

第十届全国大学生数学竞赛决赛三、四年级试卷参考答案及评分标准  
(数学类, 2019年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四				总分
满分	20	15	15	20	10	10	10	100
得分								

一、(本题 20 分, 每小题各 5 分)填空题

得分	
评阅人	

1. 设  $A$  为实对称方阵,  $(1, 0, 1)$  和  $(1, 2, 0)$  构成其行向量的一个极大无关组. 则  
有  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  or  $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
2. 设  $y(x) \in C^1[0, 1]$  满足  $y(x) \in [0, \pi]$  及  $x = \begin{cases} \frac{\sin y(x)}{y(x)}, & y \in (0, \pi] \\ 1, & y = 0. \end{cases}$ . 则  $y'(0) = -\pi$ .
3. 设  $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ , 则  $\int_0^{+\infty} xf(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{8}$ .
4. 设  $U$  为 8 阶实正交方阵,  $U$  中元素皆为  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  的  $3 \times 3$  子矩阵的个数记为  $t$ . 则  $t$  最多为 0.



得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 给定空间直角坐标系中的两条直线:  $l_1$  为  $z$  轴,  $l_2$  过  $(-1, 0, 0)$  及  $(0, 1, 1)$  两点. 动直线  $l$  分别与  $l_1, l_2$  共面, 且与平面  $z = 0$  平行.

1. 求动直线  $l$  全体构成的曲面  $S$  的方程;
2. 确定  $S$  是什么曲面.

解:1. 解法一 直线  $l_1$  的参数方程为  $x = 0, y = 0, z = s$ ;  $l_2$  的参数方程为  $x = -1 + t, y = t, z = t$ . —— (2分)

设动直线  $l$  与  $l_1, l_2$  分别交于点  $(0, 0, s)$  与  $(-1 + t, t, t)$ , 则  $l$  的方向为  $(-1 + t, t, t - s)$ . 由于  $l$  与平面  $z = 0$  平行, 故  $t = s$ , 从而动直线  $l$  的方程为:

$$x = (t - 1)u, \quad y = tu, \quad z = t.$$

—— (8分)

消去  $t, u$  得动直线构成的曲面  $S$  的方程为

$$xz - yz + y = 0.$$

—— (10分) 12分

解法二 过直线  $l_1$  的平面簇为  $\pi_1 : (1 - \lambda)x + \lambda y = 0$ , 这里  $\lambda$  为参数; 同理过直线  $l_2$  的平面簇为  $\pi_2 : (1 - \mu)(x - y + 1) + \mu(y - z) = 0$ ,  $\mu$  为参数. —— (2分)

动直线  $l$  是平面簇  $\pi_1$  与  $\pi_2$  的交线, 故直线  $l$  的方向为

$$\mathbf{n} = (1 - \lambda, \lambda, 0) \times (1 - \mu, 2\mu - 1, -\mu) = (-\lambda\mu, \mu(1 - \lambda), -1 + 2\mu - \lambda\mu). \quad \text{—— } (6分)$$

由直线  $l$  与平面  $z = 0$  平行, 故  $-1 + 2\mu - \lambda\mu = 0$ . 由  $\pi_1$  与  $\pi_2$  的方程知

$$\lambda = \frac{x}{x - y}, \quad \mu = \frac{x - y + 1}{x - 2y + z + 1}. \quad \text{—— } (10分) 10$$

将上式代入  $-1 + 2\mu - \lambda\mu = 0$  即得动直线  $l$  生成的曲面的方程为

$$xz - yz + y = 0.$$

[12分]

2. 做可逆线性变换

$$\begin{cases} x = x' - y' - z' \\ y = -z' \\ z = x' + y' \end{cases}$$



姓名: \_\_\_\_\_

准考证号: \_\_\_\_\_ 所在院校: \_\_\_\_\_

考生座位号: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_

密封线 答题时不要超过此线

曲面  $S$  的原方程化为  $z' = x'^2 - y'^2$ . 因此,  $S$  为马鞍面. —— (15分)



得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 证明: 任意  $n$  阶实方阵  $A$  可以分解成  $A = A_0 + A_1 + A_2$ , 其中  $A_0 = aI_n$ ,  $a$  是实数,  $A_1$  与  $A_2$  都是幂零方阵.

