第十二届全国大学生数学竞赛初赛试卷

(数学类 A 卷, 2020 年 11 月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

专业:　座位号:　考场号:　所在院校:　准考证号:　姓名:

密封线　答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 设 $N(0,0,1)$ 是球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 的北极点. $A(a_1,a_2,0), B(b_1,b_2,0), C(c_1,c_2,0)$ 为 xOy 平面上不同的三点. 设连接 N 与 A,B,C 的三直线依次交球面 S 于点 A_1,B_1 与 C_1.

(1) 求连接 N 与 A 两点的直线方程.

(2) 求点 A_1,B_1 与 C_1 的坐标.

(3) 给定点 $A(1,-1,0), B(-1,1,0), C(1,1,0)$, 求四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积.

解.

(1) 过 N,A 两点的直线方程为

$$\frac{x}{a_1}=\frac{y}{a_2}=\frac{z-1}{-1}.$$

…………………………………………………………… (3 分)

(2) 由此可得直线的参数方程

$$x=a_1t,\quad y=a_2t,\quad z=1-t,$$

代入球面方程可得

$$(a_1t)^2+(a_2t)^2+(1-t)^2=1.$$

由此解得

$$t=\frac{2}{a_1^2+a_2^2+1} \quad 或 \quad t=0.$$

从而得 A_1 的坐标为

$$(\frac{2a_1}{a_1^2+a_2^2+1},\frac{2a_2}{a_1^2+a_2^2+1},\frac{a_1^2+a_2^2-1}{a_1^2+a_2^2+1}).$$

同理可得，A_2 的坐标为

$$(\frac{2b_1}{b_1^2+b_2^2+1},\frac{2b_2}{b_1^2+b_2^2+1},\frac{b_1^2+b_2^2-1}{b_1^2+b_2^2+1}).$$

以及 A_3 的坐标为

$$(\frac{2c_1}{c_1^2+c_2^2+1},\frac{2c_2}{c_1^2+c_2^2+1},\frac{c_1^2+c_2^2-1}{c_1^2+c_2^2+1}).$$

……………………………………………………………… (9 分)

（3）当 $A(1,-1,0)$, $B(-1,1,0)$ 以及 $C(1,1,0)$ 给定时, 经计算可得

$$A_1=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}), \qquad B_1=\big(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\big), \qquad C_1=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}).$$

所以, 利用向量的混合积可以把四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积表示为

$$V=\frac{1}{6}\big|\big(\overrightarrow{NA_1},\overrightarrow{NB_1},\overrightarrow{NC_1}\big)\big|.$$

混合积 $\big(\overrightarrow{NA_1},\overrightarrow{NB_1},\overrightarrow{NC_1}\big)$ 表示成矩阵的行列式

$$\big(\overrightarrow{NA_1},\overrightarrow{NB_1},\overrightarrow{NC_1}\big)=\det\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{32}{27}.$$

于是得到

$$V=\frac{1}{6}\times\frac{32}{27}=\frac{16}{81}.$$

……………………………………………………………… (15 分)

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考场号:______ 座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020})}$.

解. 我们有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2021}}\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)\\
=\ &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(\big(\frac{1}{n}\big)^{2020}+\big(\frac{2}{n}\big)^{2020}+\cdots+\big(\frac{n}{n}\big)^{2020}\Big)\\
=\ &\int_0^1 x^{2020}\,dx=\frac{1}{2021}.
\end{aligned}
$$

或用 Stolz 公式

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2021}}\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2020}}{n^{2021}-(n-1)^{2021}}=\frac{1}{2021}.
$$

因此, $\ln\dfrac{1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}}{n^{2021}}$ 有界.

…………………………………………………………………(8 分)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020})}\\
=\ &\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2021\ln n+\ln\frac{1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}}{n^{2021}}}\\
=\ &\frac{1}{2021}.
\end{aligned}
$$

…………………………………………………………………(15 分)

得分	
评阅人	

三、（本题 15 分）设 A, B 均为 2020 阶正交矩阵, 齐次线性方程组 $Ax = Bx\,(x \in \mathbb{R}^{2020})$ 的解空间维数为 3. 问: 矩阵 A, B 是否可能相似? 证明你的结论.

解. A, B 一定不相似.

. . . . (2 分)

证明如下.

