Tugas Besar 1 IF 2123 Aljabar Linear dan Geometri

Sistem Persamaan Linier, Determinan,

dan Aplikasinya

Kelompok “A16EO”

Azmi Hasna Zahrani	13521006
Ahmad Nadil	13521024
Jauza Lathifah Annassalafi	13521030

BAB I

DESKRIPSI MASALAH

1.1 Deskripsi Masalah

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Pada mata kuliah Aljabar Linear dan Geometri, sudah dipelajari berbagai metode untuk menyelesaikan SPL, termasuk menghitung determinan matriks.

Sistem Persamaan Linear (SPL) secara umum mempunyai bentuk seperti pada gambar 1.1.1 dengan a1dan b adalah bilangan-bilangan real, i = 1, 2, 3, …, n.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

1.1.1 Bentuk umum SPL dengan m dan n yang tidak diketahui

Persamaan linear juga dapat ditulis dalam bentuk persamaan vektor seperti pada gambar 1.1.2.

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

1.1.2 SPL dalam bentuk vektor

Terakhir, sistem persamaan linear dapat ditulis dalam bentuk matriks dengan memanfaatkan pengertian perkalian matriks seperti pada gambar 1.1.3 atau secara singkat Ax = b.

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

1.1.3 Perkalian matriks

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad
\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

1.1.4 Matriks A, x, dan b

Matriks pada gambar 1.1.3 diatas dapat diubah menjadi matriks augmented menjadi:

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}
$$

1.1.5 Matriks augmented

Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan (x = A -1b), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Dengan adanya Tugas Besar 1 ini, kami diminta membuat satu atau lebih library aljabar linier dalam Bahasa Java. Library berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Lalu, gunakan library tersebut di dalam program Java untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi.

BAB II

TEORI SINGKAT

2.1 Operasi Baris Elementer

Operasi Baris Elementer (OBE) adalah suatu operasi yang diterapkan pada baris suatu matriks, biasanya digunakan untuk menemukan invers suatu matriks atau menyelesaikan SPL.

Ada tiga OBE yang bisa diterapkan pada matriks augmented, yaitu:
1. Kalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol.
2. Pertukaran 2 buah baris.
3. Tambahkan 1 baris dengan kelipatan baris lainnya.

Solusi SPL bisa diperoleh dengan menerapkan OBE pada matriks augmented sampai terbentuk matriks eselon baris atau matriks eselon baris tereduksi. Jika berakhir dengan matriks eselon baris dapat dilakukan eliminasi Gauss dan jika berakhir dengan matriks eselon baris tereduksi dapat dilakukan eliminasi Gauss - Jordan.

2.2 Metode Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan SPL. Eliminasi Gauss mulai populer setelah digunakan oleh Carl Friedrich Gauss. Metode eliminasi Gauss dilakukan dengan cara menyatakan SPL dalam bentuk matriks augmented. Lalu, gunakan metode OBE pada matriks augmented sampai terbentuk matriks eselon baris (matriks yang memiliki 1 utama pada setiap baris kecuali baris yang berisi 0 semua).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} \sim\text{OBE}\sim \begin{bmatrix} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

2.2.1 Matriks setelah dilakukan OBE

Setelah menjadi matriks eselon baris, cari nilai dari tiap variabel menggunakan teknik penyulihan mundur (backward substitution).

2.3 Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss. Pada metode ini, OBE diterapkan pada matriks augmented sampai terbentuk matriks eselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \sim\text{OBE}\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

2.3.1 Matriks eselon baris tereduksi

Setelah matriks eselon baris tereduksi terbentuk, tidak lagi diperlukan substitusi mundur karena nilai variabel langsung didapatkan dari matriks augmented akhir. Metode eliminasi gauss jordan terdiri dari dua fase, yaitu fase maju (eliminasi Gauss) untuk menghasilkan nilai-nilai 0 di bawah 1 utama.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \overset{\text{OBE}}{\dots} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Fase maju

Fase mundur untuk menghasilkan nilai-nilai 0 di atas satu utama.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{\text{R1} -(3/2)\text{R2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/4 & -11/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\text{R2 - (1/2)R3}}{\overset{\text{R1 +(5/4)R3}}{\sim}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{Matriks eselon baris tereduksi}}$$

2.3.3 Fase mundur

2.4 Determinan

Determinan adalah nilai yang dapat dihitung dari unsur-unsur suatu matriks persegi, yaitu matriks yang memiliki jumlah baris dan kolom yang sama. Determinan dari matriks A dapat dituliskan det(A) atau |A|. Pada matriks berordo 1x1, nilai determinannya adalah elemen itu sendiri. Untuk matriks berordo 2x2 dan 3x3, determinan dapat dihitung dengan mengurangi perkalian elemen secara diagonal ke kanan dengan perkalian secara diagonal ke kiri.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

2.4.1 Menghitung matriks berordo 2x2

$$det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

2.4.2 Menghitung matriks berordo 2x2

Terdapat berbagai cara untuk menghitung nilai determinan dari sebuah matriks. Untuk matriks yang memiliki ordo n x n dengan n > 3, maka determinan matriks tersebut dapat dihitung menggunakan metode reduksi baris dan metode ekspansi kofaktor.

Metode reduksi baris melakukan operasi baris elementer (OBE) pada suatu matriks sampai matriks awal berubah menjadi matriks baru dengan matriks berjenis segitiga atas atau segitiga bawah. Sehingga, determinan matriks cukup dihitung dengan mengalikan diagonal utama pada matriks.

$$\text{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \quad \text{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

2.4.3 Matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah

$$\text{det(A)} = a_{11}a_{22}\, a_{33}a_{44}$$

2.4.4 Menghitung determinan matriks segitiga

Metode yang kedua adalah dengan ekspansi kofaktor. Untuk setiap elemen a_{ij}, terdapat entri kofaktornya C_{ij} sehingga matriks kofaktornya dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

2.4.5 Matriks kofaktor

C_{ij} dapat dihitung menggunakan rumus:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

