Catatan Kuliah IF2123
Aljabar Linear dan Geometri

K03 IF2123

Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung
Tahun Akademik 2022-2023

Pendahuluan

Puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas diselesaikannya buku rangkuman ini. Buku ini dibuat untuk merangkum mata kuliah IF2123 Aljabar Linear dan Geometri. Buku ini tidak dapat menggantikan kegiatan perkuliahan karena dibuat dengan sangat ringkas dan tidak mendalam sehingga rujukan utama tetap pada buku yang digunakan dalam perkuliahan.

Penyusunan buku ini menggunakan LaTeX , menggunakan *class* book, dan disusun berkala sesuai dengan pertemuan kuliah. Oleh karena itu, isi buku ini dapat berubah sewaktu-waktu dengan penambahan materi perkuliahan dan lain-lain.

Buku ini dibuat dari catatan kelas, *slide* dosen, dan catatan dari buku selama kegiatan perkuliahan IF2123. Sebagai catatan, pengampu mata kuliah K03 adalah Ir. Rila Mandala, M. Eng., Ph.D.

Semoga berguna.

Daftar Isi

BAB 1

Matriks

1.1 Notasi Matriks

Matriks dinotasikan dengan ukuran $m \times n$ dimana m adalah baris, n adalah kolom. Jika $m = n$ maka matriks tersebut adalah matriks persegi atau square matrix orde n. Diagonal utama ada pada matriks persegi yang merupakan diagonal di tengah matrix. Sebagai contoh diberikan matriks A

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

diagonal utama pada matriks A adalah elemen a, e, i.

1.2 Operasi Pada Matriks

1.2.1 Perkalian Matriks

$$C_{m \times n} = A_{m \times n} \times B_{r \times n}$$

Baris $\times$ kolom

1.2.2 Matriks dengan Skalar

$$cA = [cA_{ij}]$$

semua elemen dikalikan dengan c. c adalah skalar.

1.2.3 Kombinasi Linear Matriks

Matriks dapat direpresentasikan dengan kombinasi linear. Sebagai contoh akan dikalikan matriks A dengan x,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

maka perkalian Ax adalah,

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{bmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + \dots + A_{1n}x_n \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + \dots + A_{2n}x_n \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + \dots + A_{3n}x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{3n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.3 Transpose Matriks

Jika ada matriks A, $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ maka transpose A yaitu A^T adalah $\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Khusus square matrix, A^T dapat diperoleh dengan menukarkan elemen yang simetri dengan diagonal utama.

1.3.1 Sifat Transpose Matriks

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(A - B)^T = A^T - B^T$
4. $(kA)^T = kA^T$
5. $(AB)^T = B^T A^T$

1.4 Trace Matriks

Jika A adalah square matrix, maka Trace A (tr(A)) adalah penjumlahan semua elemen diagonal utama

1.5 Matriks Nol

Matriks ini memiliki nol sebagai semua elemennya. Dilambangkan dengan 0.

1.5.1 Sifat

$cA = 0 \Rightarrow c = 0 \vee A = 0$

1.6 Matriks Identitas

Matriks yang pada diagonal utamanya, elemennya adalah 1 dan sisanya adalah 0. Dilambangkan dengan I.

1.6.1 Sifat

$AI = IA = A$

1.7 Matriks Balikkan

Jika B adalah invers dari A, maka

$$AB = BA = 1$$

A^{-1} adalah invers A. Jika dan hanya jika A ukurannya 2×2, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$ad - bc$ adalah determinan matriks

1.8 Matriks Eselon

1.8.1 Matriks Eselon Baris

Matriks ini adalah matriks yang memiliki 1 utama pada setiap baris kecuali baris yang sebelahnya nol. 1 utama adalah baris pada matriks yang elemen paling kirinya harus 1, kecuali 0 (tidak dianggap).

