专业: ______ 座位号: ______ 考场号: ______ 所在院校: ______ 准考证号: ______ 姓名: ______

密封线 答题时不要超过此线

第十五届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案
(数学类高年级组, 2024 年 4 月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四				总分
满分	20	10	14	20	12	12	12	100
得分								

注意:

1. 第一至第四大题是必答题, 再从第五至第十大题中任选 3 题, 题号要填入上面的表中 (多选无效).
2. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.

一、 (本题 20 分, 每小题 5 分) 填空题

1. 将 24 阶实对称矩阵按合同关系进行分类, 即两个 24 阶实对称矩阵属于同一类当且仅当它们相互合同, 则共有 <u>325</u> 类.

2. 设 $f(x)=e^{-x^2}$, 则极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f\Big(\frac{k}{n}\Big)=\underline{\quad 0 \quad}.$$

3. 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数, $\int_0^1 x^k f(x)\,dx=a_k\ (k=0,1,2)$, 则

$$\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y f(z)\,dz=\underline{\quad\frac{a_0-2a_1+a_2}{2}\quad}.$$

4. 微分方程 $xy'+y=\cos x$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的全局解为

$$y(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

二、(本题 10 分) 在空间直角坐标系中, 设椭球 S 的方程为

$$x^2+2y^2+3z^2=4.$$

过动点 $P=(x,y,z)$ 存在三条互相垂直的射线与椭球 S 相切, 求动点 P 满足的方程.

解答. 设 $P=(x,y,z)$, 过 P 有三条互相垂直的射线与椭球 S 相切. 又设这三条射线的单位方向向量为

$$e_1=(A_{11},A_{12},A_{13}),\ \ e_2=(A_{21},A_{22},A_{23}),\ \ e_3=(A_{31},A_{32},A_{33}).$$

则

$$A=\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}$$

是一个 3 阶正交矩阵. .... (3 分)

因为每条射线与椭球相切，射线所在直线

$$P+te_j=(x+A_{j1}t,y+A_{j2}t,z+A_{j3}t),\ \ t\in\mathbb{R},\ \ j=1,2,3$$

与椭球 S 仅交于一点，即 t 的二次方程

$$(x+A_{j1}t)^2+2(y+A_{j2}t)^2+3(z+A_{j3}t)^2=4$$

有重根, 也就是方程

$$(A_{j1}^2+2A_{j2}^2+3A_{j3}^2)t^2+2(xA_{j1}+2yA_{j2}+3zA_{j3})t+(x^2+2y^2+3z^2-4)=0$$

的判别式

$$\Delta=4[(xA_{j1}+2yA_{j2}+3zA_{j3})^2-(A_{j1}^2+2A_{j2}^2+3A_{j3}^2)(x^2+2y^2+3z^2-4)]=0.$$

.... (6 分)

由此得到三个方程

$$A_{j1}^2x^2+4A_{j2}^2y^2+9A_{j3}^2z^2+4A_{j1}A_{j2}xy+6A_{j1}A_{j3}xz+12A_{j2}A_{j3}yz$$

$$-(A_{j1}^2+2A_{j2}^2+3A_{j3}^2)(x^2+2y^2+3z^2-4)=0,\ \ j=1,2,3.$$

因为矩阵 A 为正交矩阵，三个列向量为单位向量，并相互垂直. 将三个方程相加得到

$$x^2+4y^2+9z^2-6(x^2+2y^2+3z^2-4)=0.$$

于是 $P=(x,y,z)$ 点满足方程

$$5x^2+8y^2+9z^2=24.$$

.... (10 分)

三、(本题 14 分) 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, E 为单位矩阵. 求证 $A^4 = E$ 当且仅当

$\operatorname{rank}(E-A) + \operatorname{rank}(E+A+A^2+A^3) = n$.

