

2015 年第六届全国大学生数学竞赛决赛

(数学类三、四年级) 试卷

一、填空题 (本题 20 分, 每小题 5 分)

(1) 实二次型 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$ 的规范型为_____.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的和为_____.

(3) 计算 $I = \iint_{x^2+y^2+z^2=1} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dS = _____$.

(4) $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵 ($n > 1$), $\text{rank}(A) = n - 1$, A 的每行元素之和均为 0.

设 $2, 3, \dots, n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式, 则有

$A_{11} = _____$.

二、(本题 15 分) 设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p . 一族球面中的每个球面都过点 P , 且截直线 l 得到的弦长都是定值 a . 求该球面族的球心的轨迹.

三、(本题 15 分) 设 $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in C \right\}$, 其中 C 表示复数域. 试证明: $\forall A \in \Gamma$,

A 的 Jordan 标准型 J_A 仍属于 Γ ; 进一步还存在可逆的矩阵 $P \in \Gamma$ 使得 $P^{-1}AP = J_A$.

四、(本题 20 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 求最大常数 α 满足

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

五、(本题 15 分) $a(t), f(t)$ 为实连续函数, $\forall t \in R$, 有

$$f(t) > 0, a(t) \geq 1, \int_0^\infty f(t) dt = +\infty.$$

已知 $x(t)$ 满足 $x''(t) + a(t)f(x(t)) \leq 0, \forall t \in R$. 求证: $x(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有上界.

六、(本题 10 分, 复变函数) 设 a, b 是两个不同的复数, 求满足方程

$$(f'(z))^2 = (f(z) - a)(f(z) - b) \quad (1)$$

的非常数整函数 $f(z)$.

七、(本题 10 分, 实变函数) 设 $f(x)$ 是 R^1 上的 Lipschitz 函数, Lipschitz 常数为 K , 则对任意的可测集 $E \subset R^1$, 均有 $m(f(E)) \leq K \cdot m(E)$.

八、(本题 10 分, 微分几何) 设三维空间的曲面 S 满足:

- (1) $P_0 = (0, 0, -1) \in S$;
- (2) 对任意 $P \in S$, $|\overrightarrow{OP}| \leq 1$, 其中 O 是原点.

证明: 曲面 S 在 P_0 的 Gauss 曲率 $K(P_0) \geq 1$.

九、(本题 10 分, 数值分析) 考虑求解线性方程组 $Ax = b$ 的如下迭代格式

$$(\alpha D - C)x^{(k+1)} = ((\alpha - 1)D + C^T)x^{(k)} + b,$$

其中 D 为实对称正定方阵, C 是满足 $C + C^T = D - A$ 的实方阵, α 为实数. 若 A 是实对称正定方阵, 且 $\alpha D - C$ 可逆, $\alpha > \frac{1}{2}$. 证明: 上述迭代格式对任何初始向量 $x^{(0)}$ 收敛.

十、(本题 10 分, 抽象代数) 设 R 为 $[0, 1]$ 上的连续函数环, 其加法为普通的函数加法, 乘法为普通的函数乘法. I 为 R 的一个极大左理想. 证明: $\forall f, g \in I$, f 与 g 在 $[0, 1]$ 上必有公共的零点.

十一、(本题 10 分, 概率统计) 设在国际市场上对我国某种出口商品每年的需求量 X (单位: 吨) 是随机变量, X 服从 $[100, 200]$ 上的均匀分布. 每出售这种商品一吨, 可以为国家挣得外汇 3 万元; 若销售不出而囤积于仓库, 则每吨需要花费保养费用 1 万元. 求: 应组织多少吨货源, 才能使得国家的收益最大?