

Data set

Qi

1 H_X

1.1 Definitions

Definition 1. The initial symbols of \mathcal{L}_X are called \mathcal{L}_X -symbols, of which there are three types:

- Propositional variables: $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$;
- Propositional connectives: \neg, \rightarrow (\neg is unitary, \rightarrow is binary);
- Brackets: (and).

Definition 2. The formulas of \mathcal{L}_X are called \mathcal{L}_X -formulas, which are the symbolic strings based on \mathcal{L}_X -symbols according to the formation-rules as follows:

- All propositional variables of \mathcal{L}_X are \mathcal{L}_X -formulas;
- If ϕ is a \mathcal{L}_X -formula, $\neg\phi$ is a \mathcal{L}_X -formula;
- If ϕ and ψ are \mathcal{L}_X -formulas, $(\phi \rightarrow \psi)$ is a \mathcal{L}_X -formula;
- Only these are \mathcal{L}_X -formulas.

Definition 3. $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ are introduced as abbreviations that for any formula ϕ and ψ :

$$\phi \vee \psi \triangleq \neg\phi \rightarrow \psi; \quad \phi \wedge \psi \triangleq \neg(\phi \rightarrow \neg\psi); \quad \phi \leftrightarrow \psi \triangleq (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi).$$

Example 4. Axiomatic system H_X .

The axioms of H_X :

$$\text{X1 } p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$\text{X2 } (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

$$\text{X3 } \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$\text{X4 } (p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$$

The rules of inference of S :

mp (modus ponens): ψ can be obtained from $\phi \rightarrow \psi$ and ϕ .

sub (substitution): $\phi(\mathfrak{s})$ can be obtained from ϕ , where \mathfrak{s} is a finite substitution. ■

Definition 5. A proof of ϕ in H_X is a sequence of formulas ϕ_0, \dots, ϕ_n , where

- $\phi_n = \phi$, and
- For each $k \leq n$, ϕ_k is either an axiom of H_X , or is obtained from $\phi_0, \dots, \phi_{k-1}$ by sub or mp.

Definition 6. ϕ is provable in H_X if and only if there is a proof of ϕ in H_X .

Definition 7. A deduction from Γ , which is a set of formulas, to ϕ in H_X is a sequence of formulas ϕ_0, \dots, ϕ_n , where

- $\phi_n = \phi$, and
- For each $k \leq n$, ϕ_k is either an axiom of H_X , or an element of Γ , or is obtained from $\phi_0, \dots, \phi_{k-1}$ by sub or mp, where sub is only used for the axiom.

Definition 8. For any formula set Γ and any formula ϕ , ϕ is deducible from Γ in H_X or ϕ is a deductive consequence of Γ in H_X if and only if there is a deduction from Γ to ϕ in H_X , denoted as $\Gamma \vdash_X \phi$. If $\Gamma = \emptyset$, $\emptyset \vdash_X \phi$ is denoted as $\vdash_X \phi$.

Theorem 9. For any formula ϕ , ϕ is provable in H_X if and only if $\vdash_X \phi$.

Theorem 10 (Soundness). In H_X , if $\vdash_X \phi$, ϕ is a tautology.

Theorem 11 (Incompleteness). For any formula ϕ , if ϕ isn't a \mathfrak{T}_X - $\{2\}$ -tautology, where $\mathfrak{T}_X = \langle \{0, 1, 2\}, g_{\neg}, g_{\rightarrow} \rangle$ is a three-value interpretation structure in \mathcal{L}_X and the definitions of g_{\neg} and g_{\rightarrow} are in Table 1, ϕ is unprovable in H_X , denoted as $\nvdash_X \phi$.

| | g_{\neg} | | g_{\rightarrow} | 0 | 1 | 2 |
|---|------------|---|-------------------|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 |

Table 1: g_{\neg} and g_{\rightarrow}

1.2 Tools

Theorem 12 (Cut). For any set of formulas Δ and Γ , as well as any formula ϕ_0, \dots, ϕ_k and ψ , if $\Delta, \phi_0, \dots, \phi_k \vdash_X \psi$ and $\Gamma \vdash_X \phi_i$ holds for any $i \leq k$, then $\Gamma \cup \Delta \vdash_X \psi$.

Proof Later. ■

Theorem 13 (DT). $\Gamma, \phi \vdash_X \psi$, iff $\Gamma \vdash_X \phi \rightarrow \psi$.

[deduction theorem]

Proof Later. ■

Theorem 14 (SRAA). If $\Gamma, \phi \vdash_X \neg\phi$, $\Gamma \vdash_X \neg\phi$.

[simple reductio ad absurdum]

Proof Later. ■

Theorem 15 (IE). *For any set of formulas Γ and Δ , as well as any formula ϕ , if $\Gamma \vdash_X \phi$ and $\Delta \vdash_X \neg\phi$, then for any formula ψ , $\Gamma \cup \Delta \vdash_X \psi$. [inconsistency effect]*

Proof Later. ■

2 Propositions

2.1 Axioms

Proposition 16. $\vdash_X p \rightarrow (q \rightarrow p)$

1. $\vdash_X p \rightarrow (q \rightarrow p)$ X1

Proposition 17. $\vdash_X (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1. $\vdash_X (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ X2

Proposition 18. $\vdash_X \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

1. $\vdash_X \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ X3

Proposition 19. $\vdash_X (p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

1. $\vdash_X (p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$ X4

Proposition 20. $\nvdash_X (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$

| | |
|---------------|---|
| $\frac{p}{0}$ | $\left \begin{array}{ccccccc} (& \neg & p & \rightarrow & p &) & \rightarrow & p \\ 1 & 0 & 2 & 0 & & 0 & 0 \end{array} \right.$ |
|---------------|---|

Proposition 21. $\vdash_X (\neg p \rightarrow p) \rightarrow \neg\neg p$

| | | |
|----|--|----------|
| 1. | $\neg p, \neg p \rightarrow p \vdash_X p$ | mp |
| 2. | $\neg p, p \vdash_X \neg\neg p$ | IE |
| 3. | $\neg p, \neg p \rightarrow p \vdash_X \neg\neg p$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg p \rightarrow p \vdash_X \neg\neg p$ | SRAA. 3 |
| 5. | $\vdash_X (\neg p \rightarrow p) \rightarrow \neg\neg p$ | DT. 4 |

2.2 Deduction

Proposition 22. $\vdash_X p \rightarrow p$

- | | |
|-------------------------------|-------------------------|
| 1. $p \vdash_X p$ | Definition of deduction |
| 2. $\vdash_X p \rightarrow p$ | DT. 1 |

Proposition 23. $\vdash_X (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

- | | |
|---|-------|
| 1. $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q \vdash_X r$ | mp |
| 2. $p \rightarrow (q \rightarrow r), q \vdash_X p \rightarrow r$ | DT. 1 |
| 3. $\vdash_X (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ | DT. 2 |

Proposition 24. $\vdash_X (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

- | | |
|---|----------|
| 1. $p \rightarrow q, p \vdash_X q$ | mp |
| 2. $q \rightarrow r, q \vdash_X r$ | mp |
| 3. $q \rightarrow r, p \rightarrow q, p \vdash_X r$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\vdash_X (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ | DT. 3 |

Proposition 25. $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

- | | |
|---|----------|
| 1. $p \rightarrow q, p \vdash_X q$ | mp |
| 2. $q \rightarrow r, q \vdash_X r$ | mp |
| 3. $p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash_X r$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ | DT. 3 |

2.3 Negation(\neg)

Proposition 26. $\vdash_X p \rightarrow \neg\neg p$

- | | |
|--|---------|
| 1. $p, \neg p \vdash_X \neg\neg p$ | IE |
| 2. $p \vdash_X \neg\neg p$ | SRAA. 1 |
| 3. $\vdash_X p \rightarrow \neg\neg p$ | DT. 2 |

Proposition 27. $\not\vdash_X \neg\neg p \rightarrow p$

| | | | | | |
|-----|--------|--------|-----|---------------|-----|
| p | \neg | \neg | p | \rightarrow | p |
| 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Proposition 28. $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg\neg\neg p$

- | | |
|---|---------|
| 1. $\neg p, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg\neg p$ | IE |
| 2. $\neg p \vdash_X \neg\neg\neg p$ | SRAA. 1 |
| 3. $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg\neg\neg p$ | DT. 2 |

Proposition 29. $\vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg p$

- | | | |
|----|--|--------------------|
| 1. | $p \vdash_X \neg\neg p$ | Proposition 26, DT |
| 2. | $\neg p, \neg\neg p \vdash_X \neg p$ | IE |
| 3. | $p, \neg\neg p \vdash_X \neg p$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg\neg p \vdash_X \neg p$ | SRAA. 3 |
| 5. | $\vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg p$ | DT. 4 |

Proposition 30. $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg\neg\neg p$

- | | | |
|----|--|---------|
| 1. | $\neg p, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg\neg p$ | IE |
| 2. | $\neg p \vdash_X \neg\neg\neg p$ | SRAA. 1 |
| 3. | $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg\neg\neg p$ | DT. 2 |

Proposition 31. $\vdash_X \neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$

