^x$

证明：

构造函数$c(x)=\frac{\int_0^x (y^2+y)f(y)dy}{xe^x},c'(x)=\frac{x^2 f(x)-\int_0^x (y^2+y)f(y)dy.}{\frac{x^2}{x+1}e^x}$

$$\lim_{x\to0^+}c(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x (y^2+y)f(y)dy}{xe^x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(2x^2+x)f(x)}{1}=0$$

即$c(0)=0,$注意为了让$c'$有零点,我们还需要对$\int_0^x (y^2+y)f(y)dy$找一个零点

这个时候这个结果强烈的依赖于迭代法,有一定深刻程度.

注意到第二积分中值定理考试的能使用闭区间就闭区间,

开区间我们也有总结，但阅卷老师会的几率几乎为0.

假设$\int_0^x \left(y^2+y\right)f\left(y\right)dy>0,\forall x\in\left(0,1\right]$

那么对$\theta_0=1$,由第二积分中值定理,存在$0\le\theta_1\le\theta_0$,使得

$$\int_0^{\theta_0}\left(y^2+y\right)f\left(y\right)dy=\left(\theta_0^2+\theta_0\right)\int_{\theta_1}^{\theta_0}f\left(y\right)dy,$$

由第二积分中值定理,存在$0\le\theta_2\le\theta_1$,使得

$$\int_0^{\theta_1}\left(y^2+y\right)f\left(y\right)dy=\left(\theta_1^2+\theta_1\right)\int_{\theta_2}^{\theta_1}f\left(y\right)dy,$$

...

存在递减的非负$\theta_n$,使得

$$\int_0^{\theta_n}\left(y^2+y\right)f\left(y\right)dy=\left(\theta_n^2+\theta_n\right)\int_{\theta_{n+1}}^{\theta_n}f\left(y\right)dy,$$

另外一方面如果$\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=a>0$,那么

$$\int_0^{a}\left(y^2+y\right)f\left(y\right)dy\leftarrow\int_0^{\theta_n}\left(y^2+y\right)f\left(y\right)dy=\left(\theta_n^2+\theta_n\right)\int_{\theta_{n+1}}^{\theta_n}f\left(y\right)dy\to 0,$$

因此$a=0$.

现在$0=\int_0^1 f\left(y\right)dy=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{\theta_{n+1}}^{\theta_n}f\left(y\right)dy\Rightarrow\int_{\theta_{n+1}}^{\theta_n}f\left(y\right)dy=0,\forall n\ge0$

$$\int_0^{\theta_n}\left(y^2+y\right)f\left(y\right)dy=0,\forall n\ge0\Rightarrow\int_0^{1}\left(y^2+y\right)f\left(y\right)dy=0,\text{矛盾!}$$

因此我们证明了$\int_0^x \left(y^2+y\right)f\left(y\right)dy$还有一个$\left(0,1\right]$的零点，这样由罗尔完成原本的证明.