全国大学生数学竞赛非数学类模拟三

清疏竞赛考研数学

2023 年 9 月 5 日

摘要

$$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\},\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}.$$

模拟试题应当规定时间独立完成并给予反馈.

1 填空题

填空题 1.1 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\pi n\sqrt[2n]{e}\right)=$ __________

填空题 1.2 设 $u=f(x,y,z),g\left(x^2,e^y,z\right)=0,y=\sin x$, 且 f,g 都有一阶连续偏导数, $\frac{\partial g}{\partial z}\neq 0$, 则 $\frac{du}{dx}=$ __________

填空题 1.3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx=$ __________

填空题 1.4 直线 $\begin{cases}x+y-z=1\\x-y+z=-1\end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 投影直线方程为 __________

填空题 1.5 计算 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-2n-4}{n^4+4n^2+16}=$ __________

2 选择题答案区

3 解答题

解答题 3.1 设 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ 满足

$$c_1^k + c_2^k + \cdots + c_n^k > 0, k = 1, 2, \cdots.$$

令 $f(x) = \frac{1}{(1-c_1x)(1-c_2x)\cdots(1-c_nx)}$, 证明 $f^{(k)}(0) > 0, \forall k = 1, 2, \cdots$.

解答题 3.2 设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 满足

$$f\left(x\right)-f\left(y\right)\leqslant\left|x-y\right|,\forall x,y\in\left[a,b\right].$$

设

$$x_{n+1}=\frac{x_n+f\left(x_n\right)}{2},n=1,2,\cdots,x_1\in\left[a,b\right],$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

解答题 3.3 求三重积分

$$\iiint_D \left(1-2x^2-3y^2-z^2\right)^{\frac{1}{3}} dxdydz$$

达到最大值的 D, 并在此时计算三重积分.

解答题 3.4 求全部二次可微函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得

$$f''(x)\cos f(x)\geqslant (f'(x))^2\sin f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

解答题 3.5 设 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ 是二次可微函数满足

$$\left(f''\left(x\right)-f\left(x\right)\right)\tan x+2f'\left(x\right)\geqslant 1.$$

(1)：求 g 使得

$$\left(g''\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\tan x+2g'\left(x\right)=1.$$

(2)：证明

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\sin x dx\geqslant \pi-2,$$

并说明等号可以成立.

解答题 3.6 设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个一一映射, 证明

(1): 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nf(n)}$ 收敛.

(2): 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+f(n)}$ 是否一定发散?