第十届清疏竞赛班非数学类 13:

积分不等式 2

压缩区间思想：

$f\in C^2[a,b]$,满足$f(a)=f(b)$,证明：

$$\int_a^b |f'(x)|dx\le (b-a)\int_a^b |f''(x)|dx.$$

分析：对$b\ge \theta_2>\theta_1\ge a$,我们有

$$\int_a^b |f''(x)|dx\ge \int_{\theta_1}^{\theta_2}|f''(x)|dx\ge \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2}f''(x)dx\right|=|f'(\theta_2)-f'(\theta_1)|$$

证明：

由$f(a)=f(b)$,由罗尔中值定理,存在$\theta\in(a,b)$,使得$f'(\theta)=0$.

因此$\forall x\in[\theta,b]$,我们有$|f'(x)|=|f'(x)-f'(\theta)|\le \int_\theta^x |f''(t)|dt\le \int_a^b |f''(t)|dt$.

$\forall x\in[a,\theta]$,$|f'(x)|=|f'(\theta)-f'(x)|\le \int_x^\theta |f''(t)|dt\le \int_a^b |f''(t)|dt$.

所以我们就得到$|f'(x)|\le \int_a^b |f''(t)|dt$,两边积分就有

$$\int_a^b |f'(x)|dx\le (b-a)\int_a^b |f''(x)|dx.$$

(需要记住,以后如果不直接考证明就直接使用)哈达玛不等式

$f(x)$是$[a,b]$上的下凸函数,则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

证明:

一方面:

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{记忆公式,其实就是换元}x=a+b-y}{=} \int_a^b f(b+a-x)dx$$

此时$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b \left[f(x)+f(b+a-x)\right]dx$

$$\geq \int_a^b f\left(\frac{x+b+a-x}{2}\right)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

另外一方面(积累区间可以转化成$[0,1]$想法):

$x=x(t), a=x(0), b=x(1)$, 所以取$x=\frac{b-a}{1-0}t+a$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f\left(a+(b-a)t\right)dt$$

$$=\int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)dt \leq \int_0^1 (1-t)f(a)+tf(b)dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

因此我们完成了证明.

$S=\left\{f\in C^1[0,1]:f(0)=0,f(1)=1\right\}$, 计算

$\inf\limits_{f\in S}\int_0^1\left|f'(x)-f(x)\right|dx$

$($蒲和平的有误$)$提示逼近取等条件：

$$f_a(x)=\begin{cases}\dfrac{(a-1)x^2-(a^2-2a)x}{a^2}e^{a-1},0\le x<a\\ e^{x-1},a\le x\le 1\end{cases}.$$

分析：

$f'(x)-f(x)=0\Rightarrow f(x)=Ce^x$,

构造函数$C(x)=\dfrac{f(x)}{e^x},C(1)=\dfrac{1}{e},C(0)=0$

证明：

$C'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$, 所以

$$\int_0^1\left|f'(x)-f(x)\right|dx=\int_0^1 e^x\left|C'(x)\right|dx\ge\int_0^1 C'(x)dx=C(1)-C(0)=\frac{1}{e}.$$

蒲和平构造的取等条件在$x=a$导函数不连续,

读者可以计算$x=a$左右导数极限, 所以为了把蒲和平的答案纠正,

使得可以多一个条件去让$x=a$左右导数极限相等,

因此把构造函数里面原本的1次部分设为2次，因此可取

$$f_a(x)=\begin{cases}\dfrac{(a-1)x^2-(a^2-2a)x}{a^2}e^{a-1},0\le x<a\\ e^{x-1},a\le x\le 1\end{cases}.$$

读者可以计算发现$f_a'(x)-f_a(x)$不变号且

$$\lim_{a\to0^+}\int_0^1\left|f_a'(x)-f_a(x)\right|dx=\frac{1}{e}.$$

上述构造的思想：

为了可取等, 我们应该让$e^x\ge e^0$, 所以x集中到0, 因此

我们需要对很多x, $C'(x)=0$, Ce^x是最好的原则, 但还要

初值条件, $Ce^1=1$，所以e^{x-1}是最好的选择, 但是$e^{0-1}\ne 0$

所以扰动长度a, 让$a\to0^+$, 因此构造出了f_a.

$f \in C^1[0,1], f'(x) < 1$, 证明: $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) > -\frac{1}{2} + n\int_0^1 f(x)dx.$

分析：这是数学类真题,也可以直接积分和式单调时候的转化方法放缩.

