Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет
Кафедра информатики

Гамкрелидзе Тимур Андреевич

Разработка программного приложения для локализации инвариантных множеств динамических систем в обычной и интервальной арифметике

Отчет по преддипломной практике

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент Ампилова Н. Б.

Рецензент:
Симуни М. Л.

Санкт-Петербург
2023

Saint-Petersburg State University

Mathematics and Mechanics Faculty
Department of Informatics

Gamkrelidze Timur Andreevich

Software application development for localization of invariant sets of dynamical systems in ordinary and interval arithmetic

Report on undergraduate practice

Scientific surepvisor:
PhD, associate professor
Ampilova N. B.

Reviewer:
Simuni M. L.

Saint-Petersburg
2023

Оглавление

Содержание

Введение

В научных исследованиях все чаще используют динамические системы, которые позволяют создавать удобные модели для многих естественных процессов, однако, при решении сложных динамических систем не всегда получается использовать аналитические методы, и в таких случаях используют методы исследования, не требующие знания решения в явном виде, такие как прикладная символическая динамика [13]. Компьютерное моделирование является неотъемлемой частью исследований, это помогает не только выполнить приближенные вычисления при построении решений, но и визуализировать результаты [11].

Однако в задачах, зависящих от множества параметров, возникают сложности при выявлении особенностей поведения системы, поэтому нужно проводить объемные вычисления для получения классификации особенностей. Современные программные пакеты и среды визуального моделирования (Rand Model Designer, Matlab, Mathematica) ([5], [6], [7], [8]) имеют множество инструментов для построения моделей и исследования их поведения. Но потребность в разработке новых алгоритмов исследования сложных динамических систем возрастает с увеличением сложности возникающих моделей [4].

Существует два типа динамических систем – непрерывные и дискретные. Непрерывные системы описываются автономными системами дифференциальных уравнений, в то время как дискретные системы описываются разностными уравнениями. Одной из ключевых характеристик системы являются ее инвариантные множества, которые, в простейшем случае, могут быть особыми точками (для непрерывных систем) или неподвижными точками (для дискретных систем), а также предельными циклами и периодическими траекториями. Тем не менее определение этих инвариантных множеств может потребовать приближенных вычислений [9].

В большинстве случаев инвариантные множества систем бывают сложными образованиями. Среди таких систем хорошо известны системы с так называемыми странными аттракторами, как, например, отображение Хенона. Эти устойчивые образования невозможно описать как объединения более простых инвариантных множеств.

Существуют различные алгоритмы для построения приближений к инвариантным множествам, такие как итерации точек, итерации отрезков и метод символического образа. Все они могут быть применены как в обычной, так и в интервальной арифметике.

Использование интервальных вычислений позволяет работать не с точными значениями, а с интервалами значений, что дает возможность получить верхние границы для инвариантных множеств. Метод символического образа был реализован в работе [14], а его интервальный вариант рассматривался в [12].

Актуальность работы

Актуальной является задача создания программного приложения, которое объединяло бы основные методы построения инвариантных множеств непрерывных и дискретных динамических систем, реализованных в обычной и интервальной арифметике.

Цель работы

Создание программного приложения, содержащей модуль интервальных вычислений и реализацию базовых алгоритмов локализации инвариантных множеств непрерывных и дискретных динамических систем в вещественной и интервальной арифметике.

Постановка задачи.

1. Создание модуля интервальных вычислений на языке C++
2. Реализация парсера строк в вещественной и интервальной арифметике для возможности работы с любыми динамическими системами
3. Реализация алгоритма итерации отрезка в вещественной и интервальной арифметике
4. Реализация алгоритма итераций точек области в вещественной арифметике

Работа состоит из введения, 7 глав и заключения. В главах 1 и 2 приведены основые определения, которые используются в данной работе; глава 3 содержит обзор методов построения инвариантных множеств и алгоритмов их реализации; в главе 4 и 5 приведены описания интерфейса приложения и работы парсера для обработки строк; в главах 6 и 7 содержатся результаты работы программы на некоторых примерах динамических систем и краткое описание работы программы.

1 Основные определения теории динамических систем

Введем основные понятия, связанные с динамическими системами и их основными характеристиками.

1.1 Непрерывные динамические системы

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что вектор-функция f принадлежит классу C^r, $r \geq 1$, в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\phi(t, x_0)$ – решение системы (1) с начальными данными $(0, x_0)$. График отображения ϕ, т.е. множество точек $\{(t, \phi(t, x_0)) : t \in \mathbb{R}\}$, называется интегральной кривой решения $\phi(t, x_0)$. Траекторией этого решения называется проекция интегральной кривой на фазовое пространство $\mathbb{R}^n$, т.е. множество точек вида $x = \phi(t, x_0)$, $t \in \mathbb{R}$. Положительной полутраекторией называется множество точек $x = \phi(t, x_0)$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Система (1) порождает отображение $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ со следующими свойствами:

$$\phi(0, x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x)) \ \forall t, s \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

$$\phi \in C^{r+1,r}_{t,x}. \tag{4}$$

Данное отображение называется гладкой динамической системой на $\mathbb{R}^n$ с непрерывным временем. Множество $\{x = \phi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$ называется траекторией или орбитой точки x_0 под действием ϕ. Траектория автономной системы может:

- быть состоянием равновесия или точкой покоя, если $\phi(t, x_0) \equiv x_0, t \in \mathbb{R}$;
- соответствовать периодическому решению, отличному от постоянного, если существует такое число $\omega > 0$, что $\phi(t + \omega, x_0) \equiv \phi(t, x_0)$ и $\phi(t, x_0) \neq x_0$ (периодическая или замкнутая траектория);
- быть непериодической если для любых $t_1 \neq t_2$ выполняется соотношение $\phi(t_1, x_0) \neq \phi(t_2, x_0)$.

1.2 Дискретные динамические системы

Рассмотрим $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм класса $C^r, r \geq 1$ (т.е. гомеоморфизм такой, что f, f^{-1} — отображения класса C^r) и отображение

$$\phi(m, x) = \begin{cases} x, & m = 0, \\ f^m(x), & m > 0, \\ f^{-|m|}(x), & m < 0, \end{cases}$$

где f^m означает m-ю степень отображения. Отображение ϕ, обладающее следующими свойствами:

$$\phi(0, x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$\phi(m_1 + m_2, x) = \phi(m_1, \phi(m_2, x)) \quad \forall m_1, m_2 \in Z, x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

$$\forall \text{ фиксированного числа } m \ \phi(m, x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ класса } C^r \tag{7}$$

называется гладкой динамической системой с дискретным временем.

Множество $\{x = \phi(k, x_0), \quad k \in Z\}$ называется траекторией точки x_0 под действием ϕ.