- | | | |
|----|--|--------------------|
| 1. | $\neg p \vdash_X \neg\neg\neg p$ | Proposition 28, DT |
| 2. | $\neg\neg\neg p, \neg\neg\neg p \vdash_X \neg p$ | IE |
| 3. | $\neg p, \neg\neg\neg p \vdash_X \neg p$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg\neg\neg p \vdash_X \neg p$ | SRAA. 3 |
| 5. | $\vdash_X \neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$ | DT. 4 |

2.4 Contrap(Contraposition)

Proposition 32. $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

- | | | |
|----|--|----------|
| 1. | $p \rightarrow q, p \vdash_X q$ | mp |
| 2. | $\neg q, q \vdash_X \neg p$ | IE |
| 3. | $\neg q, p \rightarrow q, p \vdash_X \neg p$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg q, p \rightarrow q \vdash_X \neg p$ | SRAA. 3 |
| 5. | $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ | DT. 4 |

Proposition 33. $\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$

- | | | |
|----|--|----------|
| 1. | $p \rightarrow \neg q, p \vdash_X \neg q$ | mp |
| 2. | $\neg q, q \vdash_X \neg p$ | IE |
| 3. | $p \rightarrow \neg q, p, q \vdash_X \neg p$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $p \rightarrow \neg q, q \vdash_X \neg p$ | SRAA. 3 |
| 5. | $\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$ | DT. 4 |

Proposition 34. $\not\vdash_X (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|--------|-----|---------------|--------|-----|-----|---------------|-----|-----|---------------|-----|-----|
| p | q | $($ | \neg | p | \rightarrow | \neg | q | $)$ | \rightarrow | $($ | q | \rightarrow | p | $)$ |
| 0 | 2 | | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | | 0 | | 2 | 0 | 0 | |

Proposition 35. $\not\vdash_X (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$

| | | | | | | | |
|-----|-----|---|---|---|---|---|---|
| p | q | $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$ | | | | | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 |

Proposition 36. $\vdash_X (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg\neg p)$

- | | |
|--|----------|
| 1. $\neg p \rightarrow \neg q, \neg p \vdash_X \neg q$ | mp |
| 2. $\neg q, q \vdash_X \neg\neg p$ | IE |
| 3. $\neg p \rightarrow \neg q, \neg p, q \vdash_X \neg\neg p$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\neg p \rightarrow \neg q, q \vdash_X \neg\neg p$ | SRAA. 3 |
| 5. $\vdash_X (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg\neg p)$ | DT. 4 |

Proposition 37. $\vdash_X (q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

- | | |
|--|----------|
| 1. $q \rightarrow \neg\neg p, q \vdash_X \neg\neg p$ | mp |
| 2. $\neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg q$ | IE |
| 3. $q \rightarrow \neg\neg p, q, \neg p \vdash_X \neg q$ | Cut. 1,2 |
| 4. $q \rightarrow \neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg q$ | SRAA. 3 |
| 5. $\vdash_X (q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$ | DT. 4 |

Proposition 38. $\vdash_X (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg\neg p)$

- | | |
|--|----------|
| 1. $\neg p \rightarrow q, \neg p \vdash_X q$ | mp |
| 2. $q, \neg q \vdash_X \neg\neg p$ | IE |
| 3. $\neg p \rightarrow q, \neg p, \neg q \vdash_X \neg\neg p$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash_X \neg\neg p$ | SRAA. 3 |
| 5. $\vdash_X (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg\neg p)$ | DT. 4 |

Proposition 39. $\not\vdash_X (\neg q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|--|---|---|---|---|---|---|---|
| p | q | $(\neg q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |

Proposition 40. $\vdash_X (\neg q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\neg q)$

- | | |
|---|----------|
| 1. $\neg q \rightarrow \neg\neg p, \neg q \vdash_X \neg\neg p$ | mp |
| 2. $\neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg\neg q$ | IE |
| 3. $\neg q \rightarrow \neg\neg p, \neg q, \neg p \vdash_X \neg\neg q$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\neg q \rightarrow \neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg\neg q$ | SRAA. 3 |
| 5. $\vdash_X (\neg q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\neg q)$ | DT. 4 |

2.5 Negation and implication(\neg & \rightarrow)

Proposition 41. $\not\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$

| | | | | | |
|---------------|---------------|------------------------------------|---------------------------|---------------|---------------------------|
| $\frac{p}{0}$ | $\frac{q}{1}$ | $\frac{\neg (p \rightarrow q)}{2}$ | $\frac{\rightarrow p}{0}$ | $\frac{q}{1}$ | $\frac{\rightarrow p}{0}$ |
|---------------|---------------|------------------------------------|---------------------------|---------------|---------------------------|

Proposition 42. $\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$

1. $\vdash_X q \rightarrow (p \rightarrow q)$
2. $q \rightarrow (p \rightarrow q) \vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$
3. $\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$

X1($q/p, p/q$)
Proposition 32, DT
Cut. 1,2

Proposition 43. $\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg\neg p$

1. $\neg p \vdash_X p \rightarrow q$
2. $p \rightarrow q, \neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg p$
3. $\neg p, \neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg p$
4. $\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg p$
5. $\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg\neg p$

IE, DT
IE
Cut. 1,2
SRAA. 3
DT. 4

Proposition 44. $\vdash_X p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow q))$

1. $p, p \rightarrow q \vdash_X q$
2. $q, \neg q \vdash_X \neg(p \rightarrow q)$
3. $p, p \rightarrow q, \neg q \vdash_X \neg(p \rightarrow q)$
4. $p, \neg q \vdash_X \neg(p \rightarrow q)$
5. $\vdash_X p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow q))$

mp
IE
Cut. 1,2
SRAA. 3
DT. 4

Proposition 45. $\vdash_X \neg\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q)$

1. $p, \neg q \vdash_X \neg(p \rightarrow q)$
2. $\neg(p \rightarrow q), \neg\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$
3. $p, \neg q, \neg\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$
4. $\neg q, \neg\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$
5. $\neg\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg q \rightarrow \neg p$
6. $\neg q \rightarrow \neg p \vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q$
7. $\neg\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q$
8. $\vdash_X \neg\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q)$

Proposition 44, DT
IE
Cut. 1,2
SRAA. 3
DT. 4
Proposition 32, DT
Cut. 5,6
DT. 7

Proposition 46. $\vdash_X (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow q)$

1. $\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$
2. $\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg p$
3. $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q \vdash_X \neg\neg q$
4. $\neg(p \rightarrow q), \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q \vdash_X \neg\neg q$

Proposition 42, DT
Proposition 43, DT
mp
Cut. 2,3

5. $\neg q, \neg\neg q \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow q)$ IE
6. $\neg(p \rightarrow q), \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow q)$ Cut. 1,4,5
7. $\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow q)$ SRAA. 6
8. $\vdash_X (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow q)$ DT. 7

2.6 CE(Conditional Exchange)

Proposition 47. $\vdash_X (\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) \mid (\neg\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

1. $p \vdash_X \neg\neg p$ Proposition 26, DT
2. $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow q \vdash_X q$ mp
3. $p, \neg\neg p \rightarrow q \vdash_X q$ Cut. 1,2
4. $\vdash_X (\neg\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ DT. 3

Proposition 48. $\not\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q) \mid (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q)$

$$\frac{p \quad q \mid (\quad p \quad \rightarrow \quad q \quad) \quad \rightarrow \quad (\quad \neg \quad \neg \quad p \quad \rightarrow \quad q \quad)}{0 \quad 0 \mid 0 \quad 2 \quad 0 \mid 0 \mid 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0}$$

Proposition 49. $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee \neg\neg q) \mid (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q)$

1. $\neg q, p \rightarrow q \vdash_X \neg p$ Proposition 32, DT, mp, Cut
2. $\neg p, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg q$ IE
3. $\neg q, p \rightarrow q, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg q$ Cut. 1,2
4. $p \rightarrow q, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg q$ SRAA. 3
5. $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q)$ DT. 4

Proposition 50. $\not\vdash_X (\neg p \vee \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow q) \mid (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

$$\frac{p \quad q \mid (\quad \neg \quad \neg \quad p \quad \rightarrow \quad \neg \quad \neg \quad q \quad) \quad \rightarrow \quad (\quad p \quad \rightarrow \quad q \quad)}{2 \quad 0 \mid 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \mid 0 \mid 2 \quad 0 \quad 0}$$

Proposition 51. $\vdash_X (\neg p \vee \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg\neg q) \mid (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg\neg q)$

1. $p \vdash_X \neg\neg p$ Proposition 26, DT
2. $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q \vdash_X \neg\neg q$ mp
3. $p, \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q \vdash_X \neg\neg q$ Cut. 1,2
4. $\vdash_X (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg\neg q)$ DT. 3

Proposition 52. $\vdash_X (p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (\neg p \vee \neg\neg q) \mid (p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q)$

1. $\neg q, p \rightarrow \neg\neg q \vdash_X \neg p$ Proposition 33, DT, mp, Cut
2. $\neg p, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg q$ IE
3. $\neg q, p \rightarrow \neg\neg q, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg q$ Cut. 1,2
4. $p \rightarrow \neg\neg q, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg q$ SRAA. 3
5. $\vdash_X (p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q)$ DT. 4

