Bahan kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Himpunan

(Bag. 1 – Update 2022)

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI - ITB

Definisi

- Himpunan (*set*) adalah sekumpulan objek yang *berbeda*.

- Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.

- HMIF adalah contoh sebuah himpunan, di dalamnya berisi anggota berupa mahasiswa. Tiap mahasiswa berbeda satu sama lain.

- Satu set komputer desktop terdiri dari CPU, monitor, dan keyboard

- Himpunan mahasiswa

- Satu *set* mainan huruf (huruf besar dan kecil)

- Perhatikan bedanya:

  {1, 2, 3, 4, 5, 6 } → Himpunan (*set*)

  {1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6} = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

  {1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6} → Himpunan-ganda (*multi-set*)

  → Ada elemen yang berulang (ganda)

- Urutan elemen di dalam himpunan tidak penting

  {a, b, c, d} = {d, b, a, c}

- Setiap elemen di dalam himpunan boleh tidak berkorelasi satu sama lain, yang penting BERBEDA satu sama lain

  { 56, Rp3000, Amir, cacing, Silver Queen, -45° C , paku}

Cara Penyajian Himpunan

1. **Enumerasi**

   Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.

   Contoh 1.

   - Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
   - Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
   - C = {kucing, a, Amir, 10, paku}
   - $R = \{ a, b, \{a, b, \mathrm{c}\}, \{a, c\} \}$
   - $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
   - $K = \{ \{\} \}$
   - Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100 \}$
   - Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

- **Contoh 2.** Misalkan:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, \text{c}\}, \{a, c\} \}$

$K = \{\{\}\}$

maka

$3 \in A$

$\{a, b, c\} \in R$

$c \notin R$

$\{\} \in K$

$\{\} \notin R$

Contoh 3. Jika $P_1 = \{a, b\}$,

$P_2 = \{ \{a, b\} \}$,

$P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$,

maka

$a \in P_1$

$a \notin P_2$

$P_1 \in P_2$

$P_1 \notin P_3$

$P_2 \in P_3$

2. Simbol-simbol Baku

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }

N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }

Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }

$\mathbf{Z}^+$ = himpunan bilangan bulat positif = {1, 2, 3, … }

Q = himpunan bilangan rasional = $\{a/b \mid a, b \in \mathbf{Z}$ dan $b \neq 0\}$

= {…, -3/4, -4/5, 2/3, 1/2, … } = {…, -0.6, -0.8, 0.666…}

R = himpunan bilangan riil

$\mathbf{R}^+$ = himpunan bilangan riil positif

C = himpunan bilangan kompleks = $\{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$

Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U atau S.

Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan *A* adalah himpunan bagian dari U, dengan *A* = {1, 3, 5}.

3. ***Notas Pembentuk Himpunan***

- Notasi: $\{ x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x \}$

Contoh 4.

(i) A adalah himpunan bilangan bulat positif kecil dari 5

$A = \{ x \mid x$ adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5$\}$

atau $A = \{ x \mid x \in \mathbf{P}, x < 5 \} = \{1, 2, 3, 4\}$

(ii) $M = \{ x \mid x$ adalah mahasiswa yang mengambil mata kuliah IF2120$\}$

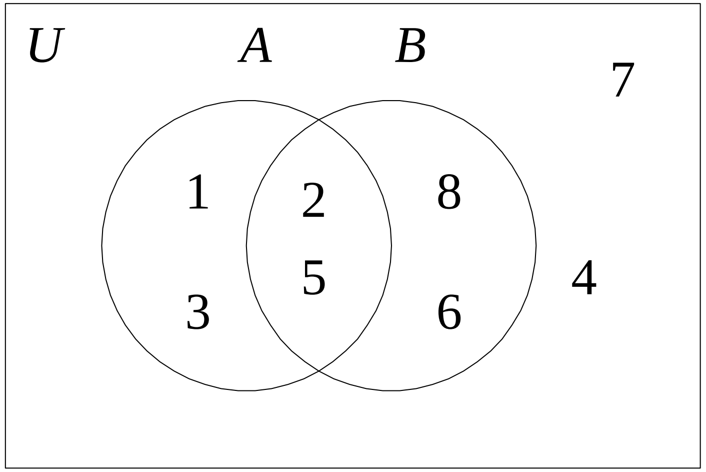
4. Diagram Venn

Contoh 5.

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8},

A = {1, 2, 3, 5} dan *B* = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:



Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam *A* disebut **kardinal** dari himpunan *A*.
Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh 6.

(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima lebih kecil dari 20 $\}$,
atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = n(B) = 8$

(ii) T = {kucing, *a*, Amir, 10, paku, laptop}, maka $|T| = 6$

(iii) $A = \{2, \{2, 3\}, \{4\}, 6, \{\{7\}\} \}$, maka $|A| = 5$

(iv) $C = \emptyset$, maka $n(C) = 0$

(v) $D = \{ x \in \mathbf{N} \mid x < 5000 \}$, maka $n(D) = 4999$

(vi) $D = \{ x \in \mathbf{N} \mid x \geq 5000 \}$, maka $n(D)$ tak berhingga

Himpunan kosong (*null set*)

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : $\emptyset$ atau {}

Contoh 7.

(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

(ii) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$

(iii) $A = \{x \mid x$ adalah akar riil persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A) = 0$

- himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset\}$
- himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\{\emptyset\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu $\emptyset$.

