

2019 年第十届全国大学生数学竞赛决赛

(非数学专业) 试题

一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

(1) 设函数 $y = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - a \sin^2 x} - b}{x^2}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续, 则 $a + b$ 的值为_____

(2) 设 $a > 0$, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = _____$

(3) 设曲线 L 是空间区域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 的表面与平面 $x + y + z = \frac{3}{2}$ 的交线, 则 $\left| \oint_L (z^2 - y^2) dx + (x^2 - z^2) dy + (y^2 - x^2) dz \right| = _____$

(4) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x - y, z) = 0$ 确定, 其中 $F(u, v)$ 具有连续二阶偏导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = _____$

(5) 已知二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n})^2$, 则 f 的规范形为_____

二、(本题 12 分) 设 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内三阶连续可导, 满足

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1;$$

又设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 \in (0, 1), a_{n+1} = f(a_n) (n = 1, 2, 3, \dots),$$

严格单调减少且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^2$.

三、(满分 12 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续导数, 且

$$|f(x)| \leq 1, f'(x) > 0, x \in (-\infty, +\infty),$$

证明: 对于 $0 < \alpha < \beta$, 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f'(nx - \frac{1}{x}) dx = 0$

四、(满分 12 分) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2}$, 其中,

$$\Omega : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$$

五、(满分 12 分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdots \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$ 之和.

六、(满分 11 分) 设 A 是 n 阶幂零矩阵, 即满足 $A^2 = O$. 证明: 若 A 的秩为 r , 且 $1 \leq r < \frac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & I_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$, 其中 I_r 为 r 阶单位矩阵。

七、(满分 11 分) 设 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 为单调递减的正实数列, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 为一实数列, 级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n u_n$ 收敛, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)u_n = 0$