

# 第十届清疏竞赛班非数学类 12:

## 积分不等式

本节课主要介绍所有著名积分不等式证明

非数的同学可以如下理解所谓对测度的积分  $\int_E d\mu$ :

(1):  $d\mu = g(x)dx$ ,  $g(x)$  是非负函数且在所有有限闭区间上黎曼可积.

(2): 考虑  $E$  是  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  的子集合,  $d\mu$  可以理解为计数测度:

$$\int_E f(x) d\mu = \sum_{n \in E} f(n)$$

(3):

本节课非数的同学可以视下面的证明的所有函数为连续函数,

并且记忆非连续的版本结果也对.

非数无视  $a.e$

(最重要且可以直接使用) Holder积分不等式:

设  $p_i \in (1, +\infty)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 且满足  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$ , 则

$$\int_E \prod_{i=1}^n |f_i| d\mu \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_E |f_i|^{p_i} d\mu \right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

引理: young不等式:

设  $p_i \in (1, +\infty)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 且满足  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ , 那么

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p_i}}{p_i} \geq a_1 a_2 \cdots a_n, \text{ 等号成立条件是所有 } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ 相同}$$

引理证明大概:

令  $a_i = b_i^{\frac{1}{p_i}}$ , 对  $\ln x$  用离散的加权 Jensen 不等式即得.

定理证明:

若某个  $\int_E |f_i|^{p_i} d\mu = 0 \Rightarrow f_i = 0, a.e \Rightarrow \int_E \prod_{i=1}^n |f_i| d\mu = 0$

如果所有的  $\int_E |f_i|^{p_i} d\mu \neq 0$ , 那么运用 young 不等式我们就有

$$\begin{aligned} \int_E \prod_{i=1}^n \frac{|f_i|}{\left( \int_E |f_i|^{p_i} d\mu \right)^{\frac{1}{p_i}}} d\mu &\leq \int_E \sum_{i=1}^n \frac{|f_i|^{p_i}}{p_i \int_E |f_i|^{p_i} d\mu} d\mu \\ &= \sum_{i=1}^n \int_E \frac{|f_i|^{p_i}}{p_i \int_E |f_i|^{p_i} d\mu} d\mu = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1. \text{ 证毕!} \end{aligned}$$

且等号成立条件是全部  $f_i$  线性相关, 即存在  $c_1, c_2, \dots, c_n$  不全为 0, 使得

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i = 0, a.e$$

注: 等号成立条件记住即可, 不用管证明.

最重要的推论：

取  $n = 2$ ,  $p_1 = p_2 = 2$ , 我们有最重要的推论：

$$\left( \int_E f(x)g(x)d\mu \right)^2 \leq \int_E f^2(x)d\mu \int_E g^2(x)d\mu$$

闵可夫斯基不等式:

$$\text{我们记} \|f\|_p = \left( \int_E |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1,$$

$$\text{那么我们有} \left\| \int_E f(x, y) dv(y) \right\|_p \leq \int_E \|f(x, y)\|_p dv(y)$$

即

$$\left( \int \left| \int f(x, y) dv(y) \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int \left( \int |f(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} dv(y)$$

非常重要的版本(通过上面抽象版本推下面这个数学专业的思考):

$$\|f + h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p$$

$$\text{即} \left( \int_E |f(x) + h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_E |h(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, p > 1$$

证明:

为了符号不复杂, 我们省略掉积分区域.

$$\left\| \int_E f(x, y) dv(y) \right\|_p = \left( \int \left| \int f(x, y) dv(y) \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\int_E \|f(x, y)\|_p dv(y) = \int \left( \int |f(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} dv(y)$$

$$\text{记} h(x) = \left| \int f(x, y) dv(y) \right|^{p-1}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

运用Holder不等式我们有

$$\begin{aligned} \int \left| \int f(x, y) dv(y) \right|^p d\mu(x) &= \int \left[ \left| \int f(x, y) dv(y) \right|^{p-1} \left| \int f(x, y) dv(y) \right| \right] d\mu(x) \\ &\leq \int \left[ h(x) \cdot \int |f(x, y)| dv(y) \right] d\mu(x) \\ &= \int \left[ \int h(x) \cdot |f(x, y)| d\mu(x) \right] dv(y) \\ &\leq \int \left[ \left( \int |h(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int |f(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \right] dv(y) \\ &= \left( \int |h(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \int \left( \int |f(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} dv(y) \end{aligned}$$

因此  $h(x)$  换回去, 两边约去即得

$$\left[ \int \left| \int f(x, y) dv(y) \right|^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{q}} \leq \int \left( \int |f(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} dv(y)$$

卷积不等式：

来看一般情况：

Jensen不等式(上凸函数类似)：

设 $\varphi$ 是下凸函数,  $p(x) \geq 0, \int_a^b p(x)dx > 0$ , 则

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right) \leq \frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}$$

上述情况假设非常一般, 考试中 $\varphi \in C^2$ ,

所以可以给出如下证明.

不妨设 $\int_a^b p(x)dx = 1$ , 否则 $\frac{p(x)}{\int_a^b p(x)dx}$ 看成整体

记 $x_0 = \int_a^b f(x)p(x)dx$ , 然后运用

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0)$$

然后就有

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx &\geq \int_a^b p(x)[\varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(f(x) - x_0)]dx \\ &= \varphi(x_0) = \varphi\left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right). \end{aligned}$$

对于一般情况非数不会考, 可以运用数学类课中逼近方法来完成证明.

切比雪夫不等式：

*young*不等式

*hardy*不等式：

*gronwall*不等式

反向*Cauchy*不等式

哈达马不等式

*Hilbert*不等式

*Carlson*不等式

展示如何写帕塞瓦尔恒等式.