1.3 Инвариантные множества

Одной из главных характеристик динамических систем являются их инвариантные множества, к которым траектории систем стремятся при $t \to \pm\infty$,— предельные множества динамических систем. Пусть задана система вида (1) с решением ϕ. Инвариантным множеством для системы (1) называется множество $D \subset \mathbb{R}^n$, если для любой точки $x_0 \in D$ множество $\{\phi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\} \subset D$. Если для любой точки $x_0 \in D$ выполняется соотношение $\{\phi(t, x_0), t \geq 0\} \subset D$, то множество D называется положительно инвариантным. Множество D называется инвариантным относительно диффеоморфизма f, если выполняется условие $f(D) = D$.

В случае непрерывных динамических систем простейшими предельными множествами являются замкнутые траектории и точки покоя, а для дискретных систем — неподвижные и периодические точки. Особые и неподвижные точки могут быть найдены аналитически или путем численного решения соответствующей системы уравнений.

Если множество Λ диффеоморфизма f является замкнутым, инвариантным и асимптотически устойчивым (т.е. если существует окрестность V множества Λ, такая что $\forall x \in V \ \lim_{n\to+\infty} \rho(\Lambda, f^n(x)) = 0$), то оно называется аттрактором.

2 Основные определения интервального анализа

2.1 Интервальная арифметика

Рассмотрим два интервала $\mathbf{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$ и $\mathbf{b} = [\underline{b}, \overline{b}]$ ($\underline{a}, \overline{a}, \underline{b}$ и $\overline{b} \in \mathbb{R}$) и бинарную операцию * из множества $O = \{+, -, \cdot, /\}$. Определим данные операции над $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ следующим образом:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \{a * b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\}, \tag{8}$$

при этом $0 \notin \mathbf{b}$ в случае деления интервалов.

Обозначим через $\mathbb{IR}$ множество интервалов с вещественными координатами. Оно, очевидно, замкнуто относительно операций из O. Однако важен тот факт, что результат $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ может быть вычислен с помощью границ интервалов:

$$\begin{gathered}
\mathbf{a} + \mathbf{b} = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}] \\
\mathbf{a} - \mathbf{b} = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}] \\
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [min\{\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \underline{ab}\}, max\{\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \underline{ab}\}]
\end{gathered}$$

Предположим, что $\dfrac{1}{\mathbf{b}} = \left\{ \dfrac{1}{b} \,\middle|\, b \in \mathbf{b}, 0 \notin \mathbf{b} \right\}$. Тогда

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \mathbf{a} \cdot \frac{1}{\mathbf{b}}$$

Основная теорема интервальной арифметики дает ответ на вопрос о применимости введенных арифметических операций для оценки областей значений выражений, состоящих из нескольких операций:

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция вещественных аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и для неё определён результат $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ подстановки вместо аргументов интервалов их изменения $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{IR}$ и выполнения всех действий над ними по правилам интервальной арифметики. Тогда

$$\{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in \mathbf{x}_1, x_2 \in \mathbf{x}_2, \ldots, x_n \in \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n),$$

т.е. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ содержит множество значений функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$. Если выражение для $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержит не более чем по одному вхождению каждой переменной в первой степени, то вместо включения выполняется точное равенство.

В $\mathbb{IR}$ выполняется субдистрибутивность:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \subseteq \mathbf{ab}+\mathbf{ac}. \tag{9}$$

Также интервальная арифметика обладает свойством монотонности по включению:

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{c}, \mathbf{b} \subseteq \mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{a} * \mathbf{b} \subseteq \mathbf{c} * \mathbf{d} \tag{10}$$

Введем также понятие естественного интервального расширения.

Пусть $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана аналитическим выражением $f(x)$ и является конечной комбинацией элементарных операций и элементарных функций $\phi \in F = \{sin, cos, tg, arctg, exp, ln, abs, sqr, sqrt\}$. Если в эту функцию вместо переменной x подставить интервал $\mathbf{x} \subseteq D$ вычислить значение интервального выражения по правилам интервальной арифметики, то в результате снова получится интервал. Он обозначается через $f(\mathbf{x})$ и называется естественным расширением функции f на интервал $\mathbf{x}$.

Если дана аналитическая функция $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая состоит из элементарных функций и операций $\phi \in F = \{sin, cos, tg, arctg, exp, ln, abs, sqr, sqrt\}$, и $\mathbf{x}$ представляет собой интервал, принадлежащий D, то естественным расширением функции f на интервал $\mathbf{x}$ называется интервал, полученный путем применения правил интервальной арифметики для вычисления значения функции $f(\mathbf{x})$. При этом, результат также представляет собой интервал.

2.2 Интервальные векторы и матрицы

Возьмем интервалы $a_1, a_2, ..., a_n$ и образуем из них кортеж $a = (a_1\ a_2\ ...\ a_n)$. Данный кортеж называется интервальным вектором. Сами интервалы $a_1, a_2, ..., a_n$ называются компонентами образуемых ими векторов.

Множество n-векторов с компонентами из $\mathbb{IR}$ обозначается как $\mathbb{IR}^n$. Для нулевых векторов (у которых все компоненты являются нулевыми интервалами) используется обозначение "0".

Интервальные векторы из $\mathbb{IR}^n$ являются прямыми произведениями интервалов из $\mathbb{IR}$, а их геометрическим образом служат брусы (прямоугольные параллелепипеды) в пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. Рис. 3.1 и Рис. 3.2).

Интервальная матрица — это прямоугольная таблица (матрица), составленная из интервалов $\mathbb{IR}$. Обозначается как $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$. К интервальным матрицам

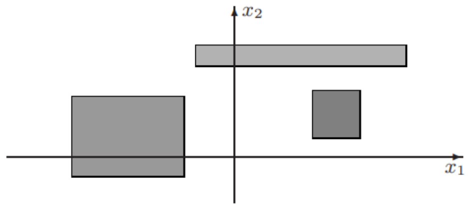


Рис. 1: Интервальные вектор-брусы в $\mathbb{R}^2$

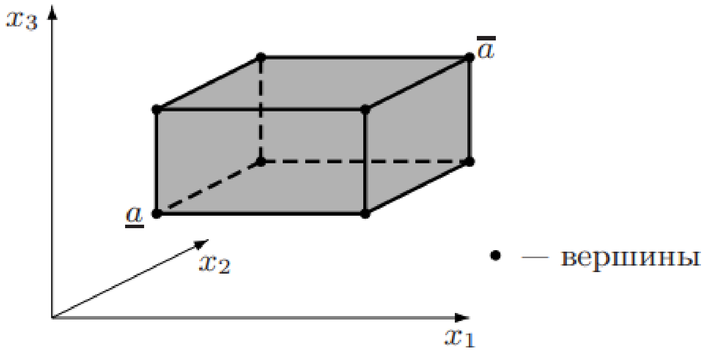


Рис. 2: Интервальные вектор-брусы в $\mathbb{R}^3$

применима вся та же терминология, что и по отношению к стандартным матрицам.

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Вершинами вектора $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ являются вектора $\underline{\mathbf{a}} = (\underline{\mathbf{a}_1}, \underline{\mathbf{a}_2}, \dots, \underline{\mathbf{a}_n})$ и $\overline{\mathbf{a}} = (\overline{\mathbf{a}_1}, \overline{\mathbf{a}_2}, \dots, \overline{\mathbf{a}_n})$, состоящие из нижних и верхних концов его компонент. Множество вершин интервального вектора обозначается следующим образом:

$$vert\ \mathbf{a} = \{a \in \mathbb{R}^n \mid a_i \in \{\underline{\mathbf{a}_i}, \overline{\mathbf{a}_i}\}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Аналогично определяется множество вершин интервальной матрицы:

$$vert\ \mathbf{A} = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid A = (a_{ij}), a_{ij} \in \{\underline{\mathbf{a}_{ij}}, \overline{\mathbf{a}_{ij}}\}\}$$

Особо важным является следующее определение:

Если S — непустое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^{m \times n}$, то его интервальной оболочкой $\square S$ называется наименьший по включению интервальный вектор (или матрица), содержащий S:

$$\Box S = \bigcap\{\mathbf{a} \in \mathbb{IR}^n \mid S \subseteq \mathbf{a}\}$$

$$\Box S = \bigcap\{\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n} \mid S \subseteq \mathbf{A}\}$$

Интервальная оболочка — это интервальный объект, наилучшим образом приближающий извне рассматриваемое множество, и компоненты S являются проекциями множества S на координатные оси пространства.

3 Алгоритмы построения приближений к инвариантным множествам

Наиболее часто используется brute force algorithm [10]. Из преимуществ такого подхода можно выделить простоту реализации (численное интегрирование в случае систем с непрерывным временем, а в случае систем с дискретным временем — построение приближенных итераций исходного отображения) и возможность локализации устойчивых предельных множеств.

Мы рассмотрим некоторые основные методы, позволяющие решать задачу локализации инвариантных множеств непрерывных и дискретных динамических систем. Сложность метода зависит от вида исследуемой системы. В простых случаях мы можем построить множество аналитически, в остальных случаях возможно исследование с применением пакетов символьных преобразований и использование численных методов.

3.1 Итерации точек выбранной области

Первым приближением к инвариантному множеству системы можно считать то множество точек, которое остается в выбранной области под действием исследуемой системы при достаточно большом числе итераций. Для этого рассматривается достаточно мелкая сетка на области, и итерируются ее узлы (точки). При уменьшении размеров ячеек сетки мы получаем более точное построение. Этот алгоритм является видимо самым простым и естественным способом.

Алгоритм допускает естественное расширение, позволяющее выделять подмножества точек, покидающих область за определенное число итераций. Это дает возможность не только уточнять структуру инвариантного множества путем изменения числа итераций, но и построить достаточно наглядные изображения. Описание методов интервальной арифметики можно найти в [1], [2], [3].

Этот метод является наиболее простым и основан на переборе точек выбранной области как начальных точек траекторий системы. Обычно строится достаточно мелкая сетка, итерируются ее узлы и отмечаются те точки, траектории которых не покидают область после достаточно большого числа итераций. Сами траектории при этом не строятся. Метод дает хорошее приближение, если брать достаточно много точек.

3.2 Итерации отрезка

В основе метода лежит идея последовательных итераций точек некоторого отрезка внутри области. Этот метод можно рассматривать как вариант предыдущего, где точки уточняются в процессе построения, а не выбираются заранее.

На отрезке выбираются N точек x_i и строятся их образы $f(x_i)$ при действии системы, заданной отображением f.

Последовательно соединенные точки $f(x_i)$ представляют собой ломаную, являющуюся приближением к образу отрезка. Чем меньше звено ломаной, тем точнее приближение. Поэтому прежде чем строить следующую итерацию, часто регулируют длину звеньев ломаной. Возможны два способа корректировки. Первый способ состоит в возврате на шаг назад, делении прообраза длинного звена (некоторого отрезка $[x_k, x_{k+1}]$) на нужное число частей (чаще всего пополам) и построении образов новых точек. Второй заключается в делении звеньев, длина которых больше некоторого числа h, на нужное число отрезков в полученном образе. Оба варианта приводят к уточнению звеньев ломаной путем добавления новых точек. Но в первом способе выбора мы фактически строим траектории начальных точек отрезка, тогда как второй метод добавляет части траекторий, которые начинались не на отрезке, а в точках последовательно получаемых ломаных. При этом мы следим за теми итерациями точек, которые не покидают выбранную область.

В данной работе мы используем второй метод с делением длинных звеньев пополам, т.е. если ломаная имеет звено $[A, B]$, для которого расстояние между концами становится больше h, то выбирается точка C на середине этого звена, и вместо $[A; B]$ рассматриваются $[A, C]$ и $[C, B]$.

Строится новая аппроксимирующая ломаная с длиной звеньев меньше h. Для лучшего графического изображения можно использовать тот факт, что кривая и ломаная будут не различимы на экране, если расстояние между узлами меньше, чем пиксель. Также для уменьшения затрат на используемую память удаляются точки (вершины ломаной), для которых расстояния между образами становятся меньше некоторого параметра.

В зависимости от параметра, определяющего расстояние, на котором точки перестают быть различимы, удаляются лишние точки. Точки, входящие в первое построенное приближение исходного отрезка, удаляться не будут. При исследовании непрерывных систем, как правило, используется метод Рунге-Кутта четвертого порядка для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод итераций отрезка является более гибким, чем метод итераций точек выбранной области. Он позволяет сократить число выбираемых начальных точек и за счет динамического выбора и уточнения точек для последующих итераций дает возможность строить более точное приближение.

3.3 Использование интервальной арифметики

Этот подход удобен, если мы работаем с величинами, которые известны приближённо, то есть имеется конечный интервал, в котором содержатся эти значения. Практически мы всегда выполняем приближенные вычисления, поэтому подход интервальной арифметики позволяет учитывать ошибки округления.

Операции интервальной арифметики можно рассматривать как обобщение модели вещественных чисел. Вырожденные интервалы, у которых начало и конец совпадают, можно отождествить с обычными вещественными числами.

3.3.1 Интервальный вариант метода итераций отрезка

В этом случае мы в качестве начальных приближений рассматриваем не точки на отрезке, а маленькие интервалы, на которые делим отрезок.

