Seri bahan kuliah Algeo #1

Review Matriks

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sumber:

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra*

Notasi

- Matriks berukuran m x n (m baris dan n kolom):

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jika m = n maka dinamakan matriks persegi (*square matrix*) orde n

- Contoh matriks A berukuran 3 x 4:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 8 & -12 \\ 13 & 11 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Diagonal utama matriks persegi berukuran n x n:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Penjumlahan Matriks

- Penjumlahan dua buah matriks $C_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n}$

  Misal $A = [a_{ij}]$

  $B = [b_{ij}]$

  maka $C = A + B = [c_{ij}]$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$

- Pengurangan matriks: $C = A - B = [c_{ij}]$, $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$

- Algoritma penjumlahan dua buah matriks:

```
for i←1 to m do
    for j←1 to n do
        cij ← aij +bij
    end for
end for
```

- Contoh:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 2 & 4\\ 4 & -2 & 7 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-4 & 3 & 5 & 1\\ 2 & 2 & 0 & -1\\ 3 & 2 & -4 & 5\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

- Maka,

$$A+B=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 5 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 3\\ 7 & 0 & 3 & 5\end{bmatrix},\quad A-B=\begin{bmatrix}6 & -2 & -5 & 2\\ -3 & -2 & 2 & 5\\ 1 & -4 & 11 & -5\end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks

- Perkalian dua buah matriks $C_{m \times n} = A_{m \times r} \times B_{r \times n}$

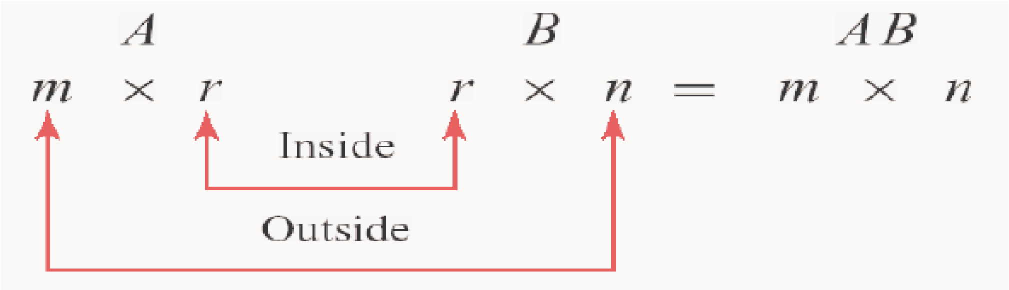
  Misal $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$

  maka $C = A \times B = [c_{ij}]$, $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

  syarat: jumlah kolom A sama dengan jumlah baris B

- Algoritma perkalian dua buah matriks $C_{m \times n} = A_{m \times r} \times B_{r \times n}$

```
for i←1 to m do
    for j←1 to n do
        cij ← 0
        for k←1 to r do
            cij ← cij + aik * bkj
        end for
    end for
end for
```



- Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

maka

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks dengan Skalar

- Misal $A = [a_{ij}]$ dan c adalah skalar

  maka

  $$cA = [ca_{ij}] \quad , i = 1, 2, ..., m; \; j = 1, 2, ..., n$$

- Contoh: Misakan $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

  maka $2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\text{-}1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

  dan $2A - B + \frac{1}{3}C = 2A + (-1)B + \frac{1}{3}C$ ← Kombinasi linier A, B, dan C dengan koefisisien 2, -1, dan 1/3

  $$= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

Kombinasi Linier Matriks

- Perkalian matriks dapat dipandang sebagai kombinasi linier
- Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

maka

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Contoh: perkalian matriks

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

dapat ditulis sebagai kombinasi linier

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

- Contoh lain: perkalian matriks

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transpose Matriks

- Transpose matriks, $B = A^T$

  $b_{ji} = a_{ij}$ $\quad i = 1, 2, \ldots m;\ j = 1, 2, \ldots n$

- Algoritma transpose matriks:

```
for i←1 to m do
    for j←1 to n do
        b_ji ← a_ij
    end for
end for
```

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}, \qquad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad D^T = [4]$$

- Untuk matriks persegi A berukuran n x n, transpose matriks A dapat diperoleh dengan mempertukarkan elemen yang simetri dengan diagonal utama:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- Sifat-sifat transpose matriks

(a) $\left(A^T\right)^T = A$

(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(c) $(A-B)^T = A^T - B^T$

(d) $(kA)^T = kA^T$

(e) $(AB)^T = B^T A^T$

Trace sebuah Matriks

- Jika A adalah matriks persegi, maka *trace* matriks A adalah jumlah semua elemen pada diagonal utama, disimbolkan dengan tr(A)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \qquad \operatorname{tr}(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$$

- Jika A bukan matriks persegi, maka tr(A) tidak terdefinisi

Sifat-sifat Operasi Aritmetika Matriks

(a) $A + B = B + A$ (Commutative law for addition)

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Associative law for addition)

(c) $A(BC) = (AB)C$ (Associative law for multiplication)

(d) $A(B + C) = AB + AC$ (Left distributive law)

(e) $(B + C)A = BA + CA$ (Right distributive law)

(f) $A(B - C) = AB - AC$

(g) $(B - C)A = BA - CA$

(h) $a(B + C) = aB + aC$

(i) $a(B - C) = aB - aC$

(j) $(a + b)C = aC + bC$

(k) $(a - b)C = aC - bC$

(l) $a(bC) = (ab)C$

(m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Matriks Nol

- Matriks nol: matriks yang seluruh elemennya bernilai nol

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [0]$$

- Matriks nol dilambangkan dengan *0*
- Sifat-sifat matriks nol:

(a) $A + 0 = 0 + A = A$

(b) $A - 0 = A$

(c) $A - A = A + (-A) = 0$

(d) $0A = 0$

(e) If $cA = 0$, then $c = 0$ or $A = 0$.

Matriks Identitas

- Matriks identitas: matriks persegi yang semua elemen bernilai 1 pada diagonal utamanya dan bernilai 0 pada posisi lainnya.

$$[1], \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriks identitas disimbolkan dengan I

- Perkalian matriks identitas dengan sembarang matriks menghasilkan matriks itu sendiri:

$$AI = IA = A$$

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

Matriks Balikan

- Matriks balikan (*inverse*) dari sebuah matriks A adalah matriks B sedemikian sehingga

  AB = BA = I

- Kita katakan A dan B merupakan balikan matriks satu sama lain

- Contoh: Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

  maka $AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

  $BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

- Balikan matriks A disimbolkan dengan A^{-1}

- Sifat: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

- Untuk matriks A berukuran 2 x 2, maka A^{-1} dihitung sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

dengan syarat $ad - bc \neq 0$

- Nilai $ad - bc$ disebut *determinan*. Jika ad – bc = 0 maka matriks A tidak memiliki balikan (*not invertible*)

- Contoh:

$$A=\begin{bmatrix}6 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & -\frac{1}{7}\\ -\frac{5}{7} & \frac{6}{7}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -6\end{bmatrix} \longrightarrow$$ Tidak memiliki balikan, sebab (-1)(-6) – (3)(2) = 0

Seri bahan kuliah Algeo #2

Matriks Eselon

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sumber:

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra*

Matriks Eselon Baris

- Matriks eselon baris (*row echelon form*) adalah matriks yang memiliki **1 utama** pada setiap baris, kecuali baris yang seluruhnya nol.

- Berbentuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{dst}$$

Keterangan: * adalah sembarang nilai

Sifat-sifat matriks eselon baris:

1. Jika sebuah baris tidak terdiri dari selurunya nol, maka bilangan tidak nol pertama di dalam baris tersebut adalah 1 (disebut **1 utama**)
2. Jika ada baris yang seluruhnya nol, maka semua baris itu dikumpulkan pada bagian bawah matriks.
3. Di dalam dua baris berturutan yang tidak seluruhnya nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan daripada 1 utama pada baris yang lebih tinggi.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

- Contoh-contoh matriks eselon baris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Bukan matriks eselon baris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Ciri-ciri matriks eselon baris: memiliki nol-nol di bawah 1 utama

Matriks Eselon Baris Tereduksi

- Matriks eselon baris tereduksi (*reduce row echelon*) berbentuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dst}$$

- Ciri-ciri: memiliki nol-nol di bawah dan di atas 1 utama

Sifat-sifat matriks eselon baris tereduksi:

$$\left.\begin{array}{l}1.\\ 2.\\ 3.\end{array}\right\}\text{sama dengan sifat matriks eselon}$$

4. Setiap kolom yang memiliki 1 utama memiliki nol di tempat lain.

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0&*\\0&1&0&*\\0&0&1&*\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&*&*\\0&1&*&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&*&0&0&0&*&*&0&*\\0&0&0&1&0&0&*&*&0&*\\0&0&0&0&1&0&*&*&0&*\\0&0&0&0&0&1&*&*&0&*\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&*\end{bmatrix}$$

- Contoh-contoh matriks eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Bukan matriks eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Latihan 1

1. Dari sejumlah matriks di bawah ini, tentukan mana yang matriks eselon baris, eselon baris tereduksi, keduanya, atau bukan sama sekali.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Jawaban:

(a) Keduanya (eselon baris dan eselon baris tereduksi)

(b) Keduanya

(c) Keduanya

(d) Keduanya

(e) Keduanya

(f) Keduanya

(g) Matriks eselon baris

Latihan 2

1. Dari sejumlah matriks di bawah ini, tentukan mana yang matriks eselon baris, eselon baris tereduksi, keduanya, atau bukan sama sekali.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Seri bahan kuliah Algeo #3

Sistem Persamaan Linier (SPL)

Bahan Kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Bentuk umum SPL

- Linier: pangkat tertinggi di dalam variabelnya sama dengan 1
- Sebuah SPL dengan *m* buah persamaan dan *n* variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ berbentuk:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

atau dalam bentuk $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

- SPL dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

atau dalam bentuk perkalian matriks:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Matriks *augmented*

- SPL dapat dinyatakan secara ringkas dalam bentuk matriks *augmented*:

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

- Contoh:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -2 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 9 \\ 2 & -6 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer (OBE)

- Tiga operasi baris elementer terhadap matriks *augmented*:
  1. Kalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol.
  2. Pertukarkan dua buah baris
  3. Tambahkan sebuah baris dengan kelipatan baris lainnya

- Solusi sebuah SPL diperoleh dengan menerapkan OBE pada matriks augmented sampai terbentuk matriks eselon baris atau matriks eselon baris tereduksi.

- Jika berakhir pada matriks eselon baris → metode eliminasi Gauss

  Jika berakhir pada matriks eselon baris tereduksi → metode eliminasi Gauss-Jordan

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Wilhelm Jordan (1842–1899)

Historical Note Although versions of Gaussian elimination were known much earlier, the power of the method was not recognized until the great German mathematician Carl Friedrich Gauss used it to compute the orbit of the asteroid Ceres from limited data. What happened was this: On January 1, 1801 the Sicilian astronomer Giuseppe Piazzi (1746–1826) noticed a dim celestial object that he believed might be a “missing planet.” He named the object Ceres and made a limited number of positional observations but then lost the object as it neared the Sun. Gauss undertook the problem of computing the orbit from the limited data using least squares and the procedure that we now call Gaussian elimination. The work of Gauss caused a sensation when Ceres reappeared a year later in the constellation Virgo at almost the precise position that Gauss predicted! The method was further popularized by the German engineer Wilhelm Jordan in his handbook on geodesy (the science of measuring Earth shapes) entitled *Handbuch der Vermessungskunde* and published in 1888.

