2016 年第八届全国大学生数学竞赛初赛
(非数学类）试卷

一、填空题(满分 30 分，每小题 5 分)

1．若$f\left(x\right)$在点$x=a$处可导，且$f\left(a\right)\neq 0$，则$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f\left(a+1/n\right)}{f\left(a\right)}\right]^{n}=$______.

2．若$f\left(1\right)=0, f'\left(1\right)$存在，则极限$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)\tan 3x}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin x}=$____________.

3．设$f\left(x\right)$有连续导数，且$f\left(1\right)=2$. 记$z=f\left(e^{x}y^{2}\right)$，若$\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$，$f\left(x\right)$在$x>0$的表达式为________________.

4．设$f\left(x\right)=e^{x}\sin 2x$，则$f^{(4)}\left(0\right)=$________________.

5．曲面$z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$平行于平面$2x+2y-z=0$的切平面方程为________________.

第二题：(14 分)设$f\left(x\right)$在$[0,1]$上可导, $f\left(0\right)=0$,且当$x\in\left(0,1\right)$, $0<f'\left(x\right)<1$. 试证:当$a\in\left(0,1\right)$时，有$\left(\int_0^a f\left(x\right)\mathrm{d}\,x\right)^2>\int_0^a f^3\left(x\right)\mathrm{d}\,x.$

第三题：(14 分)某物体所在的空间区域为$\Omega: x^2+y^2+2z^2\leq x+y+2z$，密度函数为$x^2+y^2+z^2$，求质量$M=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z.$

第四题：(14 分)设函数$f\left(x\right)$在闭区间$\left[0,1\right]$上具有连续导数，$f\left(0\right)=0, f\left(1\right)=1.$证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}\,x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}.$$

第五题：(14 分)设函数$f\left(x\right)$在区间$\left[0,1\right]$上连续，且$I=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}\,x\neq 0$. 证明：在$\left(0,1\right)$内存在不同的两点$x_1, x_2$，使得$\dfrac{1}{f\left(x_1\right)}+\dfrac{1}{f\left(x_2\right)}=\dfrac{2}{I}.$

第六题: (14 分) 设$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$上可导, 且$f\left(x\right)=f\left(x+2\right)=f\left(x+\sqrt{3}\right)$, 用傅里叶(Fourier)级数理论证明$f\left(x\right)$为常数。