

## 2013 年第四届全国大学生数学竞赛决赛、 (非数学类) 试卷

### 一、简答下列各题 (本题 25 分)

1、计算  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \ln(x \ln a) \cdot \ln \left( \frac{\ln ax}{\ln(x/a)} \right) \right], (a > 1).$

2、设  $f(u, v)$  具有连续偏导数, 且满足  $f_u(u, v) + f_v(u, v) = uv$ , 求  $y(x) = e^{-2x} f(x, x)$  所满足的一阶微分方程, 并求其通解.

3、求在  $[0, +\infty)$  上的可微函数  $f(x)$ , 使  $f(x) = e^{-u(x)}$ , 其中  $u = \int_0^x f(t) dt$ .

4、计算不定积分  $\int x \arctan x \ln(1+x^2) dx$ .

5、过直线  $\begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$  作曲面  $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$  的切平面, 求此切平面的方程.

二、(本题 15 分) 设曲面  $\Sigma: z^2 = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq z$ , 其面密度为常数  $\rho$ . 求在原点处的质量为 1 的质点和  $\Sigma$  之间的引力 (记引力常数为  $G$ ).

三、(本题 15 分) 设  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  连续可导,

$$f'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)} \left[ \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \right],$$

证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在.

四、(本题 15 分) 设函数  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上二阶可导, 且  $|f(x)| < 1$ , 又  $f^2(0) + [f'(0)]^2 = 4$ . 试证在  $(-2, 2)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) + f''(\xi) = 0$ .

五、(本题 15 分) 求二重积分  $I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} |x^2 + y^2 - x - y| dx dy$ .

六、(本题 15 分) 若对于任何收敛于零的序列  $\{x_n\}$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$  都是收敛的, 试证明级

数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛.