Lista 5 - MAC105

João Gabriel Basi - N° USP: 9793801

2. (a) Uma raiz ser irracional é suficiente e necessário para que a outra também seja.

   (b) Ao construir o gráfico da equação temos que as raízes estão localizadas nos pontos $(r_1, 0)$ e $(r_2, 0)$, mas como o gráfico é simétrico sabemos que a distância de $(r_1, 0)$ até $(x_v, 0)$ é a mesma distância de $(r_2, 0)$ até $(x_v, 0)$, onde x_v é a abcissa do vértice da parábola. Então temos que $r_2 = x_v - (r_1 - x_v) = 2x_v - r_1$. Como x_v é um número racional onde $x_v = \frac{-b}{2a}$, temos que se r_1 for irracional, $2x_v - r_1$ e, consequentemente, r_2 também serão irracionais.

3. Se $\varepsilon \leqslant 0$ então, para todo $x \in S$, $x \geqslant v$, então não existe $u < v$ que possa ser o limitante superior pois $u < x$. Porém se $\varepsilon > 0$, para todo $x \in S$, x será menor que v, então pode existir $x \leqslant u < v$, tal que u é o limitante superior de S.

4. Quando temos $am + bn = d$, sabemos que d é o menor resultado possível para qualquer m e n, pois se houvesse um x menor que d, d não seria o mdc, x seria. Manipulando a equação temos $a \cdot \frac{m}{d} + b \cdot \frac{n}{d} = 1$. Como d|m e d|n, então $\frac{m}{d}$ e $\frac{n}{d}$ são inteiros, e, para satisfazer a primeira relação já explicada, sabemos que 1 é o menor inteiro positivo possível, então podemos expressar o $mdc(a, b)$ como $mdc(a, b) = a \cdot \frac{m}{d} + b \cdot \frac{n}{d} = 1$.

   Podemos prová-la sabendo que $am + bn = d$, então $a \cdot \frac{m}{d} + b \cdot \frac{n}{d} = \frac{am+bn}{d} = \frac{d}{d} = 1$ e podemos também dar um exemplo: $mdc(96, 66) = 3 \cdot 66 - 2 \cdot 96 = 6$ portanto $mdc(3, -2) = 3 \cdot \frac{66}{6} - 2 \cdot \frac{96}{6} = 1$.

5. (a) Se $k = mdc(a, b)$, então a e b são múltiplos de k e podemos reescrevê-los como xk e yk respectivamente. Porém para que $k|a+b+c$, c tem que ser múltiplo de k. Trocando c por zk temos que $k|xk+yk+zk$, então é óbvio que $k|k(x+y+z)$ e, também, que $k|kz$.

   (b) Se $m-1$ e $n-1$ são múltiplos de $k = mdc(m-1, n-1)$, podemos escrevê-los como ak e bk respectivamente. Substituindo em $mn - 1$ temos $(ak+1)(bk+1) - 1 = abk^2 + ak + bk + 1 - 1 = k(abk + a + b)$, concluindo que $k|mn - 1$