2010 年第二届全国大学生数学竞赛初赛

(数学类) 试卷

一、(本题共 10 分) 设$\varepsilon \in (0,1)$，$x_0 = a$，$x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$（$n = 0,1,2\cdots$). 证明$\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$存在，且$\xi$为方程$x - \varepsilon \sin x = a$的唯一根.

二、(本题共 15 分) 设$B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证明$X^2 = B$无解，这里$X$为三阶未知复方阵.

三、(本题共 10 分) 设$D \subset \mathbb{R}^2$是凸区域，函数$f(x,y)$是凸函数. 证明或否定：$f(x,y)$在D上连续.

注： 函数$f(x,y)$为凸函数的定义是$\forall \alpha \in (0,1)$以及$(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D$，成立

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \le \alpha f(x_1,y_1) + (1-\alpha) f(x_2,y_2).$$

四、(本题共 10 分) 设$f(x)$在$[0,1]$上黎曼(Riemann)可积，在$x=1$可导，$f(1)=0$, $f'(1)=a$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = -a$.

五、(本题共 15 分) 已知二次曲面$\sum$（非退化）过以下九点：

$$A(1,0,0), B(1,1,2), C(1,-1,-2), D(3,0,0), E(3,1,2),$$

$$F(3,-2,-4), G(0,1,4), H(3,-1,-2), I(5,2\sqrt{2},8).$$

问$\sum$是哪一类曲面?

六、(本题共 20 分) 设A为$n \times n$实矩阵（未必对称），对任一n维实向量$\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha A \alpha^{\mathrm{T}} \ge 0$（这里$\alpha^{\mathrm{T}}$表示$\alpha$的转置），且存在$n$维实向量$\beta$使得$\beta A \beta^{\mathrm{T}} = 0$. 同时对任意$n$维实向量$x$和$y$，当$xAy^{\mathrm{T}} \ne 0$时有$xAy^{\mathrm{T}} + yAx^{\mathrm{T}} \ne 0$. 证明：对任意$n$维实向量$v$，都有$vA\beta^{\mathrm{T}} = 0$.

七、(本题共 10 分) 设f在区间$[0,1]$上黎曼(Riemann)可积，$0 \le f \le 1$. 求证：对任何$\varepsilon > 0$，存在只取值为 0 和 1 的分段（段数有限）常值函数$g(x)$，使得$\forall [\alpha,\beta] \subseteq [0,1]$，

$$\left| \int_\alpha^\beta \big(f(x) - g(x)\big) dx \right| < \varepsilon.$$

八、(10 分) 已知$\varphi : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$是一个严格单调下降的连续函数，满足$\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = +\infty$, 且$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \varphi^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = a < +\infty$, 其中$\varphi^{-1}$表示$\varphi$的反函数. 求证：$\int_0^{+\infty} \left[\varphi(t)\right]^2 \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \left[\varphi^{-1}(t)\right]^2 \mathrm{d}t \ge \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}}$.