Proposition 53. $\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \mid (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg q)$

- | | |
|---|--------------------|
| 1. $p \rightarrow \neg q, \neg \neg p \vdash_X \neg \neg \neg q$ | Proposition 49, DT |
| 2. $\neg \neg \neg q \vdash_X \neg q$ | Proposition 29, DT |
| 3. $p \rightarrow \neg q, \neg \neg p \vdash_X \neg q$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg q)$ | DT. 3 |

2.7 Disjunction(\vee)

Proposition 54. $\vdash_X p \rightarrow p \vee q \mid p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

- | | |
|--|-------|
| 1. $p, \neg p \vdash_X q$ | IE |
| 2. $\vdash_X p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ | DT. 1 |

Proposition 55. $\vdash_X p \rightarrow q \vee p \mid p \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$

- | | |
|--|------------------|
| 1. $\vdash_X p \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$ | X1($\neg q/q$) |
|--|------------------|

Proposition 56. $\vdash_X \neg(p \vee q) \rightarrow \neg p \mid \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$

- | | |
|---|----------|
| 1. $p \vdash_X \neg p \rightarrow q$ | IE, mp |
| 2. $\neg p \rightarrow q, \neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$ | IE |
| 3. $p, \neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$ | SRAA. 3 |
| 5. $\vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$ | DT. 4 |

Proposition 57. $\vdash_X \neg(p \vee q) \rightarrow \neg q \mid \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$

- | | |
|---|---------------------------|
| 1. $q \vdash_X \neg p \rightarrow q$ | X1($q/p, \neg p/q$), mp |
| 2. $\neg p \rightarrow q, \neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$ | IE |
| 3. $q, \neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$ | SRAA. 3 |
| 5. $\vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$ | DT. 4 |

Proposition 58. $\not\vdash_X p \vee q \rightarrow q \vee p \mid (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$

See Proposition 35.

Proposition 59. $\vdash_X \neg(p \vee q) \rightarrow \neg(q \vee p) \mid \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow p)$

- | | |
|---|--------------------|
| 1. $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$ | Proposition 56, DT |
| 2. $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$ | Proposition 57, DT |
| 3. $\neg q, \neg q \rightarrow p \vdash_X p$ | mp |
| 4. $\neg(\neg p \rightarrow q), \neg q \rightarrow p \vdash_X p$ | Cut. 2,3 |
| 5. $p, \neg p \vdash_X \neg(\neg q \rightarrow p)$ | IE |
| 6. $\neg(\neg p \rightarrow q), \neg q \rightarrow p \vdash_X \neg(\neg q \rightarrow p)$ | Cut. 1,4,5 |
| 7. $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg(\neg q \rightarrow p)$ | SRAA. 6 |
| 8. $\vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow p)$ | DT. 7 |

Proposition 60. $\vdash_X \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg q \vee \neg p \mid (\neg \neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow \neg p)$

- | | | |
|----|--|--------------------|
| 1. | $p \vdash_X \neg \neg p$ | Proposition 26, DT |
| 2. | $\neg \neg p, \neg \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$ | mp |
| 3. | $p, \neg \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg q, \neg \neg q \vdash_X \neg p$ | IE |
| 5. | $p, \neg \neg p \rightarrow \neg q, \neg \neg q \vdash_X \neg p$ | Cut. 3,4 |
| 6. | $\neg \neg p \rightarrow \neg q, \neg \neg q \vdash_X \neg p$ | SRAA. 5 |
| 7. | $\vdash_X (\neg \neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow \neg p)$ | DT. 6 |

Proposition 61. $\not\vdash_X p \vee \neg q \rightarrow \neg q \vee p \mid (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow p)$

$$\frac{p \quad q}{0 \quad 0} \mid \frac{(\neg \quad p \rightarrow \neg \quad q)}{1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0} \rightarrow \frac{(\neg \quad \neg \quad q \rightarrow p)}{0 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0}$$

Proposition 62. $\vdash_X \neg p \vee q \rightarrow q \vee \neg p \mid (\neg \neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

- | | | |
|----|--|-----------------------------|
| 1. | $\neg q, \neg \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg p$ | Proposition 32, DT, mp, Cut |
| 2. | $\neg \neg p \vdash_X \neg p$ | Proposition 29, DT |
| 3. | $\neg q, \neg \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg p$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\vdash_X (\neg \neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ | DT. 3 |

Proposition 63. $\vdash_X p \vee \neg q \rightarrow \neg q \vee \neg p \mid (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow \neg p)$

- | | | |
|----|---|----------------|
| 1. | $\vdash_X (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow \neg p)$ | Proposition 32 |
|----|---|----------------|

Proposition 64. $\vdash_X \neg q \vee \neg \neg p \rightarrow p \vee \neg q \mid (\neg \neg q \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

- | | | |
|----|--|-----------------------------|
| 1. | $\neg p, \neg \neg q \rightarrow \neg \neg p \vdash_X \neg \neg q$ | Proposition 33, DT, mp, Cut |
| 2. | $\neg \neg q \vdash_X \neg q$ | Proposition 29, DT |
| 3. | $\neg p, \neg \neg q \rightarrow \neg \neg p \vdash_X \neg q$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\vdash_X (\neg \neg q \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$ | DT. 3 |

Proposition 65. $\vdash_X \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(p \vee q)) \mid \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q))$

- | | | |
|----|---|----------|
| 1. | $\neg p, \neg p \rightarrow q \vdash_X q$ | mp |
| 2. | $q, \neg q \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$ | IE |
| 3. | $\neg p, \neg p \rightarrow q, \neg q \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg p, \neg q \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$ | SRAA. 3 |
| 5. | $\vdash_X \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q))$ | DT. 4 |

Proposition 66. $\vdash_X \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(q \vee p)) \mid \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow p))$

- | | |
|--|----------|
| 1. $\neg q, \neg q \rightarrow p \vdash_X p$ | mp |
| 2. $p, \neg p \vdash_X \neg(\neg q \rightarrow p)$ | IE |
| 3. $\neg q, \neg q \rightarrow p, \neg p \vdash_X \neg(\neg q \rightarrow p)$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\neg q, \neg p \vdash_X \neg(\neg q \rightarrow p)$ | SRAA. 3 |
| 5. $\vdash_X \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow p))$ | DT. 4 |

Proposition 67. $\vdash_X p \rightarrow p \vee p \mid p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)$

- | | |
|--|------------------|
| 1. $\vdash_X p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)$ | X1($\neg p/q$) |
|--|------------------|

Proposition 68. $\not\vdash_X p \vee p \rightarrow p \mid (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$

See Proposition 20.

Proposition 69. $\vdash_X p \vee p \rightarrow \neg\neg p \mid (\neg p \rightarrow p) \rightarrow \neg\neg p$

- | | |
|---|----------|
| 1. $\neg p, \neg p \rightarrow p \vdash_X p$ | mp |
| 2. $\neg p, p \vdash_X \neg\neg p$ | IE |
| 3. $\neg p, \neg p \rightarrow p \vdash_X \neg\neg p$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\neg p \rightarrow p \vdash_X \neg\neg p$ | SRAA. 3 |
| 5. $\vdash_X (\neg p \rightarrow p) \rightarrow \neg\neg p$ | DT. 4 |

Proposition 70. $\vdash_X \neg\neg p \rightarrow p \vee p \mid \neg\neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)$

- | | |
|---|-----------------------|
| 1. $\vdash_X \neg\neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)$ | X3($\neg p/p, p/q$) |
|---|-----------------------|

Proposition 71. $\not\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow r))$

$$\frac{\frac{p}{0} \quad \frac{q}{0} \quad \frac{r}{0} \mid \left(\frac{p}{0} \rightarrow \frac{r}{2} \quad \frac{r}{0} \right) \rightarrow \mid \left(\left(\frac{q}{0} \rightarrow \frac{r}{2} \quad \frac{r}{0} \right) \rightarrow \mid \left(\left(\frac{\neg}{1} \quad \frac{p}{0} \rightarrow \frac{q}{2} \quad \frac{r}{0} \right) \rightarrow \frac{r}{0} \right) \right)}{0}$$

Proposition 72. $\not\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (q \vee p \rightarrow r)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow r))$

$$\frac{\frac{p}{0} \quad \frac{q}{0} \quad \frac{r}{0} \mid \left(\frac{p}{0} \rightarrow \frac{r}{2} \quad \frac{r}{0} \right) \rightarrow \mid \left(\left(\frac{q}{0} \rightarrow \frac{r}{2} \quad \frac{r}{0} \right) \rightarrow \mid \left(\left(\frac{\neg}{1} \quad \frac{q}{0} \rightarrow \frac{p}{2} \quad \frac{r}{0} \right) \rightarrow \frac{r}{0} \right) \right)}{0}$$

Proposition 73. $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow \neg\neg r)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg\neg r))$