[*Images: Granger Collection (Gauss); wikipedia (Jordan)*]

Metode Eliminasi Gauss

1. Nyatakan SPL dalam bentuk matriks *augmented*
2. Terapkan OBE pada matriks *augmented* sampai terbentuk matriks eselon baris

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} \sim\text{OBE}\sim \begin{bmatrix} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

3. Pecahkan persamaan yang berkoresponden pada matriks eselon baris dengan teknik penyulihan mundur (*backward substitution*)

Contoh 1: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$
$$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3$$
$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R1/2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{R3+2R1}{\overset{R2-4R1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R2/(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix} \overset{R3-6R2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix} \overset{R3/(-5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks eselon baris

Keterangan: R1 = baris ke-1, Rn = baris ke-n

Dari matriks *augmented* terakhir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

diperoleh persamaan-persamaan linier sbb:

$x_1 + 3/2x_2 - 1/2x_3 = 5/2$ (i)

$x_2 + 1/2x_3 = 7/2$ (ii)

$x_3 = 3$ (iii)

Selesaikan dengan teknik penyulihan mundur sbb:

(iii) $x_3 = 3$

(ii) $x_2 + 1/2x_3 = 7/2 \rightarrow x_2 = 7/2 - 1/2(3) = 2$

(i) $x_1 + 3/2x_2 - 1/2x_3 = 5/2 \rightarrow x_1 = 5/2 - 3/2\,(2) - 1/2\,(3) = 1$

Solusi: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

Contoh 2: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\
2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 10 \\
3x_1 - x_2 + 6x_3 &= 15
\end{aligned}
$$

Penyelesaian:

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 & 10 \\ 3 & -1 & 6 & 15 \end{bmatrix}
\underset{R3 - 3R1}{\overset{R2 - 2R1}{\sim}}
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\;\; R3/2 \;\;
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Dari matriks *augmented* yang terakhir diperoleh persamaan sbb:

$x_2 = 0$

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$ → $x_1 = 5 + x_2 - 2x_3 = 5 + 0 - 2x_3 = 5 - 2x_3$ → banyak nilai x_3 yang memenuhi

Misalkan $x_3 = r$ maka $x_1 = 5 - 2r$, $r \in R$

Solusi: $x_1 = 5 - 2r$, $x_2 = 0$, $x_3 = r$; $r \in R$ → solusi dalam bentuk parametrik

Contoh 3: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad\quad + 2x_5 \quad\quad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 \quad\quad + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 \quad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix} \sim \overset{\text{OBE}}{\cdots} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks augmented yang terakhir diperoleh tiga persamaan sbb:

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 1 \qquad \text{(ii)}$$

$$x_6 = 1/3 \qquad \text{(iii)}$$

Selesaikan dengan teknik penyulihan mundur sbb:

(iii) $x_6 = 1/3$

(ii) $x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 1 \rightarrow x_3 = 1 - 2x_4 - 3x_6$

$$= 1 - 2x_4 - 3(1/3)$$

$$= 1 - 2x_4 - 1$$

$$= -2x_4$$

(i) $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \rightarrow x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$

$$= -3x_2 + 2(-2x_4) - 2x_5$$

$$= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$$

Misalkan $x_2 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$, dengan $r, s, t \in R$, maka solusi SPL adalah:

$x_1 = -3r - 4s - 2t$; $x_2 = r$; $x_3 = -2s$; $x_4 = s$; $x_5 = t$; $x_6 = 1/3$

dengan $r, s, t \in R$

Contoh 4: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss

$$
\begin{aligned}
x_1 + \quad x_2 + x_3 &= 1 \\
2x_1 + 2x_2 \quad\quad &= 2 \\
3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

Penyelesaian:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\overset{R2 - 2R1}{\underset{R3 - 3R1}{\sim}}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}
\overset{R2/(-2)}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}
\overset{R3 + 2R2}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

Dari matriks augmented yang terakhir diperoleh persamaan-persamaan linier sbb:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \qquad \text{(i)} \\
x_2 + x_3 &= 0 \qquad \text{(ii)} \\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= -1 \quad \text{(iii)}
\end{aligned}
$$

Dari persamaan (iii), tidak ada x_1, x_2, dan x_3 yang memenuhi $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$.
Dengan kata lain, SPL tersebut tidak memiliki solusi!

Contoh 5: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss

$$-2b + 3c = 1$$
$$3a + 6b - 3c = -2$$
$$6a + 6b + 3c = 5$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \overset{R1 \leftrightarrow R2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \overset{R1/(3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \overset{R3 - 6R1}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{bmatrix} \overset{R2/(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{bmatrix} \overset{R3 + 6R2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Dari matriks *augmented* yang terakhir, persamaan pada baris ketiga adalah:

$$0a + 0b + 0c = 6$$

Tidak ada a, b, dan c yang memenuhi $0a + 0b + 0c_3 = 6$. Dengan kata lain, SPL tersebut tidak memiliki solusi!

Latihan

Selesaikan SPL berikut dengan metode eliminasi Gauss-Jordan

(a)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

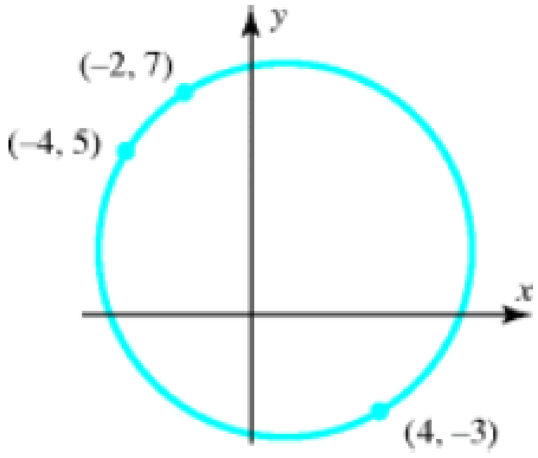
(b)
$$\begin{aligned} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 &= 9 \\ I_1 \qquad - 2I_3 + 7I_4 &= 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 &= 8 \\ 2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I_4 &= 10 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x \qquad\qquad - 3w &= -3 \end{aligned}$$

(d) SPL dalam bentuk matriks augmented

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(e) Carilah koefisien a, b, c, dan d yang memenuhi persamaan lingkaran $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d=0$



Seri bahan kuliah Algeo #4

Sistem Persamaan Linier (SPL)

