

第十二届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案 (数学类低年级组, 2021 年 5 月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	20	15	15	20	15	15	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 20 分, 每小题 5 分) 填空题

1. 设 $\Omega : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 \leq 1$, 则积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dx dy dz = \underline{\frac{1424\pi}{15}}.$

2. 设 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{k^2}}{k}, y_n = \int_0^n e^{x^2} dx$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \underline{2}.$

3. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型为 $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}.$

4. 设 A 为 2021 阶对称矩阵, A 的每一行均为 $1, 2, \dots, 2021$ 的一个排列. 则 A 的迹 $\text{tr } A = \underline{1011 \times 2021}.$

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 给定 yOz 平面上的圆 $C: y = \sqrt{3} + \cos \theta, z = 1 + \sin \theta \ (\theta \in [0, 2\pi])$.

1. 求 C 绕 z 轴旋转所得到的环面 S 的隐式方程.
2. 设 $z_0 \geq 0$, 以 $M(0, 0, z_0)$ 为顶点的两个锥面 S_1 和 S_2 的半顶角之差为 $\pi/3$, 且均与环面 S 相切 (每条母线都与环面相切), 求 z_0 和 S_1, S_2 的隐式方程.

解答. 1. 由 yOz 平面的圆 C 的参数方程消去参数 θ 可得

$$C: \begin{cases} (y - \sqrt{3})^2 + (z - 1)^2 = 1, \\ x = 0, \end{cases}$$

由此可得绕 z 轴旋转获得的环面 S 的方程

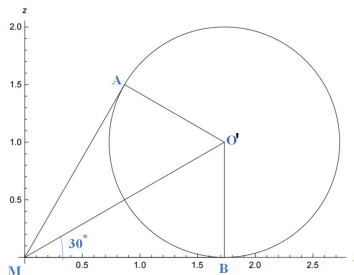
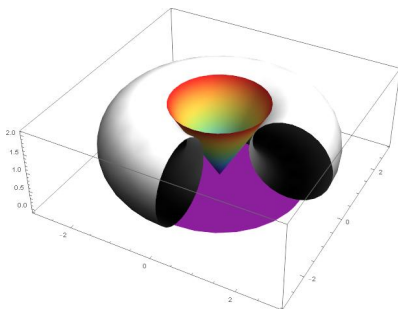
$$(\pm\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{3})^2 + (z - 1)^2 = 1,$$

化简得到

$$S: (x^2 + y^2 + (z - 1)^2 + 2)^2 = 12(x^2 + y^2).$$

..... (5 分)

2. 记圆 C 的圆心坐标为 $O'(0, \sqrt{3}, 1)$, M 的坐标为 $(0, 0, t)$, M 与圆 C 的两个切点坐标分别为 A, B , 则由两个圆锥半顶角之差为 $\frac{\pi}{3}$ 可得 $\angle O'MA = \angle O'MB = \frac{\pi}{6}$, 进而通过解三角形可得 $t = 0$ 或 $t = 2$.



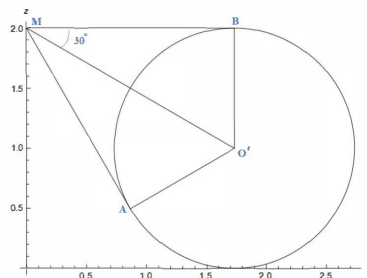
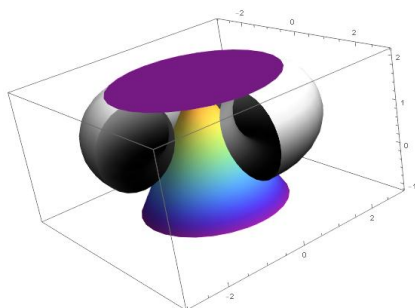
当 $t = 0$ 时, 得 $M(0, 0, 0)$, 此时切点坐标为 $A(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}), B(0, \sqrt{3}, 0)$, 锥面 S_1 的母

线即为直线 MA , 其方程为 $L_1: \begin{cases} x = 0, \\ \sqrt{3}y - z = 0, \end{cases} \quad S_1 \text{ 即为 } L_1 \text{ 绕 } z \text{ 轴所得旋转}$

