2019 年第十届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类，一、二年级）试题

一、填空题（本题满分 20 分，每小题 5 分）

(1) 设 A 为实对称方阵，$(1,0,1)$ 和 $(1,2,0)$ 构成共行向量的一个极大无关组，则有 $A=$___

(2) 设 $y(x)\in C^1[0,1)$ 满足 $y(x)\in[0,\pi]$ 及 $x=\begin{cases}\dfrac{\sin y(x)}{y(x)}, & y\in(0,\pi]\\ 1, & y=0\end{cases}$，则 $y'(0)=$___

(3) 设 $f(x)=\int_x^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t$，则 $\int_0^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}\,x=$_______

(4) 设 U 为 8 阶实正交方阵，U 中元素皆为 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 的 3×3 子矩阵的个数记为 t，则 t 最多为

____

二、（本题 15 分） 给定空间直角坐标系中的两条直线：l_1 为 z 轴，l_2 过 $(-1,0,0)$ 及 $(0,1,1)$ 两点. 动直线 l 分别与 l_1,l_2 共面，且与平面 $z=0$ 平行.

(1) 求动直线 l 全体构成的曲面 S 的方程；

(2) 确定 S 是什么曲面.

三、（满分 15 分） 证明：任意 n 阶实方阵 A 可以分解成 $A=A_0+A_1+A_2$，其中 $A_0=aI_n$，a 是实数，A_1 与 A_2 都是幂零方阵.

四、（满分 20 分） 设 $\alpha>0, f(x)\in C^1[0,1]$，且对任何非负整数，$n, f^{(n)}(0)$ 均存在且为零. 进一步存在常数 $C>0$ 使得 $\left|x^\alpha f'(x)\right|\le C\,|\,f(x)\,|\,(\forall x\in[0,1])$. 证明：

(1) 若 $\alpha=1$，则 $[0,1]$ 在上 $f(x)\equiv 0$.

(2) 若 $\alpha>1$，举例说明在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv 0$ 可以不成立.

五、(满分 15 分) 设 $c\in(0,1), x_1\in(0,1)$ 且 $x_1\ne c\left(1-x_1^2\right), x_{n+1}=c\left(1-x_n^2\right)(n\ge 1)$.

证明：$\left\{x_n\right\}$ 收敛当且仅当 $c\in\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$. .

六、(满分 15 分) 已知 $a(x),b(x),c(x)\in C(R)$，方程 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$ 只有有限个 2π 周期解. 求它的 2π 周期解个数的最大值.