证明. 考虑多项式 $p = 1-x, q = 1+x+x^2+x^3$. 则有: $(p,q) = 1$. 故存在 $f(x), g(x)$ 使得

$$f(x)(1-x) + g(x)(1+x+x^2+x^3) = 1.$$

结果

$$f(A)(E-A) + g(A)(E+A+A^2+A^3) = E.$$

.... (5 分)

由初等变换可得:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1+x+x^2+x^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-x & g(x)(1+x+x^2+x^3) \\ 0 & 1+x+x^2+x^3 \end{pmatrix} \\
\to &\begin{pmatrix} 1-x & f(x)(1-x)+g(x)(1+x+x^2+x^3) \\ 0 & 1+x+x^2+x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1+x+x^2+x^3 \end{pmatrix} \\
\to &\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^4-1 & 1+x+x^2+x^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^4-1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^4-1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

故 $\begin{pmatrix} E-A & O \\ O & E+A+A^2+A^3 \end{pmatrix}$ 可经分块初等变换化为 $\begin{pmatrix} E & O \\ O & A^4-E \end{pmatrix}$.

从而

$$\operatorname{rank}(E-A) + \operatorname{rank}(E+A+A^2+A^3) = n + \operatorname{rank}(A^4-E).$$

故得:

$$A^4 = E \Leftrightarrow \operatorname{rank}(E-A) + \operatorname{rank}(E+A+A^2+A^3) = n.$$

证毕.

.... (14 分)

四、(本题 20 分) 设 f, g 是 $[0,1]$ 上有正下界的 Riemann 可积函数.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx, \delta = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx > 0.$$

(i) 证明: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^1 \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx$.

(ii) 若进一步假设 f, g 分段常值, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$, $\delta = \dfrac{3}{2}$. 试给出在此种条件下 $\displaystyle\int_0^1 \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx$ 的下确界.

证明. (i) 由 $\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx > 0$, 可得存在区间 $[a,b] \subset [0,1]$ 使得 f, g 在 $[a,b]$ 上处处不相等. 因此

$$\frac{f^2(x)+g^2(x)}{g(x)} \geqslant \frac{2f(x)g(x)}{g(x)} = 2f(x), \qquad \forall\, x \in [0,1],$$

且当 $x \in [a,b]$ 时, 上式中严格不等号成立. 从而

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx = \int_0^1 \frac{f^2(x)+g^2(x)}{g(x)}\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\\ &> \int_0^1 2f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.\end{aligned}$$

.... (10 分)

(ii) 记 $E = \{x \in [0,1] \,|\, f(x) \geqslant g(x)\}$, $F = [0,1] \setminus E$. 则 E, F 都是有限个区间和有限个单点集的并. 因此, f, g 都是 E, F 上的 Riemann 可积函数. 记

$$A = \int_E f(x)\,dx \equiv \int_0^1 f(x)\chi_E(x)\,dx, \quad B = \int_E g(x)\,dx.$$

则

$$\int_F f(x)\,dx = 1 - A, \quad \int_F g(x)\,dx = 1 - B, \quad \delta = 2(A - B).$$

因此,

$$0 < B = A - \frac{\delta}{2} < A < 1.$$

类似于 (i), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx=\int_E \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx+\int_F \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx\\
=&\frac{A^2}{B}\int_E \frac{\big(A^{-1}f(x)\big)^2}{\big(B^{-1}g(x)\big)}\,dx+\frac{(1-A)^2}{1-B}\int_F \frac{\big((1-A)f(x)\big)^2}{\big((1-B)g(x)\big)}\,dx\\
\geqslant&\frac{A^2}{B}+\frac{(1-A)^2}{1-B}=\frac{(B+\frac{\delta}{2})^2}{B}+\frac{(1-B-\frac{\delta}{2})^2}{1-B}\\
=&B+\delta+\frac{\delta^2}{4B}+1-B-\delta+\frac{\delta^2}{4(1-B)}=1+\frac{\delta^2}{4B}+\frac{\delta^2}{4(1-B)}.
\end{aligned}
$$

令

$$h(t)=1+\frac{\delta^2}{4t}+\frac{\delta^2}{4(1-t)},\qquad t\in(0,1-\frac{\delta}{2})=(0,\frac{1}{4}).$$

则 h 在 $(0,\frac{1}{4}]$ 上单减, 进而

$$h(B)>h(\frac{1}{4})=4,\qquad B\in\big(0,\frac{1}{4}\big).$$

另一方面, 对于 $t\in\big(0,\frac{1}{4}\big)$, 取

$$f(x)=\begin{cases}2t+\frac{3}{2}, & x\in[0,\frac{1}{2}),\\ \frac{1}{2}-2t, & x\in[\frac{1}{2},1],\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}2t, & x\in[0,\frac{1}{2}),\\ 2-2t, & x\in[\frac{1}{2},1],\end{cases}$$

则 f,g 满足题设条件, 而

$$\int_0^1 \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx=h(t).$$

因此, 所求下确界为 $h(\frac{1}{4})=4$. .... (20 分)

注: 将 (ii) 中 f,g 为分段常值函数改为 Riemann 可积函数, 结论仍然成立. 当 f,g 只是 Riemann 可积时, f,g 限制在相应的 E,F 上不一定 Riemann 可积. 但结论可以通过逼近得到, 或者直接将对应的 E,F 上的积分看作 Lebesgue 积分.

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

五、(本题 12 分) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可微, $W = \{x \in [0,1] \big| f'(x) = 0\}$, $E = \{f(x) \big| x \in W\}$. 证明: E 是零测度集.

证明. (此为 Sard 定理的特例) 由 f 的连续可微性, W 为闭集, $E = f(W)$. 任取 $\varepsilon > 0$, $\forall x \in W$, 有 $\delta_x > 0$ 使得

$$|f'(t)| < \varepsilon, \qquad \forall t \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [0,1].$$

则 $W \subset V = \bigcup_{x \in W}(x - \delta_x, x + \delta_x)$. 因 V 为开集, 所以 $V = \bigcup\limits_{n \in J}(\alpha_n, \beta_n)$, 这里 (α_n, β_n) 是 V 的构成区间, 两两不交, J 是至多可列集(由于 W 是有界闭集, 事实上, 可以设 J 有限).

.... (6 分)

考虑 $[\alpha_n, \beta_n]$, 不妨设 $[\alpha_n, \beta_n] \subseteq [a, b]$. 设 f 在 $[\alpha_n, \beta_n]$ 上的最大值点和最小值点为 ξ_n 和 η_n. 我们有

$$f(\xi_n) - f(\eta_n) = \int_{\eta_n}^{\xi_n} f'(x)\, dx \leqslant \varepsilon |\xi_n - \eta_n|.$$

这样 E 的测度 $|E|$ 满足

$$|E| \leqslant |f(V)| \leqslant \sum_{n \in J} \Big| f[\alpha_n, \beta_n] \Big| \leqslant \varepsilon \sum_{n \in J} |\xi_n - \eta_n| \leqslant \varepsilon(b - a).$$

由此得到 $|E| = 0$. .... (12 分)

六、(本题 12 分) (i) 设 $n \geqslant 3$, f 是以 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为简单零点的 n 次多项式, m 为整数 $(0 < m \leqslant n-2)$, 证明: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^m}{f'(a_k)} = 0.$

(ii) 若 f 在 $|z| \leqslant 1$ 上解析, 证明: 当 $|z| < 1$ 时, $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\, d\theta \geqslant (1-|z|^2)|f(z)|.$

证明. (i) 考虑函数 $\varphi(z) = \frac{z^m}{f(z)}$, 因为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 f 的简单零点,从而为 φ 的简单极点. .... (2 分)

以原点为心、R 为半径作圆周 C (这里 $R = 1 + \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\}$), 则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都含于 C 的内部. 由留数定理,

$$\int_C \varphi(z)\, dz = \int_C \frac{z^m}{f(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(\varphi(z), a_k)$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{z^m}{f'(z)}\Big|_{z=a_k} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^n}{f'(a_k)}.$$

.... (4 分)

另一方面, 容易知道, $\operatorname{Res}(\varphi(z), \infty) = 0$. 由

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(\varphi(z), a_k) + \operatorname{Res}(\varphi(z), \infty) = 0$$

知 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^n}{f'(a_k)} = 0.$ .... (6 分)

(ii) 因 f 在 $|z| \leqslant 1$ 上解析, 则当 $|z| < 1$ 时, $\varphi(\zeta) = (1 - \bar{z}\zeta) f(\zeta)$ 在 $|\zeta| \leqslant 1$ 上解析. 由 Cauchy 公式,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{(1-\bar{z}\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \varphi(z) = (1-|z|^2) f(z).$$

.... (9 分)

在上式右端的积分中，令 $\zeta = e^{i\theta}$, 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{(1-\bar{z}\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(1-\bar{z}e^{i\theta}) f(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} e^{i\theta} i\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-\bar{z}e^{i\theta}) f(e^{i\theta})}{1 - e^{-i\theta} z}\, d\theta.$$

所以

$$(1-|z|^2)|f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{(1-\bar{z}e^{i\theta})}{1 - e^{-i\theta} z} \right| \left| f(e^{i\theta}) \right| d\theta$$

$= \displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(e^{i\theta}) \right| d\theta.$ .... (12 分)

七、(本题 12 分) 设 p 为素数, n 为正整数, 有限群 G 的阶为 p^n. 证明对任意 $0 \le k \le n$, 群 G 有 p^k 阶正规子群.

证明. 对 n 作归纳. 若 $n=1$, 则 G 为 p 阶循环群. 显然单位元群 $\{e\}$ 和 G 本身都是 G 的正规子群, 它们的阶分别为 1 和 p, 故 $n=1$ 时结论成立.

…………………………………………………………… (2 分)

设 $n \ge 2$, 且结论在 $n-1$ 时成立, 下面考察 n 的情形. 设 G 的阶为 p^n, 由于 G 为有限 p-群, 所以 G 的中心 $Z(G) \ne \{e\}$. 取 $Z(G)$ 中一个非单位元 g, 则 g 的阶 $o(g)$ 整除 p^n 且 $o(g) \ne 1$. 设 $o(g) = p^j$, 其中 $j \ge 1$, 令 $a = g^{p^{j-1}}$, 则有 $o(a) = p$. 设 $N = \langle a \rangle$, 则 N 为 G 的 p 阶子群. 由于 $N \le Z(G)$, 所以任取 $a^i \in N$ 和 $x \in G$,

$$xa^ix^{-1} = a^ixx^{-1} = a^i \in N,$$

从而 $N \trianglelefteq G$, 即 G 有 p 阶正规子群 N.

…………………………………………………………… (6 分)

记 $\overline{G} = G/N$, 则 $|\overline{G}| = p^{n-1}$, 由归纳假设, 对任意 $0 \le k \le n-1$, $\overline{G}$ 有 p^k 阶正规子群 $\overline{N_k}$. 在 $G \to \overline{G}$ 的典范同态下, $\overline{N_k}$ 的原像 N_k 为 G 的包含 N 的正规子群且 $\overline{N_k} = N_k/N$, 从而

$$|N_k| = |\overline{N_k}||N| = p^k \cdot p = p^{k+1}.$$

这表明对任意 $0 \le k \le n-1$, G 有 p^{k+1} 阶正规子群 N_k. 而单位元群 $\{e\}$ 是 G 的平凡正规子群, 阶为 $1 = p^0$, 故结论在 n 时成立. 由归纳法原理, 结论对任意正整数 n 成立.

…………………………………………………………… (12 分)

八、(本题 12 分) 在空间直角坐标系中, 设悬链面 S 的方程为

$$x(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \ \ u \in \mathbb{R}, \ \ v \in [0, 2\pi].$$

(i) 证明：悬链面是极小曲面；

(ii) 求悬链面上 Gauss 曲率 K 取到最大值的所有点.

解答. 计算偏导数

$$\begin{aligned} x_u =& (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1), \\ x_v =& (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0). \end{aligned}$$

计算曲面的单位法向量

$$n = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|} = \frac{1}{\cosh u}(-\cos v, -\sin v, \sinh u).$$

计算二阶偏导数

$$\begin{aligned} x_{uu} =& (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0), \\ x_{uv} =& (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0), \\ x_{vv} =& (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0). \end{aligned}$$

.... (2 分)

第一基本形式系数

$$E = x_u \cdot x_u = \cosh^2 u, \ \ F = x_u \cdot x_v = 0, \ \ G = x_v \cdot x_v = \cosh^2 u.$$

$$L = x_{uu} \cdot n = -1, \ \ M = x_{uv} \cdot n = 0, \ \ N = x_{vv} \cdot n = 1.$$

.... (4 分)

中曲率函数

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2} = 0,$$

曲面为极小曲面. .... (8 分)

Gauss 曲率

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{\cosh^4 u} \in [-1, 0).$$

K 取不到上确界, 即没有最大值. 曲率 K 取到最大值的所有点为空集.

