

第十四届全国大学生数学竞赛决赛试题
及参考解答

(非数学专业类, 2023 年 5 月 27 日)

一、填空题(本题满分 30 分, 每小题 6 分)

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x - \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】利用 L'Hospital 法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x} = -2.$$

(2) 设 $a > 0$, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^{ax}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】利用分部积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^{ax}} dx &= -\frac{1}{a} x^3 e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} + \frac{3}{a} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax} dx = \frac{3}{a} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax} dx \\ &= -\frac{3}{a^2} x^2 e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} + \frac{6}{a^2} \int_0^{+\infty} x e^{-ax} dx = \frac{6}{a^2} \int_0^{+\infty} x e^{-ax} dx \\ &= -\frac{6}{a^3} x e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} + \frac{6}{a^3} \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = -\frac{6}{a^4} e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} = \frac{6}{a^4}. \end{aligned}$$

(3) 点 $M_0(2, 2, 2)$ 关于直线 $L: \frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{2} = z-3$ 的对称点 M_1 的坐标为
 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【解】过点 $M_0(2, 2, 2)$ 且垂直于直线 L 的平面 π 的方程为

$$3(x-2) + 2(y-2) + z-2 = 0, \text{ 即 } 3x + 2y + z - 12 = 0.$$

将直线 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{2} = z-3$ 用参数方程可表示为 $x = 3t+1, y = 2t-4, z = t+3$ 代入平面 π 的方程, 得 $3(3t+1) + 2(2t-4) + (t+3) - 12 = 0$, 解得 $t = 1$.

由此可得直线 L 与平面 π 的交点为 $P(4, -2, 4)$. 注意到 P 是线段 M_0M_1 的中点, 利用中点公式即可解得对称点为 $M_1(6, -6, 6)$.

(4) 二元函数 $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3 + 3$ 的所有极值的和等于_____.

【解】 易知 $\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 3y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y$. 令 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 解得 $f(x, y)$ 的驻点为 $(0, 0)$, $(1, 1)$. 因为

$$B^2 - AC = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9 - 36xy,$$

故在驻点 $(0, 0)$ 处, $B^2 - AC = 9 > 0$, 所以 $f(x, y)$ 不存在极值; 在驻点 $(1, 1)$ 处,

$B^2 - AC = -27 < 0$, 且 $A = -6 < 0$, 所以 $f(x, y)$ 取得极大值 $f(1, 1) = 4$.

因此, 函数 $f(x, y)$ 的所有极值的和等于 4.

(5) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n3^n} x^n$ 的收敛域为_____.

【解】 记 $a_n = (-1)^n \frac{1}{n3^n}$, 则级数的收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n}{n+1} = 3$.

当 $x = 3$ 时, 级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, 利用 Leibniz 判别法, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛;

当 $x = -3$ 时, 级数成为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 发散.

因此, 原级数的收敛域为 $(-3, 3]$.

二、(本题满分 10 分) 用正交变换将二次曲面的方程

$$x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 4xy + 4xz + 8yz - 27 = 0$$

化为标准方程, 并说明该曲面是什么曲面.

【解】 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $X = (x, y, z)^T$, 则曲面方程为 $X^T A X = 27$.

易知, A 的特征多项式为 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+7)$, 所

以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2$ (二重), $\lambda_2 = -7$. ----- 4 分

对于 $\lambda_1 = 2$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_1 E - A)X = 0$, 求得对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (2, 0, 1)^T$, 利用 Schmidt 正交化方法, 得

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T, \quad \beta_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2, 4, 5)^T.$$

对于 $\lambda_2 = -7$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_2 E - A)X = 0$, 求得对应的单位化特征向量为 $\beta_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T$. ----- 3 分

取正交矩阵 $Q = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 令 $X' = (x', y', z')^T$, 则正交变换 $X = QX'$ 将曲面的方程 $X^TAX = 27$ 可化为如下标准方程

$$2x'^2 + 2y'^2 - 7z'^2 = 27.$$

这是单叶双曲面. ----- 3 分

【注】 如采用配方法且过程完整有最后结果, 可得 5 分.