令 $C = AB^{-1}$. 由于 A, B 均为正交矩阵, 故 C 也是正交矩阵. C 视为复矩阵是酉矩阵, 故可以复对角化. 即存在复可逆矩阵 T 和复对角矩阵 D, 使得 $T^{-1}CT = D$, 其中 D 的主对角线上的元素即为 C 的复特征值.

. . . . (7 分)

齐次线性方程组 $Ax = Bx$ 的解空间维数为 3, 则 $\operatorname{rank}(A - B) = 2017$. 进而

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rank}(D - I) &= \operatorname{rank}\left(T^{-1}(C - I)T\right) = \operatorname{rank}(C - I) \\
&= \operatorname{rank}\left((A - B)B^{-1}\right) = \operatorname{rank}(A - B) = 2017.
\end{aligned}
$$

这表明对角矩阵 D 的主对角线上恰有 3 个元素是 1. 即 C 有三重特征值 1. 由于正交矩阵的实特征值为 1 或 -1, 而非实数特征值共轭成对出现, 共有偶数个. 又 C 共有 2020 个特征值 (计重数), 故 C 有特征值 -1, 且重数为奇数.

. . . . (12 分)

C 的行列式是其所有特征值 (计重数) 之积. 注意到 C 的非实数特征值共轭成对出现, 它们的乘积为正数. 故 $\det C < 0$. 特别地, $\det(AB^{-1}) = \det C \neq 1$. 即 $\det A \neq \det B$. 从而 A, B 不相似.

. . . . (15 分)

得分	
评阅人	

四、（本题 20 分）称非常值一元 n 次多项式 (合并同类项后) 的 $n-1$ 次项 (可能为 0) 为第二项. 求所有 2020 次复系数首一多项式 $f(x)$, 满足对 $f(x)$ 的每个复根 x_k, 都存在非常值复系数首一多项式 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$, 使得 $f(x)=(x-x_k)g_k(x)h_k(x)$, 且 $g_k(x)$ 与 $h_k(x)$ 的第二项系数相等.

解. 显然 $f(x)=x^{2020}$ 满足题意.

…………………………………………………………………(5 分)

以下证明这是唯一解. 设 $f(x)$ 的 2020 个复根为 $x_1,x_2,\cdots,x_{2020}$. 对每个 $k\,(1\leqslant k\leqslant 2020)$, 由题设条件可设 $f(x)=(x-x_k)g_k(x)h_k(x)$, 其中 $g_k(x),h_k(x)$ 分别为 m_k 次和 n_k 次非常值首一多项式, 第二项系数均为 a_k. 设 $g_k(x)$ 的所有复根为 $y_{k,1},y_{k,2},\cdots,y_{k,m_k}$, $h_k(x)$ 的所有复根为 $z_{k,1},z_{k,2},\cdots,z_{k,n_k}$. 这些根恰为所有 $x_j\,(j\neq k)$. 由韦达定理,

$$a_k=(-1)^{m_k-1}\big(y_{k,1}+y_{k,2}+\cdots+y_{k,m_k}\big)=(-1)^{n_k-1}\big(z_{k,1}+z_{k,2}+\cdots+z_{k,n_k}\big).$$

…………………………………………………………………(12 分)

对每个 k, 将上式改写为

$$\sum_{j\neq k}\varepsilon_{kj}x_j=0,$$

其中 $\varepsilon_{kj}=1$ 或 -1.

这样, 我们得到了关于 $x_1,x_2,\cdots,x_{2020}$ 的齐次线性方程组, 其系数矩阵 A 为 2020 阶方阵, 主对角线上元素为 0. 主对角线外元素为 1 或 -1. 令 B 为 2020 阶方阵, 其主对角线上元素为 0, 主对角线外元素为 1, 则容易计算出 B 的行列式为 $\det B=-2019$. 由行列式定义, $\det A$ 与 $\det B$ 的奇偶性相同, 故 $\det A\neq 0$.

…………………………………………………………………(18 分)

从而上述齐次线性方程组只有零解, 即 $x_1=x_2=\cdots=x_{2020}=0$. 这便证明了 $f(x)=x^{2020}$.

…………………………………………………………………(20 分)

注: 上面证明 $\det A\neq 0$ 也可以如下进行:

显然, $\det A \equiv \det B \pmod 2$. 由于 $\det B = -2019 \equiv 1 \pmod 2$. 所以 $\det A \equiv 1 \pmod 2$. 故 $\det A \neq 0$.

