

# 第十届全国大学生数学竞赛决赛试题参考答案及评分标准 (非数学类, 2019年3月30日)

## 一、填空题(本题满分30分, 每小题6分)

1. 设函数  $y = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-a\sin^2 x} - b}{x^2}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$  在点  $x=0$  处连续, 则  $a+b$  的值为\_\_\_\_\_.

答案:  $a+b=-3$

2. 设  $a > 0$ , 则  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx =$ \_\_\_\_\_. 答案:  $I = \frac{\pi \ln a}{2a}$

3. 设曲线  $L$  是空间区域  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$  的表面与平面  $x+y+z = \frac{3}{2}$  的交线, 则  $|\oint_L (z^2 - y^2)dx + (x^2 - z^2)dy + (y^2 - x^2)dz| =$ \_\_\_\_\_. 答案:  $I = \frac{9}{2}$

4. 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $F(x-y, z) = 0$  确定, 其中  $F(u, v)$  具有连续二阶偏导数, 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ \_\_\_\_\_. 答案:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{F_2^2 F_{11} - 2F_1 F_2 F_{12} + F_1^2 F_{22}}{F_2^3}$

5. 已知二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \left( x_i - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2$ , 则  $f$  的规范形为\_\_\_\_\_. 答案:  $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2$

二、设  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  内三阶连续可导, 满足  $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1$ ; 又设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 \in (0, 1), a_{n+1} = f(a_n) (n=1, 2, 3, \dots)$ , 严格单调减少且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^2$ .

【解】由于  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  内三阶可导,  $f(x)$  在  $x=0$  处有 Taylor 公式

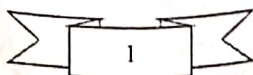
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3),$$

又  $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1$ , 所以

$$f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3). \text{-----4分} \quad \textcircled{1}$$

由于  $a_1 \in (0, 1)$ , 数列  $\{a_n\}$  严格单调且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 则  $a_n > 0$ , 且  $\left\{ \frac{1}{a_n^2} \right\}$  为严格单

调增加趋于正无穷的数列, 注意到  $a_{n+1} = f(a_n)$ , 故由 Stolz 定理及  $\textcircled{1}$  式, 有



$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}} \quad \text{-----8分} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 a_{n+1}^2}{a_n^2 - a_{n+1}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 f^2(a_n)}{a_n^2 - f^2(a_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 \left( a_n - \frac{1}{6} a_n^3 + o(a_n^3) \right)^2}{a_n^2 - \left( a_n - \frac{1}{6} a_n^3 + o(a_n^3) \right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^4 - \frac{1}{3} a_n^6 + \frac{1}{36} a_n^8 + o(a_n^4)}{\frac{1}{3} a_n^4 - \frac{1}{36} a_n^6 + o(a_n^4)} = 3. \\ &\quad \text{-----12分}\end{aligned}$$

三、设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上具有连续导数, 且  $|f(x)| \leq 1$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

证明: 对于  $0 < \alpha < \beta$ , 成立  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f' \left( nx - \frac{1}{x} \right) dx = 0$ .

【证明】 令  $y = x - \frac{1}{nx}$ , 则  $y' = 1 + \frac{1}{nx^2} > 0$ . 故函数  $y(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上严格单

调增加. 记  $y(x)$  的反函数为  $x(y)$ , 则  $x(y)$  定义在  $\left[ \alpha - \frac{1}{n\alpha}, \beta - \frac{1}{n\beta} \right]$  上, 且

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{nx^2}} > 0. \quad \text{-----4分}$$

于是

$$\int_{\alpha}^{\beta} f' \left( nx - \frac{1}{x} \right) dx = \int_{\alpha - \frac{1}{n\alpha}}^{\beta - \frac{1}{n\beta}} f'(ny) x'(y) dy.$$

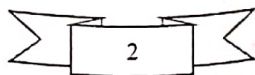
根据积分中值定理, 存在  $\xi_n \in \left[ \alpha - \frac{1}{n\alpha}, \beta - \frac{1}{n\beta} \right]$ , 使得

$$\int_{\alpha - \frac{1}{n\alpha}}^{\beta - \frac{1}{n\beta}} f'(ny) x'(y) dy = x'(\xi_n) \int_{\alpha - \frac{1}{n\alpha}}^{\beta - \frac{1}{n\beta}} f'(ny) dy = \frac{x'(\xi_n)}{n} \left[ f \left( n\beta - \frac{1}{\beta} \right) - f \left( n\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \right]. \quad \text{-----8分}$$

因此

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f' \left( nx - \frac{1}{x} \right) dx \right| \leq \frac{|x'(\xi_n)|}{n} \left[ \left| f \left( n\beta - \frac{1}{\beta} \right) \right| + \left| f \left( n\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \right| \right] \leq \frac{2|x'(\xi_n)|}{n}.$$

注意到



$$0 < x'(\xi_n) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n\xi_n^2}} < 1,$$

则

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f' \left( nx - \frac{1}{x} \right) dx \right| \leq \frac{2}{n},$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f' \left( nx - \frac{1}{x} \right) dx = 0.$$

-----12 分

四、计算三重积分：  $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$ ，其中

$$\Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1.$$

【解】 采用“先二后一”法，并利用对称性，得

$$I = 2 \int_0^1 dz \iint_D \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}, \text{ 其中 } D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x. \text{ -----4 分}$$

用极坐标计算二重积分，得

$$I = 2 \int_0^1 dz \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} \frac{r dr}{(1+r^2+z^2)^2} = \int_0^1 dz \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{1+\sec^2 \theta + z^2} \right) d\theta$$

交换积分次序，得

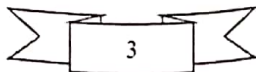
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \left( \frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{1+\sec^2 \theta + z^2} \right) dz = \frac{\pi^2}{16} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{1+\sec^2 \theta + z^2} dz \text{ -----8 分}$$

作变量代换：  $z = \tan t$ ，并利用对称性，得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{1+\sec^2 \theta + z^2} dz &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t}{\sec^2 \theta + \sec^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta + \sec^2 t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta + \sec^2 t}{\sec^2 \theta + \sec^2 t} dt = \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32}. \text{ -----12 分}$$

五、求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdots \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$  之和.