Himpunan Bagian (*Subset*)

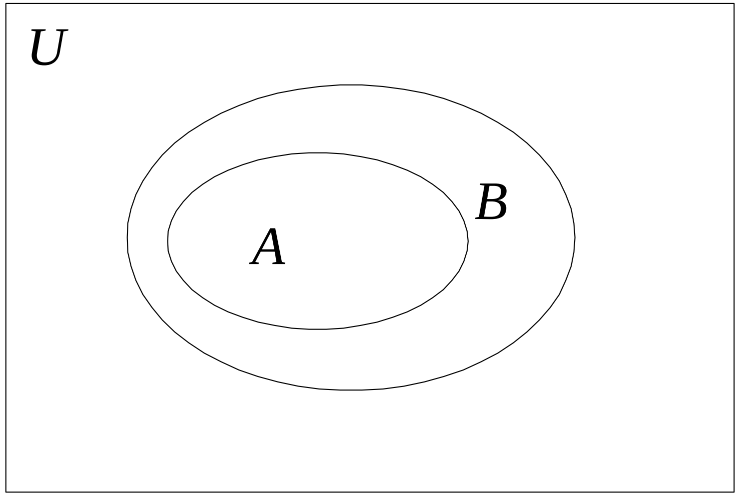
- Notasi: $A \subseteq B$
- Himpunan *A* dikatakan himpunan bagian dari himpunan *B* jika dan hanya jika setiap elemen *A* merupakan elemen dari *B*.

- Secara formal: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$

- A adalah *subset* dari B.

  Dalam hal ini, *B* dikatakan *superset* dari *A*,

  $B \supseteq A$



Contoh 8.

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0$ dan $y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

(v) A = {3, 9}, B = {5, 9, 1, 3}, $A \subseteq B$? benar

(vi) A = {3, 3, 3, 9}, B = {5, 9, 1, 3}, $A \subseteq B$? benar

(vii) A = {1, 2, 3}, B = {2, 3, 4}, $A \subseteq B$? salah

- $\varnothing \subseteq$ A untuk sembarang himpunan A
- A $\subseteq$ A untuk sembarang himpunan A

- $\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\varnothing$ dan A disebut himpunan bagian tak-sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan *A*.

Contoh: $A = \{1, 2, 3\}$, maka

{1, 2, 3} dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari *A*.

{1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} adalah *proper subset* dari A

- *A* dikatakan *proper subset* dari *B* jika:

(i) setiap elemen dari *A* juga elemen dari *B* (dengan kata lain $A \subseteq B$), dan

(ii) sekurang-kurangnya ada satu elemen di *B* yang tidak ada di *A*

- Perhatikan bahwa $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

(i) $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

- A disebut himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.
- Contoh: {1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}

  Jadi, $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$, $\{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$

(ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

- Contoh: $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

- <u>Latihan</u>

  Misalkan A = {1, 2, 3} dan B = {1, 2, 3, 4, 5}. Tentukan semua kemungkinan himpunan C sedemikian sehingga $A \subset C$ dan $C \subset B$, yaitu A adalah *proper subset* dari C dan C adalah *proper subset* dari B.

Jawaban:

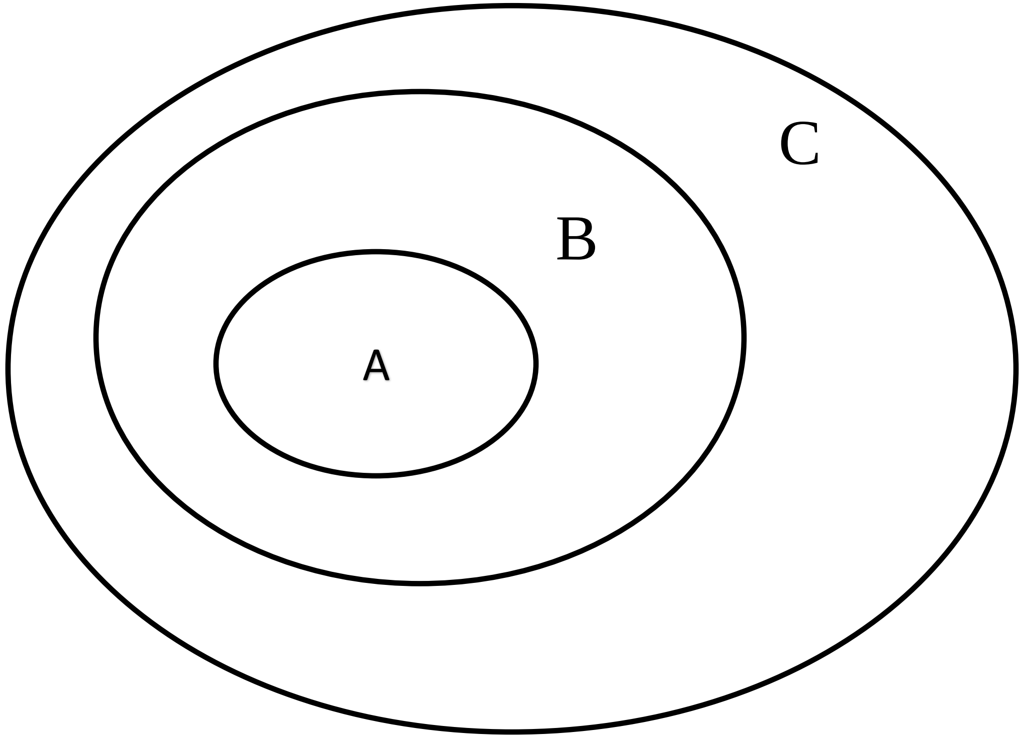
Data: A = {1, 2, 3} dan B = {1, 2, 3, 4, 5}, lalu $A \subset C$ dan $C \subset B$

C harus mengandung semua elemen *A* = {1, 2, 3} dan sekurang-kurangnya satu elemen dari *B*.

Dengan demikian, *C* = {1, 2, 3, 4} atau *C* = {1, 2, 3, 5}.