.... (12 分)

九、(本题 12 分) 考虑二维整数格点 $\mathbb{Z}^2 = \{k\mathrm{e}_1 + j\mathrm{e}_2 : k, j \in \mathbb{Z}\}$, 其中 $\mathrm{e}_1 = (0,1)$, $\mathrm{e}_2 = (1,0)$. 给定 $\epsilon > 0$, 设 $(\xi_n^\epsilon)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列取值于 $\epsilon\mathbb{Z}^2$ 上的独立同分布随机变量, 且其共同分布为

$$\mathbb{P}\{\xi_n^\epsilon = \epsilon \mathrm{e}_i\} = \mathbb{P}\{\xi_n^\epsilon = -\epsilon \mathrm{e}_i\} = \tfrac{1}{4},\ i = 1, 2,$$

$(N_t)_{t\geqslant 0}$ 为一独立标准 Poisson 过程, 即 $\mathbb{P}(N_t = k) = \frac{t^k e^{-t}}{k!}$. 定义 $S_0^\epsilon = 0$ 以及

$$S_n^\epsilon := \xi_1^\epsilon + \cdots + \xi_n^\epsilon,\ n \in \mathbb{N},\ Z_t^\epsilon := S^\epsilon_{N_{t/\epsilon^2}},\ t > 0.$$

设 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为一有界连续函数，定义 $u_\epsilon(t,z) := P_t^\epsilon \varphi(z) := \mathbb{E}\varphi(Z_t^\epsilon + z)$.

(i) 计算 Z_t^ϵ 的特征函数.

(ii) 证明: 对任意 $t, s \geqslant 0$ 以及 $z \in \epsilon\mathbb{Z}^2$, $P^\epsilon_{t+s}\varphi(z) = P_t^\epsilon \circ P_s^\epsilon \varphi(z)$.

(iii) 验证 $\partial_t u_\epsilon = \Delta_\epsilon u_\epsilon / 4$, 其中 $\Delta_\epsilon f(z) := \sum_{i=1}^2 \dfrac{f(z+\epsilon \mathrm{e}_i) + f(z - \epsilon\mathrm{e}_i) - 2f(z)}{\epsilon^2}$.

(iv) 证明: 对任意 $t > 0$ 以及 $z \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{\epsilon\downarrow 0} u_\epsilon(t,z) = \mathbb{E}\varphi(B_{t/2} + z) = u(t,z)$, 其中 $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 为二维标准布朗运动. 从而 $\partial_t u = \Delta u/4$, 其中 Δ 为 Laplace 算子.

解答. (i) 由特征函数定义以及 $(N_t)_{t\geqslant 0}$ 与 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的独立性，对 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\mathrm{e}^{ix\cdot Z_t^\epsilon} &= \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}\mathrm{e}^{ix\cdot S_n^\epsilon}\mathbb{P}(N_{t/\epsilon^2} = n) = \sum_{n=0}^\infty \left(\mathbb{E}\mathrm{e}^{ix\cdot\xi_1^\epsilon}\right)^n \frac{(t/\epsilon^2)^n \mathrm{e}^{-t/\epsilon^2}}{n!} \\
&= \exp\{(\mathbb{E}\mathrm{e}^{ix\cdot\xi_1^\epsilon} - 1)t/\epsilon^2\} \\
&= \exp\{((\mathrm{e}^{i\epsilon x_1} + \mathrm{e}^{i\epsilon x_2} + \mathrm{e}^{-i\epsilon x_1} + \mathrm{e}^{-i\epsilon x_2})/4 - 1)t/\epsilon^2\} \\
&= \exp\{((\cos(\epsilon x_1) + \cos(\epsilon x_2)/2 - 1)t/\epsilon^2\}.
\end{aligned}$$

