

# 2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛

## (非数学类) 试卷

一、解答下列各题(共 4 小题,每小题 6 分,共 24 分).

1. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \pi \sqrt{1 + 4n^2}\right)^n.$

2. 证明广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  不是绝对收敛的。

3. 设  $y = y(x)$  由  $x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2$  所确定, 求  $y(x)$  的极值。

4. 过曲线  $y = \sqrt[3]{x}$  ( $x \geq 0$ ) 上的点  $A$  作切线, 使得该切线与曲线及  $x$  轴所围成的平面图形的面积为  $\frac{3}{4}$ 。求点  $A$  的坐标。

**第二题:** (12 分) 计算定积分  $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx.$

**第三题:** (12 分) 设  $f(x)$  在  $x = 0$  处存在二阶导数  $f''(0)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ . 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$$
 收敛。

**第四题:** (10 分) 设  $|f(x)| \leq \pi$ ,  $f'(x) \geq m > 0$  ( $a \leq x \leq b$ ), 证明:  $\left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \leq \frac{2}{m}.$

**第五题:** (14 分) 设  $\Sigma$  是一个光滑封闭曲面, 方向朝外, 给定第二型的曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \left( x^3 - x \right) dy dz + \left( 2y^3 - y \right) dz dx + \left( 3z^3 - z \right) dx dy.$$

试确定曲面  $\Sigma$ , 使得积分  $I$  的值最小, 并求该最小值。

**第六题:** (14 分) 设  $I_a(r) = \int_C \frac{y dx - x dy}{(x^2 + y^2)^a}$ , 其中  $a$  为常数, 曲线  $C$  为椭圆

$$x^2 + xy + y^2 = r^2, \text{ 取正向。求极限 } \lim_{r \rightarrow +\infty} I_a(r).$$

**第七题:** (14 分) 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$  的敛散性, 若收敛, 求其和。