C tidak boleh memuat 4 dan 5 sekaligus karena *C* adalah *proper subset* dari *B*.

- Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ maka $A \subseteq C$



Latihan

1. Misalkan $A = \{5\}$ dan $B = \{5, \{5\}\}$.
   (a) Apakah $A \subseteq B$? Jelaskan!
   (b) Apakah $A \in B$? Jelaskan!
   (c) Apakah A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B?

2. Tentukan apakah pernyataan di bawah ini benar atau salah:
   (a) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
   (b) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
   (c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$
   (d) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$
   (e) Jika $A \subseteq B$ dan $B \in C$, maka $A \in C$
   (f) Jika $A \in B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \in C$.
   (g) Jika $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, maka $\emptyset \in 2^A$
   (h) Jika $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, maka $\{\{\emptyset\}\} \subseteq 2^A$

i) $\emptyset \subseteq \emptyset$
j) $\emptyset \in \emptyset$
k) $\{\emptyset\} \in \emptyset$
l) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{\{a, b, c\}\}$
m) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{\{a, b, c$
n) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$
o) jika $A \in B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$
p) jika $A \subseteq B$ dan $B \in C$, maka $A \subseteq C$
q) $x \in \{x\}$
r) $\{x\} \subseteq \{x\}$
s) $\{x\} \in \{x\}$
t) $\{x\} \in \{\{x\}\}$
u) $\emptyset \subseteq \{x\}$
(v) $\emptyset \in \{x\}$

3. Didefinisikan A, B, C, D, dan E sebagai berikut:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, \{2\}, \{\{4\}\}\}$,

$C = \{1, \{1, 2\}, \{\{1, 2, 3\}\} \}$, $D = \{1, 2, 2, 1\}$.

Untuk tiap W, X, Y, Z yang didefinisikan di bawah ini, nyatakan apakah ia adalah elemen atau himpunan bagian dari tiap-tiap himpunan A, B, C, D.

$W = \{1, 3, 5\}$ $X = \{1, 2, 3\}$ $Y = \{4\}$ $Z = \{2\}$

Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.

- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 9.

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 5, 5, 8, 8\}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

(iv) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

(iv) A = {anjing, kucing, kuda}, B = {kucing, kuda, tupai, anjing}, maka $A \neq B$

- Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:
  - (a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
  - (b) jika $A = B$, maka $B = A$
  - (c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekivalen

- Himpunan *A* dikatakan ekivalen dengan himpunan *B* jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

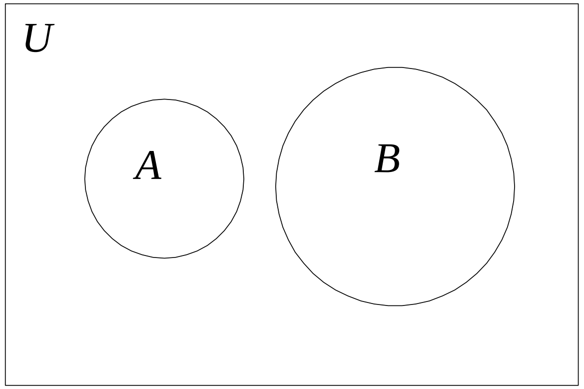
Contoh 10. Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

- Notasi : A // B

- Diagram Venn:



Contoh 11. Jika A = { x | x $\in$ **P**, x < 8 } dan B = { 10, 20, 30, ... }, maka A // B.

Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A.
- Notasi: P(A) atau 2^A
- Jika |A| = *m*, maka |P(A)| = 2^m.

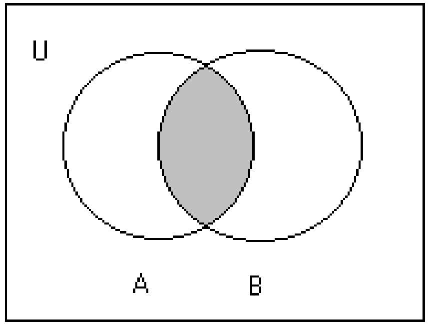
Contoh 12. Jika A = { 1, 2 }, maka P(A) = 2^A = { ∅, { 1 }, { 2 }, { 1, 2 }}, dan |P(A)| = 4

Contoh 13. Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah P(∅) ={∅}, dan himpunan kuasa dari himpunan {∅} adalah P({∅}) = {∅ , {∅}}.

Operasi Terhadap Himpunan

1. Irisan (*intersection*)

- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



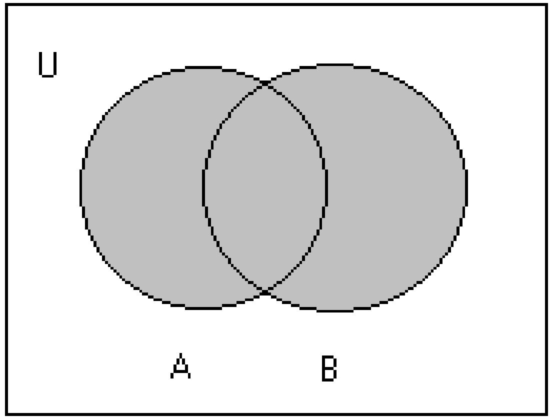
Contoh 14.

(i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \varnothing$. Artinya: A // B

2. Gabungan (*union*)

- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



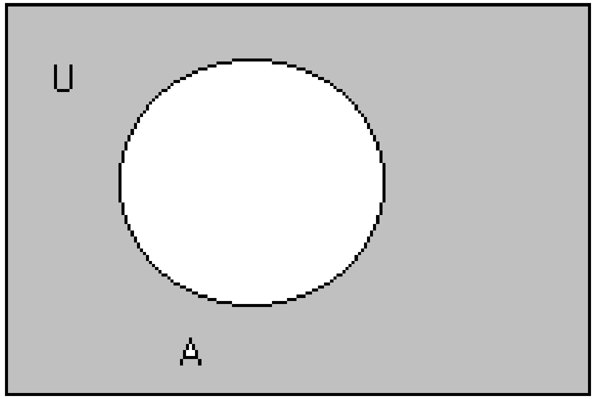
Contoh 15.

