

2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛

(非数学类) 试卷

一、计算下列各题(本题共 4 个小题, 每题 6 分, 共 24 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x}.$

(2) 设 $a_n = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(3) 求 $\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

(4) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和.

第二题: (本题两问, 每问 8 分, 共 16 分) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列, a, λ 为有限数, 求证:

1. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$;

2. 如果存在正整数 p , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}$.

第三题: (15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有连续的三阶导数, 且 $f(-1) = 0$, $f(1) = 1, f'(0) = 0$, 求证: 在开区间 $(-1, 1)$ 内至少存在一点 x_0 , 使得 $f'''(x_0) = 3$.

第四题: (15 分) 在平面上, 有一条从点 $(a, 0)$ 向右的射线, 线密度为 ρ . 在点 $(0, h)$ 处 (其中 $h > 0$) 有一质量为 m 的质点. 求射线对该质点的引力.

第五题: (15 分) 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F\left(z + \frac{1}{x}, z - \frac{1}{y}\right) = 0$ 确定的隐函数, 且具有连续的二阶偏导数, 求证:

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \text{ 和 } x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy(x-y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 = 0.$$

第六题: (15 分) 设函数 $f(x)$ 连续, a, b, c 为常数, Σ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. 记第一型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} f(ax + by + cz) dS.$$

求证: $I = 2\pi \int_{-1}^1 f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} u\right) du.$