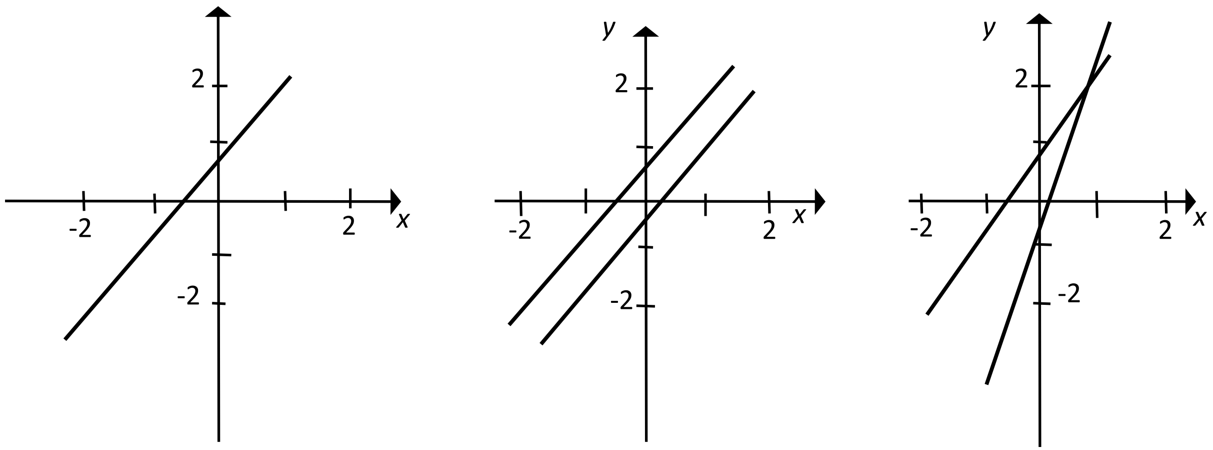
Pokok bahasan: Tiga kemungkinan solusi SPL

Bahan Kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Kemungkinan Solusi SPL

- Ada tiga kemungkinan solusi yang dapat terjadi pada SPL:
  - a. mempunyai solusi yang unik (tunggal),
  - b. mempunyai banyak solusi (tidak berhingga), atau
  - c. tidak ada solusi sama sekali.
- Untuk SPL dengan dua persamaan linier:

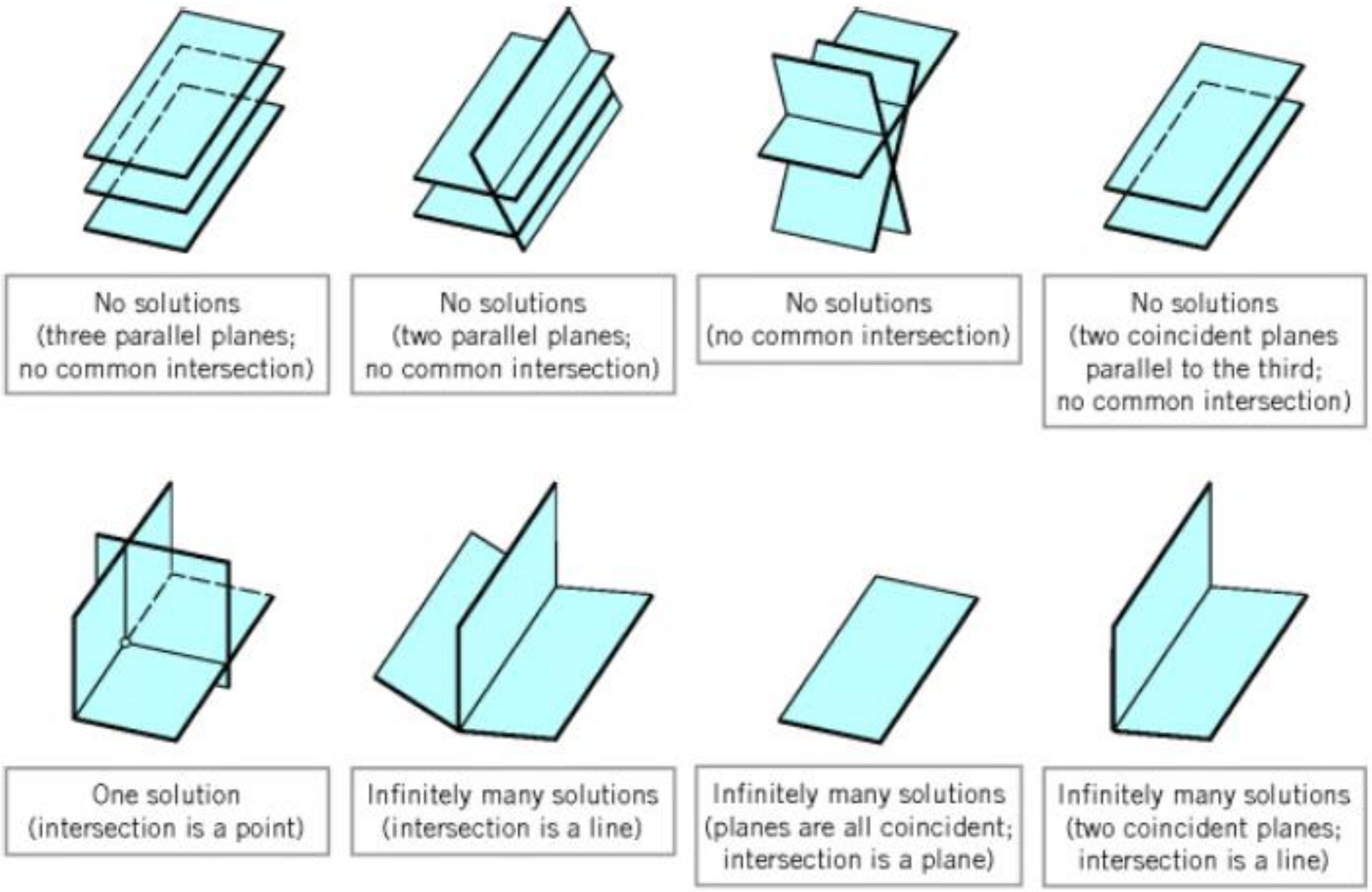


(a) Solusi banyak
$-x + y = 1$
$-2x + 2y = 2$

(b) Solusi tidak ada
$-x + y = 1$
$-x + y = 0$

(c) Solusi unik
$-x + y = 1$
$2x - y = 0$

• Untuk SPL dengan tiga persamaan dan tiga peubah (variable):



Sumber gambar: Howard Anton

1. **Solusi unik/tunggal**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Solusi: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$

2. Solusi banyak/tidak terhingga

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

yang dipenuhi oleh banyak nilai x. Solusinya diberikan dalam bentuk parameter:

Misalkan $x_3 = k$,
maka $x_2 = 2 - k$ dan $x_1 = 4 - x_2 - 2x_3 = 4 - (2 - k) - 2k = 2 - k$,
dengan $k \in R$. Terdapat tidak berhingga nilai k.

