第五章

1. 树的基本概念
2. 树的定义

树是n(n≥0)个节点的有限集。当n=0时，称为空树。在任意一棵非空树中应满足：①有且仅有一个特定的称为根的结点②当n>1时，根节点以外的节点可分为m(m>0)个互不相交的有限集，其中每个集合本身又是一棵树，并且称为根的子树。

1. 树的两个特点：①树的根节点没有前驱，除根节点外所有结点只有一个前驱；②树的所有结点可以有零个或多个后继；
2. 基本术语：

①根A到结点K的唯一路径上的任意结点，称为结点K的祖先，K是祖先结点的子孙结点；路径上最接近结点K的结点E称为K的双亲，而K为结点E的孩子；有相同双亲的结点称为兄弟；

②树中一个结点的孩子个数称为该**结点的度**，树中结点的最大度数称为**树的度**；

③度大于0的结点称为分支结点（非终端结点）：度为0的结点称为叶子结点（终端结点）。每个分支结点的分支数就是该结点的度；

④**结点的层次**从树根开始定义，根结点为第1层，它的子结点为第2层，以此类推；**结点的深度**是从根结点开始自顶向下逐层累加的；**结点的高度**是从叶结点开始自底向上逐层累加的；**树的高度**（或深度）是树中结点的最大层数；

⑤树中结点的各子树从左到右是有次序的，不能互换，称该树为**有序树**，否则称为无序树；

⑥树中两个结点之间的**路径**是由这两个结点之间所经过的结点序列构成的，而**路径长度**是路径上所经过的边的个数

1. 树的性质：

**①结点数等于总度数加1；**

**②度为的树第层最多有个结点（>1）；**

**③高度为的叉树至多有个结点；**

**④具有个结点的叉树的最小高度为；**

⑤度为m的树至少有一个节点度为m，m叉树最多只能有m个孩子，可以是空树；

⑥高度为h的m叉树至少有h个结点，高度为h，度为m的树至少有h+m-1个结点；

1. 二叉树的概念
2. 二叉树与度为2的有序树的区别：二叉树除了可以为空树外，虽然同为有序树，但二叉树无论是否有两个孩子都需要确定左右孩子，而度为2的树如果只有一个孩子无须区分左右；
3. 特殊的二叉树：

①**满二叉树**：一棵高度为h,且含有个结点的二叉树，即树中的每层都含有最多的结点；

②**完全二叉树**：n个结点的树，每个结点都与高度为h的满二又树中编号为1~n的结点一一对应；

③**二叉排序树**：左子树上所有结点的关键字均小于根结点的关键字，右子树上的所有结点的关键字均大于根结点的关键字，左子树和右子树又各是一棵二叉排序树；

④**平衡二叉树**：树上任一结点的左子树和右子树的深度之差不超过1；

1. 完全二叉树的性质

①结点的父母编号为；若,则结点为分支结点，否则为叶子结点；

②结点左孩子编号为，右孩子编号为；

③结点所在层次为;

④叶子结点只可能在层次最大的两层上出现；对于最大层次中的叶子结点，都依次排列在该层最左边的位置上；

⑤若有度为1的结点，则只可能有一个，且该结点只有左孩子而无右孩子；

⑥若n为奇数，则每个分支结点都有左孩子和右孩子；若n为偶数，则编号最大的分支结点只有左孩子，没有右孩子；

1. 二叉树的性质

**①非空二又树上的叶子结点数等于度为2的结点数加1,即(结点总数)；**

**②任意一棵树，若结点数量为n,则边的数量为n-1；**

**③非空二叉树上第k层上至多有个结点(k≥1)；**

**④高度为h的二又树至多有个结点(h≥1)；**

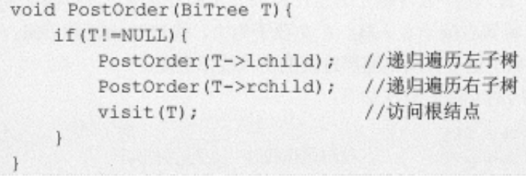
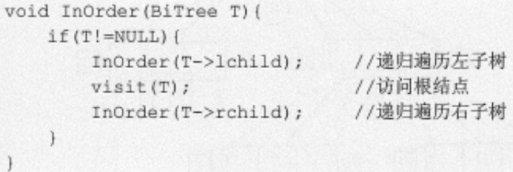
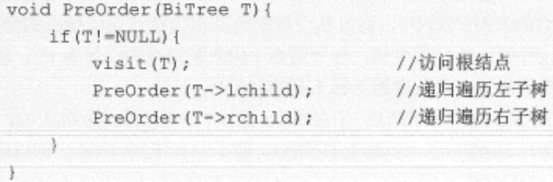
**⑤具有n个(n>0)结点的完全二又树的高度为或；**

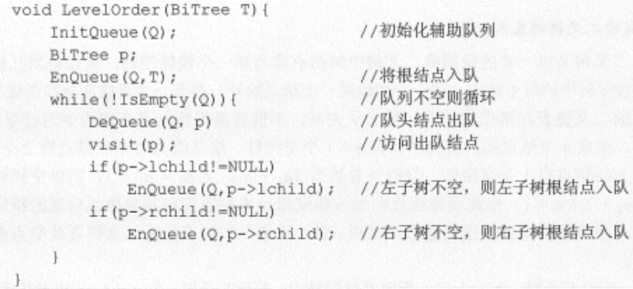
1. 二叉树的存储结构

①顺序存储：将完全二叉树上编号为i的结点元素存储在一维数组下标为i-1的分量中（但建议从数组下标为1开始存储）；一般二叉树需要添加空结点，与完全二叉树对应，浪费空间；

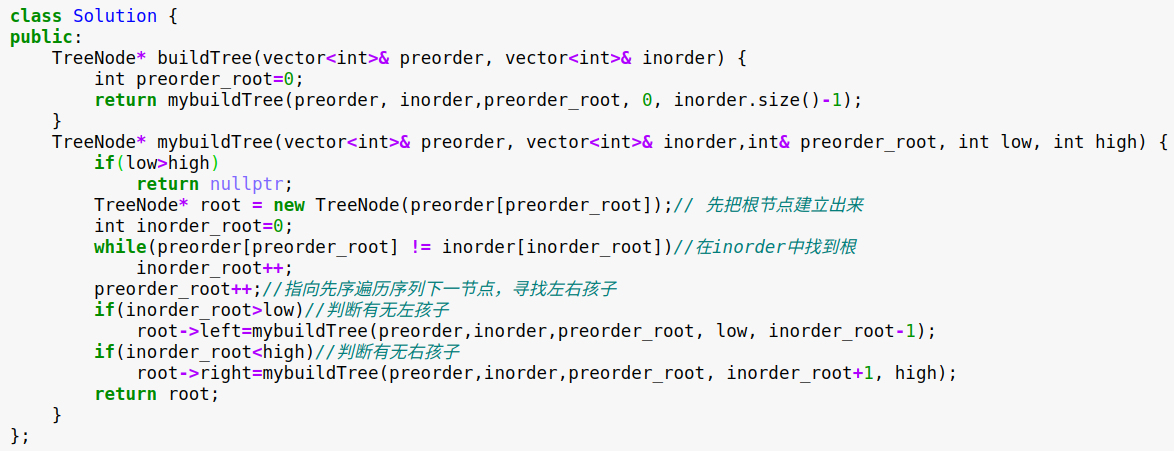
②链式存储：二叉链表至少包含三个域（数据域、左指针域、右指针域），增加指向父结点的指针后，变成三叉链表；在含有n个结点的二叉链表中，含有n+1个空链域；

