

## 第十一届全国大学生数学竞赛初赛(数学类B卷)参考答案

一、(本题15分) 设 $L_1$  和 $L_2$  是空间中的两条不垂直的异面直线, 点 $B$ 是它们公垂线段的中点。点 $A_1$  和 $A_2$  分别在 $L_1$  和 $L_2$  上滑动, 使得 $A_1B \perp A_2B$ . 证明直线 $A_1A_2$ 的轨迹是单叶双曲面。

证明: 取公垂线为 $z$ 轴,  $B$ 为原点。取 $x$ 轴使得 $L_1$ 和 $L_2$ 与之夹角相同。此时我们有:

$$L_1 : \begin{cases} ax + y = 0 \\ z = c, \end{cases}$$

$$L_2 : \begin{cases} ax - y = 0 \\ z = -c, \end{cases}$$

其中 $c > 0$ . 由于 $L_1$  与 $L_2$  不垂直,  $a \neq \pm 1$ . .... 4分

设点 $A_1$ 的坐标为 $(x_1, y_1, c)$ ,  $A_2$ 的坐标 $(x_2, y_2, -c)$ , 则

$$ax_1 + y_1 = 0, \quad ax_2 - y_2 = 0. \quad (1)$$

由 $A_1B \perp A_2B$  得,

$$x_1x_2 + y_1y_2 - c^2 = 0. \quad (2)$$

任取 $A_1A_2$ 上的点 $M(x, y, z)$ , 有

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{z + c}{2c}. \quad (3)$$

..... 10分

消去 $x_1, x_2, y_1, y_2$ : 令 $\frac{z+c}{2c} = k$ , 由(1,3) 得

$$x = kx_1 - (k-1)x_2; \quad y = -akx_1 - a(k-1)x_2.$$

由(1,2),  $x_1x_2 = \frac{c^2}{1-a^2}$ . 又 $k(k-1) = \frac{z^2-c^2}{4c^2}$ , 从而

$$a^2(1-a^2)x^2 - (1-a^2)y^2 + a^2z^2 = a^2c^2,$$

所以轨迹是单叶双曲面。 .... 15分

二、(本题10分) 计算  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}$ .

解: 我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}$$

..... 3分

对上式右端的第二个积分做变换  $x = \frac{1}{t}$

得到

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})} = \int_0^1 \frac{t^{2019}}{(1+t^2)(1+t^{2019})} dt$$

..... 7分

于是

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})} &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})} + \int_0^1 \frac{t^{2019}}{(1+t^2)(1+t^{2019})} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

..... 10分

三、(本题15分) 设数列 $\{x_n\}$  满足

$$x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(1 + x_n), n = 1, 2, \dots$$

证明:  $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

证明: 由于 $x_1 > 0$ , 所以 $x_2 = \ln(1+x_1)$ . 由数学归纳法,  $x_n > 0, n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \ln(1 + x_n) - x_n = \frac{1}{1 + \xi_n} x_n - x_n = \left( \frac{1}{1 + \xi_n} - 1 \right) x_n \\ &= -\frac{\xi_n}{1 + \xi_n} x_n < 0, \end{aligned}$$

这里 $\xi_n \in (0, x_n)$ . 所以数列 $\{x_n\}$ 单调减少. .... 8分

应用单调有界定理,  $\{x_n\}$ 收敛. .... 10分

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq 0$ . 由 $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$ , 知 $a = \ln(1 + a)$ .

令 $f(x) = x - \ln(1 + x)$ ,  $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0, x \in (0, +\infty)$ ,  $f(0) = 0$ . 从而 $x = 0$ 是 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的唯一零点, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . .... 15分

四、(本题15分) 设 $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  是 $n$  维实线性空间 $V$  的一组基, 令 $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n + \epsilon_{n+1} = 0$ . 证明:

- (1) 对 $i = 1, 2, \dots, n+1$ ,  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{n+1}\}$  都构成 $V$  的基;
- (2)  $\forall \alpha \in V$ , 在(1)中的 $n+1$  组基中, 必存在一组基使 $\alpha$  在此基下的坐标分量均非负;
- (3) 若 $\alpha = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + \dots + a_n\epsilon_n$ , 且 $|a_i| (i = 1, 2, \dots, n)$  互不相同, 则在(1)中的 $n+1$  组基中, 满足(2)中非负坐标表示的基是唯一的.

