专业:________ 考生座位号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

第十届全国大学生数学竞赛决赛一、二年级试卷参考答案及评分标准

(数学类, 2019年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六		总分
满分	20	15	15	20	15	15		100
得分								

一、(本题 20 分, 每小题各 5分)填空题

得分	
评阅人	

1. 设A 为实对称方阵, $(1,0,1)$ 和 $(1,2,0)$ 构成其行向量的一个极大无关组. 则有$A=\underline{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-4&2\\1&2&0\end{pmatrix} or \begin{pmatrix}\frac{3}{2}&1&1\\1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}}$.

2. 设 $y(x)\in C^1[0,1)$ 满足 $y(x)\in[0,\pi]$ 及 $x=\begin{cases}\frac{\sin y(x)}{y(x)}, & y\in(0,\pi]\\ 1, & y=0.\end{cases}$. 则 $y'(0)=\underline{-\pi}$

3. 设 $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$, 则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}xf(x)\,dx=\underline{\frac{\sqrt{\pi}}{8}}$

4. 设 U 为 8 阶实正交方阵, U 中元素皆为 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 的 3×3 子矩阵的个数记为 t. 则 t 最多为$\underline{0}$.

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 给定空间直角坐标系中的两条直线：l_1 为 z 轴，l_2 过 $(-1,0,0)$ 及 $(0,1,1)$两点. 动直线 l 分别与l_1, l_2 共面，且与平面$z=0$平行.

1. 求动直线l全体构成的曲面S的方程；
2. 确定S是什么曲面.

解:1. 解法一 直线l_1的参数方程为$x=0, y=0, z=s$; l_2的参数方程为$x=-1+t, y=t, z=t.$ —— (2分)

设动直线l与l_1, l_2分别交于点$(0,0,s)$与$(-1+t,t,t)$, 则l的方向为$(-1+t,t,t-s)$. 由于l与平面$z=0$平行，故$t=s$, 从而动直线l的方程为:

$$x=(t-1)u, \quad y=tu, \quad z=t.$$

—— (8分)

消去t, u得动直线构成的曲面S的方程为

$$xz-yz+y=0.$$

—— (12分)

解法二 过直线l_1的平面簇为$\pi_1:(1-\lambda)x+\lambda y=0$，这里$\lambda$为参数; 同理过直线$l_2$的平面簇为$\pi_2:(1-\mu)(x-y+1)+\mu(y-z)=0$, μ为参数.—— (2分)

动直线l是平面簇π_1与π_2的交线，故直线l的方向为

$$\mathbf{n}=(1-\lambda,\lambda,0)\times(1-\mu,2\mu-1,-\mu)=(-\lambda\mu,\mu(1-\lambda),-1+2\mu-\lambda\mu). \quad \text{—— (6分)}$$

由直线l与平面$z=0$平行，故$-1+2\mu-\lambda\mu=0$. 由π_1与π_2的方程知

$$\lambda=\frac{x}{x-y}, \qquad \mu=\frac{x-y+1}{x-2y+z+1}. \quad \text{—— (10分)}$$

将上式代入$-1+2\mu-\lambda\mu=0$ 即得动直线l生成的曲面的方程为

$$xz-yz+y=0.$$

[12分]

2. 做可逆线性变换

$$\begin{cases} x=x'-y'-z' \\ y=-z' \\ z=x'+y' \end{cases}$$

密封线　答题时不要超过此线

曲面S的原方程化为$z' = x'^2 - y'^2$. 因此，S为马鞍面.——（15分）

得分	
评阅人	

三、（本题 15 分）证明：任意 n 阶实方阵A可以分解成$A=A_0+A_1+A_2$，其中$A_0=aI_n$, a是实数，A_1 与A_2都是幂零方阵.

证明: 我们先证明一个引理.

引理 设A是n阶实方阵且满足$\mathrm{tr}(A)=0$，则存在可逆实方阵P，使得$P^{-1}AP$的对角元素都是0.

对n进行归纳. 当$n=1$时，$A=(0)$，结论显然成立. 下设$n\geq 2$，我们考虑两种情形.

情形一：$\mathbb{R}^n$中的所有非零向量都是A的特征向量. 由所有基本向量$\mathbf{e}_i$, $i=1,2,\ldots,n$都是特征向量可知，存在特征值λ_i, $i=1,2,\ldots,n$使得$A\mathbf{e}_i=\lambda_i\mathbf{e}_i$, $i=1,2,\ldots,n$. 因此，$A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$. 再由所有$\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j$ 都是特征向量有，存在μ_{ij}使得$A(\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j)=\lambda_i\mathbf{e}_i+\lambda_j\mathbf{e}_j=\mu_{ij}(\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j)$. 于是$\mu_{ij}=\lambda_i=\lambda_j$. 因此$A$为纯量方阵. 由$tr(A)=0$知$A=0$.

