

## 2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛 (数学类) 试卷

**一、(本题 15 分)** 已知四点  $(1, 2, 7), (4, 3, 3), (5, -1, 6), (\sqrt{7}, \sqrt{7}, 0)$ . 试求过这四点的球面方程。

**二、(本题 10 分)** 设  $f_1, f_2, \dots, f_n$  为  $[0, 1]$  上的非负连续函数, 求证: 存在  $\xi \in [0, 1]$ , 使得

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi) \leq \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x) dx.$$

**三、(本题 15 分)** 设  $F^n$  是数域  $F$  上的  $n$  维列空间,  $\sigma : F^n \rightarrow F^n$  是一个线性变换。若

$$\forall A \in M_n(F), \sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha), (\forall \alpha \in V),$$

证明:  $\sigma = \lambda \cdot \text{id}_{F^n}$ , 其中  $\lambda$  是  $F$  中的某个数,  $\text{id}_{F^n}$  表示恒同变换。

**四、(本题 10 分)** 对于  $\Delta ABC$ , 求  $3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C$  的最大值。

**五、(本题 15 分)** 对于任何实数  $\alpha$ , 求证存在取值于  $\{-1, 1\}$  的数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \sqrt{n + a_k} - n^{\frac{3}{2}} \right) = \alpha.$$

**六、(本题 20 分)** 设  $A$  是数域  $F$  上的  $n$  阶方阵。证明:  $A$  相似于  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ , 其中  $B$  是可逆

矩阵,  $C$  是幂零阵, 即存在  $m$  使得  $C^m = 0$ .

**七、(本题 15 分)** 设  $F(x)$  是  $[0, +\infty)$  上的单调递减函数,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ , 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} F(t) \sin \frac{t}{n} dt = 0.$$

证明: (i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0$ ; (ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} F(t) \sin xt dt = 0$ .