- | | |
|---|--------------------|
| 1. $\neg r, \neg r \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$ | mp |
| 2. $\neg r, \neg r \rightarrow \neg p, \neg p \rightarrow q \vdash_X q$ | mp |
| 3. $q \rightarrow r \vdash_X \neg r \rightarrow \neg q$ | Proposition 32, DT |
| 4. $p \rightarrow r \vdash_X \neg r \rightarrow \neg p$ | Proposition 32, DT |
| 5. $\neg r, q \rightarrow r \vdash_X \neg q$ | Cut. 1,3 |
| 6. $\neg r, p \rightarrow r, \neg p \rightarrow q \vdash_X q$ | Cut. 2,4 |
| 7. $\neg q, q \vdash_X \neg\neg r$ | IE |

8. $\neg r, q \rightarrow r, p \rightarrow r, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg r$ Cut. 5,6,7
9. $q \rightarrow r, p \rightarrow r, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg r$ SRAA. 8
10. $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg r))$ DT. 9

Proposition 74. $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (q \vee p \rightarrow \neg \neg r)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow \neg \neg r))$

1. $\neg r, \neg r \rightarrow \neg p \vdash_X \neg p$ mp
2. $\neg r, \neg r \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow p \vdash_X p$ mp
3. $p \rightarrow r \vdash_X \neg r \rightarrow \neg p$ Proposition 32, DT
4. $q \rightarrow r \vdash_X \neg r \rightarrow \neg q$ Proposition 32, DT
5. $\neg r, p \rightarrow r \vdash_X \neg p$ Cut. 1,3
6. $\neg r, q \rightarrow r, \neg q \rightarrow p \vdash_X p$ Cut. 2,4
7. $\neg p, p \vdash_X \neg \neg r$ IE
8. $\neg r, p \rightarrow r, q \rightarrow r, \neg q \rightarrow p \vdash_X \neg \neg r$ Cut. 5,6,7
9. $p \rightarrow r, q \rightarrow r, \neg q \rightarrow p \vdash_X \neg \neg r$ SRAA. 8
10. $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow \neg \neg r))$ DT. 9

Proposition 75. $\vdash_X (p \rightarrow \neg r) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow \neg r)) \mid (p \rightarrow \neg r) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg r))$

1. $p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg r$ Proposition 73, DT
2. $\neg \neg \neg r \vdash_X \neg r$ Proposition 29, DT
3. $p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg r$ Cut. 1,2
4. $\vdash_X (p \rightarrow \neg r) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg r))$ DT. 3

Proposition 76. $\vdash_X (p \rightarrow \neg r) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow (q \vee p \rightarrow \neg r)) \mid (p \rightarrow \neg r) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow \neg r))$

1. $p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r, \neg q \rightarrow p \vdash_X \neg \neg r$ Proposition 74, DT
2. $\neg \neg \neg r \vdash_X \neg r$ Proposition 29, DT
3. $p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r, \neg q \rightarrow p \vdash_X \neg r$ Cut. 1,2
4. $\vdash_X (p \rightarrow \neg r) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow \neg r))$ DT. 3

Proposition 77. $\vdash_X p \vee \neg p \mid \neg p \rightarrow \neg p$

1. $\neg p \vdash_X \neg p$ Definition of deduction
2. $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg p$ DT. 1

Proposition 78. $\not\vdash_X \neg p \vee p \mid \neg \neg p \rightarrow p$

See Proposition 27.

Proposition 79. $\vdash_X \neg p \vee \neg \neg p \mid \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p$

1. $\neg \neg p \vdash_X \neg \neg p$ Definition of deduction
2. $\vdash_X \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p$ DT. 1

2.8 Conjunction(\wedge)

Proposition 80. $\not\vdash_X p \wedge q \rightarrow p \mid \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow p$

$$\frac{p \quad q \mid \neg \quad (\quad p \rightarrow \neg \quad q \quad) \quad \rightarrow \quad p}{0 \quad 0 \mid 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \mid 0 \mid 0}$$

Proposition 81. $\not\vdash_X p \wedge q \rightarrow q \mid \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow q$

$$\frac{p \quad q \mid \neg \quad (\quad p \rightarrow \neg \quad q \quad) \quad \rightarrow \quad q}{0 \quad 0 \mid 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \mid 0 \mid 0}$$

Proposition 82. $\vdash_X p \wedge q \rightarrow \neg\neg p \mid \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg p$

- | | |
|---|----------------------|
| 1. $\neg p \vdash_X p \rightarrow \neg q$ | X3($\neg q/q$), mp |
| 2. $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg\neg p$ | IE |
| 3. $\neg(p \rightarrow \neg q), \neg p \vdash_X \neg\neg p$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg p$ | SRAA. 3 |
| 5. $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg p$ | DT. 4 |

Proposition 83. $\vdash_X p \wedge q \rightarrow \neg\neg q \mid \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg q$

- | | |
|---|---------------------------|
| 1. $\neg q \vdash_X p \rightarrow \neg q$ | X1($\neg q/p, p/q$), mp |
| 2. $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg\neg q$ | IE |
| 3. $\neg(p \rightarrow \neg q), \neg q \vdash_X \neg\neg q$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg q$ | SRAA. 3 |
| 5. $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg q$ | DT. 4 |

Proposition 84. $\vdash_X \neg p \wedge q \rightarrow \neg p \mid \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$

- | | |
|--|--------------------|
| 1. $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg\neg p$ | Proposition 82, DT |
| 2. $\neg\neg\neg p \vdash_X \neg p$ | Proposition 29, DT |
| 3. $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg p$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\vdash_X \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$ | DT. 3 |

Proposition 85. $\not\vdash_X \neg p \wedge q \rightarrow q \mid \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow q$

$$\frac{p \quad q \mid \neg \quad (\quad \neg \quad p \rightarrow \neg \quad q \quad) \quad \rightarrow \quad q}{1 \quad 0 \mid 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \mid 0 \mid 0}$$

Proposition 86. $\vdash_X p \wedge \neg q \rightarrow \neg q \mid \neg(p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg q$

- | | |
|---|--------------------|
| 1. $\neg(p \rightarrow \neg\neg q) \vdash_X \neg\neg\neg q$ | Proposition 83, DT |
| 2. $\neg\neg\neg q \vdash_X \neg q$ | Proposition 29, DT |
| 3. $\neg(p \rightarrow \neg\neg q) \vdash_X \neg q$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg q$ | DT. 3 |

Proposition 87. $\not\vdash_X p \wedge \neg q \rightarrow p \mid \neg(p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow p$

$$\frac{p \quad q \mid \neg \quad (\quad p \rightarrow \neg \quad \neg \quad q \quad) \rightarrow p}{0 \quad 1 \mid 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \mid 0 \quad 0}$$

Proposition 88. $\vdash_X p \wedge q \rightarrow q \wedge p \mid \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg p)$

1. $\vdash_X (q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ Proposition 33
2. $(q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg p)$ Proposition 32, DT
3. $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg p)$ Cut. 1,2

Proposition 89. $\vdash_X \neg(p \wedge q) \rightarrow \neg(q \wedge p) \mid \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$

1. $\neg(q \rightarrow \neg p) \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q)$ ¹Proposition 88, DT
2. $\neg(p \rightarrow \neg q), \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$ IE
3. $\neg(q \rightarrow \neg p), \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$ Cut. 1,2
4. $\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$ SRAA. 3
5. $\vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$ DT. 4

Proposition 90. $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg(p \wedge q) \mid \neg p \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$

1. $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg p$ Proposition 82, DT
2. $\neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$ IE
3. $\neg(p \rightarrow \neg q), \neg p \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$ Cut. 1,2
4. $\neg p \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$ SRAA. 3
5. $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$ DT. 4

Proposition 91. $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg(q \wedge p) \mid \neg p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$

1. $\neg(q \rightarrow \neg p) \vdash_X \neg\neg p$ Proposition 83, DT
2. $\neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$ IE
3. $\neg(q \rightarrow \neg p), \neg p \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$ Cut. 1,2
4. $\neg p \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$ SRAA. 3
5. $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$ DT. 4

Proposition 92. $\vdash_X p \rightarrow p \wedge p \mid p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p)$

1. $p, p \rightarrow \neg p \vdash_X \neg p$ mp
2. $p, \neg p \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg p)$ IE
3. $p, p \rightarrow \neg p \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg p)$ Cut. 1,2
4. $p \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg p)$ SRAA. 3
5. $\vdash_X p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p)$ DT. 4

Proposition 93. $\not\vdash_X p \wedge p \rightarrow p \mid \neg(p \rightarrow \neg p) \rightarrow p$

$$\frac{p \mid \neg \quad (\quad p \rightarrow \neg \quad p \quad)}{0 \mid 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \mid 0 \mid 0}$$

¹Consider Proposition 88($q/p, p/q$)

Proposition 94. $\vdash_X p \wedge p \rightarrow \neg\neg p \mid \neg(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg\neg p$

- | | | |
|----|--|---------------------------|
| 1. | $\neg p \vdash_X p \rightarrow \neg p$ | X1($\neg p/p, p/q$), mp |
| 2. | $\neg(p \rightarrow \neg p), p \rightarrow \neg p \vdash_X \neg\neg p$ | IE |
| 3. | $\neg(p \rightarrow \neg p), \neg p \vdash_X \neg\neg p$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg(p \rightarrow \neg p) \vdash_X \neg\neg p$ | SRAA. 3 |
| 5. | $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg\neg p$ | DT. 4 |

