2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛
（非数学专业）试卷

一、填空题（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

(1) 微分方程 $y''-(y')^3=0$ 的通解是__________.

(2) 设 $D:1\le x^2+y^2\le 4$, 则 $I=\iint_D\left(x+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2-4\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的值是______.

(3) 设 $f\left(t\right)$ 二阶连续可导，且 $f\left(t\right)\neq 0$，若 $\begin{cases}x=\int_0^t f\left(s\right)\mathrm{d}s,\\ y=f\left(t\right),\end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$_______.

(4) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的特征值，$f\left(x\right)$ 为多项式，则矩阵 $f\left(A\right)$ 的行列式的值为__________.

(5) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sin(\pi n!e)\right]$ 的值为________

二、（本题满分 14 分） 设 $f\left(u,v\right)$ 在全平面上有连续的偏导数，证明：曲面 $f\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 的所有切平面都交于点 $\left(a,b,c\right)$.

三、（本题满分 14 分） 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，证明：

$$2\int_a^b f\left(x\right)\left(\int_x^b f\left(t\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\left(\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2.$$

四、（本题满分 14 分） 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times p$ 矩阵，C 是 $p\times q$ 矩阵.
证明：$R\left(AB\right)+R\left(BC\right)-R(B)\le R\left(ABC\right)$，其中 $R\left(X\right)$ 表示矩阵 X 的秩.

五（本题满分 14 分） 设 $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，其中 n 为正整数.

(1) 若 $n\ge 2$, 计算 I_n+I_{n-2};

(2) 设 p 为实数，讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

六、（本题 14 分） 设 $P\left(x,y,z\right)$ 和 $R\left(x,y,z\right)$ 在空间上有连续偏导数，设上半球面

$$S:z=z_0+\sqrt{r^2-\left(x-x_0\right)^2-\left(y-y_0\right)^2}\text{，方向向上，}$$

若对任何点 $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 和 $r>0$，第二型曲面积分 $\displaystyle\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$ 证明：

$$\frac{\partial P}{\partial x}\equiv 0.$$