第十届清疏竞赛班非数学类 17

反常积分证明

课后看第九届非数学类 17

$f\left(x\right)$在$\left[0,+\infty\right)$的任何有限闭区间上可积, 若$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=l,$

证明$\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\int_0^X f\left(x\right)dx=l.$

分析：注意到f不连续的时候不一定有$\left(\int_0^X f\left(x\right)dx\right)'=f\left(X\right)$,所以无法洛必达.

证明：

$\forall\varepsilon>0,$存在$X_0>0,$使得$\left|f\left(x\right)-l\right|\le\frac{\varepsilon}{2},\forall x\ge X_0.$

因为$\lim\limits_{X\to+\infty}\left|\frac{1}{X}\int_0^{X_0}\left[f\left(x\right)-l\right]dx\right|=0,$ 所以存在$X_1>0,$ 使得

$$\left|\frac{1}{X}\int_0^{X_0}\left[f\left(x\right)-l\right]dx\right|\le\frac{\varepsilon}{2},\forall x\ge X_1$$

当$x\ge\max\left\{X_0,X_1\right\}$时候, 我们有

$$\left|\frac{1}{X}\int_0^X f\left(x\right)dx-l\right|=\left|\frac{1}{X}\int_0^X\left[f\left(x\right)-l\right]dx\right|$$

$$\le\left|\frac{1}{X}\int_0^{X_0}\left[f\left(x\right)-l\right]dx\right|+\left|\frac{1}{X}\int_{X_0}^X\left[f\left(x\right)-l\right]dx\right|$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{X}\int_{X_0}^X\frac{\varepsilon}{2}dx\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{X}\int_0^X\frac{\varepsilon}{2}dx=\varepsilon.$$

故$\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\int_0^X f\left(x\right)dx=l.$

设$f \in C[0,+\infty)$且$f(x) > 0$，若$\int_0^{\infty} \frac{1}{f(x)} dx$收敛，证明

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \int_0^X f(x) dx = +\infty.$$

证明：

$$\int_0^X f(x) dx \int_0^X \frac{1}{f(x)} dx \geq \left(\int_0^X \sqrt{f(x)} \sqrt{\frac{1}{f(x)}} dx \right)^2 = X^2$$

故$\frac{1}{X} \int_0^X f(x) dx \geq \frac{X}{\int_0^X \frac{1}{f(x)} dx}$

因此$\lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \int_0^X f(x) dx = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{\int_0^X \frac{1}{f(x)} dx} = +\infty.$

判断$\int_{e^2}^{\infty}\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}dx$收敛性.

$$\int_{e^2}^{\infty}\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}dx=\int_{e^2}^{\infty}\frac{1}{\ln x\ln\ln x}d\ln x=\int_{2}^{\infty}\frac{1}{y\ln y}dy$$

$$=\int_{2}^{\infty}\frac{1}{\ln y}d\ln y=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{1}{z}dz=+\infty$$

$f:[1,+\infty)\to(e,+\infty)$递增函数,若$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{f(x)}dx=+\infty$, $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x\ln f(x)}dx=+\infty$,

但可能有$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x\ln f(x)\ln\ln f(x)}dx<\infty$.

提示：构造$f(x)=e^{e^{e^n}}, e^{e^{e^{n-1}}}\le x<e^{e^{e^n}}, n\in\mathbb{N}$.

证明：

$$\int_{e^e}^{\infty}\frac{1}{x\ln f(x)\ln\ln f(x)}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{e^{e^{e^{n-1}}}}^{e^{e^{e^n}}}\frac{1}{x\ln f(x)\ln\ln f(x)}dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{e^{e^{e^{n-1}}}}^{e^{e^{e^n}}}\frac{1}{x\ln e^{e^{e^n}}\ln\ln e^{e^{e^n}}}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{e^{e^{e^{n-1}}}}^{e^{e^{e^n}}}\frac{1}{xe^{e^n}\cdot e^n}dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln e^{e^{e^n}}-\ln e^{e^{e^{n-1}}}}{e^{n+e^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{e^n}-e^{e^{n-1}}}{e^{n+e^n}}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{e^n}}{e^{n+e^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}<\infty.$$

$f\in C[0,+\infty),\int_0^{\infty}g(x)dx$绝对收敛,证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}f\left(\frac{x}{n}\right)g(x)dx=f(0)\int_0^{\infty}g(x)dx.$$

证明：

$\forall\varepsilon>0,$存在$\delta>0,$使得当$x\in[0,\delta),$都有$\left|f(x)-f(0)\right|\le\varepsilon.$

那么当$n>\dfrac{1}{\delta^2},$我们有$0\le\dfrac{x}{n}\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\delta,\forall x\in\left[0,\sqrt{n}\right],$

这就暗示

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^{\sqrt{n}}f\left(\frac{x}{n}\right)g(x)dx-\int_0^{\sqrt{n}}f(0)g(x)dx\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^{\sqrt{n}}\left[f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)\right]g(x)dx\right|$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left|f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)\right|\cdot\left|g(x)\right|dx$$

$$\le\varepsilon\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left|g(x)\right|dx=\varepsilon\int_0^{\infty}\left|g(x)\right|dx$$

因此由ε任意性,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\sqrt{n}}f\left(\frac{x}{n}\right)g(x)dx-\int_0^{\sqrt{n}}f(0)g(x)dx\right)=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}f\left(\frac{x}{n}\right)g(x)dx=f(0)\int_0^{\infty}g(x)dx.$$

$f(x) \in D[a,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty, f'(x)$ 严格递增, 证明：

$\int_0^{\infty} \sin f(x) dx$ 收敛.

证明：

首先 $f'(x)$ 没有第二类间断点且单调函数没有第一类间断点

所以 $f' \in C[a,+\infty)$.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, 存在 $X > 0$, 使得 $f'(x) > 0, \forall x \geq X$ 都成立.

故 $f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 严格递增且反函数 $g(x)$ 存在.

$$\int_X^{\infty} \sin f(x) dx \overset{x=g(y)}{=} \int_{f(X)}^{\infty} \sin f(g(y)) g'(y) dy = \int_{f(X)}^{\infty} \sin y \cdot g'(y) dy$$

$f(g(y)) = y, \forall y \geq f(X)$, 所以 $g'(y) f'(g(y)) = 1$, 因此

$$\int_{f(X)}^{\infty} \sin y \cdot g'(y) dy = \int_{f(X)}^{\infty} \sin y \cdot \frac{1}{f'(g(y))} dy.$$

又 $\left|\int_{f(X)}^{z} \sin y dy\right| = |\cos z - \cos f(X)| \leq 2, \forall z \geq f(X)$, 以及

$g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))} > 0$, 所以 g 递增, 所以 $\dfrac{1}{f'(g(y))}$ 递减,

又若 $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = a < +\infty$，则 $f(a) = \lim\limits_{y\to+\infty} f(g(y)) = \lim\limits_{y\to+\infty} y = +\infty$, 矛盾！

因此 $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = +\infty$，从而 $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{1}{f'(g(y))} = 0$.

因此由 $A-D$ 判别法我们就证明了 $\int_0^{\infty} \sin f(x) dx$ 收敛.

$f\in C^1\left[0,+\infty\right),\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=0,$ 且 $\alpha>-1,$ 使得 $\int_0^\infty t^{\alpha+1}f'\left(t\right)dt$ 收敛

证明：$\int_0^\infty t^\alpha f\left(t\right)dt$ 收敛且等于 $-\dfrac{1}{\alpha+1}\int_0^\infty t^{\alpha+1}f'\left(t\right)dt.$

分析：

实际上解微分方程并不是一个严谨的过程，

但是至少给出了我们该如何去表示.

证明：

$$\int_0^x t^{\alpha+1}df\left(t\right)=\int_0^x t^{\alpha+1}df\left(t\right)=\left[f\left(x\right)x^{\alpha+1}-\left(\alpha+1\right)\int_0^x f\left(t\right)t^\alpha dt\right]$$

记 $F\left(x\right)=\int_0^x t^\alpha f\left(t\right)dt,G\left(x\right)=\int_0^x t^{\alpha+1}f'\left(t\right)dt,$ 目标用 G 表示 $F.$

$$G\left(x\right)=x^{\alpha+1}f\left(x\right)-\left(\alpha+1\right)F\left(x\right)=xF'\left(x\right)-\left(\alpha+1\right)F\left(x\right)$$

$$\frac{G\left(x\right)}{x^{\alpha+2}}=\frac{xF'\left(x\right)-\left(\alpha+1\right)F\left(x\right)}{x^{\alpha+2}}=\left(\frac{F\left(x\right)}{x^{\alpha+1}}\right)',$$

于是由 $\lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{F\left(z\right)}{z^{\alpha+1}}=\lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{\int_0^z t^\alpha f\left(t\right)dt}{z^{\alpha+1}}\overset{洛}{=}\lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{z^\alpha f\left(z\right)}{\left(\alpha+1\right)z^\alpha}=0,$

和 $\int_x^\infty\dfrac{G\left(y\right)}{y^{\alpha+2}}dy=\lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{F\left(z\right)}{z^{\alpha+1}}-\dfrac{F\left(x\right)}{x^{\alpha+1}},$ 我们有

$F\left(x\right)=-x^{\alpha+1}\int_x^\infty\dfrac{G\left(y\right)dy}{y^{\alpha+2}},$ 此时就回到了第一题的想法.