# 2019 年 3 月 30 日决赛试题标准答案

【解】级数通项  $a_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdots \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+2}$ , 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)} x^{2n+2}, \quad \text{----- 4 分}$$

则收敛区间为  $(-1, 1)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \left[ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \right]$ ,

$f'(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} = 2g(x)$ , 其中  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$ . 因为

$$g'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} = 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} 2nx^{2n-1}$$

$$= 1 + x \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} \right) = 1 + x \frac{d}{dx} [xg(x)],$$

所以  $g(x)$  满足  $g(0) = 0$ ,  $g'(x) - \frac{x}{1-x^2} g(x) = \frac{1}{1-x^2}$ . -----8 分

解这个一阶线性方程, 得

$$g(x) = e^{\int \frac{x}{1-x^2} dx} \left( \int \frac{1}{1-x^2} e^{-\int \frac{x}{1-x^2} dx} dx + C \right) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}},$$

由  $g(0) = 0$  得  $C = 0$ , 故  $g(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ , 所以  $f(x) = (\arcsin x)^2$ ,  $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi^2}{16}$ ,

且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \left( \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi^2 - 8}{8}. \quad \text{-----12 分}$$

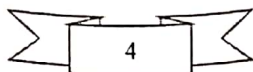
六、设  $A$  是  $n$  阶幂零矩阵, 即满足  $A^2 = O$ . 证明: 若  $A$  的秩为  $r$ , 且  $1 \leq r < \frac{n}{2}$ ,

则存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & I_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$ , 其中  $I_r$  为  $r$  阶单位矩阵.

【证】存在  $n$  阶可逆矩阵  $H, Q$ , 使得  $A = H \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$ , 因为  $A^2 = O$ , 所以有

$$A^2 = H \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} QH \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = O, \quad \text{-----4 分}$$

对  $QH$  作相应分块为  $QH = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$ , 则有



$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} QH \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix} = O.$$

因此  $R_{11} = O$ , -----6 分

而  $Q = \begin{pmatrix} O & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} H^{-1}$ , 所以

$$A = H \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = H \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} H^{-1} = H \begin{pmatrix} O & R_{12} \\ O & O \end{pmatrix} H^{-1}$$

显然,  $r(A) = r(R_{12}) = r$ , 所以  $R_{12}$  为行满秩矩阵. -----8 分

因为  $r < \frac{n}{2}$ , 所以存在可逆矩阵  $S_1, S_2$ , 使得  $S_1 R_{12} S_2 = (I_r, O)$ , -----10 分

令  $P = H \begin{pmatrix} S_1^{-1} & O \\ O & S_2 \end{pmatrix}$ , 则有

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} S_1 & O \\ O & S_2^{-1} \end{pmatrix} H^{-1} A H \begin{pmatrix} S_1^{-1} & O \\ O & S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & I_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}. \quad \text{-----11 分}$$

七、设  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  为单调递减的正实数列,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ,  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  为一实数列, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$  收敛, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) u_n = 0.$$

【证】由于  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$  收敛, 所以对任意给定  $\varepsilon > 0$ , 存在自然数  $N_1$ , 使得当  $n > N_1$

时, 有

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=N_1}^n a_k u_k < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

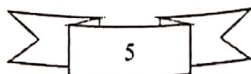
因为  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  单调递减的正数列, 所以

$$0 < \frac{1}{u_{N_1}} \leq \frac{1}{u_{N_1+1}} \leq \cdots \leq \frac{1}{u_n} \quad (2) \quad \text{-----2 分}$$

注意到当  $m < n$  时, 有

$$\sum_{k=m}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = A_n b_n - A_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) A_k,$$

令  $A_0 = 0$ ,  $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), 得到



# 2019 年 3 月 30 日决赛试题标准答案

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) A_k \quad \text{-----4 分}$$

下面证明：对于任意自然数  $n$ ，如果  $\{a_n\}, \{b_n\}$  满足

$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0, \quad m \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq M$$

则有

$$b_1 m \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k = b_1 M$$

事实上， $m \leq A_k \leq M, b_k - b_{k+1} \geq 0$ ，即得到

$$m b_1 = m b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) m \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq M b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) M = M b_1 \quad \text{-----6 分}$$

利用 (2)，令  $b_1 = \frac{1}{u_n}, b_2 = \frac{1}{u_{n-1}}, \dots$ ，可以得到  $-\frac{\varepsilon}{2} u_n^{-1} < \sum_{k=N_1}^n a_k < \frac{\varepsilon}{2} u_n^{-1}$ ，即

$$\left| \sum_{k=N_1}^n a_k u_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{-----8 分}$$

又由  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  知，存在自然数  $N_2$ ，使得  $n > N_2$

$$\left| (a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1-1}) u_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{-----10 分}$$

取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ ，则当  $n > N$  时，有

$$\left| (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) u_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) u_n = 0$ . -----11 分