证明: 我们先证明一个引理.

引理 设  $A$  是  $n$  阶实方阵且满足  $\text{tr}(A) = 0$ , 则存在可逆实方阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  的对角元素都是 0.

对  $n$  进行归纳. 当  $n = 1$  时,  $A = (0)$ , 结论显然成立. 下设  $n \geq 2$ , 我们考虑两种情形.

情形一:  $\mathbb{R}^n$  中的所有非零向量都是  $A$  的特征向量. 由所有基本向量  $e_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  都是特征向量可知, 存在特征值  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  使得  $Ae_i = \lambda_i e_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 因此,  $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . 再由所有  $e_i + e_j$  都是特征向量有, 存在  $\mu_{ij}$  使得  $A(e_i + e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j = \mu_{ij}(e_i + e_j)$ . 于是  $\mu_{ij} = \lambda_i = \lambda_j$ . 因此  $A$  为纯量方阵. 由  $\text{tr}(A) = 0$  知  $A = 0$ .

情形二: 存在  $\mathbb{R}^n$  中的非零向量  $\alpha$  不是  $A$  的特征向量. 则  $\alpha, A\alpha$  线性无关, 因而存在可逆实方阵  $Q = (\alpha, A\alpha, *, \dots, *)$  满足  $AQ = Q \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix}$ , 或者等价地  $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix}$ , 其中  $B$  为  $n - 1$  阶实方阵. 由  $\text{tr}(A) = 0$ , 得  $\text{tr}(B) = 0$ . 由归纳假设, 存在可逆实方阵  $R$ , 使得  $R^{-1}BR$  的对角元素都是 0. 令  $P = Q \text{diag}(1, R)$ , 则  $P^{-1}AP$  的对角元素都是 0. 引理获证. [10分]

现在对于任意  $n$  阶实方阵  $A$ , 令  $A_0 = \frac{\text{tr}(A)}{n}I$ , 则  $\text{tr}(A - A_0) = 0$ . 根据引理, 存在可逆实方阵  $P$ , 使得  $B = P^{-1}(A - A_0)P$  的对角元素都是 0. 设  $B = L + U$ ,  $L, U$  分别是严格下、上三角方阵, 则  $L, U$  都是幂零方阵. 于是  $A = A_0 + PBP^{-1} = A_0 + A_1 + A_2$ , 其中  $A_0$  是纯量方阵,  $A_1 = PLP^{-1}$  和  $A_2 = PUP^{-1}$  都是幂零方阵. 证毕. [15分]



专业: \_\_\_\_\_

考生座位号: \_\_\_\_\_

所在院校: \_\_\_\_\_

准考证号: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_

得分	
评阅人	

四、(本题20分) 设  $\alpha > 0$ ,  $f(x) \in C^1[0, 1]$ , 且对任何非负整数,  $n$ ,  $f^{(n)}(0)$  均存在且为零. 进一步存在常数  $C > 0$  使得  $|x^\alpha f'(x)| \leq C|f(x)|$  ( $\forall x \in [0, 1]$ ). 证明:

(1) 若  $\alpha = 1$ , 则在  $[0, 1]$  上  $f(x) \equiv 0$ .

(2) 若  $\alpha > 1$ , 举例说明在  $[0, 1]$  上  $f(x) \equiv 0$  可以不成立.

证明:(1) 由  $f^{(n)}(0) = 0$  ( $\forall n \geq 0$ ) 以及 Taylor 展式可得, 对于任何固定的  $k$ , 成立

$$f(x) = o(x^k), \quad x \rightarrow 0^+.$$

..... (5分)

特别

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^{2C}} = 0,$$

另一方面, 由假设可得

$$(x^{-2C} f^2(x))' = 2x^{-2C-1} (xf(x)f'(x) - Cf^2(x)) \leq 0, \quad \forall x \in (0, 1].$$

从而  $x^{-2C} f^2(x)$  在  $(0, 1]$  上单调减少.