记 $\int_0^\infty t^{\alpha+1}f'\left(t\right)dt=l,\forall\varepsilon>0,$ 存在 $x_0>0,\forall x>x_0,$ 都有 $\left|G\left(y\right)-l\right|<\varepsilon,$

从而当 $x>x_0,$ 我们有

$$\left|F\left(x\right)+\frac{l}{\alpha+1}\right|=\left|x^{\alpha+1}\int_x^\infty\frac{\left[G\left(y\right)-l\right]dy}{y^{\alpha+2}}\right|\le x^{\alpha+1}\int_x^\infty\frac{\varepsilon dy}{y^{\alpha+2}}=\frac{\varepsilon}{\alpha+1}$$

因此我们证明了 $\int_0^\infty t^\alpha f\left(t\right)dt$ 收敛且等于 $-\dfrac{1}{\alpha+1}\int_0^\infty t^{\alpha+1}f'\left(t\right)dt.$

$\int_a^{\infty} f(x)dx$收敛且$xf(x)$单调,证明$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\ln x=0,$

证明：

若$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=+\infty$：

意味着当x充分大,我们有$f(x)>\frac{1}{x}$,此时$\int_a^{\infty} f(x)dx$发散.

若$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=-\infty$：

意味着当x充分大,我们有$f(x)<-\frac{1}{x}$,此时$\int_a^{\infty} f(x)dx$发散.

若$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=a\in\mathbb{R}-\{0\}$:

不妨设$a>0$,意味着当x充分大,我们有$f(x)>\frac{a}{2x}$,此时$\int_a^{\infty} f(x)dx$发散.

因此$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$,所以不妨设$xf(x)$单调递减，因此$f(x)>0$.

$$\int_{\sqrt{B}}^{B} f(x)dx=\int_{\sqrt{B}}^{B}\frac{xf(x)}{x}dx\geq Bf(B)\int_{\sqrt{B}}^{B}\frac{1}{x}dx=Bf(B)\ln\sqrt{B}=\frac{1}{2}Bf(B)\ln B.$$

反之，

$$\int_{B}^{B^2} f(x)dx=\int_{B}^{B^2}\frac{xf(x)}{x}dx\leq Bf(B)\int_{B}^{B^2}\frac{1}{x}dx=Bf(B)\ln B.$$

因此由$Cauchy$收敛准则,我们有$\lim\limits_{B\to+\infty}\int_B^{B^2} f(x)dx=\lim\limits_{B\to+\infty}\int_{\sqrt{B}}^{B} f(x)dx=0,$

由夹逼准则,我们有$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\ln x=0.$

$f(x)\in C(1,+\infty)$, $\int_1^{\infty} f(x)dx$收敛, 证明存在$\xi\in(1,+\infty)$使得

$$\int_1^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^{\xi} f(x)dx.$$

证明：

$\int_1^{\infty} f(x)dx$收敛且$\dfrac{1}{x}$递减到0,

因此由$A-D$判别法我们知道$\int_1^{\infty}\dfrac{f(x)}{x}dx$收敛.

记$a=\int_1^{\infty}\dfrac{f(x)}{x}dx$,所以考虑$F(x)=\int_1^{x} f(y)dy, F(1)=0$

如果$\int_1^{\infty}\dfrac{f(x)}{x}dx\neq F(x),\forall x>1$,由连续性,

不妨设$F(x)>\int_1^{\infty}\dfrac{f(y)}{y}dy=a,\forall x>1$,因此

$$a=\int_1^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dF(x)=\int_1^{\infty}\frac{F(x)}{x^2}dx>\int_1^{\infty}\frac{a}{x^2}dx=a,\text{矛盾！}$$

附：

实际上本题可去掉$f\in C(1,+\infty)$,上述分部积分要用$R-S$积分代替,

此结果仅供数学专业的同学训练.

$f\in D^2[0,+\infty)$, f,f''在其上都平方可积, 证明f'在其上也平方可积.
证明：

$$\int_0^\infty |f(x)f''(x)|dx \le \frac{1}{2}\int_0^\infty |f(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty |f''(x)|^2 dx < \infty,$$

所以$\int_0^\infty f(x)f''(x)dx$收敛.

$$\int_0^x f(y)f''(y)dy = \int_0^x f(y)df'(y)$$

$$= f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x |f'(y)|^2 dy,$$

所以要证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x |f'(y)|^2 dy$存在，由于被积函数非负, 所以
变限积分单调, 所有只需证明存在一个子列$x_n\to+\infty$, 使得
$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{x_n} |f'(y)|^2 dy$存在.
而$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(y)f''(y)dy$存在, 所以只需证明存在一个子列$x_n\to+\infty$,
使得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)f'(x_n)$存在.

反证设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)f'(x)=\infty$
如果$f(y)f'(y)$既有子列趋于$-\infty$又有子列趋于$+\infty$，
由零点定理必然$f(y)f'(y)$无穷个零点,
此时$f(x)f'(x)$有恒为0的子列矛盾！
因此不妨设$\lim\limits_{y\to\infty} f(y)f'(y)=+\infty$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(y)f'(y)dy = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}f^2(x) - \frac{1}{2}f^2(0)\right) = +\infty.$$

而f^2平方可积函数$f^2(x)$有趋于0的子列, 矛盾！
因此存在一个子列$x_n\to+\infty$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)f'(x_n)$存在.
我们完成了证明.