3. Tidak ada solusi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{Eliminasi}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

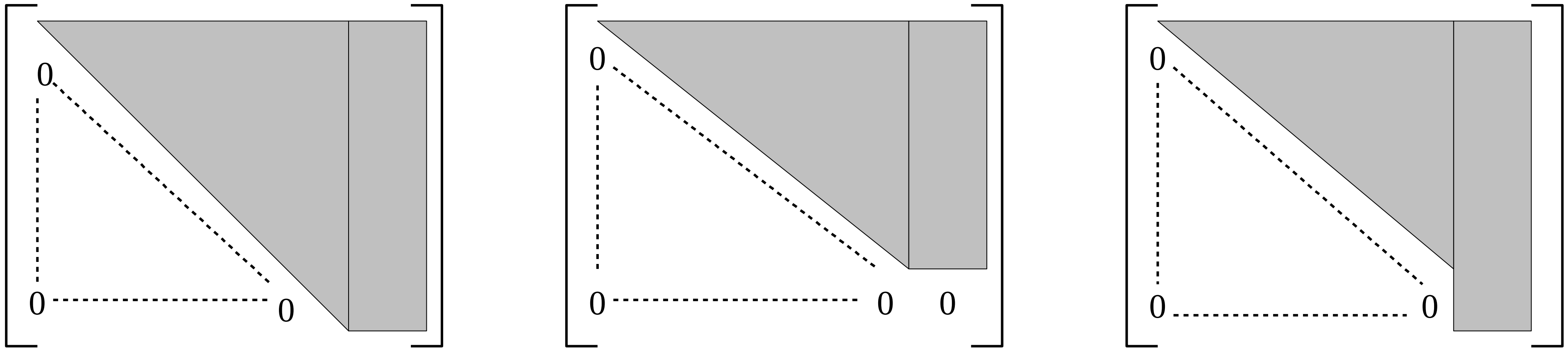
$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

yang dalam hal ini, tidak nilai x_i yang memenuhi, $i = 1, 2, 3$

- Untuk SPL dengan lebih dari tiga persamaan linier, tidak terdapat tafsiran geometrinya seperti pada SPL dengan dua atau tiga buah persamaan.

- Namun, kita masih dapat memeriksa masing-masing kemungkinan solusi itu berdasarkan pada bentuk matriks akhirnya.

- Bentuk akhir matriks setelah eliminasi Gauss untuk ketiga kemungkinan solusi di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Solusi unik   Solusi banyak   Tidak ada solusi

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Seri bahan kuliah Algeo #5

Sistem Persamaan Linier (SPL)

Pokok bahasan: Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Bahan Kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Metode Eliminasi Gauss-Jordan

- Merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss
- Operasi baris elementer (OBE) diterapkan pada matriks *augmented* sehingga menghasilkan matriks eselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \sim \text{OBE} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

- Tidak diperlukan lagi substitusi secara mundur untuk memperoleh nilai-nilai variabel. Nilai variabel langsung diperoleh dari matriks *augmented* akhir.

- Metode eliminasi Gauss-Jordan terdiri dari dua fase:

  1. Fase maju (*forward phase*) atau fase eliminasi Gauss

     - Menghasilkan nilai-nilai 0 di bawah 1 utama

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \overset{\text{OBE}}{\dots} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

  2. Fase mundur (*backward phase*)

     - Menghasilkan nilai-nilai 0 di atas satu utama

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{R1-(3/2)R2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/4 & -11/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{R2-(1/2)R3}{\overset{R1+(5/4)R3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks eselon baris tereduksi

Dari matriks *augmented* terakhir, diperoleh $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

Contoh 1: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \\
2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -2 \\
-x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\
3x_1 \qquad\qquad\qquad - 3x_4 &= -3
\end{aligned}
$$

Penyelesaian:

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}
\underset{\substack{R3+R1 \\ R4-3R1}}{\overset{R2-2R1}{\sim}}
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\overset{R2/3}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\underset{R4-3R2}{\overset{R3-R2}{\sim}}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\overset{R1+R2}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Matriks eselon baris tereduksi

Persamaan yang diperoleh:

$x_1 - x_4 = -1$ (i)

$x_2 - 2x_3 = 0$ (ii)

Matriks *augmented* terakhir sudah berbentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan yang diperoleh:

$x_1 – x_4 = -1$ (i)

$x_2 – 2x_3 = 0$ (ii)

Dari (ii) diperoleh:

$x_2 = 2x_3$

Dari (i) diperoleh:

$x_1 = x_4 – 1$

Misalkan $x_3 = r$ dan $x_4 = s$, maka solusi SPL tersebut adalah:

$x_1 = s – 1$, $x_2 = 2r$, $x_3 = r$, $x_4 = s$, yang dalam hal ini $r,s \in R$

Contoh 2: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$
\begin{aligned}
-2x_3 \qquad\quad + 7x_5 &= 12 \\
2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 &= 28 \\
2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 8x_4 - 5x_5 &= -1
\end{aligned}
$$

Penyelesaian:

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}
\overset{R1 \leftrightarrow R2}{\sim}
\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}
\overset{R1/2}{\sim}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}
\overset{R3\ -\ 2R1}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}
\overset{R2/(-2)}{\sim}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \overset{R3\ -\ 5R2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \overset{R3/(1/2)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{R2\ +\ 7/2\ R3}{\overset{R1\ -\ 6R3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{R1\ +\ 5R2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks eselon baris tereduksi

Dari matriks augmented yang terakhir diperoleh persamaan:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 7 \qquad \text{(i)}$$

$$x_3 = 1 \qquad \text{(ii)}$$

$$x_5 = 2 \qquad \text{(iii)}$$

Misalkan $x_2 = s$ dan $x_4 = t$, maka solusi SPL adalah:

$x_1 = 7 - 2s - 3t$, $x_2 = s$, $x_3 = 1$, $x_4 = t$, $x_5 = 2$, s dan $t \in R$

Sistem Persamaan Linier Homogen

- Sistem persamaan linier homogen berbentuk:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0
\end{array}
$$

- $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ selalu menjadi solusi SPL homogen. Jika ini merupakan satu-satunya solusi, solusi nol ini disebut solusi trivial.
- Jika ada solusi lain selain $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, maka solusi tersebut dinamakan solusi non-trivial.

