2010 年第一届全国大学生数学竞赛决赛
(数学专业）参考答案

一、填空题

(1) $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$ (2) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) 12

二、【参考解答】：根据题目假设和泰勒公式，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\alpha(x)x,$$

其中$\alpha(x)$是x的函数，$\alpha(0)=0$且$\alpha(x)\to 0\left(x\to 0\right)$. 因此，对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得$\left|x\right|<\delta$时，$\left|\alpha(x)\right|<\varepsilon$.

对于任意自然数n和$k\le n$，总有

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right)=f'(0)\frac{k}{n^2}+\alpha\left(\frac{k}{n^2}\right)\frac{k}{n^2}.$$

取$N>\delta^{-1}$，对上述给定的$\varepsilon>0$，当$n>N,k\le n$，$\left|\alpha\left(\dfrac{k}{n^2}\right)\right|<\varepsilon$. 于是当$n>N$时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f'(0)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right|\le\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

.

改写该式得当$n>N$时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)-\frac{1}{2}f'(0)(1+\frac{1}{n})\right|\le\frac{\varepsilon}{2}(1+\frac{1}{n}).$$

令$n\to\infty$，对上式取极限即得

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)\le\frac{1}{2}f'(0)+\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty}\inf\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)\ge\frac{1}{2}f'(0)-\frac{\varepsilon}{2}$$

.

由ε的任意性，即得

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\inf\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}f'(0).$$

三、【参考证明】：由于$f\left(x\right)$在$[0,+\infty)$上一致连续，故对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$，当

$$\left|x_1-x_2\right|<\delta(x_1\ge 0,x_2\ge 0)$$

时，使得$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

取一个充分大的自然数m，使得$m>\delta^{-1}$，并在$[0,1]$中取m个点:

$$x_1=0<x_2<\ldots<x_m=1,$$

其中$x_j=\dfrac{j}{m}$ $(j=1,2,\dots,m)$. 这样，对于每一个j，$\left|x_{j+1}-x_j\right|=\dfrac{1}{m}<\delta$.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$，故对每一$x_j$，存在一个$N_j$，当$n>N_j$时，使得

$$\left|f(x_j+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

这里的ε是前面给定的. 令$N=\max\{N_1,\dots,N_m\}$，那么当$n>N$时，

$$\left|f(x_j+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}，其中 j=1,2,\dots,m .$$

设$x\in[0,1]$是任意一点，这时总有一个x_j使得$x\in[x_j,x_{j+1}]$.

由$f\left(x\right)$在$[0,+\infty)$上一致连续性及$\left|x-x_j\right|<\delta$可知，

$$\left|f(x_j+n)-f(x+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}(\forall n=1,2,\dots).$$

另一方面，已经知道当$n>N$时，$\left|f(x_j+n)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，这样，由后面证得的两个式子就得，当$n>N,x\in[0,1]$时，$\left|f(x+n)\right|<\varepsilon$.

注意到这里的N的选取与点x无关，这就证实了函数序列$\{f(x+n):n=1,2,\dots\}$在$[0,1]$上一致收敛于 0.

四、【参考证明】：用反证法. 假定该不等式在某一点不成立. 令$F(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$. 那么，根据题目假设，当$x^2+y^2\to 1$时，$F(x,y)\to+\infty$. 这样，$F(x,y)$在D内必然有最小值. 设最小值在$(x_0,y_0)\in D$达到. 根据反证法假设，有

$$F(x_0,y_0)=f(x_0,y_0)-g(x_0,y_0)<0. \qquad \text{(i)}$$

另一方面，根据题目假设，又有

$$\Delta F=\Delta f-\Delta g\le e^{f(x,y)}-e^{g(x,y)}, \qquad \text{(ii)}$$

其中Δ是拉普拉斯算子：$\Delta\equiv\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. 式子（ii）在$D$中处处成立，特别地在$(x_0,y_0)$成立：

$$\begin{aligned}\Delta F_{(x_0,y_0)}&=\Delta f\Big|_{(x_0,y_0)}-\Delta g\Big|_{(x_0,y_0)}\\&\le e^{f(x_0,y_0)}-e^{g(x_0,y_0)}\end{aligned} \qquad \text{(iii)}$$

由(i)与(iii)可知， $\Delta F_{(x_0,y_0)}<0$. (iv)

但是，(x_0,y_0)是$F(x,y)$的极小值点，应该有

$$F_{xx}(x_0,y_0)\ge 0; F_{yy}\ge 0,$$

并因此$\Delta F\,|_{(x_0,y_0)}\ge 0$，这与（iv）矛盾. 此矛盾证明了题目中的结论成立.

