Solusi Latihan Induksi Matematika

1. Buktikan bahwa:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

berlaku untuk $n \in$ bilangan asli dengan induksi matematika!

Jawaban:

Misalkan p(n) menyatakan proposisi bahwa jumlah dari kuadrat n bilangan bulat positif pertama adalah n(n+1)(2n+1)/6.

Basis induksi:

p(1) benar, karena untuk n=1 kita peroleh

$1^2 = 1(2)(3)/6$

$1 = 1$

Langkah induksi: Misalkan p(n) benar, asumsikan bahwa $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus memperlihatkan bahwa p(n+1) juga benar, yaitu

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = (n+1)(n+2)(2(n+1)+1)/6$$

$$n(n+1)(2n+1)/6 + (n+1)^2 = (n+1)(n+2)(2n+3)/6$$

$$(n+1)[n(2n+1)/6 + (n+1)] = (n+1)(n+2)(2n+3)/6$$

$$(n+1)[n(2n+1)/6 + 6(n+1)/6] = (n+1)(n+2)(2n+3)/6$$

$$(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]/6 = (n+1)(n+2)(2n+3)/6$$

$$(n+1)[(2n^2+n) + 6(n+1)]/6 = (n+1)(n+2)(2n+3)/6$$

$$(n+1)[2n^2+7n+6]/6 = (n+1)(n+2)(2n+3)/6$$

$$\mathbf{(n+1)(n+2)(2n+3)/6 = (n+1)(n+2)(2n+3)/6}$$

Karena Langkah basis dan langkah induksi terbukti benar, maka terbukti $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

2. Alexander adalah seorang petani buah di desa Sukasehat. Dia memiliki sangat banyak buah apel dan mangga dari kebun buahnya. Karena terlilit hutang, Alexander kehilangan tokonya dan seluruh uangnya sehingga ia hanya memiliki buah-buahan hasil kebunnya. Karena kehilangan toko, ia pun tidak bisa menjual buah-buahnya untuk mendapatkan uang yang ia butuhkan untuk membeli kebutuhan sehari-hari. Untungnya, desa Sukasehat menerima pembelian barang melalui barter barang. Sebuah apel dinilai berharga 7 dolar Sukasehat per buahnya dan sebuah mangga dinilai berharga 8

dolar Sukasehat per buahnya. Jika semua barang harganya berupa bilangan bulat dalam satuan dolar Sukasehat, buktikan bahwa Alexander selalu dapat membeli semua barang berharga n ($n \geq 42$ dolar Sukasehat) melalui barter dengan buah-buah apel dan mangganya.

Jawaban:

1) Basis Induksi: Untuk membeli barang seharga 42 dolar, dapat dibarter dengan enam buah apel seharga 7 dolar. Maka p(42) benar
2) Langkah Induksi: Andai p(n) benar maka butuh untuk menunjukkan bahwa p(n+1) juga benar, yaitu untuk membeli barang seharga n+1 dapat dilakukan melalui barter apel dan mangga. Perlu memeriksa dua kemungkinan:
   - Kemungkinan pertama, misalkan dibeli sebuah barang berharga n dengan sedikitnya satu buah apel berharga 7 dolar. Dengan mengganti satu buah apel ini dengan satu buah mangga yang berharga 8 dolar, diperoleh susunan buah senilai n+1 dolar.
   - Kemungkinan kedua, misalkan dibeli sebuah barang berharga n dengan tidak ada buah apel yang dibarterkan sehingga harus menggunakan buah mangga saja. Karena $n \geq 42$, maka dibutuhkan sedikitnya 6 buah mangga dengan total harga 48 dolar untuk membelinya, 6 buah mangga ini dapat diganti dengan 7 buah apel seharga 49 dolar sehingga diperoleh susunan buah senilai n+1 dolar.

Karena basis dan langkah induksi benar, maka proposisi di atas terbukti benar.