Proposition 95. $\vdash_X \neg\neg p \rightarrow p \wedge p \mid \neg\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p)$

- | | | |
|----|--|----------|
| 1. | $p \rightarrow \neg p \vdash_X \neg p$ | X4, mp |
| 2. | $\neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg p)$ | IE |
| 3. | $\neg\neg p, p \rightarrow \neg p \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg p)$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg\neg p \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg p)$ | SRAA. 3 |
| 5. | $\vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p)$ | DT. 4 |

Proposition 96. $\vdash_X p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q) \mid p \rightarrow (q \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q))$

- | | | |
|----|---|----------|
| 1. | $p, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$ | mp |
| 2. | $q, \neg q \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q)$ | IE |
| 3. | $p, q, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q)$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $p, q \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q)$ | SRAA. 3 |
| 5. | $\vdash_X p \rightarrow (q \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q))$ | DT. 4 |

Proposition 97. $\vdash_X p \rightarrow (q \rightarrow q \wedge p) \mid p \rightarrow (q \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg p))$

- | | | |
|----|---|----------|
| 1. | $q, q \rightarrow \neg p \vdash_X \neg p$ | mp |
| 2. | $p, \neg p \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg p)$ | IE |
| 3. | $p, q, q \rightarrow \neg p \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg p)$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $p, q \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg p)$ | SRAA. 3 |
| 5. | $\vdash_X p \rightarrow (q \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg p))$ | DT. 4 |

Proposition 98. $\vdash_X \neg(p \wedge \neg p) \mid \neg\neg(p \rightarrow \neg\neg p)$

- | | | |
|----|--|--------------------|
| 1. | $\vdash_X p \rightarrow \neg\neg p$ | Proposition 26 |
| 2. | $p \rightarrow \neg\neg p \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg\neg p)$ | Proposition 26, DT |
| 3. | $\vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg\neg p)$ | Cut. 1,2 |

Proposition 99. $\vdash_X \neg(\neg p \wedge p) \mid \neg\neg(\neg p \rightarrow \neg p)$

- | | | |
|----|--|--------------------|
| 1. | $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg p$ | Proposition 77 |
| 2. | $\neg p \rightarrow \neg p \vdash_X \neg\neg(\neg p \rightarrow \neg p)$ | Proposition 26, DT |
| 3. | $\vdash_X \neg\neg(\neg p \rightarrow \neg p)$ | Cut. 1,2 |

2.9 RAA(Reduction Ad Absurdum)

Proposition 100. $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$

- | | | |
|----|--|------------|
| 1. | $p, p \rightarrow q \vdash_X q$ | mp |
| 2. | $p, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$ | mp |
| 3. | $q, \neg q \vdash_X \neg p$ | IE |
| 4. | $p, p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg p$ | Cut. 1,2,3 |
| 5. | $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg p$ | SRAA. 4 |
| 6. | $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$ | DT. 5 |

Proposition 101. $\nvdash_X ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

$$\frac{p \quad q}{2 \quad 0} \mid \frac{(\quad \frac{p \quad \neg q}{2 \quad 1} \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p}{2 \quad 1} \mid 0 \mid \frac{(\quad \frac{p \quad q}{2 \quad 0} \rightarrow q) \rightarrow q}{2 \quad 0}$$

Proposition 102. $\vdash_X ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg \neg q)$

- | | | |
|----|--|--------------------|
| 1. | $p, p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q)$ | mp |
| 2. | $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p \vdash_X p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$ | Proposition 33, DT |
| 3. | $p, (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q)$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg \neg q$ | Proposition 83, DT |
| 5. | $p, (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p \vdash_X \neg \neg q$ | Cut. 3,4 |
| 6. | $\vdash_X ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg \neg q)$ | DT. 5 |

Proposition 103. $\vdash_X (p \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$

- | | | |
|----|--|------------|
| 1. | $p, p \rightarrow \neg \neg q \vdash_X \neg \neg q$ | mp |
| 2. | $p, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$ | mp |
| 3. | $\neg \neg q, \neg q \vdash_X \neg p$ | IE |
| 4. | $p, p \rightarrow \neg \neg q, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg p$ | Cut. 1,2,3 |
| 5. | $p \rightarrow \neg \neg q, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg p$ | SRAA. 4 |
| 6. | $\vdash_X (p \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$ | DT. 5 |

Proposition 104. $\nvdash_X (\neg p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow p)$

$$\frac{p \quad q}{0 \quad 0} \mid \frac{(\quad \frac{\neg p \quad q}{1 \quad 0} \rightarrow q) \rightarrow q}{1 \quad 0} \mid 0 \mid \frac{(\quad \frac{(\quad \frac{\neg p \quad \neg q}{1 \quad 0} \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p}{1 \quad 0} \rightarrow p}{1 \quad 0}$$

Proposition 105. $\nvdash_X ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

$$\frac{p \quad q}{1 \quad 0} \mid \frac{(\quad \frac{(\quad \frac{\neg p \quad \neg q}{2 \quad 1} \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p}{2 \quad 1} \rightarrow p}{2 \quad 1} \mid 0 \mid \frac{(\quad \frac{\neg p \quad q}{2 \quad 1} \rightarrow q) \rightarrow q}{2 \quad 1}$$

Proposition 106. $\vdash_X (\neg p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p)$

1. $\neg p, \neg p \rightarrow q \vdash_X q$ mp
2. $\neg p, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$ mp
3. $q, \neg q \vdash_X \neg p$ IE
4. $\neg p, \neg p \rightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg \neg p$ Cut. 1,2,3
5. $\neg p \rightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg \neg p$ SRAA. 4
6. $\vdash_X (\neg p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p)$ DT. 5

Proposition 107. $\not\vdash_X ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| p | q | $\mid ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | $\mid \quad \quad \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad \mid \quad 0 \quad \mid \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0$ | | | | | | | | | | | |

Proposition 108. $\vdash_X ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg q)$

1. $\neg p, \neg p \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow \neg q)$ mp
2. $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p \vdash_X \neg p \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow \neg q)$ Proposition 33, DT
3. $\neg p, (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow \neg q)$ Cut. 1,2
4. $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg \neg q$ Proposition 83, DT
5. $\neg p, (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p \vdash_X \neg \neg q$ Cut. 3,4
6. $\vdash_X ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg q)$ DT. 5

Proposition 109. $\vdash_X (\neg p \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p)$

1. $\neg p, \neg p \rightarrow \neg \neg q \vdash_X \neg \neg q$ mp
2. $\neg p, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$ mp
3. $\neg \neg q, \neg q \vdash_X \neg \neg p$ IE
4. $\neg p, \neg p \rightarrow \neg \neg q, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg \neg p$ Cut. 1,2,3
5. $\neg p \rightarrow \neg \neg q, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg \neg p$ SRAA. 4
6. $\vdash_X (\neg p \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p)$ DT. 5

Proposition 110. $\not\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q)$

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| p | q | $\mid (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q)$ | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | $\mid \quad \quad \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad \mid \quad 0 \quad \mid \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad \quad 0 \quad 0$ | | | | | | | | | | | |

Proposition 111. $\vdash_X ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

1. $p \vdash_X \neg p \rightarrow q$ IE,mp
2. $\neg p \rightarrow q, (\neg p \rightarrow q) \rightarrow q \vdash_X q$ mp
3. $p, (\neg p \rightarrow q) \rightarrow q \vdash_X q$ Cut. 1,2
4. $\vdash_X ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ DT. 3

Proposition 112. $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q)$

- | | |
|--|-----------------------------|
| 1. $\neg q, p \rightarrow q \vdash_X \neg p$ | Proposition 32, DT, mp, Cut |
| 2. $\neg q, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg p$ | Proposition 32, DT, mp, Cut |
| 3. $\neg p, \neg \neg p \vdash_X \neg \neg q$ | IE |
| 4. $\neg q, p \rightarrow q, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg q$ | Cut. 1,2,3 |
| 5. $p \rightarrow q, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg q$ | SRAA. 4 |
| 6. $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q)$ | DT. 6 |

Proposition 113. $\not\vdash_X ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

| | |
|---------------------------------|---|
| $\frac{p}{2} \quad \frac{q}{0}$ | $(\quad (\quad \neg \quad p \rightarrow q \quad) \rightarrow \neg \neg \neg p \quad) \rightarrow (\quad p \rightarrow q \quad)$ |
| 2 0 | 1 2 2 0 2 2 1 2 0 0 |

Proposition 114. $\vdash_X ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg \neg q)$

- | | |
|--|----------|
| 1. $p \vdash_X \neg p \rightarrow q$ | IE,mp |
| 2. $\neg p \rightarrow q, (\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q \vdash_X \neg \neg q$ | mp |
| 3. $p, (\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q \vdash_X \neg \neg q$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\vdash_X ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg \neg q)$ | DT. 3 |

Proposition 115. $\vdash_X (p \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q)$

