2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛
(非数学类）试卷

一 、填空题(共有 5 小题，每小题 6 分，共 30 分)

(1) 已知$y_1 = e^x$和$y_2 = xe^x$是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该微分方程是_____.

(2) 设有曲面$S: z = x^2 + 2y^2$和平面$\pi: 2x + 2y + z = 0$，则与π平行的S的切平面方程是____________________.

(3) 设$y = y(x)$由$x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \mathrm{d}t$所确定，则$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} =$________.

(4) 设$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$，则$\lim_{n\to\infty} x_n =$____________.

(5) 已知$\lim_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$，则$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} =$______.

第二题：(12 分)设n为正整数，计算$I = \int_{e^{-2n\pi}}^{1} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right| \mathrm{d}x.$

第三题：(14 分)设函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且有正常数A, B使得$|f(x)| \le A, |f''(x)| \le B$，证明：对于任意$x \in [0,1]$，有$|f'(x)| \le 2A + \frac{B}{2}.$

第四题：(14 分) (1) 设一球缺高为h，所在球半径为R。证明该球缺的体积为$\frac{\pi}{3}(3R - h)h^2$，球冠的面积为$2\pi Rh.$

(2) 设球体$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \le 12$被平面$P: x + y + z = 6$所截的小球缺为$\Omega$。记球缺上的球冠为$\Sigma$，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

第五题：(15 分)设f在$[a,b]$上非负连续，严格单增，且存在$x_n \in [a,b]$使得

$$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x,\ 求 \lim_{n\to\infty} x_n.$$

第六题：(15 分)设$A_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$,求$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right).$