

## 2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类一、二年级) 参考答案

### 一、填空题

- (1) 0      (2)  $p > 1$       (3)  $3\sqrt{2}\pi$     (4)  $(1, 0, 1), (-1, 0, -1), (1, t, -1), (-1, t, 1), t \in R$ .

**二、【参考解答】:** 由于形如  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  的平面与  $S$  只能交于直线或空集, 所以可以设平面  $\sigma$  的方程为  $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ , 它与  $S$  交线为圆. 令  $x = \cos \theta, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$ , 则  $\sigma$  与  $S$  的交线可表示为

$$\Gamma(\theta) = \left( \cos \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \alpha \cos \theta + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin \theta + \gamma \right), \theta \in [0, 2\pi].$$

由于  $\Gamma(\theta)$  是一个圆, 所以它到一个定点  $P = (a, b, c)$  的距离为常数  $R$ . 于是有恒等式

$$(\cos \theta - a)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta - b \right)^2 + \left( \alpha \cos \theta + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin \theta + \gamma - c \right)^2 = R^2.$$

利用  $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ , 可以将上式写成

$$A \cos 2\theta + B \sin 2\theta + C \cos \theta + D \sin \theta + E = 0,$$

其中  $A, B, C, D, E$  为常数. 由于这样的方程对所有的  $\theta \in [0, 2\pi]$  恒成立, 所以  $A = B = C = D = E = 0$ .

特别地, 我们得到

$$A = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 1) - \frac{1}{4}(\beta^2 + 1) = 0, B = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\beta = 0.$$

于是得到  $\alpha = 0, \beta = \pm 1$ , 平面  $\sigma$  的法向量为

$$(-\alpha, -\beta, 1) = (0, 1, 1) \text{ 或 } (0, -1, 1) \text{ 的非零倍数.}$$

**三、【参考证明】:** 存在可逆方阵  $T$  使得  $T^{-1}AT = \tilde{A}$  为对角阵. 令  $T^{-1}BT = \tilde{B}$ , 则

$$\text{tr}((AB)^2) = \text{tr}((\tilde{A}\tilde{B})^2), \text{tr}(A^2B^2) = \text{tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2).$$

令  $\tilde{A} = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}), \tilde{B} = (b_{ij})_{n \times n}$ , 则

$$\text{tr}((\tilde{A}\tilde{B})^2) = \sum_{i,j=1}^n a_{ii}a_{jj}b_{ij}b_{ji} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{ii}a_{jj}b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n a_{ii}^2b_{ii}^2$$

$$\text{tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2) = \sum_{i,j=1}^n a_{ii}^2b_{ij}^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ii}^2 + a_{jj}^2)b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n a_{ii}^2b_{ii}^2$$

于是

$$\text{tr}((\tilde{A}\tilde{B})^2) - \text{tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ii} - a_{jj})^2 b_{ij}^2 \leq 0.$$

**四、【参考证明】：**设 $\Gamma$ 的圆心为 $O$ ,  $\alpha_i = \frac{1}{2}\angle B_i O B_{i+1}$ ,  $B_{n+1} = B_1$ , 则

$$P_A = 2 \sum_{i=1}^n \tan \alpha_i, P_B = 2 \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i.$$

先证：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有

$$\tan^{\frac{1}{3}} x \sin^{\frac{2}{3}} x > x. \quad (1)$$

令 $g(x) = \frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}} x} - x$ , 则 $g(0) = 0$ ,

$$g'(x) = \frac{\cos^{\frac{4}{3}} x + \frac{1}{3} \cos^{-\frac{2}{3}} x \sin^2 x}{\cos^{\frac{2}{3}} x} - 1 = \frac{2 \cos^2 x + 1}{3 \cos^{\frac{4}{3}} x} - 1 > \frac{3\sqrt[3]{\cos^2 x \cos^2 x \cdot 1}}{3 \cos^{\frac{4}{3}} x} - 1 = 0$$

故 $g(x)$ 严格单调递增，因而 $g(x) > g(0) = 0$ . (1)得证.

$$\begin{aligned} P_A^{\frac{1}{3}} P_B^{\frac{2}{3}} &= 2 \left( \sum_{i=1}^n \tan \alpha_i \right)^{\frac{1}{3}} \left( \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \right)^{\frac{2}{3}} = 2 \left( \sum_{i=1}^n \left( \tan^{\frac{1}{3}} \alpha_i \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \left( \sum_{i=1}^n \left( \sin^{\frac{2}{3}} \alpha_i \right)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \\ &\geq 2 \sum_{i=1}^n \tan^{\frac{1}{3}} \alpha_i \sin^{\frac{2}{3}} \alpha_i > 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi. \end{aligned}$$

**五、【参考证明】：**令 $F(x) = \int_0^x a(t) dt$ , 则

$$y(x) = Ce^{-F(x)} + \int_0^x f(t) e^{F(t)-F(x)} dt.$$

对于任意 $\varepsilon > 0$ , 存在 $x_0$ , 当 $t \geq x_0$ 时, 有 $|f(t)| \leq \varepsilon a(t)$ .

$$\int_0^x f(t) e^{F(t)-F(x)} dt = e^{-F(x)} \int_0^{x_0} f(t) e^{F(t)} dt + e^{-F(x)} \int_{x_0}^x f(t) e^{F(t)} dt.$$

注意到

$$\begin{aligned} \left| e^{-F(x)} \int_{x_0}^x f(t) e^{F(t)} dt \right| &\leq e^{-F(x)} \int_{x_0}^x \varepsilon a(t) e^{F(t)} dt \\ &= \varepsilon e^{-F(x)} e^{F(t)} \Big|_{t=x_0}^{t=x} = \varepsilon \left( 1 - e^{F(x_0) - F(x)} \right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

所以 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} Ce^{-F(x)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-F(x)} \int_0^{x_0} |f(t)| e^{-F(t)} dt + \varepsilon = \varepsilon$ . 由 $\varepsilon$ 的任意性, 知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| = 0.$$

**六、【参考解答】：**令 $g(x) = f(x) - x$ , 则有

$$xg(x) = 2 \int_{\frac{x}{2}}^x g(t) dt.$$

对于  $x > 0$ , 根据积分平均值定理, 存在  $x_1 \in (0, x)$ , 使得  $\int_{\frac{x}{2}}^x g(t) dt = g(x_1) \frac{x}{2}$ . 因而

$$g(x) = g(x_1).$$

设  $x_0 = \inf \{t \in (0, x) \mid f(x) = f(t)\}$ , 则有  $g(x_0) = g(x)$ .

若  $x_0 > 0$ , 则重复上面的过程, 可知存在  $y_0 \in (0, x_0)$ , 使得  $g(y_0) = g(x_0) = g(x)$ . 这与  $x_0$  的取法矛盾. 因此, 必有  $x_0 = 0$ . 这说明  $g(x) = g(0)$ .

同理, 对  $x < 0$ , 也可以证明  $g(x) = g(0)$ .

总之,  $g(x)$  是常数. 于是  $f(x) = x + C, C$  是常数.