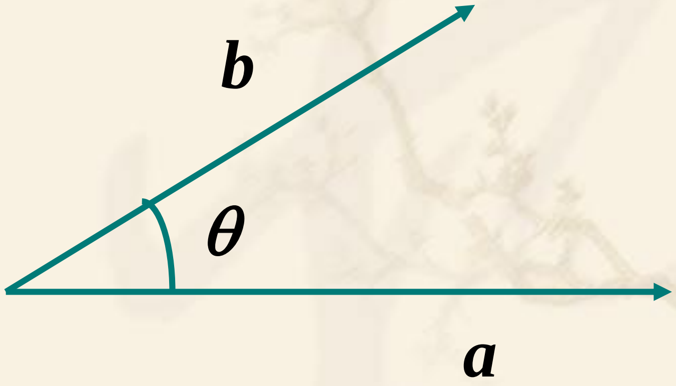
## § 8.1.4 两矢量的数量积(内积)

定义7 两矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的**数量积**, 等于两矢量的模与两矢量夹角的余弦的乘积, 记为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

其中$\theta=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角.



## 数量积的运算规律

(1)交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2)分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

(3)$(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, $k$为实数.

(4)$(\boldsymbol{a}^2=)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ .

注：数量积无结合律，因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$无意义.

## 夹角公式

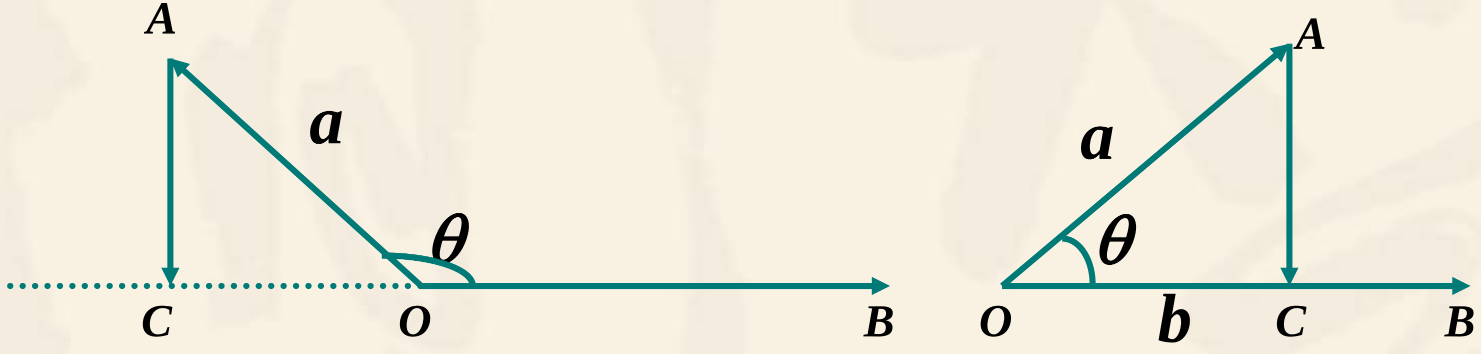
设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是两非零矢量，由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

## 投影公式

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0 \quad \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}^0.$$

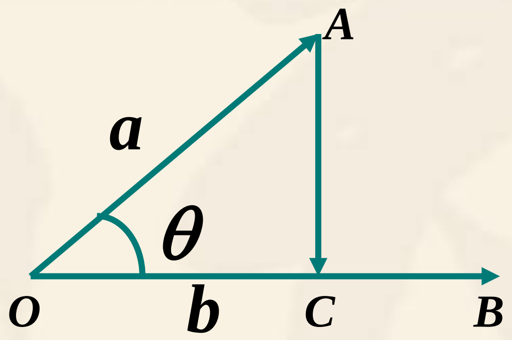
**投影** 设$\overrightarrow{OB}=b$, $\overrightarrow{OA}=a$, 过点$A$作$AC$垂直于$OB$,




$C$为垂足, 称$\overrightarrow{OC}$为矢量$a$在$b$上的**分矢量**, 因为$\overrightarrow{OC}$与$b^0$共线, 所以 $\overrightarrow{OC}=\lambda b^0$, 称$\lambda$为矢量$a$在矢量$b$上的**投影**, 记作

$\mathrm{Prj}_b\, a$(或$a_b$).

## 投影公式




$$\overrightarrow{OC}=\lambda b^0$$

$$\Pr j_b a=|a|\cos\theta=|a|\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{a\cdot b}{|b|}=a\cdot b^0.$$

同理矢量$b$在矢量$a$上的投影为$\Pr j_a b=\dfrac{b\cdot a}{|a|}=b\cdot a^0$.

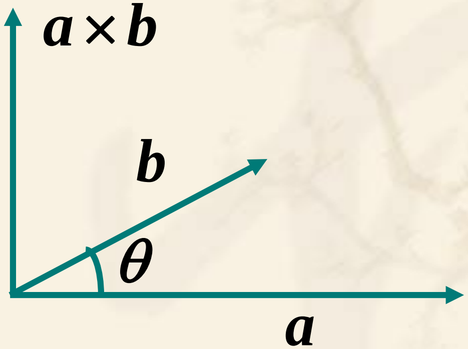
注:(1)分矢量$\overrightarrow{OC}=\Pr j_b a\cdot b^0$; (2)投影可以是一负数.

**性质1 两个矢量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$垂直的充要条件是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$**

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

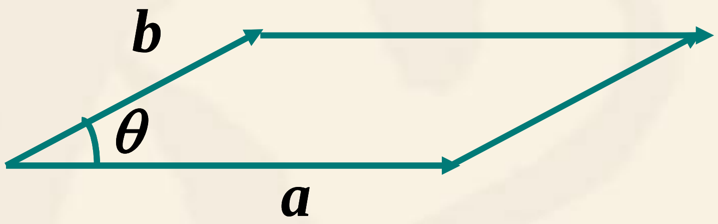
## § 8.1.5 两矢量的矢量积

定义8 两矢量$a$与$b$的矢量积为一个矢量，记为$a\times b$，它的模等于$|a||b|\sin\theta$，其中$\theta$为$a,b$间的夹角；它的方向垂直于$a$与$b$所决定的平面，其指向按右手规则从$a$转向$b$来确定.



## 矢量积$a\times b$的模的几何意义

$$|a\times b| = |a||b|\sin\theta$$




知$a\times b$的模等于以$a, b$为邻边所构成的平行四边形的面积.

## 矢量积的运算规律

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$(反交换律).

(2)分配律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.$$

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, $\lambda$为实数.

注：矢量积不满足交换律与结合律，一般地

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

性质2 两矢量$a,b$平行的充要条件是 $a\times b=0$.

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta$$

注:(1)常用数量积是否为零来判断矢量垂直,矢量积是否为零来判断矢量平行;

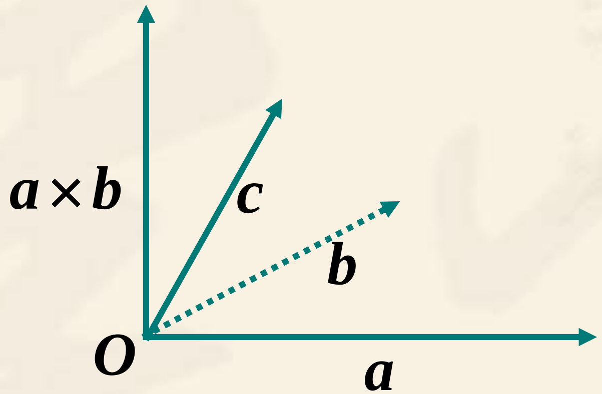
(2)$a\cdot a=|a|^2$ ,$a\times a=0$;

(3) $a\times b$与$a(b)$垂直,即$\begin{cases}(a\times b)\cdot a=0\\(a\times b)\cdot b=0\end{cases}$.

## § 8.1.6 混合积

定义9 设$a, b, c$是三个矢量，先做$a, b$的矢量积$a\times b$，再把所得矢量与$c$做数量积$(a\times b)\cdot c$，这样所得的**数**称为三矢量$a, b, c$的**混合积**，记作$[a, b, c]$. 即

$$[a, b, c]=(a\times b)\cdot c.$$

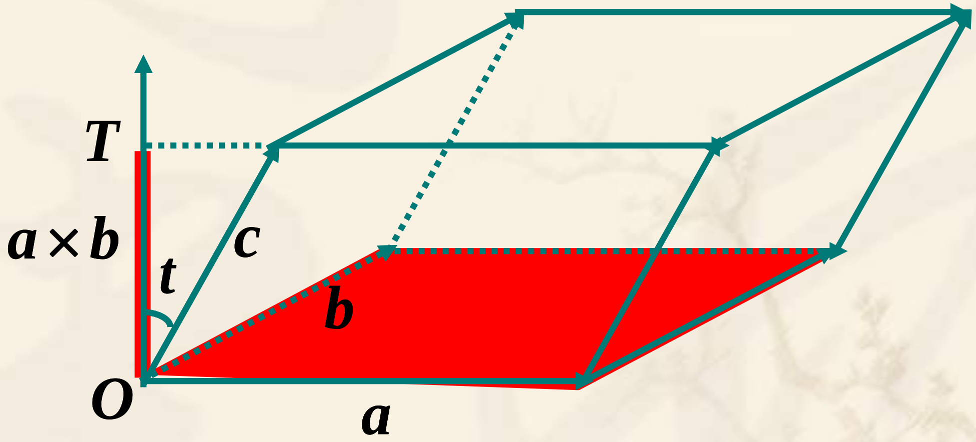


## 混合积绝对值的几何意义

设矢量$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的夹角为$t$，则

$$|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}||\cos t|$$

即$|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|$为以矢量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积.



## 混合积的性质

(1)$[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b]$(轮换(转)性).

(2)$[a, b, c] = -[b, a, c] = -[c, b, a] = -[a, c, b]$(对换变号).

(3)$[ka, b, c] = [a, kb, c] = [a, b, kc] = k[a, b, c]$.

(4)$[a_1 + a_2, b, c] = [a_1, b, c] + [a_2, b, c]$.

(5)$[a, b, a] = [a, b, b] = 0$.

**定理3** 三个矢量$a, b, c$共面的充要条件是$[a, b, c]=0$.

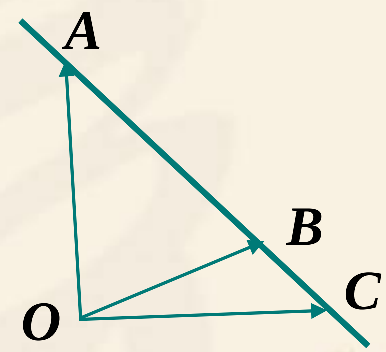
**证明** 必要性 若矢量$a, b, c$共面, 则$a\times b$与$c$垂直. 故

$$[a, b, c]=(a\times b)\cdot c=|a\times b||c|\cos\frac{\pi}{2}=0$$

充分性 由$[a, b, c]=(a\times b)\cdot c=|a\times b||c|\cos t=0$, 得$|a\times b|=0$或$|c|=0$或$\cos t=0$，若$|a\times b|=0$, 则$a$与$b$平行, 所以$a, b, c$共面. 若$|c|=0$，得$a, b, c$共面. 若$\cos t=0$, 则$c$与$a\times b$垂直，从而$a, b, c$共面. 终上所述,当$[a, b, c]=0$时, $a, b, c$共面.

## § 8.1.7 矢量的应用举例

例4 设有空间三点$A$, $B$, $C$及点$O$, 且$\overrightarrow{OA}=r_1$, $\overrightarrow{OB}=r_2$, $\overrightarrow{OC}=r_3$. 若$r_1$, $r_2$, $r_3$满足等式$r_1\times r_2+r_2\times r_3+r_3\times r_1=0$，试证$A$, $B$, $C$三点共线.




证明 因为$\overrightarrow{AB}=r_2-r_1$, $\overrightarrow{AC}=r_3-r_1$, 且

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(r_2-r_1)\times(r_3-r_1)$$

$$=r_2\times r_3-r_2\times r_1-r_1\times r_3+r_1\times r_1$$

$$=r_1\times r_2+r_2\times r_3+r_3\times r_1=0$$

即$AB//AC$, 所以$A$, $B$, $C$三点共线.

例5 设$c=(b\times a)-b$, $a$, $b$均为非零向量, 且$a\times b\neq 0$.

试证: (1)$a\perp(b+c)$;

(2)$b$, $c$的夹角$\theta$满足$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$.

证明 (1)因为$c=(b\times a)-b$, 则 $b+c=b\times a$. 而$b\times a\perp a$,

所以 $a\perp(b+c)$.

(2)因为$b\cdot c=b\cdot((b\times a)-b)=-|b|^2$, 所以

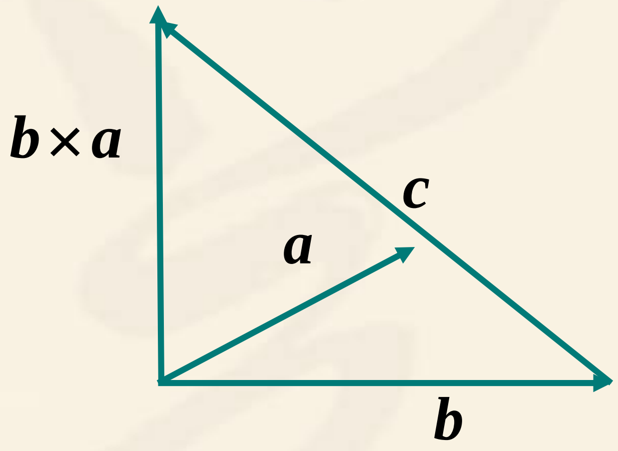
$$\cos\theta=\frac{b\cdot c}{|b||c|}=\frac{-|b|^2}{|b||c|}=\frac{-|b|}{|c|}<0,$$

从而结论成立.

$$b\times c=b\times((b\times a)-b)=b\times(b\times a)\neq 0$$

因为$c=(b\times a)-b$, 故$c$为直角三角形的斜边.

所以$|c|>|b|$, 即$\cos\theta\neq-1\cdot$



**例6** 设$|\boldsymbol{a}|=1, |\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$, 且$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=1$, 求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

**思考题1** 设$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$是两个非零矢量且不共线，则它们夹角平分线上的单位矢量为$\pm\dfrac{|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}}{||\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}|}$.

**思考题2** 设$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$为非零矢量，以$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$为邻边作平行四边形，求平行四边形中和$\boldsymbol{a}$边垂直的高线矢量.

思考题 设$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为非零矢量，以$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，则平行四边形中和 a 边垂直的高线矢量为__________.

解 b 在 a 上的投影为 $\mathrm{Pr\,j}_{a}b = \dfrac{b \cdot a}{|a|}$. 则该矢量(分矢量)为

$$\frac{b \cdot a}{|a|} \cdot \frac{a}{|a|} = \frac{b \cdot a}{|a|^2} a$$

所以和 a 边垂直的高线矢量为 $\pm(b - \dfrac{b \cdot a}{|a|^2} a)$.