Contoh 3: Selesaikan SPL homogen dengan matriks augmented sebagai berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{R1 \leftrightarrow R2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \underset{R4+2R1}{\overset{R3-2R1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R2/2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \underset{R4-R2}{\overset{R3-3R2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{R2-2R3 \\ R4+10R3}}{\overset{R1+3R3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks *augmented* yang terakhir sudah dalam bentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan-persamaan berikut:

$x_1 - x_3 = 0 \rightarrow x_1 = x_3$

$x_2 + x_3 = 0 \rightarrow x_2 = -x_3$

$x_4 = 0$

Misalkan $x_3 = t$, maka solusi SPL adalah $x_1 = t$, $x_2 = -t$, $x_3 = t$, $x_4 = 0$, $t \in R$.
Perhatikan bahwa untuk $t = 0$, maka $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Namun ini bukan satu-satunya solusi. Untuk t selain 0 terdapat banyak kemungkinan solusi SPL. Sehingga dikatakan SPL homogen ini memiliki solusi non-trivial.

- Di dalam sebuah SPL sembarang A**x** = **b**, sebuah SPL disebut konsisten jika ia mempunyai paling sedikit satu solusi (baik solusi tunggal atau solusi banyak).
- Sebaliknya, sebuah SPL disebut inkonsisten jika ia tidak memiliki solusi.

- SPL homogen A**x** = **0** selalu konsisten karena ia sedikitnya mengandung solusi trivial.
- Jadi, di dalam SPL homogen berlaku salah satu sifat sebagai berikut:

   1. SPL homogen memiliki solusi trivial
   2. SPL homogen memiliki tak berhingga solusi

Menghitung Matriks Balikan dengan Eliminasi Gauss-Jordan

- Misalkan *A* adalah matriks persegi berukuran n x n. Balikan (*inverse*) matriks A adalah A^{-1} sedemikian sehingga $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
- Metode eliminasi Gauss-Jordan (G-J) dapat digunakan untuk menghitung matriks balikan.
- Untuk matriks A yang berukuran n x n, matriks balikannya, yaitu A^{-1} dicari dengan cara berikut:

$$[A|I] \overset{\text{G-J}}{\sim} [I|A^{-1}]$$

yang dalam hal ini *I* adalah matriks identitas berukuran n x n.

- Metode eliminasi Gauss-Jordan diterapkan secara simultan untuk A maupun I.

Contoh 4: Tentukan balikan dari matriks A berikut: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R3-R1}{\overset{R2-2R1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R3+2R2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{R3/(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \overset{R1-2R2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{R2+3R3}{\overset{R1-9R3}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

Jadi, balikan matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Periksa bahwa

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Contoh 5: Tentukan balikan dari matriks A berikut: $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R3 + R1}{\overset{R2 - 2R1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R2/(-8)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9/8 & 2/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R3 - 8R2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9/8 & 2/8 & -1/8 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ada baris bernilai 0

Karena ada baris yang bernilai 0, maka A tidak memiliki balikan.

- Jika A tidak memiliki balikan, maka A dikatakan matriks singular.
- Pada SPL A**x** = **b**, jika A tidak mempunyai balikan, maka A**x** = **b** tidak memiliki solusi yang tunggal (unik).
- Namun, jika A mempunyai balikan, maka SPL A**x** = **b** memiliki solusi unik.
- Pada SPL homogen A**x** = **0**, SPL hanya memiliki solusi trivial jika A memiliki balikan. Jika A tidak memiliki balikan, maka SPL memiliki solusi non-trivial.

Contoh 6: SPL homogen berikut memiliki solusi trivial (artinya solusinya hanyalah $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$).

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriks A SPL di atas sudah dihitung pada Contoh 4 memiliki balikan.

Tetapi SPL homogen berikut memiliki solusi non-trivial (artinya, ada solusi lain selain $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$)

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad A^{-1} \text{ tidak ada}$$

Matriks A SPL di atas sudah dihitung pada Contoh 5 tidak memiliki balikan.

Penyelesaian SPL dengan menggunakan matriks balikan

- Tinjau SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Kalikan kedua ruas persamaan dengan A^{-1}

$$(A^{-1})A\mathbf{x} = (A^{-1})\,\mathbf{b}$$

$$I\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b} \qquad \text{(karena } A^{-1}A = I\text{)}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b} \qquad \text{(karena } I\mathbf{x} = \mathbf{x}\text{)}$$

- Jadi, solusi SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah x $=A^{-1}\,\mathbf{b}$

Contoh 7. Selesaikan SPL berikut

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 8x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ sudah dihitung balikannya pada Contoh 4 yaitu $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

maka

$$\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Metode penyelesaian SPL dengan menggunakan matriks balikan sangat berguna untuk menyelesaikan <u>sejumlah</u> SPL A**x** = **b** dengan A yang sama tetapi dengan **b** yang berbeda-beda, seperti contoh ini:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 12 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(i) (ii) (iii)

- Tiga buah SPL di atas memiliki A yang sama namun **b** yang berbeda-beda. Cukup sekali mencari A^{-1} maka solusi setiap SPL dapat dihitung dengan cara mengalikan A^{-1} dengan setiap **b**, yaitu x $= A^{-1}$ **b** .

