2011 年第二届全国大学生数学竞赛决赛
(非数学专业）试卷

一、 计算题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.　　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

(3) 已知$\begin{cases} x=\ln(1+e^{2t}) \\ y=t-\arctan e^{t} \end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}$.

二、(本题 10 分) 　求方程$(2x+y-4)\,\mathrm{d}\,x+(x+y-1)\,\mathrm{d}\,y=0$的通解.

三、(本题 15 分) 设函数$f\left(x\right)$在$x=0$的某邻域内有二阶连续导数，且$f(0),f'(0),f''(0)$均不为零. 证明：存在唯一一组实数k_1,k_2,k_3，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0\,.$$

四、(本题 17 分) 设$\Sigma_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，其中$a>b>c>0$，$\Sigma_2: z^2=x^2+y^2$，$\Gamma$为$\Sigma_1$和$\Sigma_2$的交线. 求椭球面$\Sigma_1$在$\Gamma$上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

五、(本题 16 分) 已知Σ是空间曲线$\begin{cases} x^2+3y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$绕着$y$旋转而成的椭球面，$S$表示曲面$\Sigma$的上半部分（$z\geq 0$），$\Pi$是椭球面$S$在$P(x,y,z)$点处的切平面，$\rho(x,y,z)$是原点到切平面$\Pi$的距离，$\lambda,\mu,\nu$表示$S$的外法线的方向余弦.

1）计算$\displaystyle\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\,\mathrm{d}\,S$；

2）计算$\displaystyle\iint_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)\,\mathrm{d}\,S$，其中$\Sigma$为外侧.

六、（本题 12 分） 设$f(x)$是在$(-\infty,+\infty)$内的可微函数，且满足(1) $f(x)>0$; (2) $|f'(x)|\leq mf(x)$，其中$0<m<1$. 任取a_0，定义$a_n=\ln f(a_{n-1}), n=1,2,\cdots$. 证明：级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛.

七、(本题 15 分) 问：在区间$\left[0,2\right]$上是否存在连续可微的函数$f\left(x\right)$，满足

$$f(0)=f(2)=1,\ \ \left|f'(x)\right|\leq 1,\ \ \left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x\right|\leq 1\,?$$

请说明理由.