2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛
（数学类）参考答案

一、【参考解答】： 设所求球面的球心为$\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)$，则有

$$\left(\bar{x}-1\right)^2+\left(\bar{y}-2\right)^2+\left(\bar{z}-7\right)^2=\left(\bar{x}-4\right)^2+\left(\bar{y}-3\right)^2+\left(\bar{z}-3\right)^2$$
$$=\left(\bar{x}-5\right)^2+\left(\bar{y}+1\right)^2+\left(\bar{z}-6\right)^2=\left(\bar{x}-\sqrt{7}\right)^2+\left(\bar{y}-\sqrt{7}\right)^2+\left(\bar{z}\right)^2$$

即$\begin{cases}3\bar{x}+\bar{y}-\bar{z}=-10,\\ 4\bar{x}-3\bar{y}-\bar{z}=4,\\ \left(\sqrt{7}-1\right)\bar{x}+\left(\sqrt{7}-2\right)\bar{y}-7\bar{z}=-20.\end{cases}\quad\Rightarrow\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)=\left(1,-1,3\right).$

而$\left(\bar{x}-1\right)^2+\left(\bar{y}-2\right)^2+\left(\bar{z}-7\right)^2=25$. 于是所求球面方程为

$$\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2+\left(z-3\right)^2=25.$$

二、【参考证明】： 记$a_k=\int_0^1 f_k\left(x\right)\mathrm{d}\,x,\forall k=1,2,\cdots,n.$ 当某个$a_k=0$时，结论是平凡的.

下面设$a_k>0\left(\forall k=1,2,\cdots,n\right)$. 于是有

$$\int_0^1\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{f_k\left(x\right)}{a_k}}\,\mathrm{d}\,x\le\int_0^1\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k\left(x\right)}{a_k}\,\mathrm{d}\,x=1.$$

由此立即可得存在$\xi\in\left[0,1\right]$，使得$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{f_k\left(\xi\right)}{a_k}}\le 1$. 结论得证.

三、【参考证明】： 设σ在F^n的标准基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵为$B$，则

$$\sigma(\alpha)=B\alpha,\left(\forall\alpha\in F^n\right)\ .$$

由条件：$\forall A\in M_n(F),\sigma(A\alpha)=A\sigma(\alpha),\left(\forall\alpha\in F^n\right)$，有$BA\alpha=AB\alpha,\forall\alpha\in F^n$.

故$BA=AB\left(\forall A\in M_n(F)\right)$.

设$B=\left(b_{ij}\right)$，取$A=\mathrm{diag}\left(1,\cdots,1,c,1,\cdots,1\right)$，其中$c\neq 0,1$，则由$AB=BA$可得$b_{ij}=0,\forall i\neq j$. 又取

$$A=I_n-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji}\,,$$

这里E_{st}是$\left(s,t\right)-$位置为 1，其他位置为 0 的矩阵，则由$AB=BA$可得$a_{ii}=a_{jj}\left(\forall i,j\right)$.

取$\lambda=a_{11}$，故$B=\lambda I_n$，从而$\sigma=\lambda\cdot\mathrm{id}_{F^n}$.

四、【参考解答】： 三角形的三个角A,B,C的取值范围为

$$\left(A,B,C\right)\in D\equiv\left\{\left(\alpha,\beta,\gamma\right)\mid\alpha+\beta+\gamma=\pi,\alpha>0,\beta>0,\gamma>0\right\}$$

首先考虑$3\sin A+4\sin B+18\sin C$在D的闭包

$$E=\left\{\left(\alpha,\beta,\gamma\right)\mid\alpha+\beta+\gamma=\pi,\alpha\geq0,\beta\geq0,\gamma\geq0\right\}$$

上的最大值. 有

$$\begin{aligned}&\max_{\left(A,B,C\right)\in E}\left(3\sin A+4\sin B+18\sin C\right)\\=&\max_{\substack{A+C\leq\pi\\A,C\geq0}}\left(3\sin A+4\sin\left(A+C\right)+18\sin C\right)\\=&\max_{0\leq C\leq\pi}\max_{0\leq A\leq\pi-C}\left(\left(3+4\cos C\right)\sin A+4\sin C\cos A+18\sin C\right)\\=&\max_{0\leq C\leq\pi}\left(\sqrt{\left(3+4\cos C\right)^2+16\sin^2C}+18\sin C\right)\\=&\max_{0\leq C\leq\pi}\left(\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C\right)\end{aligned}$$

考虑 $f(C)=\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C,0\leq C\leq\pi$. 容易知道

$$f(C)\geq f\left(\pi-C\right),\forall C\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

直接计算导数，有

$$f'(C)=18\cos C-\frac{12\sin C}{\sqrt{25+24\cos C}}.$$

令 $f'(C)=0$ ，即 $\left(8\cos C-1\right)\left(27\cos^2C+32\cos C+4\right)=0$. 从而它在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 范围内的解为 $C=\arccos\frac{1}{8}$. 于是

$$\begin{aligned}&\max_{0\leq C\leq\pi}f(C)=\max_{0\leq C\leq\pi/2}f(C)=\max\left\{f\left(\arccos\frac{1}{8}\right),f(0),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\&=\max\left\{\frac{35\sqrt{7}}{4},7,23\right\}=\frac{35\sqrt{7}}{4}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\max_{\left(A,B,C\right)\in E}\left(3\sin A+4\sin B+18\sin C\right)=\frac{35\sqrt{7}}{4}.$$

另一方面，不难看到 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 在 E 的边界上（A,B,C 之一为 0）的最大值为 22. 所以所求最大值为 $\frac{35\sqrt{7}}{4}$.

五、【参考证明】: 由泰勒展开式，$\forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，存在 $\forall\xi\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 使得

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8\left(1+\xi\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

从而$\left|\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)\right|\le x^2,\forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. 于是当$n\ge 2$时，不管怎么选取只取值$\pm 1$的数列$\left\{a_n\right\}_{n\ge 1}$均有

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}\right|=\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\sqrt{1+\frac{a_k}{n}}-\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a_k}{2n}\right)\right|$$

$$\le\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{n}\right)^2\le\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

可以有很多种方法选取只取值为± 1的数列$\left\{a_n\right\}_{n\ge 1}$使得$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}=\alpha$. 此时成立

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\right)=\alpha.$$

例如，我们可以按以下方式选取：取$a_1=1$，依次定义

$$a_{n+1}=\begin{cases}1,\sum\limits_{k=1}^{n}a_k<2\alpha\sqrt{n},\\-1,\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\ge 2\alpha\sqrt{n}.\end{cases}$$

记$y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,n=1,2,\cdots$ ，我们有$-\sqrt{n}\le y_n\le\sqrt{n}$. 若$y_n>2\alpha$，有

$$y_{n+1}-y_n=\frac{y_n\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}-y_n=-\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+y_n}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

这时$-\frac{2}{\sqrt{n+1}}<y_{n+1}-y_n<0$; 而当$y_n<2\alpha$时，我们有

$$y_{n+1}-y_n=\frac{y_n\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}}-y_n=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-y_n}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

这时$0<y_{n+1}-y_n<\frac{2}{\sqrt{n+1}}$; 于是当$y_{n+1}-2\alpha,y_n-2\alpha$同号时，

$$\left|y_{n+1}-2\alpha\right|\le\left|y_n-2\alpha\right|,$$

当$y_{n+1}-2\alpha,y_n-2\alpha$异号时，

$$\left|y_{n+1}-2\alpha\right|\le\left|y_{n+1}-y_n\right|\le\frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

一般地有$\left|y_{n+1}-2\alpha\right|\le\max\left(\left|y_n-2\alpha\right|,\frac{2}{\sqrt{n+1}}\right)$.

注意到对任何$N>0$，总有$m\ge N$，使得$y_{m+1}-2\alpha,y_m-2\alpha$异号. 由上面的讨

论可以得到

$$\left|y_k-2\alpha\right|\le\frac{2}{\sqrt{m+1}}\le\frac{2}{\sqrt{N+1}},\forall k=m+1,m+2,\cdots.$$

因此，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=2\alpha.$

六、【参考证明】: 设V是F上n维线性空间，σ是V上的线性变换，它在V的一组基下的矩阵为A. 下面证明存在σ-不变子空间V_1,V_2满足$V=V_1\oplus V_2$，且$\sigma|_{V_1}$是同构，$\sigma|_{V_2}$是幂零变换.

首先有子空间升链：$Ker\sigma\subseteq Ker\sigma^2\subseteq\cdots\subseteq Ker\sigma^k$，从而存在正整数$m$使得$Ker\sigma^m=Ker\sigma^{m+i}\left(i=1,2,\cdots\right)$. 进而有$Ker\sigma^m=Ker\sigma^{2m}$.

下面证明$V=Ker\sigma^m\oplus\mathrm{Im}\,\sigma^m$.

$\forall\alpha\in Ker\sigma^m\cap\mathrm{Im}\,\sigma^m$，由$\alpha\in\mathrm{Im}\,\sigma^m$，存在$\beta\in V$，使得$\alpha=\sigma^m(\beta)$. 由此$0=\sigma^m(\alpha)=\sigma^{2m}(\beta)$，所以$\beta\in Ker\sigma^{2m}$，从而$\beta\in Ker\sigma^m=Ker\sigma^{2m}$. 故

$$\alpha=\sigma^m(\beta)=0,\ Ker\sigma^m\cap\mathrm{Im}\,\sigma^m=\left(0\right)，$$

从而$V=Ker\sigma^m\oplus\mathrm{Im}\,\sigma^m$.

由$\sigma\left(Ker\sigma^m\right)\subseteq Ker\sigma^m,\sigma\left(\mathrm{Im}\,\sigma^m\right)\subseteq\mathrm{Im}\,\sigma^m$，知$Ker\sigma^m,\mathrm{Im}\,\sigma^m$是$\sigma-$不变子空间. 又由$\sigma^m\left(Ker\sigma^m\right)=\left(0\right)$知$\sigma|_{Ker\sigma^m}$是幂零变换. 由$\sigma\left(\mathrm{Im}\,\sigma^m\right)\subseteq\mathrm{Im}\,\sigma^m$知$\sigma|_{\mathrm{Im}\,\sigma^m}$是满线性变换，从而可逆.

从$V_1=\mathrm{Im}\,\sigma^m,V_2=\ker\sigma^m$中各找一组基$\alpha_1,\cdots,\alpha_s;\beta_1,\cdots,\beta_t$,合并成$V$的一组基，$\sigma$在此基下的矩阵为$\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix}$，其中$B$是$\sigma|_{V_1}$在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$下的矩阵，从而可逆；$C$是$\sigma|_{V_2}$在基$\beta_1,\cdots,\beta_t$下的矩阵，是幂零矩阵. 从而$A$相似于$\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix}$，其中$B$是可逆矩阵，$C$是幂零矩阵.

【注】如果视F为复数域直接用若当标准型证明，证明正确可给 10 分:

存在可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=diag\left(J\left(\lambda_1,n_1\right),\cdots,J\left(\lambda_s,n_s\right),J\left(0,m_1\right),\cdots,J\left(0,m_t\right)\right)$$

其中$J\left(\lambda_i,n_i\right)$是特征值为$\lambda_i$的阶为$n_i$的若当块，$\lambda_i\ne0$；$J\left(0,m_j\right)$是特征值为 0 的阶为$m_j$的若当块. 令

$$B=diag\left(J\left(\lambda_1,n_1\right),\cdots,J\left(\lambda_s,n_s\right)\right),C=diag\left(J\left(0,m_1\right),\cdots,J\left(0,m_t\right)\right)$$

则B为可逆矩阵，C为幂零矩阵，A相似于$\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix}$.

