2019 年第十届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类，一、二年级）参考解答

一、填空题

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $-\pi$ (3) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{8}$ (4) 0

二、【参考解析】：(1) **【思路一】**直线l_1的参数方程为$x=0,y=0,z=s;l_2$的参数方程为

$$x=-1+t,y=t,z=t$$

设动直线l与l_1,l_2分别交于点$(0,0,s)$与$(-1+t,t,t)$，则的l方向为$(-1+t,t,t-s)$.

由于l与平面$z=0$平行，故$t=s$，从而动直线l的方程为：

$$x=(t-1)u,\quad y=tu,\quad z=t$$

消去t，u得动直线构成的曲面S的方程为$xz-yz+y=0$.

【思路二】过直线l_1的平面簇为$\pi_1:(1-\lambda)x+\lambda y=0$，这里$\lambda$为参数；同理过直线$l_2$的平面簇为

$$\pi_2:(1-\mu)(x-y+1)+\mu(y-z)=0,\mu\text{为参数}$$

动直线l是平面簇π_1与π_2的交线，故直线l的方向为

$$\begin{aligned} n&=(1-\lambda,\lambda,0)\times(1-\mu,2\mu-1,-\mu)\\ &=(-\lambda\mu,\mu(1-\lambda),-1+2\mu-\lambda\mu) \end{aligned}$$

由直线l与平面$z=0$平行，故$-1+2\mu-\lambda\mu=0$.由π_1与π_2的方程知

$$\lambda=\frac{x}{x-y},\quad \mu=\frac{x-y+1}{x-2y+z+1}$$

将上式代入$-1+2\mu-\lambda\mu=0$,即得动直线l生成的曲面的方程为$xz-yz+y=0$.

(2) 做可逆线性变换$\begin{cases} x=x'-y'-z' \\ y=-z' \\ z=x'+y' \end{cases}$ 曲面S的原方程化为$z'=x'^2-y'^2$.因此，S为马鞍面.

三、【参考解析】：先证明一个引理.

引理 设A是n阶实方阵且满足$\mathrm{tr}(A)=0$，则存在可逆实方阵P，使得$P^{-1}AP$的对角元素都是0.

对n进行归纳.当$n=1$时，$A=(0)$，结论显然成立. 下设$n\geq 2$，考虑两种情形.

情形一： $\mathbb{R}^n$中的所有非零向量都是A的特征向量. 由所有基本向量$e_i,i=1,2,\dots,n$都是特征向量可知，存在特征值$\lambda_i,i=1,2,\dots,n$使得$Ae_i=\lambda_i e_i,i=1,2,\dots,n$.因此，$A=\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\right)$.再由所有$e_i+e_j$都是特征向量有，存在$\mu_{ij}$使得

$$A\left(e_i+e_j\right)=\lambda_i e_i+\lambda_j e_j=\mu_{ij}\left(e_i+e_j\right)$$

于是$\mu_{ij}=\lambda_i=\lambda_j$，因此$A$为纯量方阵.由$\mathrm{tr}(A)=0$知$A=0$.

情形二： 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 α 不是 A 的特征向量. 则 α， $A\alpha$ 线性无关，因而存在可逆实方阵

$$Q=(\alpha, A\alpha, *, \cdots, *) \text{满足} AQ = Q\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix},$$

或者等价地

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix}, \text{其中} B \text{为} n-1 \text{阶实方阵}.$$

由 $\mathrm{tr}(A)=0$，得 $\mathrm{tr}(B)=0$.由归纳假设，存在可逆实方阵 R，使得 $R^{-1}BR$ 的对角元素都是 0.令 $P=Q\,\mathrm{diag}(1,R)$，则 $P^{-1}AP$ 的对角元素都是 0.引理获证.

现在对于任意 n 阶实方阵 A，令 $A_0=\dfrac{\mathrm{tr}(A)}{n}I$，则 $\mathrm{tr}\left(A-A_0\right)=0$.

根据引理，存在可逆实方阵 P，使得 $B=P^{-1}\left(A-A_0\right)P$ 的对角元素都是 0.设 $B=L+U, L, U$ 分别是严格下、上三角方阵, 则 L, U 都是幂零方阵. 于是 $A=A_0+PBP^{-1}=A_0+A_1+A_2$，其中 A_0 是纯量方阵，$A_1=PLP^{-1}$ 和 $A_2=PUP^{-1}$ 都是幂零方阵. 证毕.

四、【参考解析】: (1) 由 $f^{(n)}(0)=0(\forall n\geq 0)$ 以及 Taylor 展式可得，对于任何固定的 k，成立 $f(x)=o\left(x^k\right),\quad x\to 0^+$. 特别 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^{2C}}=0$.

另一方面，由假设可得 $\forall x\in(0,1]$，

$$\left(x^{-2C}f^2(x)\right)'=2x^{-2C-1}\left(xf(x)f'(x)-Cf^2(x)\right)\leq 0,$$

从而 $x^{-2C}f^2(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调减少. 因此

$$x^{-2C}f^2(x)\leq \lim_{t\to 0^+}t^{-2C}f^2(t)=0,\quad \forall x\in(0,1]$$

因此，在 $[0,1]$ 上成立 $f(x)\equiv 0$

(2) 取 $f(x):=\begin{cases} e^{-x^{1-\alpha}}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则容易验证 $f(x)$ 满足假设条件，但 $f(x)\neq 0$.

五、【参考证明】: 记 $f(x)=c\left(1-x^2\right)(x\in[0,1])$，则 $f\left(x\right)\in\left[0,1\right]$. 所以在题设条件下 $\left\{x_n\right\}$ 有界. 另一方面，$f\left(x\right)=x$ 在 $\left[0,1\right]$ 内只有唯一解 $\bar{x}=\dfrac{-1+\sqrt{1+4c^2}}{2c}$.