2.4.6 Rumus mencari C_{ij}

Untuk mendapatkan C_{ij} perlu dicari minor sebuah matriks atau dilambangkan dengan Mij. Minor suatu matriks adalah determinan dari matriks bagian matriks tersebut yang diperoleh dengan cara menghilangkan semua elemen lain pada baris ke-i dan kolom ke-j. Setelah didapatkan nilai entri kofaktor, determinan sebuah matriks dapat dihitung dengan salah satu persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n} \\ \det(A) &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + \ldots + a_{2n}C_{2n} \\ &\vdots \\ \det(A) &= a_{n1}C_{n1} + a_{n2}C_{n2} + \ldots + a_{nn}C_{nn} \end{aligned}$$

Secara baris

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \ldots + a_{n1}C_{n1} \\ \det(A) &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + \ldots + a_{n2}C_{n2} \\ &\vdots \\ \det(A) &= a_{1n}C_{1n} + a_{2n}C_{2n} + \ldots + a_{nn}C_{nn} \end{aligned}$$

Secara kolom

2.4.7 Persamaan determinan sebuah matriks

2.5 Matriks Balikan

Misalkan A adalah matriks persegi berukuran n x n. Balikan (inverse) matriks A adalah A^{-1} yang apabila dikalikan kembali dengan matriks aslinya akan menghasilkan matriks identitas (A^{-1} A = I). Matriks memiliki invers apabila berordo n x n dan memiliki nilai determinan bukan nol. Terdapat dua metode untuk mencari invers dari sebuah matriks, yaitu dengan eliminasi Gauss-Jordan dan dengan adjoin.

Untuk metode eliminasi gauss jordan, augmentasi matriks A dengan matriks Identitas di sebelah kanannya. Lalu, gunakan operasi eliminasi gauss-jordan sehingga matriks A menjadi matriks identitas. Matriks hasil inversnya dapat dilihat dari matriks identitas awal yang telah berubah karena operasi eliminasi gauss jordan tersebut.

$$[A|I] \;->\; [I|A^{-1}]$$

2.5.1 Metode eliminasi gauss jordan

Metode Adjoin menghasilkan matriks balikan dengan membagi adjoin dari matriksnya dengan determinan matriks itu sendiri. Adjoin dari sebuah matriks adalah transpose dari matriks kofaktor matriks itu sendiri. Transpose adalah operasi menukar tiap elemen a_{ij} pada sebuah matriks menjadi $a$ji sehingga ordonya berubah dari n x m menjadi m x n. Metode adjoin dapat dituliskan dengan persamaan sebagai berikut:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \times Adj(A)$$

2.5.2 Metode adjoin

2.6 Matriks Kofaktor

Matriks kofaktor adalah matriks yang terbentuk dari nilai kofaktor dari tiap elemen yang terdapat pada matriks. Susunan elemen pada matriks kofaktor juga sesuai dengan susunan pada matriksnya. Misalkan A adalah matriks n x n dan C_{ij} adalah kofaktor entri a_{ij}, maka matriks kofaktor dari A adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

2.6.1 Matriks kofaktor

2.7 Matriks Adjoin

Matriks adjoin adalah matriks yang didapat dari matriks kofaktor yang telah ditranspose. Artinya, terdapat penukaran elemen C_{ij} pada matriks kofaktor menjadi elemen C_{ij} pada matriks adjoin. Adjoin sering ditulis dengan lambang adj.

$$\text{matriks kofaktor: } \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{adj(A)} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

2.7.1 Matriks kofaktor dan adj(A)

2.8 Kaidah Cramer

Jika Ax = b merupakan suatu sistem persamaan linear dengan n persamaan dan n variabel dengan syarat det(A) ≠ 0, maka sistem tersebut memiliki penyelesaian tunggal (unik), yaitu:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \quad \cdots \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

2.8.1 penyelesaian tunggal (unik) SPL

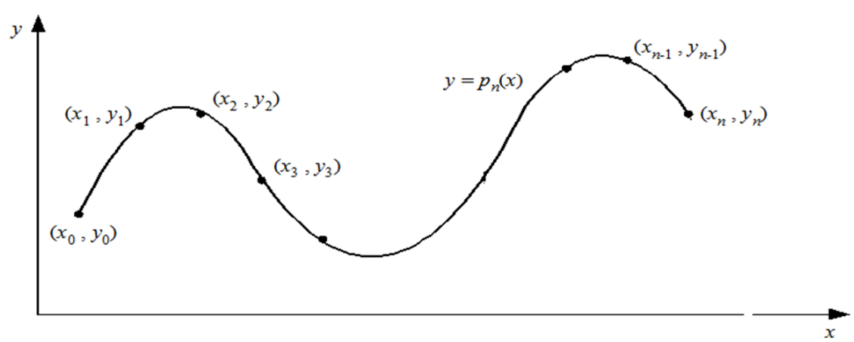
Dengan A_j menyatakan matriks yang diperoleh dari A dengan menggantikan entri-entri pada kolom ke-j dengan entri-entri pada matriks konstanta.

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

2.8.2 Matriks konstanta

2.9 Interpolasi Polinom

Persoalan interpolasi polinom adalah diberikan $n + 1$ buah titik berbeda, (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n). Tentukan polinom p_n(x) yang menginterpolasi semua titik-titik sedemikian rupa sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk i = 0, 1, 2, …, n.



2.9.1 Grafik polinom interpolasi p_n(x)

Setelah polinom interpolasi p_n(x) ditemukan, p_n(x) dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di sembarang titik di dalam selang $[x_0, y_n]$.

Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n). adalah berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Jika hanya ada dua titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1), maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah $p_1(x) = a_0 + a_1 x$ yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan (x_2, y_2), maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ atau persaman kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, (x_0, y_0), (x1 , y1), (x2 , y2), dan (x3 , y3), polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah $p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, demikian seterusnya. Dengan menyulihkan (xi , yi) ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ untuk i = 0, 1, 2, …, n, akan diperoleh n buah sistem persamaan lanjar dalam $a_0, a_1, \ldots, a_n$,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n &= y_1 \\ \ldots \qquad\qquad & \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n &= y_n \end{aligned}$$

2.9.1 Sistem Persamaan Lanjar

Solusi sistem persamaan lanjar, yaitu nilai a_0, a_1, …, a_n, diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

2.10 Interpolasi Bicubic

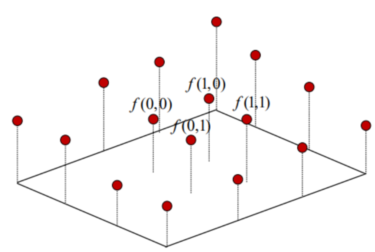
Bicubic interpolation merupakan teknik interpolasi pada data 2D umumnya digunakan dalam pembesaran citra yang merupakan pengembangan dari interpolasi linear dan cubic yang telah dipelajari pada kuliah metode numerik di aljabar geometri.

Diberikan sebuah matrix awal, misal M, kita akan mencari persamaan interpolasi f(x,y) dengan pemodelan sebagai berikut:

Normalization: $f(0,0), f(1,0)$
$f(0,1), f(1,1)$

Model: $$f(x,y) = \sum_{j=0}^{3} \sum_{i=0}^{3} a_{ij} x^i y^j$$
$x = -1, 0, 1, 2$

Solve: a_{ij}



Melakukan substitusi nilai-nilai diketahui pada matriks 4 x 4 tersebut ke persamaan f(x,y) akan menghasilkan sebuah matriks persamaan:

$$y = Xa$$

$$\begin{bmatrix} f(-1,-1) \\ f(0,-1) \\ f(1,-1) \\ f(2,-1) \\ f(-1,0) \\ f(0,0) \\ f(1,0) \\ f(2,0) \\ f(-1,1) \\ f(0,1) \\ f(1,1) \\ f(2,1) \\ f(-1,2) \\ f(0,2) \\ f(1,2) \\ f(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -1 & -2 & -4 & -8 & 1 & 2 & 4 & 8 & -1 & -2 & -4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 1 & 2 & 4 & 8 & 1 & 2 & 4 & 8 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & -2 & 4 & -4 & 4 & -4 & 8 & -8 & 8 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 2 & 4 & 8 & 16 & 4 & 8 & 16 & 32 & 8 & 16 & 32 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \\ a_{01} \\ a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{02} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{03} \\ a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

Elemen pada matrix X adalah koefisien a_{ij} yang diperoleh dari persamaan f(x,y) di atas. Sebagai contoh, elemen pada baris ke 4 kolom ke 10 adalah koefisien dari a_{12} dan diperoleh dari $2^i * (-1)^2 = 2$, sesuai persamaan $x^i * y^i$.

Vektor **a** dapat dicari dari persamaan tersebut menggunakan rumus $a = X^{-1}y$. Kemudian vektor **a** digunakan sebagai nilai variabel dalam f(x,y) sehingga terbentuk fungsi interpolasi bicubic sesuai model.

2.11 Regresi Linier Berganda

Regresi Linear merupakan metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Terdapat rumus umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

2.11.1 Rumus umum dari regresi linear

Untuk mendapatkan nilai dari setiap β_i dapat digunakan Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \quad &+ b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \quad + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} &&= \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 \quad &+ b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} &&= \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \\
\vdots \qquad \vdots \qquad &\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots &&\quad \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{1i} &+ b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{2i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 &&= \sum_{i=1}^{n} x_{ki} y_i
\end{aligned}
$$

2.11.2 Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

BAB III

IMPLEMENTASI

Pada tugas besar ini, kami membuat folder src yang berisikan folder matrix, function, dan main.

3.1 Folder Matrix

Pada folder matrix berisi 3 file, yaitu Input_Matrix.java, Matrix.java, dan Output_Matrix.java.

3.1.1 Input_Matrix.java

3.1.1.1 Attribute

Nama	Deskripsi
sc	Pemindai teks yang dapat mengurai tipe dan string primitif menggunakan ekspresi reguler

3.1.1.2 Method

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
MatrixKeyboardInput	Public double		Membuat matrix baru dengan jumlah baris, jumlah kolom, serta elemen yang diinput langsung dari pengguna
MatrixFileInput	Public double		Membuat matrix baru dengan menggunakan import dari file yang sudah ada

3.1.2 Matrix.java

3.1.2.1 Attribute

Tidak ada attribute pada class ini.

3.1.2.2 Method

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
outputMatrix	Public void	matrix	Mencetak matrix ke layar
IsSquare	Public boolean	matrix	Mengembalikan nilai true jika sebuah matrix merupakan matrix persegi
CreateIdentityMatrix	Public double	double[][] M, int n	Membuat matrix identitas
DetByKofaktor	Public double	matrix	Menghasilkan determinan matrix dengan metode ekspansi kofaktor
DetByGauss	Public double	matrix	Menghasilkan determinan matrix dengan metode eliminasi Gauss
TransposeMatrix	Public double	matrix	Menghasilkan transpose sebuah matrix
CopyMatrix	Public double	matrix	Menghasilkan salinan dari sebuah matrix
getMinor	Public double	matrix, int i, int j	Mengambil matrix minor pada saat menghitung kofaktor

getCofactor	Public double	matrix, int i, int j	Menghasilkan kofaktor dari sebuah matrix
zeroRowCounter	Public int	matrix M	Menghasilkan jumlah elemen nol pada sebuah baris pada matrix
zeroRowChecker	Public boolean	double[][]M, int i	Mengembalikan nilai true jika pada satu kolom berisi semua elemen nol

3.1.3 Output_Matrix.java

3.1.3.1 Attribute

Nama	Deskripsi
sc	Pemindai teks yang dapat mengurai tipe dan string primitif menggunakan ekspresi reguler
FileWriter WR	Package untuk menulis file data dalam bentuk karakter
String dir	Directory output file hasil perhitungan
String path	
SimpleDateFormat dateFormat	

3.1.3.2 Method

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
MatrixToString	Public string	double[][] M	Mengubah matrix ke tipe data string

CreateFile	Public void		Membuat file untuk menyimpan hasil operasi
SPLToFile	Public void		Menyimpan hasil SPL ke file
DetToFile	Public void	double res	Menyimpan hasil determinan ke file
InverseToFile	Public void	double[][] M	Menyimpan hasil inverse ke file
RegressionToFile	Public void	string res, double[] X, double regres	Menyimpan hasil regresi ke file
InterpolateToFile	Public void	double[]res, double x, double y	Menyimpan hasil Interpolasi ke file

3.2 Folder Function

3.1.1 Bicubic.java

3.1.1.1 Atribute

Nama	Deskripsi
sc	Pemindai teks yang dapat mengurai tipe dan string primitif menggunakan ekspresi reguler
double[][] a	Menampung data angka double merepresentasikan isi dari matrix a
double[][] a4x4	Menampung data angka double merepresentasikan isi dari matrix a4x4

3.1.1.2 Method

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
BicubicInterpolation	Public double	Matrix, int x, int y	Menghasilkan nilai interpolasi bikubik
reshape	Public double	matrix, int row, int col	Mengubah ukuran matrix

3.2.2 Interpolate.java

3.2.2.1 Attribute

Tidak ada attribute yang digunakan pada class ini.

3.2.2.2 Method

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
InterpolateFunction	Public double	Matrix	Membuat fungsi interpolasi polinom
InterpolateFX	Public double	matrix, double x	Menghasilkan nilai interpolasi polinom
OutputInterpolation	Public void	matrix	Mencetak hasil interpolasi polinom ke layar

3.2.3 Inverse.java

3.2.3.1 Attribute

Tidak ada attribute pada class ini.

3.2.3.2 Method

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
InverseByOBE	Public double	double[][]M	Menghasilkan inverse matrix menggunakan metode Operasi Baris Elemeneter
InverseByCofactor	Public double	double[][] M	Menghasilkan inverse matrix menggunakan metode ekspansi kofaktor

3.2.3 Operations.java

3.2.3.1 Attribute

Tidak ada attribute pada class ini.

3.2.3.2 Method

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
MatrixExtender	Public double	Mat1, Mat2	Menggabungkan dua matrix
OBE	Public double	double[][] M	Memproses perhitungan operasi baris elementer pada matrix
OBE_Tereduksi	Public double	double[][] M	Memproses perhitungan operasi baris elementer pada matrix tereduksi
Constant_Multiply	Public void	Matriks, double k	Menghasilkan perkalian matrix dengan konstanta
Matrix_Righ	Public	Matriks	Memotong

t_Cutter	double		bagian kanan matriks
Matrix_Multiplier	Public double	M1,M2	Menghasilkan perkalian antara dua matrix

3.2.4 Operations.java

3.2.4.1 Attribute

Nama	Deskripsi
private boolean satuSolusi	Parameter SPL menghasilkan solusi tunggal
private boolean banyakSolusi	Parameter SPL menghasilkan solusi banyak
private boolean tidakAdaSolusi	Parameter SPL tidak menghasilkan solusi
private double[][] m	Menampung data angka double merepresentasikan isi dari matrix m
private String[] solusi	Menampung solusi dari SPL

3.2.4.2 Constructor

Nama	Deskripsi
SPL	Membuat matrix kosong

3.2.4.3 Method

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
banyakSolusi	Public boolean		Menghasilkan true jika SPL

			memiliki banyak solusi
SPLbanyakSolusi	Public void		Membuat kondisi SPL memiliki banyak solusi
tidakAdaSolusi	Public boolean		Menghasilkan true jika SPL tidak memiliki solusi
SPLtidakAdaSolusi	Public void		Membuat kondisi SPL tidak memiliki solusi
satuSolusi	Public boolean		Menghasilkan true jika SPL memiliki hanya satu solusi
SPLsatuSolusi	Public void		Membuat kondisi SPL memiliki satu solusi
outputSolusi	Public void	String[] ans	Mencetak soulsi SPL ke layar
doubleToStringConverter	Public String[]	arr	Mengubah tipe data double ke string
parameter	Public String[]	double[][] M	Mengoperasikan variabel pada SPL
gaussElimination	Public String[]		Menghitung SPL dengan metode eliminasi Gauss
gaussJordanElimination	Public String[]		Menghitung SPL dengan metode elminasi Gauss-Jodan
cramer	Public String[]		Menghitung SPL dengan metode

			Cramer
SPLInverse	Public String[]		Menghitung SPL dengan metode inverse matrix

3.2.5 Operations.java

3.2.5.1 Attribute

Tidak ada attribute pada class ini.

3.2.5.2 Constructor

Tidak ada constructor pada class ini.

3.2.5.3 Method

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
Regression	Public double	double[][]M	Mengembalikan fungsi hasil regresi dalam bentuk array double
RegressionFX	Public double	double[] FX, double[] x	Menghitung taksiran hasil fungsi dari fungsi yang dihasilkan Regression
RegressionOutput	Public string	double[] M	Menampilkan hasil regresi

3.3 Folder Main

3.3.1 Main.java

3.3.1.1 Attribute

Nama	Deskripsi

sc	Pemindai teks yang dapat mengurai tipe dan string primitif menggunakan ekspresi reguler

3.3.1.2 Method

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
main	Public void		Menjalankan menu utama
getMatrix	Public double		Menjalankan menu inputan matrix
clear	Public void		Menghilangkan output pada terminal
enterToExit	Public void		Menutup menu
printBatas	Public void		Mencetak batas ke layar