- | | |
|--|-----------------------------|
| 1. $\neg q, p \rightarrow \neg \neg q \vdash_X \neg p$ | Proposition 33, DT, mp, Cut |
| 2. $\neg p, \neg p \rightarrow q \vdash_X q$ | mp |
| 3. $\neg q, p \rightarrow \neg \neg q, \neg p \rightarrow q \vdash_X q$ | Cut. 1,2 |
| 4. $q \vdash_X \neg \neg q$ | Proposition 26, DT |
| 5. $\neg q, p \rightarrow \neg \neg q, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg q$ | Cut. 3,4 |
| 6. $p \rightarrow \neg \neg q, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg q$ | SRAA. 5 |
| 7. $\vdash_X (p \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q)$ | DT. 6 |

Proposition 116. $\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$

- | | |
|---|--------------------|
| 1. $q, q \rightarrow \neg p, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$ | mp |
| 2. $p \rightarrow \neg q \vdash_X q \rightarrow \neg p$ | Proposition 33, DT |
| 3. $q, p \rightarrow \neg q, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$ | Cut. 1,2 |
| 4. $p \rightarrow \neg q, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$ | SRAA. 3 |
| 5. $\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$ | DT. 4 |

Proposition 117. $\vdash_X ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$

- | | |
|---|----------|
| 1. $p \vdash_X \neg p \rightarrow \neg q$ | IE,mp |
| 2. $\neg p \rightarrow \neg q, (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$ | mp |
| 3. $p, (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$ | Cut. 1,2 |
| 4. $\vdash_X ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ | DT. 3 |

2.10 Exp(Exportation)

Proposition 118. $\nVdash_X (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r) \mid (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r)$

$$\frac{p \quad q \quad r}{2 \quad 0 \quad 0} \mid \frac{(\quad p \rightarrow (\quad q \rightarrow r \quad) \quad)}{2 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 0} \rightarrow (\quad \neg (\quad p \rightarrow \neg q \quad) \rightarrow r \quad)}{0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0}$$

Proposition 119. $\vdash_X ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \mid (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

1. $p, q \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q)$ Proposition 96, DT
2. $\neg(p \rightarrow \neg q), \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \vdash_X r$ mp
3. $p, q, \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \vdash_X r$ Cut. 1,2
4. $\vdash_X (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ DT. 3

Proposition 120. $\vdash_X (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow \neg\neg r) \mid (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg r)$

1. $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg p$ Proposition 82, DT
2. $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg q$ Proposition 83, DT
3. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow r)$ Proposition 49, DT
4. $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow r)$ mp
5. $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow r)$ Cut. 1,3,4
6. $\neg\neg(q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg q \rightarrow \neg\neg r$ Proposition 45, DT
7. $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg q \rightarrow \neg\neg r$ Cut. 5,6
8. $\neg\neg q, \neg\neg q \rightarrow \neg\neg r \vdash_X \neg\neg r$ mp
9. $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg r$ Cut. 2,7,8
10. $\vdash_X (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg r)$ DT. 9

2.11 Assoc(Association)

Proposition 121. $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((r \wedge p) \rightarrow (r \wedge q)) \mid (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg(r \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg q))$

1. $\neg(r \rightarrow \neg p) \vdash_X \neg\neg r$ Proposition 82, DT
2. $\neg(r \rightarrow \neg p) \vdash_X \neg\neg p$ Proposition 83, DT
3. $p \rightarrow q \vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q$ Proposition 49, DT
4. $r \rightarrow \neg q \vdash_X \neg\neg q \rightarrow \neg r$ Proposition 32, DT
5. $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q, \neg\neg q \rightarrow \neg r \vdash_X \neg r$ mp
6. $\neg(r \rightarrow \neg p), p \rightarrow q, r \rightarrow \neg q \vdash_X \neg r$ Cut. 2,3,4,5
7. $\neg\neg r, \neg r \vdash_X \neg(r \rightarrow \neg q)$ IE
8. $\neg(r \rightarrow \neg p), p \rightarrow q, r \rightarrow \neg q \vdash_X \neg(r \rightarrow \neg q)$ Cut. 1,6,7
9. $\neg(r \rightarrow \neg p), p \rightarrow q \vdash_X \neg(r \rightarrow \neg q)$ SRAA. 8
10. $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg(r \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg q))$ DT. 9

Proposition 122. $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)) \mid (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r))$

1. $p \rightarrow q, r \wedge p \vdash_X r \wedge q$ Proposition 121, DT
2. $p \wedge r \vdash_X r \wedge p$ Proposition 88, DT
3. $p \rightarrow q, p \wedge r \vdash_X r \wedge q$ Cut. 1,2
4. $r \wedge q \vdash_X q \wedge r$ Proposition 88, DT
5. $p \rightarrow q, p \wedge r \vdash_X q \wedge r$ Cut. 3,4
6. $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)) \mid (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r))$ DT. 5

Proposition 123. $\vdash_X (p \wedge q) \wedge r \rightarrow p \wedge (q \wedge r) \mid \neg(\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r))$

1. $q, r \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg r)$ Proposition 96, DT
2. $p, p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r) \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow \neg r)$ mp
3. $\neg(q \rightarrow \neg r), \neg\neg(q \rightarrow \neg r) \vdash_X \neg q$ IE
4. $p, q, r, p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r) \vdash_X \neg q$ Cut. 1,2,3
5. $p, r, p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r) \vdash_X \neg q$ SRAA. 4
6. $p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r) \vdash_X r \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ DT. 5
7. $r \rightarrow (p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r$ Proposition 32, DT
8. $p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r) \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r$ Cut. 6,7
9. $\vdash_X (p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r)) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r)$ DT. 8
10. $\vdash_X \neg(\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r))$ Proposition 32, DT, Cut. 9

Proposition 124. $\vdash_X p \wedge (q \wedge r) \rightarrow (p \wedge q) \wedge r \mid \neg(p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r)) \rightarrow \neg(\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r)$

1. $p \wedge (q \wedge r) \vdash_X p \wedge (r \wedge q)$ Proposition 88, Proposition 121,DT
2. $p \wedge (r \wedge q) \vdash_X (r \wedge q) \wedge p$ Proposition 88,DT
3. $(r \wedge q) \wedge p \vdash_X r \wedge (q \wedge p)$ Proposition 123,DT
4. $r \wedge (q \wedge p) \vdash_X (q \wedge p) \wedge r$ Proposition 88,DT
5. $(q \wedge p) \wedge r \vdash_X (p \wedge q) \wedge r$ Proposition 88, Proposition 122,DT
6. $p \wedge (q \wedge r) \vdash_X (p \wedge q) \wedge r$ Cut. 1,2,3,4,5
7. $\vdash_X p \wedge (q \wedge r) \rightarrow (p \wedge q) \wedge r \mid \neg(p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r)) \rightarrow \neg(\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r)$ DT. 6

Proposition 125. $\vdash_X (p \vee q) \vee r \rightarrow p \vee (q \vee r) \mid (\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r))$

1. $\neg p, \neg q \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$ Proposition 65, DT
2. $\neg(\neg p \rightarrow q), \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r \vdash_X r$ mp
3. $\neg p, \neg q, \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r \vdash_X r$ Cut. 1,2
4. $\vdash_X (\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r))$ DT. 3

Proposition 126. $\vdash_X p \vee (q \vee r) \rightarrow (p \vee q) \vee r \mid (\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r)$

1. $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$ Proposition 56, DT
2. $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$ Proposition 57, DT
3. $\neg p, \neg q, \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r) \vdash_X r$ mp
4. $\neg(\neg p \rightarrow q), \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r) \vdash_X r$ Cut. 1,2,3
5. $\vdash_X (\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r)$ DT. 4

2.12 DeM(DeMorgan's laws)

Proposition 127. $\vdash_X \neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q) \mid \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q)$

- | | | |
|----|---|--------------------|
| 1. | $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$ | Proposition 56, DT |
| 2. | $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$ | Proposition 57, DT |
| 3. | $\neg p, \neg q \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q)$ | Proposition 96, DT |
| 4. | $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q)$ | Cut. 1,2,3 |
| 5. | $\vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q)$ | DT. 4 |

Proposition 128. $\vdash_X (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \vee q) \mid \neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q)$

- | | | |
|-----|---|--------------------|
| 1. | $\neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q) \vdash_X \neg p$ | Proposition 56, DT |
| 2. | $\neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q) \vdash_X \neg\neg\neg q$ | Proposition 57, DT |
| 3. | $\neg p, \neg p \rightarrow q \vdash_X q$ | mp |
| 4. | $\neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q), \neg p \rightarrow q \vdash_X q$ | Cut. 1,3 |
| 5. | $q \vdash_X \neg\neg q$ | Proposition 26, DT |
| 6. | $\neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q), \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg\neg q$ | Cut. 4,5 |
| 7. | $\neg\neg q, \neg\neg\neg q \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$ | IE |
| 8. | $\neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q), \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$ | Cut. 2,6,7 |
| 9. | $\neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q) \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$ | SRAA. 8 |
| 10. | $\vdash_X \neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q)$ | DT. 9 |

Proposition 129. $\vdash_X \neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \mid \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)$

- | | | |
|----|---|--------------------|
| 1. | $\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg q$ | Proposition 45, DT |
| 2. | $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg q \vdash_X \neg\neg\neg q$ | mp |
| 3. | $\neg\neg p, \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg\neg q$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg\neg\neg q \vdash_X \neg q$ | Proposition 29, DT |
| 5. | $\neg\neg p, \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg q$ | Cut. 3,4 |
| 6. | $\vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)$ | DT. 5 |

