目 录

第五届决赛

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&a\\1&2&2\end{pmatrix}$，其中 a 为常数，矩阵 B 满足关系式 $AB=A-B+E$，其中 E 是单位矩阵且 $B\neq E$。若秩 $rank\left(A+B\right)=3$，试求常数 a 的值。

2. 设 A,B 为两个 n 阶正定矩阵，求证 AB 正定的充要条件是 $AB=BA$。

例题：

1. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$，证明 A 及 $A+2E$ 都可逆，并求 A^{-1} 和 $\left(A+2E\right)^{-1}$。

2. （2001 考研数学一）：设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=O$，其中 E 为单位矩阵，则 $\left(A-E\right)^{-1}=$________。

3. 设矩阵 $A=\alpha\alpha^T$，其中 α 是 n 维实列向量，α^T 是 α 的转置。又已知 $\alpha^T\alpha=1$，矩阵 $B=E+A+A^2+\ldots+A^n$，其中 E 是 $n\left(n>2\right)$ 阶单位矩阵。

（1）证明 B 是可逆矩阵，并求 B^{-1}

（2）求行列式 $\left|B-3E\right|$

4. （考研模拟卷改编）已知二阶矩阵 A 的特征值为 $1,2$，矩阵 X 满足方程：

$$AXA-4AX+XA-4X-12A=O$$

求矩阵 X 的行列式。

例题：

1.（2021，数学一）

已知 $A=\begin{pmatrix}a&1&-1\\1&a&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$，求正交矩阵 P，使得 P^TAP 为对角矩阵。

2.（2022，数学一）已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}ijx_ix_j$

（1）写出 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 对应的矩阵

（2）求正交变换 $x=Qy$ 将 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 化为标准形

（3）求 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=0$ 的解

3.（1992，数学一）

设 $A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$，其中 $a_i\neq 0,b_i\neq 0\left(i=1,2,\ldots,n\right)$，则矩阵 A 的秩 $r\left(A\right)$。

4.（1996，数学一）

设 $A=E-\xi\xi^T$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，ξ 是 n 维非零列向量，ξ^T 是 ξ 的转置。

证明：（1）$A^2=A$ 的充要条件是 $\xi^T\xi=1$

（2）当 $\xi^T\xi=1$ 时，A 是不可逆矩阵

5.（1999，数学一）

设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1，则 A 的 n 个特征值是__________。

6.（2001，数学一）

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A 与 B （A）

（A）合同且相似 （B）合同但不相似

（C）不合同但相似 （D）不合同且不相似

7.（2003，数学一）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},B=P^{-1}A^*P$，求 $B+2E$ 的特征值与特征向量，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 3 阶单位矩阵。

8.（2012，数学一）

设 x 为三维单位列向量，E 为 3 阶单位矩阵，则矩阵 $E-xx^T$ 的秩。

9.（2014，数学一）

证明：n阶矩阵$\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & n\end{pmatrix}$相似。

10.（2017，数学一）

设α是n维单位列向量，E为n阶单位矩阵，则（）

（A）$E-\alpha\alpha^T$不可逆　　（B）$E+\alpha\alpha^T$不可逆

（C）$E+2\alpha\alpha^T$不可逆　　（D）$E-2\alpha\alpha^T$不可逆

例题：

1. 设A是$m\times n$的实矩阵（$m>n$），证明：A^TA正定的充分必要条件是$r(A)=n$。

2. （1999，数学一）：设实对称矩阵$A_{m\times m}$正定，$B_{m\times n}$为实矩阵，证明：B^TAB为正定矩阵的充要条件是$r(B)=n$。

3.（1999，数学三）：设$A_{m\times n}$为实矩阵，E为n阶单位阵，$B=\lambda E+A^TA$，证明：当$\lambda>0$时，B为正定矩阵。

4. （1997，数学三）：若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$是正定的，求$t$的取值范围。

5. （2000，数学三）：

设 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\ldots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$

为一个n元实二次型，试问当参数$a_1,a_2,\ldots,a_n$满足何种条件时，$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$正定。

6. （2005，数学三）：设$D=\begin{pmatrix}A & C\\ C^T & B\end{pmatrix}$为正定矩阵，其中$A$和$B$分别为$m$阶和$n$阶实对称矩阵，$C_{m\times n}$为实矩阵。

（1）设$P=\begin{pmatrix}E_m & -A^{-1}C\\ O & E_n\end{pmatrix}$，求$P^TDP$

（2）判断$B-C^TA^{-1}C$是否正定矩阵

7（2021，数学一）

已知$A=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$

（1）求正交矩阵P，使得P^TAP为对角矩阵

（2）求正定矩阵C，使得$C^2=\left(a+3\right)E-A$

8. 设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^TAx=2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-2x_1x_3$

（1）求正交变换$x=Qy$将$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$化为标准形

（2）若 3 阶正定矩阵B满足$B^2-A=O$，求行列式$\left|A+B\right|$

9. 假设正定矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$，求一个矩阵$D$满足$A=D^TD$。

第六届决赛

1. 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ -1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，则 $A^{50}=$_________。

2. 设 A_1,A_2,B_1,B_2 均为 n 阶方阵，其中 A_2,B_2 可逆。证明：存在可逆矩阵 P,Q 使得 $PA_iQ=B_i\left(i=1,2\right)$ 成立的充要条件是 $A_1A_2^{-1}$ 和 $B_1B_2^{-1}$ 相似。

3. 设 $f\left(x,y\right)$ 为 R^2 上的非负的连续函数，若 $I=\lim\limits_{t\to+\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma$ 存在极限，则称广义积分收敛于 $\iint\limits_{R^2}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I。若 $\iint\limits_{R^2}e^{ax^2+2bxy+cy^2}\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I，实二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 在正交变换下的标准二次型为 $\lambda_1u^2+\lambda_2v^2$。证明 λ_1,λ_2 都小于零。

例题：

1．设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 6\\ -3 & 6 & -9\end{pmatrix}$，则 $A^n=$_________。

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 A^{10}。

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 A^n

4. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$，求 A^{2021}

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

（1）证明当 $n>1$ 时，$A^n = A^{n-2} + A^2 - E$

（2）求 A^n

6（1992，数学一）：设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$，对应的特征向量依次为 $\xi_1 = (1,1,1)^T, \xi_2 = (1,2,4)^T, \xi_3 = (1,3,9)^T$，向量 $\beta = (1,1,3)^T$。

（1）将 β 用 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性表出。

（2）求 $A^n \beta$。

第七届决赛

1. 设$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$是$n$阶方阵$A$的特征值，$f\left(x\right)$为多项式，则矩阵$f\left(A\right)$的行列式的值为________。

2. 设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times p$矩阵，C是$p\times q$矩阵。

证明：$R\left(AB\right)+R\left(BC\right)-R\left(B\right)\le R\left(ABC\right)$，其中$R\left(X\right)$表示矩阵$X$的秩。

第八届决赛

1. 已知 A 为 n 阶可逆反对称矩阵，b 为 n 元列向量，设 $B=\begin{pmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{pmatrix}$，则 $rank(B)=$________。

2. 设 n 阶方阵 A，B 满足 $AB=A+B$。证明：若存在正整数 k，使得 $A^k=O$（O 为零矩阵），则行列式 $|B+2017A|=|B|$。

第九届决赛

1. 设a,b,c,d是互不相同的正实数，x,y,z,w是实数，满足

$$a^x=bcd,b^y=cda,c^z=dab,d^w=abc$$

则行列式$\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -w \end{vmatrix}=$____________。

2. 设$x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)^T\in R^n$，定义

$$H\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1},n\geq 2$$

（1）证明：对任一非零$x\in R^n$，$H\left(x\right)>0$。

（2）求$H\left(x\right)$满足条件$x_n=1$的最小值。

第十届决赛

1. 已知二次型 $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2$，求 f 的规范形。

2. 设 A 是 n 阶幂零矩阵，即满足 $A^2=O$。证明：若 A 的秩为 r，且 $1\le r\le\frac{n}{2}$，则存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} O & I_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$，其中 I_r 为 r 阶单位矩阵。

第十一届决赛

1. 设$B_1,B_2,\ldots,B_{2021}$为空间R^3中半径不为零的 2021 个球，$A=\left(a_{ij}\right)$为 2021 阶方阵，其$\left(i,j\right)$元a_{ij}为球B_i与B_j相交部分的体积。证明：行列式$\left|E+A\right|>1$，其中E为单位矩阵。

第十二届决赛

1. 设矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 16 & \\ & & 1\end{pmatrix}$，且$|A|>0, ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$，其中$I$为单位矩阵，则$B=$_______。

2. 设A是n阶实对称矩阵，证明：

（1）存在实对称矩阵B，使得$B^{2021}=A$，且$AB=BA$。

（2）存在一个多项式$p(x)$，使得上述矩阵$B=p(A)$。

（3）上述矩阵B是唯一的。