三、(本题满分 12 分) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶连续导数, $f(0) = g(0) = 1$, 且对 xOy 平面上的任一简单闭曲线 C , 曲线积分

$$\oint_C [y^2 f(x) + 2ye^x - 8yg(x)] dx + 2[yg(x) + f(x)] dy = 0,$$

求函数 $f(x)$, $g(x)$.

【解】 记 $P(x, y) = y^2 f(x) + 2ye^x - 8yg(x)$, $Q(x, y) = 2[yg(x) + f(x)]$. 根据

题设条件可知 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 由此得

$$y[g'(x) - f(x)] + f'(x) + 4g(x) - e^x = 0.$$

从而有 $\begin{cases} g'(x) - f(x) = 0, \\ f'(x) + 4g(x) = e^x. \end{cases}$ 可得 $g''(x) + 4g(x) = e^x$. ----- 5 分

这是关于 $g(x)$ 的常系数非齐次二阶线性微分方程, 解得

$$g(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{5} e^x.$$

利用 $g(0)=1$, $g'(0)=f(0)=1$, 即 $\begin{cases} C_1 + \frac{1}{5} = 1, \\ 2C_2 + \frac{1}{5} = 1, \end{cases}$ 解得 $C_1 = \frac{4}{5}$, $C_2 = \frac{2}{5}$, 因此

$$g(x) = \frac{4}{5} \cos 2x + \frac{2}{5} \sin 2x + \frac{1}{5} e^x. \quad \text{----- 5 分}$$

此外, 再由 $g'(x)-f(x)=0$ 即可解得

$$f(x) = -\frac{8}{5} \sin 2x + \frac{4}{5} \cos 2x + \frac{1}{5} e^x. \quad \text{----- 2 分}$$

四、(本题满分 12 分) 求由 xOz 平面上的曲线 $\begin{cases} (x^2 + z^2)^2 = 4(x^2 - z^2) \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 Oz 轴旋转而成的曲面所包围区域的体积.

【解】 曲面的方程为: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(x^2 + y^2 - z^2)$. ----- 2 分

采用球面坐标: $x = \rho \cos \theta \sin \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \varphi$, 曲面的方程可表示为: $\rho = 2\sqrt{-\cos 2\varphi}$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. 根据区域的对称性, 得

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sqrt{-\cos 2\varphi}} \rho^2 \sin \varphi d\rho = \frac{32\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}} \sin \varphi d\varphi. \quad \text{----- 4 分}$$

再先后作变量代换: $t = \cos \varphi$, $\sqrt{2}t = \sin u$, 得

$$V = \frac{32\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u du. \quad \text{----- 3 分}$$

利用 Wallis 公式得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u du = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$, 所以

$$V = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3} \cdot \frac{3\pi}{16} = \sqrt{2}\pi^2. \quad \text{----- 3 分}$$

五、(本题满分 12 分) 证明下列不等式:

(1) 设 $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, 1]$, 则 $\sin tx \geq t \sin x$;

$$(2) \text{ 设 } p > 0, \text{ 则 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin u|^p du \geq \frac{\pi}{2(p+1)};$$

$$(3) \text{ 设 } x \geq 0, p > 0, \text{ 则 } \int_0^x |\sin u|^p du \geq \frac{x |\sin x|^p}{p+1}.$$

【解】 (1) 令 $F(t) = \sin xt - t \sin x$, 则 $F(0) = F(1) = 0$, $F''(t) = -x^2 \sin xt \leq 0$.

当 $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, 1]$ 时, 有 $F(t) \geq 0$, 即 $\sin xt \geq t \sin x$. ----- 3 分

$$(2) \text{ 设 } p > 0, \text{ 令 } u = \frac{\pi}{2}t, \text{ 则}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin u|^p du = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left| \sin \frac{\pi}{2}t \right|^p dt \geq \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left| t \sin \frac{\pi}{2} \right|^p dt = \frac{\pi}{2(p+1)}.$$

----- 4 分

$$(3) \text{ 根据对称性, 并利用上述结果, 得 } \int_0^\pi |\sin u|^p du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin u|^p du \geq \frac{\pi}{p+1}.$$

对于 $x \geq 0$, 存在非负整数 $k \geq 0$, 使得 $x = k\pi + v$, 其中 $v \in [0, \pi)$. 根据定积分的周期性特征, 有 $\int_0^{k\pi} |\sin u|^p du = k \int_0^\pi |\sin u|^p du$, $\int_{k\pi}^x |\sin u|^p du = \int_0^v |\sin u|^p du$.

类似于第(2)题可证, $\int_0^v |\sin u|^p du \geq \frac{v |\sin v|^p}{p+1}$, 因此

$$\begin{aligned} \int_0^x |\sin u|^p du &= \int_0^{k\pi} |\sin u|^p du + \int_{k\pi}^x |\sin u|^p du = k \int_0^\pi |\sin u|^p du + \int_0^v |\sin u|^p du \\ &\geq \frac{k\pi}{p+1} + \frac{v |\sin v|^p}{p+1} \geq \frac{x |\sin x|^p}{p+1}. \end{aligned}$$
----- 5 分

六、(本题满分 12 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上具有一阶连续导数, 证

明: $\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx \geq \sqrt{(a-b)^2 + [f(a)-f(b)]^2}$, 并给出等号成立的条件.

【解】 令 $F(t) = \int_a^t \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx - \sqrt{(t-a)^2 + [f(t)-f(a)]^2}$, 则 $F(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有一阶连续导数, 且

$$F'(t) = \sqrt{1+[f'(t)]^2} - \frac{(t-a)+[f(t)-f(a)]f'(t)}{\sqrt{(t-a)^2 + [f(t)-f(a)]^2}}$$
----- 5 分

$$= \frac{\sqrt{1+[f'(t)]^2} \sqrt{(t-a)^2 + [f(t)-f(a)]^2} - [(t-a) + [f(t)-f(a)]f'(t)]}{\sqrt{(t-a)^2 + [f(t)-f(a)]^2}}.$$

对任意 $t \in (a, b)$, 利用 Cauchy 不等式, 恒有

$$1 \cdot (t-a) + f'(t)[f(t)-f(a)] \leq \sqrt{1+[f'(t)]^2} \sqrt{(t-a)^2 + [f(t)-f(a)]^2},$$

可知 $F'(t) \geq 0$, 所以 $F(t)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增. 故 $F(b) \geq F(a) = 0$, 即得所证.

----- 4 分

进一步, 等号成立当且仅当 $f'(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = k$ (实常数), 即

$$f(t) = f(a) + k(t-a), \quad \forall t \in [a, b]$$

此时曲线 $y = f(x)$ 为直线.

----- 3 分

七、(本题满分 12 分) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)$ 收敛, 并求其和.

【解】 记 $a_n = \ln \frac{n+1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, 则级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} a_{2n+1}$.

因为 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \sim x$, 所以 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $a_{2n} a_{2n+1} \sim \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$ 显然收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} a_{2n+1}$ 收敛.

----- 4 分

再求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} a_{2n+1}$ 的和. 令 $b_n = \sum_{k=n}^{2n-1} a_k^2$, $n = 1, 2, \dots$, 则由 $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ 得

$$b_n - b_{n+1} = a_n^2 - a_{2n}^2 - a_{2n+1}^2 = (a_{2n} + a_{2n+1})^2 - a_{2n}^2 - a_{2n+1}^2 = 2a_{2n} a_{2n+1}.$$

----- 4 分

由于 $0 < b_n < n \ln^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, 故由夹逼准则可知 $b_n \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$. 于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} a_{2n+1} = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (b_n - b_{n+1}) = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} (b_1 - b_{N+1}) = \frac{b_1}{2} = \frac{\ln^2 2}{2}.$$

----- 4 分