BAB IV

EKSPERIMEN

4.1. Temukan solusi SPL Ax = B

a.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

```
METODE ELIMINASI GAUSS
========================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus1a.txt
..\test\studikasus1a.txt
========================================
Solusi SPL:
Tidak ada solusi
========================================
Successfully wrote to the file.
========================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN
========================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus1a.txt
..\test\studikasus1a.txt
========================================
Solusi SPL:
Tidak ada solusi
========================================
Successfully wrote to the file.
========================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE CRAMER
========================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus1a.txt
..\test\studikasus1a.txt
========================================
Matriks bukan persegi
Solusi SPL:
X1 = Tidak ada solusi / Tidak dapat menggunakan metode cramer
========================================
Successfully wrote to the file.
========================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE MATRIKS BALIKAN
========================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus1a.txt
..\test\studikasus1a.txt
========================================
1.0 1.0 -1.0 -1.0
2.0 5.0 -7.0 -5.0
2.0 -1.0 1.0 3.0
5.0 2.0 -4.0 2.0
Solusi SPL:
Tidak ada solusi
========================================
Successfully wrote to the file.
========================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

b.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
METODE ELIMINASI GAUSS
========================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus1b.txt
..\test\studikasus1b.txt
========================================
Solusi SPL:
X1 = 3.0  +e
X2 = 0.0  +2.0*e
X3 = 0
X4 = -1.0  +e
X5 = e
========================================
Successfully wrote to the file.
========================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN
========================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus1b.txt
..\test\studikasus1b.txt
========================================
Solusi SPL:
X1 = 3.0  +e
X2 = 0.0  +2.0*e
X3 = 0
X4 = -1.0  +e
X5 = e
========================================
Successfully wrote to the file.
========================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE CRAMER
========================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus1b.txt
..\test\studikasus1b.txt
========================================
Matriks bukan persegi
Solusi SPL:
X1 = Tidak ada solusi / Tidak dapat menggunakan metode cramer
========================================
Successfully wrote to the file.
========================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE MATRIKS BALIKAN
========================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus1b.txt
..\test\studikasus1b.txt
========================================
1.0 -1.0 0.0 0.0 1.0
1.0 1.0 0.0 -3.0 0.0
2.0 -1.0 0.0 1.0 -1.0
-1.0 2.0 0.0 -2.0 -1.0
Solusi SPL:
Tidak ada solusi
========================================
Successfully wrote to the file.
========================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

c.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
METODE ELIMINASI GAUSS
======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus1c.txt
..\test\studikasus1c.txt
======================================
Solusi SPL:
X1 = a
X2 = 1.0  -f
X3 = c
X4 = -2.0  -f
X5 = 1.0  +f
X6 = f
======================================
Successfully wrote to the file.
======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN
======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus1c.txt
..\test\studikasus1c.txt
======================================
Solusi SPL:
X1 = a
X2 = 1.0  -f
X3 = c
X4 = -2.0  -f
X5 = 1.0  +f
X6 = f
======================================
Successfully wrote to the file.
======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE CRAMER
======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus1c.txt
..\test\studikasus1c.txt
======================================
Matriks bukan persegi
Solusi SPL:
X1 = Tidak ada solusi / Tidak dapat menggunakan metode cramer
======================================
Successfully wrote to the file.
======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE MATRIKS BALIKAN
======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus1c.txt
..\test\studikasus1c.txt
======================================
0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 0.0
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0
Solusi SPL:
Tidak ada solusi
======================================
Successfully wrote to the file.
======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

d.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

N = 6

```
METODE ELIMINASI GAUSS
=======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 3
Masukkan Ordo Matriks Hilbert : 6
=======================================
Solusi SPL:
X1 = 36.00000000098032
X2 = -630.0000000292666
X3 = 3360.000000203484
X4 = -7560.000000539232
X5 = 7560.000000603351
X6 = -2772.000000240222
=======================================
Successfully wrote to the file.
=======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN
=======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 3
Masukkan Ordo Matriks Hilbert : 6
=======================================
Solusi SPL:
X1 = 36.00000000098021
X2 = -630.0000000292657
X3 = 3360.000000203484
X4 = -7560.000000539233
X5 = 7560.000000603351
X6 = -2772.000000240222
=======================================
Successfully wrote to the file.
=======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE CRAMER
=======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 3
Masukkan Ordo Matriks Hilbert : 6
=======================================
Matriks bukan persegi
Solusi SPL:
X1 = Tidak ada solusi / Tidak dapat menggunakan metode cramer
=======================================
Successfully wrote to the file.
=======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE MATRIKS BALIKAN
=======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 3
Masukkan Ordo Matriks Hilbert : 6
=======================================
Solusi SPL:
X1 = 36.00000000098021
X2 = -630.0000000292657
X3 = 3360.000000203484
X4 = -7560.000000539233
X5 = 7560.000000603351
X6 = -2772.000000240222
=======================================
Successfully wrote to the file.
=======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

N = 10

```
METODE ELIMINASI GAUSS
=======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 3
Masukkan Ordo Matriks Hilbert : 10
=======================================
Solusi SPL:
X1 = 99.99634656422131
X2 = -4949.682659989863
X3 = 79193.21483185585
X4 = -600538.1369470609
X5 = 2522224.2586804135
X6 = -6305485.547186596
X7 = 9608261.783228857
X8 = -8750305.214203862
X9 = 4375119.565502384
X10 = -923630.2349573893
=======================================
Successfully wrote to the file.
=======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN
=======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 3
Masukkan Ordo Matriks Hilbert : 10
=======================================
Solusi SPL:
X1 = 99.99634656462877
X2 = -4949.682659993443
X3 = 79193.21483186202
X4 = -600538.1369470647
X5 = 2522224.258680418
X6 = -6305485.547186602
X7 = 9608261.78322886
X8 = -8750305.214203862
X9 = 4375119.565502384
X10 = -923630.2349573893
=======================================
Successfully wrote to the file.
=======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE MATRIKS BALIKAN
=======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 3
Masukkan Ordo Matriks Hilbert : 10
=======================================
Solusi SPL:
X1 = 99.99634656462877
X2 = -4949.682659993443
X3 = 79193.21483186202
X4 = -600538.1369470647
X5 = 2522224.258680418
X6 = -6305485.547186602
X7 = 9608261.78322886
X8 = -8750305.214203862
X9 = 4375119.565502384
X10 = -923630.2349573893
=======================================
Successfully wrote to the file.
=======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE CRAMER
=======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 3
Masukkan Ordo Matriks Hilbert : 10
=======================================
Matriks bukan persegi
Solusi SPL:
X1 = Tidak ada solusi / Tidak dapat menggunakan metode cramer
=======================================
Successfully wrote to the file.
=======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

4.2 SPL Berbentuk Matrix *Augmented*

a.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

