全国大学生数学竞赛非数学类模拟九

清疏竞赛考研数学

2023 年 10 月 25 日

摘要

$$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\},\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}.$$

模拟试题应当规定时间独立完成并给予反馈.

1 填空题

填空题 1.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt\right)^{x^2}=$ __________

填空题 1.2 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域二阶可微且 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ __________

填空题 1.3 设 φ,ψ 都是光滑函数且 $y=x\varphi(z)+\psi(z)$ 确定一个函数 $z=z(x,y)$, 则 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ __________

填空题 1.4 过点 $(1,1,1)$ 且垂直于两个平面 $x-y+z=0,2x+3y-12z+6=0$ 的平面方程为 __________

填空题 1.5 设 $k\in\mathbb{N}$, 计算 $\lim\limits_{x\to1}\left[\left(x^k-1\right)^{n+1}\frac{d^n\left(\frac{1}{x^k-1}\right)}{dx^n}\right]=$ __________

2 选择题答案区

3 解答题

解答题 3.1 设 $f \in C(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha.$$

证明, 对任何 $r > 0$, 存在 $x, y \in \mathbb{R}$, 使得

$$y - x = r, f(x) = f(y).$$

解答题 3.2 证明如下不等式

$$\frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{ne}, \forall n > 1.$$

解答题 3.3 计算

$$\iint_{\Sigma} (8y+1)\, x dy dz + 2\left(1-y^2\right) dz dx - 4yz dx dy,$$

这里 Σ 是 yOz 平面上由曲线 $z=\sqrt{y-1}\,(1\leqslant y\leqslant 3)$ 绕 y 轴旋转一周形成的曲面, 其法向量和 y 轴正向夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

解答题 3.4 发现全部可微函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, 使得

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\sqrt{ab})\forall a,b>0.$$

解答题 3.5 设 $f \in C^1[0,1]$, 证明

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\, dx + \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|\, dx.$$

解答题 3.6 设 $f \in C^1(a,b)$ 满足 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$ 以及

$$f'(x) + f^2(x) \geqslant -1, \forall x \in (a,b)\,.$$

求 $b-a$ 最小值.