..... (10分)

因此

$$x^{-2C} f^2(x) \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-2C} f^2(t) = 0, \quad \forall x \in (0, 1].$$

因此, 在  $[0, 1]$  上成立  $f(x) \equiv 0$ .

..... (15分)

(2) 取

$$f(x) := \begin{cases} e^{-x^{1-\alpha}}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则容易验证  $f(x)$  满足假设条件, 但  $f(x) \not\equiv 0$ .

..... (20分)



得分	
评阅人	

五、(本题10分) 设  $(R, +, \cdot)$  为含  $1 \neq 0$  的结合环,  
 $a, b \in R$ . 若  $a + b = ba$ , 且关于  $x$  的方程

$$\begin{cases} x^2 - (ax^2 + x^2a) + ax^2a = 1 \\ x + a - (ax + xa) + axa = 1 \end{cases}$$

在  $R$  中有解. 证明:  $ab = ba$ .

证明: 1) 首先注意到

$$\begin{cases} x^2 - (ax^2 + x^2a) + ax^2a = 1 \\ x + a - (ax + xa) + axa = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)x^2(1-a) = 1 \\ (1-a)x(1-a) = 1-a \end{cases}$$

结果有:

$$(1-a)x = (1-a)x\{(1-a)x^2(1-a)\} = (1-a)x(1-a)x^2(1-a) = (1-a)x^2(1-a) = 1$$

$$x(1-a) = (1-a)x^2(1-a)x(1-a) = (1-a)x^2 \cdot (1-a)x(1-a) = (1-a)x^2(1-a) = 1.$$

因此有  $1-a$  可逆且  $(1-a)^{-1} = x$ . (5分)

2) 现在考虑  $(1-b)(1-a)$ , 则有

$$(1-b)(1-a) = 1-a-b+ba = 1, \text{ 结合前面所证 } 1-a \text{ 可逆, 因此得 } (1-a)^{-1} = 1-b.$$

进而有

$$1 = (1-a)(1-b) = 1-a-b+ab = 1-ba+ab$$

亦即  $ab = ba$ . 证毕. (10分)



专业: \_\_\_\_\_

考生座位号: \_\_\_\_\_

所在院校: \_\_\_\_\_

准考证号: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_

得分	
评阅人	

六、(本题10分) 设  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  可测, 则  $G = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}\}$  是2-维Lebesgue零测集.

证明 固定  $k \geq 1$ , 记  $A_k = [-k, k]$ ,  $G_k = \{(x, f(x)); x \in A_k, f(x) \in A_k\}$ .

$$\text{令 } E_{n,k,i} = \left\{ x \in [-k, k]; f(x) \in \left[ \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] \right\}.$$

因为  $f$  可测, 所以  $E_{n,k,i}$  可测, 且  $\sum_{i=-nk}^{nk-1} m(E_{n,k,i}) \leq 2k$ . [4分]

又

$$\{(x, f(x)); x \in E_{n,k,i}\} \subset E_{n,k,i} \times \left[ \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right].$$

$m\{(x, f(x)); x \in E_{n,k,i}\} \leq \frac{1}{n}mE_{n,k,i}$ , 其中  $m$  为 Lebesgue 外测度. [6分]

$$\bigcup_{i=-nk}^{nk-1} \{(x, f(x)); x \in E_{n,k,i}\} = \{(x, f(x)); x \in A_k, f(x) \in A_k\} = G_k.$$

$$mG_k \leq \sum_{i=-nk}^{nk-1} m\{(x, f(x)); x \in E_{n,k,i}\} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=-nk}^{nk-1} mE_{n,k,i} \leq \frac{2k}{n}.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 得  $mG_k = 0, \forall k \geq 1$ . 又  $G = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} G_k$ , 故  $mG = 0$ , 所以  $G$  可测, 且  $L_2(G) = 0$ .

[10分]



得分	
评阅人	

七、(本题10分) 在空间直角坐标系中设椭圆抛物面  $S$  的方程为

$$\gamma(u, v) = (u, v, u^2 + \frac{1}{2}v^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) 求  $S$  的所有脐点;

(ii) 设  $\sigma$  为与脐点处切平面平行的平面, 它截  $S$  于曲线  $C$ , 证明  $C$  是一个圆周.