五、【参考证明】：显然，$I_\varepsilon=\displaystyle\iint_{R_\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

注意到上述级数在R_ε上的一致收敛性，则有

$$I_{\varepsilon}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{1-\varepsilon}x^{n}\,\mathrm{d}x\int_{0}^{1-\varepsilon}y^{n}\,\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\varepsilon)^{2n}}{n^{2}}.$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n^{2}}$在点$x=1$收敛，故有$I=\lim\limits_{\varepsilon\to0^{+}}I_{\varepsilon}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2}}$.

下面证明$I=\dfrac{\pi^{2}}{6}$．在给定的变换下，

$x=u-v,y=u+v$，

那么$\dfrac{1}{1-xy}=\dfrac{1}{1-u^{2}+v^{2}}$，变换的雅可比行列式，

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=2.$$

假定正方形R在给定变换下的像为$\widetilde{R}$，那么根据$\widetilde{R}$的图象以及被积函数的特征，我们有

$$\begin{aligned}I&=2\iint_{\widetilde{R}}\frac{1}{1-u^{2}+v^{2}}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\&=4\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\int_{0}^{u}\frac{\mathrm{d}v}{1-u^{2}+v^{2}}\right)\mathrm{d}u+4\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{0}^{1-u}\frac{\mathrm{d}v}{1-u^{2}+v^{2}}\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

利用 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{a^{2}+x^{2}}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\ \ (a>0)$， 又得

$$I=4\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^{2}}}\right)}{\sqrt{1-u^{2}}}\mathrm{d}u+4\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^{2}}}\right)}{\sqrt{1-u^{2}}}\mathrm{d}u.$$

令$g(u)=\arctan\dfrac{u}{\sqrt{1-u^{2}}}$;

$$h(u)=\arctan\frac{1-u}{\sqrt{1-u^{2}}}=\arctan\sqrt{\frac{1-u}{1+u}},$$

那么$g'(u)=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}};h'(u)=-\dfrac{2}{\sqrt{1-u^{2}}}$．最后，得到

$$\begin{aligned}I&=4\int_{0}^{\frac{1}{2}}g'(u)g(u)\,\mathrm{d}u-8\int_{\frac{1}{2}}^{1}h'(u)h(u)\,\mathrm{d}u\\&=2[g(u)]^{2}\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}-4[h(u)]^{2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}\\&=2\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2}-0-0+4\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2}=\frac{\pi^{2}}{6}\end{aligned}$$

六、【参考解答】:（1） L,L'的方向向量分别为

$$\vec{n}=(1,1,1),\overrightarrow{n'}=(1,a,1).$$

分别取L,L'上的点$O(0,0,0),P(0,0,b)$． L与L'是异面直线当且仅当矢量$\vec{n},\overrightarrow{n'},\overrightarrow{OP}$不共面,即它们的混合积不为零:

$$(\vec{n},\overrightarrow{n'},\overrightarrow{OP})=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\0&0&b\end{vmatrix}=(a-1)b\neq 0,$$

所以，L与L'是异面直线当且仅当$a\neq 1$且$b\neq 0$.

(2) 假设$P(x,y,z)$是π上任一点，于是P必定是L'上一点$P'(x',y',z')$绕L旋转所生成的. 由于$\overrightarrow{P'P}$与L垂直，所以， $(x-x')+(y-y')+(z-z')=0$ ①

又由于P'在L'上，所以，$\dfrac{x'}{1}=\dfrac{y'}{a}=\dfrac{z'-b}{1}$， ②

因为L经过坐标原点，所以，P,P'到原点的距离相等，故，

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2, \qquad ③$$

将①，②，③联立，消去其中的x',y',z'：

令$\dfrac{x'}{1}=\dfrac{y'}{a}=\dfrac{z'-b}{1}=t$，将$x',y',z'$用$t$表示:

$$x'=t,y'=at,z'=t+b, \qquad ④$$

将④代入①，得

$$(a+2)t=x+y+z-b, \qquad ⑤$$

当$a\neq -2$，即L与L'不垂直时，解得

$$t=\frac{1}{a+2}(x+y+z-b),$$

据此，再将④代入③，得到π的方程:

$$x^2+y^2+z^2-\frac{a^2+2}{(a+2)^2}(x+y+z-b)^2 \\ -\frac{2b}{a+2}(x+y+z-b)-b^2=0$$

当$a=-2$时，由⑤得，$x+y+z=b$，这表明，π在这个平面上. 同时，将④代入③，有

$$x^2+y^2+z^2=6t^2+2bt+b^2=6(t+\frac{1}{6}b)^2+\frac{5}{6}b^2.$$

由于t可以是任意的，所以，这时，π的方程为:

$$\begin{cases}x+y+z=b\\ x^2+y^2+z^2\geq \dfrac{5}{6}b^2\end{cases}$$

π的类型: $a=1$且$b\neq 0$时，L与L'平行，π是一柱面；$a\neq 1$且$b=0$时，L与L'相交，π是一锥面（$a=-2$时π是平面)；当$a\neq 1$且$b\neq 0$时，π是单叶双曲面（$a=-2$时，π是去掉一个圆

盘后的平面）.

七、【参考证明】:（1）A的秩为n的情形：此时，A为正定阵. 于是存在可逆矩阵P使得$P^TAP=E$. 因为P^TBP是实对称矩阵，所以存在正交矩阵Q使得$Q^T(P^TBP)Q=\Lambda$是对角矩阵. 令$C=PQ$，则有$C^TAC=E, C^TBC=\Lambda$都是对角阵.

（2）A的秩为$n-1$的情形：此时，存在实可逆矩阵P使得$P^TAP=\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 因为$P^TBP$是实对称矩阵，所以，可以假定$P^TBP=\begin{pmatrix} B_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$，其中$B_{n-1}$是$n-1$阶实对称矩阵.

因为B_{n-1}是$n-1$阶实对称矩阵，所以存在$n-1$阶正交矩阵Q_{n-1}，使得

$$Q_{n-1}^TB_{n-1}Q_{n-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}=\Lambda_{n-1}$$

为对角阵. 令$Q=\begin{pmatrix} Q_{n-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}, C=PQ$，则$C^TAC, C^TBC$可以表示为

$$C^TAC=\begin{pmatrix} E_{n-1} & \\ & 0 \end{pmatrix}, C^TBC=\begin{pmatrix} \Lambda_{n-1} & \eta \\ \eta^T & d \end{pmatrix},$$

其中$\eta=(d_1,d_2,\ldots,d_{n-1})^T$是$n-1$维列向量.

为简化记号，不妨假定

$$A=\begin{pmatrix} E_{n-1} & \\ & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} \Lambda_{n-1} & \eta \\ \eta^T & d \end{pmatrix}.$$

如果$\mathrm{d}=0$，由于B是半正定的，B的各个主子式均≥ 0. 考虑B的含d的各个 2 阶主子式，容易知道，$\eta=0$. 此时B已经是对角阵了，如所需.

现假设$\mathrm{d}\neq 0$. 显然，对于任意实数k，A, B可以通过合同变换同时化成对角阵当且仅当同一合同变换可以将$A, kA+B$同时化成对角阵. 由于$k\geq 0$时，$kA+B$仍然是半正定矩阵，由（1），我们只需要证明：存在$k\geq 0$，$kA+B$是可逆矩阵即可.

注意到，当$k+\lambda_i$都不是 0 时，行列式

$$\begin{aligned} |kA+B| &= \begin{vmatrix} k+\lambda_1 & & & d_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & k+\lambda_{n-1} & d_{n-1} \\ d_1 & \cdots & d_{n-1} & d \end{vmatrix} \\ &= \left(d-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{d_i^2}{k+\lambda_i}\right)\prod_{j=1}^{n-1}(k+\lambda_i) \end{aligned}$$

故只要k足够大就能保证$kA+B$是可逆矩阵. 从而A, B可以通过合同变换同时化成对角阵.

八、【参考证明】：记$E_j = Ker\ f_j, j=1,2$. 由$f_j \neq 0$知$\dim E_j = n-1, j=1,2$. 不失一般性，可令

$$V=\mathbb{C}^n=\left\{\alpha=(x_1,\ldots,x_n): x_1,x_2,\ldots,x_n \in \mathbb{C}\right\}$$
$$f_j(\alpha)=a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\ldots+a_{jn}x_n, j=1,2$$

由$f_1 \neq 0, f_2 \neq 0,\ f_1 \neq cf_2, \forall c \in \mathbb{C}$，知

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵之秩为 2. 因此其解空间维数为$n-2$，即$\dim(E_1 \cap E_2)=n-2$. 但

$$\dim E_1+\dim E_2=\dim(E_1+E_2)+\dim(E_1 \cap E_2),$$

故有$\dim(E_1+E_2)=n$，即$E_1+E_2=V$.

现在，任意的$\alpha \in V$都可表为$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，其中$\alpha_1 \in E_1, \alpha_2 \in E_2$. 注意到$f_1(\alpha_1)=0, f_2(\alpha_2)=0$，因此

$$f_1(\alpha)=f_1(\alpha_2),\ f_2(\alpha)=f_2(\alpha_1).$$