

# Data set

Qi

## 1 $H_X$

### 1.1 Definitions

**Definition 1.** The initial symbols of  $\mathcal{L}_X$  are called  $\mathcal{L}_X$ -symbols, of which there are three types:

- Propositional variables:  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ ;
- Propositional connectives:  $\neg, \rightarrow$  ( $\neg$  is unitary,  $\rightarrow$  is binary);
- Brackets: ( and ).

**Definition 2.** The formulas of  $\mathcal{L}_X$  are called  $\mathcal{L}_X$ -formulas, which are the symbolic strings based on  $\mathcal{L}_X$ -symbols according to the formation-rules as follows:

- All propositional variables of  $\mathcal{L}_X$  are  $\mathcal{L}_X$ -formulas;
- If  $\phi$  is a  $\mathcal{L}_X$ -formula,  $\neg\phi$  is a  $\mathcal{L}_X$ -formula;
- If  $\phi$  and  $\psi$  are  $\mathcal{L}_X$ -formulas,  $(\phi \rightarrow \psi)$  is a  $\mathcal{L}_X$ -formula;
- Only these are  $\mathcal{L}_X$ -formulas.

**Definition 3.**  $\vee, \wedge, \leftrightarrow$  are introduced as abbreviations that for any formula  $\phi$  and  $\psi$ :

$$\phi \vee \psi \triangleq \neg\phi \rightarrow \psi; \quad \phi \wedge \psi \triangleq \neg(\phi \rightarrow \neg\psi); \quad \phi \leftrightarrow \psi \triangleq (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi).$$

**Example 4.** Axiomatic system  $H_X$ .

The axioms of  $H_X$ :

$$\text{X1 } p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$\text{X2 } (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

$$\text{X3 } \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$\text{X4 } (p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$$

The rules of inference of  $S$ :

*mp (modus ponens):*  $\psi$  can be obtained from  $\phi \rightarrow \psi$  and  $\phi$ .

*sub (substitution):*  $\phi(\mathfrak{s})$  can be obtained from  $\phi$ , where  $\mathfrak{s}$  is a finite substitution. ■

**Definition 5.** A proof of  $\phi$  in  $H_X$  is a sequence of formulas  $\phi_0, \dots, \phi_n$ , where

- $\phi_n = \phi$ , and
- For each  $k \leq n$ ,  $\phi_k$  is either an axiom of  $H_X$ , or is obtained from  $\phi_0, \dots, \phi_{k-1}$  by sub or mp.

**Definition 6.**  $\phi$  is provable in  $H_X$  if and only if there is a proof of  $\phi$  in  $H_X$ .

**Definition 7.** A deduction from  $\Gamma$ , which is a set of formulas, to  $\phi$  in  $H_X$  is a sequence of formulas  $\phi_0, \dots, \phi_n$ , where

- $\phi_n = \phi$ , and
- For each  $k \leq n$ ,  $\phi_k$  is either an axiom of  $H_X$ , or an element of  $\Gamma$ , or is obtained from  $\phi_0, \dots, \phi_{k-1}$  by sub or mp, where sub is only used for the axiom.

**Definition 8.** For any formula set  $\Gamma$  and any formula  $\phi$ ,  $\phi$  is deducible from  $\Gamma$  in  $H_X$  or  $\phi$  is a deductive consequence of  $\Gamma$  in  $H_X$  if and only if there is a deduction from  $\Gamma$  to  $\phi$  in  $H_X$ , denoted as  $\Gamma \vdash_X \phi$ . If  $\Gamma = \emptyset$ ,  $\emptyset \vdash_X \phi$  is denoted as  $\vdash_X \phi$ .

**Theorem 9.** For any formula  $\phi$ ,  $\phi$  is provable in  $H_X$  if and only if  $\vdash_X \phi$ .

**Theorem 10 (Soundness).** In  $H_X$ , if  $\vdash_X \phi$ ,  $\phi$  is a tautology.

**Theorem 11 (Incompleteness).** For any formula  $\phi$ , if  $\phi$  isn't a  $\mathfrak{T}_X$ - $\{2\}$ -tautology, where  $\mathfrak{T}_X = \langle \{0, 1, 2\}, g_{\neg}, g_{\rightarrow} \rangle$  is a three-value interpretation structure in  $\mathcal{L}_X$  and the definitions of  $g_{\neg}$  and  $g_{\rightarrow}$  are in Table 1,  $\phi$  is unprovable in  $H_X$ , denoted as  $\nvdash_X \phi$ .

	$g_{\neg}$		$g_{\rightarrow}$	0	1	2
0	1	0	2	2	1	2
1	2	1	2	2	2	2
2	1	2	2	0	1	2

Table 1:  $g_{\neg}$  and  $g_{\rightarrow}$

## 1.2 Tools

**Theorem 12 (Cut).** For any set of formulas  $\Delta$  and  $\Gamma$ , as well as any formula  $\phi_0, \dots, \phi_k$  and  $\psi$ , if  $\Delta, \phi_0, \dots, \phi_k \vdash_X \psi$  and  $\Gamma \vdash_X \phi_i$  holds for any  $i \leq k$ , then  $\Gamma \cup \Delta \vdash_X \psi$ .

**Proof** Later. ■

**Theorem 13 (DT).**  $\Gamma, \phi \vdash_X \psi$ , iff  $\Gamma \vdash_X \phi \rightarrow \psi$ .

[deduction theorem]

**Proof** Later. ■

**Theorem 14 (SRAA).** If  $\Gamma, \phi \vdash_X \neg\phi$ ,  $\Gamma \vdash_X \neg\phi$ .

[simple reductio ad absurdum]

**Proof** Later. ■

**Theorem 15** (IE). *For any set of formulas  $\Gamma$  and  $\Delta$ , as well as any formula  $\phi$ , if  $\Gamma \vdash_X \phi$  and  $\Delta \vdash_X \neg\phi$ , then for any formula  $\psi$ ,  $\Gamma \cup \Delta \vdash_X \psi$ . [inconsistency effect]*

**Proof** Later. ■

## 2 Propositions

### 2.1 Axioms

**Proposition 16.**  $\vdash_X p \rightarrow (q \rightarrow p)$

1.  $\vdash_X p \rightarrow (q \rightarrow p)$  X1

**Proposition 17.**  $\vdash_X (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.  $\vdash_X (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$  X2

**Proposition 18.**  $\vdash_X \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

1.  $\vdash_X \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$  X3

**Proposition 19.**  $\vdash_X (p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

1.  $\vdash_X (p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$  X4

**Proposition 20.**  $\nvdash_X (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$

$\frac{p}{0}$	$\mid$	$($	$\neg$	$\frac{p}{1}$	$\rightarrow$	$\frac{p}{2}$	$)$	$\rightarrow$	$\frac{p}{0}$
$\frac{p}{0}$	$\mid$							$\mid$	$\frac{p}{0}$

**Proposition 21.**  $\vdash_X (\neg p \rightarrow p) \rightarrow \neg\neg p$

1. $\neg p, \neg p \rightarrow p \vdash_X p$	mp
2. $\neg p, p \vdash_X \neg\neg p$	IE
3. $\neg p, \neg p \rightarrow p \vdash_X \neg\neg p$	Cut. 1,2
4. $\neg p \rightarrow p \vdash_X \neg\neg p$	SRAA. 3
5. $\vdash_X (\neg p \rightarrow p) \rightarrow \neg\neg p$	DT. 4

## 2.2 Deduction

**Proposition 22.**  $\vdash_X p \rightarrow p$

- |    |                            |                         |
|----|----------------------------|-------------------------|
| 1. | $p \vdash_X p$             | Definition of deduction |
| 2. | $\vdash_X p \rightarrow p$ | DT. 1                   |

**Proposition 23.**  $\vdash_X (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

- |    |  |       |
|----|--|-------|
| 1. | $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q \vdash_X r$   | mp    |
| 2. | $p \rightarrow (q \rightarrow r), q \vdash_X p \rightarrow r$                              | DT. 1 |
| 3. | $\vdash_X (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ | DT. 2 |

**Proposition 24.**  $\vdash_X (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

- |    |  |          |
|----|--|----------|
| 1. | $p \rightarrow q, p \vdash_X q$  | mp       |
| 2. | $q \rightarrow r, q \vdash_X r$  | mp       |
| 3. | $q \rightarrow r, p \rightarrow q, p \vdash_X r$   | Cut. 1,2 |
| 4. | $\vdash_X (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ | DT. 3    |

**Proposition 25.**  $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

- |    |  |          |
|----|--|----------|
| 1. | $p \rightarrow q, p \vdash_X q$  | mp       |
| 2. | $q \rightarrow r, q \vdash_X r$  | mp       |
| 3. | $p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash_X r$   | Cut. 1,2 |
| 4. | $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ | DT. 3    |

## 2.3 Negation( $\neg$ )

**Proposition 26.**  $\vdash_X p \rightarrow \neg\neg p$

- |    |                                     |         |
|----|-------------------------------------|---------|
| 1. | $p, \neg p \vdash_X \neg\neg p$     | IE      |
| 2. | $p \vdash_X \neg\neg p$             | SRAA. 1 |
| 3. | $\vdash_X p \rightarrow \neg\neg p$ | DT. 2   |

**Proposition 27.**  $\nVdash_X \neg\neg p \rightarrow p$

$p$	$\neg$	$\neg$	$p$	$\rightarrow$	$p$
0	2	1	0	0	0

**Proposition 28.**  $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg\neg\neg p$

- |    |  |         |
|----|--|---------|
| 1. | $\neg p, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg\neg p$ | IE      |
| 2. | $\neg p \vdash_X \neg\neg\neg p$             | SRAA. 1 |
| 3. | $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg\neg\neg p$ | DT. 2   |

**Proposition 29.**  $\vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg p$

- |    |  |                    |
|----|--|--------------------|
| 1. | $p \vdash_X \neg\neg p$                  | Proposition 26, DT |
| 2. | $\neg p, \neg\neg p \vdash_X \neg p$     | IE                 |
| 3. | $p, \neg\neg p \vdash_X \neg p$          | Cut. 1,2           |
| 4. | $\neg\neg p \vdash_X \neg p$             | SRAA. 3            |
| 5. | $\vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg p$ | DT. 4              |

