

Solusi Soal Latihan himpunan (2)

1. Tentukan dual dari kesamaan himpunan berikut:

$$(a) (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A \cup \emptyset$$

$$(b) (A \cap U) \cap (\emptyset \cup \bar{A}) = \emptyset$$

$$(c) A = (\bar{B} \cap A) \cup (A \cap B)$$

Jawaban:

$$(a) (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap U$$

$$(b) (A \cup \emptyset) \cup (U \cap \bar{A}) = U$$

$$(c) A = (\bar{B} \cup A) \cap (A \cup B)$$

2. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan secara aljabar himpunan bahwa

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C).$$

$$\begin{aligned} \text{Jawaban: } A - (B \cup C) &= A \cap \overline{(B \cup C)} && \text{(definisi operasi selisih)} \\ &= A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) && \text{(hukum de Morgan)} \\ &= (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C}) && \text{(hukum distributive)} \\ &= (A - B) \cap (A - C) && \text{(defenisi operasi selisih)} \\ &\text{Terbukti} \end{aligned}$$

3. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan secara aljabar himpunan bahwa

$$(A \cup C) - (B - A) = A \cup (C - B)$$

$$\begin{aligned} \text{Jawaban: } (A \cup C) - (B - A) &= (A \cup C) \cap \overline{B - A} && \text{(defenisi operasi selisih)} \\ &= (A \cup C) \cap \overline{B \cap \bar{A}} && \text{(definisi operasi selisih)} \\ &= (A \cup C) \cap (\bar{B} \cup \bar{\bar{A}}) && \text{(hukum de Morgan)} \\ &= (A \cup C) \cap (\bar{B} \cup A) && \text{(hukum involusi)} \\ &= (A \cup C) \cap (A \cup \bar{B}) && \text{(hukum komutatif)} \\ &= A \cup (C \cup \bar{B}) && \text{(hukum distributive)} \\ &= A \cup (C - B) && \text{(defenisi operasi selisih)} \\ &\text{Terbukti} \end{aligned}$$

4. Tentukan apakah himpunan berikut merupakan partisi dari suatu himpunan:

- (a) Apakah $\{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{4, 6\}\}$ partisi dari $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
- (b) Apakah $\{\{v, w, x\}, \{u, y, q\}, \{p, z\}\}$ partisi dari $\{p, q, u, v, w, x, y, z\}$?
- (c) Apakah $\{\{7, 8\}, \{2, 6\}, \{1, 4\}, \{3, 5, 2\}\}$ partisi dari $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?
- (d) Apakah $\{\{1, 2, 5\}, \{4, 9\}, \{3, 7, 8\}\}$ partisi dari $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?
- (e) Apakah $\{\{1, 2, 6, 3\}, \{5, 7\}, \{4, 8\}\}$ partisi dari $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

Jawaban:

- (a) Bukan, karena $\{1, 4, 5\}$ dan $\{4, 6\}$ beririsan
- (b) Ya, karena tidak ada yang beririsan dan gabungan semua himpunan bagian membentuk $\{p, q, u, v, w, x, y, z\}$
- (c) Bukan, karena $\{2, 6\}$ dan $\{3, 5, 2\}$ beririsan
- (d) Bukan, karena gabungan semua himpunan bagian tidak membentuk $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- (e) Ya, karena tidak ada yang beririsan dan gabungan semua himpunan bagian membentuk $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

5. Jika $n(A - B) = 18$, $n(A \cup B) = 70$ dan $n(A \cap B) = 25$, maka berapa nilai $n(B)$?

Jawaban:

Dengan menggunakan $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

$$70 = 18 + 25 + n(B - A)$$

$$70 = 43 + n(B - A)$$

$$n(B - A) = 70 - 43$$

$$n(B - A) = 27$$

Maka,

$$n(B) = n(A \cap B) + n(B - A)$$

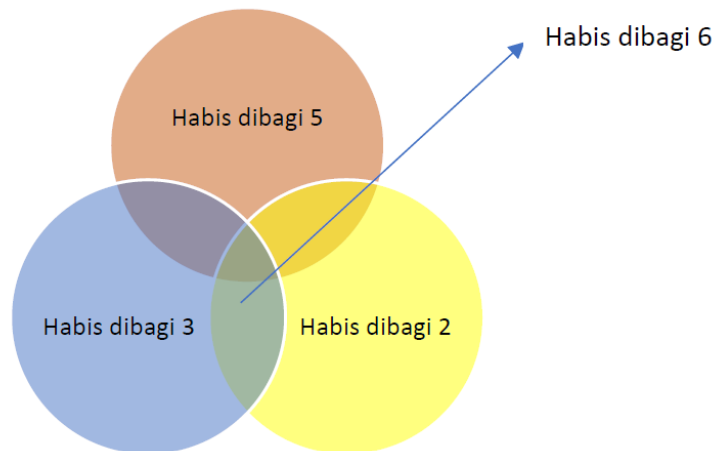
$$= 25 + 27$$

$$= 52$$

6. Tentukan banyaknya bilangan antara 1 – 1000 (inklusif) yang habis dibagi 2, 3, 5, atau 6.

Jawaban:

Diagram Venn yang terbentuk dari himpunan bilangan-bilangan yang habis dibagi 2, 3, 5, atau 6 adalah sebagai berikut.



