第二次大作业实验报告

> 新雅62/CDIE6 项雨桐
> 2016013327
> 2020.01.02

1. 实验方法与要求

采用逼近、数值积分、常微分方程中至少两种算法对$\sin(x)$进行数值求解。
要求:

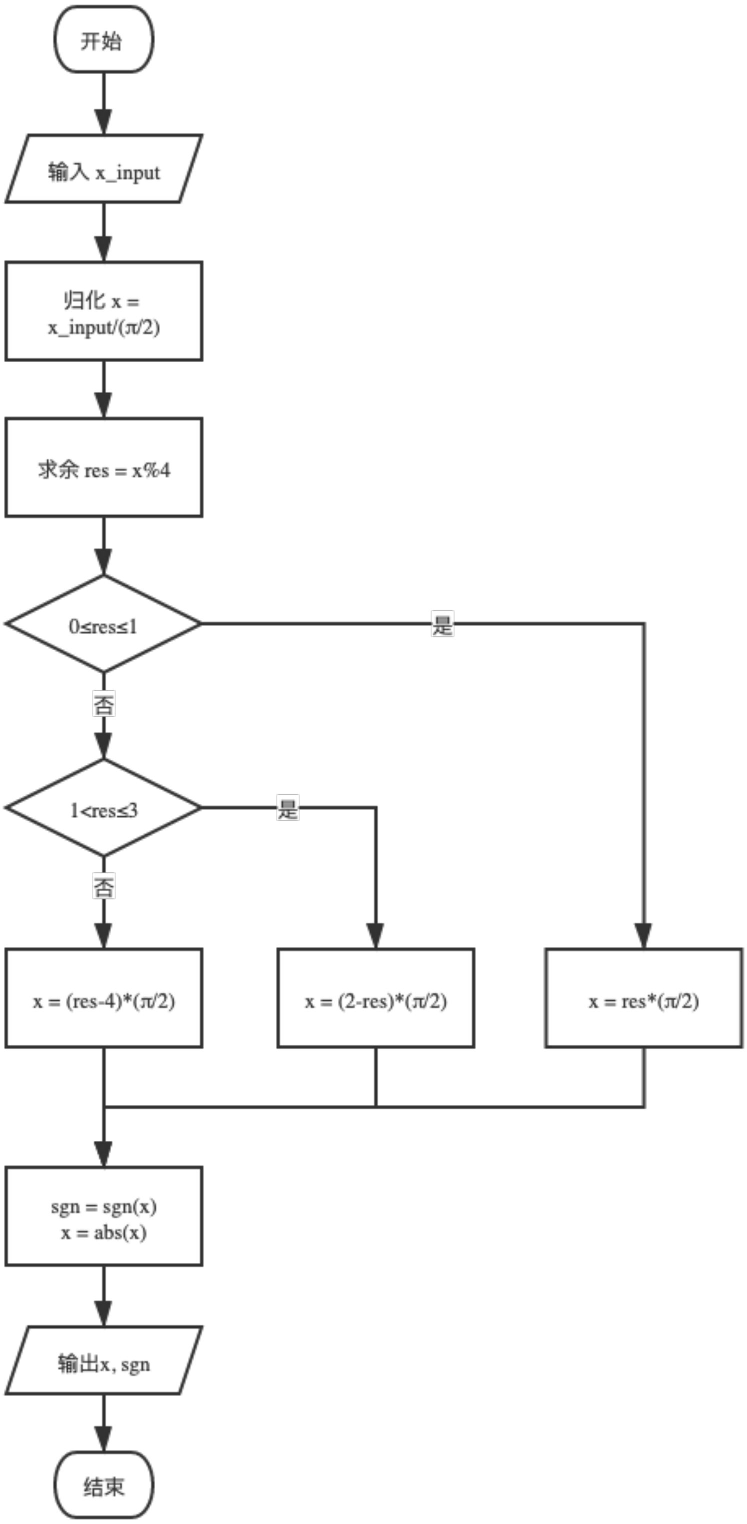
1. 方法本身能够达到任意精度
2. 分析不同方法的方法误差以及存储误差对最终结果的影响
3. 分析比较选用方法的计算代价、收敛速度等
4. 具体计算结果至少精确到小数点后第4位