解:

$$\gamma_u = (1, 0, 2u), \gamma_v = (0, 1, v);$$

$$n = \frac{\gamma_u \times \gamma_v}{|\gamma_u \times \gamma_v|} = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+v^2}}(-2u, -v, 1).$$

$$\gamma_{uu} = (0, 0, 2), \gamma_{uv} = 0, \gamma_{vv} = (0, 0, 1).$$

于是曲面的第一基本型  $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  和第二基本型  $II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$  为

$$E = 1 + 4u^2, F = 2uv, G = 1 + v^2;$$

$$L = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+v^2}}, M = 0, N = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+v^2}}.$$

曲面上点  $\gamma(u, v)$  为脐点, 当且仅当存在  $\lambda$  使得

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

因为  $\lambda \neq 0$ , 得到  $F = 0$ , 即  $u = 0$  或  $v = 0$ . 再由

$$\frac{L}{E} = \frac{N}{G}, \frac{2}{1+4u^2} = \frac{1}{1+v^2},$$

得到  $u = \pm \frac{1}{2}$  和  $v = 0$ . 求得曲面脐点为

$$p_{\pm} = (\pm \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}).$$

(5分)

在脐点  $p_+ = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$  处, 切平面的单位法向量  $n = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$ . 则与脐点  $p_+$  处的切平面平行的平面  $\sigma$  方程可设为  $-x + z = a$ , 其中  $a$  为常数. 记  $\sigma$  与  $S$  的截曲线  $C$  的参数方程为  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . 则有

$$z(t) = x(t) + a, z(t) = x(t)^2 + \frac{1}{2}y(t)^2.$$



姓名:\_\_\_\_\_ 准考证号:\_\_\_\_\_ 所在院校:\_\_\_\_\_ 考生座位号:\_\_\_\_\_ 专业:\_\_\_\_\_

令  $q = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} + a)$  为平面  $\sigma$  上一点, 则有

$$\begin{aligned} |\gamma(t) - q|^2 &= (x(t) - \frac{1}{2})^2 + y(t)^2 + (z(t) - \frac{1}{2} - a)^2 \\ &= 2(x(t) - \frac{1}{2})^2 + y(t)^2 = 2x(t)^2 + y(t)^2 - 2x(t) + \frac{1}{2} = 2a + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

于是  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  是一个平面  $\sigma$  上圆心在  $q$  点的圆周. 对脐点

$p_- = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$  可以同样证明.

(10分)



得分	
评阅人	

八、(本题10分) 设 $\delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 是区间 $[a, b]$ 的一个剖分。用 $S[a, b]$ 表示满足下列条件的分片实系数多项式全体构成的集合：对任意 $s(x) \in S[a, b]$ ,

1.  $s(x)|_{[x_i, x_{i+1}]}$ 是三次多项式,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .
2.  $s(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上二阶连续可导。

证明：

- (1) 对区间 $[a, b]$ 的任意实函数 $f(x)$ , 存在唯一的 $s(x) \in S[a, b]$ 满足:  $s(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $s''(a) = s''(b) = 0$ .
- (2) 设 $f(x) \in C^2[a, b]$ , 则对满足(1)的函数 $s(x)$ 有

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \leq \int_a^b (f''(x))^2 dx.$$

且等号成立当且仅当 $s(x) = f(x)$ .

解：

1. 记 $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $s_i(x) = s(x)|_{[x_i, x_{i+1}]}$ , 则 $s_i(x)$ 是一个三次多项式,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ . 记 $M_i = s''(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , 则  $s''_i(x) = \frac{x_{i+1}-x}{h_i} M_i + \frac{x-x_i}{h_i} M_{i+1}$ . 于是

$$s_i(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} M_{i+1} + \frac{(x-x_i)^3}{6h_i} M_i + A_i(x-x_i) + B_i,$$

其中 $A_i, B_i$ 为常数. 由 $s_i(x_i) = f(x_i)$ ,  $s_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ 可得

$$A_i = f(x_i) - M_i \frac{h_i^2}{6}, \quad B_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i).$$

再由 $s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$ 可得

$$\frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3} M_i + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}} = -\frac{h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i}$$