(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \varnothing = A$

3. Komplemen (*complement*)

- Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



Contoh 16.

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

(i) jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

(ii) jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\overline{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Contoh 17. Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri
B = himpunan semua mobil impor
C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990
D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta
E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

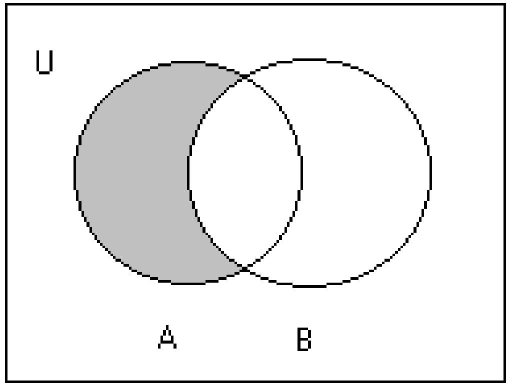
(i) "mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" → $(E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

(ii) "semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" → $A \cap C \cap D$

(iii) "semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta" → $\overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

4. Selisih (*difference*)

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



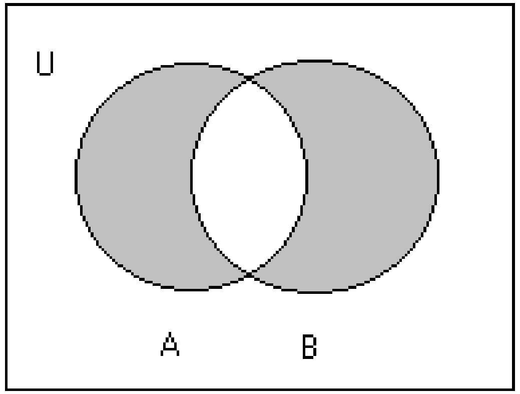
Contoh 18.

(i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$

(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

5. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



Contoh 19.

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

Contoh 20. Misalkan

U = himpunan mahasiswa
P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80
Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

(i) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$

(ii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" : $P \oplus Q$

(iii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai C" : U – ($P \cup Q$)

TEOREMA 2. Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh 20.

(i) Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka

$$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$$

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka

$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka:
   $\mid A \times B \mid = \mid A \mid . \mid B \mid$.
2. $(a, b) \neq (b, a)$.
3. $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

   Pada Contoh 20(i) di atas, $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$,
   $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$
   $C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$
   $D \times C \neq C \times D$.

4. Jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$, maka $A \times B = B \times A = \emptyset$

5. Perkalian kartesian dari dua himpunan atau lebih didefinisikan sebagai: $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times \ldots \times \mathrm{A}_n = \{(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n) \mid \mathrm{a}_i \in \mathrm{A}_i \text{ for } 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}\}$

Contoh 21. Misalkan

A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Jawab:
$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$.

Contoh 21. Daftarkan semua anggota himpunan berikut:

(a) $P(\varnothing)$ (b) $\varnothing \times P(\varnothing)$ (c) $\{\varnothing\}\times P(\varnothing)$ (d) $P(P(\{3\}))$

<u>Penyelesaian</u>:

(a) $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

(b) $\varnothing \times P(\varnothing) = \varnothing$ (ket: jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$ maka $A \times B = \varnothing$)

(c) $\{\varnothing\}\times P(\varnothing) = \{\varnothing\}\times \{\varnothing\} = \{(\varnothing,\varnothing))$

(d) $P(P(\{3\})) = P(\{ \varnothing, \{3\} \}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{3\}\}, \{\varnothing, \{3\}\} \}$

Latihan

Misalkan A adalah himpunan. Periksalah apakah setiap pernyataan di bawah ini benar atau salah dan jika salah, bagaimana seharusnya:

(a) $A \cap P(A) = P(A)$

(b) $\{A\} \cup P(A) = P(A)$

(c) $A - P(A) = A$

(d) $\{A\} \in P(A)$

(e) $A \subseteq P(A)$

Jawaban:

(a) $A \cap P(A) = P(A)$ → salah, seharusnya $A \cap P(A) = \emptyset$

(b) $\{A\} \cup P(A) = P(A)$ → benar

(c) $A - P(A) = A$ → benar

(d) $\{A\} \in P(A)$ → salah, seharusnya $\{A\} \subseteq P(A)$

(e) $A \subseteq P(A)$ →) salah, seharusnya $A \in P(A)$

Perampatan Operasi Himpunan

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

Contoh 22.

(i) $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

(ii) Misalkan $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, dan $C = \{\alpha, \beta\}$, maka

$A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha),$
$(2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$

(iii) Misalkan A = {a, b}, B = {5, 6}, C = {x, y, z}

maka, A × B × C = {(a, 5, x), (a, 5, y), (a, 5, z},
(a, 6, x), (a, 6, y), (a, 6, z),
(b, 5, x), (b, 5, y), (b, 5, z),
(b, 6, x), (b, 6, y), (b, 6, z)}

Latihan

1. Jika $A = \{a, b, \{a, c\}, \varnothing\}$ dan $B = \{a, \{a\}, d, e\}$, tentukan himpunan berikut:

(a) $A - \varnothing$	(b) $A - \{\varnothing\}$	(c) $\{\{a, c\}\} - A$
(d) $A \oplus B$	(e) $\{a\} - \{A\}$	(f) $P(A\text{-}B)$
(g) $\varnothing - A$	(h) B^2	(i) $A \cup (B \cap A)$
(j) $A \cap P(A)$		

2. Diketahui A = {+, – }, B = {00, 01, 10, 11}.
   (a) Daftarkan A x B
   (b) Berapa banyak elemen A^4 dan $(A \times B)^3$?

3. Misalkan *A*, *B*, dan *C* adalah himpunan. Tunjukkan bahwa

(a) $(A - C) \cap (C - B) = \varnothing$

(b) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$

(c) $(A - B) - C \subseteq A - C$

4. Apa yang dapat dikatakan tentang himpunan *A* dan *B* jika kesamaan berikut benar?

(a) $A - B = B - A$

(b) $A \cap B = B \cap A$

5. Dapatkah disimpulkan $A = B$ jika *A*, *B*, dan *C* adalah himpunan sedemikian sehingga

(a) $A \cup C = B \cup C$

(b) $A \cap C = B \cap C$

Bahan kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Himpunan

(Bag. 2 - Update 2022)

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI - ITB

Hukum-hukum Himpunan

- Disebut juga sifat-sifat (*properties*) himpunan
- Disebut juga hukum aljabar himpunan

1. Hukum identitas: – $A \cup \varnothing = A$ – $A \cap \mathrm{U} = A$	2. Hukum *null*/dominasi: – $A \cap \varnothing = \varnothing$ – $A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$
3. Hukum komplemen: – $A \cup \overline{A} = \mathrm{U}$ – $A \cap \overline{A} = \varnothing$	4. Hukum idempoten: – $A \cup A = A$ – $A \cap A = A$

5. Hukum involusi: – $\overline{(\overline{A})} = A$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $A \cup (A \cap B) = A$ – $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif: – $A \cup B = B \cup A$ – $A \cap B = B \cap A$	8. Hukum asosiatif: – $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Hukum distributif: – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	10. Hukum De Morgan: – $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum 0/1 – $\overline{\varnothing} = U$ – $\overline{U} = \varnothing$	

Prinsip Dualitas

Prinsip dualitas → dua konsep yang berbeda dapat saling dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh: Di AS → kemudi mobil di kiri depan

Di Inggris (juga Indonesia) → kemudi mobil di kanan depan

Peraturan:

(a) di Amerika Serikat,

- mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan,
- pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung

(b) di Inggris,

- mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan,
- pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung

Prinsip **dualitas**: Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris

Setir mobil di Amerika

Mobil berjalan di jalur kanan di AS

Mobil berjalan di jalur kiri di Indonesia

Setir mobil di Inggris/Indonesia

(Prinsip Dualitas pada Himpunan). Misalkan *S* adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika *S** diperoleh dari *S* dengan mengganti

$\cup \rightarrow \cap$,

$\cap \rightarrow \cup$,

$\emptyset \rightarrow \mathrm{U}$,

$\mathrm{U} \rightarrow \emptyset$,

sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan *S** juga benar dan disebut dual dari kesamaan *S*.

1. Hukum identitas: $A \cup \emptyset = A$	Dualnya: $A \cap \mathrm{U} = A$
2. Hukum *null*/dominasi: $A \cap \emptyset = \emptyset$	Dualnya: $A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$
3. Hukum komplemen: $A \cup \overline{A} = \mathrm{U}$	Dualnya: $A \cap \overline{A} = \emptyset$
4. Hukum idempoten: $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$

5. Hukum penyerapan: $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif: $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing} = U$	Dualnya: $\overline{U} = \varnothing$

Contoh 23. Dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ adalah

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A.$$

Latihan

Tentukan dual dari kesamaan berikut:

(a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup \varnothing$

(b) $(A \cap \mathbf{U}) \cap (\varnothing \cup \overline{A}) = \varnothing$

(c) $A = (\overline{B} \cap A) \cup (A \cap B)$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Untuk dua himpunan A dan B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Contoh 24. Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Penyelesaian:

A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,

B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,

$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15),

Yang ditanyakan adalah $|A \cup B|$.

$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33$,

$|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20$,

$|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$

Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Untuk tiga buah himpunan A, B, dan C, berlaku

$$\begin{aligned}\left|A \cup B \cup C\right| = {} & \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| - \left|A \cap B\right| - \\ & \left|A \cap C\right| - \left|B \cap C\right| + \left|A \cap B \cap C\right|\end{aligned}$$

Untuk himpunan A_1, A_2, …, A_r, berlaku:

$$\begin{aligned}\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r\right| = {} & \sum_i \left|A_i\right| - \sum_{1 \le i \le j \le r} \left|A_i \cap A_j\right| + \\ & \sum_{1 \le i \le j \le k \le r} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \ldots + \\ & (-1)^{r-1} \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r\right|\end{aligned}$$

Contoh 25. Di antara bilangan bulat antara 101 – 600 (termasuk 101 dan 600 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi oleh 4 atau 5 namun tidak keduanya?

(jawaban setelah slide ini)

Penyelesaian:
Diketahui:

$|U| = 500$
$|A| = \lfloor 600/4 \rfloor - \lfloor 100/4 \rfloor = 150 - 25 = 125$
$|B| = \lfloor 600/5 \rfloor - \lfloor 100/5 \rfloor = 120 - 20 = 100$
$|A \cap B| = \lfloor 600/20 \rfloor - \lfloor 100/20 \rfloor = 30 - 5 = 25$

yang ditanyakan $|\overline{A \oplus B}| = ?$

Hitung terlebih dahulu

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 125 + 100 - 50 = 175$$

untuk mendapatkan

$$|\overline{A \oplus B}| = U - |A \oplus B| = 500 - 175 = 325$$

Latihan

- Tentukan banyak bilangan bulat antara 1 – 1000 (termasuk 1 dan 1000) yang habis dibagi oleh 3 atau 5 tetapi tidak habis dibagi oleh 7!