2. 算法原理与方案设计

本实验采用多项式逼近和常微分方程求解两种算法对$\sin(x)$进行数值求解。

2.1 坐标变换

由于$\sin(x)$具有周期性和轴对称、中心对称等特性，故可以通过一系列坐标变换，把求解区间缩小至四分之一周期内，也即$[0, \frac{\pi}{2}]$，具体方法的程序框图如下：



这里得到的$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$，sgn标明了结果的符号。

2.2 多项式逼近

维尔斯特拉斯定理表明，所有的连续函数都可以由多项式一致逼近。对于$\sin(x)$，这个多项式就是其

Taylor展开式：

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$，则根据精度要求，保留Taylor展开式的前若干项即可得到$\sin(x)$的近似值。

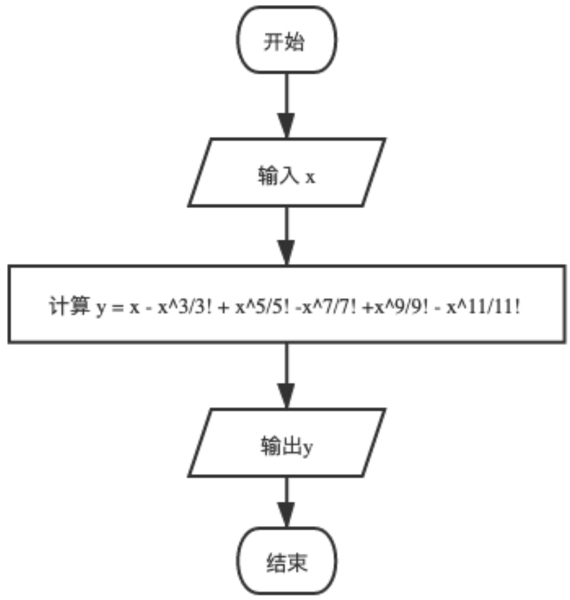
结果至少精确到小数点后4位，若保留前6项，则余项：

$$R(x) = \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{17}}{17!} - \cdots \leqslant \frac{x^{13}}{13!}$$

又

$$\max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{x^{13}}{13!} = 5.6922 \times 10^{-8}$$

故保留前6项完全可以满足精度要求。
程序框图如下所示：



2.3 常微分方程组求解

设 $y=\sin(x)$，则 有$y'=\cos(x)$，$y''=-\sin(x)=-y$
故$y=\sin(x)$的求解可转化为二阶常微分方程：

$$\begin{cases} y''=-y \\ y(0)=0 \end{cases}$$

若令$z=y'=\cos(x)$，则该方程可进一步转化为一阶常微分方程组：

$$\begin{cases} y'=z \\ z'=-y \\ y(0)=0 \\ z(0)=1 \end{cases}$$

利用改进Euler法（二阶龙格-库塔公式）的递推关系式如下：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[K_1+K_2] \\ z_{n+1}=z_n+\frac{h}{2}[L_1+L_2] \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} K_1=f(x_n,y_n,z_n)=z_n \\ K_2=f(x_n+h,y_n+hK_1,z_n+hL_1)=z_n+hL_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1=g(x_n,y_n,z_n)=-y_n \\ L_2=g(x_n+h,y_n+hK_1,z_n+hL_1)=-(y_n+hK_1) \end{cases}$$

