2019 年第十届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类，三、四年级）参考解答

一、填空题

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}3/2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (2) $-\pi$ (3) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{8}$ (4) 0

二、【参考解析】：(1) **【思路一】** 直线 l_1 的参数方程为 $x=0,y=0,z=s$；l_2 的参数方程为

$$x=-1+t,y=t,z=t$$

设动直线 l 与 l_1,l_2 分别交于点 $(0,0,s)$ 与 $(-1+t,t,t)$，则的 l 方向为 $(-1+t,t,t-s)$.

由于 l 与平面 $z=0$ 平行，故 $t=s$，从而动直线 l 的方程为：

$$x=(t-1)u,\quad y=tu,\quad z=t$$

消去 t，u 得动直线构成的曲面 S 的方程为 $xz-yz+y=0$.

【思路二】 过直线 l_1 的平面簇为 $\pi_1:(1-\lambda)x+\lambda y=0$，这里 λ 为参数；同理过直线 l_2 的平面簇为

$$\pi_2:(1-\mu)(x-y+1)+\mu(y-z)=0,\mu\text{ 为参数}$$

动直线 l 是平面簇 π_1 与 π_2 的交线，故直线 l 的方向为

$$\begin{aligned}n&=(1-\lambda,\lambda,0)\times(1-\mu,2\mu-1,-\mu)\\&=(-\lambda\mu,\mu(1-\lambda),-1+2\mu-\lambda\mu)\end{aligned}$$

由直线 l 与平面 $z=0$ 平行，故 $-1+2\mu-\lambda\mu=0$.由 π_1 与 π_2 的方程知

$$\lambda=\frac{x}{x-y},\quad \mu=\frac{x-y+1}{x-2y+z+1}$$

将上式代入 $-1+2\mu-\lambda\mu=0$,即得动直线 l 生成的曲面的方程为 $xz-yz+y=0$.

(2) 做可逆线性变换 $\begin{cases}x=x'-y'-z'\\ y=-z'\\ z=x'+y'\end{cases}$ 曲面 S 的原方程化为 $z'=x'^2-y'^2$.因此，S 为马鞍面.

三、【参考解析】：先证明一个引理.

引理 设 A 是 n 阶实方阵且满足 $\mathrm{tr}(A)=0$，则存在可逆实方阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 的对角元素都是 0.

对 n 进行归纳.当 $n=1$ 时，$A=(0)$，结论显然成立. 下设 $n\geq 2$，考虑两种情形.

情形一： $\mathbb{R}^n$ 中的所有非零向量都是 A 的特征向量. 由所有基本向量 $e_i,i=1,2,\ldots,n$ 都是特征向量可知，存在特征值 $\lambda_i,i=1,2,\ldots,n$ 使得 $Ae_i=\lambda_i e_i,i=1,2,\ldots,n$.因此，$A=\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\right)$. 再由所有 e_i+e_j 都是特征向量有，存在 μ_{ij} 使得

$$A\left(e_i+e_j\right)=\lambda_i e_i+\lambda_j e_j=\mu_{ij}\left(e_i+e_j\right)$$

于是$\mu_{ij}=\lambda_i=\lambda_j$，因此$A$为纯量方阵.由$\mathrm{tr}(A)=0$知$A=0$.

情形二: 存在$\mathbb{R}^n$中的非零向量α不是A的特征向量. 则α， $A\alpha$线性无关，因而存在可逆实方阵

$$Q=(\alpha,A\alpha,*,\cdots,*)\text{满足}AQ=Q\begin{pmatrix}0&*\\ *&B\end{pmatrix},$$

或者等价地

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&*\\ *&B\end{pmatrix}\text{，其中}B\text{为}n-1\text{阶实方阵.}$$

由$\mathrm{tr}(A)=0$，得$\mathrm{tr}(B)=0$.由归纳假设，存在可逆实方阵R，使得$R^{-1}BR$的对角元素都是0.令$P=Q\,\mathrm{diag}(1,R)$，则$P^{-1}AP$的对角元素都是0.引理获证.

