全国大学生数学竞赛非数学类模拟八

清疏竞赛考研数学

2023 年 10 月 16 日

摘要

$$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\},\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}.$$

模拟试题应当规定时间独立完成并给予反馈.

1 填空题

填空题 1.1 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^n\frac{|\sin x|}{x}dx}{\ln n}=$ ___________

填空题 1.2 $f(x,y)=x^3+3xy-y^2-6x+2y+1$ 的所有极值之和为 $=$ ___________

填空题 1.3 设 $z=f(x,y)$ 连续可微, 且它与平面 xoy 之交线为 $y=2x^2-3x+4$. 若 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,3)}=2$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,3)}=$ ___________

填空题 1.4 设 $a>0$, 可微函数 $f:(0,+\infty)\mapsto(0,+\infty)$ 满足 $f'\left(\frac{a}{x}\right)=\frac{x}{f(x)},\forall x>0$, 则 $f(x)=$ ___________

填空题 1.5 对 $n\in\mathbb{N}$, 计算 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin x}dx=$ ___________

2 选择题答案区

3　解答题

解答题 3.1 设二阶连续可微函数 $u=u\left(x,t\right)$ 满足方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 证明

$$v=v\left(x,t\right)=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\cdot u\left(\frac{x}{a^2t},-\frac{1}{a^4t}\right)$$

在 $t>0$ 也满足方程 $\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

解答题 3.2 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是由光滑简单闭曲面 Σ 围成的区域. 对 $(x, y, z) \notin \overline{\Omega}$, 记 $\boldsymbol{r} = (\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$, $r = |\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位外法向量, 然后证明

(1):

$$\iiint_\Omega \frac{1}{r} d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{2} \iint_\Sigma \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\, dS.$$

(2): 计算

$$\iint_\Sigma \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2} dS.$$

解答题 3.3 考虑连续函数 $f:[0,1]\to[0,1]$, 证明数列 $x_{n+1}=f\left(x_n\right), n=1,2,\cdots$ 收敛的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)=0$.

解答题 3.4 给定 $\alpha, c > 0$ 和数列 $x_1 = c, x_{n+1} = x_n e^{-x_n^\alpha}, n = 1, 2, \cdots$, 对所有 $\beta \in \mathbb{R}$, 判断级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_n^\beta$ 收敛性.

解答题 3.5 记

$$\mathcal{M}=\left\{f\in C^{1}\left[0,1\right]:f\left(0\right)=0,\int_{0}^{1}\left|f'\left(x\right)\right|^{2}dx\leqslant 1\right\},$$

计算

$$\max_{f\in\mathcal{M}}\int_{0}^{1}\frac{\left|f\left(x\right)\right|\cdot\left|f'\left(x\right)\right|^{2}}{\sqrt{x}}dx.$$

解答题 3.6 设 $C, D > 0$, 二阶连续可微函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足

$$|x^3 f(x)| \leqslant C, |x f''(x)| \leqslant D.$$

证明对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $x_0 \geqslant 0$, 使得对任何 $|x| > x_0$, 都有

$$|x^2 f'(x)| < \sqrt{2CD} + \epsilon.$$