

2012 年第四届全国大学生数学竞赛初赛 (数学类) 试卷

一、(15 分) 设 Γ 为椭圆抛物面 $z = 3x^2 + 4y^2 + 1$. 从原点作 Γ 的切锥面. 求切锥面的方程.

二、(15 分) 设 Γ 为抛物线, P 是与焦点位于抛物线同侧的一点. 过 P 的直线 L 与 Γ 围成的有界区域的面积记作 $A(L)$. 证明: $A(L)$ 取最小值当且仅当 P 恰为 L 被 Γ 所截出的线段的中点.

三、(10 分) 设 $f \in C^1[0, +\infty), f(0) > 0, f'(x) \geq 0, \forall x \in [0, +\infty)$. 已知

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x) + f'(x)} dx < +\infty, \text{ 求证 } \int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)} dx < +\infty.$$

四、(10 分) 设 A, B, C 均为 n 阶正定矩阵, $P(t) = At^2 + Bt + C, f(t) = \det P(t)$, 其中 t 为未定元, $\det P(t)$ 表示 $P(t)$ 的行列式. 若 λ 是 $f(t)$ 的根, 试证明: $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, 这里 $\operatorname{Re}(\lambda)$ 表示 λ 的实部.

五、(10 分) 已知 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, |x| < 1, n$ 为正整数, 求 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$.

六、(15 分) 设 $f : [0, 1] \rightarrow R$ 可微,

$$f(0) = f(1), \int_0^1 f(x) dx = 0 \text{ 且 } f'(x) \neq 1, \forall x \in [0, 1].$$

求证: 对于任意正整数 n , 有 $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{1}{2}$.

七、(25 分) 已知实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. 证明:

(1) 矩阵方程 $AX = B$ 有解但 $BY = A$ 无解的重要条件是 $a \neq 2, b = \frac{4}{3}$.

(2) A 相似于 B 的重要条件是 $a = 3, b = \frac{2}{3}$.

(3) A 合同于 B 的重要条件是 $a < 2, b = 3$.