1. 二叉树的遍历和线索二叉树
2. 遍历的概念：按照某种次序将所有结点访问一遍；
3. ①**先序遍历**（先根遍历）：若二叉树为空，则什么也不做；否则，访问根节点，先序遍历左子树，先序遍历右子树；②**中序遍历**（中根遍历）：若二叉树为空，则什么也不做；否则，中序遍历左子树，访问根节点，中序遍历右子树；③**后序遍历**（后根遍历）：若二叉树为空，则什么也不做；否则，后序遍历左子树，后序遍历右子树，访问根节点；④时间复杂度为；



1. 二叉树的层次遍历：①初始化一个辅助队列；②将根节点入队；③若队列非空，则将队头结点出队，访问该节点，并将其左右孩子插入队尾；④重复③直到队列为空；（时间复杂度为）
2. 由遍历序列构造二叉树：①前序+中序；②后序+中序；③层序+中序；④其中，前、后和层序用于定位根的位置，中序用于确定左右孩子；⑤算法思想：

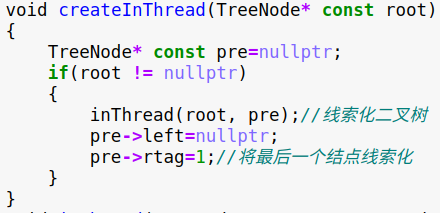
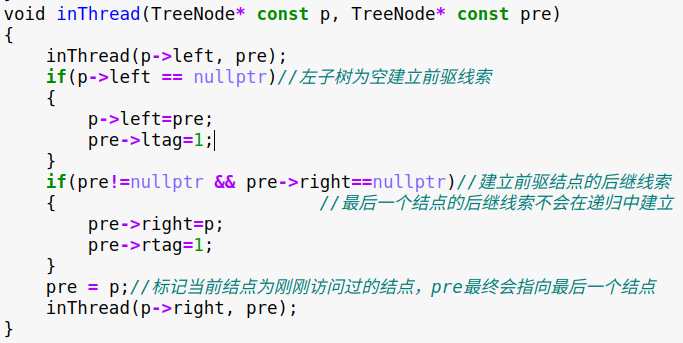
前序遍历的形式总是（即根节点总是前序遍历中的第一个节点）

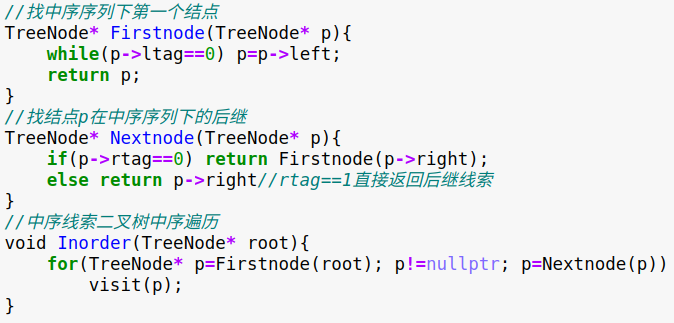
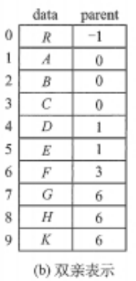
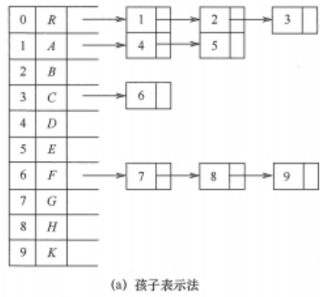
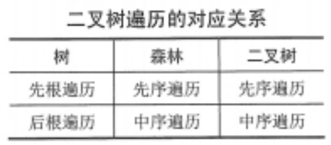
[ 根节点, [左子树的前序遍历结果], [右子树的前序遍历结果] ]

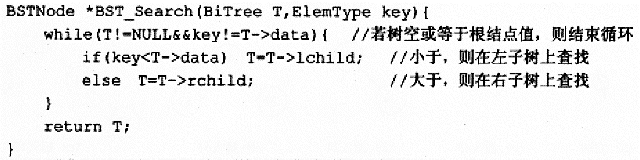
而中序遍历的形式总是

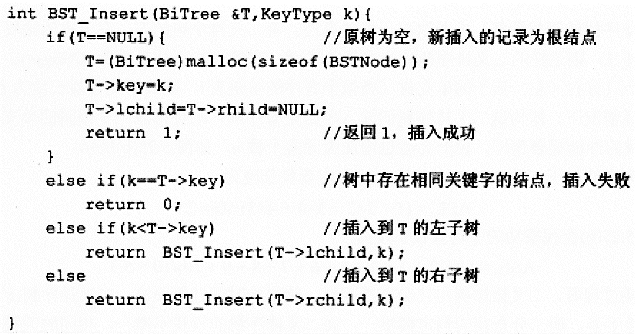
[ [左子树的中序遍历结果], 根节点, [右子树的中序遍历结果] ]

只要我们在中序遍历中定位到根节点，那么我们就可以分别知道左子树和右子树中的节点数目。由于同一颗子树的前序遍历和中序遍历的长度显然是相同的，因此我们就可以对应到前序遍历的结果中，对上述形式中的所有左右括号进行定位。



1. 线索二叉树：①在含有n个结点的二叉树中，有n+1个空指针（推）；②规定：若无左子树，令lchild指向其前驱结点，若无右子树，令rchild指向其后继结点，增加ltag和rtag标志指针域指向左右孩子还是前驱后继；
2. 二叉树线索化：①线索化的实质是（前中后序）遍历一次二叉树，设pre指向刚刚访问过的结点（初始为nullptr），指针p指向正在访问的结点，即pre指向p的前驱；②中序遍历过程中，检查p的左指针为空则指向pre，检查pre的右指针为空就指向p，pre最终指向中序遍历最后一个结点，需要处理pre的右孩子，因此是全局变量；③先序线索化过程中，先处理根节点，若没有左孩子会将其线索化，之后访问其左孩子，由于已经线索化因此会陷入循环，需要加ltag验证；
3. 中序线索二叉树的遍历：①后继一定是其右孩子的左孩子的左孩子……[ 左, 根, [[**左**, 根, 右], 根, 右] ]；②遍历时要先找到第一个结点，依次找后继，直至后继为空；③后继规律：若rtag为1则右链指向后继，否则遍历右子树找到最左下结点为其后继；④思考寻找前驱的方法和逆序遍历；
4. 先序线索二叉树的遍历：①rtag为0结点有左孩子时，后继就是其左孩子[ 根, [ **根**, 左, 右], 右]；②rtag为0结点没有左孩子，一定有右孩子，后继一定是其右孩子[ 根, 右] → [ 根, [ **根**, 左, 右]]；③先序线索二叉树（无线索时）找不到先序前驱，但时含有指向父结点指针的三叉链表可以，其前驱有四种情况：i若为左孩子则前驱为父结点，ii若为右孩子且父结点没有左孩子则前驱为父结点，iii若为右孩子且父结点有左孩子则前驱为父结点的左孩子优先向右下找否则向左直到叶子结点，iv若为根节点则无前驱；
5. 先序线索二叉树的遍历：后续线索二叉树（无线索时）找不到后序后继，但时含有指向父结点指针的三叉链表可以，其后继有四种情况：i若为右孩子则后继为父结点，ii若为左孩子且父结点没有右孩子则后继为父结点，iii若为左孩子且父结点有右孩子则后继为父结点的右孩子优先向左下找否则向右直到叶子结点，iv若为根节点则无后继；
6. 树、森林
7. 双亲表示法：①一数组存储每个结点，每个结点有一个伪指针表明父结点在数组中的位置；②优点：方便找父结点，缺点：找子结点要遍历；③树的顺序存储结构中，数组下标代表结点编号，内容表示结点之间关系，二叉树的顺序存储结构中，数组下标代表结点编号和结点之间关系；
8. 孩子表示法：①一数组存储每个结点，每个结点有一个指向链表的头指针，每个链表结点存储对应数组结点的孩子的位置以及指向下一个链表结点的指针；②优点：方便找子结点，缺点：找父结点要遍历n结点中的链表；
9. 孩子兄弟表示法（二叉树表示法）：①每个结点包含三部分（结点值、指向结点的第一个孩子的指针、指向结点下一个兄弟的指针）；②优点：方便的实现树转化为二叉树，缺点：从当前结点查找双亲结点麻烦；
10. ①树转换为二叉树:每个结点的左指针只想它的第一个孩子，右指针指向树中相邻的右兄弟（左孩子右兄弟），根结点没有兄弟，因此对应二叉树没有右子树;②森林转换为二叉树：森林中每棵树转换为二叉树，每棵树的根互为兄弟；
11. 树和森林的遍历：①树的先根遍历等同于对应二叉树的先序遍历，后根遍历等同于对应二叉树的中序遍历;②森林的先序遍历等同于二叉树的先序遍历，中序遍历等同于二叉树的中序遍历；
12. 二叉树排序树

