全国大学生数学竞赛非数学类模拟一

清疏竞赛考研数学

2023 年 8 月 26 日

摘要

$$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\},\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}.$$

模拟试题应当规定时间独立完成并给予反馈.

1 填空题

填空题 1.1 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-2^{\sin x}}{x^3}=$ $\underline{\ \frac{\ln 2}{6}\ }$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln2}-e^{\sin x\ln 2}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln2-\sin x\cdot\ln2}{x^3}e^{0}=\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)}{x^3}\cdot\ln2=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\cdot\ln2$$

填空题 1.2 $y(x)=\int_{\sin x}^{x^2}(x+t)\,dt$, 则 $y''(0)=$ $\underline{\ -3\ }$

$y(x)=\int_{x+\sin x}^{x^2+x}t\,dt$, $y'(x)=(x^2+x)(2x+1)-(x+\sin x)(1+\cos x)$

$y''(x)=(2x+1)^2+2(x^2+x)-(1+\cos x)^2+\sin x(x+\sin x)$

填空题 1.3 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续, 且有极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)+3x-4y}{x^2+y^2}=2$, 则 $2f'_x(0,0)+f'_y(0,0)=$ $\underline{\ -2\ }$

-3 4

$f(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2})$

$f(x,y)=-3x+4y+2(x^2+y^2)+o(x^2+y^2)$

$\frac{o(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{o(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}$ $\to 0$ $\to 0$

填空题 1.4 计算积分 $\int\left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2dx=$ $\underline{\ x-\frac{1+x^2}{x-\arctan x}+C\ }$

填空题 1.5 设 f 连续可微, 曲面 $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^3f\left(\frac{y}{x}\right)$ 上任意一点处的切平面在 OZ 轴上的截距与切点到坐标原点距离之比为常数 $\underline{\ -2\ }$

1.4 $\int\left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2dx=\int\left(\frac{\arctan x-x+x}{x-\arctan x}\right)^2dx$

$=\int\left(\frac{x}{x-\arctan x}-1\right)^2dx$

$=x-\int\frac{2x}{x-\arctan x}dx+\int\frac{x^2}{(x-\arctan x)^2}dx$

$=x-\int\frac{2x}{x-\arctan x}dx-\int(1+x^2)\,d\frac{1}{x-\arctan x}$

$(x-\arctan x)'=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}$

1.5 : $F = z+\sqrt{x^2+y^2+z^2} - x^3 f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

$F_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 3x^2 f\left(\frac{y}{x}\right) + xyf'\left(\frac{y}{x}\right)$

$F_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - x^2 f'\left(\frac{y}{x}\right)$

$F_z = 1+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ，见最后.

$$= x - \int \frac{2x}{x-\arctan x}dx - \frac{1+x^2}{x-\arctan x} + \int \frac{2x}{x-\arctan x}dx$$

2 解答题

解答题 2.1 给定 $a+b \geqslant 0, b>a$, 设 f 在 $[a,b]$ 连续, (a,b) 可微, 且有

$$f(a) = f(b) = \frac{a}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = a+b.$$

证明对任意实数 λ, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\boxed{f'(\xi) = \lambda\left[f(\xi) - \frac{\xi}{2}\right] + \frac{1}{2}.}$$

证明:

分析: ① $y' = \lambda\left(y - \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \Rightarrow y' - \lambda y = -\frac{\lambda}{2}x + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y(x) = Ce^{\lambda x} + \frac{x}{2}$

② 分离 C 即得解: $C(x) = \frac{y(x) - \frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$

并视为 $C(x)$

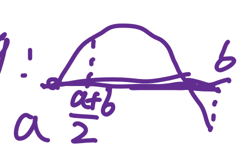
考试中无须展示上述步骤.

证明:

构造 $g(x) = \frac{f(x) - \frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$ $\quad g'(x) = \frac{\left(f'(x) - \frac{1}{2} - \lambda f(x) + \frac{\lambda x}{2}\right)}{e^{\lambda x}}$

$g(a) = \frac{f(a) - \frac{a}{2}}{e^{\lambda a}} = 0$, $\quad g(b) = \frac{\frac{a}{2} - \frac{b}{2}}{e^{\lambda b}} < 0$

$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{a+b-\frac{a+b}{4}}{e^{\frac{a+b}{2}\lambda}} = \frac{3(a+b)}{4e^{\frac{a+b}{2}\lambda}} \geqslant 0 \Rightarrow g:$



若 $g\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, 则由零点定理, $\exists\, \theta \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, 使 $g(\theta) = 0$.

否则 $g\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, 无论如何, g 都有两个不同零点, 由罗尔 $\exists\, \xi \in (a,b)$

使 $g'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)=\lambda[f(\xi)-\frac{\xi}{2}]+\frac{1}{2}$.

我们完成了证明.

解答题 2.2 设

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2-2x^2y-\frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

证明

(1): $f\in C(\mathbb{R}^2)$.

(2): f 限制在过原点的直线上, f 在原点取得局部极小值.

(3): f 在 $(0,0)$ 不取局部极小值.