七、【参考证明】: 首先对于任何$x\in R$，不难由关于无穷积分收敛性的 Dirichlet 判别法得到

$\int_0^{+\infty} F(t)\sin\left(xt\right)\mathrm{d}\,t$收敛. 记

$$f(x)=\int_0^{+\infty} F(t)\sin\left(xt\right)dt, \forall x\in R.$$

由于F单调下降,

$$\begin{aligned}&\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} F(nt)\sin\left(t\right)\mathrm{d}\,t\\ &=\int_0^{\pi}\left(F(2nk\pi+nt)-F(2nk\pi+2n\pi-nt)\right)\sin\left(t\right)\mathrm{d}\,t\geq 0, \forall k=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{n}\right)&=\int_0^{+\infty} F(t)\sin\frac{t}{n}\mathrm{d}\,t=\int_0^{+\infty} nF(nt)\sin t\,\mathrm{d}\,t\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} nF(nt)\sin\left(t\right)\mathrm{d}\,t\\ &\geq\int_0^{2\pi} nF(nt)\sin\left(t\right)\mathrm{d}\,t=\int_0^{\pi} n\left(F(nt)-F(2n\pi-nt)\right)\sin\left(t\right)\mathrm{d}\,t\\ &\geq\int_0^{\pi/2} n\left(F(nt)-F(2n\pi-nt)\right)\sin\left(t\right)\mathrm{d}\,t\\ &\geq n\left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right)-F\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right]\int_0^{\pi/2}\sin\left(t\right)\mathrm{d}\,t=n\left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right)-F\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right]\geq 0.\end{aligned}$$

结合$\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=0$得$\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right)-F\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right]=0.$

这样，任取$\delta>0$，有$N>0$使得当$n>N$时，有

$$n\left|F\left(\frac{n\pi}{2}\right)-F\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right|\leq\delta.$$

从而对于任何$m>0, n>N$有

$$0\leq nF\left(\frac{n\pi}{2}\right)\leq\sum_{k=0}^{m} n\left|F\left(\frac{3^k n\pi}{2}\right)-F\left(\frac{3^{k+1}n\pi}{2}\right)\right|+nF\left(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\right)$$

$$\leq\sum_{k=0}^{m}\frac{\delta}{3^k}+nF\left(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\right)\leq\frac{3\delta}{2}+nF\left(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\right).$$

上式中令$m\to+\infty$，由$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$得到

$$0\leq nF\left(\frac{n\pi}{2}\right)\leq\frac{3\delta}{2}, \forall n>N.$$

所以$\lim\limits_{n\to+\infty} nF\left(\frac{n\pi}{2}\right)=0.$ 进一步利用单调性，当$x>\frac{\pi}{2}$时，有

$$0\leq xF\left(x\right)\leq\pi\left[\frac{2x}{\pi}\right]F\left(\left[\frac{2x}{\pi}\right]\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

其中$[s]$表示实数s的整数部分. 于是可得$\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)=0$.

从而又知$xF(x)$在$[0,+\infty)$上有界，设上界为$M\geq 0$. $\forall\varepsilon\in\left(0,\pi\right)$，当$x>0$时有

$$0\leq f(x)=\int_0^{+\infty}x^{-1}F(x^{-1}t)\sin t\,\mathrm{d}\,t\ \leq\int_0^{\pi}x^{-1}tH(x^{-1}t)\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$$
$$\leq x^{-1}\varepsilon H\left(x^{-1}\varepsilon\right)\int_\varepsilon^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t+M\varepsilon,\ \forall x>0.$$

于是$0\leq\overline{\lim_{x\to 0^+}}f(x)\leq M\varepsilon$. 由$\varepsilon\in\left(0,\pi\right)$的任意性，可得$\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$. 进而因$f$是奇函数推得$\lim_{x\to 0}f(x)=0$.