证明：

运用$E-M$公式,我们有

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \int_0^n f\left(\frac{x}{n}\right)dx + \frac{1}{n}\int_0^n b_1(x) f'\left(\frac{x}{n}\right)dx,$$

其中$b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \le b_1(x) \le \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\int_0^1 b_1(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^n b_1(x)dx = \int_0^1 b_1(x)dx = 0.$$

因此$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{f(0)+f(1)}{2} + n\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 b_1(nx) f'(x)dx$

$$= \frac{f(0)+f(1)}{2} + n\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 b_1(nx)\left[f'(x)-1\right]dx + \int_0^1 b_1(nx)dx$$

$$> \frac{f(0)+f(1)}{2} + n\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 \frac{f'(x)-1}{2}dx$$

$$= f(1) + n\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2}$$

因此就有$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) > -\frac{1}{2} + n\int_0^1 f(x)dx$

δ函数的思想：

设$f\in C^2[a,b], f(a)=f(b)=0$, 证明：

$$|f(x)|\le\frac{(x-a)(b-x)}{b-a}\int_a^b|f''(y)|dy.$$

分析：建立插值法的积分余项.

$$f(x)-\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)=\int_a^b f''(y)K(x,y)dy$$

期望$\int_a^b f''(y)K(x,y)dy=\int_a^b f(y)\frac{d^2}{dy^2}K(x,y)dy$,

这需要零边界条件,

所以$f-$插值部分具有零边界条件且不影响$\int_a^b f''(y)K(x,y)dy$.

因此不妨设$f(a)=f(b)=0$.

为了$f(x)=\int_a^b f(y)\frac{d^2}{dy^2}K(x,y)dy$,我们期望一个广义函数$\delta_x$, 使得

形式上的$\delta_x(f)=\int_a^b f(y)\delta_x(y)dy=f(x)$.

期望$\frac{d^2}{dy^2}K(x,y)=\delta_x(y)$.

注意到

$$\int_x^b -f'(y)dy=f(x)=-\int_a^b H(y)f'(y)dy=\int_a^b H'(y)f(y)dy$$

即$H(y)=\begin{cases}1+C_1, y\in[x,b]\\ C_1, y\in[a,x]\end{cases}$,即$H'(y)=\delta_x(y)$(广义导数意义下)

$K(x,y)=\begin{cases}y+C_1y+C_2, y\in[x,b]\\ C_1y+C_2, y\in[a,x]\end{cases}$,注意还需要$K$有零边界条件且连续

$K(x,y)=\begin{cases}(k+1)(y-b), y\in[x,b]\\ k(y-a), y\in[a,x]\end{cases}$,$k(x-a)=(k+1)(x-b)\Rightarrow k=\frac{x-b}{b-a}$

因此就得到了

$$K(x,y)=\begin{cases}\frac{x-a}{b-a}(y-b), b\ge y\ge x\\ \frac{b-x}{b-a}(a-y), x\ge y\ge a\end{cases}.$$

证明：

$$令K(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}(y-b),b\geq y\geq x\\ \dfrac{b-x}{b-a}(a-y),x\geq y\geq a\end{cases},那么有$$

拉格朗日插值的积分余项表达式:

$$f(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)+\int_a^b f''(y)K(x,y)dy$$

$$|f(x)|\leq\left|\int_a^b f''(y)K(x,y)dy\right|\leq\max_{y\in[a,b]}|K(x,y)|\int_a^b|f''(y)|dy$$

$$=\frac{(x-a)(b-x)}{b-a}\int_a^b|f''(y)|dy.$$

证毕.

推论(经典习题)：$f(a)=f(b)=0$,则

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\leq\frac{b-a}{4}\int_a^b|f''(y)|dy$$

$f(x)\geq 0$,且在$\mathbb{R}$上可积,并且满足$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx=1, \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx=0$,

证明:$\int_{-\infty}^{u} f(x)dx\leq \frac{1}{1+u^2}, \forall u\leq 0.$

证明:

$\forall C>0$,运用$\int_{-\infty}^{u} f(x)dx=\int_{x\leq u} f(x)dx=\int_{x-C\leq u-C} f(x)dx$

$\leq \int_{|x-C|\geq|u-C|} f(x)dx=\int_{|x-C|\geq|u-C|} \frac{|x-C|^2}{|x-C|^2} f(x)dx$