面, 其方程为 $S_1: z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$. 锥面 S_2 的母线即为直线 MB , 其方程为

$$L_2: \begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad S_2 \text{ 即为 } L_2 \text{ 绕 } z \text{ 轴所得旋转面, 其方程为 } S_2: z = 0.$$

(11 分)



当 $t = 2$ 时, 得 $M(0, 0, 2)$, 此时切点坐标为 $A(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $B(0, \sqrt{3}, 2)$, 两条母线的方程分别为

$$L'_1: \begin{cases} x = 0, \\ \sqrt{3}y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad L'_2: \begin{cases} x = 0, \\ z = 2. \end{cases}$$

对应的锥面方程为

$$S'_1: z = 2 - \sqrt{3(x^2 + y^2)} \quad \text{和} \quad S'_2: z = 2.$$

(15 分)

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 n 阶复方阵 A_1, \dots, A_{2n} 均相似于对角阵, \mathbb{C}^n 表示复 n 维列向量空间. 证明:

1. $\mathbb{C}^n = \ker A_k \oplus \operatorname{Im} A_k$. 这里 $\ker A_k = \{\alpha | A_k \alpha = 0, \alpha \in \mathbb{C}^n\}$, $\operatorname{Im} A_k = \{A_k \beta | \beta \in \mathbb{C}^n\}$ ($k = 1, \dots, 2n$).
2. 若对所有的 $k < j$ 皆有 $A_k A_j = 0$ ($k, j = 1, 2, \dots, 2n$), 则 A_1, \dots, A_{2n} 中至少有 n 个矩阵为零矩阵.

证明. 由 A_k 可复对角化可知, 存在可逆矩阵 $P_k = (p_1^{(k)}, \dots, p_n^{(k)})$ 使得

$$A_k P_k = \operatorname{diag}(\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)}) P_k.$$

不妨设 $p_1^{(k)}, \dots, p_t^{(k)}$ 为关于特征值 0 的特征向量, $p_{t+1}^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}$ 为关于特征值 $\lambda \neq 0$ 的特征向量. 于是, $\ker A_k = \operatorname{span}\{p_1^{(k)}, \dots, p_t^{(k)}\}$, $\operatorname{Im} A_k = \operatorname{span}\{p_{t+1}^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}\}$. 这里若 A_k 不以 0 为特征值时, $\ker A_k = 0$. 事实上, 若 $\dim \ker A_k > t$, 则特征值 0 的代数重数 $> t$, 矛盾. 从而有 $\ker A_k = \operatorname{span}\{p_1^{(k)}, \dots, p_t^{(k)}\}$.

另一方面, $\forall y \in \mathbb{C}^n$, y 可写成 $y = a_1 p_1^{(k)} + \dots + a_n p_n^{(k)}$, 结果 $Ay = a_{t+1} \lambda_{t+1}^{(k)} p_{t+1}^{(k)} + \dots + a_n \lambda_n^{(k)} p_n^{(k)} \in \operatorname{span}\{p_{t+1}^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}\}$. 从而有 $\operatorname{Im} A_k = \operatorname{span}\{p_{t+1}^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}\}$. 故有 $\mathbb{C}^n = \ker A_k \oplus \operatorname{Im} A_k$.

..... (5 分)

现由条件 $A_1 A_2 = 0$ 得 $\operatorname{Im} A_2 \subseteq \ker A_1$, 进而有

$$\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \ker A_2) \oplus \operatorname{Im} A_2 \oplus \operatorname{Im} A_1.$$

事实上, 由 $\mathbb{C}^n = \ker A_2 \oplus \operatorname{Im} A_2$ 可知, $\forall u \in \ker A_1, u = u_1 + u_2$, 其中 $u_1 \in \ker A_2, u_2 \in \operatorname{Im} A_2$. 又由 $\operatorname{Im} A_2 \subseteq \ker A_1$ 得 $u_1 = (u - u_2) \in \ker A_2 \cap \ker A_1$. 结果 $\ker A_1$ 有直和分解: $\ker A_1 = (\ker A_2 \cap \ker A_1) \oplus \operatorname{Im} A_2$, 于是 $\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \ker A_2) \oplus \operatorname{Im} A_2 \oplus \operatorname{Im} A_1$.