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、（本题 15 分）设 φ 是 $\mathbb{R}$ 上严格单调增加的连续函数, ψ 是 φ 的反函数, 实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+2}=\psi\Big(\big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\big)\varphi(x_n)+\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x_{n+1})\Big),\qquad n\geqslant 2.$$

证明 $\{x_n\}$ 收敛或举例说明 $\{x_n\}$ 有可能发散.

证明. 我们断言 $\{x_n\}$ 收敛. 证明如下. 记 $y_n=\varphi(x_n)$, 则

$$y_{n+2}=(1-\frac{1}{\sqrt{n}})y_n+\frac{1}{\sqrt{n}}y_{n+1},\qquad n\geqslant 2.$$

令

$$a_n=\min\{y_n,y_{n-1}\},\quad b_n=\max\{y_n,y_{n-1}\}\qquad n\geqslant 3.$$

则

$$a_n\leqslant y_{n+1}\leqslant b_n,\qquad n\geqslant 3.$$

进而

$$a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n,\qquad n\geqslant 3.$$

所以 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均单调有界, 从而收敛.

....(5 分)

特别, $\{y_n\}$ 有界. 由于

$$y_{n+2}-y_{n+1}=-\big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\big)\big(y_{n+1}-y_n\big),\qquad n\geqslant 2.$$

因此

$$\big|y_{n+2}-y_{n+1}\big|\leqslant|y_3-y_2|\prod_{k=2}^{n}\big(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\big),\qquad n\geqslant 2.$$

由 $\prod_{k=2}^{\infty}\big(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\big)$ 发散到零, 得到 $\lim_{n\to\infty}\big(y_{n+1}-y_n\big)=0.$

....(10 分)

所以

$$b_n-a_n=|y_n-y_{n-1}|\to 0,\qquad n\to\infty.$$

这样, $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的极限相等, 从而 $\{y_n\}$ 收敛.

最后, 由 ψ 的连续性得到 $\{x_n\}$ 收敛.

....(15 分)

得分	
评阅人	

六、（本题 20 分）对于有界区间 $[a,b]$ 的划分 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$, 其范数定义为 $\|P\| = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}(x_{k+1}-x_k)$. 现设 $[a,b]$ 上函数 f 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $M > 0$ 使得对任何 $x, y \in [a,b]$, 成立 $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$. 定义 $s(f;P) \equiv \sum\limits_{k=0}^{n}\sqrt{|x_{k+1}-x_k|^2+|f(x_{k+1})-f(x_k)|^2}$. 若 $\lim\limits_{\|P\|\to 0^+} s(f;P)$ 存在, 则称曲线 $y=f(x)$ 可求长. 记 P_n 为 $[a,b]$ 的 2^n 等分. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} s(f;P_n)$ 存在.　　　　(2) 曲线 $y=f(x)$ 可求长.

证明. 法 I. 我们有

$$0 \leqslant s(f;P) \leqslant \sum_{k=0}^{n}\sqrt{M^2+1}|x_{k+1}-x_k| = (b-a)\sqrt{M^2+1}.$$

因此, $s(f;P)$ 有界.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(3 分)

(1) 由平面上点和点距离的三角不等式, 立即有

$$s(f;P_n) \leqslant s(f;P_{n+1}), \qquad \forall\, n \geqslant 1.$$

因此, $\{s(f;P_n)\}$ 单调增加, 结合有界性知其收敛. 设极限为 L.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(8 分)

一般地, 对于划分 P, Q, 用 $P \bigoplus Q$ 表示由 P 和 Q 的所有分点为分点的划分, 则

$$s(f;P\bigoplus Q) \geqslant s(f;P).$$

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$, 有 $m \geqslant 1$ 使得

$$s(f;P_m) \geqslant L-\varepsilon.$$

对于划分 P, 用 $P\bigoplus P_m$ 表示由 P 和 P_m 的所有分点为分点的划分, 则

$$s(f;P\bigoplus P_m) \geqslant s(f;P_m) \geqslant L-\varepsilon.$$

在 $s(f;P\bigoplus P_m)$ 的和式中, 与 $s(f;P)$ 的和式中不同的项是涉及 P_m 的分点的项, 总数不超过 2^{m+1} 项, 相应的小区间长度不超过 $\|P\bigoplus P_m\| \leqslant \|P\|$. 因此, 这些项的