1）二叉排序树（二叉查找树BST）：①若左子树非空，则左子树上所有结点的值均小于根节点的值;②若右子树非空，则右子树上所有结点的值均大于根节点的值；③左、右子树也分别是一棵二叉排序树；④对二叉排序树中序遍历可以得到一个递增的有序序列；

2）二叉排序树的查找：①若二叉排序树非空，将给定值与根结点的关键字比较，相等则査找成功；②若不等，如果小子根结点的关键字，则在根结点的左子树上查找；③否则在根结点的右子树上査找；

3）二叉排序树的插入：①若原二叉排序树为空，则直接插入结点；②若关键字k小于根结点值，则插入到左子树；③若关键字k大于根结点值，则插入到右子树；④插入的结点一定是一个新添加的叶结点，且是查找失败时的查找路径上访问的最后一个结点的左孩子或右孩子；

4）二叉排序树的构造：从一棵空树出发依次插入元素；

5）二叉排序树的删除：必须先删除结点，重新链接断开的二叉链表，并保证其性质不变；①若被删除结点z是叶结点，则直接删除；②若结点z只有一棵左子树或右子树，则让z的子树成为z父结点的子树，替代x的位置；③若结点z有左、右两棵子树，则令z的直接后继（或直接前驱）替代x，然后从二又排序树中删去这个直接后继（或直接前驱），这样就转换成了第一或第二种情祝；

6）二叉排序树查找效率：①查找成功的平均查找长度ASL=第i层结点个数乘i之和除以结点数；②查找失败的平均查找长度ASL=第i层空链域个数乘i之和除以空链域数；

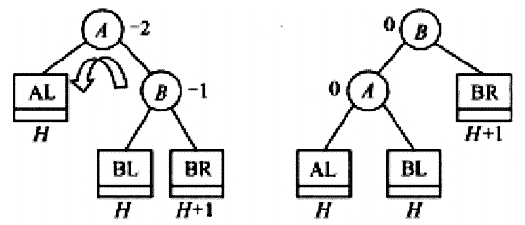
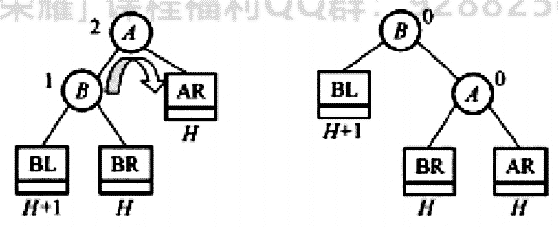
6.平衡二叉树