Partisi

- Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong A_1, A_2, … dari A sedemikian sehingga:

  (i) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = A$, dan
  (ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$

- **Contoh 26.** Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, maka $\{ \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{7, 8\}, \{5, 6\} \}$ adalah partisi A.

Himpunan-ganda (Multiset)

- Himpunan yang elemennya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut **himpunan-ganda** (*multiset*).

  Contoh: {1, 1, 1, 2, 2, 3}, {2, 2, 2}, {2, 3, 4}, {}.

- **Multiplisitas** dari suatu elemen pada himpunan ganda adalah jumlah kemunculan elemen tersebut pada himpunan ganda. Contoh: M = { 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1 }, multiplisitas 0 adalah 4.

- Himpunan (*set*) merupakan contoh khusus dari suatu *multiset*, yang dalam hal ini multiplisitas setiap elemennya adalah 0 atau 1.

- Kardinalitas suatu *multiset* didefinisikan sebagai kardinalitas himpunan yang ekivalen dengannya, dengan mengasumsikan semua elemen di dalam *multiset* berbeda. Contoh: A = {1, 1, 1, 2, 2, 3}, maka | A | = 6

Operasi Antara Dua Buah *Multiset*:

Misalkan P dan Q adalah *multiset*:

1. $P \cup Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas maksimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.

   Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q =\{ a, a, b, c, c \}$,

   $P \cup Q = \{ a, a, a, b, c, c, d, d \}$

2. $P \cap Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas minimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.

   Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$

   $P \cap Q = \{ a, a, c \}$

3. P – Q adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan:

- multiplisitas elemen tersebut pada P dikurangi multiplisitasnya pada Q, jika selisihnya positif
- 0, jika selisihnya nol atau negatif.

Contoh: $P = \{ a, a, a, b, b, c, d, d, e \}$ dan $Q = \{ a, a, b, b, b, c, c, d, d, f \}$ maka $P – Q = \{ a, e \}$

4. $P + Q$, yang didefinisikan sebagai jumlah (*sum*) dua buah himpunan ganda, adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas elemen tersebut pada P dan Q.

Contoh: $P = \{ a, a, b, c, c \}$ dan $Q = \{ a, b, b, d \}$,
$P + Q = \{ a, a, a, b, b, b, c, c, d \}$

Pembuktian Proposisi Perihal Himpunan

- Proposisi himpunan adalah argumen yang menggunakan notasi himpunan.
- Proposisi dapat berupa:

1. Kesamaan (*identity*)

   Contoh: Buktikan "$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$"

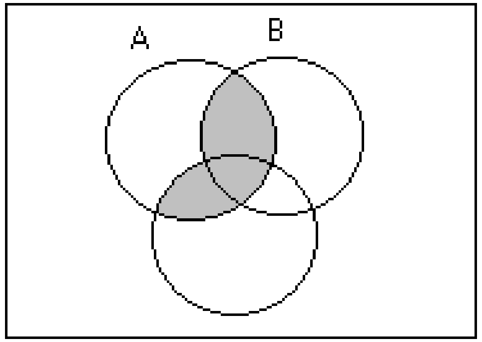
2. Implikasi

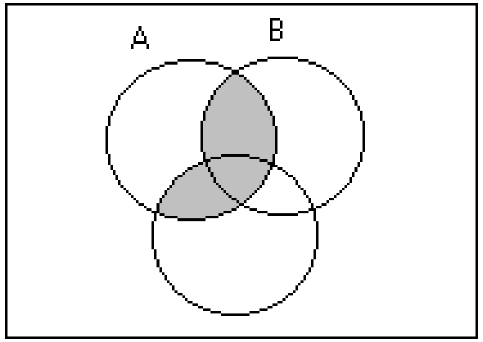
   Contoh: Buktikan bahwa "Jika $A \cap B = \varnothing$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka selalu berlaku bahwa $A \subseteq C$".

1. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

Contoh 26. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan diagram Venn.

Bukti:





$A \cap (B \cup C)$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Kedua digaram Venn memberikan area arsiran yang sama.
Terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- Diagram Venn hanya dapat digunakan jika himpunan yang digambarkan tidak banyak jumlahnya.

- Metode ini *mengilustrasikan* ketimbang membuktikan fakta.

- Diagram Venn tidak dianggap sebagai metode yang valid untuk pembuktian secara formal.

2. Pembuktikan dengan menggunakan tabel keanggotaan

Contoh 27. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bukti:

1 berarti "x adalah elemen dari himpunan ini"
0 berarti "x adalah bukan elemen dari himpunan ini"

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Karena kolom $A \cap (B \cup C)$ dan kolom $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ sama, maka $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3. Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan.

Contoh 28. Misalkan *A* dan *B* himpunan. Buktikan bahwa

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$$

Bukti:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) &= A \cap (B \cup \overline{B}) && \text{(Hukum distributif)} \\ &= A \cap U && \text{(Hukum komplemen)} \\ &= A && \text{(Hukum identitas)} \end{aligned}$$

Contoh 29. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

Bukti:

$$
\begin{aligned}
A \cup (B - A) &= A \cup (B \cap \overline{A}) && \text{(Definisi operasi selisih)} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) && \text{(Hukum distributif)} \\
&= (A \cup B) \cap \mathrm{U} && \text{(Hukum komplemen)} \\
&= A \cup B && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

Contoh 30. Buktikan bahwa untuk sembarang himpunan *A* dan *B*, bahwa

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ dan

(ii) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

Bukti:

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B)$ (H. distributif)

