2023年第六届华教杯全国大学生数学竞赛初赛真题

（非数学类专业组）

一、选择题（10 题、3 分/题）

1．已知$\alpha(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$\beta(x)=3-3\sqrt[3]{x}$，则当$x\to 1$时（　　）.

A．$\alpha(x)$是关于$\beta(x)$的 2 阶无穷小

B．$\alpha(x)$与$\beta(x)$是高阶无穷小

C．$\beta(x)$与$\alpha(x)$是等价无穷小

D．$\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小，但不是等价无穷小

2．$\int e^x(\dfrac{1-x}{1+x^2})^2dx=$（　　）.

A．$\dfrac{e^x}{1+x}+C$　　B．$\dfrac{e^x}{1+x^2}+C$　　C．$\dfrac{2e^x}{1+x^2}+C$　　D．$\dfrac{e^x}{1+2x^2}+C$

3．$\int e^x[\sin x-\cos x)\cos\dfrac{n\pi}{2}+(\cos x+\sin x)\sin\dfrac{n\pi}{2}]dx=$（　　）.

A．$e^x\cos(x+\dfrac{n\pi}{2})+C$　　B．$-e^x\cos(x+\dfrac{n\pi}{2})+C$

C．$-e^x\tan(x+\dfrac{n\pi}{2})+C$　　D．$-e^x\tan(x+n\pi)+C$

4．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{i+j}{i^2+j^2}=$（　　）.

A．$\dfrac{2}{\pi}+\ln 2$　　B．$\dfrac{\pi}{2}+\ln 2$　　C．$\dfrac{2}{\pi}+\ln 3$　　D．$\dfrac{\pi}{2}+\ln 3$

5．$\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin(2x)}dx=$（　　）.

A．n　　B．$\sqrt{2}n$　　C．$\sqrt{3}n$　　D．$2\sqrt{2}n$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n+n^2)^{\frac{1}{n}}=$（ ）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

7. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x dx=$（ ）.

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{6}$　　D. $\dfrac{\pi}{8}$

8. $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx,-\pi\le x\le\pi,a_2=$（ ）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{\mathrm{n}}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)=$（ ）.

A. ln2　　B. ln3　　C. $\dfrac{1}{\ln 2}$　　D. $\dfrac{1}{\ln 3}$

10. 设$D=R^2$，$a>0$，$ac-b^2>0$，$I=\iint_D\dfrac{dxdy}{(p+ax^2+2bxy+cy^2)^2}(p>0)=$（ ）.

A. $\dfrac{\pi}{p\sqrt{ac-b^2}}$　　B. $\dfrac{\pi}{p\sqrt{ac-b}}$　　C. $\dfrac{\pi^2}{p\sqrt{ac-b}}$　　D. $\dfrac{\pi}{p^2\sqrt{ac-b}}$

二、填空题（7题、4分/题）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec(\tan x)-\sec(\sin x)}{\cos x^2-1}=$________.

2. $\int\dfrac{e^x(1+x)}{(1-xe^x)^2}dx=$________.

3. 点$M_0(2,2,2)$关于直线$L:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{2}=z-3$的对称点$M_1$的坐标为________.

4. $\iint\limits_D \left(x-y^2\right)\left(y-x^2\right)(1-4xy)dxdy=$________. 其中$D: y=\sqrt{x}; x=\sqrt{y}$及

$x^2+y^2-x-y=\dfrac{1}{4}$. $x, y\in(0,\dfrac{1}{2})$所围成的区域.

5. 正方形的边长 L 以 2m/s 的速度增大，当 L=4m 时，其内接圆的面积的变化速率为________.

6. $\sin^{(2023)}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=$________.

7. 设$x_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}e^{x_n}=$________.

三、解答题（3 题、14 分/题）

1. 设函数$f(x)$在$[a，b]$上具有连续导数，若λ，μ为实数且$\int_a^b f(x)dx=\dfrac{1}{2}\lambda(b^2-a^2)+\mu(b-a)$，$\int_a^b xf(x)dx=\dfrac{1}{3}\lambda(b^3-a^3)+\dfrac{1}{2}\mu(b^2-a^2)$，证明：存在$\xi\in(a，b)$，使得$f^{'}(\xi)=\lambda$.

2. 若$f_n(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$，其中$n$为自然数，求方程$f_n(x)f_{n+1}(x)=0$在$(-\infty，+\infty)$内实根的个数.

3. 曲线$y=\sin x, x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi]$绕$y$轴旋转一周，求所得几何体的体积.

2023年第六届华教杯全国大学生数学竞赛初赛真题
（非数学类专业组）参考答案

一、选择题

1、D　　2、B　　3、B　　4、B　　5、D

6、B　　7、D　　8、B　　9、C　　10、A

二、填空题

1、-1　　2、$\dfrac{1}{1-xe^x}+C$　　3、$(6,-6,6)$　　4、$\dfrac{1}{6144}$

5、4π　　6、$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　7、1

三、解答题

1、【参考解析】

考虑积分 $\int_a^b (x-a)(b-x)(\lambda-f^{'}(x))dx$，

利用分布积分及 $\int_a^b f(x)dx=\dfrac{1}{2}\lambda(b^2-a^2)+\mu(b-a)$，$\int_a^b xf(x)dx=\dfrac{1}{3}\lambda(b^3-a^3)+\dfrac{1}{2}\mu(b^2-a^2)$，

有 $\lambda\int_a^b (bx+ax-ab-x^2)dx-(x-a)(b-x)f(x)\Big|_a^b+\int_a^b (b+a-2x)f(x)dx$

$=\dfrac{\lambda}{6}(b-a)^3+(a+b)\int_a^b f(x)dx-2\int_a^b xf(x)dx$

$=\dfrac{\lambda}{6}(b-a)^3+(a+b)(\dfrac{1}{2}\lambda(b^2-a^2)+\mu(b-a))-2(\dfrac{1}{3}\lambda(b^3-a^3)+\dfrac{1}{2}\mu(b^2-a^2))=0$

由积分中值定理知，存在 $\xi\in(a,\ b)$，使得 $f^{'}(\xi)=\lambda$.

2、【参考解析】

由题设知 $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，

当 n 为偶数时，$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=+\infty, \lim\limits_{n\to-\infty} f_n(x)=-\infty$, 故 $f_n(x)$ 存在极小点 x_0，

则由 $f_n(x_0)=f_n'(x_0)+\dfrac{x_0^n}{n!}=\dfrac{x_0^n}{n!}$, 又 $f_n(0)=1$, 从而 $f_n(x)>0$, 即 $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无实根.

当 n 为奇数时，$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=+\infty,\lim\limits_{n\to-\infty} f_n(x)=-\infty$, 知 $f_n(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有实根.

由 $f_n'(x)=f_{n-1}(x)$, 而 $n-1$ 为偶数，则 $f'(x)>0$，知 $f_n(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 严格单增，故其有唯一实根.

从而 $f_n(x)$ $f_{n+1}(x)$ 无论 n 为奇数还是偶数，它在 $(-\infty,+\infty)$ 内有唯一实根.

3、【参考解析】

曲线 $y=\sin x,x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ 的反函数为 $x=\pi-\arcsin y,y\in[0,1]$，

所以所得几何体的体积为：$V=\int_0^1\pi(\pi-\arcsin y)^2dy$，设 $\arcsin y=u$,即$y=\sin u$,则

$$V=\int_0^1\pi(\pi-\arcsin y)^2dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(\pi-u)^2\cos u du=\frac{\pi}{4}(\pi^2+8\pi-8)$$.