现在对于任意n阶实方阵A，令$A_0=\dfrac{\mathrm{tr}(A)}{n}I$，则$\mathrm{tr}\left(A-A_0\right)=0$.根据引理，存在可逆实方阵$P$，使得$B=P^{-1}\left(A-A_0\right)P$的对角元素都是$0$.设$B=L+U,L,U$分别是严格下、上三角方阵，则$L,U$都是幂零方阵. 于是

$$A=A_0+PBP^{-1}=A_0+A_1+A_2,$$

其中A_0是纯量方阵，$A_1=PLP^{-1}$和$A_2=PUP^{-1}$都是幂零方阵. 证毕.

四、【参考解析】: (1) 由$f^{(n)}(0)=0(\forall n\geq 0)$以及 Taylor 展式可得，对于任何固定的$k$，成立$f(x)=o\left(x^k\right),\quad x\to 0^+$. 特别$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^{2C}}=0$.

另一方面，由假设可得$\forall x\in(0,1]$，

$$\left(x^{-2C}f^2(x)\right)'=2x^{-2C-1}\left(xf(x)f'(x)-Cf^2(x)\right)\leq 0,$$

从而$x^{-2C}f^2(x)$在$(0,1]$上单调减少. 因此

$$x^{-2C}f^2(x)\leq\lim_{t\to 0^+}t^{-2C}f^2(t)=0,\quad\forall x\in(0,1]$$

因此，在$[0,1]$上成立$f(x)\equiv 0$

(2) 取$f(x):=\begin{cases}e^{-x^{1-\alpha}}, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$，则容易验证$f(x)$满足假设条件，但$f(x)\neq 0$.

五、【参考解析】: 1) 首先注意到

$$\begin{cases}x^2-\left(ax^2+x^2a\right)+ax^2a=1\\ x+a-(ax+xa)+axa=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-a)x^2(1-a)=1\\ (1-a)x(1-a)=1-a\end{cases}$$

结果有:

$$\begin{aligned}(1-a)x&=(1-a)x\left\{(1-a)x^2(1-a)\right\}\\ &=(1-a)x(1-a)x^2(1-a)=(1-a)x^2(1-a)=1\end{aligned}$$

$$x(1-a)=(1-a)x^2(1-a)x(1-a)$$
$$=(1-a)x^2\cdot(1-a)x(1-a)=(1-a)x^2(1-a)=1$$

因此有$1-a$可逆且$(1-a)^{-1}=x$

2) 现在考虑$(1-b)(1-a)$，则有$(1-b)(1-a)=1-a-b+ba=1$，结合前面所证$1-a$可逆，因此得 $(1-a)^{-1}=1-b$．进而有$1=(1-a)(1-b)=1-a-b+ab=1-ba+ab$，亦即$ab=ba$．

六、【参考解析】：固定$k\geq 1$，记$A_k=[-k,k],G_k=\{(x,f(x));x\in A_k,f(x)\in A_k\}$.令

$$E_{n,k,i}=\left\{x\in[-k,k];f(x)\in\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]\right\}.$$

因为f可测，所以$E_{n,k,i}$可测，且$\sum\limits_{i=-nk}^{nk-1}m\left(E_{n,k,i}\right)\leq 2k$．又

$$\left\{(x,f(x));x\in E_{n,k,i}\right\}\subset E_{n,k,i}\times\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right],$$

则$m\left\{(x,f(x));x\in E_{n,k,i}\right\}\leq\frac{1}{n}mE_{n,k,i}$，其中$m$为Lebesgue外测度.

$$\bigcup_{i=-nk}^{nk-1}\left\{(x,f(x));x\in E_{n,k,i}\right\}=\left\{(x,f(x));x\in A_k,f(x)\in A_k\right\}=G_k$$
$$mG_k\leq\sum_{i=-nk}^{nk-1}m\left\{(x,f(x));x\in E_{n,k,i}\right\}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=-nk}^{nk-1}mE_{n,k,i}\leq\frac{2k}{n}$$