情形二：存在$\mathbb{R}^n$中的非零向量α不是A的特征向量. 则$\alpha, A\alpha$线性无关，因而存在可逆实方阵 $Q=\left(\alpha, A\alpha, *, \cdots, *\right)$满足$AQ=Q\begin{pmatrix}0 & * \\ * & B\end{pmatrix}$，或者等价地 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0 & * \\ * & B\end{pmatrix}$，其中$B$为$n-1$阶实方阵. 由$\mathrm{tr}(A)=0$，得$\mathrm{tr}(B)=0$. 由归纳假设，存在可逆实方阵$R$，使得$R^{-1}BR$的对角元素都是0. 令$P=Q\,\mathrm{diag}(1,R)$，则$P^{-1}AP$的对角元素都是0. 引理获证. [10分]

现在对于任意n阶实方阵A，令$A_0=\frac{\mathrm{tr}(A)}{n}I$，则$\mathrm{tr}(A-A_0)=0$. 根据引理，存在可逆实方阵$P$，使得$B=P^{-1}(A-A_0)P$的对角元素都是0. 设$B=L+U$，$L, U$分别是严格下、上三角方阵，则$L, U$都是幂零方阵。于是$A=A_0+PBP^{-1}=A_0+A_1+A_2$，其中$A_0$是纯量方阵，$A_1=PLP^{-1}$和$A_2=PUP^{-1}$都是幂零方阵. 证毕. [15分]

专业：________ 考生座位号：________ 所在院校：________ 准考证号：________ 姓名：________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

四、（本题20分）设 $\alpha > 0$, $f(x) \in C^1[0,1]$, 且对任何非负整数, n, $f^{(n)}(0)$ 均存在且为零. 进一步存在常数 $C > 0$ 使得 $|x^\alpha f'(x)| \leqslant C|f(x)|$ $(\forall x \in [0,1])$. 证明：

(1) 若 $\alpha = 1$, 则在 $[0,1]$ 上 $f(x) \equiv 0$.

(2) 若 $\alpha > 1$, 举例说明在 $[0,1]$ 上 $f(x) \equiv 0$ 可以不成立.

证明:(1) 由 $f^{(n)}(0) = 0$ $(\forall n \geqslant 0)$ 以及 Taylor 展式可得, 对于任何固定的 k, 成立

$$f(x) = o(x^k), \qquad x \to 0^+.$$

…………………………………………………………………………………………(5 分)

特别

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x^{2C}} = 0,$$

另一方面, 由假设可得

$$\left(x^{-2C} f^2(x)\right)' = 2x^{-2C-1}\left(xf(x)f'(x) - Cf^2(x)\right) \leqslant 0, \qquad \forall x \in (0,1].$$

从而 $x^{-2C}f^2(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调减少.

…………………………………………………………………………………………(10 分)

因此

$$x^{-2C} f^2(x) \leqslant \lim_{t\to 0+} t^{-2C} f^2(t) = 0, \quad \forall x \in (0,1].$$

因此, 在 $[0,1]$ 上成立 $f(x) \equiv 0$.

…………………………………………………………………………………………(15 分)

(2) 取

$$f(x) := \begin{cases} e^{-x^{1-\alpha}}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则容易验证 $f(x)$ 满足假设条件, 但 $f(x) \not\equiv 0$.

…………………………………………………………………………………………(20 分)

得分	
评阅人	

五、设 $c \in (0,1)$, $x_1 \in (0,1)$ 且 $x_1 \neq c(1-x_1^2)$, $x_{n+1} = c(1-x_n^2)\,(n \geqslant 1)$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $c \in (0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$.

证明: 记 $f(x) = c(1-x^2)\,(x \in [0,1])$. 则 $f(x) \in [0,1]$. 所以在题设条件下 $\{x_n\}$ 有界.

另一方面, $f(x) = x$ 在 $[0,1]$ 内只有唯一解 $\bar{x} = \frac{-1+\sqrt{1+4c^2}}{2c}$. 进一步, 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单减, 因此, $f(x) = \bar{x}$ 在 $[0,1]$ 上只有唯一解$\bar{x}$. 所以在题设条件下, $x_n \neq \bar{x}$ $(n \geqslant 1)$.

....(4 分)

法 I. 设 $L = \varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n$, $\ell = \varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n$. 则 $L = c(1-\ell^2)$, $\ell = c(1-L^2)$.

....(8 分)

从而 $L - \ell = c(L-\ell)(L+\ell)$.

当 $c \in (0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ 时, 若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $L \neq \ell$, 则 $L + \ell = \frac{1}{c}$. 从而 $s = L, \ell$ 是满足方程 $cs^2 - s + \frac{1}{c} - c = 0$ 的两个不同的实根. 所以 $1 - 4c(\frac{1}{c} - c) > 0$. 即 $4c^2 > 3$. 得到矛盾. 因此 $\{x_n\}$ 收敛.

