

第十二届全国大学生数学竞赛决赛试题

参考答案及评分标准

(非数学类, 2021 年 5 月 15 日)

一、填空题(本题满分 30 分, 每小题 6 分)

1、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin^2 \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin^2 \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \int_0^1 x \sin^2(1+x) dx = \frac{1}{8} (2 - 2 \sin 4 - \cos 4 + \cos 2).$

2、设 $P_0(1, 1, -1)$, $P_1(2, -1, 0)$ 为空间的两点, 则函数 $u = xyz + e^{xyz}$ 在点 P_0 处沿 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的方向导数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的单位向量为 $\vec{l} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1),$

$$u_x|_{P_0} = yz(1 + e^{xyz})|_{P_0} = -(1 + e^{-1}),$$

$$u_y|_{P_0} = xz(1 + e^{xyz})|_{P_0} = -(1 + e^{-1}),$$

$$u_z|_{P_0} = xy(1 + e^{xyz})|_{P_0} = 1 + e^{-1},$$

因此, 方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{P_0} = \frac{2}{\sqrt{6}}(1 + e^{-1}).$$

3、记空间曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases} (a > 0),$ 则积分 $\oint_{\Gamma} (1+x)^2 ds = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 利用对称性, 得

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (1+x)^2 ds &= \int_{\Gamma} (1+2x+x^2) ds = \int_{\Gamma} ds + \frac{2}{3} \int_{\Gamma} (x+y+z) ds + \frac{1}{3} \int_{\Gamma} (x^2+y^2+z^2) ds \\ &= \left(1 + \frac{a^2}{3} \right) \int_{\Gamma} ds = 2\pi a \left(1 + \frac{a^2}{3} \right). \end{aligned}$$

4、设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 16 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$ 且 $|A| > 0,$ $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I,$

其中 I 为单位矩阵, 则 $B = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 由 $AA^* = |A|I$ 及 $|A^*| = 16$ 可知, $|A| = 4.$ 对 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$ 的两边同时左乘 A^{-1} 右乘 A 得 $B = A^{-1}B + 3I,$ 即 $(I - A^{-1})B = 3I,$ 所以

$$= 3(-1)^{-1} = 3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & * \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -1 \\ & 4 \end{pmatrix}$$

5、函数 $u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{2}{x_3}$ ($x_i > 0, i = 1, 2, 3$) 的所有极值点为_____.

【解】 利用均值不等式, 可知 $u(x_1, x_2, x_3) \geq 4\sqrt[4]{2}$. 另一方面, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 1 - \frac{x_2}{x_1^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{x_1} - \frac{x_3}{x_2^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{1}{x_2} - \frac{2}{x_3^2}.$$

令 $\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$, ($k = 1, 2, 3$), 即 $1 - \frac{x_2}{x_1^2} = 0$, $\frac{1}{x_1} - \frac{x_3}{x_2^2} = 0$, $\frac{1}{x_2} - \frac{2}{x_3^2} = 0$. 由此解得 u

在定义域内的唯一驻点 $P_0(2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{3}{4}})$, 且 u 在该点取得最小值 $u(P_0) = 4\sqrt[4]{2}$, 这是函数唯一的极值. 因此 u 的唯一极值点为 $(2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{3}{4}})$.

【注】 也可用通常的充分性条件(海赛矩阵正定)判断驻点 P_0 为极小值点.

二、(12 分) 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}} \cdots \sqrt[2n]{\frac{1+nx}{1-nx}} - 1}{3\pi \arcsin x - (x^2 + 1) \arctan^3 x}$, 其中 n 为正整数.

【解】 令 $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}} \cdots \sqrt[2n]{\frac{1+nx}{1-nx}}$, 则 $f(0) = 1$, 且

----- 2 分

$$\ln f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{4} \ln \frac{1+2x}{1-2x} + \frac{1}{6} \ln \frac{1+3x}{1-3x} + \cdots + \frac{1}{2n} \ln \frac{1+nx}{1-nx},$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{1+2x} + \frac{2}{1-2x} \right) + \cdots + \frac{1}{2n} \left(\frac{n}{1+nx} + \frac{n}{1-nx} \right),$$

----- 4 分

所以 $f'(0) = n$.

----- 2 分

注意到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$, 因此

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3\pi \arcsin x - (x^2 + 1) \arctan^3 x} \cdot \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{n}{3\pi}.$$

----- 4 分

三、(12 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] x^n$ 的收敛域.