化简得

$$\lambda_i M_{i-1} + 2M_i + \mu_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (1)$$

其中

$$\lambda_i = h_{i-1}/(h_{i-1}+h_i), \mu_i = 1-\lambda_i, d_i = \frac{6}{h_{i-1}+h_i} \left( \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}} \right).$$



专业:

考生座位号:

所在院校:

准考证号:

姓名:

答题时不要超过此线

再由  $M_0 = M_n = 0$ , 得到关于  $M_i$  的线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

上述线性方程组的系数矩阵主对角占优, 因而可逆, 因此该线性方程组有唯一解,  
即满足条件的  $s(x)$  存在唯一。 [5分]

说明: 也可建立关于  $m_i = s'(x_i)$  的线性方程组, 并证明解存在唯一。

2. 令  $g(x) = f(x) - s(x)$ , 则  $f(x) = g(x) + s(x)$ , 且  $g(x_i) = 0, i = 0, 1, \dots, n$ . 于是

$$\int_a^b (f''(x))^2 dx = \int_a^b g''(x)^2 dx + 2 \int_a^b g''(x)s''(x)dx + \int_a^b s''(x)^2 dx.$$

下证:  $\int_a^b g''(x)s''(x)dx = 0$ , 从而  $\int_a^b (f''(x))^2 dx \geq \int_a^b s''(x)^2 dx$ .

实际上,

$$\begin{aligned} \int_a^b g''(x)s''(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s''(x)dg'(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} s''(x)g'(x)|_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(x)s'''(x)dx \\ &= s''(x)g'(x)|_a^b - \sum_{i=0}^{n-1} c_i(g(x_{i+1}) - g(x_i)) = 0. \end{aligned}$$

其中  $c_i = s'''(x)$  是一个常数. 由于  $s''(a) = s''(b) = 0$ , 上式最后一式中第一项为零;  
由  $g(x_i) = 0, i = 0, 1, \dots, n$ , 上式最后一式第二项也为零。

等号成立  $\Leftrightarrow g''(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = s(x)$ .

[10分]



得分	
评阅人	

九、(本题10分) 设 $z_0$ 是复函数 $w = f(z)$ 的n阶极点. 试证明:一定存在 $\rho > 0$ 及 $R > 0$ , 使得对任意 $w \in \{w \in \mathbb{C} : |w| > R\}$ , 函数 $f(z) - w$ 在 $|z - z_0| < \rho$ 中必有n个零点.

证明: 由条件可设 $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}$ , 其中 $\varphi(z)$ 在 $z_0$ 的邻域内解析, 且 $\varphi(z_0) \neq 0$ .

从而存在 $\rho > 0$ ,  $\varphi(z)$ 在 $|z - z_0| \leq \rho$ 内解析, 且 $\varphi(z) \neq 0$ . [3分]

$$\text{设 } R = \max_{|z-z_0|=\rho} \left| \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n} \right|, \text{ 显然 } R > 0.$$

对任意  $w \in \{w \in \mathbb{C} : |w| > R\}$ , 当 $|z - z_0| = \rho$ ,

$$\left| \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n} \right| \leq R < |w|,$$

即 $|\varphi(z)| < |w(z - z_0)^n|$ ,

由Rouche定理知 $n = N(w(z - z_0)^n) = N(\varphi(z) - w(z - z_0)^n)$ . [8分]

所以 $F(z) = \varphi(z) - w(z - z_0)^n$ 在 $|z - z_0| < \rho$ 内有n个零点 $z_k (k = 1, 2, \dots, n)$ . 显然 $z_k \neq z_0$ , 否则 $\varphi(z_0) = F(z_0) = 0$ 矛盾.

从而 $F(z_k) = \varphi(z_k) - w(z_k - z_0)^n = 0$ , 所以

$$\frac{\varphi(z_k)}{(z_k - z_0)^n} - w = 0,$$

即 $f(z) - w$ 在 $|z - z_0| < \rho$ 中必有n个零点 $z_k$ .