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right)$$

下面的计算不用展示给老师, 可以直接写答案.

运用三角函数正交性, 我们来计算

$$\begin{aligned} \int_{2a-b}^b |f(x)|^2 dx &= \int_{2a-b}^b \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right) \right] \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{\pi m(x-a)}{b-a}\right) \right] dx \\ &= \int_{2a-b}^b \left( \frac{a_0}{2} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cos^2\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right) dx \\ &= \frac{(b-a)}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_{2a-b}^b \cos^2\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right) dx \\ &= \frac{(b-a)}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{2b-2a}{2} = (b-a) \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right] \end{aligned}$$

展示如何写傅里叶系数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \right)$$

运用三角函数正交性, 对  $m \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi mx}{b-a}\right) dx \\ &= \int_a^b \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \right) \right] \cos\left(\frac{2\pi mx}{b-a}\right) dx \\ &= \int_a^b a_m \cos^2\left(\frac{2\pi mx}{b-a}\right) dx = \frac{b-a}{2} a_m, \text{ 即} \\ a_m &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi mx}{b-a}\right) dx, b_m \text{ 类似} \end{aligned}$$

(不可直接使用)Wirtinger不等式. 即关于 $|f'|^2, |f|^2$ 的积分不等式, 设 $f \in C^1[a, b]$   
(1): 无边界条件.

$$\text{则} \int_a^b |f(x)|^2 dx - \frac{1}{b-a} \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx$$

$$\text{等号成立条件为 } f(x) = c_1 + c_2 \cos\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right), c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

分析: 如果类似奇延拓, 那么连续的情况下必有 $f(a) = 0$ .

并且 $f$ 傅里叶级数逐项微分并不一定是 $f'$ 的傅里叶级数,

这需要 $f$ 在端点值相同才成立(见陈纪修, 直接记忆, 无需证明.)

所以 $f$ 选类似偶延拓, 且可以直接计算 $f$ 的傅里叶系数 $b_n = 0$ .

证明:

延拓 $f(x)$ 到 $[2a-b, b]$ ,  $f(x) = f(2a-x)$ ,  $x \in [2a-b, a]$ ,

$$\text{因此 } f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right), a_n \text{ 是傅里叶系数}$$

$$a_n = \frac{1}{b-a} \int_{2a-b}^b f(x) \cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right) dx, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

因为 $f(2a-b) = f(b)$ , 所以

$$f' \sim -\frac{\pi}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right)$$

然后运用帕塞瓦尔恒等式

$$\int_{2a-b}^b |f(x)|^2 dx = (b-a) \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right]$$

$$\int_{2a-b}^b |f'(x)|^2 dx = \frac{\pi^2}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$$

因此(运用 $n^2 \geq 1$ )

$$\int_{2a-b}^b |f(x)|^2 dx - \frac{1}{2(b-a)} \left( \int_{2a-b}^b f(x) dx \right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_{2a-b}^b |f'(x)|^2 dx$$

$$\text{则} \int_a^b |f(x)|^2 dx - \frac{1}{b-a} \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx$$

$$\text{而等号成立条件是 } n > 1 \text{ 时, } a_n = 0, \text{ 即 } f(x) = c_1 + c_2 \cos\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right), c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) 有边界条件  $f(a) = f(b)$ , 则

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx - \frac{1}{b-a} \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx$$

等号成立条件为  $f(x) = c_1 + c_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right) + c_3 \sin\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right)$ ,  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

分析:

因为天然有  $f(a) = f(b)$ , 所以无需在借助延拓来保证傅里叶逐项微分合理性.

证明:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \right)$$

因为  $f(a) = f(b)$ , 所以

$$f' \sim \frac{2\pi}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -na_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + nb_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \right)$$

$$\text{这里 } a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) dx, b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) dx$$

由帕塞瓦尔恒等式, 我们有

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \frac{b-a}{2} \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

$$\int_a^b |f'(x)|^2 dx = \frac{2\pi^2}{b-a} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

利用  $n^2 \geq 1$ , 就有

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx - \frac{1}{b-a} \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx$$

等号成立条件为  $f(x) = c_1 + c_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right) + c_3 \sin\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right)$ ,  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(3) 最强边界条件:  $f(a) = f(b) = 0$ , 则

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx,$$

且等号成立条件是  $f(x) = c \sin \frac{\pi(x-a)}{b-a}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

分析:

$f(a) = 0$ , 因此可类似奇延拓.

注意  $f(b) \neq 0$ , 则奇延拓之后端点函数值不同, 不能逐项微分.

证明:

$f(x) = -f(2a-x)$ ,  $x \in [2a-b, a]$ , 设

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \left( \frac{\pi n(x-a)}{b-a} \right)$$

因为  $f(2a-b) = f(b)$ , 所以

$$f' \sim \frac{\pi}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos \left( \frac{\pi n(x-a)}{b-a} \right)$$

这里  $b_n = \frac{1}{b-a} \int_{2a-b}^b f(x) \sin \left( \frac{\pi n(x-a)}{b-a} \right) dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$

由帕塞瓦尔恒等式, 我们有

$$\int_{2a-b}^b |f(x)|^2 dx = (b-a) \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$\int_{2a-b}^b |f'(x)|^2 dx = \frac{\pi^2}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n^2$$

运用  $n^2 \geq 1$ , 我们就有  $\int_{a-2b}^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_{a-2b}^b |f'(x)|^2 dx$ ,

即

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx,$$

且等号成立条件是  $f(x) = c \sin \frac{\pi(x-a)}{b-a}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

对于单边界条件，

实际上就不是傅里叶型,而是 $cauchy$ 不等式型,下次课讲.

$opial$ 不等式