Итерация в интервальном методе происходит аналогично итерации в классическом методе за исключением некоторых нюансов:

1. В интервальном методе на каждой итерации совершается проверка того, лежит ли образ интервала целиком в заданной области: если часть образа лежит вне области, то он удаляется;

2. Помимо корректировки расстояния между образами также совершается еще корректировка длин образов: в случае, если образ интервала $[A, B]$ больше h, то на его середине берется точка C, и тогда $[A; B]$ разбивается на два интервала $[A, C]$ и $[C, B]$. Эта процедура совершается со всеми образами интервалов, чья длина превышает h, до тех пор, пока все образы не будут меньше h.

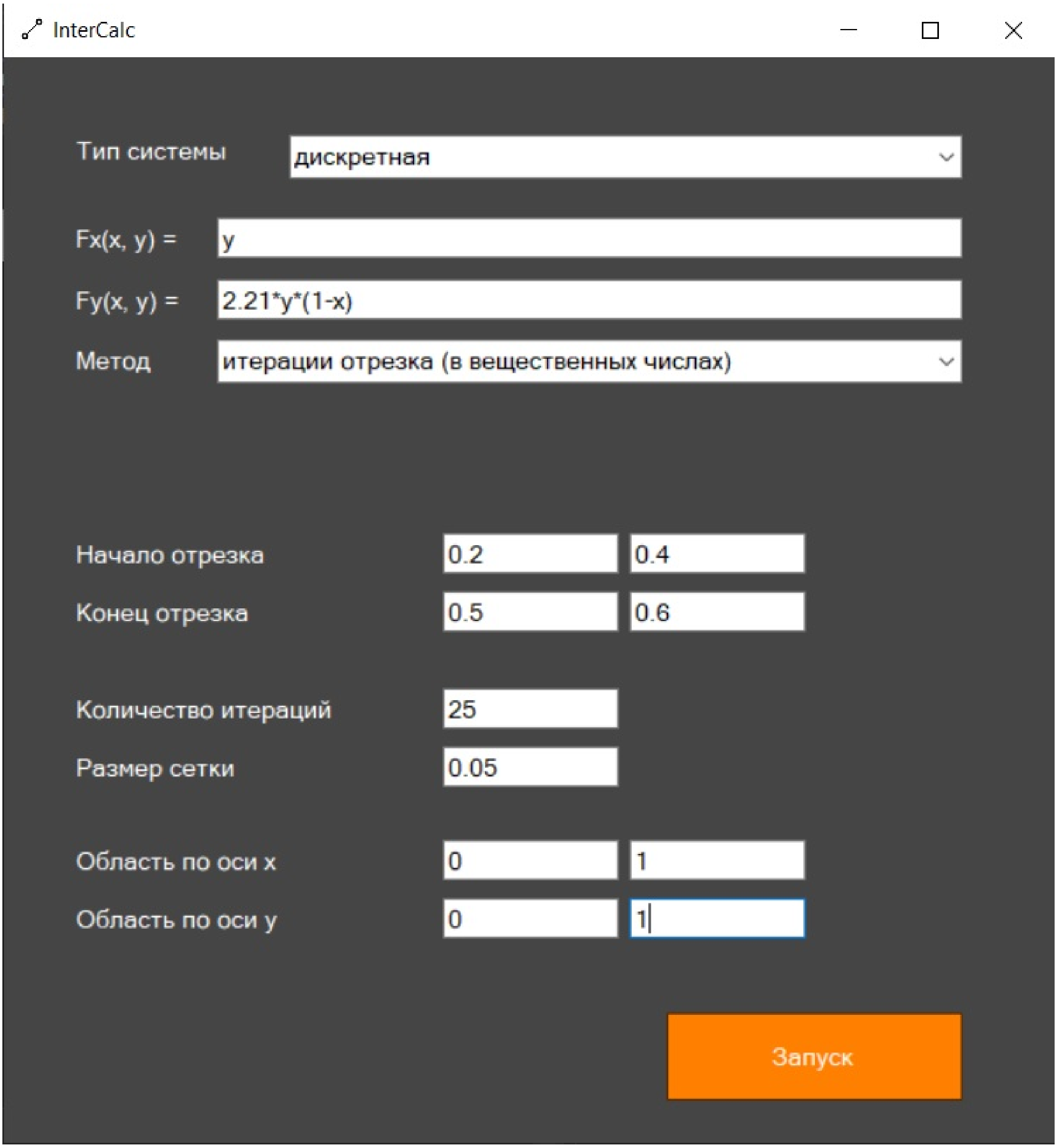
Интервальный метод позволяет построить приближение к инвариантному множеству с избытком, поэтому по сравнению с обычными методами он дает некоторую оценку сверху.

Проведенные эксперименты подтверждают эти выводы.

4 Программа с GUI

Для создания десктопного приложения на языке C++ с пользовательским интерфейсом была выбрана платформа WinForms C++ ввиду того, что он обладает огромным количеством возможностей и удобным визуальным конструктором.

Ниже приведен интерфейс десктопного приложения:



Пользователь может выбрать тип динамической системы в графе "Тип системы"и указать необходимый ему метод в графе "Метод". Также пользователь заранее задает количество итераций, размер сетки, необходимую область и координаты начала и конца отрезка для методов итерации отрезка в вещественном и интервальном случае.

5 Символьная обработка строк

Был реализован парсер для символьной обработки строк, который принимает на вход строки, состоящие из символов цифр, базовых арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления), скобки, а также x и y как переменные динамической системы. Данный парсер работает как с дискретными, так и с непрерывными динамическими системами, а также учитывает тот факт, что в переменных x и y могут быть как вещественные числа, так и интервалы.

Для работы с непрерывными динамическими системами используется метод Рунге-Кутта 4-го порядка.

Ниже приведены результаты работы программы с парсером. Для всех вычислений была выбрана сетка с шагом $\mathrm{h} = 0.05$. Во всех примерах совершается 20 итераций. Для методов итерации отрезка был выбран отрезок $[(0.2, 0.4), (0.5, 0.6)]$.

6 Результаты экспериментов

6.1 Отображение с задержкой

$$x_{n+1} = y_n$$
$$y_{n+1} = a \cdot y_n \cdot (1 - x_n)$$

Система имеет две неподвижные точки, которые при выбранном значении параметра являются седлом (точка $(0, 0)$) и неустойчивым фокусом (диагональная точка $(1 - 1/a, 1 - 1/a)$. В данном случае инвариантными множествами системы являются устойчивая и неустойчивая сепаратрисы седла. Результаты построения приближений к инвариантному множеству показывают сложное поведение неустойчивой сепаратрисы в окрестности седловой точки.

