2016 年第八届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、填空题(满分 30 分，每小题 5 分)

1．若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^{n}=$______.

【参考解答】: 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{x}\right)}{f(a)}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{f(a+x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}}$，由已知条件：$f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq0$，由带皮亚诺余项的泰勒公式，有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$$

可得 $f(a+x)=f(a)+f'(a)x+o(x)$，将其代入极限式，则有

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(a+x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(a)+f'(a)x+o(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{n\to+\infty}\left[1+\left(\frac{f'(a)}{f(a)}x+o(x)\right)\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{f'(a)}{f(a)}x+o(x)\right)\right]^{\frac{1}{\frac{f'(a)}{f(a)}x+o(x)}}\right\}^{\frac{1}{x}\left[\frac{f'(a)}{f(a)}x+o(x)\right]}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f'(a)}{f(a)}\left[1+\frac{o(x)}{x}\right]}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

2．若 $f(1)=0, f'(1)$ 存在，则极限 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(\sin^2x+\cos x\right)\tan 3x}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin x}=$__________.

【参考解答】: $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(\sin^2x+\cos x\right)\cdot3x}{x^2\cdot x}=3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(\sin^2x+\cos x\right)}{x^2}$

$$=3\lim_{x\to0}\frac{f\left(\sin^2x+\cos x\right)-f(1)}{\sin^2x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=3f'(1)\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}=3f'(1)\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2x}{x^2}+\frac{\cos x-1}{x^2}\right)$$

$$=3f'(1)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}f'(1).$$

3．设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(1)=2$. 记 $z=f\left(e^xy^2\right)$，若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$，$f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式为________________.

【参考解答】: 由题设，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\left(e^xy^2\right)e^xy^2=f\left(e^xy^2\right)$. 令 $u=e^xy^2$，得到当 $u>0$，有 $f'(u)u=f(u)$，即

$$\frac{f'(u)}{f(u)}=\frac{1}{u}\Rightarrow(\ln f(u))'=(\ln u)'.$$

所以有 $\ln f(u)=\ln u+C_1, f(u)=Cu$. 再由初值条件 $f(1)=2$,可得 $C=2$,即 $f(u)=2u$. 所以当 $x>0$ 时，有 $f(x)=2x.$

4．设 $f(x)=e^x\sin 2x$ ，则 $f^{(4)}(0)=$________________.

【参考解答】：由带皮亚诺余项余项的麦克劳林公式，有

$$f(x)=\left[1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right]\cdot\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o(x^4)\right]$$

所以 $f(x)$ 展开式的 4 次项为 $-\frac{1}{3!}(2x^3)\cdot x+\frac{2}{3!}x^4=-x^4$ ，即有

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=-1，故 f^{(4)}(0)=-24.$$

5．曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程为________________.

【参考解答】： 移项，曲面的一般式方程为 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+y^2-z=0$ ，有

$$\vec{n}(x,y,z)=(F_x',F_y',F_z')=(x,2y,-1).$$

$$\vec{n}(x,y,z)//\vec{n}_1\Rightarrow(x,2y,-1)//(2,2,-1),$$

可得 $\frac{x}{2}=\frac{2y}{2}=\frac{-1}{-1}$.由此可得 $x=2,y=1$ ，将它代入到曲面方程，可得 $z=3$ ，即曲面上点 $(2,1,3)$ 处切平面与已知平面平行，所以由平面的点法式方程可得切平面方程为

$$2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0，即 2x+2y-z=3.$$

第二题： (14 分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导， $f(0)=0$ ，且当 $x\in(0,1)$ ， $0<f'(x)<1$. 试证：当 $a\in(0,1)$ 时，有 $\left(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x.$

【参考解答】：不等式的证明转换为证明不等式 $\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2-\int_0^a f^3(x)dx>0$. 于是对函数求导， $F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)dt-f^3(x)=2f(x)\left(\int_0^x f(t)dt-f^2(x)\right)$

已知条件 $f(0)=0$ ，可得 $F'(0)=0$ ，并且由 $0<f'(x)<1$ ，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调增加，即 $f(x)>0$ ，所以只要证明 $g(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)>0$.

又 $g(0)=0$ ，所以只要证明 $g'(x)>0$ ，于是有

$$g'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)[1-f'(x)]>0$$

所以 $g(x)$ 单调增加，所以 $g(x)>0,x>0$. 所以也就有 $g(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)>0$ ，即 $F'(x)>0$ ，可得 $F(x)>0$ ，因此 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2-\int_0^x f^3(t)dt$ 单调增加，所以 $F(a)>F(0)=0$ ，即有

$$F(a)=\left(\int_0^a f(t)dt\right)^2-\int_0^a f^3(t)dt>0 \Rightarrow \left(\int_0^a f(t)dt\right)^2>\int_0^a f^3(t)dt.$$

第三题：(14 分)某物体所在的空间区域为$\Omega: x^2+y^2+2z^2\le x+y+2z$，密度函数为$x^2+y^2+z^2$，求质量$M=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$

【参考解答】: 令$u=x-\frac{1}{2},v=y-\frac{1}{2},w=\sqrt{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)$，即

$$x=u+\frac{1}{2},y=v+\frac{1}{2},z=\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2},$$

则椭球面转换为变量为u,v,w的单位球域，即$\Omega_{uvw}:u^2+v^2+w^2\le 1$. 则由三重积分的换元法公式，即

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}F(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw.$$

$$F(u,v,w)=\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2=u^2+u+v^2+v+\frac{w^2}{2}+\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{3}{4}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以原积分就等于

$$M=\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+u+v^2+v+\frac{w^2}{2}+\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}dudvdw$$

由于单元圆域$\Omega_{uvw}:u^2+v^2+w^2\le 1$关于三个坐标面都对称，所以积分也就等于

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)dudvdw+\frac{3}{4\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}dudvdw$$

其中$\frac{3}{4\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}dudvdw=\frac{3}{4\sqrt{2}}\frac{4\pi}{3}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

由于积分区域具有轮换对称性，所以有

$$\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}u^2dudvdw=\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}v^2dudvdw=\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}w^2dudvdw$$

$$\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)dudvdw=\frac{5}{2}\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}u^2dudvdw=\frac{5}{6}\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+v^2+w^2\right)dudvdw$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)dudvdw=\frac{5}{6\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+v^2+w^2\right)dudvdw$$

$$=\frac{5}{6\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{5}{6\sqrt{2}}\cdot 2\pi\cdot\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1=\frac{5\pi}{3\sqrt{2}}\cdot 2\cdot\frac{1}{5}=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

所以最终的结果就为$M=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}+\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}+\frac{\sqrt{2}\pi}{2}=\frac{5\sqrt{2}\pi}{6}$.

第四题：(14 分)设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上具有连续导数，$f(0)=0, f(1)=1$.证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}.$$

【参考解答】：将区间$[0,1]$ n等份，分点$x_k=\frac{k}{n}$，则$\Delta x_k=\frac{1}{n}$，且

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx-\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f(x)-f(x_k)\right]dx\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}(x-x_k)dx\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k-x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)dx\right),\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)dx\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\left[-\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})^2\right]\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)(x_k-x_{k-1})\right)=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx=-\frac{1}{2}.$$

第五题：(14 分)设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$. 证明：在$(0,1)$内存在不同的两点$x_1,x_2$，使得$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}$.

【参考解答】：设$F(x)=\frac{1}{I}\int_0^x f(t)dt$，则$F(0)=0,F(1)=1$. 由介值定理，存在$\xi\in(0,1)$，使得$F(\xi)=\frac{1}{2}$. 在两个子区间$(0,\xi),(\xi,1)$上分别应用拉格朗日中值定理：

$$F'(x_1)=\frac{f(x_1)}{I}=\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi-0}=\frac{1/2}{\xi},x_1\in(0,\xi),$$

$$F'(x_2)=\frac{f(x_2)}{I}=\frac{F(1)-F(\xi)}{1-\xi}=\frac{1/2}{1-\xi},x_2\in(\xi,1),$$

$$\frac{I}{f(x_1)}+\frac{I}{f(x_2)}=\frac{1}{F'(x_1)}+\frac{1}{F'(x_2)}=\frac{\xi}{1/2}+\frac{1-\xi}{1/2}=2.$$

第六题：(14 分) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，且$f(x)=f(x+2)=f\left(x+\sqrt{3}\right)$，用傅里叶(Fourier)级数理论证明$f(x)$为常数。

【参考解答】：由$f(x)=f(x+2)=f\left(x+\sqrt{3}\right)$可知，$f$是以$2,\sqrt{3}$为周期的函数，所以它的傅里叶系数为

$$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x dx, b_n=\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x dx$$

由于$f(x)=f\left(x+\sqrt{3}\right)$，所以

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x dx = \int_{-1}^{1} f\left(x+\sqrt{3}\right)\cos n\pi x dx \\
&= \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\cos n\pi\left(t-\sqrt{3}\right) dt \\
&= \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\left[\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi + \sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi\right] dt \\
&= \cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\cos n\pi t dt + \sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\sin n\pi t dt \\
&= \cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1} f(t)\cos n\pi t dt + \sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1} f(t)\sin n\pi t dt
\end{aligned}
$$

所以 $a_n = a_n\cos\sqrt{3}n\pi + b_n\sin\sqrt{3}n\pi$；同理可得

$$b_n = b_n\cos\sqrt{3}n\pi - a_n\sin\sqrt{3}n\pi .$$

联立，有

$$\begin{cases} a_n = a_n\cos\sqrt{3}n\pi + b_n\sin\sqrt{3}n\pi \\ b_n = b_n\cos\sqrt{3}n\pi - a_n\sin\sqrt{3}n\pi \end{cases}$$

得 $a_n = b_n = 0\left(n = 1, 2, \cdots\right)$. 而 f 可导，其 Fourier 级数处处收敛于 $f(x)$，所以有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right) = \frac{a_0}{2},$$

其中 $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ 为常数.