[10分]



考生座位号:

所在院校:

准考证号:

姓名:

得分	
评阅人	

十、(本题10分) 设独立随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足 $P(X_n = \pm n^\theta) = \frac{1}{2}$ , 其中 $\theta > 0$ 是常数. 记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

- (1) 当 $\theta < \frac{1}{2}$ 时, 证明 $\frac{S_n}{n}$ 依概率收敛于0, 即对任意 $\epsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \epsilon\right) = 0$ ;  
 (2) 证明 $\frac{S_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$ , 其中 $\text{Var}(S_n)$ 表示 $S_n$ 的方差,  $\xrightarrow{D}$ 表示以分布收敛.

解: 对于 $i \geq 1$ ,  $EX_i = 0$ ,  $EX_i^2 = i^{2\theta}$ . 则 $ES_n = 0$ ,  $\text{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n EX_i^2 = \sum_{i=1}^n i^{2\theta}$ .

——【2分】

注意  $\int_0^n x^{2\theta} dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_i^{i+1} x^{2\theta} dx$  以及

$$\sum_{i=1}^n i^{2\theta} - n^{2\theta} = \sum_{i=0}^{n-1} i^{2\theta} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_i^{i+1} x^{2\theta} dx \leq \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^{2\theta} = \sum_{i=1}^n i^{2\theta}$$

得到

$$\frac{1}{2\theta+1} n^{2\theta+1} \leq \text{Var}(S_n) \leq \frac{1}{2\theta+1} n^{2\theta+1} + n^{2\theta}$$

——【4分】

(1) 由于

$$P\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \epsilon\right) \leq \frac{ES_n^2}{n^2 \epsilon^2} \leq \frac{1}{\epsilon^2} \left[ \frac{1}{2\theta+1} n^{-(1-2\theta)} + n^{-2(1-\theta)} \right]$$

则当 $\theta < \frac{1}{2}$ 时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \epsilon\right) = 0$ , 即得 $\frac{S_n}{n}$ 依概率收敛于0. 【6分】

(2) 【方法一】下面验证林德贝格 (Lindeberg) 条件成立, 即对任意 $\tau > 0$ ,

当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\frac{1}{\text{Var}(S_n)} \sum_{i=1}^n EX_i^2 I(|X_i| \geq \tau \sqrt{\text{Var}(S_n)}) \rightarrow 0$$

【或 $\frac{1}{\text{Var}(S_n)} \sum_{i=1}^n \int_{|x| \geq \tau \sqrt{\text{Var}(S_n)}} x^2 dF_i(x) \rightarrow 0$ , 其中 $F_i(x) = P(X_i \leq x)$ 】.

【7分】

事实上, 由假设知, 对于 $1 \leq i \leq n$ ,  $|X_i| \leq n^\theta$ , 并且 $\frac{n^\theta}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \leq \sqrt{\frac{2\theta+1}{n}}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\theta}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} = 0$$

于是, 对较大的 $n$ 以及 $1 \leq i \leq n$ ,  $I(|X_i| \geq \tau \sqrt{\text{Var}(S_n)}) = 0$ .

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Var}(S_n)} \sum_{i=1}^n EX_i^2 I(|X_i| \geq \tau \sqrt{\text{Var}(S_n)}) = 0$ , 所以  $\frac{S_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$

——【10分】



【方法二】下面验证李雅普诺夫 (Lyapunov) 条件成立, 即当  $n \rightarrow \infty$  时

$$\frac{1}{(\text{Var}(S_n))^2} \sum_{i=1}^n EX_i^4 \rightarrow 0$$

——【7分】

事实上,

$$\sum_{i=1}^n EX_i^4 = \sum_{i=1}^n i^{4\theta} = \sum_{i=0}^{n-1} i^{4\theta} + n^{4\theta} \leq \int_0^n x^{4\theta} dx + n^{4\theta} = \frac{1}{4\theta+1} n^{4\theta+1} + n^{4\theta}$$

于是

$$\frac{1}{(\text{Var}(S_n))^2} \sum_{i=1}^n EX_i^4 \leq (2\theta+1)^2 \left[ \frac{1}{4\theta+1} n^{-1} + n^{-2} \right]$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\text{Var}(S_n))^2} \sum_{i=1}^n EX_i^4 = 0$ , 所以  $\frac{S_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$  ——【10分】