利用 $A_1 A_3 = 0, A_2 A_3 = 0$ 及 $\mathbb{C}^n = \ker A_3 \oplus \operatorname{Im} A_3$, 重复前述对 $\ker A_1$ 进行分解的过程又可得

$$\ker A_2 \cap \ker A_1 = (\ker A_3 \cap \ker A_2 \cap \ker A_1) \oplus \operatorname{Im} A_3,$$

从而有

$$\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \ker A_2 \cap \ker A_3) \oplus \operatorname{Im} A_3 \oplus \operatorname{Im} A_2 \oplus \operatorname{Im} A_1$$

.....

最后有

$$\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \cdots \cap \ker A_{2n}) \oplus \operatorname{Im} A_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} A_{2n}.$$

..... (12 分)

两边取维数得

$$n = \dim(\ker A_1 \cap \cdots \cap \ker A_{2n}) + \operatorname{rank} A_1 + \cdots + \operatorname{rank} A_{2n}.$$

因此 $\operatorname{rank} A_1, \dots, \operatorname{rank} A_{2n}$ 中至少有 n 个为 0, 即 A_1, \dots, A_{2n} 中至少有 n 个矩阵为零矩阵. 证毕. \square

..... (15 分)

得分	
评阅人	

四、(本题 20 分) 称实函数 f 满足条件 (P): 若 f 在

$[0, 1]$ 上非负连续, $f(1) > f(0) = 0$, $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = +\infty$, 且对任何 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 成立 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

1. 令 $c > 0$, 对于 $f_1(x) = cx$ 和 $f_2(x) = \sqrt{x}$, 分别验证 f_1, f_2 是否满足条件 (P), 并计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f_1(x) - xf'_1(x))^m e^{f'_1(x)}$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f_2(x) - xf'_2(x))^m e^{f'_2(x)}$.
2. 证明: $\forall m \geq 1$, 存在满足条件 (P) 的函数 f 以及趋于零的正数列 $\{x_n\}$, 使得 f 在每一点 x_n 可导, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) - x_n f'(x_n))^m e^{f'(x_n)} = +\infty$.

解答. 我们指出, 注意到 $f(x) - xf'(x) = -x^2 \left(\frac{f(x)}{x}\right)'$ 对计算与思考是有益的.

1. 易见 f_1, f_2 都在 $[0, 1]$ 上非负连续, $f_1(1) > f_1(0) = 0, f_2(1) > f_2(0) = 0$.

对于 $x > 0, f'_1(x) = c, f''_1(x) = 0, f'_2(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}, f''_2(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$.

因此, f_1, f_2 均是 $[0, 1]$ 上的凹函数. 由于 $\int_0^1 \frac{1}{f_1(x)} dx = +\infty, \int_0^1 \frac{1}{f_2(x)} dx < +\infty$, 所以 f_1 满足条件 (P) 而 f_2 不满足条件 (P).

另一方面, $f_1(x) - xf'_1(x) \equiv 0$, 因此, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f_1(x) - xf'_1(x))^m e^{f'_1(x)} = 0$.

而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f_2(x) - xf'_2(x))^m e^{f'_2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^m e^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = +\infty$.

..... (5 分)

2. 从 1 的结果得到提示, 我们用类似函数 \sqrt{x} 与 cx 的函数来构造想要的例子.

注意到对于 $(0, 1]$ 中严格单调下降并趋于零的点列 $\{a_n\}$, 当函数 f 的图像为依次连接 $(a_n, \sqrt{a_n})$ 的折线且 $f(0) = 0$ 时, 条件 (P) 成立.

于是, 我们可以尝试寻找这样一系列 $\{a_n\}$ 以及 $x_n \in (a_{n+1}, a_n)$ 以满足题目的要求.

