

第十届清疏竞赛班非数学类 31

一个重要hardy不等式模型：

设 $a_n > 0$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{1}{1-r} \right)^{\frac{1}{r}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n, r \in [0, 1).$

可以思考对 $r < 0$, 是否还有 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{1}{1-r} \right)^{\frac{1}{r}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

分析：

取 $r = -1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

把 a_n 换成 a_n^{-1} , 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

让 $r \rightarrow 0^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{1}{1-r} \right)^{\frac{1}{r}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n}}{r}}$$
$$= \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln a_1 \cdot a_1^r + \ln a_2 \cdot a_2^r + \dots + \ln a_n \cdot a_n^r}{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-r} \right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \frac{1}{1-r}}{r}} = e$$

就有 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$

证明：

记 $b_n = \frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n}, b_0 = 0.$

利用 $nb_n - (n-1)b_{n-1} = a_n^r, n = 1, 2, \dots$, 我们有

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^m \left[\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} - \frac{\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}-1} a_n^r}{1-r} \right] \\
&= \sum_{n=1}^m \left[b_n^{\frac{1}{r}} - \frac{b_n^{\frac{1}{r}-1} a_n^r}{1-r} \right] \\
&= \sum_{n=1}^m \left[b_n^{\frac{1}{r}} \left(1 - \frac{n}{1-r} \right) + \frac{(n-1) \left(b_n^{\frac{1}{r}} \right)^{1-r} \left(b_{n-1}^{\frac{1}{r}} \right)^r}{1-r} \right] \\
&\leq \sum_{n=1}^m \left[b_n^{\frac{1}{r}} \left(1 - \frac{n}{1-r} \right) + \frac{(n-1) \left((1-r) b_n^{\frac{1}{r}} + r b_{n-1}^{\frac{1}{r}} \right)}{1-r} \right] \\
&= \frac{r}{1-r} \sum_{n=1}^m \left[(n-1) b_{n-1}^{\frac{1}{r}} - n b_n^{\frac{1}{r}} \right] = -\frac{mr}{1-r} b_m^{\frac{1}{r}} < 0.
\end{aligned}$$

这里利用了 young 不等式 $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p \geq 1, a, b > 0$

因此：

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^m \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \sum_{n=1}^m \frac{\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}-1} a_n^r}{1-r} \\
&\leq \frac{1}{1-r} \left(\sum_{n=1}^m \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \right)^{1-r} \left(\sum_{n=1}^m a_n^r \right)^r
\end{aligned}$$

因此 $\left(\sum_{n=1}^m \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \right)^r \leq \frac{\left(\sum_{n=1}^m a_n \right)^r}{1-r}$,

从而 $\sum_{n=1}^m \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{1}{1-r} \right)^{\frac{1}{r}} \sum_{n=1}^m a_n$

以及让 $r \rightarrow 0$, 就有 $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq e \sum_{n=1}^m a_n$.

让 $m \rightarrow \infty$, 就有 hardy 不等式:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{1}{1-r} \right)^{\frac{1}{r}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 以及
 $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

我们完成了证明.

如果对任何收敛于0的实数列 $\{\lambda_n\}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$ 都收敛, 证明:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

分析: 这种题的方法都是去拼凑我们的基本模型 $\sum \frac{a_n}{S_n}$.

证明:

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 可取 $S_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$, 由基本模型, 我们知道 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{S_n}$ 发散

取 $\lambda_n = \frac{\operatorname{sgn} a_n}{S_n}$, 显然 $|\lambda_n| \leq \frac{1}{S_n} \rightarrow 0$, 因此我们由题目假设有

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{S_n}$ 收敛, 矛盾! 因此我们证明了 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛

若对任何 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$, 都有 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

证明:

方法1:

仍然是凑基本模型.

假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$, 记 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$, 由基本模型我们知道 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{S_n}$ 发散.

取 $\lambda_n = \frac{a_n}{S_n}$, 由上节课结论, 我们知道 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{S_n^2} < \infty$.

因此由题目假设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{S_n}$ 收敛, 矛盾!

这样我们就证明了 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

方法2(非数学专业不看)

定义连续泛函 $T_n : l^2 \rightarrow \mathbb{R}, (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k, n = 1, 2, \dots$

$$\|T_n\|^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

而对任何 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in l^2$, 我们知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda)$ 存在

因此存在 $C_\lambda > 0$, 使得 $|T_n(\lambda)| \leq C_\lambda, \forall n \in \mathbb{N}$.

由共鸣定理, 存在 $C > 0$, 使得 $\|T_n\| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$.

这就证明了 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$.

设 $a_n = \int_0^n e^{Ct^{\alpha}n^{-\beta}} dt$ ($n \geq 0$), 其中 $C > 0, \alpha > \beta \geq 0$, 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 收敛半径

证明:

$$\int_0^n e^{Ct^{\alpha}n^{-\beta}} dt \leq \int_0^n e^{Cn^{\alpha}n^{-\beta}} dt = n e^{Cn^{\alpha-\beta}}, \text{ 而}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n e^{Cn^{\alpha-\beta}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{Cn^{\alpha-\beta}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{Cn^{\alpha-\beta-1}} = \begin{cases} +\infty, & \alpha - \beta - 1 > 0 \\ e^C, & \alpha - \beta - 1 = 0 \\ 1, & \alpha - \beta - 1 < 0 \end{cases}.$$

$$\int_0^n e^{Ct^{\alpha}n^{-\beta}} dt \geq \int_{n-1}^n e^{Ct^{\alpha}n^{-\beta}} dt \geq \int_{n-1}^n e^{C(n-1)^{\alpha}n^{-\beta}} dt = e^{C(n-1)^{\alpha}n^{-\beta}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{C(n-1)^{\alpha}n^{-\beta}}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{C(n-1)^{\alpha}n^{-\beta}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{C(n-1)^{\alpha}n^{-\beta-1}} = \begin{cases} +\infty, & \alpha - \beta - 1 > 0 \\ e^C, & \alpha - \beta - 1 = 0 \\ 1, & \alpha - \beta - 1 < 0 \end{cases}.$$

这样就证明了收敛半径 $\begin{cases} 0, & \alpha - \beta - 1 > 0 \\ e^{-C}, & \alpha - \beta - 1 = 0 \\ 1, & \alpha - \beta - 1 < 0 \end{cases}$

设 $u_0 = 1, u_n = \int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)dt (n \geq 1)$

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$ 在 $[-1, 1]$ 收敛并求和.

分析:

一般来说交换级数和积分顺序的题如果出现, 一般是压轴题
此时如果你有时间就严格证明, 没时间就形式证明.

$$C_{\alpha}^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

证明:

形式证明:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)dt}{n!} x^n \\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} x^n dt \\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} C_t^n x^n dt \\ &= \int_0^1 \left[(1+x)^t - 1 \right] dt \\ &= \frac{x}{\ln(1+x)} - 1, |x| < 1 \end{aligned}$$

注意到 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln(1+x)} - 1$ 存在, 以及 $\frac{u_n}{n!} \geq 0$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n = \frac{x}{\ln(1+x)} - 1, x = 1 \text{ 也是对的}$$

注意到 $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{\ln(1+x)} - 1$ 存在, 但是此时没法有直接的 tauber 定理可以用

$$\text{暂时无法直接断定 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n = \frac{x}{\ln(1+x)} - 1, x = -1 \text{ 也是对的.}$$

(当然你可以使用 tauber 的充要条件看看行不行).

考试中如果你无法判断幂级数端点是否相等的情况,
只要和函数收敛, 那么你就直接猜端点也是成立的

严格证明：

要证 $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} C_t^n x^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 C_t^n x^n dt.$

事实上：

$$\sum_{n=1}^m \int_0^1 C_t^n x^n dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^m C_t^n x^n dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} C_t^n x^n dt - \int_0^1 \sum_{n=m+1}^{\infty} C_t^n x^n dt$$

让 $m \rightarrow \infty$, 因此只需证明 $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{n=m+1}^{\infty} C_t^n x^n dt = 0, \forall x \in [-1, 1]$

事实上, 对 $x \in (-1, 1), t \in (0, 1)$

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} C_t^n x^n \right| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} x^n \right| \\ \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{t(1-t)\cdots(n-1-t)}{n!} |x|^n \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$$

此时 $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{n=m+1}^{\infty} C_t^n x^n dt \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n} dt = 0.$

$x = \pm 1$, 此时的判断有一定难度, 非数学可以忽略.

当然如果你能发现更简洁的方法那是极好的.

$$\begin{aligned} \text{注意到} & \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} C_t^n x^n \right| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} x^n \right| \\ & \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{t(1-t)\cdots(n-1-t)}{n!} = \frac{1}{\Gamma(t)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\Gamma(n-t)}{n!} \end{aligned}$$

利用 $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$, $x \rightarrow +\infty$.

我们知道当 m 充分大, 有 $\frac{3}{2} \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x > \Gamma(x+1) > \frac{1}{2} \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$.