代入得

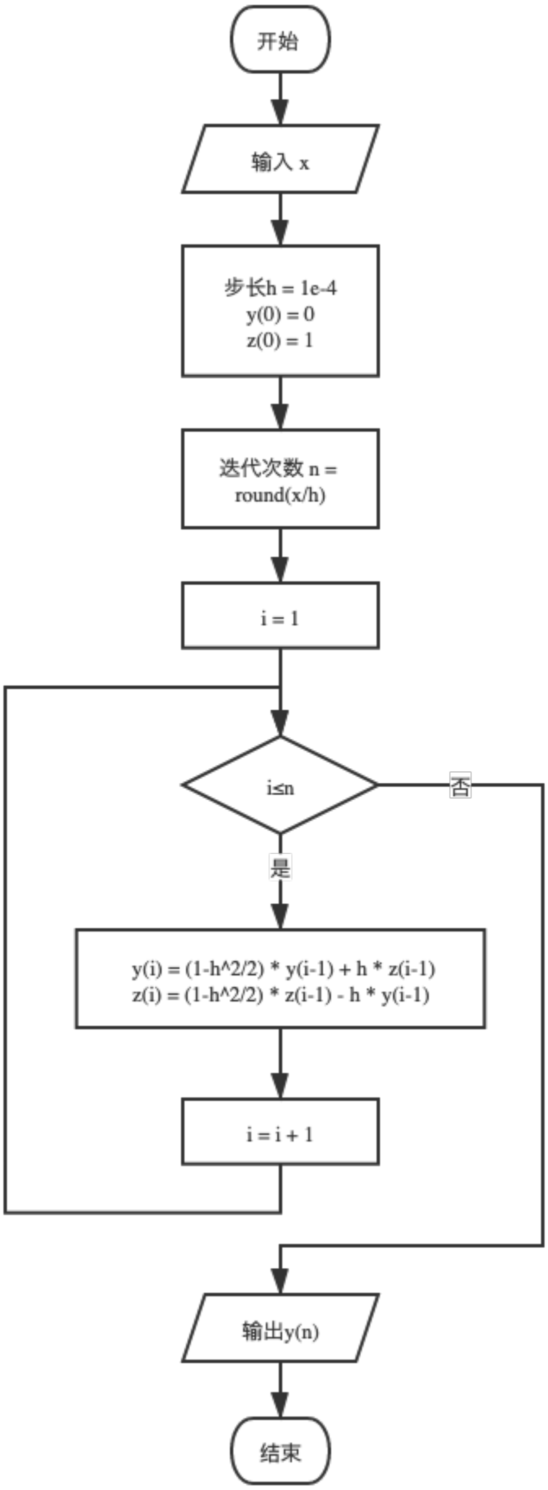
$$\begin{cases} y_{n+1}=(1-\frac{h^2}{2})y_n+hz_n \\ z_{n+1}=(1-\frac{h^2}{2})z_n-hy_n \end{cases}$$

其中 $Nh=x^*-x_0$，$0\leqslant n\leqslant N-1$

则根据精度要求确定步长h后进行迭代，就可以得到$\sin(x)$的近似解。

结果至少精确到小数点后4位，而改进的Euler法具有二阶精度，则步长取为10^{-4}能完全满足精度要求。

程序框图如下所示：



3. 误差分析

3.1 多项式逼近

3.1.1 方法误差

Taylor 展开式的Lagrange余项：

$$R_{13}(x)=\frac{f^{(13)}(\theta)}{(13)!}x^{13}$$

其中$\theta\in(0,x)$，$|f^{(13)}(\theta)|\leqslant 1$，因此

$$R_{13}(x)\leqslant\max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]}\frac{x^{13}}{13!}=5.6922\times 10^{-8}$$

3.1.2 舍入误差

本次使用了double类型存储数据。依照C++里的定义，其舍入误差为`DBL_EPSILON = 2.22e-16`。记为δ。

逼近法使用了Taylor展开式的前六项进行计算，每一项的存储误差都为δ，因此计算累积的舍入误差为6δ。

3.2 常微分方程组求解

3.2.1 方法误差

本实验选用的步长固定为$h=10^{-4}$，因此当输入数字的小数位数大于4位时，计算迭代次数会产生误差。

这里选用的`n = round(x/h)`,采用了四舍五入的方法，故$|x^*-x_N|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-4}$。假设$x_N$的结果是精确的，则四舍五入对最终结果带来的误差为

$$\begin{aligned}|\sin(x^*)-\sin(x_N)|&=2|\cos(\frac{x^*+x_N}{2})||\sin(\frac{x^*-x_N}{2})|\\&\approx 2|\cos(x^*)||\sin(\frac{x^*-x_N}{2})|\\&\leqslant 2|\sin(\frac{x^*-x_N}{2})|\\&\leqslant 2\sin(\frac{1}{4}\times 10^{-4})\\&=8.73\times 10^{-7}\end{aligned}$$