..... (10 分)

具体地, 取 $a_0 = 1, x_n \in (a_{n+1}, a_n)$ 待定. 我们给出 f 的表达式如下:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a_{n+1}} + k_n(x - a_{n+1}), & x \in (a_{n+1}, a_n]; n \geq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$\text{其中 } k_n = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}.$$

注意到

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{1}{f(x)} dx = \frac{1}{2k_n} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{\sqrt{a_n}}{2} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}},$$

取 $a_{n+1} = a_n e^{-\frac{2}{n\sqrt{a_n}}}$, 即有 $0 < a_{n+1} < a_n$, 且 $\int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{1}{f(x)} dx \geq \frac{1}{n}$.

..... (15 分)

另一方面, 在 (a_{n+1}, a_n) 内, $f'(x) = k_n \geq \frac{1}{2\sqrt{a_n}}$,

$$f(x) - x f'(x) = \frac{\sqrt{a_n} \sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \geq \frac{\sqrt{a_n} e^{-\frac{1}{n\sqrt{a_n}}}}{2}.$$

因此, 任取 $x_n \in (a_{n+1}, a_n)$, 均有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) - x_n f'(x_n))^m e^{f'(x_n)} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{a_n} e^{-\frac{1}{n\sqrt{a_n}}}}{2} \right)^m e^{\frac{1}{2\sqrt{a_n}}} = +\infty.$$

因此, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) - x_n f'(x_n))^m e^{f'(x_n)} = +\infty$. □

..... (20 分)

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 和 A 均为实数. 回答以下问题:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\alpha + \beta) = A$ 成立的充要条件是什么?
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin(n\alpha_1 + \beta_1) + \sin(n\alpha_2 + \beta_2)) = 0$ 成立的充要条件是什么?

条件是什么?

解答. 为方便引用, 标记

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\alpha + \beta) = A \quad (1)$$

以及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin(n\alpha_1 + \beta_1) + \sin(n\alpha_2 + \beta_2)) = 0. \quad (2)$$

法 I. 我们给出如下答案.

1. 满足的条件为: $\sin \alpha = 0, \sin \beta = A, \sin(\alpha + \beta) = A$.
2. 满足的条件为:

$$\sin \alpha_2 = \pm \sin \alpha_1 \neq 0, \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) = 1, 1 \pm \cos(\beta_1 \mp \beta_2) = 0.$$

解答过程.

1. 条件 (1) 等价于

$$\sin((n+2)\alpha + \beta) \rightarrow A, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

- (3) - (1) 并整理得到

$$\sin \alpha \cos(n\alpha + \beta) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

同理可得

$$\sin^2 \alpha \sin(n\alpha + \beta) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

..... (3 分)

上式和 (4) 表明, 必有 $\sin \alpha = 0$, 否则

$$\sin(n\alpha_1 + \beta_1) \rightarrow 0, \quad \cos(n\alpha_1 + \beta_1) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

而矛盾.

再由 (1) 等价于

$$\sin(2n\alpha_1 + \beta_1) \rightarrow A, \quad \sin(2n\alpha_1 + \alpha + \beta_1) \rightarrow A,$$

得到

$$\sin \alpha_1 = 0, \sin \beta_1 = \sin(\alpha_1 + \beta_1) = A.$$

故 (1) 成立. (5 分)

再来证明结论 2. 条件 (2) 等价于

$$\sin((n+2)\alpha_1 + \beta_1) + \sin((n+2)\alpha_2 + \beta_2) \rightarrow 0. \quad (5)$$

(5) - (2) 并整理, 得到

$$\sin \alpha_1 \cos(n\alpha_1 + \beta_1) + \sin \alpha_2 \cos(n\alpha_2 + \beta_2) \rightarrow 0. \quad (6)$$

同理, 可得

$$\sin^2 \alpha_1 \sin(n\alpha_1 + \beta_1) + \sin^2 \alpha_2 \sin(n\alpha_2 + \beta_2) \rightarrow 0. \quad (7)$$

..... (8 分)

(2) 乘以 $\sin^2 \alpha_2$, 减去 (7), 得到

$$(\sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1) \sin(n\alpha_1 + \beta_1) \rightarrow 0.$$

故必有 $\sin^2 \alpha_2 = \sin^2 \alpha_1$, 于是有

$$\text{或者 } \sin^2 \alpha_2 = \sin^2 \alpha_1 = 0, \quad \text{或者 } \sin^2 \alpha_2 = \sin^2 \alpha_1 \neq 0.$$

若 $\sin^2 \alpha_2 = \sin^2 \alpha_1 = 0$, 即 $\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1 = 0$, 代入 (2) 即得

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = 0, \sin \beta_1 + \sin \beta_2 = \sin(\alpha_1 + \beta_1) + \sin(\alpha_2 + \beta_2) = 0.$$

..... (11 分)

若 $\sin^2 \alpha_2 = \sin^2 \alpha_1 \neq 0$, 则, $\sin \alpha_2 = \pm \sin \alpha_1 \neq 0$, 由 (6) 和 (7) 得到

$$\sin(n\alpha_1 + \beta_1) + \sin(n\alpha_2 + \beta_2) \rightarrow 0,$$

$$\cos(n\alpha_1 + \beta_1) \pm \cos(n\alpha_2 + \beta_2) \rightarrow 0.$$

上两式等价于右边平方和趋于 0, 即

$$A_1^2 + A_2^2 \pm 2A_1A_2 \cos(n(\alpha_1 \mp \alpha_2) + (\beta_1 \mp \beta_2)) \rightarrow 0.$$

$$\Leftrightarrow \text{由题 (1)}, \sin \alpha_2 = \pm \sin \alpha_1 \neq 0$$

$$\sin(\alpha_1 \mp \alpha_2) = 0, \Rightarrow \alpha_1 \mp \alpha_2 = 2p\pi$$

$$1 \pm \cos(\beta_1 \mp \beta_2) = 0,$$

从而 (2) 成立的条件是

$$\sin \alpha_2 = \pm \sin \alpha_1 \neq 0, \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) = 1, 1 \pm \cos(\beta_1 \mp \beta_2) = 0.$$

..... (15 分)

法 II. 问题 1 和 2 都可以视为如下问题的特例:

设 $m \geq 2$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 均为实数, C_1, C_2, \dots, C_m 均为非零复数. 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m C_j e^{ni\lambda_j} = 0$ 成立的充要条件是什么.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m C_j e^{ni\lambda_j} = 0$, 则对任何 $\lambda \in \mathbb{R}$, 均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m C_j e^{ni(\lambda_j - \lambda)} = 0$.

进一步, 由 Stolz 公式,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^n C_j e^{ki(\lambda_j - \lambda)} = 0. \quad (8)$$

我们断言, $\lambda_2, \dots, \lambda_m$ 之中必有一个, 设为 λ_ℓ , 使得 $e^{i(\lambda_\ell - \lambda_1)} = 1$, 即 $\frac{\lambda_\ell - \lambda_1}{2\pi}$ 为整数. 否则, 在 (8) 中取 $\lambda = -\lambda_1$, 得到

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^n C_j e^{ki(\lambda_j - \lambda_1)} \\ &= C_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^m C_j \frac{e^{(n+1)i(\lambda_j - \lambda_1)} - 1}{e^{i(\lambda_j - \lambda_1)} - 1} = 0. \end{aligned}$$

一般地, 可得

$$e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}, \dots, e^{i\lambda_m} \quad \text{中任何一个必然等于余下 } m-1 \text{ 个中的另一个.} \quad (9)$$

..... (7 分)

1. (1) 化为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{i\beta} e^{in\alpha} - e^{-i\beta} e^{-in\alpha} - 2iA) = 0.$$

情形 1.1. $A = 0$. 此时 $m = 2$,

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = -\alpha, \quad C_1 = e^{i\beta}, \quad C_2 = -e^{-i\beta}.$$

由 (9), $e^{i\alpha} = e^{-i\alpha}$, 进而 $e^{i\beta} = e^{-i\beta}$. 即 $\frac{\alpha}{\pi}, \frac{\beta}{\pi}$ 为整数.

情形 1.2. $A \neq 0$. 此时 $m = 3$,

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = -\alpha, \quad \lambda_3 = 0, \quad C_1 = e^{i\beta}, \quad C_2 = -e^{-i\beta}, \quad C_3 = -2iA.$$

由 (9), 此时, 必有 $e^{i\alpha} = e^{-i\alpha} = 1$, 进而 $e^{i\beta} - e^{-i\beta} - 2iA = 0$. 即 $\frac{\alpha}{\pi}$ 为偶数, 且 $A = \sin \beta$.

易见上述条件也是充分的. 总之, 本小题条件成立的充要条件是: 存在整数 k, j 使得

$$\begin{cases} A = 0, \\ \alpha = k\pi, \\ \beta = j\pi \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} A = \sin \beta, \\ \alpha = 2k\pi. \end{cases}$$

..... (9 分)

2. 条件 (2) 化为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{i\beta_1} e^{in\alpha_1} - e^{-i\beta_1} e^{-in\alpha_1} + e^{i\beta_2} e^{in\alpha_2} - e^{-i\beta_2} e^{-in\alpha_2}) = 0.$$

此时 $m = 4$,

$$\lambda_1 = \alpha_1, \quad \lambda_2 = -\alpha_1, \quad \lambda_3 = \alpha_2, \quad \lambda_4 = -\alpha_2,$$

$$C_1 = e^{i\beta_1}, \quad C_2 = -e^{-i\beta_1}, \quad C_3 = e^{i\beta_2}, \quad C_4 = -e^{-i\beta_2}.$$

于是由 (9), 它们必然可以分为两对, 每一对有相同的值(不排除四个值均相同).

..... (11 分)

情形 2.1. $e^{i\lambda_1} = e^{i\lambda_2} = e^{i\lambda_3} = e^{i\lambda_4}$.

这等价于 $\frac{\alpha_1}{\pi}, \frac{\alpha_2}{\pi}$ 均为整数, 且有相同的奇偶性. 进一步, $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$, 而这等价于 $\sin \beta_1 + \sin \beta_2 = 0$, 等价于 $\frac{\beta_2 - \beta_1}{\pi}$ 是奇数.

情形 2. $e^{i\lambda_1} = e^{i\lambda_2} \neq e^{i\lambda_3} = e^{i\lambda_4}$.

这等价于 $\frac{\alpha_1}{\pi}, \frac{\alpha_2}{\pi}$ 均为整数, 但有不同的奇偶性. 进一步, $C_1 + C_2 = C_3 + C_4 = 0$, 而这等价于 $\frac{2\beta_1}{\pi}, \frac{2\beta_2}{\pi}$ 是奇数.

情形 3. $e^{i\lambda_1} = e^{i\lambda_3} \neq e^{i\lambda_2} = e^{i\lambda_4}$.

这等价于 $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\pi}$ 为偶数, 但 $\frac{\alpha_1}{\pi}$ 不是整数. 进一步, $C_1 + C_3 = C_2 + C_4 = 0$, 而这等价于 $\frac{\beta_2 - \beta_1}{\pi}$ 是奇数.

情形 4. $e^{i\lambda_1} = e^{i\lambda_4} \neq e^{i\lambda_2} = e^{i\lambda_3}$.

这等价于 $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\pi}$ 为偶数, 但 $\frac{\alpha_1}{\pi}$ 不是整数. 进一步, $C_1 + C_4 = C_2 + C_3 = 0$, 而这等价于 $\frac{\beta_2 + \beta_1}{\pi}$ 是奇数.

易见上述条件也是充分的. 总之, 本小题条件成立的充要条件是: 存在整数 k, j, p, q , 使得以下四者之一成立

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = k\pi, \\ \alpha_2 = k\pi + 2j\pi, \\ \beta_2 = \beta_1 + (2p+1)\pi, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = k\pi, \\ \alpha_2 = k\pi + 2j\pi + \pi, \\ \beta_1 = (p + \frac{1}{2})\pi, \\ \beta_2 = (q + \frac{1}{2})\pi, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_1}{\pi} \notin \mathbb{Z}, \\ \alpha_2 = \alpha_1 + 2k\pi, \\ \beta_2 = \beta_1 + (2p+1)\pi, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_1}{\pi} \notin \mathbb{Z}, \\ \alpha_2 = -\alpha_1 + 2k\pi, \\ \beta_2 = -\beta_1 + (2p+1)\pi. \end{array} \right.$$

..... (15 分)

以上条件可以归并为: 存在整数 k, j, p, q , 以及 $\varepsilon \pm 1$ 使得以下二者之一成立

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = k\pi, \\ \alpha_2 = k\pi + 2j\pi + \pi, \\ \beta_1 = (p + \frac{1}{2})\pi, \\ \beta_2 = (q + \frac{1}{2})\pi, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \varepsilon\alpha_1 + 2k\pi, \\ \beta_2 = \varepsilon\beta_1 + (2p+1)\pi. \end{array} \right.$$

得分	
评阅人	

六、(本题 15 分) 设 g 为 \mathbb{R} 上恒正的连续函数, 对于正整数 n 以及 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, 考虑微分方程

$$\begin{cases} y'(x) = y^{\frac{1}{2n+1}}(x)g(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

- 证明: 1. 方程 (1) 有定义在整个 \mathbb{R} 上的解(称为**全局解**);
 2. 若 $y_0 = 0$, 则方程 (1) 有无穷多个全局解;
 3. 若 $y = y(x)$ 是方程 (1) 的解, 则 y 在 \mathbb{R} 上非负, 或在 \mathbb{R} 上非正.

证明. 1. 若 $y_0 = 0$, 则 $y \equiv 0$ 为全局解.

..... (1 分)

若 $y_0 \neq 0$. 注意到函数 $y = y(x)$ 为方程 (1) 的解当且仅当 $y = -y(x)$ 为方程 (1) 的解, 故不妨设 $y_0 > 0$. 在 $y \neq 0$ 的区间内求解 (1) 得到

$$y^{\frac{2n}{2n+1}}(x) = y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x),$$

其中

$$G(x) = \frac{2n}{2n+1} \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

由于 g 恒正, G 严格单增, 而 $G(x_0) = 0$. 于是 $\alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) \in [-\infty, 0)$.

情形 I. $\alpha + y_0^{\frac{2n}{2n+1}} \geq 0$.

此时 $G(x) + y_0^{\frac{2n}{2n+1}}$ 恒正. 取

$$y(x) = \left(y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x) \right)^{\frac{2n+1}{2n}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

即知它为方程 (1) 的全局解.

..... (3 分)

情形 II. $\alpha + y_0^{\frac{2n}{2n+1}} < 0$.

此时, 有唯一的 $\gamma \in (-\infty, x_0)$ 使得 $G(\gamma) + y_0^{\frac{2n}{2n+1}} = 0$. 取

$$y(x) = \begin{cases} \left(y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x) \right)^{\frac{2n+1}{2n}}, & x > \gamma \\ 0, & x \leq \gamma, \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

直接计算可得

$$y'_+(\gamma) = \lim_{x \rightarrow \gamma^+} \frac{1}{x - \gamma} \left(y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x) \right)^{\frac{2n+1}{2n}} = g(\gamma) \lim_{x \rightarrow \gamma^+} \left(y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x) \right)^{\frac{1}{2n}} = 0,$$

于是 $y'(0) = 0$. 进而可知 y 为方程 (1) 的全局解.

..... (5 分)

2. 由 1 的结论, 任取 $\gamma \geq x_0$, 可见以下函数均是方程 (1) 的全局解

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{2n}{2n+1} \int_{\gamma}^x g(t) dt \right)^{\frac{2n+1}{2n}}, & x > \gamma \\ 0, & x \leq \gamma, \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

..... (10 分)

3. 设 $y(x)$ 是方程 (1) 在区间 I 上的解 (I 不必是 \mathbb{R}), 均有

$$\left(y^2(x) \right)' = 2y(x)y'(x) = 2y^{\frac{2n+2}{2n+1}}(x)g(x) \geq 0, \quad \forall x \in I.$$

因此, $y^2(x)$ 在 I 上单调增加. 由连续函数的介值定理即知 $y(x)$ 或在 I 上非负, 或在 I 上非正. □

..... (15 分)