Latihan

1. Selesaikan SPL berikut dengan metode eliminasi Gauss-Jordan

(a)

$$
\begin{aligned}
x - y + 2z - w &= -1 \\
2x + y - 2z - 2w &= -2 \\
-x + 2y - 4z + w &= 1 \\
3x \qquad\qquad - 3w &= -3
\end{aligned}
$$

(b) SPL dalam bentuk matriks augmented

$$
: \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}
$$

2. Tentukan balikan matriks berikut (jika ada)

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(d)

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

Catatan: k1, k2, k3, dan k4 tidak sama dengan nol

Seri bahan kuliah Algeo #8

Determinan
(bagian 1)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Definisi determinan

- Misalkan A adalah matriks berukuran n x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Determinan matriks A dilambangkan dengan

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinan matriks 2 x 2

Untuk matriks A berukuran 2 x 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

maka det(A) = $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Contoh 1: Matriks A berikut $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ memiliki determinan

det(A) = (3)(4) – (2)(-1) = 12 + 2 = 14

Determinan matriks 3 x 3

Untuk matriks A berukuran 3 x3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

maka det(A) = $(a_{11}a_{22}\,a_{33} + a_{12}a_{21}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

Contoh 1: Matriks A berikut $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ memiliki determinan

det(A) ={ (2)(-2)(7) + (1)(5)(-3) + (3)(4)(-1)} –
{(3)(-2)(-3) + (2)(5)(-1) + (1)(4)(7)}
= -28 – 15 – 12 – 18 + 10 - 28 = -91

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{matrix}$$

Determinan Matriks Segitiga

1. Matriks segitiga atas (*upper triangular*): semua elemen di bawah diagonal utama adalah nol

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}\,a_{33}a_{44}$$

2. Matriks segitiga bawah (*lower triangular*): semua elemen *di atas* diagonal utama adalah nol

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}\,a_{33}a_{44}$$

- Secara umum, untuk matriks segitiga A berukuran n x n,

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\, a_{33} \ldots\, a_{nn}$$

Contoh 2. Determinan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah $\det(A) = (3)(4)(-2)(1) = -24$

Contoh 2. Determinan matriks identitas

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah det(A) = (1)(1)(1)(1) = 1

Aturan Determinan

- Misalkan A adalah matriks n x n. Matriks B adalah matriks yang diperoleh dengan memanipulasi matriks A. Bagaimana determinan B?

- $A \xrightarrow{\text{Kalikan sebuah baris dengan k}} B$, maka det(B) = k det(A)

- $A \xrightarrow{\text{Pertukarkan dua baris}} B$, maka det(B) = –det(A)

- $A \xrightarrow{\text{Sebuah baris ditambahkan dengan k kali baris yang lain}} B$, maka det(B) = det(A)

Table 1

Relationship	Operation
$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = k\det(A)$	The first row of A is multiplied by k.
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = -\det(A)$	The first and second rows of A are interchanged.
$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = \det(A)$	A multiple of the second row of A is added to the first row.

Contoh 3: Misalkan A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ dan sudah dihitung pada Contoh 1 bahwa

det(A) = (3)(4) – (2)(-1) = 12 + 2 = 14

Misalkan B diperoleh dengan mengalikan baris pertama A dengan 2,

B = $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ maka det(B) = (6)(4) – (4)(-1)

= 24 + 4 = 28 = 2 x det(A)

Misalkan B diperoleh dengan mempertukarkan baris pertama denga baris kedua,

B = $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ maka det(B) = (–1)(2) – (4)(3)

= (–2) – 12 = –14 = –det(A)

Menghitung determinan dengan reduksi baris

- Determinan matriks A dapat diperoleh dengan melakukan OBE pada matriks A sampai diperoleh matriks segitiga (segitiga bawah atau atas)

$$[A] \overset{\text{OBE}}{\sim} [\text{matriks segitiga bawah}]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & a'_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

maka det(A) = $(-1)^p \, a'_{11} a'_{22} \ldots a'_{nn}$ *)

p menyatakan banyaknya operasi pertukaran baris di dalam OBE

*) Asumsi tidak ada operasi perkalian baris dengan konstanta *k*

- Jika selama reduksi baris ada OBE berupa perkalian baris-baris matriks dengan k_1, k_2, …, k_m, maka

$$\text{maka } \det(A) = \frac{(-1)^p \, a'_{11} \; a'_{22} \ldots a'_{mm}}{k_1 k_2 \ldots k_m}$$

Contoh 4: Misalkan A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, determinan matriks A dihitung

dengan reduksi baris menggunakan OBE sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \overset{R1 \leftrightarrow R2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \overset{R3 - 2/3(R1)}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} \overset{R3 - 10R2}{\sim} \underset{\text{matriks segitiga atas}}{\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{bmatrix}}$$

Ada satu operasi pertukaran baris, maka p = 1

sehingga det(A) = $(-1)^1(3)(1)(-55) = 165$

Contoh 5: Hitung determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R1 \leftrightarrow R3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{R3 - 3R1 \\ R4 + R1}}{\overset{R2 + R1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{R4 - 1/3(R2)}{\overset{R3 + R2}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1/3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R4 + 1/6(R3)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7/6 \end{bmatrix}$$

Ada satu operasi pertukaran baris, maka $p = 1$

sehingga det(A) = $(-1)^1(1)(3)(6)\left(\frac{7}{6}\right) = -21$

Jika misalnya baris 1 terlebih dahulu dibagi dengan 3 sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{R1/3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{R3 – R1} \\ \text{R4 + R1}}}{\overset{\text{R2 + R1}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{\text{R3 - R2/2}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{\text{R4 +R3/3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 7/6 \end{bmatrix}$$

Tidak ada operasi pertukaran baris, maka p = 0

Ada perkalian baris 1 dengan 1/3

sehingga det(A) = $\dfrac{(-1)^0(1)(2)(-3)(\frac{7}{6})}{1/3} = \dfrac{-7}{1/3} = -21$

Teorema tentang determinan

1. Jika A mengandung sebuah baris nol atau kolom nol, maka det(A) = 0

   Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = 0$$

2. Jika A^T adalah matriks transpose dari A, maka $\det(A^T) = \det(A)$

   Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = -91$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

det(A) = (2)(-2)(7) + (4)(-1)(3) + (-3)(1)(5)
 - (-3)(-2)(3) – (2)(-1)(5) – (4)(1)(7)
= -28 – 12 – 15 – 18 + 10 – 28 = –9 1

3. Jika $A = BC$ maka $\det(A) = \det(B)\det(C)$

4. Sebuah matriks hanya mempunyai balikan jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$

5. $\det(A^{-1}) = 1/(\det(A)$

   Bukti: $AA^{-1} = I$

   $\det(AA^{-1}) = \det(I)$

   $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$

   $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

Latihan

Tentukan determinan matriks2 berikut dengan OBE:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & -1 & 0 \\ 100 & 200 & -23 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Seri bahan kuliah Algeo #9

