

# 2015 年第七届全国大学生数学竞赛初赛

## (非数学类) 试卷

### 一、填空题 (共 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

(1) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n^2 + 1} + \frac{\sin 2 \frac{\pi}{n}}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n^2 + n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 设  $z = z(x, y)$  由方程  $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$  所决定, 其中  $F(u, v)$  具有连续偏导数, 且  $xF_u + yF_v \neq 0$ , 则 (结果要求不显含有  $F$  及其偏导数)  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 曲面  $z = x^2 + y^2 + 1$  在点  $M(1, -1, 3)$  的切平面与曲面  $z = x^2 + y^2$  所围区域的体积为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 函数  $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-5, 0), \\ 0, & x \in [0, 5) \end{cases}$  在  $(-5, 5]$  的傅里叶级数  $x = 0$  收敛的值  $\underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设区间  $(0, +\infty)$  上的函数  $u(x)$  定义为  $u(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ , 则  $u(x)$  的初等函数表达式为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

**第二题: (12 分)** 设  $M$  是以三个正半轴为母线的半圆锥面, 求其方程.

**第三题: (12 分)** 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内二次可导, 且存在常数  $\alpha, \beta$ , 使得对于  $\forall x \in (a, b)$ , 有  $f'(x) = \alpha f(x) + \beta f''(x)$ , 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内无穷次可导.

**第四题: (14 分)** 求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{(n+1)!} (x-1)^n$  的收敛域与和函数.

**第五题: (16 分)** 设函数  $f$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $\int_0^1 f(x) dx = 0, \int_0^1 xf(x) dx = 1$ . 试证:

(1)  $\exists x_0 \in [0, 1]$  使得  $|f(x_0)| > 4$ ; (2)  $\exists x_1 \in [0, 1]$  使得  $|f(x_1)| = 4$ .

**第六题: (16 分)** 设  $f(x, y)$  在  $x^2 + y^2 \leq 1$  上有连续的二阶导数,  $f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \leq M$ . 若

$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , 证明:  $\left| \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\pi \sqrt{M}}{4}.$