

第十三届全国大学生数学竞赛初赛试题参考答案

(非数学类, 2021 年)

一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

1、极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} \frac{x - \ln(e^x + x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 原式 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} \frac{x - \ln(e^x + x)}{x} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) = 0.$

2、设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$ 所确定的二元隐函数,

则 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 将方程两边分别关于 x 和 y 求偏导, 得

$$\begin{cases} 2\cos(x + 2y - 3z)\left(1 - 3\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 1 - 3\frac{\partial z}{\partial x}, \\ 2\cos(x + 2y - 3z)\left(2 - 3\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2 - 3\frac{\partial z}{\partial y}. \end{cases}$$

按 $\cos(x + 2y - 3z) = \frac{1}{2}$ 和 $\neq \frac{1}{2}$ 两种情形, 都可解得: $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{3}. \end{cases}$ 因此 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$

3、设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x\int_0^x f(t)dt - 2\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)du} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\int_0^x f(t)dt + 2xf(x) - 2xf(x)}{\int_0^x f(u)du + xf(x)}.$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xf(\xi)}{xf(\xi) + xf(x)} = 1, \text{ 其中 } \xi \text{ 介于 } 0, x \text{ 之间.}$$

4、过三条直线 $L_1: \begin{cases} x=0, \\ y-z=2, \end{cases}$ $L_2: \begin{cases} x=0, \\ x+y-z+2=0, \end{cases}$ 与 $L_3: \begin{cases} x=\sqrt{2}, \\ y-z=0 \end{cases}$ 的圆柱面方程为_____.

【解】 三条直线的对称式方程分别为

$$L_1: \frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad L_2: \frac{x}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-2}{1}, \quad L_3: \frac{x-\sqrt{2}}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1},$$

所以三条直线平行.

在 L_1 上取点 $P_1(0,1,-1)$, 过该点作与三直线都垂直的平面 $y+z=0$, 分别交 L_2 , L_3 于点 $P_2(0,-1,1)$, $P_3(\sqrt{2},0,0)$. 易知经过这三点的圆的圆心为 $O(0,0,0)$. 这样, 所求圆柱面的中心轴线方程为 $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

设圆柱面上任意点的坐标为 $Q(x,y,z)$, 因为点 Q 到轴线的距离均为 $\sqrt{2}$, 所以有 $\frac{|(x,y,z) \times (0,1,1)|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \sqrt{2}$, 化简即得所求圆柱面的方程为 $2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz = 4$.

5、记 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq \pi\}$, 则 $\iint_D (\sin x^2 \cos y^2 + x\sqrt{x^2+y^2}) dx dy =$ _____.

【解】 根据重积分的对称性, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_D \sin x^2 \cos y^2 dx dy = \iint_D \sin y^2 \cos x^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (\sin x^2 \cos y^2 + \sin y^2 \cos x^2) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} r \sin r^2 dr \\ &= \frac{\pi}{2} (-\cos r^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = \pi. \end{aligned}$$

二、(14 分) 设 $x_1 = 2021$, $x_n^2 - 2(x_n + 1)x_{n+1} + 2021 = 0$ ($n \geq 1$), 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】 记 $a = 1011$, $y_n = 1 + x_n$, 函数 $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{a}{x}$ ($x > 0$), 则 $y_1 = 2a$, 且

$$y_{n+1} = f(y_n) \quad (n \geq 1). \quad \text{----- 5 分}$$

易知, 当 $x > \sqrt{2a}$ 时, $x > f(x) > \sqrt{2a}$, 所以 $\{y_n\}$ 是单调减少且有下界的数列,

因而收敛. 由此可知 $\{x_n\}$ 收敛 ----- 5 分

令 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$, 则 $A > 0$ 且 $A = f(A)$, 解得 $A = \sqrt{2a}$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2022} - 1$.

-----4 分

三、(14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是有界连续函数, 证明: 方程 $y'' + 14y' + 13y = f(x)$ 的每一个解在 $[0, +\infty)$ 上都是有界函数.

【证】 易得对应的齐次方程 $y'' + 14y' + 13y = 0$ 的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-13x}. \quad \text{----- 4 分}$$

又由 $y'' + 14y' + 13y = f(x)$, 得 $(y'' + y') + 13(y' + y) = f(x)$. 令 $y_1 = y' + y$, 则

$$y_1' + 13y_1 = f(x), \text{ 解得 } y_1 = e^{-13x} \left(\int_0^x f(t) e^{13t} dt + C_3 \right).$$

同理, 由 $y'' + 14y' + 13y = f(x)$, 得 $(y'' + 13y') + (y' + 13y) = f(x)$. 令 $y_2 = y' + 13y$,

$$\text{则 } y_2' + y_2 = f(x), \text{ 解得 } y_2 = e^{-x} \left(\int_0^x f(t) e^t dt + C_4 \right).$$

$$\text{取 } C_3 = C_4 = 0, \text{ 得 } \begin{cases} y' + y = e^{-13x} \int_0^x f(t) e^{13t} dt, \\ y' + 13y = e^{-x} \int_0^x f(t) e^t dt, \end{cases} \text{ 由此解得原方程的一个特解为}$$

$$y^* = \frac{1}{12} e^{-x} \int_0^x f(t) e^t dt - \frac{1}{12} e^{-13x} \int_0^x f(t) e^{13t} dt.$$

因此, 原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-13x} + \frac{1}{12} e^{-x} \int_0^x f(t) e^t dt - \frac{1}{12} e^{-13x} \int_0^x f(t) e^{13t} dt. \quad \text{----- 6 分}$$

因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 所以, 存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M, 0 \leq x < +\infty$, 注意到当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $0 < e^{-x} \leq 1, 0 < e^{-13x} \leq 1$, 所以

$$\begin{aligned} |y| &\leq |C_1 e^{-x}| + |C_2 e^{-13x}| + \frac{1}{12} e^{-x} \left| \int_0^x f(t) e^t dt \right| + \frac{1}{12} e^{-13x} \left| \int_0^x f(t) e^{13t} dt \right| \\ &\leq |C_1| + |C_2| + \frac{M}{12} e^{-x} \int_0^x e^t dt + \frac{M}{12} e^{-13x} \int_0^x e^{13t} dt \\ &\leq |C_1| + |C_2| + \frac{M}{12} (1 - e^{-x}) + \frac{M}{12 \times 13} (1 - e^{-13x}) \\ &\leq |C_1| + |C_2| + \frac{M}{12} + \frac{M}{12 \times 13} = |C_1| + |C_2| + \frac{7M}{78}. \end{aligned}$$

对于方程的每一个确定的解, 常数 C_1, C_2 是固定的, 所以, 原方程的每一个解都是有界的. -----4 分

四、(14 分) 对于 4 次齐次函数

$$f(x, y, z) = a_1 x^4 + a_2 y^4 + a_3 z^4 + 3a_4 x^2 y^2 + 3a_5 y^2 z^2 + 3a_6 x^2 z^2,$$

计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$, 其中 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

【解】 因为 $f(x, y, z)$ 为 4 次齐次函数, 所以对 $\forall t \in R$, 恒有

$$f(tx, ty, tz) = t^4 f(x, y, z).$$

对上式两边关于 t 求导, 得

$$xf'_1(tx, ty, tz) + yf'_2(tx, ty, tz) + zf'_3(tx, ty, tz) = 4t^3 f(x, y, z).$$

取 $t=1$, 得

$$xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) = 4f(x, y, z). \quad \text{----- 5 分}$$

设曲面 Σ 上点 (x, y, z) 处的外法线方向的方向余弦为 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 则

