2023年第六届华教杯全国大学生数学竞赛初赛真题

（专科生组）

一、选择题（10题、3分/题）

1．已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\sin x)=2+\cos(2x)$，则 $f(x)=$（　　）.

A．$2+3x^2$　　B．$2-3x^2$　　C．$3+2x^2$　　D．$3-2x^2$

2．设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x)-f(0)]\sin 3x}{x^2}=4$，则 $f'(0)=$（　　）.

A．$\dfrac{5}{4}$　　B．$\dfrac{3}{4}$　　C．$\dfrac{4}{3}$　　D．$\dfrac{5}{3}$

3．$\displaystyle\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=$（　　）.

A．$x\tan\dfrac{x}{2}+C$　　B．$x\tan x+C$　　C．$\dfrac{x}{2}\tan x+C$　　D．$2x\tan x+C$

4．$\displaystyle\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx=$（　　）.

A．$xe^{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}e^{\sin x}+C$　　B．$xe^{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}e^{\sin x}+C$

C．$xe^{\sin x}-\cos xe^{\sin x}+C$　　D．$xe^{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}e^{\cos x}+C$

5．方程 $2e^{2-x^2}(x^6-3x^4+5x^2-1)-2e-5=0$ 解的个数为（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx(b>a>0)=$（　　）.

A．$\sqrt{\pi}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$　　B．$\sqrt{\pi}(\sqrt{b}+\sqrt{a})$　　C．$\pi(\sqrt{b}-\sqrt{a})$　　D．$\sqrt{\pi}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

7．$f(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt, -\infty<x<+\infty$ 的水平渐近线的个数为（　　）．

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

8．已知 $-\infty<x<+\infty, \arctan x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=$（　　）．

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

9．$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$ 的间断点是 $x=$（　　）．

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

10．$\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}})^{n\pi}=$（　　）．

A．$e^{-\frac{\pi}{2}}$　　B．e^{-1}　　C．e　　D．$e^{-\frac{1}{2}}$

二、填空题（7 题、4 分/题）

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{x-\sin x}=$________.

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2023+3x)^x-2023^x}{x(e^x+1)\ln(1+\sin x)}=$________.

3．设 $f'(x^5)=5\ln x$，则函数 $f(x)=$________.

4．设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx^3}{nx^5+2}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$________.

5．设 m ,n 为正整数，则 $\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx=$________.

6．不定积分 $\int\dfrac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}dx=$________.

7．设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}+\dfrac{1+x^2}{1+x^4}\int_1^{+\infty}f(x)dx$，且 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则 $\int_1^{+\infty}f(x)dx=$________.

三、解答题（3 题、14 分/题）

1．已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$，当 $x\geq 1$时， $f^{'}(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$，证明：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在.

2．求函数 $f(x)=\begin{cases} x\sqrt{a^2-x^2}, -a\leq x\leq a \\ (x-a)^2, a<x\leq 2a \end{cases}$ 的值域，其中常数 $a>0$.

3．求 $2^{\frac{1}{5}}$ 的近似值（精确到 0.0001 ）.

2023 年第六届华教杯全国大学生数学竞赛初赛真题

（专科生组）参考答案

一、选择题

1、D　　2、C　　3、A　　4、A　　5、D

6、A　　7、C　　8、A　　9、A　　10、A

二、填空题

1、-2　　2、$\dfrac{3}{4046}$　　3、$f(x)=x\ln x-x+c$　　4、0

5、$(-1)^n\dfrac{n!}{(m+1)^{n+1}}$　　6、$\dfrac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$　　7、$\dfrac{4\ln 2}{4-\sqrt{2}\pi}$

三、解答题

1、【参考解析】

由微积分基本公式，有 $f(x)-f(1)=\int_1^x f^{'}(x)dx$，

由题设知，$f^{'}(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数，

又 $f(1)=1$，故当 $x\geq 1$时，$f(x)\geq 1$，

所以 $f(x)-f(1)=\int_1^x f^{'}(x)dx=\int_1^x\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}dx\leq\int_1^x\dfrac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_1^x$

$=\arctan x-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$，

即 $f(x)$ 单调增有上界$1+\dfrac{\pi}{4}$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在.

2、【参考解析】

容易看出函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-a,2a]$ 上连续，

在 $(-a,a)$ 内 $f'(x)=\sqrt{a^2-x^2}+\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$，

在 $(a,2a)$ 内，$f'(x)=2(x-a)$，因为 $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{x\sqrt{a+x}}{-\sqrt{a-x}}=-\infty$，

所以 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处不可导，于是函数在 $(-a,2a)$ 内有驻点 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 和不可导点 $x=a$.计算函数在区间端点、驻点以及不可导点的函数值得

$$f(-a)=0,f(2a)=a^2,f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=-\frac{1}{2}a^2,f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=\frac{1}{2}a^2,f(a)=0$$

比较这些值得到函数的最小值为 $-\frac{1}{2}a^2$,最大值为 a^2.因此函数的值域为 $\left[-\frac{1}{2}a^2,a^2\right]$.

3、【参考解析】

$$2=\left(\frac{6}{5}\right)^5-\left[\left(\frac{6}{5}\right)^5-2\right]=\left(\frac{6}{5}\right)^5\left(1-\frac{1526}{6^5}\right)$$

取 $x=\frac{1526}{6^5}=0.1962449\cdots$，由泰勒公式

$$2^{\frac{1}{5}}=\frac{6}{5}(1-x)^{\frac{1}{5}}=\frac{6}{5}\left(1-\frac{1}{5}x-\frac{8}{100}x^2-\frac{6}{125}x^3-\cdots\right)$$

解得 $2^{\frac{1}{5}}=1.1487686\cdots$

误差 $|R_3(x)|\le\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{14}{5}(1-x)^{-\frac{4}{5}}x^4<\frac{21}{125}x^4=0.0002492\cdots$