$$\begin{aligned} \text{于是} & \frac{1}{\Gamma(t)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\Gamma(n-t)}{n!} \leq \frac{1}{\Gamma(t)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\frac{3}{2} \sqrt{2\pi(n-t)} \left(\frac{n-t}{e}\right)^{n-t}}{\frac{1}{2}(n-t) \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \\ & = \frac{3}{\Gamma(t)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n-t)} e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n (n-t)^{-t}}{(n-t) \sqrt{n}} \\ & \leq \frac{3}{\Gamma(t)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n-t)^{t+1}} \leq \frac{3}{\Gamma(t)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{t+1}} = \frac{3}{\Gamma(t)} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^{t+1}} \\ & \leq \frac{3}{\Gamma(t)} \sum_{n=m}^{\infty} \int_{n-1}^n \frac{1}{x^{t+1}} dx = \frac{3}{\Gamma(t)} \int_{m-1}^{\infty} \frac{1}{x^{t+1}} dx = \frac{3}{t\Gamma(t)(m-1)^t} = \frac{3}{\Gamma(t+1)(m-1)^t} \\ & \int_0^1 \frac{3}{\Gamma(t+1)(m-1)^t} dt \leq C \int_0^1 \frac{1}{(m-1)^t} dt = C \frac{\frac{1}{m-1} - 1}{\ln \frac{1}{m-1}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

*Fejer核*和*狄利克雷核*:

设 f 是以 2π 为周期的可积函数, 其傅里叶系数为 a_n, b_n . 记 $S_0(x) = \frac{a_0}{2}$,

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x) \text{ 则}$$

$$(1): \quad S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} dt.$$

$$(2): \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right]^2 dt$$

积累:

均值往往性质更好, 因此*fejer核*往往有更好的性质.

证明:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_{-\pi+x}^{\pi+x} [f(t) \cos kt \cos kx + f(t) \sin kt \sin kx] dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_{-\pi+x}^{\pi+x} [f(t) \cos k(t-x)] dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} [f(t+x) \cos kt] dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t+x) \sum_{k=1}^n \cos kt \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t+x) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt \right) \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

这里 $1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} = D_n$ 叫做*狄利克雷核*

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x) \\
&= \frac{1}{2(n+1)\pi} \sum_{k=0}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} dt. \\
&= \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sum_{k=0}^n \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} dt \\
&= \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right]^2 dt \\
F_n &= \frac{1}{n+1} \left[\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right]^2 \text{叫做fejer 核, 他有更好的性质.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{此外 } F_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n D_j = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \left(1 + 2 \sum_{k=0}^j \cos kx \right) \\
&= 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j \cos kx \\
&= 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n \cos kx \\
&= 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n (n-k+1) \cos kx \\
F_n - D_n &= 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n (n-k+1) \cos kx - 1 - 2 \sum_{k=0}^n \cos kx \\
&= \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n (n-k) \cos kx.
\end{aligned}$$

作业：

设 $f(x)$ 是 $(0, 2\pi)$ 的非负可积函数, 有傅里叶级数:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \cos(n_k x), \text{ 其中 } n_k \in \mathbb{N} \text{ 且 } n_k \text{ 不整除 } n_l, \forall k \neq l,$$

证明: $|a_{n_k}| \leq a_0$.

答案可以参考朱尧辰的数学分析.

丘赛决赛真题:

假设黎曼可积函数 f 有傅里叶级数 $f \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ 并且 $|na_n| \leq C$

证明: 对一切 $N \in \mathbb{N}$, 都有 $\left| \sum_{|n| \leq N} a_n e^{inx} \right| \leq \sup |f| + 2C$.

证明:

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i(n-m)x} dx = 2\pi a_m$$

$$\text{故 } a_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

$$\sum_{|n| \leq N} a_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \leq N} \int_x^{2\pi+x} f(t) e^{-itn} dt \cdot e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \leq N} \int_x^{x+2\pi} f(t) e^{-i(t-x)n} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \leq N} \int_0^{2\pi} f(x+t) e^{-itn} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \sum_{n=0}^N [1 + 2 \cos(tn)] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) D_N dt$$

$$\left| \sum_{|n| \leq N} a_n e^{inx} \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) D_N dt \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) F_N dt \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) (D_N - F_N) dt \right|$$

$$\leq \frac{\sup |f|}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_N| dt + \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) (D_N - F_N) dt \right|$$

回忆积分计算课的方法, 我们可以知道 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_N| dt = 1$.

$$\begin{aligned}
D_N - F_N &= \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^N (k-N) \cos kx. \\
\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t)(D_N - F_N) dt \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^N (k-N) \cos kt dt \right| \\
&= \frac{1}{\pi(N+1)} \left| \sum_{k=0}^N (k-N) \int_0^{2\pi} f(x+t) \cos kt dt \right| \\
&= \frac{1}{\pi(N+1)} \left| \sum_{k=0}^N (k-N) \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} dt \right| \\
&= \frac{1}{\pi(N+1)} \left| \sum_{k=0}^N (k-N) \int_0^{2\pi} f(t) \frac{e^{ik(t-x)} + e^{-ik(t-x)}}{2} dt \right| \\
&= \frac{1}{N+1} \left| \sum_{|n| \leq N} |n| a_n e^{inx} \right| \\
&\leq C \frac{1}{N+1} \sum_{|n| \leq N} 1 = 2C \frac{2N+1}{2N+2} \leq 2C
\end{aligned}$$