(1): 当 $(x,y)\neq(0,0)$, 是初等函数, 此时 f 连续,

当 $(x,y)=(0,0)$, $\left|x^2+y^2-2x^2y-\frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2}\right|$

$$\leq x^2+y^2+2x^2|y|+4\frac{x^6y^2}{(2x^2|y|)^2}$$

$$=x^2+y^2+2x^2|y|+x^2\to 0, \text{当} (x,y)\to(0,0)$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$, 因此 $f\in C(\mathbb{R}^2)$

(2): $f(x,0)=x^2\geq 0$, 故在 $y=0$ 上, f 在原点附近取极值.

对 $k\neq 0$, $f(x,kx)=(1+k^2)x^2-\underbrace{\frac{4k^2x^4}{(x^2+k^2)^2}}_{0\ 4\text{重根}}=g_k(x)$

因此 $g_k'(0)=0$, $g_k''(0)=2(1+k^2)>0$.

故 f 在 $y=kx$ 上, 原点附近取极小值.

(3): 误区: ✗ 对每一个 $k\in\mathbb{R}$, 须要的邻域的半径会趋于0, 即无法产生一个公共的0的邻域来保证 $f(x,y)>0$.

可取 $y=x^2$, 此时 $f(x,x^2)=-x^4\leq 0$, 因此 f 在 $(0,0)$ 不取极小值.

有同学指出对于使用二阶导数判断极值发现的是极小值.
这里原因来自于这个判别法需要二阶导数连续.

解答题 2.3 把 $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ 在收敛域内展开为幂级数，并以此证明

$$\sum_{k+j=n,0\leqslant k,j\leqslant n} C_{2k}^{k}C_{2j}^{j}=4^n.$$

解: $(1+x)^a=\sum_{k=0}^{+\infty} C_a^k x^k$, $a\notin N$, $C_a^k \triangleq \begin{cases} 1, & k=0 \\ \dfrac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}, & k\in N \end{cases}$

取 $a=-\frac{1}{2}$, x 替换为 $-4x$, 则有

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{+\infty} C_{-\frac{1}{2}}^{k}(-4x)^k=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(-4x)^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+k-1)}{k!}(4x)^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{2}}{k!}\cdot(4x)^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k(2k-1)!!}{k!}x^k$$

$$C_{2k}^{k}=\frac{(2k)!}{(k!)^2}=\frac{(2k)!!\cdot(2k-1)!!}{(k!)^2}=\frac{2^k\cdot k!\cdot(2k-1)!!}{(k!)^2}=\frac{2^k(2k-1)!!}{k!}$$

快速求幂级数收敛区间的办法.

① 找到和函数的所有奇点.(例如 $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$, 奇点 $\frac{1}{4}$)

② 以展开点为心做圆, 一直扩大圆使得圆第一次接触到奇点.

(例) 

③ 此时的圆半径就是收敛半径(例: 上述幂级数收敛区间 $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$)

端点须单独判断: 经验性的, 如果和函数连续到端点, 则收敛域包含此端点.(非数几乎不会遇到反例), 因此本题收敛域 $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

严格的：若幂级数在端点收敛，则和函数一定连续到端点。

对于本题：$\frac{2^k\cdot(2k-1)!!}{k!}\left(\frac{1}{4}\right)^k=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$（2.12 wallis公式），见最后。

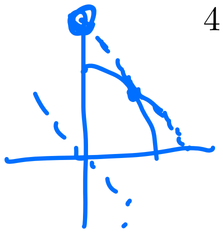
解答题 2.4 设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x,y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 1\}$，证明

$$\frac{\pi}{4\sqrt{4\sqrt{10}+15}}\leqslant\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{(x+3y+2)^2+1}}\leqslant\frac{\sqrt{5}\pi}{20}.$$

$xx_0+yy_0=1\Rightarrow y=\frac{1-xx_0}{y_0}$，$-\frac{x_0}{y_0}=-\frac{1}{3}$，$y_0=3x_0$

$x_0=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$y_0=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\frac{x}{\sqrt{10}}+\frac{3y}{\sqrt{10}}=1$

证明：

① 求在$(x,y)\in D$，$|x+3y+2|$的最大和最小值。

令 $g(x,y)=x+3y+2=z$，则 $y=\frac{1}{3}(z-2-x)=\frac{z-2}{3}-\frac{1}{3}x$

由线性规划，$2\leq z\leq 2+\sqrt{10}$

令 $h(x,y)=-x-3y-2=z$，$y=-\frac{x}{3}-\frac{z+2}{3}$

得 $-2-\sqrt{10}\leq z\leq -2$.