1） 平衡因子与平衡二叉树：①左子树与右子树的高度差为该结点的平衡因子；②任意结点的左、右子树高度差的绝对值不超过1，将这样的二叉树称为平衡二叉树；

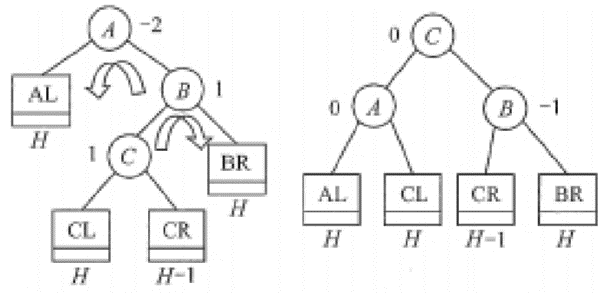
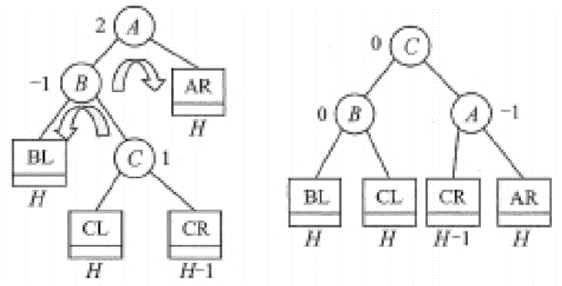
2） 平衡二叉树的插入基本思想：①插入（或删除）一个结点后，检査插入路径上的结点是否变得不平衡；②若不平衡，找到插入路径上最小不平衡子树根结点A，使以A为根的子树重新达到平衡；

3） 最小不平衡子树：插入路径上离指入结点最近的平衡因子的绝对値大于1的结点作为根的子树；

4）右旋与左旋：①右旋以LL为例：i 将BR作为A结点的左子树 ii 将结点A作为结点B的右子树 iii 将结点B作为A结点原父结点的孩子；②左旋以RR为例：i 将BR作为A结点的右子树 ii 将结点A作为结点B的左子树 iii 将结点B作为A结点原父结点的孩子；



5） 四种类型：结点A为最小不平衡子树的根节点①LL型：在结点A左孩子的左子树上插入新结点导致不平衡，右旋；②RR型：在结点A的右孩子的右子树上插入新结点导致不平衡，左旋；③LR型：在结点A左孩子的右子树上插入新结点导致不平衡，先左旋再右旋；④在结点A右孩子的左子树上插入新结点导致不平衡，先右旋再左旋；



7.哈夫曼树和哈夫曼编码

1） 定义：①结点的权：结点被赋予一个数值，称为该结点的权；②结点的带权路径长度：从树的根到任意结点的路径长度（经过的边数）与该结点上权值的乘积；③树的带权路径长度：树中所有叶结点的带权路径长度之和，记为；④哈夫曼树（最优二叉树）：带权路径长度（WPL）最小的二叉树；⑤只有树的叶子结点存在权值；

2） 哈夫曼树的构造：①n个结点视作n棵仅含一个结点的二叉树，构成森林F；②从F中选取两棵根结点权值最小的树作为新结点的左、右子树，并且将新结点的权值置为左、右子树上根结点的权值之和；③从F中删除刚才选出的两棵树，同时将新得到的树加入F中；④重复步骤②和③直至F中只剩下一棵树为止；

3） 哈夫曼树的特点：①每个初始结点最终都成为叶结点；②哈夫曼树的结点总数为2n-1；

4） 哈夫曼编码：①固定长度编码：对每个字符用相等长度的二进制位表示；②可变长度编码：允许对不同字符用不等长的二进制位表示；③前缀编码：没有一个编码是另一个编码的前缀；④哈夫曼编码： i 将每个字符作为一个点，权值为它出现的次数（频率），构造哈夫曼树； ii 字符的编码解释为从根至该字符的路径上边标记的序列，0表示转向左孩子，1表示转向右孩子；