

# 全国大学生数学竞赛初赛模拟试题

## (非数学专业类)

### 一、填空题 (本题30分, 每小题6分)

- (1) 若函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^{2x} \tan u^2 du, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ , 在  $x=0$  处连续, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (2) 设函数  $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2)(e^{3x} - 3)(e^{4x} - 4)$ , 则  $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (3) 设  $f(x) = |x(1-x)|, -1 \leq x \leq 1$ , 则曲线  $y = f(x)$  的拐点为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- (4) 设  $f(u, v)$  为二元可微函数,  $z = f(x^{3y} - 2, y^{x+5} + 1)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (5) 函数  $f(x) = \frac{x}{3+2x-x^2}$  展开成  $x$  的幂级数为  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### 二、(本题14分) 求函数 $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-1}$ 的单调区间与极值.

### 三、(本题14分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = x$ 确定, 求 $y(x)$ .

四、（本题14分）设  $0 < a < b < \pi$ ，证明不等式： $\frac{b \sin b + 2 \cos b + \pi b}{a \sin a + 2 \cos a + \pi a} > 1$ 。

五、（本题14分）设  $a, b, c > 0$ ，计算： $I = \iint_{\Sigma} \frac{dS}{(ax^2 + by^2 + cz^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$ ，其

中  $\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 。

六、（本题14分）设  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的连续函数. 证明：若  $f(x)$  是以2为周期的周期函数，则  $F(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt$  也是以2为周期的周期函数.

注：模拟试题答案解析请参考全国大学生数学竞赛命题组编、科学出版社出版的《全国大学生数学竞赛真题解析与获奖名单（第11-15届）》。