Determinan
(bagian 2)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor

- Misalkan A adalah matriks berukuran n x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Didefinisikan:

M_{ij} = minor entri a_{ij}

= determinan upa-matriks (*submatrix*) yang elemen-elemennya tidak berada pada baris *i* dan kolom *j*

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ = kofaktor entri a_{ij}

Misalkan A adalah matriks sebagai berikut: $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Maka, untuk menghitung M_{11} tidak melibatkan elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-1:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-4)(5) = 26$$

Untuk menghitung M_{23} tidak melibatkan elemen pada baris ke-2 dan kolom ke-3:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (6)(5) - (-3)(1) = 33$$

Contoh 1: Tinjau matriks A berikut $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Minor entri dan kofaktor dari matriks A adalah sebagai berikut:

$M_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=(2)(3) - (-4)(5) = 26$

$M_{12}=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=(2)(3) - (-4)(1) = 10$

$M_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=(2)(5) - (2)(1) = 8$

$M_{22}=\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=(6)(3) - (1)(1) = 17$

dan seterusnya untuk M_{21}, M_{23}, M_{31}, M_{32}, M_{33} dihitung dengan cara yang sama

$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}=26$

$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}= -M_{12}= -10$

$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13}= M_{13}= 8$

$C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22}= M_{22}= 17$

dan seterusnya untuk C_{21}, C_{23}, C_{31}, C_{32}, C_{33} dihitung dengan cara yang sama

- Jadi, kofaktor C_{ij} berkoresponden dengan minor entri M_{ij}, hanya berbeda tanda (positif atau negatif, tergantung nilai *i* dan *j*)

- Cara mengingat tanda positif dan negative untuk C_{ij} adalah dengan memperhatikan pola berikut:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

- Dengan menggunakan kofaktor, maka determinan matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dapat dihitung dengan <u>salah satu</u> dari persamaan berikut:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1n}C_{1n}$$
$$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + \dots + a_{2n}C_{2n}$$
$$\vdots$$
$$\det(A) = a_{n1}C_{n1} + a_{n2}C_{n2} + \dots + a_{nn}C_{nn}$$

Secara baris

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \dots + a_{n1}C_{n1}$$
$$\det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + \dots + a_{n2}C_{n2}$$
$$\vdots$$
$$\det(A) = a_{1n}C_{1n} + a_{2n}C_{2n} + \dots + a_{nn}C_{nn}$$

Secara kolom

Contoh 2: Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, determinan matriks A dihitung

dengan ekspansi kofaktor sebagai berikut (misalkan acuannya adalah baris pertama matriks A):

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\{(0)(3) - (4)(2)\} + 1\{(5)(-3) - (4)(8)\} + 2\{(5)(2) - (0)(8)\}$$

$$= 3(-8) + (-47) + 2(10)$$

$$= -24 - 47 + 20$$

$$= -51$$

- Misalkan digunakan kolom kedua sebagai acuan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

$$\det(A) = -(-1)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \{(5)(-3) - (4)(8)\} + 0 - 2\{(3)(4) - (2)(5)\}$$
$$= (-15 - 32) - 2\,(12 - 10)$$
$$= (-47) - 2\,(2)$$
$$= -51$$

Contoh 3: Hitung determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

det(A) = $a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3\{2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}\} - 5\{1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\} + \dots$$

$$= -18$$

- **Tips 1**: gunakan acuan baris/kolom yang banyak 0 untuk menghemat perhitungan.

Contoh 4: Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = -3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3(-4) + 0 + 0$$

$$= 12$$

- **Tips 2**: terapkan OBE untuk memperoleh baris yang mengandung 0

Contoh 5: Hitung determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ (dari Contoh 3)

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{R3-2R2 \\ R4-3R2}}{\overset{R1-3R2}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \overset{R3+R1}{\sim} (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 18$$

Matriks Kofaktor

- Misalkan A adalah matriks n x n dan C_{ij} adalah kofaktor entri a_{ij}.
- Maka matriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

- *Adjoin* dari A adalah transpose matriks kofaktor:

adj(A) = transpose matriks kofaktor

Contoh 6: Tentukan matriks kofaktor dan adjoin dari matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Maktriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks kofaktor: $\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$

Adjoin dari A adalah transpose matriks kofaktor:

adj(A) = $\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$

Mencari matriks balikan menggunakan adjoin

- Balikan matriks A dapat dihitung dengan menggunakan rumus:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ \mathrm{adj}(A)}$$

Contoh 7. Determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ setelah dihitung adalah det(A) = 64.

Maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ \mathrm{adj}(A) = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & -10 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/64 & 4/64 & 12/64 \\ 6/64 & 2/64 & -10/64 \\ -16/64 & -10/64 & 16/64 \end{bmatrix}$$

Kaidah Cramer

- Jika A**x** = **b** adalah SPL yang terdiri dari n persamaan linier dengan n peubah (variable) sedemikian sehingga det(A) $\neq$ 0, maka SPL tersebut memiliki solusi yang unik yaitu

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

yang dalam hal ini, A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri pada kolom ke-j dari A dengan entri dari matriks

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Contoh 8: Diberikan SPL

$$-x + 2y - 3z = 1$$

$$2x \qquad + \quad z = 0$$

$$3x - 4y + 4z = 2$$

Hitung solusinya dengan kaidah Cramer!

Penyelesaian: A**x** = **b**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & -4 & 4 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{1} & -3 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & \mathbf{2} & 4 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \mathbf{1} \\ 2 & 0 & \mathbf{0} \\ 3 & -4 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

- Hitung determinan masing-masing A_j:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & -4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{1} & -3 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & \mathbf{2} & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \mathbf{1} \\ 2 & 0 & \mathbf{0} \\ 3 & -4 & \mathbf{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

- Hitung nilai x_i sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-15}{10} = \frac{-3}{2} \qquad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-16}{10} = \frac{-8}{5}$$

Latihan

Tentukan determinan matriks2 berikut:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & -1 & 0 \\ 100 & 200 & -23 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$