§ 6.5 二次曲面的标准型

§6.5.1 坐标变换

1.坐标平移 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$

$$\begin{cases} x-1=x' \\ y-2=y' \\ z-3=z' \end{cases},\text{即}\begin{cases} x=x'+1 \\ y=y'+2 \\ z=z'+3 \end{cases}$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=1$$

2.坐标旋转 $3x^2-2xy+3y^2=2$

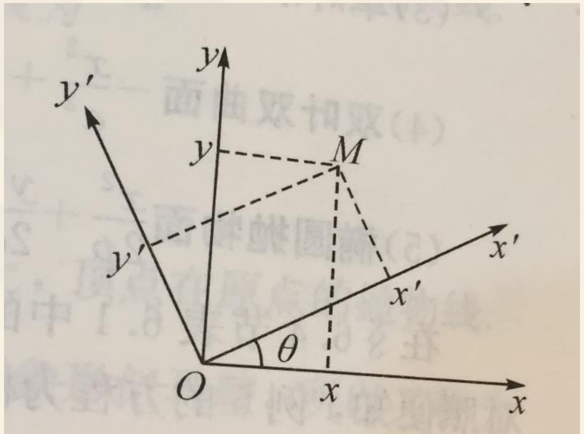


图 6.34

$$\begin{cases} x = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $x^2+y^2=a^2 \Rightarrow r=a$

我们把三元二次方程$F(x,y,z)=0$所表示的曲面称为**二次曲面**，把平面称为**一次曲面**.

下面我们主要讨论：**二次曲面的标准方程所表示的曲面的形状.**

了解曲面形状的方法主要有：截痕法与伸缩法.

1.**截痕法**：平面$z = t$与曲面$F(x, y, z) = 0$的交线称为截痕，通过截痕的变化来了解曲面形状的方法称为截痕法.

2.**伸缩法**：有些二次曲面可通过标准的二次曲面沿坐标轴方向进行伸缩而得到.

$$x^2 + y^2 = 1 \xrightarrow[\text{沿}x\text{轴方向伸缩}2\text{倍}]{\text{沿}x\text{轴方向伸长}2\text{倍}} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

(1)**椭圆锥面**: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$ **圆锥面**: $\dfrac{x^2+y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$

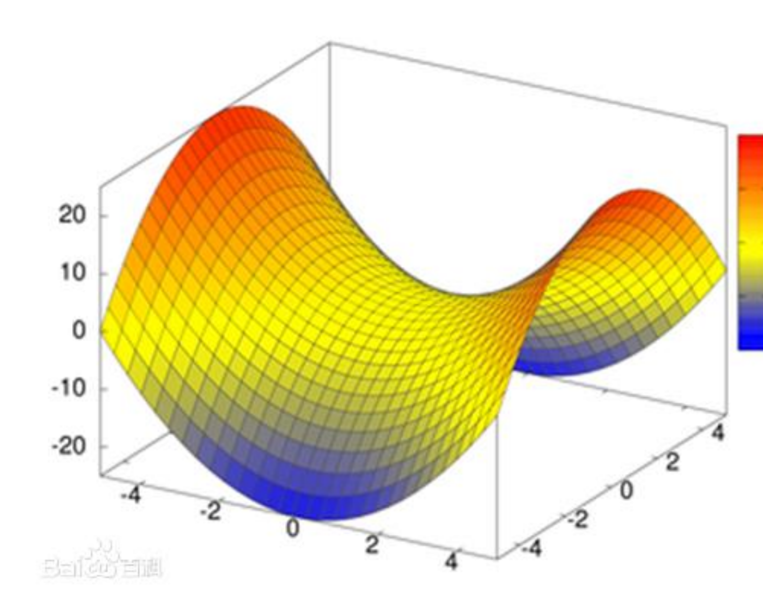
以垂直于z轴的平面$z=t$截此曲面，当$t=0$时是一点(0, 0, 0)；当$t\neq 0$时为平面$z=t$上的椭圆

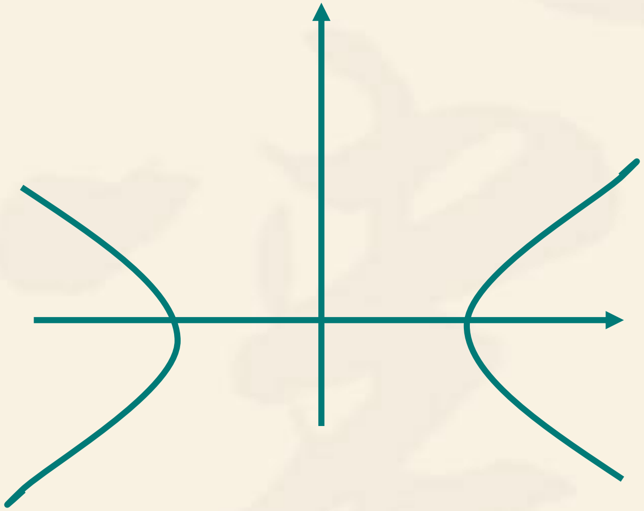
$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1.$$

(2)**椭圆抛物面** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$

(3)**双曲抛物面** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$

马鞍面





(4)**椭球面** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

把Oxz面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$绕$z$轴旋转，所得

曲面称为**旋转椭球面**，其方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

再把旋转椭球面沿y轴方向伸缩$\frac{b}{a}$倍，便得**椭球面**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(5)**单叶双曲面** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

把Oxz面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$绕$z$轴旋转，得

单叶旋转双曲面

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

把此旋转曲面沿y轴方向伸缩$\frac{b}{a}$倍，即得**单叶双曲面**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(6)双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

把Oxz面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$绕$x$轴旋转，得

旋转双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$，把此旋转曲面沿$y$

轴方向伸缩$\frac{b}{c}$倍，即得双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

例10 已知两个曲面的方程分别为$z=2x^2+3y^2$与$z=4-2x^2-y^2$. 求此两个曲面的交线在Oxy面上的投影曲线方程以及两曲面所围成的立体在Oxy面上的投影区域.

解 曲面的交线方程为$\begin{cases} z=2x^2+3y^2 \\ z=4-2x^2-y^2 \end{cases}$

消去z得母线平行于z轴的投影柱面方程为$x^2+y^2=1$,

为圆柱面.

所以交线在Oxy面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

两曲面所围成的立体在Oxy面上的投影区域即为投影曲线在Oxy面上所围成的区域，即为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

命题 设直线

$$L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (1)\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (2)\end{cases}$$

把 z 作为参数，由(1)(2)两式解出 $x=\varphi(z),\ y=\psi(z)$，则 L 绕 z 轴旋转而形成的旋转曲面方程为

$$x^2+y^2=\varphi^2(z)+\psi^2(z).$$

提示：设 x,y,z 是旋转曲面上任一点，则 x_1,y_1,z 为直线 L 上的点，同时

$$x^2+y^2=x_1^2+y_1^2=\varphi^2(z)+\psi^2(z),$$

故旋转曲面方程为 $x^2+y^2=\varphi^2(z)+\psi^2(z)$。

例已知两点的直角坐标为 $A(1,0,0), B(0,1,1)$。线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S，求由 S 及两平面 $z=0, z=1$ 所围立体的体积。

解　直线 AB 的方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$，即得 $\begin{cases} x=1-z \\ y=z \end{cases}$，故绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面方程为 $x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$，即

$$x^2+y^2=2z^2-2z+1$$

在$[0,1]$内任取一点z，作垂直于竖坐标的平面，则得体积微元

$$dv = \pi(2z^2 - 2z + 1)dz,$$

由元素法，得体积

$$V = \int_0^1 \pi(2z^2 - 2z + 1)dz = \pi[\frac{2}{3}z^3 - z^2 + z]_0^1 = \frac{2}{3}\pi.$$