【解】记 $a_n = 1 - n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n \sim \frac{1}{2n}$. 所以

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1. \quad \text{----- 4 分}$$

显然, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. ----- 2 分

为了证明 $\{a_n\}$ 是单调递减数列, 考虑函数 $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$, $x \geq 1$. 利用不

等式: 当 $a > 0$ 时, $\ln(1+a) > \frac{a}{1+a}$, 得

$$f'(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} > 0,$$

即 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上的增函数, 所以 $a_n - a_{n+1} = (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) - n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) > 0$.

根据莱布尼兹审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛. ----- 4 分

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $[-1, 1)$. ----- 2 分

四、(12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 且

$$f(a) = f(b) = 0, \quad \int_a^b f(x) dx = 0.$$

(1) 证明: 存在互不相同的点 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 使得 $f'(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2$;

(2) 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, $\xi \neq x_i$, $i = 1, 2$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$.

【证】 (1) 令 $F(x) = e^{-x} \int_a^x f(t) dt$, 则 $F(a) = F(b) = 0$. 对 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上利用洛尔定理, 存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $F'(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = \int_a^{x_0} f(t) dt$.

----- 3 分

再令 $G(x) = f(x) - \int_a^x f(t)dt$, 则 $G(a) = G(x_0) = G(b) = 0$. 对 $G(x)$ 分别在 $[a, x_0]$ 与 $[x_0, b]$ 上利用洛尔定理, 存在 $x_1 \in (a, x_0)$ 及 $x_2 \in (x_0, b)$, 使得 $G'(x_1) = G'(x_2) = 0$, 即 $f'(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2$, 且 $x_1 \neq x_2$. ----- 3 分

(2) 令 $\varphi(x) = e^x [f'(x) - f(x)]$, 则 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$, 且

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= e^x [f'(x) - f(x)] + e^x [f''(x) - f'(x)] \\ &= e^x [f''(x) - f(x)].\end{aligned}$$
 ----- 3 分

对 $\varphi(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上利用洛尔定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即 $f''(\xi) = f(\xi)$, 显然 $\xi \neq x_i$, $i = 1, 2$. ----- 3 分

五、(12 分) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 证明:

- (1) 存在实对称矩阵 B , 使得 $B^{2021} = A$, 且 $AB = BA$;
- (2) 存在一个多项式 $p(x)$, 使得上述矩阵 $B = p(A)$;
- (3) 上述矩阵 B 是唯一的.

【证】(1) 因为 A 是实对称矩阵, 所以存在正交矩阵 Q , 使得 $A = QDQ^T$, 其中 $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 而 λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 为矩阵 A 的特征值. ----- 3 分

令 $B = QD^{\frac{1}{2021}}Q^T$, 其中 $D^{\frac{1}{2021}} = \text{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2021}}, \lambda_2^{\frac{1}{2021}}, \dots, \lambda_n^{\frac{1}{2021}})$, 则

$$B^{2021} = (QD^{\frac{1}{2021}}Q^T)^{2021} = QDQ^T = A,$$

且满足

$$AB = QDQ^T QD^{\frac{1}{2021}}Q^T = QDD^{\frac{1}{2021}}Q^T = QD^{\frac{1}{2021}}DQ^T = QD^{\frac{1}{2021}}Q^T QDQ^T = BA.$$
 ----- 3 分

(2) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 是 A 的所有两两互异的特征值 ($1 \leq s \leq n$), 利用待定系数法及克拉默法则, 存在唯一的 s 次多项式 $p(x) = x^s + a_1x^{s-1} + \dots + a_{s-1}x + a_s$, 使得 $p(\lambda_i) = \lambda_i^{\frac{1}{2021}}$, ($i = 1, 2, \dots, s$). 因为 $p(D) = D^{\frac{1}{2021}}$, 所以

$$p(A) = p(QDQ^T) = Qp(D)Q^T = QD^{\frac{1}{2021}}Q^T = B.$$
 ----- 3 分

(3) 设另存在 n 阶实对称矩阵 C 使得 $C^{2021} = A$, 则 $B = p(A) = p(C^{2021})$, 所以 $BC = p(C^{2021})C = Cp(C^{2021}) = CB$. 由于 B, C 都可相似对角化, 故存在 n 阶可逆实矩阵 T 及实对角矩阵 D_1, D_2 , 使得 $B = TD_1T^{-1}$, $C = TD_2T^{-1}$. 因此 $C^{2021} = A = B^{2021} \Rightarrow D_2^{2021} = D_1^{2021} \Rightarrow D_2 = D_1 \Rightarrow C = B$, 唯一性得证. ----- 3 分

六、(12分) 设 $A_n(x, y) = \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k$, 其中 $0 < x, y < 1$, 证明:

$$\frac{2}{2-x-y} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x, y)}{n+1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} \right).$$

【证】 (方法1) 当 $x = y$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x, x)}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, 等式成立.