Syarat matriks eselon baris antara lain,

1. baris yang elemen keseluruhannya adalah 0 diletakkan di paling bawah

2. setiap baris harus mengandung 1 utama
3. posisi satu utama setiap baris, makin ke bawah, semakin ke kanan elemen '1' nya

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 1.1: Contoh Matriks Eselon Baris. * adalah bilangan bebas

1.8.2 Matriks Eselon Baris Tereduksi

Secara syarat, syaratnya sama dengan Matriks Eselon Baris, tetapi untuk satu utamanya, elemen di atas dan di bawah '1' haruslah 0.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 1.2: Contoh Matriks Eselon Baris Tereduksi. * adalah bilangan bebas

BAB 2

Sistem Persamaan Linear

2.1 Bentuk Umum

Persamaan linear berarti persamaan yang memuat variabel dengan pengkat tertinggi satu. Dalam matriks SPL memiliki bentuk umum sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{12}x_1 & + & a_{12}x_2 & +...+ & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +...+ & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +...+ & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

2.2 Matriks augmented

Merupakan matriks yang terdiri dari beberapa persamaan linear. Contohnya:

$$x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 9$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 7$$

dapat diubah menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 9 \\ 2 & -6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

2.3 Operasi Baris Elementer (OBE)

- OBE merupakan operasi pada matriks yang bertujuan untuk mendapatkan hasil sebuah matriks eselon baris / matriks eselon baris tereduksi dengan tujuan mendapatkan nilai dari variabel.
- Terdapat beberapa operasi yang dapat dilakukan pada augmented matriks
    1. Kalikan dengan sebuah konstanta tidak nol
    2. Pertukar sebuah matriks
    3. Tambahkan sebuah matriks dengan kelipatan baris lainnya
- Terdapat beberapa metode untuk eliminasi berdasarkan hasil dari matriks eselonnya.
    - Matriks eselon baris → metode eliminasi gauss
    - Matriks eselon baris tereduksi → metode eliminasi gauss - jordan

2.3.1 Metode Eliminasi Gauss

- Dari metode eliminasi gauss akan (dimanipulasi sedemikian rupa) didapatkan sebuah matriks eselon baris
- Metode ini memiliki beberapa tahap yaitu
    1. Nyatakan sebuah persamaan dalam bentuk matriks augmented
    2. Terapkan OBE baik secara sekali atau berulang hingga menemukan matriks eselon baris
    3. Percahkan persamaan dengan teknik substitusi mundur (substitusi setiap baris pada matriks ke konstanta pada SPL)
- Contoh : Selesaikan SPL berikut dengan teknik eliminasi gauss.

$$-2b + 3c = 1$$

$$3a + 6b - 3c = -2$$

$$6a + 6b + 3c = 5$$

Ubah menjadi matriks eselon baris

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

lalu terapkan OBE secara berulang hingga mendapatkan matriks eselon baris

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

karena pada baris terakhir matriks eselon baris didapatkan $0a + 0b + 0c = 6$ maka persamaan ini tidak memiliki solusi.

2.3.2 Kemungkinan Solusi

Terdapat 3 kemungkinan solusi yang memungkikan pada sebuah Sistem Persamaan Linear.

1. Solusi unik/tunggal

   Matriks eselon barisnya hanya memiliki satu solusi. Bentuk Umum (X = angka berapapun):

$$\begin{bmatrix} X & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X \end{bmatrix}$$

2. Solusi banyak

   Matriks eselon barisnya memiliki banyak solusi. Bentuk Umum:

$$\begin{bmatrix} X & X & X \\ 0 & X & X \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Tidak memiliki solusi

   Matriks eselon barisnya tidak memiliki solusi. Bentuk Umum :

$$\begin{bmatrix} X & X & X \\ 0 & X & X \\ 0 & 0 & X \end{bmatrix}$$

2.3.3 Metode Elminisasi Gauss-Jordan

Pada metode ini, OBE dilakukan hingga terbentuk matriks eselon baris tereduksi. Metode ini tidak memerlukan substitusi balik. Komputer lebih cepat dalam menjalankan metode ini.