. . . . (3 分)

(ii) 不妨假设 $\epsilon = 1$. 利用 $(N_t)_{t\geqslant 0}$ 与 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的独立性有

$$P_t\varphi(z) = \mathbb{E}\varphi(Z_t + z) = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}\varphi(S_n + z)\mathbb{P}(N_t = n).$$

再由 Poisson 过程的独立增量性质

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{t+s}=n)&=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(N_{t+s}=n,N_s=k)\\&=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(N_{t+s}-N_s=n-k,N_s=k)\\&=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(N_t=n-k)\mathbb{P}(N_s=k).\end{aligned}$$

因此交换求和顺序

$$\begin{aligned}P_{t+s}\varphi(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\varphi(S_n+z)\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(N_t=n-k)\mathbb{P}(N_s=k)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n\geqslant k}\mathbb{E}\varphi(S_n+z)\mathbb{P}(N_t=n-k)\mathbb{P}(N_s=k)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(\sum_{n\geqslant k}\mathbb{E}\varphi(S_{n-k}+y)\mathbb{P}(N_t=n-k)\right)_{y=S_k+z}\mathbb{P}(N_s=k)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}[(P_t\varphi)(S_k+z)]\mathbb{P}(N_s=k)=P_t\circ P_s\varphi(z).\end{aligned}$$

.... (6 分)

(iii) 由上一问只需要证明

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{P_t^{\epsilon}\varphi(z)-\varphi(z)}{t}=\frac{\Delta_{\epsilon}\varphi(z)}{4}.$$

注意到

$$P_t^{\epsilon}\varphi(z)=\varphi(z)\mathbb{P}(N_t=0)+\mathbb{E}\varphi(z+\xi_1^{\epsilon})\mathbb{P}(N_t=1)+R_t^{\epsilon},$$

其中

$$R_t^{\epsilon}:=\sum_{n=2}^{\infty}\mathbb{E}\varphi(z+S_n^{\epsilon})\mathbb{P}(N_t=n).$$

很清楚

$$\frac{|\mathcal{R}_t^{\epsilon}|}{t}\leqslant\|\varphi\|_{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}}{n!}\to 0,\ \ t\to 0.$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{t\downarrow 0}\frac{P_t^{\epsilon}\varphi(z)-\varphi(z)}{t}&=\lim_{t\downarrow 0}\left[\frac{(\mathrm{e}^{-t/\epsilon^2}-1)\varphi(z)}{t}+\mathbb{E}\varphi(z+\xi_1^{\epsilon})\mathrm{e}^{-t/\epsilon^2}/\epsilon^2\right]\\&=-\frac{\varphi(z)}{\epsilon^2}+\sum_{i=1,2}\frac{\varphi(z+\epsilon\mathrm{e}_i)+\varphi(z-\epsilon\mathrm{e}_i)}{4\epsilon^2}=\tfrac{1}{4}\Delta_{\epsilon}\varphi(z).\end{aligned}$$

……………………………………………………… (10 分)

(iv) 由第一问取极限得

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{E}\mathrm{e}^{ix\cdot Z_t^\epsilon}=\mathrm{e}^{-(|x_1|^2+|x_2|^2)t/4}=\mathbb{E}\mathrm{e}^{ix\cdot B_{t/2}}.$$

从而

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}u_\epsilon(t,z)=\mathbb{E}\varphi(B_{t/2}+z)=u(t,z).$$

……………………………………………………………… (12 分)

十、(本题 12 分) 设 $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$ 是区间 $[0,1]$ 的等距剖分点, 即 $x_j = jh, j = 0,1,\ldots,N, h = \frac{1}{N}$. 令

$$V_h = \left\{ v \middle| 对于任何 1 \leqslant j \leqslant N,\ v|_{I_j} \in P_k(I_j) \right\},$$

其中 $P_k(I_j)$ 是定义在区间 $I_j = [x_{j-1}, x_j)$ 上次数不超过 k 次的多项式全体. 设函数 $u(x) \in C^{(k+2)}[0,1]$, $u(x)$ 在空间 V_h 的 L^2 投影 $u_h \in V_h$ 满足如下关系

$$||u - u_h|| \leqslant ||u - v||, \qquad \forall v \in V_h,$$

其中范数为通常的 L^2 范数.

