2021 年 04 月决赛试题

第十一届全国大学生数学竞赛决赛试题
参考答案及评分标准
（非数学类，2021 年 4 月 17 日）

一、填空题**(本题满分 30 分，每小题 6 分)**

1、极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})\cdots(1-\sqrt[n]{\sin x})}{(1-\sin x)^{n-1}}=$____________.

【解】

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})\cdots(1-\sqrt[n]{\sin x})}{(1-\sin x)^{n-1}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{\sin x}}{1-\sin x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{\sin x}}{1-\sin x}\cdots\frac{1-\sqrt[n]{\sin x}}{1-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{1+(\sin x-1)}}{1-\sin x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{1+(\sin x-1)}}{1-\sin x}\cdots\frac{1-\sqrt[n]{1+(\sin x-1)}}{1-\sin x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.$$

2、设函数 $y=f(x)$ 由方程 $3x-y=2\arctan(y-2x)$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $P\left(1+\dfrac{\pi}{2},3+\pi\right)$ 处的切线方程为______________.

【解】 对方程 $3x-y=2\arctan(y-2x)$ 两边求导，得 $3-y'=2\dfrac{y'-2}{1+(y-2x)^2}$. 将点 P 的坐标代入，得曲线 $y=f(x)$ 在 P 点的切线斜率为 $y'=\dfrac{5}{2}$. 因此，切线方程为 $y-(3+\pi)=\dfrac{5}{2}\left(x-1-\dfrac{\pi}{2}\right)$，即 $y=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}$.

3、设平面曲线 L 的方程为 $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$，且通过五个点 $P_1(-1,0)$、$P_2(0,-1)$、$P_3(0,1)$、$P_4(2,-1)$ 和 $P_5(2,1)$，则 L 上任意两点之间的直线距离最大值为______________.

【解】将所给点的坐标代入方程得

$$\begin{cases}A-D+F=0\\B-E+F=0\\B+E+F=0\\4A+B-2C+2D-E+F=0\\4A+B+2C+2D+E+F=0\end{cases}$$

解得曲线 L 的方程为 $x^2+3y^2-2x-3=0$，其标准型为 $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{4/3}=1$， 因此曲线 L 上两点间的最长直线距离为 4.

4、设 $f(x)=(x^2+2x-3)^n\arctan^2\dfrac{x}{3}$，其中 n 为正整数，则 $f^{(n)}(-3)=$_________.

【解】 记 $g(x)=(x-1)^n\arctan^2\dfrac{x}{3}$，则 $f(x)=(x+3)^n g(x)$.利用莱布尼兹法则，可得

$$f^{(n)}(x)=n!g(x)+\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\left[(x+3)^n\right]^{(k)}g^{(n-k)}(x),$$

所以 $f^{(n)}(-3)=n!g(-3)=(-1)^n4^{n-2}n!\pi^2$.

5、设函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， $f(0)=f(1)=0$，且满足

$$\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x-8\int_0^1f(x)\mathrm{d}x+\frac{4}{3}=0,$$

则 $f(x)=$____________.

【解】因为 $\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1xf'(x)\mathrm{d}x$，$\int_0^1f'(x)\mathrm{d}x=0$，且 $\int_0^1(4x^2-4x+1)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$，所以

$$\int_0^1f'^2(x)\mathrm{d}x-8\int_0^1f(x)\mathrm{d}x+\frac{4}{3}=\int_0^1\left[f'^2(x)+8xf'(x)-4f'(x)+(16x^2-16x+4)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1[f'(x)+4x-2]^2\mathrm{d}x=0,$$

因此 $f'(x)=2-4x$， $f(x)=2x-2x^2+C$.由 $f(0)=0$ 得 $C=0$.因此 $f(x)=2x-2x^2$.

二、**(12 分)** 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{1}{n+\sqrt{k}}\right)$.

【解】 记 $a_n=\sqrt{n}\left(1-\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{1}{n+\sqrt{k}}\right)$，则

$$a_n=\sqrt{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)=\sum_{k=1}^n\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}\left(n+\sqrt{k}\right)}\le\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\sqrt{k}.\quad \text{------------ 3 分}$$

因为 $\sum\limits_{k=1}^n\sqrt{k}\le\sum\limits_{k=1}^n\int_k^{k+1}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int_1^{n+1}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\left((n+1)\sqrt{n+1}-1\right)$，所以

$$a_n<\frac{2}{3}\bullet\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}.\quad \text{------------ 3 分}$$

又 $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\ge\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int_0^n\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}n\sqrt{n}$ ， 得 $a_n\ge\frac{1}{\sqrt{n}\left(n+\sqrt{n}\right)}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\ge\frac{2}{3}\bullet\frac{n}{n+\sqrt{n}}$.

