2017 年第九届全国大学生数学竞赛初赛
（非数学类）试卷

一、填空题（本题 42 分，共 6 小题，每小题 7 分）

1．已知可导函数$f(x)$满足$f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}\,t=x+1$，则$f(x)=$__________________。

2．极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$____________________。

3．设$w=f(u,v)$具有二阶连续偏导数，且$u=x-cy,v=x+cy$，其中c为非零常数，则$w_{xx}-\dfrac{1}{c^2}w_{yy}=$____________。

4．设$f(x)$具有二阶连续导数，且$f(0)=f'(0)=0,f''(0)=6$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x\right)}{x^4}=$____________。

5．不定积分$I=\int\dfrac{e^{-\sin x}\sin 2x}{\left(1-\sin x\right)^2}\mathrm{d}\,x=$______________。

6．记曲面$z^2=x^2+y^2$和$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$围成的空间区域为V，则三重积分$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z=$_________________。

二、（本题 14 分） 设二元函数$f(x,y)$在平面上有连续的二阶偏导数，对任意角度α，定义一元函数$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$，若对任何$\alpha$都有$\dfrac{\mathrm{d}\,g_\alpha(0)}{\mathrm{d}\,t}=0$且$\dfrac{\mathrm{d}^2\,g_\alpha(0)}{\mathrm{d}\,t^2}>0$，证明：$f(0,0)$是$f(x,y)$的极小值。

三、（本题 14 分） 设曲线Γ为曲线$x^2+y^2+z^2=1,x+z=1,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0$上从点$A(1,0,0)$到点$B(0,0,1)$的一段。求曲线积分$I=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}\,x+z\,\mathrm{d}\,y+x\,\mathrm{d}\,z.$

四、（本题 15 分） 设函数$f(x)>0$且在实轴上连续，若对任意实数t，有$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-x|}f(x)\,\mathrm{d}\,x\leq 1$。证明：$\forall a,b$，$a<b$，有$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\leq\dfrac{b-a+2}{2}.$

五、（本题 15 分） 设$\{a_n\}$为一个数列，p为固定的正整数，若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$．证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}.$