

2015 年第六届全国大学生数学竞赛决赛

(非数学类) 试卷

一、填空题 (共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{u^2} du \right)^2}{\int_0^x e^{2u^2} du} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设实数 $a \neq 0$, 微分方程 $\begin{cases} y'' - ay'^2 = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = -1 \end{cases}$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, 则 $A^{50} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 不定积分 $I = \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设曲线积分 $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{|x| + |y|}$, 其中 L 是以 $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ 为顶点的正方形的边界曲线, 方向为逆时钟方向, 则 $I = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设 D 是平面上由光滑闭曲线围成的有界区域, 其面积为 $A > 0$, 函数 $f(x, y)$ 在该区域及其边界上连续, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续且 $f(x, y) > 0$. 记

$$J_n = \left(\frac{1}{A} \iint_D f^{1/n}(x, y) d\sigma \right)^n,$$

则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、(本题 12 分) 设 $\vec{l}_j, j = 1, 2, \dots, n$ 是平面上点 P_0 处的 $n \geq 2$ 各方向向量, 相邻两个向量之间的夹角为 $\frac{2\pi}{n}$. 若函数 $f(x, y)$ 在点 P_0 有连续偏导, 证明: $\sum_{j=1}^n \frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}_i} = 0$.

三、(本题 14 分) 设 A_1, A_2, B_1, B_2 均为 n 阶方阵, 其中 A_2, B_2 可逆. 证明: 存在可逆矩阵 P, Q 使得 $PA_iQ = B_i (i = 1, 2)$ 成立的充要条件是 $A_1A_2^{-1}$ 和 $B_1B_2^{-1}$ 相似.

四、(本题 14 分) 设 $p > 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_{n+1}^p = x_n^p + x_n^{2p} (n = 1, 2, \dots)$. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + x_n^p}$ 收敛并求其和.

五、(本题 15 分) (1) 展 $[-\pi, \pi]$ 上的函数 $f(x) = |x|$ 成傅里叶级数，并证明 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(2) 求积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1+e^u} du$ 的值.

六、(本题 15 分) 设 $f(x, y)$ 为 R^2 上的非负的连续函数，若

$$I = \lim_{t \rightarrow +\infty} \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) d\sigma$$

存在极限，则称广义积分 $\iint_{R^2} f(x, y) d\sigma$ 收敛于 I .

(1) 设 $f(x, y)$ 为 R^2 上的非负的连续函数，若 $\iint_{R^2} f(x, y) d\sigma$ 收敛于 I ，证明极限

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \iint_{-t \leq x, y \leq t} f(x, y) d\sigma \text{ 存在且收敛于 } I.$$

(2) 设 $\iint_{R^2} e^{ax^2+2bxy+cy^2} d\sigma$ 收敛于 I ，实二次型 $ax^2 + 2bxy + cy^2$ 在正交变换下的标准

二次型为 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$. 证明 λ_1, λ_2 都小于零.