Pada metode ini ada 2 tahapan,

1. Fase maju. Di bawah satu utama terdapat nol, sama dengan metode Gauss.

2. Fase mundur. Di atas satu utama terdapa nol.

2.3.4 Sistem Persamaan Linier Homogen

Sistem persamaan linier homogen berbentuk:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$$

$x_1 = 0, X_2 = 0, x_n = 0$ selalu menjadi solusi dari SPL Homogen, apabila solusi hanya satu maka disebut **solusi trivial**, apabila ada solusi lain maka disebut **solusi non trivial**.

- Pada suatu SPL dikatakan **konsisten** apabila memiliki paling sedikit satu solusi
- SPL yang tidak memiliki solusi disebut **inkonsisten**
- SPL Homogen selalu konsisten karena paling tidak memiliki satu solusi.

2.3.5 Menghitung matriks balikan dengan Eliminasi Gauss - Jordan

- Salah satu cara menentukan matriks balikan adalah dengan memanfaatkan metode eliminasi gauss jordan
- Dikarenakan sifat $AA^-1 = A^-1A = I$, maka dihubungkan dengan metode gauss jordan
$$[A|I] \sim [I|A^-1]$$
- Sebuah matriks yang tidak memiliki balikan disebut **matriks singular**
- Jika sebuah matriks tidak memiliki balikan, maka matriks tidak memiliki solusi tunggal (unik).
- Pada SPL Homogen, SPL memiliki solusi trivial apabila sebuah matriks memiliki balikan.

2.3.6 Menyelesaikan SPL dengan Matriks Balikan

- SPL $Ax = b$ dapat diolah dengan mengalikan persamaan dengan A^-1
$$(A^{-1})Ax = (A^{-1})b$$
$$Ix = (A^{-1})b$$
$$x = (A^{-1})b$$
- Metode diatas dapat dipakai apabila sudah diketahui matriks balikan dari sebuah matriks.

BAB 3

Determinan

Syarat determinan dari suatu matriks adalah matriks persegi. Determinan dapat dinotasikan sebagai berikut

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

catatan: Matriks A memiliki ukuran $n \times n$

Determinan pada matriks 2×2 dihitung dengan cara berikut.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

Determinan pada matriks 3×3 dihitung dengan menambahkan 2 kolom baru dari kolom 1 dan 2 kemudian menerapkan aturan sarrus sehingga diperoleh persamaan di bawah.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge)$$

3.1 Jenis - Jenis Khusus

3.1.1 Matriks Segitiga Atas

Merupakan matriks yang mempunyai angka selain nol pada bagian **atas** dari diagonalnya.

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

3.1.2 Matriks Segitiga Bawah

Merupakan matriks yang mempunyai angka selain nol pada bagian **bawah** dari diagonalnya.

$$A = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

3.1.3 Determinan Matriks Segitiga

Karena matriks segitiga memiliki sisi yang diisi dengan nilai nol, maka untuk menghitung determinan dari matriks segitiga dapat diambil dari perkalian diagonal utamanya saja.

3.1.4 Matriks Identitas

Merupakan matriks yang diagonal utamanya diisi oleh angka nol, dan nilai selain pada diagonal utamanya diisi dengan satu.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinan matriks Identitas = 1.

3.2 Aturan jika Matriks di-OBE

Misalkan ada matriks A yang dioperasikan dengan OBE menghasilkan B, maka dari itu, determinan dari matriks A dan determinan matriks B dapat dihubungkan sebagai berikut.

- Jika matriks B adalah matriks A yang dioperasikan dengan mengalikan baris dengan konstanta k bukan 0, maka $\det(A) = \frac{1}{k}\det(B)$

- Jika matriks B adalah matriks A yang mengalami operasi penukaran baris, maka $\det(B) = -\det(A)$
- Jika matriks B adalah matriks A yang mengalami operasi penjumlahan antar baris, maka $\det(A) = \det(B)$

3.3 Menghitung Determinan dengan Reduksi Baris

Dengan OBE, maka matriks A dapat diubah sedemikian rupa menjadi matriks segitiga bawah. Jika sudah dioperasikan demikian, maka muncul persamaan sebagai berikut,

$$\det(A) = (-1)^p \times a'_{11} \times a'_{22} \times \ldots \times a'_{nn} \tag{3.1}$$

dengan p adalah banyaknya operasi penukaran baris OBE dan a adalah perkalian diagonal utama matriks A.