**Proposition 30.**  $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg\neg\neg p$

- |    |  |         |
|----|--|---------|
| 1. | $\neg p, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg\neg p$ | IE      |
| 2. | $\neg p \vdash_X \neg\neg\neg p$             | SRAA. 1 |
| 3. | $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg\neg\neg p$ | DT. 2   |

**Proposition 31.**  $\vdash_X \neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$

- |    |  |                    |
|----|--|--------------------|
| 1. | $\neg p \vdash_X \neg\neg\neg p$                 | Proposition 28, DT |
| 2. | $\neg\neg\neg p, \neg\neg\neg p \vdash_X \neg p$ | IE                 |
| 3. | $\neg p, \neg\neg\neg p \vdash_X \neg p$         | Cut. 1,2           |
| 4. | $\neg\neg\neg p \vdash_X \neg p$                 | SRAA. 3            |
| 5. | $\vdash_X \neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$     | DT. 4              |

## 2.4 Contrap(Contraposition)

**Proposition 32.**  $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

- |    |  |          |
|----|--|----------|
| 1. | $p \rightarrow q, p \vdash_X q$                                      | mp       |
| 2. | $\neg q, q \vdash_X \neg p$  | IE       |
| 3. | $\neg q, p \rightarrow q, p \vdash_X \neg p$                         | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg q, p \rightarrow q \vdash_X \neg p$                            | SRAA. 3  |
| 5. | $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ | DT. 4    |

**Proposition 33.**  $\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$

- |    |  |          |
|----|--|----------|
| 1. | $p \rightarrow \neg q, p \vdash_X \neg q$                            | mp       |
| 2. | $\neg q, q \vdash_X \neg p$  | IE       |
| 3. | $p \rightarrow \neg q, p, q \vdash_X \neg p$                         | Cut. 1,2 |
| 4. | $p \rightarrow \neg q, q \vdash_X \neg p$                            | SRAA. 3  |
| 5. | $\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$ | DT. 4    |

**Proposition 34.**  $\not\vdash_X (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

$p$	$q$	$($	$\neg$	$p$	$\rightarrow$	$\neg$	$q$	$)$	$\rightarrow$	$($	$q$	$\rightarrow$	$p$	$)$
0	2		1	0	2	1	2		0		2	0	0	

**Proposition 35.**  $\not\vdash_X (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$

$p$	$q$	$(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$					
0	1	1	0	2	1	0	0

**Proposition 36.**  $\vdash_X (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg\neg p)$

- |    |   |          |
|----|---|----------|
| 1. | $\neg p \rightarrow \neg q, \neg p \vdash_X \neg q$                           | mp       |
| 2. | $\neg q, q \vdash_X \neg\neg p$   | IE       |
| 3. | $\neg p \rightarrow \neg q, \neg p, q \vdash_X \neg\neg p$                    | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg p \rightarrow \neg q, q \vdash_X \neg\neg p$                            | SRAA. 3  |
| 5. | $\vdash_X (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg\neg p)$ | DT. 4    |

**Proposition 37.**  $\vdash_X (q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

- |    |   |          |
|----|---|----------|
| 1. | $q \rightarrow \neg\neg p, q \vdash_X \neg\neg p$                             | mp       |
| 2. | $\neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg q$  | IE       |
| 3. | $q \rightarrow \neg\neg p, q, \neg p \vdash_X \neg q$                         | Cut. 1,2 |
| 4. | $q \rightarrow \neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg q$                            | SRAA. 3  |
| 5. | $\vdash_X (q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$ | DT. 4    |

**Proposition 38.**  $\vdash_X (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg\neg p)$

- |    |   |          |
|----|---|----------|
| 1. | $\neg p \rightarrow q, \neg p \vdash_X q$                                     | mp       |
| 2. | $q, \neg q \vdash_X \neg\neg p$   | IE       |
| 3. | $\neg p \rightarrow q, \neg p, \neg q \vdash_X \neg\neg p$                    | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash_X \neg\neg p$                            | SRAA. 3  |
| 5. | $\vdash_X (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg\neg p)$ | DT. 4    |

**Proposition 39.**  $\not\vdash_X (\neg q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

$p$	$q$	$(\neg q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$							
1	0	1	0	2	1	2	1	0	0

**Proposition 40.**  $\vdash_X (\neg q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\neg q)$

- |    |  |          |
|----|--|----------|
| 1. | $\neg q \rightarrow \neg\neg p, \neg q \vdash_X \neg\neg p$                            | mp       |
| 2. | $\neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg\neg q$   | IE       |
| 3. | $\neg q \rightarrow \neg\neg p, \neg q, \neg p \vdash_X \neg\neg q$                    | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg q \rightarrow \neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg\neg q$                            | SRAA. 3  |
| 5. | $\vdash_X (\neg q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\neg q)$ | DT. 4    |

## 2.5 Negation and implication( $\neg$ & $\rightarrow$ )

**Proposition 41.**  $\not\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$

$\frac{p}{0}$	$\frac{q}{1}$	$\frac{\neg (p \rightarrow q)}{2}$	$\frac{\rightarrow p}{0}$	$\frac{q}{1}$	$\frac{\rightarrow p}{0}$
---------------	---------------	------------------------------------	---------------------------	---------------	---------------------------

**Proposition 42.**  $\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$

1.  $\vdash_X q \rightarrow (p \rightarrow q)$
2.  $q \rightarrow (p \rightarrow q) \vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$
3.  $\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$

X1( $q/p, p/q$ )  
Proposition 32, DT  
Cut. 1,2

**Proposition 43.**  $\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg\neg p$

1.  $\neg p \vdash_X p \rightarrow q$
2.  $p \rightarrow q, \neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg p$
3.  $\neg p, \neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg p$
4.  $\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg p$
5.  $\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg\neg p$

IE, DT  
IE  
Cut. 1,2  
SRAA. 3  
DT. 4

**Proposition 44.**  $\vdash_X p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow q))$

1.  $p, p \rightarrow q \vdash_X q$
2.  $q, \neg q \vdash_X \neg(p \rightarrow q)$
3.  $p, p \rightarrow q, \neg q \vdash_X \neg(p \rightarrow q)$
4.  $p, \neg q \vdash_X \neg(p \rightarrow q)$
5.  $\vdash_X p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow q))$

mp  
IE  
Cut. 1,2  
SRAA. 3  
DT. 4

**Proposition 45.**  $\vdash_X \neg\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q)$

1.  $p, \neg q \vdash_X \neg(p \rightarrow q)$
2.  $\neg(p \rightarrow q), \neg\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$
3.  $p, \neg q, \neg\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$
4.  $\neg q, \neg\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$
5.  $\neg\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg q \rightarrow \neg p$
6.  $\neg q \rightarrow \neg p \vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q$
7.  $\neg\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q$
8.  $\vdash_X \neg\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q)$

Proposition 44, DT  
IE  
Cut. 1,2  
SRAA. 3  
DT. 4  
Proposition 32, DT  
Cut. 5,6  
DT. 7

**Proposition 46.**  $\vdash_X (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow q)$

1.  $\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$
2.  $\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg p$
3.  $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q \vdash_X \neg\neg q$
4.  $\neg(p \rightarrow q), \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q \vdash_X \neg\neg q$

Proposition 42, DT  
Proposition 43, DT  
mp  
Cut. 2,3

5.  $\neg q, \neg\neg q \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow q)$  IE
6.  $\neg(p \rightarrow q), \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow q)$  Cut. 1,4,5
7.  $\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow q)$  SRAA. 6
8.  $\vdash_X (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow q)$  DT. 7

## 2.6 CE(Conditional Exchange)

**Proposition 47.**  $\vdash_X (\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) \mid (\neg\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

1.  $p \vdash_X \neg\neg p$  Proposition 26, DT
2.  $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow q \vdash_X q$  mp
3.  $p, \neg\neg p \rightarrow q \vdash_X q$  Cut. 1,2
4.  $\vdash_X (\neg\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$  DT. 3

**Proposition 48.**  $\not\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q) \mid (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q)$

$$\frac{p \quad q \mid ( \quad p \quad \rightarrow \quad q \quad ) \quad \rightarrow \quad ( \quad \neg \quad \neg \quad p \quad \rightarrow \quad q \quad )}{0 \quad 0 \mid 0 \quad 2 \quad 0 \mid 0 \mid 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0}$$

**Proposition 49.**  $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee \neg\neg q) \mid (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q)$

1.  $\neg q, p \rightarrow q \vdash_X \neg p$  Proposition 32, DT, mp, Cut
2.  $\neg p, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg q$  IE
3.  $\neg q, p \rightarrow q, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg q$  Cut. 1,2
4.  $p \rightarrow q, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg q$  SRAA. 3
5.  $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q)$  DT. 4

**Proposition 50.**  $\not\vdash_X (\neg p \vee \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow q) \mid (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

$$\frac{p \quad q \mid ( \quad \neg \quad \neg \quad p \quad \rightarrow \quad \neg \quad \neg \quad q \quad ) \quad \rightarrow \quad ( \quad p \quad \rightarrow \quad q \quad )}{2 \quad 0 \mid 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \mid 0 \mid 2 \quad 0 \quad 0}$$

**Proposition 51.**  $\vdash_X (\neg p \vee \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg\neg q) \mid (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg\neg q)$

1.  $p \vdash_X \neg\neg p$  Proposition 26, DT
2.  $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q \vdash_X \neg\neg q$  mp
3.  $p, \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q \vdash_X \neg\neg q$  Cut. 1,2
4.  $\vdash_X (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg\neg q)$  DT. 3

**Proposition 52.**  $\vdash_X (p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (\neg p \vee \neg\neg q) \mid (p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q)$

1.  $\neg q, p \rightarrow \neg\neg q \vdash_X \neg p$  Proposition 33, DT, mp, Cut
2.  $\neg p, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg q$  IE
3.  $\neg q, p \rightarrow \neg\neg q, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg q$  Cut. 1,2
4.  $p \rightarrow \neg\neg q, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg q$  SRAA. 3
5.  $\vdash_X (p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q)$  DT. 4



**Proposition 53.**  $\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \mid (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg q)$

- |   |                    |
|---|--------------------|
| 1. $p \rightarrow \neg q, \neg \neg p \vdash_X \neg \neg \neg q$                  | Proposition 49, DT |
| 2. $\neg \neg \neg q \vdash_X \neg q$   | Proposition 29, DT |
| 3. $p \rightarrow \neg q, \neg \neg p \vdash_X \neg q$                            | Cut. 1,2           |
| 4. $\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg q)$ | DT. 3              |

## 2.7 Disjunction( $\vee$ )

**Proposition 54.**  $\vdash_X p \rightarrow p \vee q \mid p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

- |  |       |
|--|-------|
| 1. $p, \neg p \vdash_X q$                          | IE    |
| 2. $\vdash_X p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ | DT. 1 |

**Proposition 55.**  $\vdash_X p \rightarrow q \vee p \mid p \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$

- |  |                  |
|--|------------------|
| 1. $\vdash_X p \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$ | X1( $\neg q/q$ ) |
|--|------------------|

**Proposition 56.**  $\vdash_X \neg(p \vee q) \rightarrow \neg p \mid \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$

- |   |          |
|---|----------|
| 1. $p \vdash_X \neg p \rightarrow q$                                  | IE, mp   |
| 2. $\neg p \rightarrow q, \neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$ | IE       |
| 3. $p, \neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$                    | Cut. 1,2 |
| 4. $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$                       | SRAA. 3  |
| 5. $\vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$           | DT. 4    |

**Proposition 57.**  $\vdash_X \neg(p \vee q) \rightarrow \neg q \mid \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$

- |   |                           |
|---|---------------------------|
| 1. $q \vdash_X \neg p \rightarrow q$                                  | X1( $q/p, \neg p/q$ ), mp |
| 2. $\neg p \rightarrow q, \neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$ | IE                        |
| 3. $q, \neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$                    | Cut. 1,2                  |
| 4. $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$                       | SRAA. 3                   |
| 5. $\vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$           | DT. 4                     |

**Proposition 58.**  $\not\vdash_X p \vee q \rightarrow q \vee p \mid (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$

See Proposition 35.

**Proposition 59.**  $\vdash_X \neg(p \vee q) \rightarrow \neg(q \vee p) \mid \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow p)$

- |   |                    |
|---|--------------------|
| 1. $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$   | Proposition 56, DT |
| 2. $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$   | Proposition 57, DT |
| 3. $\neg q, \neg q \rightarrow p \vdash_X p$  | mp                 |
| 4. $\neg(\neg p \rightarrow q), \neg q \rightarrow p \vdash_X p$                          | Cut. 2,3           |
| 5. $p, \neg p \vdash_X \neg(\neg q \rightarrow p)$  | IE                 |
| 6. $\neg(\neg p \rightarrow q), \neg q \rightarrow p \vdash_X \neg(\neg q \rightarrow p)$ | Cut. 1,4,5         |
| 7. $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg(\neg q \rightarrow p)$                       | SRAA. 6            |
| 8. $\vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow p)$           | DT. 7              |

**Proposition 60.**  $\vdash_X \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg q \vee \neg p \mid (\neg \neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow \neg p)$

- |    |  |                    |
|----|--|--------------------|
| 1. | $p \vdash_X \neg \neg p$   | Proposition 26, DT |
| 2. | $\neg \neg p, \neg \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$                            | mp                 |
| 3. | $p, \neg \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$                                      | Cut. 1,2           |
| 4. | $\neg q, \neg \neg q \vdash_X \neg p$  | IE                 |
| 5. | $p, \neg \neg p \rightarrow \neg q, \neg \neg q \vdash_X \neg p$                         | Cut. 3,4           |
| 6. | $\neg \neg p \rightarrow \neg q, \neg \neg q \vdash_X \neg p$                            | SRAA. 5            |
| 7. | $\vdash_X (\neg \neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow \neg p)$ | DT. 6              |

**Proposition 61.**  $\not\vdash_X p \vee \neg q \rightarrow \neg q \vee p \mid (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow p)$

$$\frac{p \quad q}{0 \quad 0} \mid \frac{(\neg \quad p \rightarrow \neg \quad q)}{1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0} \rightarrow \frac{(\neg \quad \neg \quad q \rightarrow p)}{0 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0}$$

**Proposition 62.**  $\vdash_X \neg p \vee q \rightarrow q \vee \neg p \mid (\neg \neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

- |    |  |                             |
|----|--|-----------------------------|
| 1. | $\neg q, \neg \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg p$                       | Proposition 32, DT, mp, Cut |
| 2. | $\neg \neg p \vdash_X \neg p$  | Proposition 29, DT          |
| 3. | $\neg q, \neg \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg p$                            | Cut. 1,2                    |
| 4. | $\vdash_X (\neg \neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ | DT. 3                       |

**Proposition 63.**  $\vdash_X p \vee \neg q \rightarrow \neg q \vee \neg p \mid (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow \neg p)$

- |    |   |                |
|----|---|----------------|
| 1. | $\vdash_X (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow \neg p)$ | Proposition 32 |
|----|---|----------------|

**Proposition 64.**  $\vdash_X \neg q \vee \neg \neg p \rightarrow p \vee \neg q \mid (\neg \neg q \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

- |    |  |                             |
|----|--|-----------------------------|
| 1. | $\neg p, \neg \neg q \rightarrow \neg \neg p \vdash_X \neg \neg q$                       | Proposition 33, DT, mp, Cut |
| 2. | $\neg \neg q \vdash_X \neg q$  | Proposition 29, DT          |
| 3. | $\neg p, \neg \neg q \rightarrow \neg \neg p \vdash_X \neg q$                            | Cut. 1,2                    |
| 4. | $\vdash_X (\neg \neg q \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$ | DT. 3                       |

**Proposition 65.**  $\vdash_X \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(p \vee q)) \mid \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q))$

- |    |   |          |
|----|---|----------|
| 1. | $\neg p, \neg p \rightarrow q \vdash_X q$                                     | mp       |
| 2. | $q, \neg q \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$                               | IE       |
| 3. | $\neg p, \neg p \rightarrow q, \neg q \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$    | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg p, \neg q \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$                          | SRAA. 3  |
| 5. | $\vdash_X \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q))$ | DT. 4    |

**Proposition 66.**  $\vdash_X \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(q \vee p)) \mid \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow p))$

- |  |          |
|--|----------|
| 1. $\neg q, \neg q \rightarrow p \vdash_X p$                                     | mp       |
| 2. $p, \neg p \vdash_X \neg(\neg q \rightarrow p)$                               | IE       |
| 3. $\neg q, \neg q \rightarrow p, \neg p \vdash_X \neg(\neg q \rightarrow p)$    | Cut. 1,2 |
| 4. $\neg q, \neg p \vdash_X \neg(\neg q \rightarrow p)$                          | SRAA. 3  |
| 5. $\vdash_X \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow p))$ | DT. 4    |

**Proposition 67.**  $\vdash_X p \rightarrow p \vee p \mid p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)$

- |  |                  |
|--|------------------|
| 1. $\vdash_X p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)$ | X1( $\neg p/q$ ) |
|--|------------------|

**Proposition 68.**  $\not\vdash_X p \vee p \rightarrow p \mid (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$

See Proposition 20.

**Proposition 69.**  $\vdash_X p \vee p \rightarrow \neg\neg p \mid (\neg p \rightarrow p) \rightarrow \neg\neg p$

- |   |          |
|---|----------|
| 1. $\neg p, \neg p \rightarrow p \vdash_X p$                | mp       |
| 2. $\neg p, p \vdash_X \neg\neg p$                          | IE       |
| 3. $\neg p, \neg p \rightarrow p \vdash_X \neg\neg p$       | Cut. 1,2 |
| 4. $\neg p \rightarrow p \vdash_X \neg\neg p$               | SRAA. 3  |
| 5. $\vdash_X (\neg p \rightarrow p) \rightarrow \neg\neg p$ | DT. 4    |

**Proposition 70.**  $\vdash_X \neg\neg p \rightarrow p \vee p \mid \neg\neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)$

- |   |                       |
|---|-----------------------|
| 1. $\vdash_X \neg\neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)$ | X3( $\neg p/p, p/q$ ) |
|---|-----------------------|

**Proposition 71.**  $\not\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow r))$

$$\frac{\frac{p}{0} \quad \frac{q}{0} \quad \frac{r}{0} \mid \left( \frac{p}{0} \rightarrow \frac{r}{2} \quad \frac{r}{0} \right) \rightarrow \mid \left( \left( \frac{q}{0} \rightarrow \frac{r}{2} \quad \frac{r}{0} \right) \rightarrow \mid \left( \left( \frac{\neg}{1} \quad \frac{p}{0} \rightarrow \frac{q}{2} \quad \frac{r}{0} \right) \rightarrow \frac{r}{0} \right) \right)}{0}$$

**Proposition 72.**  $\not\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (q \vee p \rightarrow r)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow r))$

$$\frac{\frac{p}{0} \quad \frac{q}{0} \quad \frac{r}{0} \mid \left( \frac{p}{0} \rightarrow \frac{r}{2} \quad \frac{r}{0} \right) \rightarrow \mid \left( \left( \frac{q}{0} \rightarrow \frac{r}{2} \quad \frac{r}{0} \right) \rightarrow \mid \left( \left( \frac{\neg}{1} \quad \frac{q}{0} \rightarrow \frac{p}{2} \quad \frac{r}{0} \right) \rightarrow \frac{r}{0} \right) \right)}{0}$$

**Proposition 73.**  $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow \neg\neg r)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg\neg r))$

- |   |                    |
|---|--------------------|
| 1. $\neg r, \neg r \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$                  | mp                 |
| 2. $\neg r, \neg r \rightarrow \neg p, \neg p \rightarrow q \vdash_X q$ | mp                 |
| 3. $q \rightarrow r \vdash_X \neg r \rightarrow \neg q$                 | Proposition 32, DT |
| 4. $p \rightarrow r \vdash_X \neg r \rightarrow \neg p$                 | Proposition 32, DT |
| 5. $\neg r, q \rightarrow r \vdash_X \neg q$                            | Cut. 1,3           |
| 6. $\neg r, p \rightarrow r, \neg p \rightarrow q \vdash_X q$           | Cut. 2,4           |
| 7. $\neg q, q \vdash_X \neg\neg r$                                      | IE                 |

8.  $\neg r, q \rightarrow r, p \rightarrow r, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg r$  Cut. 5,6,7
9.  $q \rightarrow r, p \rightarrow r, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg r$  SRAA. 8
10.  $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg r))$  DT. 9

**Proposition 74.**  $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (q \vee p \rightarrow \neg \neg r)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow \neg \neg r))$

1.  $\neg r, \neg r \rightarrow \neg p \vdash_X \neg p$  mp
2.  $\neg r, \neg r \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow p \vdash_X p$  mp
3.  $p \rightarrow r \vdash_X \neg r \rightarrow \neg p$  Proposition 32, DT
4.  $q \rightarrow r \vdash_X \neg r \rightarrow \neg q$  Proposition 32, DT
5.  $\neg r, p \rightarrow r \vdash_X \neg p$  Cut. 1,3
6.  $\neg r, q \rightarrow r, \neg q \rightarrow p \vdash_X p$  Cut. 2,4
7.  $\neg p, p \vdash_X \neg \neg r$  IE
8.  $\neg r, p \rightarrow r, q \rightarrow r, \neg q \rightarrow p \vdash_X \neg \neg r$  Cut. 5,6,7
9.  $p \rightarrow r, q \rightarrow r, \neg q \rightarrow p \vdash_X \neg \neg r$  SRAA. 8
10.  $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow \neg \neg r))$  DT. 9

**Proposition 75.**  $\vdash_X (p \rightarrow \neg r) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow \neg r)) \mid (p \rightarrow \neg r) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg r))$

1.  $p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg r$  Proposition 73, DT
2.  $\neg \neg \neg r \vdash_X \neg r$  Proposition 29, DT
3.  $p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg r$  Cut. 1,2
4.  $\vdash_X (p \rightarrow \neg r) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg r))$  DT. 3

**Proposition 76.**  $\vdash_X (p \rightarrow \neg r) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow (q \vee p \rightarrow \neg r)) \mid (p \rightarrow \neg r) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow \neg r))$

1.  $p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r, \neg q \rightarrow p \vdash_X \neg \neg r$  Proposition 74, DT
2.  $\neg \neg \neg r \vdash_X \neg r$  Proposition 29, DT
3.  $p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r, \neg q \rightarrow p \vdash_X \neg r$  Cut. 1,2
4.  $\vdash_X (p \rightarrow \neg r) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow \neg r))$  DT. 3

**Proposition 77.**  $\vdash_X p \vee \neg p \mid \neg p \rightarrow \neg p$

1.  $\neg p \vdash_X \neg p$  Definition of deduction
2.  $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg p$  DT. 1

**Proposition 78.**  $\not\vdash_X \neg p \vee p \mid \neg \neg p \rightarrow p$

See Proposition 27.

**Proposition 79.**  $\vdash_X \neg p \vee \neg \neg p \mid \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p$

1.  $\neg \neg p \vdash_X \neg \neg p$  Definition of deduction
2.  $\vdash_X \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p$  DT. 1

## 2.8 Conjunction( $\wedge$ )

**Proposition 80.**  $\not\vdash_X p \wedge q \rightarrow p \mid \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow p$

$$\frac{p \quad q \mid \neg \quad ( \quad p \rightarrow \neg \quad q \quad ) \quad \rightarrow \quad p}{0 \quad 0 \mid 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \mid 0 \mid 0}$$

**Proposition 81.**  $\not\vdash_X p \wedge q \rightarrow q \mid \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow q$

$$\frac{p \quad q \mid \neg \quad ( \quad p \rightarrow \neg \quad q \quad ) \quad \rightarrow \quad q}{0 \quad 0 \mid 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \mid 0 \mid 0}$$

**Proposition 82.**  $\vdash_X p \wedge q \rightarrow \neg\neg p \mid \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg p$

- |   |                      |
|---|----------------------|
| 1. $\neg p \vdash_X p \rightarrow \neg q$                                 | X3( $\neg q/q$ ), mp |
| 2. $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg\neg p$ | IE                   |
| 3. $\neg(p \rightarrow \neg q), \neg p \vdash_X \neg\neg p$               | Cut. 1,2             |
| 4. $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg p$                       | SRAA. 3              |
| 5. $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg p$           | DT. 4                |

**Proposition 83.**  $\vdash_X p \wedge q \rightarrow \neg\neg q \mid \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg q$

- |   |                           |
|---|---------------------------|
| 1. $\neg q \vdash_X p \rightarrow \neg q$                                 | X1( $\neg q/p, p/q$ ), mp |
| 2. $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg\neg q$ | IE                        |
| 3. $\neg(p \rightarrow \neg q), \neg q \vdash_X \neg\neg q$               | Cut. 1,2                  |
| 4. $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg q$                       | SRAA. 3                   |
| 5. $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg q$           | DT. 4                     |

**Proposition 84.**  $\vdash_X \neg p \wedge q \rightarrow \neg p \mid \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$

- |  |                    |
|--|--------------------|
| 1. $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg\neg p$     | Proposition 82, DT |
| 2. $\neg\neg\neg p \vdash_X \neg p$                              | Proposition 29, DT |
| 3. $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg p$             | Cut. 1,2           |
| 4. $\vdash_X \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$ | DT. 3              |

**Proposition 85.**  $\not\vdash_X \neg p \wedge q \rightarrow q \mid \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow q$

$$\frac{p \quad q \mid \neg \quad ( \quad \neg \quad p \rightarrow \neg \quad q \quad ) \quad \rightarrow \quad q}{1 \quad 0 \mid 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \mid 0 \mid 0}$$

**Proposition 86.**  $\vdash_X p \wedge \neg q \rightarrow \neg q \mid \neg(p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg q$

- |   |                    |
|---|--------------------|
| 1. $\neg(p \rightarrow \neg\neg q) \vdash_X \neg\neg\neg q$     | Proposition 83, DT |
| 2. $\neg\neg\neg q \vdash_X \neg q$                             | Proposition 29, DT |
| 3. $\neg(p \rightarrow \neg\neg q) \vdash_X \neg q$             | Cut. 1,2           |
| 4. $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg q$ | DT. 3              |

**Proposition 87.**  $\not\vdash_X p \wedge \neg q \rightarrow p \mid \neg(p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow p$

$$\frac{p \quad q \mid \neg \quad ( \quad p \rightarrow \neg \quad \neg \quad q \quad ) \rightarrow p}{0 \quad 1 \mid 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \mid 0 \quad 0}$$

**Proposition 88.**  $\vdash_X p \wedge q \rightarrow q \wedge p \mid \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg p)$

1.  $\vdash_X (q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$  Proposition 33
2.  $(q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg p)$  Proposition 32, DT
3.  $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg p)$  Cut. 1,2

**Proposition 89.**  $\vdash_X \neg(p \wedge q) \rightarrow \neg(q \wedge p) \mid \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$

1.  $\neg(q \rightarrow \neg p) \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q)$  <sup>1</sup>Proposition 88, DT
2.  $\neg(p \rightarrow \neg q), \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$  IE
3.  $\neg(q \rightarrow \neg p), \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$  Cut. 1,2
4.  $\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$  SRAA. 3
5.  $\vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$  DT. 4

**Proposition 90.**  $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg(p \wedge q) \mid \neg p \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$

1.  $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg p$  Proposition 82, DT
2.  $\neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$  IE
3.  $\neg(p \rightarrow \neg q), \neg p \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$  Cut. 1,2
4.  $\neg p \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$  SRAA. 3
5.  $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$  DT. 4

**Proposition 91.**  $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg(q \wedge p) \mid \neg p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$

1.  $\neg(q \rightarrow \neg p) \vdash_X \neg\neg p$  Proposition 83, DT
2.  $\neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$  IE
3.  $\neg(q \rightarrow \neg p), \neg p \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$  Cut. 1,2
4.  $\neg p \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$  SRAA. 3
5.  $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg p)$  DT. 4

**Proposition 92.**  $\vdash_X p \rightarrow p \wedge p \mid p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p)$

1.  $p, p \rightarrow \neg p \vdash_X \neg p$  mp
2.  $p, \neg p \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg p)$  IE
3.  $p, p \rightarrow \neg p \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg p)$  Cut. 1,2
4.  $p \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg p)$  SRAA. 3
5.  $\vdash_X p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p)$  DT. 4

**Proposition 93.**  $\not\vdash_X p \wedge p \rightarrow p \mid \neg(p \rightarrow \neg p) \rightarrow p$

$$\frac{p \mid \neg \quad ( \quad p \rightarrow \neg \quad p \quad )}{0 \mid 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \mid 0 \mid 0}$$

---

<sup>1</sup>Consider Proposition 88( $q/p, p/q$ )

**Proposition 94.**  $\vdash_X p \wedge p \rightarrow \neg\neg p \mid \neg(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg\neg p$

- |    |  |                           |
|----|--|---------------------------|
| 1. | $\neg p \vdash_X p \rightarrow \neg p$                                 | X1( $\neg p/p, p/q$ ), mp |
| 2. | $\neg(p \rightarrow \neg p), p \rightarrow \neg p \vdash_X \neg\neg p$ | IE                        |
| 3. | $\neg(p \rightarrow \neg p), \neg p \vdash_X \neg\neg p$               | Cut. 1,2                  |
| 4. | $\neg(p \rightarrow \neg p) \vdash_X \neg\neg p$                       | SRAA. 3                   |
| 5. | $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg\neg p$           | DT. 4                     |

**Proposition 95.**  $\vdash_X \neg\neg p \rightarrow p \wedge p \mid \neg\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p)$

- |    |  |          |
|----|--|----------|
| 1. | $p \rightarrow \neg p \vdash_X \neg p$                                 | X4, mp   |
| 2. | $\neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg p)$               | IE       |
| 3. | $\neg\neg p, p \rightarrow \neg p \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg p)$ | Cut. 1,2 |
| 4. | $\neg\neg p \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg p)$                       | SRAA. 3  |
| 5. | $\vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p)$           | DT. 4    |

**Proposition 96.**  $\vdash_X p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q) \mid p \rightarrow (q \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q))$

- |    |   |          |
|----|---|----------|
| 1. | $p, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$                           | mp       |
| 2. | $q, \neg q \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q)$                     | IE       |
| 3. | $p, q, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q)$    | Cut. 1,2 |
| 4. | $p, q \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q)$                          | SRAA. 3  |
| 5. | $\vdash_X p \rightarrow (q \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q))$ | DT. 4    |

**Proposition 97.**  $\vdash_X p \rightarrow (q \rightarrow q \wedge p) \mid p \rightarrow (q \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg p))$

- |    |   |          |
|----|---|----------|
| 1. | $q, q \rightarrow \neg p \vdash_X \neg p$                           | mp       |
| 2. | $p, \neg p \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg p)$                     | IE       |
| 3. | $p, q, q \rightarrow \neg p \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg p)$    | Cut. 1,2 |
| 4. | $p, q \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg p)$                          | SRAA. 3  |
| 5. | $\vdash_X p \rightarrow (q \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg p))$ | DT. 4    |

**Proposition 98.**  $\vdash_X \neg(p \wedge \neg p) \mid \neg\neg(p \rightarrow \neg\neg p)$

- |    |  |                    |
|----|--|--------------------|
| 1. | $\vdash_X p \rightarrow \neg\neg p$                                    | Proposition 26     |
| 2. | $p \rightarrow \neg\neg p \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg\neg p)$ | Proposition 26, DT |
| 3. | $\vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg\neg p)$                          | Cut. 1,2           |

**Proposition 99.**  $\vdash_X \neg(\neg p \wedge p) \mid \neg\neg(\neg p \rightarrow \neg p)$

- |    |  |                    |
|----|--|--------------------|
| 1. | $\vdash_X \neg p \rightarrow \neg p$                                     | Proposition 77     |
| 2. | $\neg p \rightarrow \neg p \vdash_X \neg\neg(\neg p \rightarrow \neg p)$ | Proposition 26, DT |
| 3. | $\vdash_X \neg\neg(\neg p \rightarrow \neg p)$                           | Cut. 1,2           |

## 2.9 RAA(Reduction Ad Absurdum)

**Proposition 100.**  $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$

- |    |  |            |
|----|--|------------|
| 1. | $p, p \rightarrow q \vdash_X q$  | mp         |
| 2. | $p, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$  | mp         |
| 3. | $q, \neg q \vdash_X \neg p$  | IE         |
| 4. | $p, p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg p$                           | Cut. 1,2,3 |
| 5. | $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg p$                              | SRAA. 4    |
| 6. | $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$ | DT. 5      |

**Proposition 101.**  $\nVdash_X ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

$$\frac{p \quad q}{2 \quad 0} \mid \frac{(\quad \frac{p \quad \neg q}{2 \quad 1} \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p}{2 \quad 1} \mid 0 \mid \frac{(\quad \frac{p \quad q}{2 \quad 0} \rightarrow q)}{2 \quad 0}$$

**Proposition 102.**  $\vdash_X ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg \neg q)$

- |    |  |                    |
|----|--|--------------------|
| 1. | $p, p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q)$              | mp                 |
| 2. | $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p \vdash_X p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$  | Proposition 33, DT |
| 3. | $p, (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q)$             | Cut. 1,2           |
| 4. | $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg \neg q$  | Proposition 83, DT |
| 5. | $p, (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p \vdash_X \neg \neg q$                            | Cut. 3,4           |
| 6. | $\vdash_X ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg \neg q)$ | DT. 5              |

**Proposition 103.**  $\vdash_X (p \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$

- |    |  |            |
|----|--|------------|
| 1. | $p, p \rightarrow \neg \neg q \vdash_X \neg \neg q$  | mp         |
| 2. | $p, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$  | mp         |
| 3. | $\neg \neg q, \neg q \vdash_X \neg p$  | IE         |
| 4. | $p, p \rightarrow \neg \neg q, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg p$                           | Cut. 1,2,3 |
| 5. | $p \rightarrow \neg \neg q, p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg p$                              | SRAA. 4    |
| 6. | $\vdash_X (p \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$ | DT. 5      |

**Proposition 104.**  $\nVdash_X (\neg p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow p)$

$$\frac{p \quad q}{0 \quad 0} \mid \frac{(\quad \frac{\neg p \quad q}{1 \quad 0} \rightarrow q) \rightarrow \neg p}{0 \quad 0} \mid 0 \mid \frac{(\quad \frac{(\quad \frac{\neg p \quad \neg q}{1 \quad 0} \rightarrow \neg q) \rightarrow p)}{1 \quad 0} \rightarrow p)}{0 \quad 0}$$

**Proposition 105.**  $\nVdash_X ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

$$\frac{p \quad q}{1 \quad 0} \mid \frac{(\quad \frac{(\quad \frac{\neg p \quad \neg q}{2 \quad 1} \rightarrow \neg q) \rightarrow p)}{2 \quad 1} \rightarrow p)}{0 \quad 0} \mid 0 \mid \frac{(\quad \frac{\neg p \quad q}{2 \quad 1} \rightarrow q)}{2 \quad 1}$$

**Proposition 106.**  $\vdash_X (\neg p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p)$



1.  $\neg p, \neg p \rightarrow q \vdash_X q$  mp
2.  $\neg p, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$  mp
3.  $q, \neg q \vdash_X \neg p$  IE
4.  $\neg p, \neg p \rightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg \neg p$  Cut. 1,2,3
5.  $\neg p \rightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg \neg p$  SRAA. 4
6.  $\vdash_X (\neg p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p)$  DT. 5

**Proposition 107.**  $\not\vdash_X ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

$p$	$q$	$\mid ( ( \neg p \rightarrow \neg q ) \rightarrow \neg \neg p ) \rightarrow ( \neg p \rightarrow q )$											
1	0	$\mid \quad \quad \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad \mid \quad 0 \quad \mid \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0$											

**Proposition 108.**  $\vdash_X ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg q)$

1.  $\neg p, \neg p \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow \neg q)$  mp
2.  $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p \vdash_X \neg p \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow \neg q)$  Proposition 33, DT
3.  $\neg p, (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow \neg q)$  Cut. 1,2
4.  $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg \neg q$  Proposition 83, DT
5.  $\neg p, (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p \vdash_X \neg \neg q$  Cut. 3,4
6.  $\vdash_X ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg q)$  DT. 5

**Proposition 109.**  $\vdash_X (\neg p \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p)$

1.  $\neg p, \neg p \rightarrow \neg \neg q \vdash_X \neg \neg q$  mp
2.  $\neg p, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$  mp
3.  $\neg \neg q, \neg q \vdash_X \neg \neg p$  IE
4.  $\neg p, \neg p \rightarrow \neg \neg q, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg \neg p$  Cut. 1,2,3
5.  $\neg p \rightarrow \neg \neg q, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg \neg p$  SRAA. 4
6.  $\vdash_X (\neg p \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg \neg p)$  DT. 5

**Proposition 110.**  $\not\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q)$

$p$	$q$	$\mid ( p \rightarrow q ) \rightarrow ( ( \neg p \rightarrow q ) \rightarrow q )$											
0	0	$\mid \quad \quad \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad \mid \quad 0 \quad \mid \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad \mid \quad 0 \quad 0$											

**Proposition 111.**  $\vdash_X ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

1.  $p \vdash_X \neg p \rightarrow q$  IE,mp
2.  $\neg p \rightarrow q, (\neg p \rightarrow q) \rightarrow q \vdash_X q$  mp
3.  $p, (\neg p \rightarrow q) \rightarrow q \vdash_X q$  Cut. 1,2
4.  $\vdash_X ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$  DT. 3

**Proposition 112.**  $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q)$

- |  |                             |
|--|-----------------------------|
| 1. $\neg q, p \rightarrow q \vdash_X \neg p$   | Proposition 32, DT, mp, Cut |
| 2. $\neg q, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg p$                                       | Proposition 32, DT, mp, Cut |
| 3. $\neg p, \neg \neg p \vdash_X \neg \neg q$  | IE                          |
| 4. $\neg q, p \rightarrow q, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg q$                      | Cut. 1,2,3                  |
| 5. $p \rightarrow q, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg q$                              | SRAA. 4                     |
| 6. $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q)$ | DT. 6                       |

**Proposition 113.**  $\not\vdash_X ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

$\frac{p}{2}$	$\frac{q}{0}$		$($	$($	$\neg$	$\frac{p}{1}$	$\rightarrow$	$\frac{q}{2}$	$)$	$\rightarrow$	$\neg$	$\neg$	$\frac{p}{1}$	$)$	$\rightarrow$	$($	$\frac{p}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{q}{0}$	$)$		$\frac{0}{0}$		$\frac{2}{2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
---------------	---------------	--	-----	-----	--------	---------------	---------------	---------------	-----	---------------	--------	--------	---------------	-----	---------------	-----	---------------	---------------	---------------	-----	--	---------------	--	---------------	---------------	---------------

**Proposition 114.**  $\vdash_X ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg \neg q)$

- |  |          |
|--|----------|
| 1. $p \vdash_X \neg p \rightarrow q$   | IE,mp    |
| 2. $\neg p \rightarrow q, (\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q \vdash_X \neg \neg q$         | mp       |
| 3. $p, (\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q \vdash_X \neg \neg q$                            | Cut. 1,2 |
| 4. $\vdash_X ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg \neg q)$ | DT. 3    |

**Proposition 115.**  $\vdash_X (p \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q)$

- |  |                             |
|--|-----------------------------|
| 1. $\neg q, p \rightarrow \neg \neg q \vdash_X \neg p$   | Proposition 33, DT, mp, Cut |
| 2. $\neg p, \neg p \rightarrow q \vdash_X q$   | mp                          |
| 3. $\neg q, p \rightarrow \neg \neg q, \neg p \rightarrow q \vdash_X q$                                | Cut. 1,2                    |
| 4. $q \vdash_X \neg \neg q$  | Proposition 26, DT          |
| 5. $\neg q, p \rightarrow \neg \neg q, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg q$                      | Cut. 3,4                    |
| 6. $p \rightarrow \neg \neg q, \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg \neg q$                              | SRAA. 5                     |
| 7. $\vdash_X (p \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg q)$ | DT. 6                       |

**Proposition 116.**  $\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$

- |   |                    |
|---|--------------------|
| 1. $q, q \rightarrow \neg p, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$                           | mp                 |
| 2. $p \rightarrow \neg q \vdash_X q \rightarrow \neg p$   | Proposition 33, DT |
| 3. $q, p \rightarrow \neg q, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$                           | Cut. 1,2           |
| 4. $p \rightarrow \neg q, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$                              | SRAA. 3            |
| 5. $\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$ | DT. 4              |

**Proposition 117.**  $\vdash_X ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$

- |   |          |
|---|----------|
| 1. $p \vdash_X \neg p \rightarrow \neg q$   | IE,mp    |
| 2. $\neg p \rightarrow \neg q, (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$    | mp       |
| 3. $p, (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$                            | Cut. 1,2 |
| 4. $\vdash_X ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ | DT. 3    |

## 2.10 Exp(Exportation)

**Proposition 118.**  $\vdash_X (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r) \mid (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r)$

$$\frac{p \quad q \quad r}{2 \quad 0 \quad 0} \mid \frac{(\quad p \rightarrow (\quad q \rightarrow r \quad) \quad)}{2 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 0} \rightarrow (\quad \neg (\quad p \rightarrow \neg q \quad) \rightarrow r \quad)}{0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0}$$

**Proposition 119.**  $\vdash_X ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \mid (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

1.  $p, q \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q)$  Proposition 96, DT
2.  $\neg(p \rightarrow \neg q), \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \vdash_X r$  mp
3.  $p, q, \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \vdash_X r$  Cut. 1,2
4.  $\vdash_X (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$  DT. 3

**Proposition 120.**  $\vdash_X (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow \neg\neg r) \mid (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg r)$

1.  $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg p$  Proposition 82, DT
2.  $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg q$  Proposition 83, DT
3.  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow r)$  Proposition 49, DT
4.  $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow r)$  mp
5.  $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow r)$  Cut. 1,3,4
6.  $\neg\neg(q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg q \rightarrow \neg\neg r$  Proposition 45, DT
7.  $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg q \rightarrow \neg\neg r$  Cut. 5,6
8.  $\neg\neg q, \neg\neg q \rightarrow \neg\neg r \vdash_X \neg\neg r$  mp
9.  $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg r$  Cut. 2,7,8
10.  $\vdash_X (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg r)$  DT. 9

## 2.11 Assoc(Association)

**Proposition 121.**  $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((r \wedge p) \rightarrow (r \wedge q)) \mid (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg(r \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg q))$

1.  $\neg(r \rightarrow \neg p) \vdash_X \neg\neg r$  Proposition 82, DT
2.  $\neg(r \rightarrow \neg p) \vdash_X \neg\neg p$  Proposition 83, DT
3.  $p \rightarrow q \vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q$  Proposition 49, DT
4.  $r \rightarrow \neg q \vdash_X \neg\neg q \rightarrow \neg r$  Proposition 32, DT
5.  $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q, \neg\neg q \rightarrow \neg r \vdash_X \neg r$  mp
6.  $\neg(r \rightarrow \neg p), p \rightarrow q, r \rightarrow \neg q \vdash_X \neg r$  Cut. 2,3,4,5
7.  $\neg\neg r, \neg r \vdash_X \neg(r \rightarrow \neg q)$  IE
8.  $\neg(r \rightarrow \neg p), p \rightarrow q, r \rightarrow \neg q \vdash_X \neg(r \rightarrow \neg q)$  Cut. 1,6,7
9.  $\neg(r \rightarrow \neg p), p \rightarrow q \vdash_X \neg(r \rightarrow \neg q)$  SRAA. 8
10.  $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg(r \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg q))$  DT. 9

**Proposition 122.**  $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)) \mid (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r))$

1.  $p \rightarrow q, r \wedge p \vdash_X r \wedge q$  Proposition 121, DT
2.  $p \wedge r \vdash_X r \wedge p$  Proposition 88, DT
3.  $p \rightarrow q, p \wedge r \vdash_X r \wedge q$  Cut. 1,2
4.  $r \wedge q \vdash_X q \wedge r$  Proposition 88, DT
5.  $p \rightarrow q, p \wedge r \vdash_X q \wedge r$  Cut. 3,4
6.  $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)) \mid (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r))$  DT. 5

**Proposition 123.**  $\vdash_X (p \wedge q) \wedge r \rightarrow p \wedge (q \wedge r) \mid \neg(\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r))$

1.  $q, r \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg r)$  Proposition 96, DT
2.  $p, p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r) \vdash_X \neg\neg(q \rightarrow \neg r)$  mp
3.  $\neg(q \rightarrow \neg r), \neg\neg(q \rightarrow \neg r) \vdash_X \neg q$  IE
4.  $p, q, r, p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r) \vdash_X \neg q$  Cut. 1,2,3
5.  $p, r, p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r) \vdash_X \neg q$  SRAA. 4
6.  $p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r) \vdash_X r \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$  DT. 5
7.  $r \rightarrow (p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r$  Proposition 32, DT
8.  $p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r) \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r$  Cut. 6,7
9.  $\vdash_X (p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r)) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r)$  DT. 8
10.  $\vdash_X \neg(\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r))$  Proposition 32, DT, Cut. 9

**Proposition 124.**  $\vdash_X p \wedge (q \wedge r) \rightarrow (p \wedge q) \wedge r \mid \neg(p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r)) \rightarrow \neg(\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r)$

1.  $p \wedge (q \wedge r) \vdash_X p \wedge (r \wedge q)$  Proposition 88, Proposition 121,DT
2.  $p \wedge (r \wedge q) \vdash_X (r \wedge q) \wedge p$  Proposition 88,DT
3.  $(r \wedge q) \wedge p \vdash_X r \wedge (q \wedge p)$  Proposition 123,DT
4.  $r \wedge (q \wedge p) \vdash_X (q \wedge p) \wedge r$  Proposition 88,DT
5.  $(q \wedge p) \wedge r \vdash_X (p \wedge q) \wedge r$  Proposition 88, Proposition 122,DT
6.  $p \wedge (q \wedge r) \vdash_X (p \wedge q) \wedge r$  Cut. 1,2,3,4,5
7.  $\vdash_X p \wedge (q \wedge r) \rightarrow (p \wedge q) \wedge r \mid \neg(p \rightarrow \neg\neg(q \rightarrow \neg r)) \rightarrow \neg(\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r)$  DT. 6

**Proposition 125.**  $\vdash_X (p \vee q) \vee r \rightarrow p \vee (q \vee r) \mid (\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r))$

1.  $\neg p, \neg q \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$  Proposition 65, DT
2.  $\neg(\neg p \rightarrow q), \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r \vdash_X r$  mp
3.  $\neg p, \neg q, \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r \vdash_X r$  Cut. 1,2
4.  $\vdash_X (\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r))$  DT. 3

**Proposition 126.**  $\vdash_X p \vee (q \vee r) \rightarrow (p \vee q) \vee r \mid (\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r)$

1.  $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$  Proposition 56, DT
2.  $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$  Proposition 57, DT
3.  $\neg p, \neg q, \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r) \vdash_X r$  mp
4.  $\neg(\neg p \rightarrow q), \neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r) \vdash_X r$  Cut. 1,2,3
5.  $\vdash_X (\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r)$  DT. 4

## 2.12 DeM(DeMorgan's laws)

**Proposition 127.**  $\vdash_X \neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q) \mid \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q)$

- |    |   |                    |
|----|---|--------------------|
| 1. | $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$  | Proposition 56, DT |
| 2. | $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$  | Proposition 57, DT |
| 3. | $\neg p, \neg q \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q)$                         | Proposition 96, DT |
| 4. | $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q)$             | Cut. 1,2,3         |
| 5. | $\vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q)$ | DT. 4              |

**Proposition 128.**  $\vdash_X (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \vee q) \mid \neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q)$

- |     |   |                    |
|-----|---|--------------------|
| 1.  | $\neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q) \vdash_X \neg p$   | Proposition 56, DT |
| 2.  | $\neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q) \vdash_X \neg\neg\neg q$                                   | Proposition 57, DT |
| 3.  | $\neg p, \neg p \rightarrow q \vdash_X q$   | mp                 |
| 4.  | $\neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q), \neg p \rightarrow q \vdash_X q$                          | Cut. 1,3           |
| 5.  | $q \vdash_X \neg\neg q$   | Proposition 26, DT |
| 6.  | $\neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q), \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg\neg q$                 | Cut. 4,5           |
| 7.  | $\neg\neg q, \neg\neg\neg q \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$                                | IE                 |
| 8.  | $\neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q), \neg p \rightarrow q \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$ | Cut. 2,6,7         |
| 9.  | $\neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q) \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$                       | SRAA. 8            |
| 10. | $\vdash_X \neg(\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q)$           | DT. 9              |

**Proposition 129.**  $\vdash_X \neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \mid \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)$

- |    |   |                    |
|----|---|--------------------|
| 1. | $\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg q$       | Proposition 45, DT |
| 2. | $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg q \vdash_X \neg\neg\neg q$           | mp                 |
| 3. | $\neg\neg p, \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg\neg q$                  | Cut. 1,2           |
| 4. | $\neg\neg\neg q \vdash_X \neg q$  | Proposition 29, DT |
| 5. | $\neg\neg p, \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg q$                          | Cut. 3,4           |
| 6. | $\vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)$ | DT. 5              |

**Proposition 130.**  $\vdash_X (\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q) \mid (\neg\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$

- |    |   |                    |
|----|---|--------------------|
| 1. | $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg q$                           | mp                 |
| 2. | $\neg q \vdash_X \neg\neg\neg q$  | Proposition 28, DT |
| 3. | $\neg\neg p, \neg\neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg\neg\neg q$                   | Cut. 1,2           |
| 4. | $\neg\neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg q$        | DT. 3              |
| 5. | $\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg q \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$       | Proposition 46, DT |
| 6. | $\neg\neg p \rightarrow \neg q \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$               | Cut. 4,5           |
| 7. | $\vdash_X (\neg\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$ | DT. 6              |

### 2.13 RE(Replacement of Equivalents)

**Proposition 131.**  $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((r \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow s)))$

1.  $p, p \rightarrow r, r \rightarrow q, q \rightarrow s \vdash_X s$  mp
2.  $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((r \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow s)))$  DT. 1

**Proposition 132.**  $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r \vee s)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r \rightarrow s)))$

1.  $\neg r, p \rightarrow r \vdash_X \neg p$  Proposition 32, DT, mp, Cut
2.  $\neg p, \neg p \rightarrow q, q \rightarrow s \vdash_X s$  mp
3.  $\neg r, p \rightarrow r, \neg p \rightarrow q, q \rightarrow s \vdash_X s$  Cut. 1,2
4.  $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r \rightarrow s)))$  DT. 3

**Proposition 133.**  $\nVdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (p \vee q \rightarrow s \vee r)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg s \rightarrow r)))$

$$\frac{p \quad q \quad r \quad s \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (p \vee q \rightarrow s \vee r)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg s \rightarrow r)))}{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \mid 0 \quad 2 \quad 0 \mid 0 \mid 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0}$$

### 2.14 Dist(Distribution)

**Proposition 134.**  $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r)) \mid (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r)))$

1.  $p, p \rightarrow q \vdash_X q$  mp
2.  $p, p \rightarrow r \vdash_X r$  mp
3.  $q, r \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg r)$  Proposition 96, DT
4.  $p \rightarrow q, p \rightarrow r, p \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg r)$  Cut. 1,2,3
5.  $\vdash_X (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r)))$  DT. 4

**Proposition 135.**  $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r \wedge s)) \mid (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)))$

1.  $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg p$  Proposition 82, DT
2.  $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg q$  Proposition 83, DT
3.  $\neg\neg p, p \rightarrow r \vdash_X \neg\neg r$  Proposition 49, DT, mp, Cut
4.  $\neg\neg q, q \rightarrow s \vdash_X \neg\neg s$  Proposition 49, DT, mp, Cut
5.  $\neg\neg r, r \rightarrow \neg s \vdash_X \neg\neg\neg s$  Proposition 49, DT, mp, Cut
6.  $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow r, r \rightarrow \neg s \vdash_X \neg\neg\neg s$  Cut. 1,3,5
7.  $\neg(p \rightarrow \neg q), q \rightarrow s \vdash_X \neg\neg s$  Cut. 2,4
8.  $\neg\neg\neg s, \neg\neg s \vdash_X \neg(r \rightarrow \neg s)$  IE
9.  $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow r, r \rightarrow \neg s, q \rightarrow s \vdash_X \neg(r \rightarrow \neg s)$  Cut. 6,7,8
10.  $\neg(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow r, q \rightarrow s \vdash_X \neg(r \rightarrow \neg s)$  SRAA. 9
11.  $\vdash_X (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)))$  DT. 10

**Proposition 136.**  $\vdash_X (p \rightarrow r \wedge s) \rightarrow ((q \rightarrow r \wedge s) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r \wedge s)) \mid (p \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)) \rightarrow ((q \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)))$

1.  $p \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s), q \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s), (\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg(r \rightarrow \neg s)$  <sup>2</sup>Proposition 75,DT
2.  $\vdash_X (p \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)) \rightarrow ((q \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)))$  DT. 1

**Proposition 137.**  $\vdash_X p \wedge (q \vee r) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \mid \neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg r))$

1.  $\neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)) \vdash_X \neg\neg p$  Proposition 82, DT
2.  $\neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)) \vdash_X \neg\neg(\neg q \rightarrow r)$  Proposition 83, DT
3.  $\neg\neg p, p \rightarrow \neg r \vdash_X \neg\neg r$  Proposition 49, DT, mp, Cut
4.  $\neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)), p \rightarrow \neg r \vdash_X \neg\neg r$  Cut. 1,3
5.  $\neg\neg p, \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg\neg q$  Proposition 45, DT, mp, Cut
6.  $\neg\neg\neg q, \neg\neg(\neg q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg r$  Proposition 45, DT, mp, Cut
7.  $\neg\neg p, \neg\neg(p \rightarrow \neg q), \neg\neg(\neg q \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg r$  Cut. 5,6
8.  $\neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)), \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg r$  Cut. 1,2,7
9.  $\neg\neg r, \neg\neg\neg r \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg r)$  IE
10.  $\neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)), p \rightarrow \neg r, \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg r)$  Cut. 4,8,9
11.  $\neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)), \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg(p \rightarrow \neg r)$  SRAA. 10
12.  $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg r))$  DT. 11

**Proposition 138.**  $\vdash_X ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \rightarrow p \wedge (q \vee r) \mid (\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg r)) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r))$

1.  $\vdash_X p \rightarrow p$  Proposition 22
2.  $\vdash_X q \rightarrow q \vee r$  Proposition 54
3.  $p \rightarrow p, q \rightarrow q \vee r \vdash_X p \wedge q \rightarrow p \wedge (q \vee r)$  Proposition 135,DT
4.  $\vdash_X p \wedge q \rightarrow p \wedge (q \vee r)$  Cut. 1,2,3
5.  $\vdash_X r \rightarrow q \vee r$  Proposition 55
6.  $p \rightarrow p, r \rightarrow q \vee r \vdash_X p \wedge r \rightarrow p \wedge (q \vee r)$  Proposition 135,DT
7.  $\vdash_X p \wedge r \rightarrow p \wedge (q \vee r)$  Cut. 1,5,6
8.  $\vdash_X (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \rightarrow p \wedge (q \vee r)$  Proposition 136, DT, Cut. 4,7
9.  $\vdash_X (\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg r)) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r))$  8

**Proposition 139.**  $\vdash_X p \vee (q \wedge r) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \mid (\neg p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r)) \rightarrow \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r))$

1.  $\vdash_X p \rightarrow (p \vee q)$  Proposition 54
2.  $\vdash_X p \rightarrow (p \vee r)$  Proposition 54
3.  $p \rightarrow (p \vee q), p \rightarrow (p \vee r) \vdash_X p \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$  Proposition 134,DT
4.  $\vdash_X p \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$  Cut. 1,2,3
5.  $\vdash_X q \rightarrow (p \vee q)$  Proposition 55
6.  $\vdash_X r \rightarrow (p \vee r)$  Proposition 55

---

<sup>2</sup>Consider Proposition 76( $(r \rightarrow \neg s)/r$ )

7.  $q \rightarrow (p \vee q), r \rightarrow (p \vee r) \vdash_X q \wedge r \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$  Proposition 135,DT
8.  $\vdash_X q \wedge r \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$  Cut. 5,6,7
9.  $\vdash_X p \vee (q \wedge r) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$  Proposition 136, DT, Cut. 4,8
10.  $\vdash_X (\neg p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r)) \rightarrow \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r))$  9

**Proposition 140.**  $\vdash_X ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \rightarrow p \vee (q \wedge r) \mid \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r))$

1.  $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)) \vdash_X \neg\neg(\neg p \rightarrow q)$  Proposition 82
2.  $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)) \vdash_X \neg\neg(\neg p \rightarrow r)$  Proposition 83
3.  $\neg p, \neg\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg q$  Proposition 28,45, DT, mp, Cut
4.  $\neg p, \neg\neg(\neg p \rightarrow r) \vdash_X \neg\neg r$  Proposition 28,45, DT, mp, Cut
5.  $\neg p, \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)) \vdash_X \neg\neg q$  Cut. 1,3
6.  $\neg p, \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)) \vdash_X \neg\neg r$  Cut. 2,4
7.  $\neg\neg q, q \rightarrow \neg r \vdash_X \neg\neg r$  Proposition 49, DT, mp, Cut
8.  $\neg p, \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)), q \rightarrow \neg r \vdash_X \neg\neg r$  Cut. 5,7
9.  $\neg\neg r, \neg\neg r \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg r)$  IE
10.  $\neg p, \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)), q \rightarrow \neg r \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg r)$  Cut. 6,8,9
11.  $\neg p, \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)) \vdash_X \neg(q \rightarrow \neg r)$  SRAA. 10
12.  $\vdash_X \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r))$  DT. 11

## 2.15 CO(Choose one)

**Proposition 141.**  $\vdash_X (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \mid \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

1.  $q \vdash_X p \rightarrow q$  X1( $q/p, p/q$ ), DT
2.  $\neg(p \rightarrow q), p \rightarrow q \vdash_X p$  IE
3.  $\neg(p \rightarrow q), q \vdash_X p$  Cut. 1,2
4.  $\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$  DT. 3

**Proposition 142.**  $\vdash_X (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q) \mid \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$

1.  $\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$  Proposition 42, DT
2.  $\neg q \vdash_X p \rightarrow \neg q$  X1( $\neg q/p, p/q$ ), DT
3.  $\neg(p \rightarrow q) \vdash_X p \rightarrow \neg q$  Cut. 1,2
4.  $\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$  DT. 3

**Proposition 143.**  $\not\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \vee (p \rightarrow q) \mid \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

$$\frac{p \quad q}{2 \quad 0} \mid \frac{\neg \quad (}{2 \quad 2} \frac{p \rightarrow \neg \quad q}{1 \quad 1} \quad ) \mid \frac{\rightarrow \quad (}{0 \quad 0} \frac{p \rightarrow \neg \quad q}{2 \quad 0} \quad )$$

**Proposition 144.**  $\vdash_X (p \rightarrow \neg\neg q) \vee (p \rightarrow \neg q) \mid \neg(p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$



- |   |                           |
|---|---------------------------|
| 1. $\neg(p \rightarrow \neg\neg q) \vdash_X \neg\neg\neg q$                     | Proposition 42, DT        |
| 2. $\neg\neg\neg q \vdash_X \neg q$   | Proposition 29, DT        |
| 3. $\neg q \vdash_X p \rightarrow \neg q$                                       | X1( $\neg q/p, p/q$ ), DT |
| 4. $\neg(p \rightarrow \neg\neg q) \vdash_X p \rightarrow \neg q$               | Cut. 1,2,3                |
| 5. $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ | DT. 4                     |