```
METODE ELIMINASI GAUSS
========================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus2a.txt
..\test\studikasus2a.txt
========================================
Solusi SPL:
X1 = -1.0  +d
X2 = 0.0  +2.0*
X3 = 0
X4 = 0
========================================
Successfully wrote to the file.
========================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN
========================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus2a.txt
..\test\studikasus2a.txt
========================================
Solusi SPL:
X1 = -1.0  +d
X2 = 0.0  +2.0*
X3 = 0
X4 = d
========================================
Successfully wrote to the file.
========================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE CRAMER
====================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus2a.txt
..\test\studikasus2a.txt
====================================
Matriks bukan persegi
Solusi SPL:
X1 = Tidak ada solusi / Tidak dapat menggunakan metode cramer
====================================
Successfully wrote to the file.
====================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE MATRIKS BALIKAN
====================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus2a.txt
..\test\studikasus2a.txt
====================================
1.0 -1.0 2.0 -1.0
2.0 1.0 -2.0 -2.0
-1.0 2.0 -4.0 1.0
3.0 0.0 0.0 -3.0
Solusi SPL:
Tidak ada solusi
====================================
Successfully wrote to the file.
====================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

b.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

```
METODE ELIMINASI GAUSS
======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus2b.txt
..\test\studikasus2b.txt
======================================
Solusi SPL:
X1 = 0.0
X2 = 2.0
X3 = 1.0
X4 = 1.0
======================================
Successfully wrote to the file.
======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN
======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus2b.txt
..\test\studikasus2b.txt
======================================
Solusi SPL:
X1 = 0.0
X2 = 2.0
X3 = 1.0
X4 = 1.0
======================================
Successfully wrote to the file.
======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

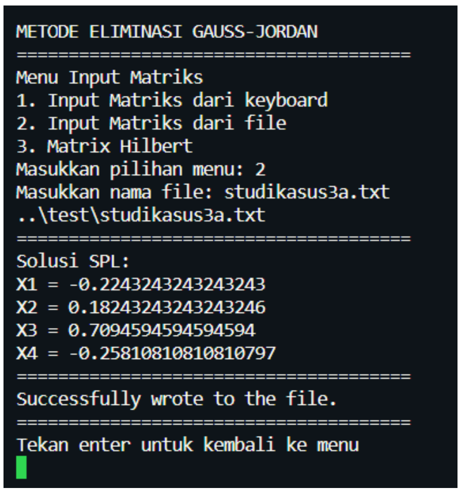
```
METODE CRAMER
======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus2b.txt
..\test\studikasus2b.txt
======================================
Solusi SPL:
X1 = SPL tidak dapat diselesaikan menggunakan metode cramer
======================================
Successfully wrote to the file.
======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE MATRIKS BALIKAN
======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus2b.txt
..\test\studikasus2b.txt
======================================
2.0 0.0 8.0 0.0
0.0 1.0 0.0 4.0
-4.0 0.0 6.0 0.0
0.0 -2.0 0.0 3.0
2.0 0.0 -4.0 0.0
0.0 1.0 0.0 -2.0
Solusi SPL:
Tidak ada solusi
======================================
Successfully wrote to the file.
======================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

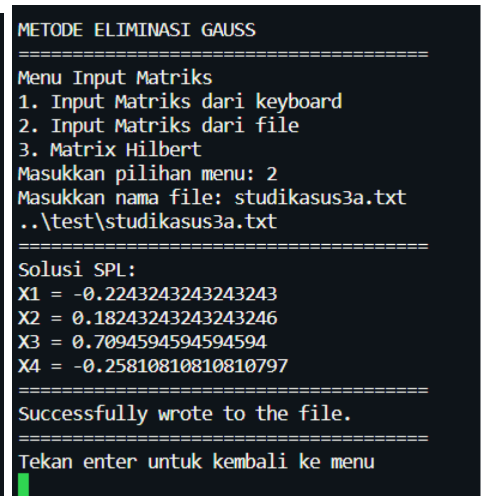
4.3. SPL Berbentuk

a.

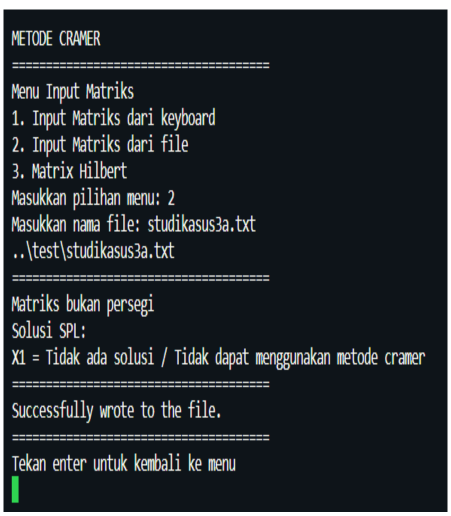
$$
\begin{aligned}
8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\
2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\
x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3
\end{aligned}
$$



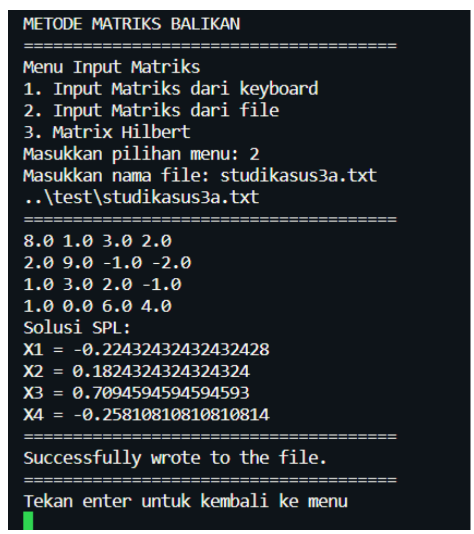
```
METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN
========================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus3a.txt
..\test\studikasus3a.txt
========================================
Solusi SPL:
X1 = -0.2243243243243243
X2 = 0.18243243243243246
X3 = 0.7094594594594594
X4 = -0.25810810810810797
========================================
Successfully wrote to the file.
========================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```



```
METODE ELIMINASI GAUSS
========================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus3a.txt
..\test\studikasus3a.txt
========================================
Solusi SPL:
X1 = -0.2243243243243243
X2 = 0.18243243243243246
X3 = 0.7094594594594594
X4 = -0.25810810810810797
========================================
Successfully wrote to the file.
========================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```



```
METODE CRAMER
========================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus3a.txt
..\test\studikasus3a.txt
========================================
Matriks bukan persegi
Solusi SPL:
X1 = Tidak ada solusi / Tidak dapat menggunakan metode cramer
========================================
Successfully wrote to the file.
========================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```



