全国大学生数学竞赛决赛模拟试题

（非数学专业类）

一、填空题（本题30分，每小题6分）

（1）极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-3\sin x}{x^3(\cos 3x-3\cos x)}=$_________.

（2）设n是椭球面$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{6}=1$上点$P(1,1,1)$处的指向外侧的法向量，则函数$f(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{5x^2+9y^2}}{z^2}$在点$P$处沿方向$n$的方向导数为_________.

（3）设$y=(x+1)\sin^2 x$和$y=(x-1)\sin^2 x$都是微分方程$y'+a(x)y=b(x)$的解，则函数$b(x)=$_________.

（4）设圆形薄片分布在区域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$上，薄片在任意点$(x,y)$处的面密度为$\rho(x,y)=\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{7}$，则薄片的质量$M=$_________.

（5）设A为三阶可逆实对称矩阵，A^*为A的伴随矩阵，二次型$f(x)=x^TAx$在正交变换下的标准形为$f=3y_1^2+y_2^2-2y_3^2$，则行列式$|A^{-1}+3A^*|=$_________.

二、（本题10分）设曲线C的方程可表示为$\begin{cases}x=t^3+3t-2\\ y=-t^3+3t+1\end{cases}$ $(t\ge 0)$. 求：

（1）$\dfrac{d^2x}{dy^2}$；

（2）曲线C上点$(2,3)$处的曲率.

三、（本题12分）求积分：$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x-\frac{1}{4x}}}{x\sqrt{x}}dx$.

四、（本题12分）设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^x$ 是微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的一个特解.

（1）求常数 a,b,c 的值；

（2）根据（1）的结果，求方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的通解.

五、（本题12分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\frac{n!}{2^n+(-1)^n}(x+1)^n$ 的收敛区间.

六、（本题12分） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，满足 $f(0)f(1)>0$，且存在常数 $\lambda>0$，使得 $\lambda f(0)+\int_0^1 f(x)dx=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f(\xi)=(\xi^2-2\xi)f'(\xi)+(\xi^2-2\xi+1)f''(\xi).$$

七、（本题12分） 设 A,B 均为 n 阶幂等的实对称矩阵，且 $C=A-B$ 为半正定矩阵，矩阵的秩 $R(A)<n$. 证明：$AB=BA$，且 C 为幂等矩阵（注：称满足 $P^2=P$ 的方阵 P 为幂等矩阵）.

注：模拟试题答案解析请参考全国大学生数学竞赛命题组编、科学出版社出版的《全国大学生数学竞赛真题解析与获奖名单（第11−15届）》。