2009 年第一届全国大学生数学竞赛初赛

（非数学类）试卷

一、填空题(本题共 4 个小题，每题 5 分，共 20 分)：

(1) 计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ =__________，其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)dx-2$，则 $f(x)$ =______.

(3) 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是__________.

(4) 设 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ =__________.

第二题：(5 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中 n 是给定的正整数.

第三题：(15 分)设函数 $f\left(x\right)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，$A$ 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

第四题：(15 分)已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证：(1) $\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x\ge \frac{5}{2}\pi^2$.

第五题：(10 分)已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

第六题：(10 分)设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0\le x\le 1$ 时，$y\ge 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a,b,c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

第七题：(15 分)已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$（$n$ 为正整数），且 $u_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

第八题：(10 分)求 $x\to 1-$ 时，与 $\sum^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量