Karena bilangan yang habis dibagi 6 seluruhnya merupakan irisan antara bilangan yang habis dibagi 2 dan bilangan yang habis dibagi 3, maka soal di atas sama saja dengan mencari bilangan yang habis dibagi 2, 3, atau 5. Sehingga terlebih dahulu kita cari jumlah bilangan yang habis dibagi 2, habis dibagi 3, dan habis dibagi 5.

Misalkan A , B , dan C masing-masing himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 2, 3, dan 5.

Maka

$$\begin{aligned}n(A) &= \lfloor 1000/2 \rfloor = 500, \\n(B) &= \lfloor 1000/3 \rfloor = 333, \\n(C) &= \lfloor 1000/5 \rfloor = 200, \\n(A \cap B) &= \lfloor 1000/6 \rfloor = 166, \\n(A \cap C) &= \lfloor 1000/10 \rfloor = 100, \\n(B \cap C) &= \lfloor 1000/15 \rfloor = 66, \\n(A \cap B \cap C) &= \lfloor 1000/30 \rfloor = 33.\end{aligned}$$

Sehingga, banyak bilangan bulat yang habis dibagi oleh 2, 3, atau 5 adalah

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\&= 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734 \text{ buah}\end{aligned}$$

7. Pada range bilangan 51..500, tentukan banyaknya bilangan yang habis dibagi 2 atau 3 atau 5

Jawaban:

Misal A adalah himpunan bilangan yang habis dibagi 2 dan B adalah himpunan bilangan yang habis dibagi 3 dan C adalah himpunan bilangan yang habis dibagi 6

$$|A| = \lfloor 500/2 \rfloor - \lfloor 50/2 \rfloor = 250 - 25 = 225$$

$$|B| = \lfloor 500/3 \rfloor - \lfloor 50/3 \rfloor = 166 - 16 = 150$$

$$|C| = \lfloor 500/5 \rfloor - \lfloor 50/5 \rfloor = 100 - 10 = 90$$

Solusi yang dicari adalah

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Untuk mencari solusi tersebut, perlu dicari hal-hal berikut

$$|A \cap B| = \lfloor 500/6 \rfloor - \lfloor 50/6 \rfloor = 83 - 8 = 75$$

$$|B \cap C| = \lfloor 500/15 \rfloor - \lfloor 50/15 \rfloor = 33 - 3 = 30$$

$$|A \cap C| = \lfloor 500/10 \rfloor - \lfloor 50/10 \rfloor = 50 - 5 = 45$$

$$|A \cap B \cap C| = \lfloor 500/30 \rfloor - \lfloor 50/30 \rfloor = 16 - 1 = 15$$

Maka, solusinya adalah

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 225 + 150 + 90 - 75 - 30 - 45 + 15 \\ &= 310 \end{aligned}$$

8. Tiap hari minggu dan hari ke-10 mulai hari ini, ayah diturut ke kota oleh saya (naik delman istimewa), namun mulai hari ini, tiap hari ke-6 ayah harus istirahat di rumah dan tidak bisa berkegiatan (waktu istirahat tidak akan bisa ke kota), andaikata saya hari ini terbangun melihat di kalender bahwa hari ini hari senin, dalam 500 hari kedepan berapa kali ayah akan diturut oleh saya ke kota?

Penyelesaian

Misalkan:

A = himpunan hari minggu mulai hari ini (kelipatan 7)

B = himpunan hari ke-10 mulai hari ini (kelipatan 10)

C = himpunan hari ke-6 mulai hari ini (kelipatan 6)

$$|U| = 500$$

$$|A| = \lfloor 500 / 7 \rfloor = 71$$

$$|B| = \lfloor 500 / 10 \rfloor = 50$$

$$|A \cap B| = \lfloor 500 / 70 \rfloor = 7$$

$$|A \cap C| = \lfloor 500 / 42 \rfloor = 11$$

$$|B \cap C| = \lfloor 500 / 30 \rfloor = 16$$

$$|A \cap B \cap C| = \lfloor 500 / 210 \rfloor = 2$$

Yang ditanyakan : $| (A \cup B) - (C) | = ?$