# 2012 年第三届全国大学生数学竞赛决赛

# （非数学专业）试题

**一、计算题（本题共 5 小题，每题 6 分，共 30 分）**

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$.

2．$\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(x^3+\dfrac{x}{2}-\tan\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$.

3．设函数 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，满足 $f_y \neq 0$ 且

$$f_x{}^2 f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + f_y{}^2 f_{xx} = 0\,,$$

$y=y(x,z)$ 是由方程 $z=f(x,y)$ 所确定的函数，求 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

4．求不定积分 $I=\displaystyle\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}\,x$.

5．求曲面 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\ (a>0)$ 所围立体的表面积.

**二、（本题 13 分）** 讨论 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2 x + x^\alpha \sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x$ 的敛散性，其中 $\alpha$ 是一个实常数.

**三、（本题 13 分）** 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷次可微，并且满足：存在 $M>0$，使得

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \le M, \forall x\in(-\infty,+\infty)\,(k=1,2,\cdots) \text{ 且 } f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0,\,(n=1,2,\cdots).$$

求证：在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$.

**四、(本题共 16 分,第 1 小题 6 分,第 2 小题 10 分)** 设 $D$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le a\,(a>b>0)$，面密度为 $\rho$ 的均质薄板；$l$ 为通过椭圆焦点 $(-c,0)$（其中 $c^2=a^2-b^2$）垂直于薄板的旋转轴.

（1）求薄板 $D$ 绕 $l$ 旋转的转动惯量 $J$；

（2）对于固定的转动惯量，讨论椭圆薄板的面积是否有最大值和最小值.

**五、(本题 12 分)** 设连续可微函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(xz-y, x-yz)=0$ (其中 $F(u,v)$

有连续偏导数）唯一确定，$L$ 为正向单位圆周，试求：

$$I = \oint_L \left(xz^2 + 2yz\right) \mathrm{d}\, y - \left(2xz + yz^2\right) \mathrm{d}\, x .$$

**六、（本题共 16 分，第 1 小题 6 分，第 2 小题 10 分）**

（1）求解微分方程$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} - xy = xe^{x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

（2）如 $y = f(x)$ 为上述方程的解，证明：

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{n^2x^2 + 1} \mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{2}.$$