进一步，由于 $f\left(x\right)=x$ 在 $\left[0,1\right]$ 上严格单调递减，因此 $f\left(x\right)=x$ 在 $\left[0,1\right]$ 上只有唯一解 $\bar{x}$，所以题设条件下 $x_n\neq\bar{x}\left(n\geq 1\right)$.

【思路一】 设 $L=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}x_n, \ell=\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}x_n$，则 $L=c\left(1-\ell^2\right), \ell=c\left(1-L^2\right)$. 从而

$$L-\ell=c(L-\ell)(L+\ell).$$

当 $c \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 时，若 $\{x_n\}$ 发散，则 $L \neq \ell$，则 $L + \ell = \frac{1}{c}$，从而 $s = L, \ell$ 是满足方程 $cs^2 - s + \frac{1}{c} - c = 0$ 的两个不同的实根，所以 $1 - 4c\left(\frac{1}{c} - c\right) > 0$，即 $4c^2 > 3$，矛盾. 因此 $\{x_n\}$ 收敛.

当 $c \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ 时,若 $\{x_n\}$ 收敛,则必有 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \bar{x}$. 由于 $f'(\bar{x}) = -2c\bar{x} = 1 - \sqrt{1 + 4c^2} < -1$.

因此存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x - \bar{x}| < \delta$ 时，成立 $|f'(x)| > 1$，而对上述 $\delta > 0$，有 $N \geq 1$，使得当 $n \geq N$ 时，$|x_n - \bar{x}| < \delta$. 于是由微分中值定理，可得

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = |f(x_n) - f(\bar{x})| \geq |x_n - \bar{x}|$$

结合 $x_n \neq \bar{x}$ 知 $\{x_n\}$ 不可能收敛到 $\bar{x}$. 因此，$\{x_n\}$ 发散.

【思路二】 考虑 $g(x) = f(f(x))$，有

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x) = 4c^3x(1 - x^2)$$

当 $c \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 时，若 $x \in [0,1]$，则 $0 \leq g'(x) \leq r_c \equiv \frac{8c^3\sqrt{3}}{9} < 1$，从而

$$|x_{n+2} - \bar{x}| = |g(x_n) - g(\bar{x})| \leq r|x_n - \bar{x}|$$

由此立即得到 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \bar{x}$.

当 $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，若 $x \in [0,1]$，且 $x \neq \bar{x}$，则 $0 \leq g'(x) < 1$，从而

$$|x_{n+2} - \bar{x}| = |g(x_n) - g(\bar{x})| < |x_n - \bar{x}|$$

由此可得 $\{|x_{2n} - \bar{x}|\}$ 和 $\{|x_{2n+1} - \bar{x}|\}$ 收敛. 设极限为 d 和 t. 由致密性定理，存在 $\{x_{2n}\}$ 的子列 $\{x_{2n_k}\}$ 收敛. 设极限为 ξ，此时 $\{g(x_{2n_k})\}$ 收敛于 $g(\xi)$. 从而

$$|g(\xi) - \bar{x}| = \lim_{n \to +\infty} |x_{2n_k+2} - \bar{x}| = \mathrm{d} = \lim_{n \to +\infty} |x_{2n_k} - \bar{x}| = |\xi - \bar{x}|$$

因此 $\xi = \bar{x}$，即 $\mathrm{d} = 0$. 同理，$t = 0$. 因此 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \bar{x}$.

当 $c \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ 时，若 $\{x_n\}$ 收敛，则必有 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \bar{x}$. 由于

$$f'(\bar{x}) = -2c\bar{x} = 1 - \sqrt{1 + 4c^2} < -1$$

因此存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x - \bar{x}| < \delta$ 时,成立 $|f'(x)| > 1$,而对上述 $\delta > 0$,有 $N \geq 1$,使得当 $n \geq N$ 时，$|x_n - \bar{x}| < \delta$. 于是由微分中值定理，可得

$$\left|x_{n+1}-\bar{x}\right|=\left|f\left(x_n\right)-f(\bar{x})\right|\geq\left|x_n-\bar{x}\right|$$

结合$x_n\neq\bar{x}$知$\left\{x_n\right\}$不可能收敛到$\bar{x}$. 因此，$\left\{x_n\right\}$发散.

六、【参考解析】: 至多两个2π周期解. 例如$a(x)\equiv b(x)\equiv 1, c(x)=0$，方程只有两个$2\pi$周期解$y_1\equiv 0, y_2\equiv -1$.

现设$y_1\left(x\right), y_2\left(x\right)$是两个$2\pi$周期解，则由存在唯一性定理$y_1(x)\neq y_2(x), \forall x\in R$.

令$y=\left(y_1(x)-y_2(x)\right)z+y_2(x)$，则$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=a(x)\left(y_1(x)-y_2(x)\right)z(z-1)$

若方程除了两个2π周期解$z\equiv 0, z\equiv 1$外还有一个2π周期解$z=z_1\left(x\right)$，则

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x a(x)\left(y_1(x)-y_2(x)\right)x\\&=\int_0^x\frac{\mathrm{d}z_1(x)}{z_1(x)\left(z_1(x)-1\right)}=\ln\left|\frac{z_1(x)-1}{z_1(x)}\right|\Bigg|_0^z\end{aligned}$$

是x的2π周期函数. 由方程通解表达式得$z(x)=\dfrac{1}{1-Ce^{F(x)}}$得到方程有无穷多个解是$2\pi$周期的，矛盾.