**Proposition 145.**  $\vdash_X (p \rightarrow \neg q) \vee (p \rightarrow \neg\neg q) \mid \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg\neg q)$

- |   |                              |
|---|------------------------------|
| 1. $\vdash_X \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg\neg q)$ | <sup>3</sup> Proposition 142 |
|---|------------------------------|

**Proposition 146.**  $\vdash_X (p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow q) \mid \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

- |  |          |
|--|----------|
| 1. $\neg p \vdash_X p \rightarrow q$                                   | IE, DT   |
| 2. $p \rightarrow q, \neg(p \rightarrow q) \vdash_X q$                 | IE       |
| 3. $\neg p, \neg(p \rightarrow q) \vdash_X q$                          | Cut. 1,2 |
| 4. $\vdash_X \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ | DT. 3    |

**Proposition 147.**  $\vdash_X (\neg p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow q) \mid \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

- |  |          |
|--|----------|
| 1. $p \vdash_X \neg p \rightarrow q$                                   | IE, DT   |
| 2. $\neg p \rightarrow q, \neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X q$       | IE       |
| 3. $p, \neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X q$                          | Cut. 1,2 |
| 4. $\vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ | DT. 3    |

## 2.16 DN(Double Negation)

**Proposition 148.**  $\vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$

- |   |                                |
|---|--------------------------------|
| 1. $\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg(\neg p \rightarrow p)$                 | Proposition 43, DT             |
| 2. $\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p) \vdash_X \neg p$   | Proposition 42, DT             |
| 3. $\neg p, \neg\neg(\neg p \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg p$   | Proposition 28,45, DT, mp, Cut |
| 4. $\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg p$                                     | Cut. 1,2,3                     |
| 5. $\neg p, \neg\neg p \vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$                         | IE                             |
| 6. $\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$ | Cut. 2,4,5                     |
| 7. $\vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$  | SRAA. 6                        |

**Proposition 149.**  $\vdash_X \neg\neg(\neg\neg p \rightarrow p)$

- |   |                    |
|---|--------------------|
| 1. $\neg(\neg\neg p \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg p$                         | Proposition 56, DT |
| 2. $\neg(\neg\neg p \rightarrow p) \vdash_X \neg p$                             | Proposition 57, DT |
| 3. $\neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg\neg(\neg\neg p \rightarrow p)$             | IE                 |
| 4. $\neg(\neg\neg p \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg(\neg\neg p \rightarrow p)$ | Cut. 1,2,3         |
| 5. $\vdash_X \neg\neg(\neg\neg p \rightarrow p)$                                | SRAA. 4            |

---

<sup>3</sup>Consider Proposition 142( $\neg q/q$ )

**Proposition 150.**  $\vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$

- |     |  |                                |
|-----|--|--------------------------------|
| 1.  | $\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \vdash_X \neg\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$                                 | Proposition 43, DT             |
| 2.  | $\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \vdash_X \neg(q \rightarrow p)$   | Proposition 42, DT             |
| 3.  | $\neg(q \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg q$  | Proposition 43, DT             |
| 4.  | $\neg(q \rightarrow p) \vdash_X \neg p$  | Proposition 42, DT             |
| 5.  | $\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \vdash_X \neg\neg q$  | Cut. 2,3                       |
| 6.  | $\neg p, \neg\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vdash_X \neg\neg\neg q$  | Proposition 28,45, DT, mp, Cut |
| 7.  | $\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \vdash_X \neg\neg\neg q$  | Cut. 1,2,4,6                   |
| 8.  | $\neg\neg q, \neg\neg\neg q \vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$                                      | IE                             |
| 9.  | $\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$ | Cut. 5,7,8                     |
| 10. | $\vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$   | SRAA. 9                        |

**Proposition 151.**  $\vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p))$

- |     |  |                                |
|-----|--|--------------------------------|
| 1.  | $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)) \vdash_X \neg\neg(\neg p \rightarrow q)$                                      | Proposition 43, DT             |
| 2.  | $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)) \vdash_X \neg(\neg q \rightarrow p)$  | Proposition 42, DT             |
| 3.  | $\neg(\neg q \rightarrow p) \vdash_X \neg q$   | Proposition 56, DT             |
| 4.  | $\neg(\neg q \rightarrow p) \vdash_X \neg p$   | Proposition 57, DT             |
| 5.  | $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)) \vdash_X \neg q$  | Cut. 2,3                       |
| 6.  | $\neg p, \neg\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg q$   | Proposition 28,45, DT, mp, Cut |
| 7.  | $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)) \vdash_X \neg\neg q$  | Cut. 1,2,4,6                   |
| 8.  | $\neg q, \neg\neg q \vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p))$  | IE                             |
| 9.  | $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)) \vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p))$ | Cut. 5,7,8                     |
| 10. | $\vdash_X \neg\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p))$   | SRAA. 9                        |

**Proposition 152.**  $\vdash_X \neg\neg((\neg q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$

- |    |   |                              |
|----|---|------------------------------|
| 1. | $\vdash_X \neg\neg((\neg q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$ | <sup>4</sup> Proposition 150 |
|----|---|------------------------------|

**Proposition 153.**  $\vdash_X \neg\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p)$

- |    |  |                    |
|----|--|--------------------|
| 1. | $\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p) \vdash_X \neg(p \rightarrow q)$                         | Proposition 56, DT |
| 2. | $\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p) \vdash_X \neg p$  | Proposition 57, DT |
| 3. | $\neg p \vdash_X p \rightarrow q$  | IE, DT             |
| 4. | $\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p) \vdash_X p \rightarrow q$                               | Cut. 2,3           |
| 5. | $p \rightarrow q, \neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p)$    | IE                 |
| 6. | $\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p)$ | Cut. 1,4,5         |
| 7. | $\vdash_X \neg\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p)$   | SRAA. 6            |

**Proposition 154.**  $\vdash_X \neg\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)) \mid \neg\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q))$

---

<sup>4</sup>Consider Proposition 150( $q/p, \neg p/q$ )

1.  $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q)) \vdash_X \neg\neg(p \rightarrow q)$  Proposition 43, DT
2.  $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q)) \vdash_X \neg(\neg\neg p \rightarrow q)$  Proposition 42, DT
3.  $\neg(\neg\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg p$  Proposition 56, DT
4.  $\neg(\neg\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg q$  Proposition 57, DT
5.  $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q)) \vdash_X \neg q$  Cut. 2,4
6.  $\neg\neg p, \neg\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg q$  Proposition 45, DT, mp, Cut
7.  $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q)) \vdash_X \neg\neg q$  Cut. 1,2,3,6
8.  $\neg q, \neg\neg q \vdash_X \neg\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q))$  IE
9.  $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q)) \vdash_X \neg\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q))$  Cut. 5,7,8
10.  $\vdash_X \neg\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q))$  SRAA. 9

## 2.17 Other

**Proposition 155.**  $\vdash_X \neg(p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q) \mid \neg((\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg\neg q))$

1.  $\vdash_X p \vee \neg p$  Proposition 77
2.  $p \vee \neg p, p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q \vdash_X q \wedge \neg q$  mp
3.  $p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q \vdash_X q \wedge \neg q$  Cut. 1,2
4.  $\vdash_X \neg(q \wedge \neg q)$  Proposition 98
5.  $\neg(q \wedge \neg q), q \wedge \neg q \vdash_X \neg(p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q)$  IE
6.  $p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q \vdash_X \neg(p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q)$  Cut. 3,4,5
7.  $\vdash_X \neg(p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q) \mid \neg((\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg\neg q))$  DT. 6

## 2.18 Peirce(Peirce' law)

**Proposition 156.**  $\nVdash_X ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow p) \rightarrow p$

$$\frac{p \mid ( ( \frac{p}{0} \rightarrow \frac{\neg p}{1} ) \rightarrow \frac{p}{0} ) \rightarrow \frac{p}{0} \mid \frac{p}{0}}{0}$$

**Proposition 157.**  $\vdash_X ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \neg\neg p$

1.  $\neg p, (p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash_X \neg(p \rightarrow q)$  Proposition 32, DT, mp, Cut
2.  $\neg(p \rightarrow q) \vdash_X \neg\neg p$  Proposition 43, DT
3.  $\neg p, (p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash_X \neg\neg p$  Cut. 1,2
4.  $(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash_X \neg\neg p$  SRAA. 3
5.  $\vdash_X ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \neg\neg p$  DT. 4

**Proposition 158.**  $\vdash_X ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

1.  $p, (\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg p \vdash_X \neg(\neg p \rightarrow q)$  Proposition 33, DT, mp, Cut
2.  $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash_X \neg p$  Proposition 56, DT
3.  $p, (\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg p \vdash_X \neg p$  Cut. 1,2
4.  $(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash_X \neg p$  SRAA. 3
5.  $\vdash_X ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$  DT. 4

**Proposition 159.**  $\vdash_X \neg\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$

- |    |  |                                  |
|----|--|----------------------------------|
| 1. | $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg((p \rightarrow q) \rightarrow p)$                 | Proposition 43, DT               |
| 2. | $\neg\neg((p \rightarrow q) \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg\neg\neg p$  | Proposition 157, 49, DT, mp, Cut |
| 3. | $\neg\neg\neg\neg p \vdash_X \neg\neg p$   | Proposition 31, DT               |
| 4. | $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg p$  | Cut. 1,2,3                       |
| 5. | $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \vdash_X \neg p$  | Proposition 42, DT               |
| 6. | $\neg\neg p, \neg p \vdash_X \neg\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$                                    | IE                               |
| 7. | $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \vdash_X \neg\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$ | Cut. 4,5,6                       |
| 8. | $\vdash_X \neg\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$   | SRAA. 7                          |

**Proposition 160** (Peirce' law).  $\not\vdash_X ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

$p$	$q$		$($	$($	$p$	$\rightarrow$	$q$	$)$	$\rightarrow$	$p$	$)$		$\rightarrow$	$p$		$p$
0	1				0	1	1		2	0			0		0	