令$n\to\infty$，得$mG_k=0,\forall k\geq 1$，又$G=\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}G_k$，故$mG=0$，所以$G$可测，且$L_2(G)=0$

七、【参考解析】：$\gamma_u=(1,0,2u),\gamma_v=(0,1,v)$

$$n=\frac{\gamma_u\times\gamma_v}{\left|\gamma_u\times\gamma_v\right|}=\frac{1}{\sqrt{1+4u^2+v^2}}(-2u,-v,1)$$
$$\gamma_{uu}=(0,0,2),\gamma_{uv}=0,\gamma_{vv}=(0,0,1)$$

于是曲面的第一基本型$I=E\,\mathrm{d}u^2+2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G\,\mathrm{d}v^2$和第二基本型

$$II=L\,\mathrm{d}u^2+2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+N\,\mathrm{d}v^2$$

为$E=1+4u^2,F=2uv,G=1+v^2$，$L=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+v^2}},M=0,N=\frac{1}{\sqrt{1+4u^2+v^2}}$.

曲面上点$\gamma(u,v)$为脐点，当且仅当存在λ使得$\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}$. 因为$\lambda\neq 0$，得到$F=0$，即$u=0$或$v=0$．再由

$$\frac{L}{E}=\frac{N}{G},\frac{2}{1+4u^2}=\frac{1}{1+v^2}$$

得到$u=\pm\dfrac{1}{2}$和$v=0$. 求得曲面脐点为$p_{\pm}=\left(\pm\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{4}\right)$.

在脐点$p_{+}=\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{4}\right)$处，切平面单位法向量$n=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$，则与脐点$p_{+}$处的切平面平行的平面$\sigma$方程可设为$-x+z=a$，其中$a$为常数.记$\sigma$与$S$的截曲线$C$的参数方程为

$$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t)),$$

则有$z(t)=x(t)+a,z(t)=x(t)^2+\dfrac{1}{2}y(t)^2$.

令$q=\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}+a\right)$为平面$\sigma$上一点，则有

$$|\gamma(t)-q|^2=\left(x(t)-\frac{1}{2}\right)^2+y(t)^2+\left(z(t)-\frac{1}{2}-a\right)^2$$

$$=2\left(x(t)-\frac{1}{2}\right)^2+y(t)^2=2x(t)^2+y(t)^2-2x(t)+\frac{1}{2}=2a+\frac{1}{2}$$

于是$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$是一个平面$\sigma$上圆心在$q$点的圆周.

对脐点$p_{-}=\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{4}\right)$可以同样证明.

八、【参考解析】: 1) 对区间$[a,b]$的任意实函数$f(x)$，存在唯一的$s(x)\in S[a,b]$满足:

$$s\left(x_i\right)=f\left(x_i\right),i=0,1,\ldots,n,s''(a)=s''(b)=0$$

2) 设$f(x)\in C^2[a,b]$，则对满足 1) 的函数$s(x)$有

$$\int_a^b\left(s''(x)\right)^2\mathrm{d}x\leq\int_a^b\left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

且等号成立当且仅当$s(x)=f(x)$.

(1) 记$h_i=x_{i+1}-x_i,s_i(x)=s(x)\big|_{[x_i,x_{i+1}]}$，则$s_i(x)$是一个三次多项式，$i=0,1,\ldots,n-1$，记

$$M_i=s''\left(x_i\right),i=0,1,\ldots,n,$$

则$s_i''(x)=\dfrac{x_{i+1}-x}{h_i}M_i+\dfrac{x-x_i}{h_i}M_{i+1}$，于是

$$s_i(x)=\frac{\left(x_{i+1}-x\right)^3}{6h_i}M_{i+1}+\frac{\left(x-x_i\right)^3}{6h_i}M_i+A_i\left(x-x_i\right)+B_i$$

其中A_i,B_i为常数.由$s_i\left(x_i\right)=f\left(x_i\right),s_i\left(x_{i+1}\right)=f\left(x_{i+1}\right)$可得　$A_i=f\left(x_i\right)-M_i\dfrac{h_i^2}{6}$,

$$B_i=\frac{f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i\right)}{h_i}-\frac{h_i}{6}\left(M_{i+1}-M_i\right)$$

