

Jawaban Soal Latihan Rekursi dan Relasi Rekurens

1. Tentukan solusi dari relasi rekurens berikut ini

$$a(n) = 8a(n-1) + 12a(n-2) \text{ untuk } n \geq 2; a(0) = 1; a(1) = 5$$

Jawaban:

Dari relasi rekurens $a(n) = 12a(n-1) + 8a(n-2)$, diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$r^2 - 8r + 12 = 0$$

$$(r - 6)(r - 2) = 0$$

Sehingga diperoleh $r_1 = 6$ dan $r_2 = 2$.

Berdasarkan r_1 dan r_2 yang diperoleh, maka solusi relasi rekurens dinyatakan sebagai berikut.

$$a_n = a_1 r_1^n + a_2 r_2^n$$

$$a_n = a_1(6)^n + a_2(2)^n$$

Dengan memanfaatkan basis rekurens $a(0) = 1$ dan $a(1) = 5$, maka diperoleh

$$a_0 = a_1(6)^0 + a_2(2)^0 = a_1 + a_2 = 1$$

$$a_1 = a_1(6)^1 + a_2(2)^1 = 6a_1 + 2a_2 = 5$$

Dengan menyelesaikan SPL tersebut, diperoleh $a_1 = 3/4$ dan $a_2 = 1/4$

Jadi, solusi dari relasi rekurens di atas adalah

$$a_n = \frac{3}{4} \cdot (6)^n + \frac{1}{4} \cdot (2)^n$$

2. Tentukan solusi dari relasi rekurens berikut ini

$$a(n) - 7a(n-1) + 16a(n-2) - 12a(n-3) = 0 \text{ untuk } n \geq 3; a(0) = 1; a(1) = 4; a(2) = 8$$

Jawaban:

Dari relasi rekurens $a(n) - 7a(n-1) + 16a(n-2) - 12a(n-3) = 0$, diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0$$

$$(r - 2)(r - 2)(r - 3) = 0$$

Sehingga diperoleh $r_1 = 2$ dan $r_2 = 3$.

Karena terdapat dua buah akar kembar dari tiga buah akar r , maka solusi relasi rekurens dinyatakan sebagai berikut.

$$a_n = a_1 r_1^n + a_2 n r_1^n + a_3 r_2^n$$

$$a_n = a_1(2)^n + a_2 n(2)^n + a_3(3)^n$$

Dengan memanfaatkan basis rekurens $a(0) = 1$, $a(1) = 4$, dan $a(2) = 8$, maka diperoleh

$$a_0 = a_1(2)^0 + a_2(0)(2)^0 + a_3(3)^0 = a_1 + a_3 = 1$$

$$a_1 = a_1(2)^1 + a_2(1)(2)^1 + a_3(3)^1 = 2a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 4$$

$$a_2 = a_1(2)^2 + a_2(2)(2)^2 + a_3(3)^2 = 4a_1 + 8a_2 + 9a_3 = 8$$

Dengan menyelesaikan SPL tersebut, diperoleh $a_1 = 5$, $a_2 = 3$, dan $a_3 = -4$.

Jadi, solusi dari relasi rekurens di atas adalah

$$a_n = 5(2)^n + 3n(2)^n - 4(3)^n$$

3. Laju penyebaran suatu virus terus meningkat sehingga banyaknya orang yang tertular bertambah sebesar 20% setiap minggunya. Jika banyaknya orang yang tertular di awal pengamatan adalah 1200 orang. Maka tentukanlah **(Fu)**
 - a. Relasi rekursif P_n yang merepresentasikan banyak orang tertular penyakit pada minggu ke- n
 - b. Solusi dari P_n
 - c. Berapa banyak orang yang tertular pada minggu ke-4? **(Catatan:** gunakan pembulatan ke atas jika dibutuhkan)

Jawaban

$$a. \quad P_n = \begin{cases} 1200, & n = 0 \\ P_{n-1} + 0.2P_{n-1}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b. \quad P_n &= P_{n-1} + 0.2P_{n-1} = 1.2P_{n-1} \\ &= 1.2(1.2P_{n-2}) = (1.2)^2P_{n-2} \\ &= 1.2^2(1.2P_{n-3}) = (1.2)^3P_{n-3} \\ &= \dots (\text{dan seterusnya}) \\ &= 1.2^n P_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } P_4 &= 1.2^4 P_0 \\
 &= 1.2^4 (1200) \\
 &= 2488.32 \\
 &= 2489 \text{ orang}
 \end{aligned}$$

4. Tentukan solusi relasi rekurens $a(n) = 6a(n-1) + 9a(n-2)$ dengan $a(0) = 1$ dan $a(1) = 6$

Jawaban:

Persamaan karakteristik:

$$\begin{aligned}
 r^2 - 6r + 9 &= 0 \\
 (r - 3)(r - 3) &= 0
 \end{aligned}$$

Ditemukan $r_1 = r_2 = 3$

Solusi umum relasi rekursi dengan 2 akar kembar adalah $a_n = c_1 r_1^n + c_2 n r_2^n$

Masukkan r : $a_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n$

Untuk mendapatkan c_1 dan c_2 , substitusikan a_0 dan a_1 :

$$(i) a_0 = 1 = c_1 3^0 + c_2 \cdot 0 \cdot 3^0, \text{ diperoleh } c_1 = 1$$

$$(ii) a_1 = 6 = 1 \cdot 3^1 + c_2 \cdot 1 \cdot 3^1, \text{ diperoleh } c_2 = 1$$

Maka solusi dari relasi rekurensi tersebut adalah $a_n = 3^n + n 3^n$