下面探讨改进欧拉法的方法误差。

设

$$\begin{aligned}y'&=z=f(x,y,z)\\z'&=-y=g(x,y,z)\end{aligned}$$

则有

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=-1$$

根据改进Euler法公式：

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n,z_n) \\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n,z_n)+f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1},\bar{z}_{n+1})] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{z}_{n+1}=z_n+hg(x_n,y_n,z_n) \\ z_{n+1}=z_n+\frac{h}{2}[g(x_n,y_n,z_n)+g(x_{n+1},\bar{y}_{n+1},\bar{z}_{n+1})] \end{cases}$$

可得

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{n+1}(y) &\leqslant (1+hM_{fy})\Delta_n(y)+\frac{L_y}{2}h^2 \\ \bar{\Delta}_{n+1}(z) &\leqslant (1+hM_{gz})\Delta_n(z)+\frac{L_z}{2}h^2 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} M_{fy} &= \max\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right|=0 \\ M_{gz} &= \max\left|\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right|=0 \\ L_y &= \max\left|y^{(2)}(x)\right|=\max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]}|-\sin(x)|=1 \\ L_z &= \max\left|z^{(2)}(x)\right|=\max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]}|-\cos(x)|=1 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{n+1}(y) &\leqslant \Delta_n(y)+\frac{1}{2}h^2 \\ \bar{\Delta}_{n+1}(z) &\leqslant \Delta_n(z)+\frac{1}{2}h^2 \end{aligned}$$

又

$$
\begin{aligned}
\Delta_{n+1}(y) \leqslant & \Delta_n(y)+\frac{h}{2}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta_n(y)+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta_n(z)+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \bar{\Delta}_{n+1}(y)+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \bar{\Delta}_{n+1}(z)\right]+\frac{T_y}{12} h^3 \\
\leqslant & \Delta_n(y)+\frac{h}{2}\left[\Delta_n(z)+\bar{\Delta}_{n+1}(z)\right]+\frac{T_y}{12} h^3 \\
\Delta_{n+1}(z) \leqslant & \Delta_n(z)+\frac{h}{2}\left[\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \Delta_n(y)+\left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| \Delta_n(z)+\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \bar{\Delta}_{n+1}(y)+\left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| \bar{\Delta}_{n+1}(z)\right]+\frac{T_z}{12} h^3 \\
\leqslant & \Delta_n(z)+\frac{h}{2}\left[\Delta_n(y)+\bar{\Delta}_{n+1}(y)\right]+\frac{T_z}{12} h^3
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
T_y &= \max\left|y^{(3)}(x)\right| = \max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |-\cos x| = 1 \\
T_z &= \max\left|z^{(3)}(x)\right| = \max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |\sin x| = 1
\end{aligned}
$$

因此可得

$$
\begin{aligned}
\Delta_{n+1}(y) \leqslant \Delta_n(y)+h\Delta_n(z)+\frac{1}{3}h^3 \\
\Delta_{n+1}(z) \leqslant \Delta_n(z)+h\Delta_n(y)+\frac{1}{3}h^3
\end{aligned}
$$

设

$$
\begin{aligned}
&\Delta_n(y) = Y_n \\
&\Delta_n(z) = Z_n \\
&Y_0 = Z_0 = 0
\end{aligned}
$$

上式可化为

$$
\begin{aligned}
Y_{n+1} \leqslant Y_n + hZ_n + \frac{h^3}{3} \\
Z_{n+1} \leqslant Z_n + hY_n + \frac{h^3}{3}
\end{aligned}
$$

取极限值，将不等号变为等号，归纳法可证:

$$
Y_n = Z_n
$$

因此

$$
\begin{aligned}
Y_{n+1} =& (1+h)Y_n + \frac{h^3}{3} \\
=& (1+h)^2 Y_{n-1} + \frac{h^3}{3}[1+(1+h)] \\
=& \cdots \\
=& (1+h)^{n+1} Y_0 + \frac{h^3}{3}\left[1+(1+h)+(1+h)^2+\cdots+(1+h)^n\right] \\
=& \frac{h^3}{3}\cdot\frac{1\cdot\left[1-(1+h)^{n+1}\right]}{1-(1+h)} \\
=& \frac{h^2}{3}\left[(1+h)^{n+1}-1\right]
\end{aligned}
$$