Proposition 130. $\vdash_X (\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q) \mid (\neg\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$

- | | | |
|----|---|--------------------|
| 1. | $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$ | mp |
| 2. | $\neg q \vdash_X \neg\neg\neg q$ | Proposition 28, DT |
| 3. | $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg\neg\neg q$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg\neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg q$ | DT. 3 |
| 5. | $\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg q \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$ | Proposition 46, DT |
| 6. | $\neg\neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$ | Cut. 4,5 |
| 7. | $\vdash_X (\neg\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$ | DT. 6 |

2.13 RE(Replacement of Equivalents)

Proposition 131. $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((r \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow s)))$

1. $p, p \rightarrow r, r \rightarrow q, q \rightarrow s \vdash_X s$ mp
2. $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((r \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow s)))$ DT. 1

Proposition 132. $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r \vee s)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r \rightarrow s)))$

1. $\neg r, p \rightarrow r \vdash_X \neg p$ Proposition 32, DT, mp, Cut
2. $\neg p, \neg p \rightarrow q, q \rightarrow s \vdash_X s$ mp
3. $\neg r, p \rightarrow r, \neg p \rightarrow q, q \rightarrow s \vdash_X s$ Cut. 1,2
4. $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r \rightarrow s)))$ DT. 3

Proposition 133. $\nVdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (p \vee q \rightarrow s \vee r)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg s \rightarrow r)))$

$$\frac{p \quad q \quad r \quad s \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (p \vee q \rightarrow s \vee r)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg s \rightarrow r)))}{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \mid 0 \quad 2 \quad 0 \mid 0 \mid 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0}$$

2.14 Dist(Distribution)

Proposition 134. $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r)) \mid (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r)))$

1. $p, p \rightarrow q \vdash_X q$ mp
2. $p, p \rightarrow r \vdash_X r$ mp
3. $q, r \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg r)$ Proposition 96, DT
4. $p \rightarrow q, p \rightarrow r, p \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg r)$ Cut. 1,2,3
5. $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r)))$ DT. 4

Proposition 135. $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r \wedge s)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)))$

1. $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg p$ Proposition 82, DT
2. $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg q$ Proposition 83, DT
3. $\neg\neg p, p \rightarrow r \vdash_X \neg\neg r$ Proposition 49, DT, mp, Cut
4. $\neg\neg q, q \rightarrow s \vdash_X \neg\neg s$ Proposition 49, DT, mp, Cut
5. $\neg\neg r, r \rightarrow \neg s \vdash_X \neg\neg\neg s$ Proposition 49, DT, mp, Cut
6. $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow r, r \rightarrow \neg s \vdash_X \neg\neg\neg s$ Cut. 1,3,5
7. $\neg(p \rightarrow \neg q), q \rightarrow s \vdash_X \neg\neg s$ Cut. 2,4
8. $\neg\neg\neg s, \neg\neg s \vdash_X \neg(r \rightarrow \neg s)$ IE
9. $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow r, r \rightarrow \neg s, q \rightarrow s \vdash_X \neg(r \rightarrow \neg s)$ Cut. 6,7,8
10. $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow r, q \rightarrow s \vdash_X \neg(r \rightarrow \neg s)$ SRAA. 9
11. $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)))$ DT. 10

Proposition 136. $\vdash_X (p \rightarrow r \wedge s) \rightarrow ((q \rightarrow r \wedge s) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r \wedge s)) \mid (p \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)) \rightarrow ((q \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)))$

1. $p \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s), q \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s), (\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg(r \rightarrow \neg s)$ ²Proposition 75,DT
2. $\vdash_X (p \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)) \rightarrow ((q \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)))$ DT. 1

Proposition 137. $\vdash_X p \wedge (q \vee r) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \mid \neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg r))$

1. $\neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)) \vdash_X \neg\neg p$ Proposition 82, DT
2. $\neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)) \vdash_X \neg\neg(\neg q \rightarrow r)$ Proposition 83, DT
3. $\neg\neg p, p \rightarrow \neg r \vdash_X \neg\neg r$ Proposition 49, DT, mp, Cut
4. $\neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)), p \rightarrow \neg r \vdash_X \neg\neg r$ Cut. 1,3
5. $\neg\neg p, \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg\neg q$ Proposition 45, DT, mp, Cut
6. $\neg\neg\neg q, \neg\neg(\neg q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg r$ Proposition 45, DT, mp, Cut
7. $\neg\neg p, \neg\neg(p \rightarrow \neg q), \neg\neg(\neg q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg r$ Cut. 5,6
8. $\neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)), \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg r$ Cut. 1,2,7
9. $\neg\neg r, \neg\neg\neg r \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg r)$ IE
10. $\neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)), p \rightarrow \neg r, \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg r)$ Cut. 4,8,9
11. $\neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)), \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg r)$ SRAA. 10
12. $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg r))$ DT. 11

Proposition 138. $\vdash_X ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \rightarrow p \wedge (q \vee r) \mid (\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg r)) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r))$

1. $\vdash_X p \rightarrow p$ Proposition 22
2. $\vdash_X q \rightarrow q \vee r$ Proposition 54
3. $p \rightarrow p, q \rightarrow q \vee r \vdash_X p \wedge q \rightarrow p \wedge (q \vee r)$ Proposition 135,DT
4. $\vdash_X p \wedge q \rightarrow p \wedge (q \vee r)$ Cut. 1,2,3
5. $\vdash_X r \rightarrow q \vee r$ Proposition 55
6. $p \rightarrow p, r \rightarrow q \vee r \vdash_X p \wedge r \rightarrow p \wedge (q \vee r)$ Proposition 135,DT
7. $\vdash_X p \wedge r \rightarrow p \wedge (q \vee r)$ Cut. 1,5,6
8. $\vdash_X (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \rightarrow p \wedge (q \vee r)$ Proposition 136, DT, Cut. 4,7
9. $\vdash_X (\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg r)) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r))$ 8

Proposition 139. $\vdash_X p \vee (q \wedge r) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \mid (\neg p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r)) \rightarrow \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r))$

1. $\vdash_X p \rightarrow (p \vee q)$ Proposition 54
2. $\vdash_X p \rightarrow (p \vee r)$ Proposition 54
3. $p \rightarrow (p \vee q), p \rightarrow (p \vee r) \vdash_X p \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ Proposition 134,DT
4. $\vdash_X p \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ Cut. 1,2,3
5. $\vdash_X q \rightarrow (p \vee q)$ Proposition 55
6. $\vdash_X r \rightarrow (p \vee r)$ Proposition 55

²Consider Proposition 76(($r \rightarrow \neg s$)/ r)

7. $q \rightarrow (p \vee q), r \rightarrow (p \vee r) \vdash_X q \wedge r \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ Proposition 135,DT
8. $\vdash_X q \wedge r \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ Cut. 5,6,7
9. $\vdash_X p \vee (q \wedge r) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ Proposition 136, DT, Cut. 4,8
10. $\vdash_X (\neg p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r)) \rightarrow \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r))$ 9

Proposition 140. $\vdash_X ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \rightarrow p \vee (q \wedge r) \mid \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r))$

1. $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)) \vdash_X \neg\neg(\neg p \rightarrow q)$ Proposition 82
2. $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)) \vdash_X \neg\neg(\neg p \rightarrow r)$ Proposition 83
3. $\neg p, \neg\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg q$ Proposition 28,45, DT, mp, Cut
4. $\neg p, \neg\neg(\neg p \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg r$ Proposition 28,45, DT, mp, Cut
5. $\neg p, \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)) \vdash_X \neg\neg q$ Cut. 1,3
6. $\neg p, \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)) \vdash_X \neg\neg r$ Cut. 2,4
7. $\neg\neg q, q \rightarrow \neg r \vdash_X \neg\neg r$ Proposition 49, DT, mp, Cut
8. $\neg p, \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)), q \rightarrow \neg r \vdash_X \neg\neg r$ Cut. 5,7
9. $\neg\neg r, \neg\neg r \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg r)$ IE
10. $\neg p, \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)), q \rightarrow \neg r \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg r)$ Cut. 6,8,9
11. $\neg p, \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)) \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg r)$ SRAA. 10
12. $\vdash_X \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r))$ DT. 11

2.15 CO(Choose one)

Proposition 141. $\vdash_X (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \mid \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

1. $q \vdash_X p \rightarrow q$ X1($q/p, p/q$), DT
2. $\neg(p \rightarrow q), p \rightarrow q \vdash_X p$ IE
3. $\neg(p \rightarrow q), q \vdash_X p$ Cut. 1,2
4. $\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ DT. 3

Proposition 142. $\vdash_X (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q) \mid \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$

1. $\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$ Proposition 42, DT
2. $\neg q \vdash_X p \rightarrow \neg q$ X1($\neg q/p, p/q$), DT
3. $\neg(p \rightarrow q) \vdash_X p \rightarrow \neg q$ Cut. 1,2
4. $\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ DT. 3