$= U \cap (A \cup B)$ (H. komplemen)

$= A \cup B$ (H. identitas)

(ii) adalah dual dari (i)

$A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$ (H. distributif)

$= \varnothing \cup (A \cap B)$ (H. komplemen)

$= A \cap B$ (H. identitas)

- **Latihan**. Misalkan *A*, *B*, dan *C* adalah himpunan. Gunakan hukum-hukum aljabar himpunan dan prinsip dualitas untuk menentukan hasil dari operasi himpunan

  (a) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

  (b) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

Jawaban:

a. $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

$= ((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) \cup ((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$ [Hukum Asosiatif]

$= (B \cap (A \cup \overline{A})) \cup (\overline{B} \cap (A \cup \overline{A}))$ [Hukum Distributif]

$= (B \cap U) \cup (\overline{B} \cap U)$ [Hukum Komplemen]

$= U \cap (B \cup \overline{B})$ [Hukum Distributif]

$= U \cap U$ [Hukum Komplemen]

$= U$ [Hukum Idempoten]

b. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

$= \emptyset$ [Hukum Dualitas dari jawaban a]

- **Latihan**. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan dengan hukum-hukum himpunan bahwa

  $(A - B) \cap (A - \mathrm{C}) = A - (B \cup C)$.

Jawaban:

$$
\begin{aligned}
(A - B) \cap (A - C) &= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) && \text{(Definisi Selisih)} \\
&= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) && \text{(Hukum Distributif)} \\
&= A \cap \overline{B \cup C} && \text{(Hukum DeMorgan)} \\
&= A - (B \cup C) && \text{(Definisi Selisih)}
\end{aligned}
$$

Latihan

Misalkan A adalah himpunan bagian dari himpunan semesta (U). Tuliskan hasil dari operasi beda-setangkup berikut?

(a) $A \oplus U$ (b) $A \oplus \overline{A}$ (c) $\overline{A} \oplus U$

Penyelesaian:

(a) $A \oplus U = (A - U) \cup (U - A)$ (Definisi operasi beda setangkup)

$= (\varnothing) \cup (\overline{A})$ (Definisi opearsi selisih)

$= \overline{A}$ (Hukum Identitas)

(b) $A \oplus \overline{A} = (A - \overline{A}) \cup (\overline{A} - A)$ (Definisi operasi beda setangkup)

$= (A \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{A})$ (Definisi operasi selisih)

$= A \cup \overline{A}$ (Hukum Idempoten)

$= U$ (Hukum Komplemen)

(c) $\overline{A} \oplus U = (\overline{A} \cup U) - (\overline{A} \cap U)$ (Definisi operasi beda setangkup)

$= U - \overline{A}$ (Hukum Null dan Hukum Identitas)

$= A$ (Definisi operasi selisih)

4. Pembuktian dengan menggunakan definisi

- Metode ini digunakan untuk membuktikan pernyataan himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, tetapi pernyataan yang berbentuk implikasi. Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian ($\subseteq$ atau $\subset$).

Contoh 31. Misalkan A dan B himpunan. Jika $A \cap B = \emptyset$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$. Buktikan!

Bukti:

(i) Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika dan hanya jika setiap $x \in P$ juga $\in Q$. Misalkan $x \in A$. Karena $A \subseteq (B \cup C)$, maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup \mathrm{C})$.

(ii) Dari definisi operasi gabungan ($\cup$), $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$. Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \emptyset$, maka $x \notin B$

Dari (i) dan (ii), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall \mathrm{x} \in A$ juga berlaku $x \in \mathrm{C}$, maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$.

Penggunaan Himpunan dalam Teori Bahasa Formal

- **Alfabet**: himpunan terbatas simbol-simbol

  Contoh: alfabet latin , {a, b, c, …, z}

  alfabet Yunani, $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega\}$

  alfabet biner, {0, 1}

- **String**: barisan yang disusun oleh simbol-simbol alfabet.

  $a_1a_2a_3\ldots a_n$, $a_i \in A$ (A adalah alfabet)

  Nama lain untuk string adalah **kalimat** atau ***word***

- Jika A adalah alfabet, maka A^n menyatakan himpunan semua string dengan panjang n yang dibentuk dari himpunan A.

- A^* adalah himpunan semua rangkaian simbol dari himpunan A yang terdiri dari 0 simbol (string kosong), satu simbol, dua simbol, dst.

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots$$

Contoh: Misalkan A = {0, 1}, maka

$A^0 = \{\varepsilon\}$

$A^1 = \{0, 1\}$

$A^2 = \{00, 01, 10, 11\}$

$A^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

…

- **Bahasa** (pada alfabet A) adalah himpunan bagian dari A^*.

  Contoh: Misalkan $A = \{a, b, c\}$, maka berikut ini adalah contoh-contoh bahasa pada alfabet A:

  $L_1 = \{a, aaa, bc, ac, abc, cab\}$

  $L_2 = \{aba, aabaa\}$

  $L_3 = \{\varepsilon\}$

  $L_4 = \{a^i c b^i \mid i \geq 1\}$

Tipe *Set* dalam Bahasa Pascal

Bahasa Pascal menyediakan tipe data khusus untuk himpunan, yang bernama *set*. Tipe *set* menyatakan himpunan kuasa dari tipe ordinal (*integer*, *character*).