```
METODE MATRIKS BALIKAN
========================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus3a.txt
..\test\studikasus3a.txt
========================================
8.0 1.0 3.0 2.0
2.0 9.0 -1.0 -2.0
1.0 3.0 2.0 -1.0
1.0 0.0 6.0 4.0
Solusi SPL:
X1 = -0.22432432432432428
X2 = 0.1824324324324324
X3 = 0.7094594594594593
X4 = -0.2581081081081081
========================================
Successfully wrote to the file.
========================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

b.

$$
\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}
$$

```
METODE ELIMINASI GAUSS
=====================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus3b.txt
..\test\studikasus3b.txt
=====================================
Solusi SPL:
Tidak ada solusi
=====================================
Successfully wrote to the file.
=====================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN
=====================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus4b.txt
..\test\studikasus4b.txt
=====================================
Solusi SPL:
Tidak ada solusi
=====================================
Successfully wrote to the file.
=====================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE CRAMER
=====================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus4b.txt
..\test\studikasus4b.txt
=====================================
Solusi SPL:
X1 = SPL tidak dapat diselesaikan menggunakan metode cramer
=====================================
Successfully wrote to the file.
=====================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

```
METODE MATRIKS BALIKAN
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus4b.txt
..\test\studikasus4b.txt
=====================================
6.567
7.0
7.258
7.451
7.548
7.839
8.161
8.484
8.709
9.0
Solusi SPL:
Tidak ada solusi
=====================================
Successfully wrote to the file.
=====================================
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

4.4 Studi Kasus Interpolasi Polinom

a.

Gunakan tabel di bawah ini untuk mencari polinom interpolasi dari pasangan titik-titik yang terdapat dalam tabel. Program menerima masukan nilai *x* yang akan dicari nilai fungsi *f*(*x*).

x	0.4	0.7	0.11	0.14	0.17	0.2	0.23
$f(x)$	0.043	0.005	0. 058	0.072	0.1	0.13	0.147

```
INTERPOLASI POLINOM
=====================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus4a.txt
..\test\studikasus4a.txt
=====================================
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -0.18455901912990136
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 10.276383988581642
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -163.91566260202262
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1220.8548905938487
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 -4346.3139507523465
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 7102.399162436538
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -4212.434531756722
=====================================
Polinom interpolasi:
=====================================
P(x) = -0.18455901912990136 + 10.276383988581642x + -163.91566260202262x^2 + 1220.8548905938487x^3 + -4346.3139507523465x^4 + 7102.399162436538x^5
+ -4212.434531756722x^6
```

```
========================================
Masukkan nilai x: 0.2
F(0.2) = 0.12999999999981954
========================================
```

```
========================================
Masukkan nilai x: 0.55
F(0.55) = 2.137571620839509
========================================
```

```
========================================
Masukkan nilai x: 0.85
F(0.85) = -66.26963931319528
========================================
```

```
========================================
Masukkan nilai x: 1.28
F(1.28) = -3485.144901500389
========================================
```

b.

Jumlah kasus positif baru Covid-19 di Indonesia semakin fluktuatif dari hari ke hari. Di bawah ini diperlihatkan jumlah kasus baru Covid-19 di Indonesia mulai dari tanggal 17 Juni 2022 hingga 31 Agustus 2022:

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2022	6,567	12.624
30/06/2022	7	21.807
08/07/2022	7,258	38.391
14/07/2022	7,451	54.517
17/07/2022	7,548	51.952
26/07/2022	7,839	28.228
05/08/2022	8,161	35.764
15/08/2022	8,484	20.813
22/08/2022	8,709	12.408
31/08/2022	9	10.534

Tanggal (desimal) adalah tanggal yang sudah diolah ke dalam bentuk desimal 3 angka di belakang koma dengan memanfaatkan perhitungan sebagai berikut:

tanggal(desimal) = bulan + (tanggal / jumlah hari pada bulan tersebut)

Sebagai **contoh**, untuk tanggal 17/06/2022 (dibaca: 17 Juni 2022) diperoleh tanggal(desimal) sebagai berikut:

$$\text{Tanggal(desimal)} = 6 + (17/30) = 6{,}567$$

1) 16 / 07 / 2022 => 7.516

```
=======================================
Masukkan nilai x: 7.516
F(7.516) = 53537.99609375
=======================================
```

2) 10 / 08 / 2022 => 8.333

```
=======================================
Masukkan nilai x: 8.333
F(8.333) = 35765.3984375
=======================================
```

3) 05/09/2022 => 9.161

```
=======================================
Masukkan nilai x: 9.161
F(9.161) = -616834.0625
=======================================
```

C.

c. Sederhanakan fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

dengan polinom interpolasi derajat n di dalam selang [0, 2]. Sebagai contoh, jika n = 5, maka titik-titik x yang diambil di dalam selang [0, 2] berjarak h = (2 – 0)/5 = 0.4.

```
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus4c.txt
0.0 -397850.55532317376
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 382303.61938464665
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -292075.24224581383
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 176119.0136936832
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -82707.78771650585
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 29595.735919263243
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 -7790.025668985309
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 1420.9627346188902
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 -160.36575791457287
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 8.43129797831454
======================================
Polinom interpolasi:
======================================
P(x) = 0.0 + 6.418136119533374x + -73.38584381964895x^2 + 599.8729181873864x^3 + -3463.159623366513x^4 + 14613.564243873945x^5 + -46441.95905320527
x^6 + 113683.75448555837x^7 + -217791.23411646648x^8 + 330002.8804181644x^9 + -397850.55532317376x^10 + 382303.61938464665x^11 + -292075.2422458138
3x^12 + 176119.0136936832x^13 + -82707.78771650585x^14 + 29595.735919263243x^15 + -7790.025668985309x^16 + 1420.9627346188902x^17 + -160.3657579145
7287x^18 + 8.43129797831454x^19
======================================
Masukkan nilai x: 1.5
F(1.5) = 0.5808969242789317
======================================
Successfully wrote to the file.
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

4.5 Studi Kasus Interpolasi Bicubic

Diberikan matriks input:

$$\begin{bmatrix} 153 & 59 & 210 & 96 \\ 125 & 161 & 72 & 81 \\ 98 & 101 & 42 & 12 \\ 21 & 51 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

```
INTERPOLASI BICUBIC
======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus4.txt
..\test\studikasus4.txt
======================================
Masukkan x: 0
Masukkan y: 0
f(0.0000, 0.0000) = 161.0000
```