Proposition 143. $\not\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \vee (p \rightarrow q) \mid \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

$$\frac{p \quad q}{2 \quad 0} \mid \frac{\neg \quad (}{2 \quad 2} \frac{p \rightarrow \neg \quad q}{1 \quad 1} \quad) \mid \frac{\rightarrow \quad (}{0 \quad 0} \frac{p \rightarrow \neg \quad q}{2 \quad 0} \quad)$$

Proposition 144. $\vdash_X (p \rightarrow \neg\neg q) \vee (p \rightarrow \neg q) \mid \neg(p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$

- | | | |
|----|--|---------------------------|
| 1. | $\neg(p \rightarrow \neg\neg q) \vdash_X \neg\neg\neg q$ | Proposition 42, DT |
| 2. | $\neg\neg\neg q \vdash_X \neg q$ | Proposition 29, DT |
| 3. | $\neg q \vdash_X p \rightarrow \neg q$ | X1($\neg q/p, p/q$), DT |
| 4. | $\neg(p \rightarrow \neg\neg q) \vdash_X p \rightarrow \neg q$ | Cut. 1,2,3 |
| 5. | $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ | DT. 4 |

Proposition 145. $\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \vee (p \rightarrow \neg\neg q) \mid \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg\neg q)$

- | | | |
|----|--|------------------------------|
| 1. | $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg\neg q)$ | ³ Proposition 142 |
|----|--|------------------------------|

Proposition 146. $\vdash_X (p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow q) \mid \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

- | | | |
|----|---|----------|
| 1. | $\neg p \vdash_X p \rightarrow q$ | IE, DT |
| 2. | $p \rightarrow q, \neg(p \rightarrow q) \vdash_X q$ | IE |
| 3. | $\neg p, \neg(p \rightarrow q) \vdash_X q$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ | DT. 3 |

Proposition 147. $\vdash_X (\neg p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow q) \mid \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

- | | | |
|----|---|----------|
| 1. | $p \vdash_X \neg p \rightarrow q$ | IE, DT |
| 2. | $\neg p \rightarrow q, \neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X q$ | IE |
| 3. | $p, \neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X q$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ | DT. 3 |

2.16 DN(Double Negation)

Proposition 148. $\vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$

- | | | |
|----|--|--------------------------------|
| 1. | $\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg(\neg p \rightarrow p)$ | Proposition 43, DT |
| 2. | $\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p) \vdash_X \neg p$ | Proposition 42, DT |
| 3. | $\neg p, \neg\neg(\neg p \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg p$ | Proposition 28,45, DT, mp, Cut |
| 4. | $\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg p$ | Cut. 1,2,3 |
| 5. | $\neg p, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$ | IE |
| 6. | $\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$ | Cut. 2,4,5 |
| 7. | $\vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$ | SRAA. 6 |

Proposition 149. $\vdash_X \neg\neg(\neg\neg p \rightarrow p)$

- | | | |
|----|--|--------------------|
| 1. | $\neg(\neg\neg p \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg p$ | Proposition 56, DT |
| 2. | $\neg(\neg\neg p \rightarrow p) \vdash_X \neg p$ | Proposition 57, DT |
| 3. | $\neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg\neg(\neg\neg p \rightarrow p)$ | IE |
| 4. | $\neg(\neg\neg p \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg(\neg\neg p \rightarrow p)$ | Cut. 1,2,3 |
| 5. | $\vdash_X \neg\neg(\neg\neg p \rightarrow p)$ | SRAA. 4 |

³Consider Proposition 142($\neg q/q$)

Proposition 150. $\vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$

- | | | |
|-----|--|--------------------------------|
| 1. | $\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \vdash_X \neg\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$ | Proposition 43, DT |
| 2. | $\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \vdash_X \neg(q \rightarrow p)$ | Proposition 42, DT |
| 3. | $\neg(q \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg q$ | Proposition 43, DT |
| 4. | $\neg(q \rightarrow p) \vdash_X \neg p$ | Proposition 42, DT |
| 5. | $\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \vdash_X \neg\neg q$ | Cut. 2,3 |
| 6. | $\neg p, \neg\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg\neg q$ | Proposition 28,45, DT, mp, Cut |
| 7. | $\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \vdash_X \neg\neg\neg q$ | Cut. 1,2,4,6 |
| 8. | $\neg\neg q, \neg\neg\neg q \vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$ | IE |
| 9. | $\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$ | Cut. 5,7,8 |
| 10. | $\vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$ | SRAA. 9 |

Proposition 151. $\vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p))$

- | | | |
|-----|--|--------------------------------|
| 1. | $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)) \vdash_X \neg\neg(\neg p \rightarrow q)$ | Proposition 43, DT |
| 2. | $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)) \vdash_X \neg(\neg q \rightarrow p)$ | Proposition 42, DT |
| 3. | $\neg(\neg q \rightarrow p) \vdash_X \neg q$ | Proposition 56, DT |
| 4. | $\neg(\neg q \rightarrow p) \vdash_X \neg p$ | Proposition 57, DT |
| 5. | $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)) \vdash_X \neg q$ | Cut. 2,3 |
| 6. | $\neg p, \neg\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg q$ | Proposition 28,45, DT, mp, Cut |
| 7. | $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)) \vdash_X \neg\neg q$ | Cut. 1,2,4,6 |
| 8. | $\neg q, \neg\neg q \vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p))$ | IE |
| 9. | $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)) \vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p))$ | Cut. 5,7,8 |
| 10. | $\vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p))$ | SRAA. 9 |

Proposition 152. $\vdash_X \neg\neg((\neg q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$

- | | | |
|----|---|------------------------------|
| 1. | $\vdash_X \neg\neg((\neg q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$ | ⁴ Proposition 150 |
|----|---|------------------------------|

Proposition 153. $\vdash_X \neg\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p)$

- | | | |
|----|--|--------------------|
| 1. | $\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p) \vdash_X \neg(p \rightarrow q)$ | Proposition 56, DT |
| 2. | $\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p) \vdash_X \neg p$ | Proposition 57, DT |
| 3. | $\neg p \vdash_X p \rightarrow q$ | IE, DT |
| 4. | $\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p) \vdash_X p \rightarrow q$ | Cut. 2,3 |
| 5. | $p \rightarrow q, \neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p)$ | IE |
| 6. | $\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p)$ | Cut. 1,4,5 |
| 7. | $\vdash_X \neg\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p)$ | SRAA. 6 |

Proposition 154. $\vdash_X \neg\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)) \mid \neg\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q))$

⁴Consider Proposition 150($q/p, \neg p/q$)

1. $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q)) \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow q)$ Proposition 43, DT
2. $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q)) \vdash_X \neg(\neg\neg p \rightarrow q)$ Proposition 42, DT
3. $\neg(\neg\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg p$ Proposition 56, DT
4. $\neg(\neg\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$ Proposition 57, DT
5. $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q)) \vdash_X \neg q$ Cut. 2,4
6. $\neg\neg p, \neg\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg q$ Proposition 45, DT, mp, Cut
7. $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q)) \vdash_X \neg\neg q$ Cut. 1,2,3,6
8. $\neg q, \neg\neg q \vdash_X \neg\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q))$ IE
9. $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q)) \vdash_X \neg\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q))$ Cut. 5,7,8
10. $\vdash_X \neg\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q))$ SRAA. 9

2.17 Other

Proposition 155. $\vdash_X \neg(p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q) \mid \neg((\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg\neg q))$

1. $\vdash_X p \vee \neg p$ Proposition 77
2. $p \vee \neg p, p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q \vdash_X q \wedge \neg q$ mp
3. $p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q \vdash_X q \wedge \neg q$ Cut. 1,2
4. $\vdash_X \neg(q \wedge \neg q)$ Proposition 98
5. $\neg(q \wedge \neg q), q \wedge \neg q \vdash_X \neg(p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q)$ IE
6. $p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q \vdash_X \neg(p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q)$ Cut. 3,4,5
7. $\vdash_X \neg(p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q) \mid \neg((\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg\neg q))$ DT. 6

2.18 Peirce(Peirce' law)

Proposition 156. $\nVdash_X ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow p) \rightarrow p$

$$\frac{p \mid ((\frac{p}{0} \rightarrow \frac{\neg p}{1}) \rightarrow \frac{p}{0}) \rightarrow \frac{p}{0} \mid \frac{p}{0}}{0}$$

Proposition 157. $\vdash_X ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \neg\neg p$

1. $\neg p, (p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash_X \neg(p \rightarrow q)$ Proposition 32, DT, mp, Cut
2. $\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg p$ Proposition 43, DT
3. $\neg p, (p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash_X \neg\neg p$ Cut. 1,2
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash_X \neg\neg p$ SRAA. 3
5. $\vdash_X ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \neg\neg p$ DT. 4

Proposition 158. $\vdash_X ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

1. $p, (\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg p \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$ Proposition 33, DT, mp, Cut
2. $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$ Proposition 56, DT
3. $p, (\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg p \vdash_X \neg p$ Cut. 1,2
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash_X \neg p$ SRAA. 3
5. $\vdash_X ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$ DT. 4

Proposition 159 (Peirce' law). $\not\models_X ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

| p | q | $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ | | | | | | |
|-----|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |