第十三届全国大学生数学竞赛决赛试题
及参考解答
（非数学类，2023 年 3 月 25 日）

一、　填空题**(本题满分 30 分，每小题 6 分)**

（1）已知 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 均为非零向量，且 $|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}=$ ________.

【解】 利用条件：$|\boldsymbol{b}|=1$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{a}|$，所以

$$|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x^2\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2+\sqrt{2}x|\boldsymbol{a}|+x^2.$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\sqrt{2}x|\boldsymbol{a}|+x^2}-|\boldsymbol{a}|}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}|\boldsymbol{a}|+x}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\sqrt{2}x|\boldsymbol{a}|+x^2}+|\boldsymbol{a}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

（2）极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{2}{x}}=$ ________.

【解】 利用 L’Hospital 法则，得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以

$$\lim_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x-\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{x}{x-\ln(1+x)}\cdot\frac{2[x-\ln(1+x)]}{x^2}}=e.$$

（3）积分 $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=$ ________.

【解】 作变换 $x=\sec\theta$，则

$$\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sec\theta\tan\theta}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}.$$

（4）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $x=\dfrac{t}{1+t^2}$，$y=\dfrac{t^2}{1+t^2}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ 处的曲率 $\kappa=$ ________.

【解】 易知，对应点$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\dfrac{2}{3}\right)$的参数$t=\sqrt{2}$.

利用参数方程求导法则，得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2t}{1-t^2}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{2(1+t^2)^3}{(1-t^2)^3}$. 所以，当$t=\sqrt{2}$时，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2\sqrt{2}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{2(1+t^2)^3}{(1-t^2)^3}=-2\times 27$，因此曲线$y=y(x)$在$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\dfrac{2}{3}\right)$处的曲率

$$\kappa=\frac{\left|\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}{\sqrt{\left(1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^3}}=\frac{2\times 27}{\sqrt{\left(1+\left(2\sqrt{2}\right)^2\right)^3}}=2.$$

（5）设D是由曲线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$及两坐标轴围成的平面薄片型物件，其密度函数为$\rho(x,y)=\sqrt{x}+2\sqrt{y}$，则薄片物件$D$的质量$M=$________.

【解】 $M=\iint\limits_D(\sqrt{x}+2\sqrt{y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 利用二重积分的对称性，得

$$M=3\iint\limits_D\sqrt{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x\int_0^{(1-\sqrt{x})^2}\mathrm{d}y=3\int_0^1\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2\mathrm{d}x.$$

作变量代换：$t=\sqrt{x}$，得

$$M=3\int_0^1\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2\mathrm{d}x=6\int_0^1t^2(1-t)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{5}.$$

二、**(本题满分 12 分)** 求区间$[0,1]$上的连续函数$f(x)$，使之满足

$$f(x)=1+(1-x)\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y+x\int_x^1(1-y)f(y)\mathrm{d}y.$$

【解】 根据题设条件及等式可推知，函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f(0)=f(1)=1$. ------------ 4 分

对等式两边求导，得

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y+(1-x)xf(x)+\int_x^1(1-y)f(y)\mathrm{d}y-x(1-x)f(x)\\&=-\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y+\int_x^1(1-y)f(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

再对上式两边求导得 $f''(x)=-xf(x)-(1-x)f(x)=-f(x)$，即 $f''(x)+f(x)=0$.

------------ 4 分

这是二阶常系数齐次线性微分方程，易知其通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$.

分别取 $x=0$ 和 $x=1$ 代入上式，得 $C_1=1$，$C_2=\dfrac{1-\cos 1}{\sin 1}=\tan\dfrac{1}{2}$，因此所求函数为

$$f(x)=\cos x+\tan\frac{1}{2}\cdot\sin x \quad (0\le x\le 1).$$ ------------ 4 分

三、 (本题满分 12 分) 设曲面 Σ 是由锥面 $x=\sqrt{y^2+z^2}$，平面 $x=1$，以及球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 围成的空间区域的外侧表面，计算曲面积分：

$$I=\oiint_{\Sigma}\left[x^2+f(xy)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[y^2+f(xz)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[z^2+f(yz)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $f(u)$ 是具有连续导数的奇函数.

【解】 设 $P=x^2+f(xy)$，$Q=y^2+f(xz)$，$R=z^2+f(yz)$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2(x+y+z)+y\left[f'(xy)+f'(yz)\right].$$

因为奇函数 $f(u)$ 的导数是偶函数，所以 $f'(xy)+f'(yz)$ 关于 y 是偶函数.

------------ 4 分

记 Ω 是以 Σ 为边界曲面的有界区域，根据 Gauss 公式，并结合三重积分的对称性，得

$$I=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

------------ 4 分

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2}\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\left(16-\frac{1}{\cos^4\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi=4\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{2}.$$

------------ 4 分

四、 (本题满分 12 分) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<\pi\\ 0, & -\pi\le x\le 0\end{cases},$$

试将函数 $f(x)$ 展开成 Fourier 级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 之和.

【解】 函数 $f(x)$ 在点 $x=(2k+1)\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 处不连续，在其他点处连续，根据收敛定理可知，$f(x)$ 的Fourier级数收敛，并且当 $x\neq(2k+1)\pi$ 时级数收敛于 $f(x)$，当 $x=(2k+1)\pi$ 时级数收敛于 $\dfrac{f(-\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\dfrac{\pi}{2}$.

------------ 4分

下面先计算 $f(x)$ 的Fourier系数. $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$，且

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2},\quad n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}}{n},\quad n=1,2,\cdots,$$

因此当 $x\in(-\infty,+\infty)$，且 $x\neq\pm\pi,\pm 3\pi,\cdots$ 时，有

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right].$$ ------------ 4 分

注意到 $x=0$ 是 $f(x)$ 的连续点，代入上式得

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}=0,\quad 即\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}+\dfrac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$，由此解得 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$. 最后可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}.$$

------------ 4 分

【注】 对于最后一步，若只给出结果 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$，则可得 2 分.

五、**(本题满分 12 分)** 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=\dfrac{\pi}{2}$，$a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{n+1}\sin a_n$，$n\geq 1$. 求证：数列 $\{na_n\}$ 收敛.

【解】 利用不等式：$x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x\quad\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

首先，易知 $0<a_{n+1}<a_n<a_1<\frac{6}{\pi}\ (n\geq 2)$. ------------ 4 分

故由题设等式得

$$(n+1)a_{n+1}=na_n+a_n-\sin a_n>na_n,$$

所以 $\{na_n\}$ 是严格递增数列. ------------ 4 分

其次，由于

$$\frac{1}{na_n}-\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}<\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n}{(na_n)^2}=\frac{a_n-\sin a_n}{(na_n)^2}<\frac{a_n^3}{6}\cdot\frac{1}{(na_n)^2}\leq\frac{a_1}{6n^2},$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{ka_k}-\frac{1}{(k+1)a_{k+1}}\right)<\frac{a_1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$，即 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}<\frac{a_1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{a_1}{6}\cdot\frac{\pi^2}{6}$，解得

$$(n+1)a_{n+1}<\frac{a_1}{1-\left(\frac{a_1\pi}{6}\right)^2}.$$

这就证明了数列 $\{na_n\}$ 严格递增且有上界，因而收敛. ------------ 4 分

六、**(本题满分 10 分)** 证明：$a^b+b^a\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq a^a+b^b$，其中 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$.

【证】 不妨设 $0<a\leq\frac{1}{2}\leq b<1$，考虑函数 $f(x)=a^x+b^{1-x}$，如能证明 $f(x)$ 在区间 $(0,b]$ 上单调减少，则有 $f(b)\leq f(\frac{1}{2})\leq f(a)$，不等式得证. ------------ 3 分

对于 $x\in(0,b]$，因为 $f'(x)=\ln a\cdot a^x-\ln b\cdot b^{1-x}$，$f''(x)=\ln^2 a\cdot a^x+\ln^2 b\cdot b^{1-x}>0$，

所以 $f'(x)<f'(b)$，故只需证 $f'(b)\leq 0$，即 $\ln a\cdot a^b\leq\ln b\cdot b^a$ 或 $\frac{\ln a^a}{a^a}\leq\frac{\ln b^b}{b^b}$.

------------ 4 分

容易证明 $\frac{\ln x}{x}$ 是 $(0,e]$ 上的单调增函数，问题归结为证 $0<a^a<b^b\leq e$，这等价于证 $\frac{\ln a}{1-a}<\frac{\ln b}{1-b}$，而这由函数 $\frac{\ln x}{1-x}$ 在 $(0,1)$ 上单调增加即得. ------------ 3 分

【注】 补证函数 $g(x)=\frac{\ln x}{1-x}$ 在 $(0,1)$ 上单调增加. 利用 $\ln(1+x)<x\ (x>0)$，有

$$g'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\left[\frac{1}{x}-1-\ln\left(1+(\frac{1}{x}-1)\right)\right]>0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调增加.

七、 (本题满分 12 分) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 A 的 n 个列向量，且均不为零. 证明：矩阵 A 的秩满足

$$r(A)\ge\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}^2}{\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_i}.$$

【证】 注意到用非零常数乘矩阵的列向量不改变矩阵的秩 $r(A)$，故可设 $\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_i=1$，$i=1,2,\cdots,n$，所以只需证明

$$r(A)\ge\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2\text{，也即 }r(A)\ge\sum_{i=1}^{n}(e_i^{\mathrm{T}}\alpha_i)^2.$$

其中 $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 是第 i 个分量为 1 其余分量均为 0 的 n 维列向量.

------------ 4 分

令 $r(A)=k$，则由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的任一极大无关组并利用 Schmidt 正交化方法，可得标准正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$. 易知，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 等价.

对任意 $i=1,2,\cdots,n$，令 $\alpha_i=\sum_{j=1}^{k}x_j\beta_j$，则由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 的标准正交性可知，

$x_j=\beta_j^{\mathrm{T}}\alpha_i$，$j=1,2,\cdots,k$，所以 $\alpha_i=\sum_{j=1}^{k}(\beta_j^{\mathrm{T}}\alpha_i)\beta_j$，于是 $e_i^{\mathrm{T}}\alpha_i=\sum_{j=1}^{k}(\beta_j^{\mathrm{T}}\alpha_i)(e_i^{\mathrm{T}}\beta_j)$.

------------ 4 分

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，并注意到 $\sum_{j=1}^{k}(\beta_j^{\mathrm{T}}\alpha_i)^2=\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_i=1$，可得

$$(e_i^{\mathrm{T}}\alpha_i)^2=\left(\sum_{j=1}^{k}(\beta_j^{\mathrm{T}}\alpha_i)(e_i^{\mathrm{T}}\beta_j)\right)^2\le\sum_{j=1}^{k}(\beta_j^{\mathrm{T}}\alpha_i)^2\sum_{j=1}^{k}(e_i^{\mathrm{T}}\beta_j)^2=\sum_{j=1}^{k}(e_i^{\mathrm{T}}\beta_j)^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(e_i^{\mathrm{T}}\alpha_i)^2\le\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(e_i^{\mathrm{T}}\beta_j)^2=\sum_{j=1}^{k}(\beta_j^{\mathrm{T}}\beta_j)^2=k=r(A).$$

------------ 4 分