3. Diberikan $f_0 = 1$ dan $f_n = 5f_{n-1}$ untuk setiap bilangan bulat $n > 0$, serta diberikan pula $g_n = 5^n$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$. Dengan menggunakan induksi matematika, tunjukkan bahwa $f_n = g_n$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

Jawaban:

Misakan p(n) adalah pernyataan bahwa $f_n = g_n$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$ dengan $f_n = 5f_{n-1}$; $f_0 = 1$ serta $g_n = 5^n$

Basis induksi
Untuk kasus basis $n = 0$ maka p(0) benar karena kita memperoleh

$$f_0 = 1 \text{ dan } g_0 = 5^0 = 1$$

Karena $f_0 = g_0$, maka dapat dikatakan bahwa pernyataan benar untuk $n = 0$

Langkah induksi
Asumsikan untuk $n \geq 0$ p(n) benar, yaitu maka dapat ditulis $f_n = g_n$ maka, $f_n = 5^n$
Akan dibuktikan bahwa untuk p($n+1$) pernyataan tersebut juga benar, yaitu $f_{n+1} = g_{n+1}$ *maka*, $f_{n+1} = 5^{n+1}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= 5f_{(n+1)-1} \\ &= 5f_n \\ &= 5(5^n) \\ &= 5^{n+1} \end{aligned} \qquad\qquad g_{n+1} = 5^{n+1}$$

Dengan demikian, dapat dikatakan p(n+1) benar.

Karena pada langkah basis dan langkah induksi, pernyataan terbukti benar, maka pernyataan $f_n = g_n$ berlaku untuk $n \geq 0$ adalah benar.

4. Carilah nilai m terkecil sehingga untuk setiap n yang memenuhi m $\leq$ n, berlaku $\boldsymbol{3^n < n!}$. Buktikan dengan induksi matematika.

<u>Jawaban</u>:

Misal dicoba untuk berbagai nilai m = 1, 2, …, dan untuk m = 7:

- Akan dibuktikan bahwa untuk 7 $\leq$ n memenuhi $3^n < n!$
  Misal p(n) = $3^n < n!$
  1) Basis induksi: untuk n = 7,
     $3^7 = 2187$ dan 7! = 5040, sehingga memenuhi $3^n < n!$, maka basis benar
  2) Asumsikan jika p(n) benar untuk n $\geq$7, maka akan dibuktikan bahwa p(n+1) benar

$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= 3 \cdot 3^n \\ &< 3 \cdot n! \\ &< (n+1) \cdot n! \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

     Dari persamaan diatas, terbukti bahwa p(n+1) juga benar

  Berdasarkan dua step induksi diatas, terbukti bahwa untuk 7 $\leq$ n memenuhi $3^n < n!$

- Akan dibuktikan bahwa m=7 adalah nilai m terkecil yang memenuhi.
  Misalkan ambil m = 6, didapat $3^6 = 729$ dan 6! = 720, sehingga untuk m = 6 tidak memenuhi. Maka terbukti bahwa m=7 adalah nilai m terkecil yang memenuhi.

∴ Sehingga terbukti bahwa m=7 adalah nilai m terkecil sehingga untuk setiap n yang memenuhi m $\leq$ n, berlaku $3^n < n!$

5. Anda memiliki sebatang coklat berbentuk persegi panjang yang terdiri dari n buah coklat berbentuk persegi. Anda ingin mematahkan batang coklat tersebut menjadi kumpulan persegi-persegi coklat kecil. Dalam mematahkan coklat, anda hanya bisa mematahkan pada garis-garis diantara coklat-coklat persegi. Buktikan dengan induksi matematika bahwa jumlah pematahan yang harus dilakukan adalah n – 1 .

Jawaban:

Persoalan ini akan diselesaikan dengan prinsip induksi kuat
(i) *Basis induksi*: untuk $n = 1$, maka dibutuhkan $n - 1 = 0$ kali pematahan. Ini benar karena coklat hanya punya satu persegi sehingga tidak ada pematahan.

(ii) *Langkah induksi*: Asumsikan untuk mematahkan sebatang coklat yang terdiri dari n buah coklat persegi ($n = 1, 2, 3, \ldots, k$) dibutuhkan $n - 1$ pematahan adalah benar. (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa untuk sebatang coklat yang memiliki $n + 1$ buah coklat persegi dibutuhkan n pematahan. Caranya sebagai berikut: Patahkan batang coklat itu sehingga terbagi menjadi dua potongan, masing-masing memiliki n_1 persegi dan n_2 persegi, yang dalam hal ini $1 \le n_1 \le n_2 \le (n + 1)$, dan $n_1 + n_2 = n + 1$. Menurut hipotesis induksi, kita dapat mematahkan potongan n_1 sebanyak $n_1 - 1$ kali dan potongan n_2 sebanyak $n_2 - 1$ kali. Sehingga jumlah pematahan seluruhnya adalah

$$1 + (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = (n + 1) - 1 = n$$

Perhatikan bahwa angka 1 berasal dari pematahan pertama menjadi n_1 dan n_2.

Karena langkah basis dan langkah induksi sudah ditunjukkan benar, maka terbukti jumlah pematahan yang harus dilakukan adalah $n - 1$.