(i) 证明

$$||u - u_h|| \leqslant Ch^{k+1},$$

并给出常数 C 与 $u(x)$ 导数的依赖关系.

(ii) 假设函数 $\varphi(x) \in C^{(k+2)}[0,1]$, 证明

$$\left| \int_0^1 (u(x) - u_h(x))\varphi(x)dx \right| \leqslant Ch^{2k+2},$$

并给出常数 C 与 $u(x)$ 及 $\varphi(x)$ 导数的依赖关系.

解答. (i) 由于 $u \in C^{(k+2)}[0,1]$, 将 u 在 x_j 做 Taylor 展开得

$$u(x) = u(x_j) + \ldots + \frac{1}{k!}u^{(k)}(x_j)(x-x_j)^k + \frac{1}{(k+1)!}u^{(k+1)}\xi_j)(x-x_j)^{k+1}, \quad \xi_j \in (x, x_j).$$

令

$$v(x)|_{I_j} = u(x_j) + \ldots + \frac{1}{k!}u^{(k)}(x_j)(x - x_j)^k,$$

则

$$(u - v)|_{I_j} = \frac{1}{(k+1)!}u^{(k+1)}(\xi_j)(x - x_j)^{k+1}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_{I_j} (u - v)^2\, dx &= \int_{I_j} \left[\frac{1}{(k+1)!}\right]^2 \left[u^{(k+1)}(\xi_j(x))\right]^2 (x - x_j)^{2(k+1)} dx \\
&\leqq \left[\frac{1}{(k+1)!} \max_{x \in I_j} \left|u^{(k+1)}(x)\right|\right]^2 \int_{I_j} (x - x_j)^{2(k+1)} dx \\
&= \left[\frac{1}{(k+1)!} \max_{x \in I_j} \left|u^{(k+1)}(x)\right|\right]^2 \frac{1}{2k+3} h^{2k+3}.
\end{aligned}$$

.... (3 分)

进而

$$
\begin{aligned}
||u-u_h||^2 &= \int_I (u-v)^2\,dx \\
&= \sum_{j=1}^{N} \int_{I_j} (u-v)^2\,dx \\
&\leqq N\left[\frac{1}{(k+1)!}\right]^2 \left(\max_{x\in I}\left|u^{(k+1)}(x)\right|\right)^2 \frac{1}{2k+3}h^{2k+3} \\
&= \left[\frac{1}{(k+1)!}\right]^2 \left(\max_{x\in I}\left|u^{(k+1)}(x)\right|\right)^2 \frac{1}{2k+3}h^{2k+2}.
\end{aligned}
$$

取

$$
C = \frac{1}{(k+1)!\sqrt{2k+3}} \cdot \max_{x\in I}\left|u^{(k+1)}(x)\right|.
$$

则有

$$
||u-u_h|| \leqq Ch^{k+1}.
$$

.... (6 分)

(ii) 因为 u_h 是 u 在 V_h 的 L^2 投影, 故

$$
\int_0^1 (u(x)-u_h(x))\varphi_h\,dx = 0, \quad \forall \varphi_h \in V_h.
$$

.... (8 分)

取 φ_h 为 φ 在 V_h 的 L^2 投影, 则

$$
\int_0^1 (u(x)-u_h(x))\varphi\,dx = \int_0^1 (u(x)-u_h(x))(\varphi-\varphi_h)\,dx.
$$

.... (10 分)

由 (i) 的结论得

$$
\left|\int_0^1 (u(x)-u_h(x))\varphi dx\right| \leqslant \|u-u_h\|\|\varphi-\varphi_h\| \leqslant Ch^{2k+2},
$$

其中

$$
C = \frac{1}{((k+1)!)^2(2k+3)} \cdot \max_{x\in I}\left|u^{(k+1)}(x)\right| \cdot \max_{x\in I}\left|\varphi^{(k+1)}(x)\right|.
$$

.... (12 分)