Вычисления проводились в области $[0, 1] \times [0, 1]$. Для итераций отрезка был взят отрезок $a = 2.21$. Ниже представлены полученные результаты применения алгоритмов.

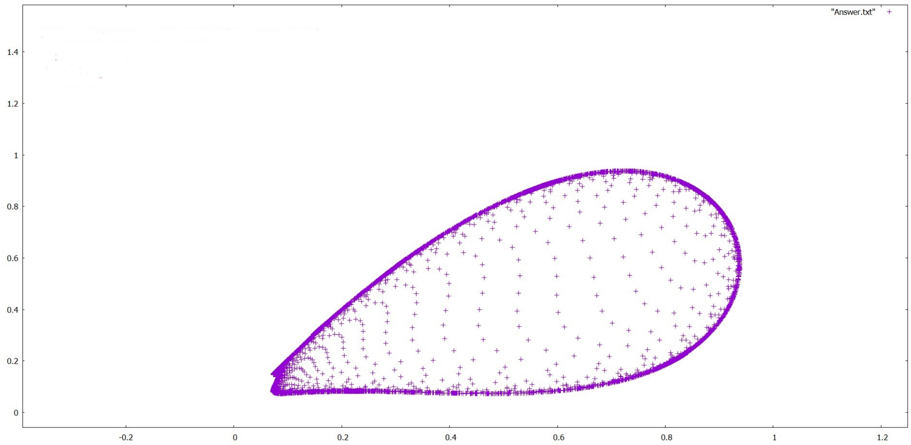


Рис. 3: Итерации точек области

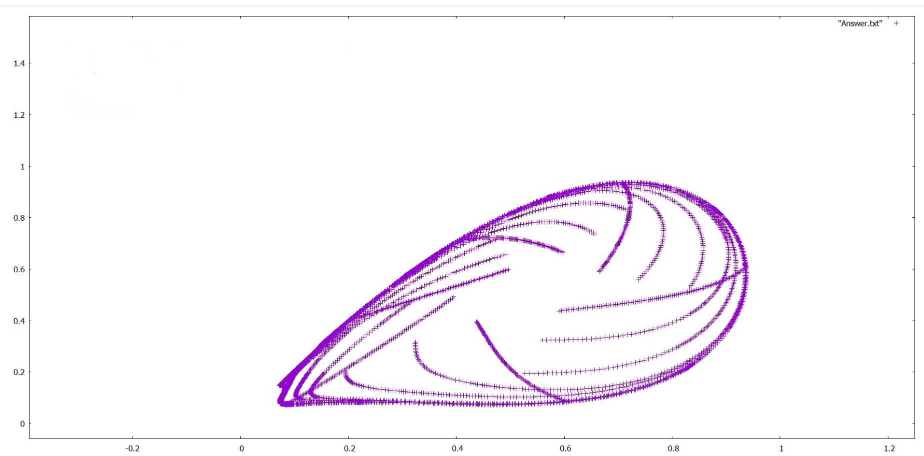


Рис. 4: Итерации отрезка)

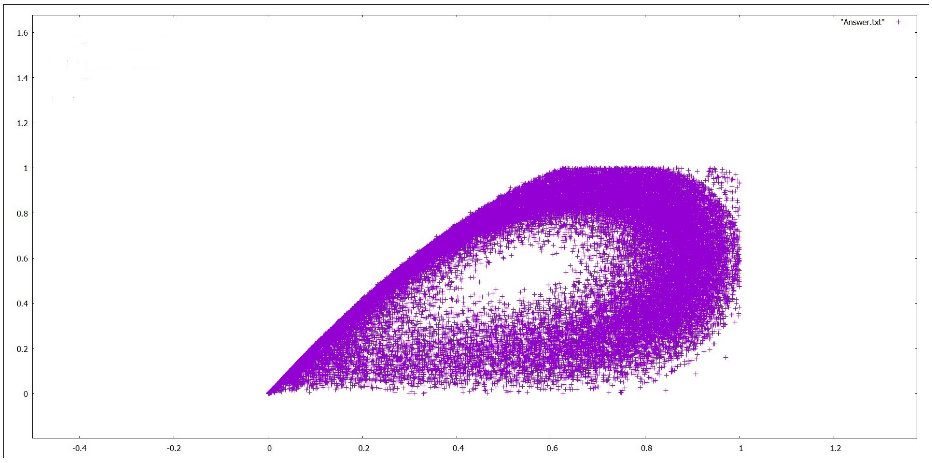


Рис. 5: Итерации отрезка (в интервалах)

6.2 Отображение Хенона

$$x_{n+1} = 1 + y_n - a \cdot x_n \cdot x_n$$
$$y_{n+1} = b \cdot x_n$$

где a, b – вещественные параметры.

При выборе параметров a = 1.4, b = 0.3 у данной динамической системы, порождаемой описанным отображением, в области $[-2, 2] \times [-2, 2]$ существует аттрактор. На рисунке показан результат итераций отрезка.

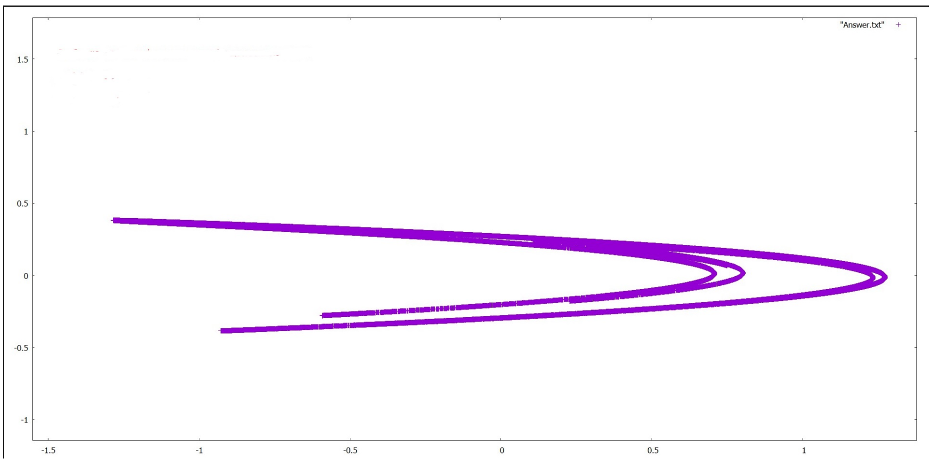


Рис. 6: Итерации точек области

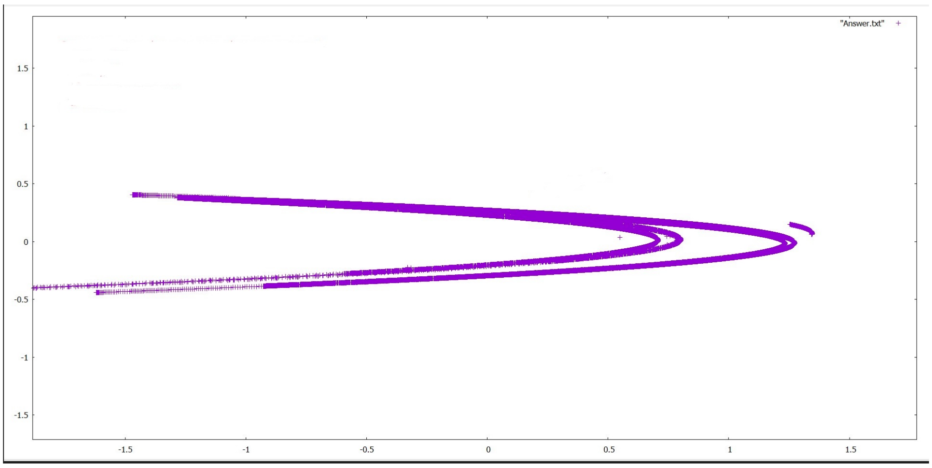


Рис. 7: Итерации отрезка

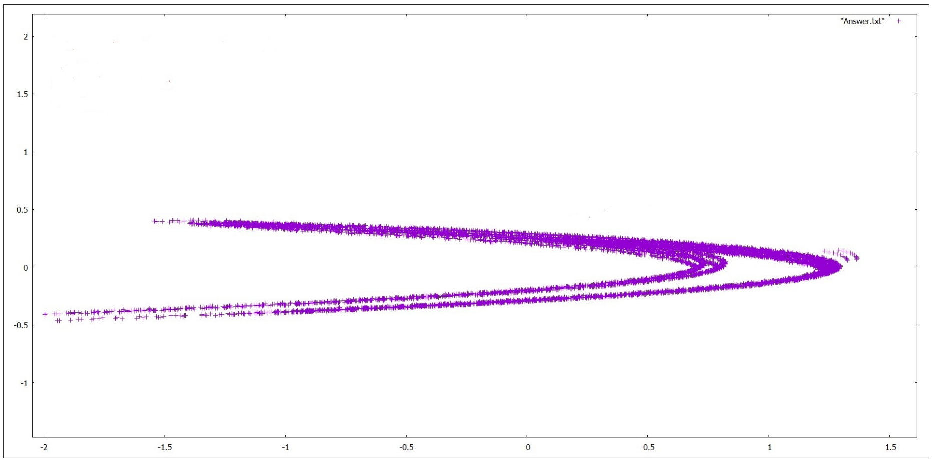


Рис. 8: Итерации отрезка (в интервалах)

6.3 Нелинейное отображение

$$\begin{gathered} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = 0.05 \cdot y_n \cdot (1 - x_n \cdot x_n) - x_n, \end{gathered}$$

Данная дискретная динамическая система имеет центр в точке $(0, 0)$. Вычисления проводились в области $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

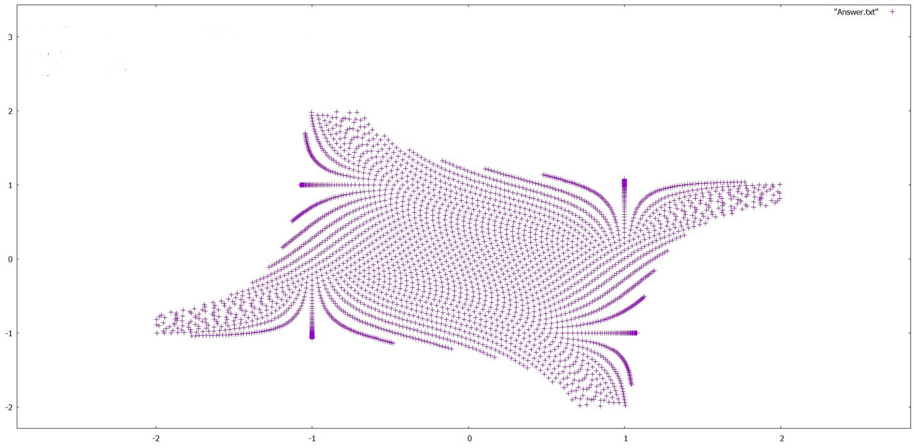


Рис. 9: Итерации точек области

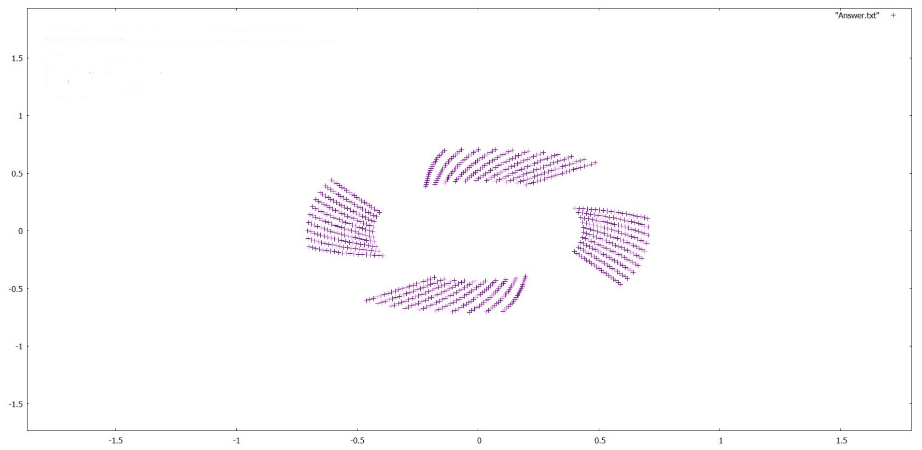


Рис. 10: Итерации отрезка

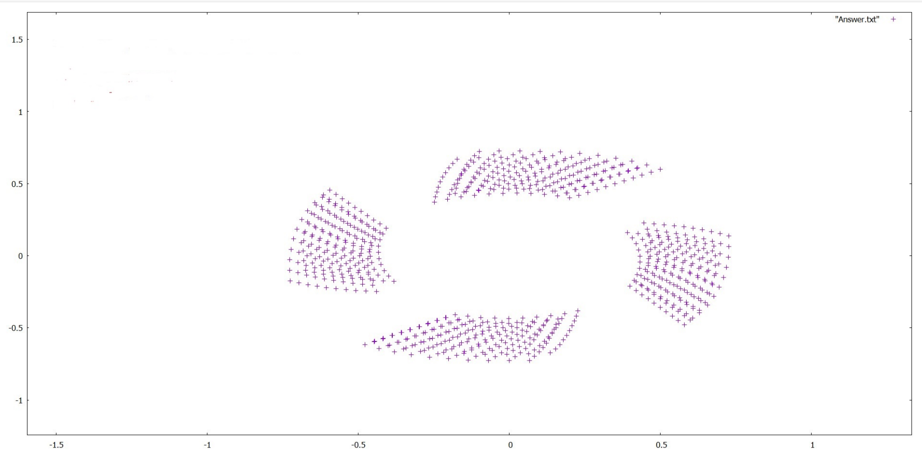


Рис. 11: Итерации отрезка (в интервалах)

6.4 Уравнение Дуффинга

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x - x^3 - \epsilon \cdot y$$

У данной непрерывной системы три точки равновесия: $(-1, 0), (0, 0)$ и $(1, 0)$.