证明: (1) 若 $i = n+1$ , 显然有 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  是 $V$  的一组基. 若 $1 \leq i \leq n$ , 令

$$k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2 + \dots + k_{i-1}\epsilon_{i-1} + k_{i+1}\epsilon_{i+1} + \dots + k_n\epsilon_n + k_{n+1}\epsilon_{n+1} = 0.$$

由于 $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n + \epsilon_{n+1} = 0$ , 所以有

$$k_{n+1}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n + \epsilon_{n+1}) = 0$$

..... 2分

两式相减得

$$(k_1 - k_{n+1})\epsilon_1 + \dots + (k_{i-1} - k_{n+1})\epsilon_{i-1} - k_{n+1}\epsilon_i + (k_{i+1} - k_{n+1})\epsilon_{i+1} + \dots + (k_n - k_{n+1})\epsilon_n = 0.$$

由于 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  线性无关, 故得

$$k_1 - k_{n+1} = \dots = k_{i-1} - k_{n+1} = -k_{n+1} = k_{i+1} - k_{n+1} = \dots = k_n - k_{n+1} = 0$$

从而有

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{i-1} = k_{i+1} = \dots = k_n = k_{n+1} = 0$$

因此可得 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_i, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{n+1}$  线性无关, 于是(1)得证. ..... 5分

(2) 由于

$$(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_i, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{n+1})A$$

这里

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & -1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & -1 & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & -1 & \ddots \\ & & \vdots & & 1 \\ & & -1 & & \end{pmatrix}$$

即

..... 7分

为两组基之间的过渡矩阵.

$\forall \alpha \in V$ , 设  $\alpha = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + \cdots + a_n\epsilon_n$ , 若  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ , 则结论正确,  
否则令  $a_i$  是负坐标中绝对值最大者, 那么

$$\alpha = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{n+1}) A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{n+1}) \begin{pmatrix} a_1 & a_i \\ & \vdots \\ a_{i-1} - a_i & \\ a_{i+1} - a_i & \\ \vdots & \\ a_n - a_i & \\ -a_i & \end{pmatrix}$$

于是  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{n+1}$  即为所求的一组基.

..... 10分

(3) 设  $\alpha = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + \cdots + a_n\epsilon_n$ , 且  $|a_i| (i = 1, 2, \dots, n)$  互不相同. 设  $a_i$  是  
负坐标中绝对值最大者, 除了基  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{n+1}$  之外, 可以证明  $\alpha$  无论

在哪一组基下的坐标都有负的分量. 事实上, 对任意的  $k \neq i$  都有

$$\alpha = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_{n+1}) \begin{pmatrix} a_1 - a_k \\ \vdots \\ a_i - a_k \\ \vdots \\ a_n - a_k \\ -a_k \end{pmatrix}$$

其中  $a_i - a_k < 0$ , 于是知满足(2)中非负坐标表示的基是唯一的.

..... 15分

五、(本题20分) 设 $A$ 是数域 $F$ 上的 $n$ 阶矩阵, 若 $A^2 = I_n$  ( $I_n$  表示单位矩阵), 则称 $A$ 为对合矩阵. 试证:

(1) 若 $A$ 是 $n$ 阶对合矩阵, 则

$$\text{rank}(I_n + A) + \text{rank}(I_n - A) = n;$$

(2)  $n$ 阶对合矩阵 $A$ 一定可以对角化, 其相似对角形为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$ , 其中 $r = \text{rank}(I_n + A)$ ;

(3) 若 $A, B$ 均是 $n$ 阶对合矩阵, 且 $AB = BA$ , 则存在可逆矩阵 $P$ , 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同时为对角矩阵.

证明: (1) 因为 $A^2 = I_n$ , 故有 $I_n - A^2 = 0$  即 $(I_n + A)(I_n - A) = 0$ ,

于是 $\text{rank}(I_n + A) + \text{rank}(I_n - A) \leq n$ .

又因为 $(I_n + A) + (I_n - A) = 2I_n$ , 所以 $\text{rank}(I_n + A) + \text{rank}(I_n - A) \geq \text{rank}(2I_n) = n$ .

从而得

$$\text{rank}(I_n + A) + \text{rank}(I_n - A) = n.$$

..... 5分

(2) 先证 $A$ 的特征值为1或-1. 设 $\lambda$ 为 $A$ 的任一特征值, 则存在非零向量 $\alpha$ , 使得 $A\alpha = \lambda\alpha$ , 由 $A^2 = I_n$ 可得

$$\alpha = A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda^2\alpha$$

由 $\alpha \neq 0$ , 可得 $\lambda^2 - 1 = 0$ , 所以有 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$ .  
..... 8分

下证对合矩阵一定可以对角化. 因为 $A^2 = I_n$ , 故 $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ 为 $A$ 的零化多项式, 所以 $A$ 的最小多项式一定为数域 $F$ 上互素的一次因式的乘积, 从而可知对合矩阵 $A$ 一定可以对角化.

..... 10分

又因为对合矩阵 $A$ 的特征值为1或-1. 由(1)知特征值 $\lambda = 1$ 的几何重数 $r = \text{rank}(I_n + A)$ ,  $\lambda = -1$ 的几何重数为 $n - r = \text{rank}(I_n - A)$ , 所以其相似对角形

$$\text{为} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

..... 12分

可对角化另一证明思路:

[对应于特征值 $\lambda = 1$ , 有 $n - \text{rank}(I_n - A)$ 个线性无关的特征向量, 对应于特征值 $\lambda = -1$ , 有 $n - \text{rank}(-I_n - A)$ 个线性无关的特征向量, 由(1)知,  $A$ 共有 $n - \text{rank}(I_n - A) + n - \text{rank}(-I_n - A) = n$ 个线性无关的特征向量, 从而 $A$ 一定

可以对角化, 其相似对角形为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$ . ..... 参照上面证明给分]

(3) 由于 $A$ 为对合矩阵, 故存在可逆矩阵 $G$ , 使得

$$G^{-1}AG = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

又由 $AB = BA$ , 则有

$$(G^{-1}AG)(G^{-1}BG) = (G^{-1}BG)(G^{-1}AG).$$

所以 $G^{-1}BG = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$ 为一个准对角矩阵. ..... 15分

由于 $B^2 = I_n$ 为对合矩阵, 故 $B_{11}^2 = I_r, B_{22}^2 = I_{n-r}$ 也是对合矩阵. 由(2), 存在可逆矩阵 $G_1, G_2$ , 使得

$$G^{-1}B_{11}G_1 = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{r-s} \end{pmatrix}, \quad G_2^{-1}B_{22}G_2 = \begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & -I_{n-r-t} \end{pmatrix}$$

为对角矩阵. 令 $P = G \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$ , 则有 $P$ 可逆, 且有 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 同时为对角矩阵. ..... 20分

六、(本题15分) 设函数 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续凹函数, 满足 $f(a) = 0, f(b) > 0$ 且 $f(x)$ 在 $x = a$ 处存在非零的右导数. 对 $n \geq 2$ , 记

$$S_n = \left\{ \sum_{k=1}^n kx_k : \sum_{k=1}^n kf(x_k) = f(b), x_k \in [a, b] \right\}.$$

- (1) 证明对 $\forall \alpha \in (0, f(b))$ , 存在唯一 $x \in (a, b)$ 使得 $f(x) = \alpha$ ;  
 (2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup S_n - \inf S_n)$ .

解: (1) 因为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 于是对 $\forall \alpha \in (0, f(b))$ 在 $(a, b)$ 内至少存在一个点 $\xi$ 使得 $f(\xi) = \alpha$ . ..... 1分

下面证明满足上述要求的点是唯一的. 假设 $\xi, \eta \in (a, b)$ , 满足 $\xi < \eta$ 及 $f(\xi) = f(\eta) = \alpha$ . 则点 $(\eta, f(\eta)) = (\eta, \alpha)$ 落在端点为 $(\xi, f(\xi)) = (\xi, \alpha), (b, f(b))$ 的线段的下方, 这与函数的凹性矛盾. ..... 3分

(2) 我们记

$$T_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{k=1}^n kf(x_k) = f(b), x_k \in [a, b] \right\}, \quad n \geq 2.$$