```
INTERPOLASI BICUBIC
======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus4.txt
..\test\studikasus4.txt
======================================
Masukkan x: 0.5
Masukkan y: 0.5
f(0.5000, 0.5000) = 97.7266
```

```
INTERPOLASI BICUBIC
======================================
Menu Input Matriks
INTERPOLASI BICUBIC
======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus4.txt
..\test\studikasus4.txt
======================================
Masukkan x: 0.25
Masukkan y: 0.75
f(0.2500, 0.7500) = 105.5148
```

```
INTERPOLASI BICUBIC
======================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus4.txt
..\test\studikasus4.txt
======================================
Masukkan x: 0.1
Masukkan y: 0.9
f(0.1000, 0.9000) = 104.2291
```

4.6 Studi Kasus Regresi Linear Berganda

5. **Studi Kasus Regresi Linier Berganda**

Diberikan sekumpulan data sesuai pada tabel berikut ini.

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

Gunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* untuk mendapatkan regresi linear berganda dari data pada tabel di atas, kemudian

estimasi nilai Nitrous Oxide apabila Humidity bernilai 50%, temperatur 76°F, dan tekanan udara sebesar 29.30.

Dari data-data tersebut, apabila diterapkan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression*, maka diperoleh sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$20b_0 + 863.1b_1 + 1530.4b_2 + 587.84b_3 = 19.42$$

$$863.1b_0 + 54876.89b_1 + 67000.09b_2 + 25283.395b_3 = 779.477$$

$$1530.4b_0 + 67000.09b_1 + 117912.32b_2 + 44976.867b_3 = 1483.437$$

$$587.84b_0 + 25283.395b_1 + 44976.867b_2 + 17278.5086b_3 = 571.1219$$

```
REGRESI LINEAR BERGANDA
=====================================
Menu Input Matriks
1. Input Matriks dari keyboard
2. Input Matriks dari file
3. Matrix Hilbert
Masukkan pilihan menu: 2
Masukkan nama file: studikasus5.txt
..\test\studikasus5.txt
=====================================
Persamaan regresi:
-0.0015972139124187379 + 0.9084323119049573*x1 - 0.0033358175567213618*x2 + 6.33854295698847E-4*x3 + 0.005379090389969458*x4
=====================================
Masukkan nilai x1: 50
Masukkan nilai x2: 76
Masukkan nilai x3: 29.30
F(50.0, 76.0, 29.3) = 45.1850681778886
=====================================
Successfully wrote to the file.
Tekan enter untuk kembali ke menu
```

BAB V

KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Pada tugas besar ini kami membuat program kalkulator matrix untuk menghitung berbagai operasi dalam bahasa Java. Kalkulator ini dapat menghitung Sistem Persamaan Linier, Determinan, Matrix Inverse, Interpolasi Polinom, Interpolasi Bicubic, serta Regresi Linear Berganda. Sistem Persamaan Linear pada matrix dapat diselesaikan menggunakan metode eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, matrix inverse, serta kaidah cramer. Perhitungan determinan dan inverse matrix dapat diperoleh dengan menggunakan operasi reduksi baris dan metode ekspansi kofaktor. Selain itu, dapat dihasilkan sebuah nilai dari operasi interpolasi polinom, interpolasi bicubic, dan regresi linear berganda.

5.2 Saran

Saran untuk kelompok kami:

1. Mendiskusikan masalah yang harus dipecahkan lebih awal agar penyelesaian lebih terstruktur dan pekerjaan lebih cepat selesai.
2. Memberi komentar pada kode program agar lebih mudah dibaca.
3. Melakukan test case lebih awal agar mengurangi code bug di dekat deadline.
4. Menulis laporan lebih awal agar tidak menumpuk pekerjaan ketika dekat deadline.

5.3 Refleksi

Kami menyadari bahwa masing-masing individu sangatlah berperan pada tugas kelompok ini. Selain itu, pembuatan timeline yang jelas juga sangat penting agar tidak menyelesaikan pekerjaan terlalu mepet dengan deadline. Kami juga mendapat pengalaman untuk membuat program dalam bahasa Java.

DAFTAR REFERENSI

"Sistem Persamaan Linear | Menara Ilmu Aljabar Linear." Accessed October 3, 2022. https://aljabarlinear.mipa.ugm.ac.id/matriks/sistem-persmaan-linear/sistem-persamaan-linear/.

"Sistem Persamaan Linier Penulisan Dalam Bentuk Matriks - Ppt Download." Accessed October 3, 2022. https://slideplayer.info/slide/2481450/.

Informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir. (2021). Algeo #2 Matriks Eselon. Diakses pada 03 Oktober 2022, dari https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-02-Matriks-Eselon.pdf

Informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir. (2021). Algeo #3 Sistem Persamaan Linier (SPL). Diakses pada 03 Oktober 2022, dari https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-03-Sistem-Persamaan-Linier.pdf

Informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir. (2021). Algeo #4 Tiga kemungkinan solusi SPL. Diakses pada 03 Oktober 2022, dari https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-04-Tiga-Kemungkinan-Solusi-SPL.pdf

Informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir. (2021). Algeo #5 Metode Eliminasi Gauss-Jordan. Diakses pada 03 Oktober 2022, dari https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-05-Sistem-Persamaan-Linier-2.pdf

Informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir. (2021). Algeo #8 Determinan (bagian 1). Diakses pada 03 Oktober 2022, dari https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-08-Determinan-bagian1.pdf

Informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir. (2021). Algeo #9Determinan (bagian 2). Diakses pada 03 Oktober 2022, dari https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-09-Determinan-bagian2.pdf

"BiLinear, Bicubic, and In Between Spline Interpolation". Diakses pada 03 Oktober 2022, dari https://www.mssc.mu.edu/~daniel/pubs/RoweTalkMSCS_BiCubic.pdf

"Cara Mencari Determinan Dan Invers Matriks | Matematika Kelas 11." Accessed October 3, 2022. https://www.ruangguru.com/blog/cara-mencari-determinan-dan-invers-matriks.

LINK REPOSITORY

https://github.com/IceTeaXXD/Algeo01-21006