第十四届全国大学生数学竞赛初赛第二次补赛试题 及参考答案

(非数学类, 2023年3月5日)

一、 填空题(本题满分30分，每小题6分)

（1）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\left[1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2\right]=$ __________ .

【解】 利用定积分的定义，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2\right]=4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2n}\right)^2=4\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

（2）设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某一邻域内可微，且满足

$$f(1+x)-3f(1-x)=4+2x+o(x),$$

其中 $o(x)$ 是当 $x\to 0$ 时 x 的高阶无穷小，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 __________ .

【解】 由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可微，因而连续，故对所给等式求极限 $x\to 0$，可得 $-2f(1)=4$，所以 $f(1)=-2$. 仍由所给等式，得

$$\frac{f(1+x)-f(1)}{x}+3\cdot\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=2+\frac{o(x)}{x},$$

两边取极限 $x\to 0$，并根据导数的定义，得 $4f'(1)=2$，所以 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

因此，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)，\quad 即 \quad x-2y-5=0.$$

（3）设 $y=y(x)$ 是初值问题 $\begin{cases}y''-2y'-3y=1,\\ y(0)=0,\ y'(0)=1\end{cases}$ 的解，则 $y(x)=$ __________ .

【解】 对于齐次微分方程 $y''-2y'-3y=0$，其特征方程 $\lambda^2-2\lambda-3=0$ 的根为 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-1$，所以 $y''-2y'-3y=0$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$.

经观察，非齐次微分方程 $y''-2y'-3y=1$ 的一个特解为 $y_0=-\dfrac{1}{3}$. 所以，方程的通解为 $y(x)=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{1}{3}$.

又由 $y(0)=0$，$y'(0)=1$ 解得，$C_1=\dfrac{1}{3}$，$C_2=0$，因此 $y(x)=\dfrac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{3x}-1\right)$.

（4）设可微函数 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z^2$，又设 $u=x$，$v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$，

$w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$，则对函数 $w=w(u,v)$，偏导数 $\left.\frac{\partial w}{\partial u}\right|_{\substack{u=2\\v=1}}=$ ________.

【解】 由 $u=x$，$v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$ 解得 $x=u$，$y=\frac{u}{uv+1}$，且 $w=\frac{1}{z}-\frac{1}{u}$，所以

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{u}\right)=-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{u^2}=-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{1}{u^2}$$

$$=-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{uv+1-uv}{(uv+1)^2}\right)+\frac{1}{u^2}=-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{1}{(uv+1)^2}\right)+\frac{1}{u^2}$$

$$=-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{y^2}{u^2}\right)+\frac{1}{u^2}=-\frac{1}{z^2u^2}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{1}{u^2}=-\frac{1}{u^2}.$$

因此 $\left.\frac{\partial w}{\partial u}\right|_{\substack{u=2\\v=1}}=-\frac{1}{4}$.

（5）设 $a>0$，则均匀曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0)$ 的重心坐标为 ________.

【解】记所给曲面为 Σ，并设 Σ 的面密度为常数 μ，Σ 的重心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由于 Σ 的质量为 $M=\frac{1}{8}\cdot 4\pi a^2\mu=\frac{\pi a^2\mu}{2}$，所以

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iint_{\Sigma} z\mu\mathrm{d}S=\frac{2}{\pi a^2}\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S.$$

设 Σ 的外法向量与 z 轴正向的夹角为 γ，则 $\cos\gamma=\frac{z}{a}$，所以

$$\bar{z}=\frac{2}{\pi a^2}\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S=\frac{2}{\pi a}\iint_{\Sigma}\cos\gamma\mathrm{d}S=\frac{2}{\pi a}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi a}\cdot\frac{1}{4}\pi a^2=\frac{a}{2}.$$

根据对称性，$\bar{x}=\bar{y}=\frac{a}{2}$，因此曲面的重心坐标为 $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$.

二、**(本题满分 14 分)** 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_0^x\frac{t^{2023}}{1+t^2}\mathrm{d}t$，正整数 $n\le 2023$，求导数 $f^{(n)}(0)$.

【解】令 $F(x)=\int_0^x\frac{t^{2023}}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=\frac{x^{2023}}{1+x^2}$，$F''(x)=\frac{2023x^{2022}(1+x^2)-2x^{2024}}{(1+x^2)^2}$，

所以 $F(0)=F'(0)=F''(0)=0$.　　　　------------------ 5 分

对 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}F(x)$ 利用 Leibniz 公式，再代入 $x=0$ 得

$$f^{(n)}(0)=\left.\mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kF^{(k)}(x)\right|_{x=0}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kF^{(k)}(0).$$

-------------------- 4 分

欲求 $F^{(k)}(0)$，对 $(1+x^2)F'(x)=x^{2023}$ 两边求 $k-1$ 阶导数，并利用 Leibniz 公式，得

$$(1+x^2)F^{(k)}(x)+2(k-1)xF^{(k-1)}(x)+(k-1)(k-2)F^{(k-2)}(x)=(x^{2023})^{(k-1)},$$

代入 $x=0$，并注意到 $k\le n\le 2023$，得 $F^{(k)}(0)=-(k-1)(k-2)F^{(k-2)}(0)$. 由此递推，得

$$F^{(2k)}(0)=\cdots=(-1)^{k-1}(2k-1)!F''(0)=0,$$

$$F^{(2k+1)}(0)=\cdots=(-1)^{k}(2k)!F'(0)=0,$$

因此， $f^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kF^{(k)}(0)=0$. -------------------- 5 分

三、**(本题满分 14 分)** 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有定义， $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(\frac{x}{3})}{x}=0$. 证明： $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

【证】 根据题设条件得，对于任意非负整数 k，有 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(\frac{x}{3^k})-f(\frac{x}{3^{k+1}})}{\frac{x}{3^k}}=0$.