Точки $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ являются аттракторами.

Вычисления проводились в области $[-2, 2] \times [-2, 2]$ с $\epsilon = 0.15$.

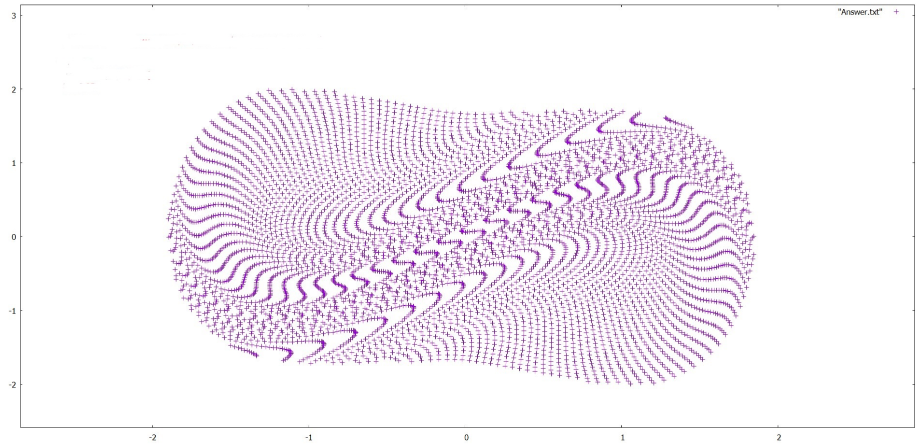


Рис. 12: Итерации точек области

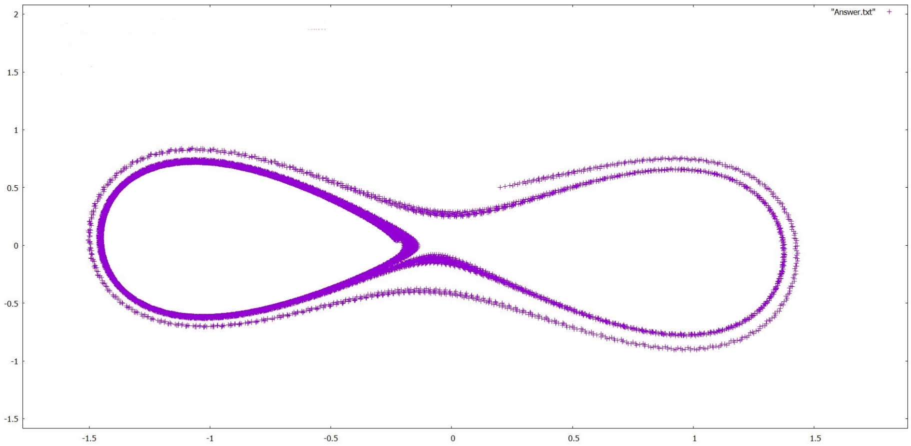


Рис. 13: Итерации отрезка

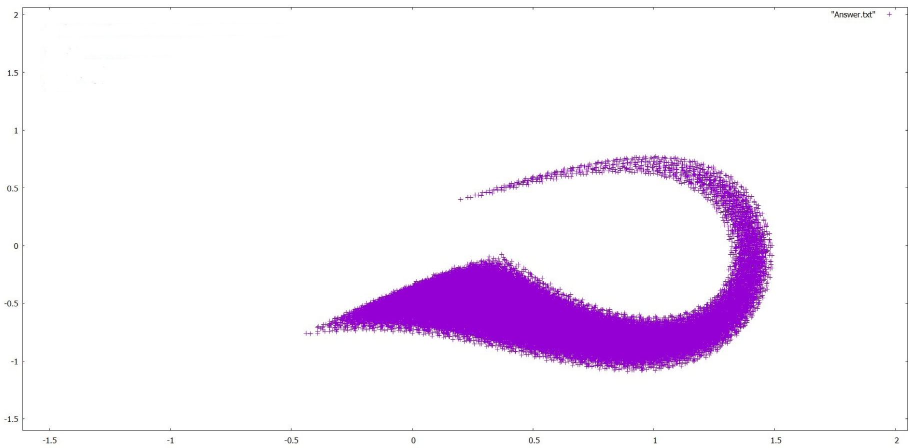


Рис. 14: Итерации отрезка (в интервалах)

6.5 Система Ван-дер-Поля

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = \epsilon \cdot (1 - x^2) \cdot y - x$$

Данная система содержит точку покоя $(0, 0)$. Вычисления проводились в области $[-3.5, 3.5] \times [-3.5, 3.5]$ с $\epsilon = 1.5$.