故

$$
Y_N = \frac{h^2}{3}\left[(1+h)^N - 1\right]
$$

不考虑四舍五入的误差，$Nh = x_N - x_0 = x_N = x^* < \frac{\pi}{2}$，则

$$
\lim_{N\to\infty}(1+h)^N \leqslant \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{\frac{\pi}{2}}{N}\right)^N = e^{\frac{\pi}{2}} \approx 4.8105
$$

因此

$$
Y_N \leqslant \frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{3}\cdot h^2 \approx 1.27h^2
$$

该方法是二阶的

3.2.2 舍入误差

由上面的分析可得

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta}_{n+1}(y) \leqslant (1+hM_{fy})\delta_n(y)+\delta \\
\bar{\delta}_{n+1}(z) \leqslant (1+hM_{gz})\delta_n(z)+\delta
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta}_{n+1}(y) \leqslant \delta_n(y)+\delta \\
\bar{\delta}_{n+1}(z) \leqslant \delta_n(z)+\delta
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
\delta_{n+1}(y) \leqslant & \delta_n(y) + \frac{h}{2}\left[\delta_n(z) + \bar{\delta}_{n+1}(z)\right] + \delta \\
\delta_{n+1}(z) \leqslant & \delta_n(z) + \frac{h}{2}\left[\delta_n(y) + \bar{\delta}_{n+1}(y)\right] + \delta
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\delta_{n+1}(y) \leqslant \delta_n(y) + h\delta_n(z) + (1+\frac{h}{2})\delta \\
\delta_{n+1}(z) \leqslant \delta_n(z) + h\delta_n(y) + (1+\frac{h}{2})\delta
\end{aligned}
$$

类似于方法误差的分析，可得

$$
\begin{aligned}
\delta_{n+1}(y) = & (1+h)\delta_n(y) + (1+\frac{h}{2})\delta \\
= & \cdots \\
= & (1+h)^{n+1}\delta_0(y) + (1+\frac{h}{2})\delta\left[1 + (1+h) + (1+h)^2 + \cdots + (1+h)^n\right] \\
= & (1+\frac{h}{2})\delta \cdot \frac{1\cdot\left[1-(1+h)^{n+1}\right]}{1-(1+h)} \\
= & \delta \cdot \frac{2+h}{2h}\left[(1+h)^{n+1} - 1\right]
\end{aligned}
$$

由$h \ll 2$，$\lim\limits_{N\to\infty}\left(1+\frac{\frac{\pi}{2}}{N}\right)^N = e^{\frac{\pi}{2}}$知

$$
\delta_N = \delta \cdot \frac{2+h}{2h}\left[(1+h)^N - 1\right] \leqslant (e^{\frac{\pi}{2}} - 1)\cdot\frac{\delta}{h} \approx 3.81\frac{\delta}{h}
$$

则舍入误差及和$\frac{1}{h}$成正比。

4. 计算代价与收敛速度

4.1 多项式逼近

4.1.1 计算代价

$$
\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}
$$

总共进行了$2\times(0+2+4+6+8+10) = 60$次浮点数乘法，5次浮点数除法和5次浮点数加减法。

4.1.2 收敛速度

该方法并非迭代法，但如果考虑Taylor级数前若干项构成的函数序列作为逼近序列的话，则依照商收敛因子的定义，用Taylor级数的方法是超线性收敛的。

4.2 常微分方程组求解

4.2.1 计算代价

步长给定时，y_{n+1}、z_{n+1}是y_n、z_n的线性组合，系数与步长有关并且固定。不考虑系数在迭代时的计算代价（可预先算好并存储），每次迭代包括4次浮点数乘法和2次浮点数加减法。因此总共进行$4n$次浮点数乘法，$2n$次浮点数加减法，其中迭代次数$n \sim \frac{x^*}{h}$。

4.2.2 收敛速度

依照商收敛因子的定义，用改进欧拉法是线性收敛的。