-------------------- 4 分

令 $k=0,1,2,\cdots,n-1$，并求和，可得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(\frac{x}{3^n})}{x}=\lim_{x\to0}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\frac{x}{3^k})-f(\frac{x}{3^{k+1}})}{\frac{x}{3^k}}\cdot\frac{1}{3^k}=0.$$

-------------------- 5 分

因此，有 $f(x)-f(\frac{x}{3^n})=x\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to0^+$ 时的无穷小.

对上式取极限 $n\to\infty$，并利用条件 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，得 $f(x)=x\alpha(x)$. 所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\alpha(x)=0.$$ -------------------- 5 分

四、**(本题满分 14 分)** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$， $f(1)=2$. 证明：存在两两互异的点 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)\sqrt{1-\xi_3}\ge 2.$$

【证】 令 $F(x)=f(x)-2+x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-2$，$F(1)=1$.

根据连续函数介值定理，存在$\xi_3 \in (0,1)$使得$F(\xi_3)=0$，即$f(\xi_3)=2-\xi_3$.

------------------- 5 分

在区间$[0,\xi_3]$，$[\xi_3,1]$上分别利用 Lagrange 中值定理，存在$\xi_1 \in (0,\xi_3)$，$\xi_2 \in (\xi_3,1)$，使得

$$\frac{f(\xi_3)-f(0)}{\xi_3-0}=f'(\xi_1)，\quad 且 \quad \frac{f(\xi_3)-f(1)}{\xi_3-1}=f'(\xi_2)，$$

即$f'(\xi_1)=\dfrac{2-\xi_3}{\xi_3}$，$f'(\xi_2)=\dfrac{\xi_3}{1-\xi_3}$，   ------------------- 5 分

所以

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)=\frac{2-\xi_3}{1-\xi_3}=1+\frac{1}{1-\xi_3}\ge\frac{2}{\sqrt{1-\xi_3}}，$$

因此，**存在两两互异的点**$\xi_1,\xi_2,\xi_3 \in (0,1)$，使得$f'(\xi_1)f'(\xi_2)\sqrt{1-\xi_3}\ge 2$.

------------------- 4 分

五、**(本题满分 14 分)** 设$f(x)$是$[-1,1]$上的连续的偶函数，计算曲线积分：

$I=\oint\limits_L \dfrac{x^2+y^2}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$，其中曲线$L$为正向圆周$x^2+y^2=-2y$.

【解】 取圆的圆心角θ作参数，则曲线L：$x^2+(y+1)^2=1$的参数方程为：

$x=\cos\theta,\ y+1=\sin\theta\ (0\le\theta\le2\pi)$. 因为$\mathrm{d}x=-\sin\theta\mathrm{d}\theta,\ \mathrm{d}y=\cos\theta\mathrm{d}\theta$，所以

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1-\sin\theta}{|\sin\theta|}(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta+\int_0^{2\pi}f(\cos\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta.$$

------------------- 4 分

其中第一项为

$$I_1=\int_0^{2\pi}\frac{-(1-\sin\theta)}{|\sin\theta|}\sin\theta\mathrm{d}\theta=-\int_0^{\pi}(1-\sin\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{\pi}^{2\pi}(1-\sin\theta)\mathrm{d}\theta=4，$$

------------------- 5 分

第二项为

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^{2\pi}f(\cos\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}f(\cos\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta+\int_{\pi}^{2\pi}f(\cos\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\pi}f(\cos\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi}f(\cos(t+\pi))\cos(t+\pi)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\pi}f(\cos\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta-\int_0^{\pi}f(-\cos t)\cos t\mathrm{d}t=0,\end{aligned}$$

因此，原积分 $I = I_1 + I_2 = 4$. ------------------- 5 分

六、**(本题满分 14 分)** 设函数 $f(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+e^{-t}\sin^3 t}\mathrm{d}t$，$(x>0)$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 收敛，且 $\frac{1}{3} < \sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n}) < \frac{5}{6}$.

【解】 利用不等式：当 $x\in(0,1]$ 时，$x-\frac{x^2}{2}\le \ln(1+x)\le x$，$\sin x \le x$，可得

$$f(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+e^{-t}\sin^3 t}\mathrm{d}t \ge \frac{1}{1+x}\int_0^x \left(t-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right) > \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{1+x},$$

------------------- 3 分

且 $f(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+e^{-t}\sin^3 t}\mathrm{d}t \le \int_0^x t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2$， ------------------- 3 分

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n}) > \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

------------------- 4 分

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n}) \le \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6} < \frac{5}{6}.$$

综合上述，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 收敛，且 $\frac{1}{3} < \sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n}) < \frac{5}{6}$. ------------------- 4 分