于是可得

$$\frac{2}{3}\bullet\frac{n}{n+\sqrt{n}}\le a_n<\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}.$$ ------------ 3 分

利用夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$. ------------ 3 分

三、**(12 分)** 设 $F(x_1,x_2,x_3)=\int_0^{2\pi}f(x_1+x_3\cos\varphi,x_2+x_3\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数. 已知 $\frac{\partial F}{\partial x_i}=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f(x_1+x_3\cos\varphi,x_2+x_3\sin\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi$，

$$\frac{\partial^2F}{\partial x_i^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[f(x_1+x_3\cos\varphi,x_2+x_3\sin\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi,\quad i=1,2,3,$$

试求 $x_3\left(\frac{\partial^2F}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2F}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2F}{\partial x_3^2}\right)-\frac{\partial F}{\partial x_3}$ 并要求化简.

【解】 令 $u=x_1+x_3\cos\varphi,v=x_2+x_3\sin\varphi$，利用复合函数求偏导法则易知

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial u},\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{\partial f}{\partial v},\quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial u}+\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cos^2\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\sin2\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\sin^2\varphi,$$

------------ 4 分

所以 $x_3\left(\frac{\partial^2F}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2F}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2F}{\partial x_3^2}\right)$

$$=x_3\left[\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\mathrm{d}\varphi+\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\mathrm{d}\varphi-\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cos^2\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\sin2\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\right]$$

$$=x_3\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\sin^2\varphi-\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial u}\sin2\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cos^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi.$$ ------------ 2 分

又由于 $\frac{\partial F}{\partial x_3}=\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial u}+\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial v}\right)\mathrm{d}\varphi$，利用分部积分，可得

$$\frac{\partial F}{\partial x_3}=-\int_0^{2\pi}\sin\varphi\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi+\int_0^{2\pi}\cos\varphi\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$=x_3\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\sin2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)\mathrm{d}\varphi-x_3\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$=x_3\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\sin^2\varphi-\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\sin2\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cos^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$$

------------ 4 分

所以 $x_3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}\right)-\frac{\partial F}{\partial x_3}=0$. ------------ 2 分

四、(10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上具有连续导数，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$，$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$. 证明：存在 $\xi\in(0,\ 1)$，使得 $f'(\xi)=3$.

【解】 考虑积分 $\int_0^1 x(1-x)[3-f'(x)]\mathrm{d}x$， ------------ 4 分

利用分部积分及题设条件，得

$$\int_0^1 x(1-x)[3-f'(x)]\mathrm{d}x = x(1-x)[3x-f(x)]\Big|_0^1-\int_0^1(1-2x)[3x-f(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 3x(2x-1)\mathrm{d}x+\int_0^1(1-2x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\left(2x^3-\frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$$

$$=2-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-3=0.$$ ------------ 4 分

根据积分中值定理，存在 $\xi\in(0,\ 1)$，使得 $\xi(1-\xi)[3-f'(\xi)]=0$，即 $f'(\xi)=3$.

------------ 2 分

五、**(12 分)** 设 $B_1,B_2,\cdots,B_{2021}$ 为空间 R^3 中半径不为零的 2021 个球， $A=(a_{ij})$ 为 2021 阶方阵，其 $(i,\ j)$ 元 a_{ij} 为球 B_i 与 B_j 相交部分的体积. 证明：行列式 $|E+A|>1$，其中 E 为单位矩阵.