$\cos \alpha = x, \cos \beta = y, \cos \gamma = z$, 因此 ----- 2 分

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \frac{1}{4} \oiint_{\Sigma} (xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z)) dS \\ &= \frac{1}{4} \oiint_{\Sigma} [\cos \alpha f'_x(x, y, z) + \cos \beta f'_y(x, y, z) + \cos \gamma f'_z(x, y, z)] dS \\ &= \frac{1}{4} \oiint_{\Sigma} f'_x(x, y, z) dy dz + f'_y(x, y, z) dz dx + f'_z(x, y, z) dx dy \\ &= \frac{1}{4} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} [f''_{xx}(x, y, z) + f''_{yy}(x, y, z) + f''_{zz}(x, y, z)] dx dy dz \quad (\text{利用高斯公式}) \\ &= \frac{3}{2} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} [x^2(2a_1 + a_4 + a_6) + y^2(2a_2 + a_4 + a_5) + z^2(2a_3 + a_5 + a_6)] dx dy dz \\ &\quad (\text{利用轮换对称性}) \\ &= \sum_{i=1}^6 a_i \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \sum_{i=1}^6 a_i \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= \frac{4\pi}{5} \sum_{i=1}^6 a_i. \quad \text{----- 7 分} \end{aligned}$$

五、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{2k-1}{2n}(b-a)\right) \right] = \frac{(b-a)^2}{24} [f'(b) - f'(a)].$$

【证】 记 $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, $\xi_k = a + \frac{(2k-1)(b-a)}{2n}$, $k=1, 2, \dots, n$. 将 $f(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上展开成泰勒公式, 得

$$f(x) = f(\xi_k) + f'(\xi_k)(x - \xi_k) + \frac{f''(\eta_k)}{2}(x - \xi_k)^2,$$

其中 $x \in [x_{k-1}, x_k]$, η_k 介于 0 和 x 之间. 于是 ----- 4 分

$$\begin{aligned} B_n &= \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{2k-1}{2n}(b-a)\right) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k)) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[f'(\xi_k)(x - \xi_k) + \frac{f''(\eta_k)}{2}(x - \xi_k)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(\eta_k)(x - \xi_k)^2 dx. \end{aligned}$$

设 $f''(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的最大值和最小值分别为 M_k , m_k , 因为

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - \xi_k)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{12n^3},$$

所以

$$\frac{(b-a)^2}{24} \sum_{k=1}^n m_k \frac{b-a}{n} \leq n^2 B_n \leq \frac{(b-a)^2}{24} \sum_{k=1}^n M_k \frac{b-a}{n}. \quad \text{----- 6 分}$$

因为 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 所以 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积. 根据定积分 $\int_0^1 f''(x) dx$ 的定义, 及牛顿-莱布尼兹公式, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n m_k \frac{b-a}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n M_k \frac{b-a}{n} = \int_a^b f''(x) dx = f'(b) - f'(a).$$

再根据夹逼准则, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 B_n = \frac{(b-a)^2}{24} [f'(b) - f'(a)]. \quad \text{----- 4 分}$$

六、(14 分) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为正实数列, 满足: $a_1 = b_1 = 1$, 且 $b_n = a_n b_{n-1} - 2$,

$n = 2, 3, \dots$. 又设 $\{b_n\}$ 为有界数列, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 收敛, 并求该级数的和.

【解】 首先, 注意到 $a_1 = b_1 = 1$, 且 $a_n = \left(1 + \frac{2}{b_n}\right) \frac{b_n}{b_{n-1}}$, 所以当 $n \geq 2$ 时, 有

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \left(1 + \frac{2}{b_2}\right) \left(1 + \frac{2}{b_3}\right) \cdots \left(1 + \frac{2}{b_n}\right) b_n. \quad \text{----- 4 分}$$

由于 $\{b_n\}$ 有界, 故存在 $M > 0$, 使得当 $n \geq 1$ 时, 恒有 $0 < b_n \leq M$. 因此

$$0 < \frac{b_n}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \left(1 + \frac{2}{b_2}\right)^{-1} \left(1 + \frac{2}{b_3}\right)^{-1} \cdots \left(1 + \frac{2}{b_n}\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{2}{M}\right)^{-n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

根据夹逼准则, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_1 a_2 \cdots a_n} = 0$. ----- 4 分

考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 的部分和 S_n , 当 $n \geq 2$ 时, 有

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} \cdot \frac{a_k b_{k-1} - b_k}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{b_{k-1}}{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}} - \frac{b_k}{a_1 a_2 \cdots a_k} \right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{b_n}{2 a_1 a_2 \cdots a_n}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2}$, 这就证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 收敛, 且其和为 $\frac{3}{2}$.

----- 6 分