再由$s_{i-1}'\left(x_i\right)=s_i'\left(x_i\right)$可得

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1}+\frac{h_{i-1}}{3}M_i+\frac{f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)}{h_{i-1}}$$
$$=-\frac{h_{i+1}}{3}M_i-\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}+\frac{f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i\right)}{h_i}$$

化简得

$$\lambda_i M_{i-1}+2M_i+\mu_i M_{i+1}=d_i,\quad i=1,2,\ldots,n-1\,,$$

其中$\lambda_i=h_{i-1}/\left(h_{i-1}+h_i\right),\mu_i=1-\lambda_i,$

$$d_i=\frac{6}{h_{i-1}+h_i}\left(\frac{f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i\right)}{h_i}-\frac{f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)}{h_{i-1}}\right)$$

再由$M_0=M_n=0$，得到关于M_i的线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

上述线性方程组的系数矩阵主对角占优，因而可逆，因此该线性方程组有唯一解，即满足条件的$s(x)$存在唯一.

【说明】：也可建立关于$m_i=s'\left(x_i\right)$的线性方程组，并证明解存在唯一.

(2) 令$g(x)=f(x)-s(x)$，则$f(x)=g(x)+s(x)$，且$g\left(x_i\right)=0,i=0,1,\ldots,n$，于是

$$\int_a^b f''(x)^2\,\mathrm{d}x=\int_a^b g''(x)^2\,\mathrm{d}x+2\int_a^b g''(x)s''(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b s''(x)^2\,\mathrm{d}x$$

下证：$\int_a^b g''(x)s''(x)\,\mathrm{d}x=0$，从而

$$\int_a^b f''(x)^2\,\mathrm{d}x\ge\int_a^b s''(x)^2\,\mathrm{d}x$$

实际上，

$$\int_a^b g''(x)s''(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}s''(x)\,\mathrm{d}g'(x)$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}s''(x)g'(x)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}-\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}g'(x)s'''(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=s''(x)g'(x)\Big|_a^b-\sum_{i=0}^{n-1}c_i\left(g\left(x_{i+1}\right)-g\left(x_i\right)\right)=0$$

其中 $c_i=s_i'''\left(x\right)$ 是一个常数. 由于 $s''(a)=s''(b)=0$，上式最后一式中第一项为零；由 $g\left(x_i\right)=0,i=0,1,\ldots,n$，上式最后一式第二项也为零.

等号成立 $\Leftrightarrow g''(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=s(x)$.

九、【参考解析】: 由条件可设 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\left(z-z_0\right)^n}$，其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 的邻域内解析，且 $\varphi\left(z_0\right)\neq 0$. 从而存在 $\rho>0, \varphi(z)$ 在 $\left|z-z_0\right|\leq\rho$ 内解析，且 $\varphi\left(z_0\right)\neq 0$.

设 $R=\max\limits_{\left|z-z_0\right|=\rho}\left|\dfrac{\varphi(z)}{\left(z-z_0\right)^n}\right|$，显然 $R>0$.

对任意 $w\in\{w\in\mathrm{C}:|w|>R\}$，当 $\left|z-z_0\right|=\rho$，

$$\left|\frac{\varphi(z)}{\left(z-z_0\right)^n}\right|\leq R<|w|\text{，即} |\varphi(z)|<\left|w\left(z-z_0\right)^n\right|.$$

由 Rouche 定理知

$$n=N\left(w\left(z-z_0\right)^n\right)=N\left(\varphi(z)-w\left(z-z_0\right)^n\right)$$

所以 $F(z)=\varphi(z)-w\left(z-z_0\right)^n$ 在 $\left|z-z_0\right|<\rho$ 内有 n 个零点 $z_k(k=1,2,\ldots,n)$，显然 $z_k\neq z_0$，否则 $\varphi\left(z_0\right)=F\left(z_0\right)=0$ 矛盾. 从而 $F\left(z_k\right)=\varphi\left(z_k\right)-w\left(z_k-z_0\right)^n=0$，所以

$$\frac{\varphi\left(z_k\right)}{\left(z_k-z_0\right)^n}-w=0$$

即 $f(z)-w$ 在 $\left|z-z_0\right|<\rho$ 中必有 n 个零点 z_k.

