2015 年第六届全国大学生数学竞赛决赛

（数学类一、二年级）试卷

一、填空题（本题 20 分，每小题 5 分）

(1) 实二次型 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$ 的规范型为________.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 的和为_________.

(3) 计算 $I = \iint_{x^2+y^2+z^2=1}\left(x^2+2y^2+3z^2\right)\mathrm{d}\,S =$________.

(4) $A=\left(a_{ij}\right)$ 为 n 阶实对称矩阵 $\left(n>1\right)$，$rank\left(A\right)=n-1, A$ 的每行元素之和均为 0. 设 $2,3,\cdots,n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式，则有 $A_{11}=$_________.

二、（本题 15 分） 设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p. 一族球面中的每个球面都过点 P，且截直线 l 得到的弦长都是定值 a. 求该球面族的球心的轨迹.

三、(本题 15 分) 设 $\Gamma = \left\{\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in C\right\}$, 其中 C 表示复数域. 试证明: $\forall A \in \Gamma$, A 的 Jordan 标准型 J_A 仍属于 Γ；进一步还存在可逆的矩阵 $P \in \Gamma$ 使得 $P^{-1}AP = J_A$.

四、（本题 20 分） 设 $f\left(x\right)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, x=0. \end{cases}$ 求最大常数 α 满足

$$\sup_{x\neq y}\frac{\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|}{\left|x-y\right|^{\alpha}}<+\infty.$$

五、（本题 15 分） $a\left(t\right), f\left(t\right)$ 为实连续函数，$\forall t\in R$，有

$$f\left(t\right)>0, a\left(t\right)\geq 1, \int_0^{\infty}f\left(t\right)\mathrm{d}\,t=+\infty.$$

已知 $x\left(t\right)$ 满足 $x''\left(t\right)+a\left(t\right)f\left(x\left(t\right)\right)\leq 0, \forall t\in R.$ 求证：$x\left(t\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 有上界.

六、（本题 15 分） 设 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 上连续可导，且 $f\left(0\right)=f\left(1\right)=0.$ 求证：

$$\left[\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}\,x\right]^2\leq\frac{1}{45}\int_0^1\left(f'\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}\,x,$$

等号当且仅当 $f\left(x\right)=A\left(x-x^3\right)$ 时成立，其中 A 是常数.