....(12 分)

当 $c \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ 时, 若 $\{x_n\}$ 收敛. 则必有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$. 由于 $f'(\bar{x}) = -2c\bar{x} = 1 - \sqrt{1+4c^2} < -1$, 因此存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x - \bar{x}| < \delta$ 时, 成立 $|f'(x)| > 1$. 而对上述 $\delta > 0$, 有 $N \geqslant 1$ 使得当 $n \geqslant N$ 时, $|x_n - \bar{x}| < \delta$, 于是由微分中值定理, 可得 $|x_{n+1} - \bar{x}| = |f(x_n) - f(\bar{x})| \geqslant |x_n - \bar{x}|$, 结合 $x_n \neq \bar{x}$ 知 $\{x_n\}$ 不可能收敛到 $\bar{x}$. 因此, $\{x_n\}$ 发散.

....(15 分)

法 II. 考虑 $g(x) = f(f(x))$, 我们有

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x) = 4c^3x(1-x^2).$$

当 $c \in (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 时, 若 $x \in [0,1]$, 则 $0 \leqslant g'(x) \leqslant r_c \equiv \frac{8c^3\sqrt{3}}{9} < 1$. 从而 $|x_{n+2} - \bar{x}| = |g(x_n) - g(\bar{x})| \leqslant r|x_n - \bar{x}|$. 由此立即得到 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$.

....(8 分)

当 $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 若 $x \in [0,1]$, 且 $x \neq \bar{x}$, 则 $0 \leqslant g'(x) < 1$. 从而 $|x_{n+2} - \bar{x}| = |g(x_n) - g(\bar{x})| < |x_n - \bar{x}|$. 由此得到 $\{|x_{2n} - \bar{x}|\}$ 和 $\{|x_{2n+1} - \bar{x}|\}$ 收敛. 设极限为 d 和 t.

由致密性定理, 存在 $\{x_{2n}\}$ 的子列 $\{x_{2n_k}\}$ 收敛, 设极限为 ξ. 此时 $\{g(x_{2n_k}\}$ 收敛于 $g(\xi)$. 从而 $|g(\xi)-\bar{x}|=\lim\limits_{n\to+\infty}|x_{2n_k+2}-\bar{x}|=d=\lim\limits_{n\to+\infty}|x_{2n_k}-\bar{x}|=|\xi-\bar{x}|$. 因此 $\xi=\bar{x}$, 即 $d=0$. 同理, $t=0$. 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\bar{x}$.

……………………………………………………………………(12 分)

当 $c\in(\frac{\sqrt{3}}{2},1)$ 时, 若 $\{x_n\}$ 收敛. 则必有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\bar{x}$. 由于 $f'(\bar{x})=-2c\bar{x}=1-\sqrt{1+4c^2}<-1$, 因此存在 $\delta>0$ 使得当 $|x-\bar{x}|<\delta$ 时, 成立 $|f'(x)|>1$. 而对上述 $\delta>0$, 有 $N\geqslant 1$ 使得当 $n\geqslant N$ 时, $|x_n-\bar{x}|<\delta$, 于是由微分中值定理, 可得 $|x_{n+1}-\bar{x}|=|f(x_n)-f(\bar{x})|\geqslant|x_n-\bar{x}|$, 结合 $x_n\neq\bar{x}$ 知 $\{x_n\}$ 不可能收敛到 $\bar{x}$. 因此, $\{x_n\}$ 发散.

……………………………………………………………………(15 分)

得分	
评阅人	

六、（本题15分）已知$a(x),b(x),c(x)\in C(R)$, 方程 $\frac{dy}{dx}=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$ 只有有限个2π周期解. 求它的2π周期解个数的最大值.

解：至多两个2π周期解。 [1分]

例如 $a(x)\equiv b(x)\equiv 1, c(x)=0$, 方程只有两个$2\pi$周期解 $y_1\equiv 0, y_2\equiv -1$. [3分]

现设$y_1(x),y_2(x)$ 是2个2π周期解，则由存在唯一性定理 $y_1(x)\neq y_2(x),\forall x\in R$. [5分]

令$y=(y_1(x)-y_2(x))z+y_2(x)$, 则

$$\frac{dz}{dx}=a(x)(y_1(x)-y_2(x))z(z-1)$$

[7分]

若方程除了2个2π周期解 $z\equiv 0, z\equiv 1$外还有一个2π 周期解 $z=z_1(x)$, 则

$$F(x)=\int_0^x a(x)(y_1(x)-y_2(x))x=\int_0^x\frac{dz_1(x)}{z_1(x)(z_1(x)-1)}=ln\left|\frac{z_1(x)-1}{z_1(x)}\right||_0^x$$

是x 的2π 周期函数. [10分]

由方程通解表达式$z(x)=\frac{1}{1-Ce^{F(x)}}$ [13分]

得到方程有无穷多个解是2π周期的，矛盾. [15分]