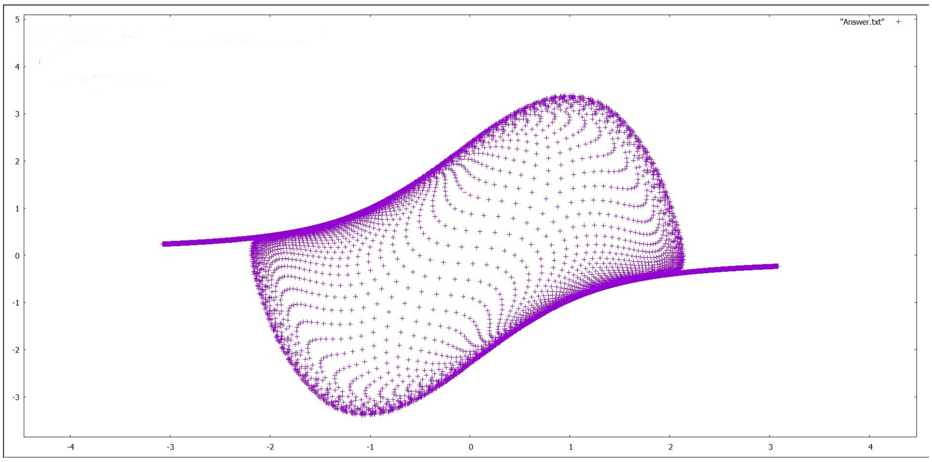


Рис. 15: Итерации точек области

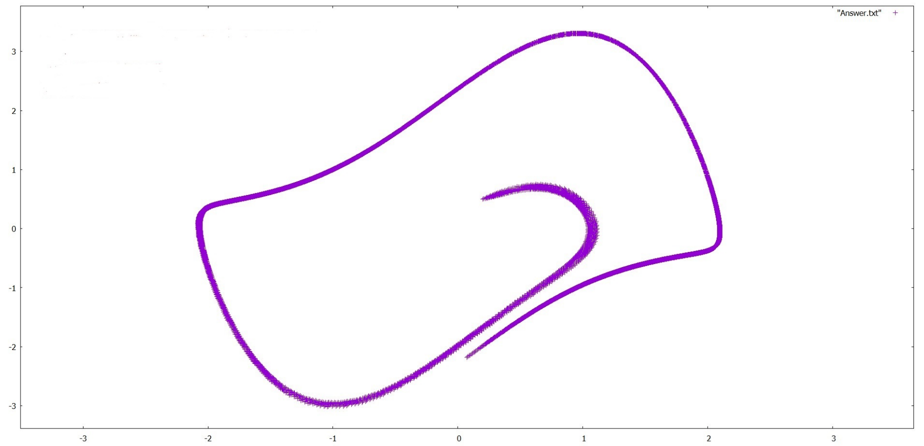


Рис. 16: Итерации отрезка

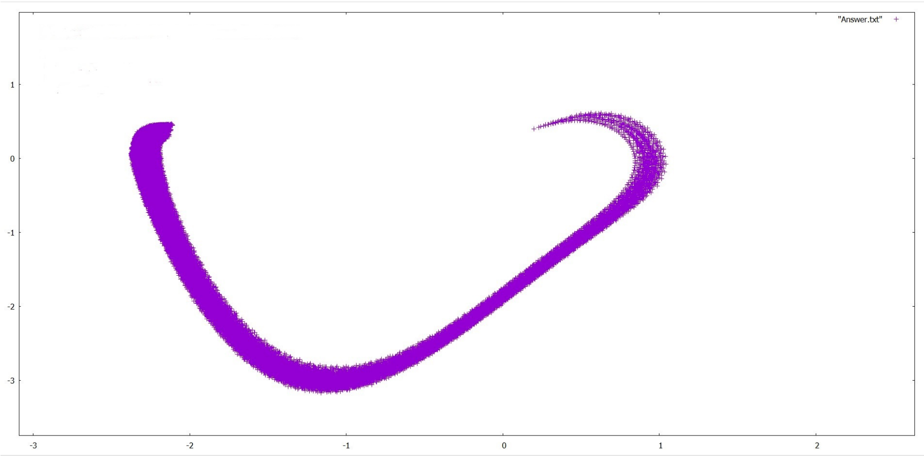


Рис. 17: Итерации отрезка (в интервалах)

7 Особенности реализации

Для сравнения результатов применения вещественных чисел и вещественных интервалов в задаче локализации инвариантных множеств динамических систем была написана программа, которая включает в себя реализацию алгоритмов итераций точек области и итераций отрезка для вещественных чисел и для интервалов, а также модуля для интервальных вычислений на прямой и на плоскости.

Программа реализована в среде Visual Studio на языке C++. В ней пользователь может ввести интересующую его динамическую систему, алгоритм построения приближения к инвариантному множеству, а также задать начальные данные: рассматриваемую область, отрезок (для алгоритмов итераций отрезка) и количество итераций.

Результаты записываются в текстовый файл Answer.txt, расположенный в папке программы, после чего происходит визуализация точек с помощью подключенной системы gnuplot.

Заключение

Динамические системы широко применяются для моделирования естественных процессов, и важной задачей является исследование их инвариантных множеств. Однако построение точного аналитического описания таких множеств для большинства систем является невозможным, кроме самых простых случаев. Поэтому методы приближенного построения инвариантных множеств становятся все более востребованными.

Для динамических систем методами построения приближений являются итерации точек области и итерации отрезка. Решение этой задачи включает создание программы, которая содержит модуль интервальных вычислений и основные алгоритмы для построения приближений к инвариантным множествам непрерывных и дискретных динамических систем, реализованных в обычной и интервальной арифметике. Использование интервальных методов позволяет получить оценку сверху для инвариантных множеств.

Реализованная программа позволяет сравнить результаты трех методов и выбрать наиболее подходящий для исследуемой системы. Программа может быть использована как в исследовательских, так и в учебных целях.

Список литературы

[1] Шокин Ю. И. Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 1981. 111 с.

[2] Меньшиков Г. Г. Интервальный анализ и методы вычислений. // СПб.: Науч.-исслед. ин-т химии С.-Петерб. ун-та, 1998-2001. Вып. 1. Введение в интервальную организацию вычислений.

www.apmath.spbu.ru/ru/education/courses/elective/menshikov.html.

[3] Шарый С. П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: XYZ, 2009. 572 с.

[4] Ю. Сениченков, Н. Ампилова, Е. Тимофеев. Компьютерные инструменты исследования динамических систем. Сборник заданий по курсу "Математическое моделирование сложных динамических систем", Изд. СПбГПУ, СПб, 2017, 116 с.

[5] Maplesoft - Software for Mathematics, Online Learning, Engineering [Электронный ресурс] URL: https://www.maplesoft.com/

[6] RAND MODEL DESIGNER - имитационное моделирование сложных динамических систем [Электронный ресурс] URL: http://www.mvstudium.com/

[7] Wolfram Mathematica: Современные технические вычисления [Электронный ресурс] URL: https://www.wolfram.com/mathematica/

[8] Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Объектно-ориентированное моделирование в среде Rand Model Designer 7: учебно-практическое пособие, Москва: Проспект, 2016. 256 стр.

[9] А.Н. Канатников. Локализация сложных структур для динамических систем. МГТУ им. Н.Э.Баумана. Россия, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5

[10] Parker T.S, Chua L.O. Practical numerical algorithms for chaotic systems. N. Y., 1989.

[11] Сениченков Ю.Б. Моделирование. Компьютерный практикум: учебное пособие. СПб. Изд-во Политехн. ун-та, 2013. 188 стр.

[12] Терентьев С.В. Разработка и реализация основанных на интервальной арифметике алгоритмов компьютерного исследования динамических систем. Дисс. кфмн,СПб, 2010.

[13] Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М., Факториал, 1999.

[14] Петренко Е.И. Компьютерное исследование динамических систем на основе метода символического образа. //Дисс.соиск кфмн, СПбГУ, 2009.