现对 $\forall (x_1, \dots, x_n) \in T_n$ , 由函数的凹性有

$$\frac{2f(b)}{n(n+1)} = \frac{\sum_{k=1}^n kf(x_k)}{1+2+\dots+n} \leq f\left(\frac{x_1+2x_2+\dots+nx_n}{1+2+\dots+n}\right) \quad \text{..... 5分}$$

于是,

$$\frac{x_1+2x_2+\dots+nx_n}{1+2+\dots+n} \geq f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right),$$

即

$$\sum_{k=1}^n kx_k \geq \frac{n(n+1)}{2} f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)$$

上面不等式当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right) \in [a, b]$ 时等号成立. 而 $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right), f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right), \dots, f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)) \in T_n$ ,

于是

$$\inf S_n = \frac{n(n+1)}{2} f^{-1} \left( \frac{2f(b)}{n(n+1)} \right)$$

..... 8分

另一方面，连接点  $(a, f(a))$  与点  $(b, f(b))$  的直线段落在曲线  $y = f(x)$  的下方。  
故有对任意  $x \in [a, b]$

$$\frac{f(b)}{b-a}(x-a) \leq f(x),$$

即

$$x \leq \frac{b-a}{f(b)} f(x) + a.$$

于是

$$\sum_{k=1}^n kx_k \leq \frac{b-a}{f(b)} \sum_{k=1}^n kf(x_k) + \frac{n(n+1)}{2} a = b-a + \frac{n(n+1)}{2} a$$

..... 10分

注意，上式的等号当  $x_1 = b, x_2 = x_3 = \dots = x_n = a$  时达到。而  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (b, a, a, \dots, a) \in T_n$ ，故有

$$\sup S_n = b-a + \frac{n(n+1)}{2} a$$

..... 12分

于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup S_n - \inf S_n) &= b-a + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} \left( a - f^{-1} \left( \frac{2f(b)}{n(n+1)} \right) \right) \\ &= b-a + f(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a-f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)}{2f(b)}}{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= b-a + f(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a-f^{-1}(x)}{x} = b-a + f(b) \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{a-t}{f(t)} \\ &= b-a - \frac{f(b)}{f'(a)} \end{aligned}$$

..... 15分

七、(本题10分) 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  收敛. 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 a_n}{S_n^2}$  收敛, 其中  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .

证明: 记  $S_0 = 0$ ,  $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ . 则

$$\sum_{n=1}^N \frac{n^2 a_n}{S_n^2} = \sum_{n=1}^N \frac{n^2}{S_n^2} (S_n - S_{n-1}) = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{S_n^2} (S_n - S_{n-1})$$

$$\leq \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{S_n S_{n-1}} (S_n - S_{n-1}) = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{S_{n-1}} - \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{S_n}$$

$$\frac{1}{a_1} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(n+1)^2}{S_n} - \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{S_n} \leq \frac{5}{a_1} + 2 \sum_{n=2}^N \frac{n}{S_n} + \sum_{n=2}^N \frac{1}{S_n} \quad (1)$$

..... 4分

由Cauchy不等式

$$\sum_{n=2}^N \frac{n}{S_n} \leq \sum_{n=2}^N \frac{n}{S_n} \sqrt{a_n} \frac{1}{\sqrt{a_n}} \leq \left( \sum_{n=1}^N \frac{n^2 a_n}{S_n^2} \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n} \right)^{1/2} \quad \dots \dots \dots \text{6分}$$

则由(1)

$$\sum_{n=1}^N \frac{n^2 a_n}{S_n^2} \leq \frac{5}{a_1} + 2 \left( \sum_{n=1}^N \frac{n^2 a_n}{S_n^2} \right)^{1/2} \cdot \sqrt{\sigma} + \sigma,$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^N \frac{n^2 a_n}{S_n^2} - 2 \left( \sum_{n=1}^N \frac{n^2 a_n}{S_n^2} \right)^{1/2} \cdot \sqrt{\sigma} + \sigma \leq \frac{5}{a_1} + 2\sigma,$$

$$\left( \sum_{n=1}^N \frac{n^2 a_n}{S_n^2} \right)^{1/2} \leq \sqrt{\sigma} + \sqrt{2\sigma + 5/a_1}.$$

于是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 a_n}{S_n^2}$  收敛。

..... 10分