Contoh:

```
type
   HurufBesar = 'A'..'Z';{ enumerasi }
   Huruf = set of HurufBesar;
var
   HurufKu : Huruf;
```

Nilai untuk peubah `HurufKu` dapat diisi dengan pernyataan berikut:

```
HurufKu:=[‘A’, ‘C’, ‘D’];
HurufKu:=[‘M’];
HurufKu:=[];     { himpunan kosong }
```

- Operasi yang dapat dilakukan pada tipe himpunan adalah operasi gabungan, irisan, dan selisih seperti pada contoh berikut:

```
{gabungan}
HurufKu:=['A', 'C', 'D'] + ['C', 'D', 'E'];

{irisan}
HurufKu:=['A', 'C', 'D'] * ['C', 'D', 'E'];

{selisih}
HurufKu:=['A', 'C', 'D'] - ['C', 'D', 'E'];
```

- Uji keanggotaan sebuah elemen di dalam himpunan dilakukan dengan menggunakan opeator *in* seperti contoh berikut:

```
if 'A' in HurufKu then ...
```

Tipe *Set* dalam Bahasa Python

- Bahasa Python menyediakan struktur data untuk *set* beserta operasi-operasinya.

- Membuat himpunan kosong dengan *set constructor*:

```python
myset = set()
myset2 = set([]) # both are empty sets
```

- Membuat sebuah himpunan dengan *set constructor* atau notasi { }

```
myset = set(sequence)
myset2 = {ekspression for variable in sequence}
myset3 = {list of elements}
```

```
>>> myset = set('matematika')          # cara pertama
>>> myset                    # Menampilkan himpunan
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm', 't'}

>>> myset = {x for x in 'matematika’} # cara kedua
>>> myset                    # Menampilkan himpunan
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm', 't'}

>>> myset2 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
>>> myset2
{1, 2, 3, 4, 5, 6}
```

```
>>> myset.add('z')     # Menambahkan elemen baru 'z'
>>> myset
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm', 't', 'z'}


>>> myset.remove('t') # Menghapus elemen 't'
>>> myset
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm', 'z'}

>>> myset.pop()        # Mengambil elemen teratas
'z'

>>> myset
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm'}
```

- Operator >= dan <= adalah untuk menguji apakah sebuah himpunan merupakan *superset* atau *subset* terhadap himpunan yang lain

- Operator > dan < adalah operator untuk menguji *proper superset* atau *proper subset*.

```
>>> S1 = set('matematika')

>>> S2 = set('matika')
>>> S1 >= S2
True
>>> S1 <= S2
False
>>> S2 <= S1
True
>>> S2 < S1
True
```

Operasi Himpunan

- Gabungan: `set | other | …`
- Irisan: `set & other & …`
- Selisih: `set – other – …`
- Beda setangkup: `set ^ other`

```
>>> S1 = set('matematika')
>>> S1
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm', 't'}
>>> S2 = set('diskrit')
>>> S2
{'d', 'i', 'k', 'r', 's', 't'}
>>> S1 | S2
{'a', 'd', 'e', 'i', 'k', 'm', 'r', 's', 't'}
>>> S1 & S2
{'i', 'k', 't'}
>>> S1 - S2
{'a', 'e', 'm'}
>>> S2 - S1
{'d', 'r', 's'}
>>> S1 ^ S2
{'a', 'd', 'e', 'm', 'r', 's'}
```

Latihan Soal-Soal Himpunan

1. (Kuis IF2091 2013) Misalkan *A* dan *B* adalah sebuah himpunan. Buktikan dengan hukum-hukum himpunan, jangan lupa menyebutkan hukum yang dipakai.

$$(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \bar{B})} \quad = \quad (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \overline{(\bar{B})})$$

Jawaban:

$(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \bar{B})}$	=	$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \overline{(\bar{B})})$	(Hukum De Morgan)
	=	$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$	(Hukum Involusi)
	=	$(B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$	(Hukum Komutatif x2)
	=	$B \cap (A \cup \bar{A})$	(Hukum Distributif)
	=	$B \cap U$	(Hukum Komplemen)
	=	B	(Hukum Identitas)

2. Hitunglah banyak bilangan genap diantara 1 sampai 2000 yang habis dibagi 7 tetapi tidak habis dibagi 9.

- **Jawaban**: Banyak bilangan tersebut adalah banyak bilangan yang habis dibagi 2 dan 7 dikurangi banyak bilangan yang habis dibagi 2,7, dan 9.

  Banyak bilangan habis dibagi 2 dan 7 = $\left\lfloor \frac{2000}{14} \right\rfloor = 142$

  Banyak bilangan habis dibagi 2,7, dan 9 ada $\left\lfloor \frac{2000}{126} \right\rfloor = 15$

  Jadi, banyak bilangan tersebut adalah 142 – 15 = 127.

3. (UTS 2012) Misalkan A dan B adalah himpunan pada himpunan universal *U*. Tentukan daftar urutan ini secara membesar berdasarkan banyaknya anggota:

$$|A - B|, \quad |A \cup B|, \quad |\emptyset|, \quad |A \cap B|, \quad |A| + |B|.$$

Jawaban:

$|\emptyset|,\ \ |A \cap B|,\ |A - B|,\ \ |A \cup B|,\ \ |A| + |B|.$

4. (Kuis 2011) Hitung berapa bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan 200 yang habis dibagi 4 atau 7 atau 9?

Jawaban: Misalkan :

A = himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 4,

B = himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 7,

C = himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 9

Dengan menggunakan prinsip inklusi eksklusi, banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 4 atau 7 atau 9 yaitu :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= \lfloor \frac{200}{4} \rfloor + \lfloor \frac{200}{7} \rfloor + \lfloor \frac{200}{9} \rfloor - \lfloor \frac{200}{28} \rfloor - \lfloor \frac{200}{36} \rfloor - \lfloor \frac{200}{63} \rfloor + \lfloor \frac{200}{252} \rfloor$$

$$= 50 + 28 + 22 - 7 - 5 - 3 + 0 = 85$$

5. (UTS 2010) Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan secara aljabar himpunan bahwa $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$