$\leq \int_{|x-C|\geq|u-C|} \frac{|x-C|^2}{|u-C|^2} f(x)dx=\frac{1}{|u-C|^2}\int_{|x-C|\geq|u-C|}(x-C)^2 f(x)dx$

$\leq \frac{1}{|u-C|^2}\int_{\mathbb{R}}(x-C)^2 f(x)dx=\frac{1+C^2}{|u-C|^2}=\frac{1+C^2}{\left||u|+C\right|^2}=g(C)$

$g'(C)=\frac{2(C|u|-1)}{\left||u|+C\right|^3}, g(C)\geq g\left(\frac{1}{|u|}\right)=\frac{1}{u^2+1}.$

因此一开始如果取$C=\frac{1}{|u|}(u\neq 0)$,

那么我们就得到这个方法最小的上界为$\frac{1}{u^2+1}$.

因此$\int_{-\infty}^{u} f(x)dx\leq \frac{1}{1+u^2}, \forall u\leq 0.$

类似的方法可以证明$\int_{-\infty}^{u} f(x)dx\geq \frac{u^2}{1+u^2}, \forall u>0.$

给定$[0,+\infty)$上的递减函数$f(x)$，若$\int_0^{\infty} x^3 f(x)dx$收敛, 证明

$$\left(\int_0^{\infty} x^2 f(x)dx\right)^2 \le \frac{8}{9}\int_0^{\infty} xf(x)dx\int_0^{\infty} x^3 f(x)dx.$$

证明：

经典方法部分：

若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\in\mathbb{R}\bigcup\{+\infty,-\infty\}-\{0\}$

那么不妨设$A>0$,那么存在$X>0$,使得$f(x)\ge\dfrac{A}{2},\forall x\ge X$,

所以$\int_X^{\infty} x^3 f(x)dx \ge \int_X^{\infty} x^3\dfrac{A}{2}dx=+\infty$,因此矛盾！

所以$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,结合$f$递减，于是我们有$f(x)\ge 0,\forall x\ge 0.$

本题证明部分：

方法1:

如果$f\in C^1$,于是

$$\left(\int_0^{\infty} x^2 f(x)dx\right)^2 \le \frac{8}{9}\int_0^{\infty} xf(x)dx\int_0^{\infty} x^3 f(x)dx.$$

$$\left(\int_0^{\infty} x^2 f(x)dx\right)^2=\frac{1}{9}\left(\int_0^{\infty} f(x)dx^3\right)^2=\left(x^3 f(x)|_0^{\infty}-\int_0^{\infty} x^3 f'(x)dx\right)^2$$

$$\int_0^{\infty} xf(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} f(x)dx^2\right)=\frac{1}{2}\left(x^2 f(x)|_0^{\infty}-\int_0^{\infty} x^2 f'(x)dx\right)$$

$$\int_0^{\infty} x^3 f(x)dx=\frac{1}{4}\left(\int_0^{\infty} f(x)dx^4\right)=\frac{1}{4}\left(x^4 f(x)|_0^{\infty}-\int_0^{\infty} x^4 f'(x)dx\right)$$

我们证明$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n f(x)=0,n=2,3,4$

实际上只需要$\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 f(x)=0$,

这里涉及一个重要的技巧我们放到后面.

$\int_0^{\infty} x^3 f(x)dx$收敛,证明

因此只需证明$\dfrac{1}{9}\left(\int_0^{\infty} x^3 f'(x)dx\right)^2\le\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\left(\int_0^{\infty} x^4 f'(x)dx\right)\left(\int_0^{\infty} x^2 f'(x)dx\right)$

这等价于$\left(\int_0^{\infty} x^3 f'(x)dx\right)^2\le\left(\int_0^{\infty} x^4\left[-f'(x)\right]dx\right)\left(\int_0^{\infty} x^2\left[-f'(x)\right]dx\right)$

由$Cauchy$不等式这是显然的.

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 f\left(x\right)=0.$

由$Cauchy$积分收敛准则，$\lim\limits_{A\to\infty}\int_{\frac{A}{2}}^{A} x^3 f\left(x\right)dx=0$

那么$\int_{\frac{A}{2}}^{A} x^3 f\left(x\right)dx \geq \int_{\frac{A}{2}}^{A} x^3 f\left(A\right)dx=\dfrac{7A^4}{64} f\left(A\right)$

因此$\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{7A^4}{64} f\left(A\right)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 f\left(x\right)=0.$