

# 2015 年第六届全国大学生数学竞赛决赛

## (数学类三、四年级) 试卷

### 一、填空题 (本题 20 分, 每小题 5 分)

(1) 实二次型  $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$  的规范型为\_\_\_\_\_.

(2) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$  的和为\_\_\_\_\_.

(3) 计算  $I = \iint_{x^2+y^2+z^2=1} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dS =$ \_\_\_\_\_.

(4)  $A = (a_{ij})$  为  $n$  阶实对称矩阵 ( $n > 1$ ),  $\text{rank}(A) = n - 1$ ,  $A$  的每行元素之和均为 0. 设  $2, 3, \dots, n$  为  $A$  的全部非零特征值. 用  $A_{11}$  表示  $A$  的元素  $a_{11}$  所对应的代数余子式, 则有  $A_{11} =$ \_\_\_\_\_.

二、(本题 15 分) 设空间中定点  $P$  到一定直线  $l$  的距离为  $p$ . 一族球面中的每个球面都过点  $P$ , 且截直线  $l$  得到的弦长都是定值  $a$ . 求该球面族的球心的轨迹.

三、(本题 15 分) 设  $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in C \right\}$ , 其中  $C$  表示复数域. 试证明:  $\forall A \in \Gamma$ ,

$A$  的 Jordan 标准型  $J_A$  仍属于  $\Gamma$ ; 进一步还存在可逆的矩阵  $P \in \Gamma$  使得  $P^{-1}AP = J_A$ .

四、(本题 20 分) 设  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$  求最大常数  $\alpha$  满足

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

五、(本题 15 分)  $a(t), f(t)$  为实连续函数,  $\forall t \in R$ , 有

$$f(t) > 0, a(t) \geq 1, \int_0^\infty f(t) dt = +\infty.$$

已知  $x(t)$  满足  $x''(t) + a(t)f(x(t)) \leq 0, \forall t \in R$ . 求证:  $x(t)$  在  $[0, +\infty)$  上有上界.

六、(本题 10 分, 复变函数) 设  $a, b$  是两个不同的复数, 求满足方程

$$(f'(z))^2 = (f(z) - a)(f(z) - b) \quad (1)$$

的非常数整函数  $f(z)$ .

**七、(本题 10 分, 实变函数)** 设  $f(x)$  是  $R^1$  上的 Lipschitz 函数, Lipschitz 常数为  $K$ , 则对任意的可测集  $E \subset R^1$ , 均有  $m(f(E)) \leq K \cdot m(E)$ .

**八、(本题 10 分, 微分几何)** 设三维空间的曲面  $S$  满足:

(1)  $P_0 = (0, 0, -1) \in S$ ;

(2) 对任意  $P \in S, |\overrightarrow{OP}| \leq 1$ , 其中  $O$  是原点.

证明: 曲面  $S$  在  $P_0$  的 Gauss 曲率  $K(P_0) \geq 1$ .

**九、(本题 10 分, 数值分析)** 考虑求解线性方程组  $Ax = b$  的如下迭代格式

$$(\alpha D - C)x^{(k+1)} = ((\alpha - 1)D + C^T)x^{(k)} + b,$$

其中  $D$  为实对称正定方阵,  $C$  是满足  $C + C^T = D - A$  的实方阵,  $\alpha$  为实数. 若  $A$  是实对称正定方阵, 且  $\alpha D - C$  可逆,  $\alpha > \frac{1}{2}$ . 证明: 上述迭代格式对任何初始向量  $x^{(0)}$  收敛.

**十、(本题 10 分, 抽象代数)** 设  $R$  为  $[0, 1]$  上的连续函数环, 其加法为普通的函数加法, 乘法为普通的函数乘法.  $I$  为  $R$  的一个极大左理想. 证明:  $\forall f, g \in I, f$  与  $g$  在  $[0, 1]$  上必有公共的零点.

**十一、(本题 10 分, 概率统计)** 设在国际市场上对我国某种出口商品每年的需求量  $X$  (单位: 吨) 是随机变量,  $X$  服从  $[100, 200]$  上的均匀分布. 每出售这种商品一吨, 可以为国家挣得外汇 3 万元; 若销售不出而囤积于仓库, 则每吨需要花费保养费用 1 万元. 求: 应组织多少吨货源, 才能使得国家的收益最大?