【证】 记 Ω 为以原点 O 为球心且包含 $B_1,B_2,\cdots,B_{2021}$ 在内的球，考察二次型 $f=\sum_{i=1}^{2021}\sum_{j=1}^{2021}a_{ij}z_iz_j$， 注意到 $a_{ij}=\iiint_{\Omega}\chi_i(t,u,v)\chi_j(t,u,v)\mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}v$， 其中 $\chi_i(t,u,v)$ 的定义为 $\chi_i(t,u,v)=\begin{cases}1, & (t,u,v)\in B_i\\ 0, & (t,u,v)\in\Omega\setminus B_i\end{cases}$， 于是有

$$f=\sum_{i=1}^{2021}\sum_{j=1}^{2021}a_{ij}z_iz_j=\sum_{i=1}^{2021}\sum_{j=1}^{2021}\iiint_{\Omega}[\chi_i(t,u,v)z_i][\chi_j(t,u,v)z_j]\mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\iiint_{\Omega}\sum_{i=1}^{2021}[\chi_i(t,u,v)z_i]^2\mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}v\geq 0.$$ ------------ 6 分

另一方面，存在正交变换 $Z=PY$ 使得 f 化为 $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_{2021}y_{2021}^2$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{2021}$ 为 A 的全部特征值．因为二次型 $f\ge 0$，所以 A 的特征值 $\lambda_i\ge 0,(i=1,2,\cdots 2021)$．于是

$$|E+A|=\left|P^{-1}(E+A)P\right|=(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_{2021})\ge 1.$$

注意到 A 不是零矩阵，所以至少有一个特征值 $\lambda_i>0$，故 $|E+A|>1$．

------------ 6 分

六、**(12 分)**　设 Ω 是由光滑的简单封闭曲面 Σ 围成的有界闭区域，函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上具有连续二阶偏导数，且 $f(x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in\Sigma}=0$．记 ∇f 为 $f(x,y,z)$ 的梯度，并令 $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$．证明：对任意常数 $C>0$，恒有

$$C\iiint\limits_{\Omega} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{C}\iiint\limits_{\Omega}(\Delta f)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ge 2\iiint\limits_{\Omega}|\nabla f|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【证】　首先利用 Gauss 公式，可得

$$\iint\limits_{\Sigma} f\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+f\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+f\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(f\Delta f+|\nabla f|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$ ---------- 4 分

其中 Σ 取外侧．因为 $f(x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in\Sigma}=0$，所以上式左端等于零．利用 Cauchy 不等式，得

$$\iiint\limits_{\Omega}|\nabla f|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iiint\limits_{\Omega}(f\Delta f)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\le\left(\iiint\limits_{\Omega} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)^{1/2}\left(\iiint\limits_{\Omega}(\Delta f)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)^{1/2}.$$

------------ 4 分

故对任意常数 $C>0$，恒有(利用均值不等式)

$$C\iiint\limits_{\Omega} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{C}\iiint\limits_{\Omega}(\Delta f)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ge 2\left(\iiint\limits_{\Omega} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)^{1/2}\left(\iiint\limits_{\Omega}(\Delta f)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)^{1/2}$$

$$\ge 2\iiint\limits_{\Omega}|\nabla f|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$ ------------ 4 分

七、**(12 分)** 设$\{u_n\}$是正数列，满足$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1-\dfrac{\alpha}{n}+O(\dfrac{1}{n^\beta})$，其中常数$\alpha>0$，$\beta>1$.

(1) 对于$v_n=n^\alpha u_n$，判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$的敛散性；

(2) 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性.

[注：设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，则$a_n=O(b_n)\Leftrightarrow$存在常数$M>0$及正整数$N$，使得$|a_n|\le M|b_n|$对任意$n>N$成立.]

【解】 (1) 注意到

$$\ln\frac{v_{n+1}}{v_n}=\alpha\ln(1+\frac{1}{n})+\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{\alpha}{n}+O(\frac{1}{n^2})\right)+\left(-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{n^2}+O(\frac{1}{n^\beta})\right)=O(\frac{1}{n^\gamma}),$$

其中$\gamma=\min\{2,\beta\}>1$，故存在常数$C>0$及正整数N使得$\left|\ln\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right|\le C\left|\dfrac{1}{n^\gamma}\right|$对任意$n>N$成立，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$收敛.

------------ 6分

(2) 因为$\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\dfrac{v_{k+1}}{v_k}=\ln v_{n+1}-\ln v_1$，所以由(1)的结论可知，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\ln v_n$存在，令$\lim\limits_{n\to\infty}\ln v_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=e^a>0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{1/n^\alpha}=e^a>0$.

根据正项级数的比较判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$当$\alpha>1$时收敛，$\alpha\le1$时发散.

------------ 6分