Apabila saat melakukan OBE ada perkalian baris-baris matriks dengan $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$, maka persamaannya menjadi

$$\det(A) = \frac{(-1)^p \times a'_{11} \times a'_{22} \times \ldots \times a'_{nn}}{k_1 \times k_2 \times k_3 \times \ldots \times k_n} \tag{3.2}$$

3.4 Teorema Determinan

- Jika ada salah satu baris atau kolom yang nilainya semua nol, maka determinan dari matriks tersebut = 0.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 0$$

- Jika terdapat sebuah matriks A^T yang merupakan sebuah transpose dari matriks A.

$$\det(A^T) = \det(A)$$

- Jika $A = B \times C$ maka

$$\det(A) = \det(B) \times \det(C)$$

- Matriks A memiliki balikan **jika dan hanya jika** $\det(A) \neq 0$
- Hubungan dari determinan matriks balikan dan asalnya.

$$\det(A^{-}) = \frac{1}{\det(A)}$$

3.5 Metode Ekspansi Kofaktor

Misalkan ada sebuah matriks A dengan ukuran $n \times n$. Dalam setiap matriks itu akan ada minor entri a_{ij}. Minor entri a_{ij} merupakan submatrix yang elemennya tidak ada pada baris i dan kolom j dari matriks A. Misal matriks $A_{3\times3}$ dengan elemen $a \ldots i$. Minor a_{11} atau M_{11} adalah,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

Perkenalkan pula kofaktor dari A yang dilambangkan C. Kofaktor sendiri adalah kumpulan minor yang diberikan tanda positif atau negatif sesuai dengan aturannya. Sebagai contoh C dari A adalah,

$$C = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{bmatrix}$$

Perhatikan tanda pada awal elemen. Untuk baris ganjil, maka pola tandanya adalah + - + - .... Untuk baris genap, maka pola tandanya - + - + ...

Determinan matriks dapat ditentukan melalui ekspansi kofaktor ini. Sebagai contoh, kita gunakan kembali matriks $A_{3\times3}$. Determinan ditentukan dengan cara mengalikan setiap elemen pada satu baris atau satu kolom tertentu dengan kofaktornya yang bersesuaian. Catatan: Jika ingin melakukan OBE pada A, operasi yang diperbolehkan hanyalah operasi penjumlahan dengan baris lain agar nilai determinannya tidak berubah.

Langkah awal yang harus dilakukan adalah membuat kofaktor dari A yaitu,

$$A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Maka determinan dari A jika dicari secara baris dan kolom berturut-turut pada baris pertama dan kolom pertama adalah

$$\det(A) = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & fe \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

3.5.1 Trik

Lakukan OBE agar matriks dapat menjadi lebih sederhana. Ambil kolom atau baris yang mengandung elemen 0 terbanyak untuk menyederhanakan perhitungan.

3.6 Kofaktor untuk Mencari Matriks Balikkan

Adjoin matriks (simbol Adj(A)) merupakan transpose dari kofaktor matriks A. Sebagai contoh,

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{21} & +M_{31} \\ -M_{12} & +M_{22} & -M_{32} \\ +M_{13} & -M_{23} & +M_{33} \end{bmatrix}$$

Maka dari itu A^{-1} adalah,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Adj}(A)$$

3.7 Aturan Crammer

Suatu SPL dapat diselesaikan dengan aturan crammer. Ambil contoh

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= d \\ dx_1 + ex_2 + fx_3 &= g \\ hx_1 + ix_2 + jx_3 &= k \end{aligned}$$

Dalam bentuk $Ax = b$ dapat dibentuk matriks,

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} d \\ g \\ k \end{bmatrix}$$

Aturan Crammer pada dasarnya adalah membuat matriks dari A dan b kemudian mengganti kolom ke-n dengan matriks b untuk dicari nilainya dengan cara,

$$x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Misal x_1. Maka A_1,

$$A_1 = \begin{bmatrix} d & b & c \\ g & e & f \\ k & i & j \end{bmatrix}$$