----- 2分

当 $x \neq y$ 时, 注意到 $A_n(x, y) = A_n(y, x)$, 故可设 $0 < x < y < 1$. 因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x, y)}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \left(\frac{y}{x} \right)^k = \frac{1}{y-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n - x^n}{n} = \frac{1}{y-x} \ln \frac{1-x}{1-y},$$

所以不等式化为

$$\frac{2}{2-x-y} \leq \frac{1}{y-x} \ln \frac{1-x}{1-y} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} \right). \quad \text{①}$$

----- 6分

对于 $0 \leq t < 1$, 有

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) = \frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n},$$

所以

$$t \leq \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} \leq \frac{t}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right).$$

令 $t = \frac{y-x}{2-x-y}$, 则 $0 < t < 1$, 代入上式即得所证不等式①. ----- 4分

(方法2) 因为 $\frac{2}{2-x-y} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+y}{2} \right)^n$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, 所以问题转化为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+y}{2} \right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x, y)}{n+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (x^n + y^n), \quad \text{----- 4分}$$

这只需证明: 对任意 $n \geq 0$, 都有 $\left(\frac{x+y}{2} \right)^n \leq \frac{A_n(x, y)}{n+1} \leq \frac{1}{2} (x^n + y^n)$, 其中 $0 < x, y < 1$.

-----2分

用数学归纳法. $n=0, 1$ 时, 显然. 假设 $n=p$ 时, 结论成立, 当 $n=p+1$ 时,

$$\begin{aligned}
A_{p+1}(x, y) &= \sum_{k=0}^{p+1} x^{p+1-k} y^k = x^{p+1} + yA_p(x, y), \\
A_{p+1}(x, y) &= \sum_{k=0}^{p+1} x^{p+1-k} y^k = y^{p+1} + xA_p(x, y), \\
A_{p+1}(x, y) &= \frac{1}{2}(x^{p+1} + y^{p+1}) + \frac{1}{2}(x+y)A_p(x, y) = \frac{1}{2}(x^{p+1} + y^{p+1}) + \frac{p+1}{2}(x+y)\frac{A_p(x, y)}{p+1} \\
&\leq \frac{1}{2}(x^{p+1} + y^{p+1}) + \frac{p+1}{2}(x+y)(x^p + y^p) \leq \frac{1}{2}(x^{p+1} + y^{p+1}) + \frac{p+1}{2}(x^{p+1} + y^{p+1}), \quad \text{①} \\
&\text{----- 3 分}
\end{aligned}$$

所以 $A_{p+1}(x, y) \leq \frac{p+2}{2}(x^{p+1} + y^{p+1})$. 另一方面, 仍由①式及归纳假设, 可得

$$A_{p+1}(x, y) \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{p+1} + \frac{p+1}{2}(x+y)\left(\frac{x+y}{2}\right)^p = (p+2)\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p+1},$$

因此, 所证不等式对任意 $n \geq 0$ 及 $0 < x, y < 1$ 都成立. ----- 3 分

七、(10 分) 设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 的连续函数, 且 $f(x)$ 单调增加, 求证:

$$\int_0^1 f(g(x))dx \leq \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx.$$

【证】 令 $F(x) = f(x) - x$, 则问题转化为证明:

$$\int_0^1 [F(g(x)) - F(x)]dx \leq \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}, \quad \text{----- 4 分}$$

这只需证明:

$$F_{\max}(x) - \int_0^1 F(x)dx \leq \frac{1}{2}, \quad \text{即} \quad \int_0^1 F(x)dx \geq F_{\max}(x) - \frac{1}{2}. \quad \text{----- 2 分}$$

记 $\max F(x) = F(x_0) = a$, 由于 $0 \leq f(x) \leq 1$, 则 $-x \leq F(x) \leq 1-x$, 所以 $a \leq 1$.

因为 $f(x)$ 单调增加, 当 $x \in [x_0, 1]$ 时, $f(x) \geq f(x_0)$, 即

$$F(x) + x \geq F(x_0) + x_0 = a + x_0,$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(x)dx &= \int_0^{x_0} F(x)dx + \int_{x_0}^1 F(x)dx \geq \int_0^{x_0} (-x)dx + \int_{x_0}^1 (a + x_0 - x)dx \\
&= a - \frac{1}{2} + x_0(1 - x_0) \geq a - \frac{1}{2} = \max F(x) - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

----- 4 分