和不超过 $2^{m+1}\sqrt{M^2+1}\|P\|$. 于是

$$s(f;P) \geqslant s(f;P\bigoplus P_m) - 2^{m+1}\sqrt{M^2+1}\|P\| \geqslant L-\varepsilon-2^{m+1}\sqrt{M^2+1}.$$

这样

$$\varliminf_{\|P\|\to 0^+} s(f;P) \geqslant L-\varepsilon.$$

进而

$$\varliminf_{\|P\|\to 0^+} s(f;P) \geqslant L.$$

…………………………………………………………………………(14 分)

类似地, 记 $K = \varlimsup\limits_{\|P\|\to 0^+} s(f;P)$. 对于任何 $\varepsilon>0$, 有划分 Q 使得

$$s(f;Q) \geqslant K-\varepsilon.$$

则

$$s(f;Q\bigoplus P_m) \geqslant s(f;Q) \geqslant K-\varepsilon.$$

在 $s(f;Q\bigoplus P_m)$ 的和式中, 与 $s(f;P_m)$ 的和式中不同的项是涉及 Q 的分点的项, 总数不超过 $2N$ 项, 其中 N 是划分 Q 的分点数. 因此, 这些项的和不超过 $2N\sqrt{M^2+1}\|P_m\|$. 于是

$$s(f;P_m) \geqslant s(f;Q\bigoplus P_m) - 2N\sqrt{M^2+1}\|P_m\| \geqslant K-\varepsilon-2N\sqrt{M^2+1}\|P_m\|.$$

这样

$$L = \lim_{m\to\infty} s(f;P_m) \geqslant K-\varepsilon.$$

进而 $L \geqslant K$. 结合 $K \geqslant \varliminf\limits_{\|P\|\to 0^+} s(f;P) \geqslant L$ 得到

$$\lim_{\|P\|\to 0^+} s(f;P) = L.$$

即 $y=f(x)$ 可求长.

…………………………………………………………………………(20 分)

法 II. 事实上, 注意到 (1) 是 (2) 的推论, 我们只需直接证明 (2). 具体证明如下.

我们有

$$0 \leqslant s(f;P) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sqrt{M^2+1}|x_{k+1}-x_k| = (b-a)\sqrt{M^2+1}.$$

因此, $s(f;P)$ 有界.

....(3 分)

对于划分 P, Q, 用 $P \bigoplus Q$ 表示由 P 和 Q 的所有分点为分点的划分, 由平面上点和点距离的三角不等式, 立即有

$$s(f;P \bigoplus Q) \geqslant s(f;P).$$

....(8 分)

考虑划分列 $\{Q_k\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\|Q_k\| = 0$, 且

$$\lim_{k\to\infty} s(f;Q_k) = L \equiv \varlimsup_{\|P\|\to 0} s(f;P).$$

....(10 分)

对于每个 $k \geqslant 1$, 设 N_k 为划分 Q_k 的分点数.

$$s(f;P \bigoplus P_m) \geqslant s(f;P_m) \geqslant L-\varepsilon.$$

在 $s(f;P \bigoplus Q_k)$ 的和式中, 与 $s(f;P)$ 的和式中不同的项是涉及 Q_k 的分点的项, 总数不超过 $2N_k$ 项, 相应的小区间长度不超过 $\|P \bigoplus Q_k\| \leqslant \|P\|$. 因此, 这些项的和不超过 $2N_k\sqrt{M^2+1}\|P\|$. 于是

$$s(f;P) \geqslant s(f;P \bigoplus Q_k) - 2N_k\sqrt{M^2+1}\|P\| \geqslant s(f;Q_k) - 2N_k\sqrt{M^2+1}\|P\|.$$

这样

$$\varliminf_{\|P\|\to 0^+} s(f;P) \geqslant s(f;Q_k), \qquad \forall\, k \geqslant 1.$$

进而

$$\varliminf_{\|P\|\to 0^+} s(f;P) \geqslant L = \varlimsup_{\|P\|\to 0^+} s(f;P).$$

所以 $\lim\limits_{\|P\|\to 0^+} s(f;P)$ 存在. 即 $y=f(x)$ 可求长. 自然也有 $\lim\limits_{n\to\infty} s(f;P_n)$ 存在.

....(20 分)