故 $2\leq|x+3y+2|\leq 2+\sqrt{10}$，从而

$$\frac{\sqrt{5}\pi}{20}=\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{5}}\geq\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{|x+3y+2|^2+1}}\geq\iint\frac{dxdy}{\sqrt{(2+\sqrt{10})^2+1}}=\frac{\pi}{4\sqrt{15+4\sqrt{10}}}$$

$$f(2)-\cancel{f(3)}+\cancel{f(3)}-\cancel{f(4)}\cdots+\cancel{f(m-1)}-f(m)$$
$$=f(2)-f(m)$$

解答题 2.5 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=+\infty,\lambda>0$, 证明下述级数收敛并求和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)\cdots(a_{n+1}+\lambda)}.$$

解: 非数学比赛级数求和难题大既就是裂项.

$$A=\sum_{n=2}^{m}\left[\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+\lambda)\cdots(a_n+\lambda)}-\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+\lambda)\cdots(a_{n+1}+\lambda)}\right]$$

$$=\sum_{n=2}^{m}\frac{a_1a_2\cdots a_n(a_{n+1}+\lambda)-a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+\lambda)\cdots(a_{n+1}+\lambda)}=\lambda\sum_{n=2}^{m}\frac{a_1\cdots a_n}{(a_2+\lambda)\cdots(a_{n+1}+\lambda)}$$

$$A=\frac{a_1a_2}{a_2+\lambda}-\frac{a_1\cdots a_{m+1}}{(a_2+\lambda)\cdots(a_{m+1}+\lambda)}=\frac{a_1a_2}{a_2+\lambda}-\frac{a_1}{\left(1+\frac{\lambda}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{a_{m+1}}\right)}$$

而 $\ln\left[\left(1+\frac{\lambda}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{a_m}\right)\right]=\sum\limits_{k=2}^{m}\ln\left(1+\frac{\lambda}{a_k}\right)\sim\sum\limits_{k=2}^{m}\frac{\lambda}{a_k}\to+\infty$

故 $A\to\frac{a_1a_2}{a_2+\lambda}$, 故原级数 $=\frac{a_1}{a_2+\lambda}+\frac{a_1a_2}{\lambda(a_2+\lambda)}$

$$=\frac{(\lambda+a_2)a_1}{\lambda(a_2+\lambda)}=\frac{a_1}{\lambda}.$$

解答题 2.6 设 $p>1$, 对任何 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^p<\infty$, 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^{\frac{p}{p-1}}<\infty.$$

证: 经典结论: 对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 则

① 若 $p>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛

② 若 $0<p\le1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 同敛散.

引理证明: ①: 当 $p>1$, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^p}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^p}\le\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^p}dx=\int_{S_1}^{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n}\frac{1}{x^p}dx<+\infty$

②: 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=A<+\infty$, 则 $\frac{a_n}{S_n^p}\sim\frac{a_n}{A^p}$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^p}<+\infty$.

若 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$, 由 $\frac{\frac{a_n}{S_n^p}}{\frac{a_n}{S_n}}=S_n^{1-p}\to+\infty$, 下证 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}=+\infty$.

$\forall p\ge1$, $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\ge\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_{n+p}}=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}$, 令 $p\to+\infty$, 此时 $\frac{S_n}{S_{n+p}}\to0$

故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散 (Cauchy 收敛准则). 引理证毕. 见后面.

1.5续: 切平面方程 (视为 u,v,w 的方程)

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-3x^2f\left(\frac{y}{x}\right)+xyf'\left(\frac{y}{x}\right)\right)(u-x)+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-x^2f'\left(\frac{y}{x}\right)\right)(v-y)$$
$$+\left(1+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)(w-z)=0$$

令 $u=v=0$，解得 $w=-2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为截距.

切点 (x,y,z) 到原点的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，故 $\frac{w}{d}=-2$

2.3：$\sum\frac{1}{\sqrt{k}}$ 发散，故原幂级数在 $x=\frac{1}{4}$ 发散.

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k(2k-1)!!}{k!}\left(-\frac{1}{4}\right)^k=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

下证 $\frac{(2k-1)!!}{2k!!}$ 递减（趋于0由wallis得）

由
$$\frac{\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}}{\frac{(2k-1)!!}{2k!!}}=\frac{2k+1}{2k+2}<1,\ k=1,2,\cdots$$
即知原幂级数在 $x=\frac{1}{4}$

收敛. 故收敛域 $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

课内知识点：幂级数的cauchy积.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n,\quad c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$$

故 $\underline{\sum_{j=0}^{k}C_{2j}^{j}C_{2(k-j)}^{k-j}}=4^n\iff\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4x}}=\frac{1}{1-4x}=\sum_{n=0}^{+\infty}4^nx^n$

故 $4^n=\sum_{k+j=n}C_{2j}^{j}C_{2k}^{k}$.

2.6 续：若 $\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|^{\frac{p}{p-1}}=+\infty$。不妨设 $|b_1|>0$。令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}|b_k|^{\frac{p}{p-1}}$

取 $a_n=\dfrac{\operatorname{sgn} b_n\cdot|b_n|^{\frac{1}{p-1}}}{S_n}$，则 $a_nb_n=\dfrac{|b_n|^{\frac{p}{p-1}}}{S_n}$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^p=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{|b_n|^{\frac{p}{p-1}}}{S_n^p}<+\infty$（结论①）

由条件 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{|b_n|^{\frac{p}{p-1}}}{S_n}$ 收敛.

由结论②，$\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{|b_n|^{\frac{p}{p-1}}}{S_n}=+\infty$，发散！矛盾！

故 $\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|^{\frac{p}{p-1}}$ 收敛.