十、【参考解析】: 对于 $i\geq 1, EX_i=0, EX_i^2=i^{2\theta}$，则

$$ES_n=0,\mathrm{Var}\left(S_n\right)=\sum_{i=1}^n EX_i^2=\sum_{i=1}^n i^{2\theta}$$

注意 $\int_0^n x^{2\theta}\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\int_i^{i+1}x^{2\theta}\,\mathrm{d}x$ 以及

$$\sum_{i=1}^n i^{2\theta}-n^{2\theta}=\sum_{i=0}^{n-1}i^{2\theta}\leq\sum_{i=0}^{n-1}\int_i^{i+1}x^{2\theta}\,\mathrm{d}x\leq\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^{2\theta}=\sum_{i=1}^n i^{2\theta}$$

得到

$$\frac{1}{2\theta+1}n^{2\theta+1}\leq\mathrm{Var}\left(S_n\right)\leq\frac{1}{2\theta+1}n^{2\theta+1}+n^{2\theta}$$

(1) 由于

$$P\left(\frac{\left|S_n\right|}{n}\geq\epsilon\right)\leq\frac{ES_n^2}{n^2\epsilon^2}\leq\frac{1}{\epsilon^2}\left[\frac{1}{2\theta+1}n^{-(1-2\theta)}+n^{-2(1-\theta)}\right]$$

则当$\theta < \frac{1}{2}$时，$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\left|S_n\right|}{n} \geq \epsilon\right) = 0$，即得$\frac{S_n}{n}$依概率收敛于$0$

(2) **【思路一】**下面验证林德贝格（Lindeberg）条件成立，即对任意$\tau > 0$，当$n \to \infty$时，

$$\frac{1}{\operatorname{Var}\left(S_n\right)}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 I\left(\left|X_i\right| \geq \tau\sqrt{\operatorname{Var}\left(S_n\right)}\right) \to 0$$

事实上,由假设知,对于$1 \leq i \leq n, \left|X_i\right| \leq n^{\theta}$,并且$\frac{n^{\theta}}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(S_n\right)}} \leq \sqrt{\frac{2\theta+1}{n}}$则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\theta}}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(S_n\right)}} = 0$.

于是，对较大的n以及$1 \leq i \leq n$，$I\left(\left|X_i\right| \geq \tau\sqrt{\operatorname{Var}\left(S_n\right)}\right) = 0$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\operatorname{Var}\left(S_n\right)}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 I\left(\left|X_i\right| \geq \tau\sqrt{\operatorname{Var}\left(S_n\right)}\right) = 0,$$

所以$\frac{s_n}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(S_n\right)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$

【思路二】下面验证李雅普诺夫（Lyapunov）条件成立,即当$n \to \infty$时,$\frac{1}{\left(\operatorname{Var}\left(S_n\right)\right)^2}\sum_{i=1}^{n} EX_i^4 \to 0$

事实上，$\sum_{i=1}^{n} EX_i^4 = \sum_{i=1}^{n} i^{4\theta} = \sum_{i=0}^{n-1} i^{4\theta} + n^{4\theta} \leq \int_0^n x^{4\theta}\,\mathrm{d}x + n^{4\theta} = \frac{1}{4\theta+1}n^{4\theta+1} + n^{4\theta}$，于是，

$$\frac{1}{\left(\operatorname{Var}\left(S_n\right)\right)^2}\sum_{i=1}^{n} EX_i^4 \leq (2\theta+1)^2\left[\frac{1}{4\theta+1}n^{-1} + n^{-2}\right]$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\operatorname{Var}\left(S_n\right)\right)^2}\sum_{i=1}^{n} EX_i^4 = 0$，所以$\frac{s_n}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(S_n\right)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$.