2022 年 11 月初赛试题及解答(非数学类)

第十四届全国大学生数学竞赛初赛试题及参考解答

（非数学类，2022 年 11 月 12 日）

一、　填空题**(本题满分 30 分，每小题 6 分)**

（1） 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{1+x^2-\cos^2 x}=$ ________.

【解】 利用洛必达法则，得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}\sin x+\dfrac{x\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{2x+2\cos x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{2+2\dfrac{\sin x}{x}\cdot\cos x}=\frac{1}{2}.$$

（2）设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x-1 & x\ge 1,\\ 1-x, & x<1,\end{cases}$ 则复合函数 $f\left[g(x)\right]$ 的间断点为 $x=$ ________.

【解】 显然，复合函数 $f\left[g(x)\right]=\begin{cases}1, & g(x)>0,\\ 0, & g(x)\le 0,\end{cases}=\begin{cases}1 & x\ne 1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ 所以 $f\left[g(x)\right]$ 的惟一间断点为 $x=1$.

（3）极限 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=$ ________.

【解】 易知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的和函数为：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$, $|x|<1$，所以

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^3\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\lim_{x\to 1^-}(x^2+x)=2.$$

（4）微分方程 $\dfrac{dy}{dx}x\ln x\sin y+\cos y(1-x\cos y)=0$ 的通解为 ________.

【解】 原方程等价于 $\dfrac{dy}{dx}\sin y+\dfrac{1}{x\ln x}\cos y=\dfrac{1}{\ln x}\cos^2 y$. 令 $u=\cos y$，则方程可化为 $\dfrac{du}{dx}-\dfrac{1}{x\ln x}u=-\dfrac{1}{\ln x}u^2$. 再令 $w=\dfrac{1}{u}$，则方程可进一步化为 $\dfrac{dw}{dx}+\dfrac{1}{x\ln x}w=\dfrac{1}{\ln x}$. 这是一阶线性微分方程，利用求解公式得

$$w=e^{-\int\frac{dx}{x\ln x}}\left(\int\frac{1}{\ln x}e^{\int\frac{dx}{x\ln x}}dx+C\right)=\frac{1}{\ln x}(x+C).$$

将变量 $w=\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{\cos y}$ 代回，得

$$(x+C)\cos y=\ln x.$$

（5）记 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x+y\le\dfrac{\pi}{2},0\le x-y\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$，则

$$\iint_D y\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{\qquad\qquad}.$$

【解】 （**方法 1**）利用三角公式：$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$，并根据重积分的对称性，得

$$\text{原式}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}y\sin y\mathrm{d}y\int_y^{\frac{\pi}{2}-y}\cos x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}y\sin y(\cos y-\sin y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}y\sin 2y\mathrm{d}y+\int_0^{\frac{\pi}{4}}y\cos 2y\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{4}}y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)-\frac{\pi^2}{32}=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi^2}{32}.$$

（**方法 2**）利用二元变量代换，令 $\begin{cases}u=x+y\\v=x-y\end{cases}$，则 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(u+v)\\y=\dfrac{1}{2}(u-v)\end{cases}$. 因为

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}&\dfrac{\partial x}{\partial v}\\\dfrac{\partial y}{\partial u}&\dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\\\dfrac{1}{2}&-\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

所以

$$\text{原式}=|J|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(u-v)\sin u\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\sin u\mathrm{d}u-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}v\mathrm{d}v\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{2}\times1-\frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{8}\times1=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi^2}{32}.$$

二、**(本题满分 14 分)** 记向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 α，$\left|\overrightarrow{OA}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{OB}\right|=2$，$\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OB}$，$0\le\lambda\le1$.

（1）问当 λ 为何值时，$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ 取得最小值；

（2）设（1）中的 λ 满足 $0<\lambda<\dfrac{1}{5}$，求夹角 α 的取值范围.

【解】 （1）根据余弦定理，并注意到 $0\le\alpha\le\pi$，得

$$f(\lambda)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=(1-\lambda)^2+4\lambda^2-4\lambda(1-\lambda)\cos\alpha$$
$$=(5+4\cos\alpha)\lambda^2-2(1+2\cos\alpha)\lambda+1$$

$$=(5+4\cos\alpha)\left(\lambda-\frac{1+2\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}\right)^2+1-\frac{(1+2\cos\alpha)^2}{5+4\cos\alpha},$$

因此，当 $\lambda=\dfrac{1+2\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}$ 时，$0\le\lambda\le1$，$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ 取得最小值. ------------ 6 分

（2）令 $y=\cos\alpha$，则 $\lambda=\dfrac{1+2y}{5+4y}$ 的反函数为 $g(\lambda)=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5\lambda-1}{2\lambda-1}$. 易知 $g(\lambda)$ 在 $\left(0,\ \dfrac{1}{5}\right)$ 单调增加，其值域为 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，所以 $-\dfrac{1}{2}<\cos\alpha<0$，注意到 $\cos\alpha$ 在 $[0,\pi]$ 上单调减，解得 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{2\pi}{3}$，即夹角 α 的取值范围为 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$. ------------ 8 分

三、(本题满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上二阶可导，$f(0)=1$，且当 $x\ge0$ 时，$f(x)\ge0$，$f'(x)\le0$，$f''(x)\le f(x)$，证明：$f'(0)\ge-\sqrt{2}$.

【证】 任取 $x\in(0,1)$，对 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上利用 Lagrange 中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(x)-f(0)=xf'(\xi)$. 因为 $f(0)=1$，$f(x)\ge0\ (x>0)$，所以

$$-\frac{1}{x}\le f'(\xi)\le0.$$ ------------ 5 分

令 $F(x)=[f'(x)]^2-[f(x)]^2$，则 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且

$$F'(x)=2f'(x)[f''(x)-f(x)].$$

根据题设条件，当 $x\ge0$ 时，$f'(x)\le0$，$f''(x)\le f(x)$，所以 $F'(x)\ge0$. 这表明 $F(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调增加，从而有 $F(\xi)\ge F(0)$，可得

$$[f'(\xi)]^2-[f'(0)]^2\ge[f(\xi)]^2-[f(0)]^2\ge-1,$$

因此 $[f'(0)]^2\le[f'(\xi)]^2+1\le1+\dfrac{1}{x^2}$. ------------ 7 分

由于 $\lim\limits_{x\to1^-}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=2$，所以 $[f'(0)]^2\le2$，从而有 $f'(0)\ge-\sqrt{2}$. ------------ 2 分

四、(本题满分 14 分) 证明：对任意正整数 n，恒有：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x\le\left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2.$$

【证】 首先，利用归纳法易证：对 $n\ge1$，$|\sin nx|\le n\sin x\quad\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.

------------ 2 分

又由于 $|\sin nx|\le 1$，及 $\sin x\ge \dfrac{2}{\pi}x \quad \left(0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\right)$， ------------ 2 分

所以当 $n>1$ 时，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2n}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x$$

$$\le n^4\int_0^{\frac{\pi}{2n}} x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{1}{2x/\pi}\right)^4 \mathrm{d}x=\frac{n^4}{2}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2+\frac{\pi^4}{16}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$$

$$=\frac{n^2\pi^2}{8}+\frac{\pi^4}{16}\cdot\frac{1}{(-2x^2)}\Bigg|_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{n^2\pi^2}{8}-\frac{\pi^4}{16}\left(\frac{2}{\pi^2}-\frac{2n^2}{\pi^2}\right)=\left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2.$$

------------ 8 分

当 $n=1$ 时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x=\dfrac{\pi^2}{8}$，等号成立. ------------ 2 分

五、**(本题满分 14 分)** 设 $z=f(x,y)$ 是区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$ 上的可微函数，$f(0,0)=0$，且 $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-\sqrt[4]{1-x^4}}$.

【解】 交换二次积分的次序，得 $\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u=-\int_0^{x}\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\mathrm{d}t$.

------------ 3 分

由于 $f(x,y)$ 在 D 上可微，所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的半径为1的扇形域内连续，从而 $\varphi(u)=\int_0^{u^2}f(t,u)\mathrm{d}t$ 在 $u=0$ 的某邻域内连续，因此

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-\sqrt[4]{1-x^4}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\int_0^{x}\varphi(u)\mathrm{d}u}{\frac{x^4}{4}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)}{x^3}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t}{x^3}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\xi,x)x^2}{x^3}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\xi,x)}{x},\ 0<\xi<x^2.$$ ------------ 6 分

因为 $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$，所以 $f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=2$. 又 $f(0,0)=0$，于是

$$f(\xi,x)=f(0,0)+f_x(0,0)\xi+f_y(0,0)x+o(\sqrt{\xi^2+x^2})=3\xi+2x+o(\sqrt{\xi^2+x^2})\ .$$

注意到 $0<\dfrac{\xi}{x}<x$，故由夹逼准则知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\xi}{x}=0$，从而

$$\lim_{x\to0^+}\frac{o(\sqrt{\xi^2+x^2})}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{o(\sqrt{\xi^2+x^2})}{\sqrt{\xi^2+x^2}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\xi}{x}\right)^2}=0.$$

所以

$$I=-\lim_{x\to0^+}\frac{f(\xi,x)}{x}=-\lim_{x\to0^+}\frac{3\xi+2x+o(\sqrt{\xi^2+x^2})}{x}=-2.$$ ------------ 5 分

六、 **(本题满分 14 分)** 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明：存在收敛的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，使得$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$.

【证】 因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，所以$\forall\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得当$n>N$时$\sum_{k=n}^{\infty}a_k<\varepsilon$.

特别，对$k=1,2,\cdots$，取$\varepsilon=\frac{1}{3^k}$，则存在$1<n_1<n_2<\cdots<n_{k-1}<n_k$，使得$\sum_{l=n_k}^{\infty}a_l<\frac{1}{3^k}$.

------------ 4 分

构造$\{b_n\}$如下：当$1\le n<n_1$时，$b_n=a_n$；当$n_k\le n<n_{k+1}$时，$b_n=2^k a_n$，$k=1,2,\cdots$.

------------ 5 分

显然，当$n\to\infty$时，$k\to\infty$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_n}{2^k a_n}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}=0.$$

此时，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}b_n&=\sum_{n=1}^{n_1-1}a_n+\sum_{l=n_1}^{n_2-1}2a_l+\sum_{l=n_2}^{n_3-1}2^2a_l+\cdots\\&\le\sum_{n=1}^{n_1-1}a_n+2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{n_1-1}a_n+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{3^k}=\sum_{n=1}^{n_1-1}a_n+2<+\infty\end{aligned}$$

因此，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛. ------------ 5 分