§ 6.4 曲面与曲线

§ 6.4.1 曲面方程

定义1 若曲面Σ与方程 $F(x, y, z) = 0$ 满足以下关系：

(1)曲面Σ上任一点的坐标都满足方程 $F(x, y, z) = 0$;

(2)不在曲面Σ上的点的坐标都不满足方程.

那么方程就叫做曲面Σ的方程, 而曲面Σ就叫做方程的图形.

常见的曲面有两类：旋转曲面与柱面.

定义2 一条曲线绕某直线 (称为**旋转轴**) 旋转而成的曲面称为**旋转曲面**. 旋转曲线叫做旋转曲面的**母线**.

旋转曲面的特点:

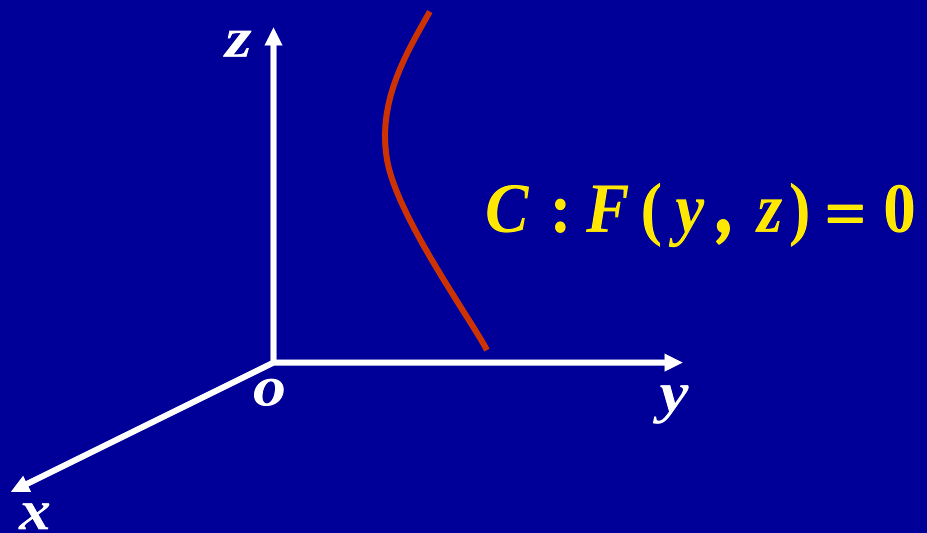
旋转曲面上任一点的轨迹都是一个圆. 或用一垂直于轴的平面截旋转曲面, 其截痕都是一个圆.

命题 设在Oyz坐标面上有一已知曲线$C: F(y, z)=0(x=0)$，把这曲线绕 z 轴旋转一周，就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面Σ. 此旋转曲面的方程为

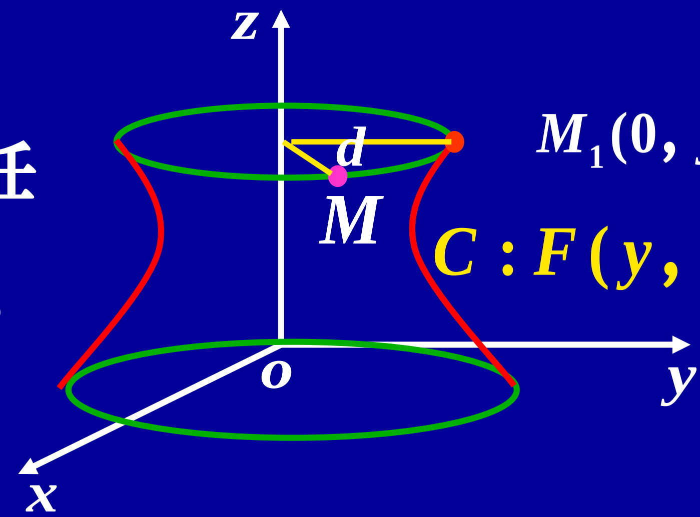
$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0.$$

同理，曲线C绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$



证 设 $M(x, y, z)$是曲面上任一点，其绕z轴旋转到曲线C时，其坐标为$M_1(0, y_1, z)$，则



(1)点M到z轴的距离$d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$;

(2)$F(y_1, z)=0$.

将 $y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入 $F(y_1, z)=0$, 得

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0.$$

这就是所求旋转曲面的方程.

思考：若是绕与z轴平行的直线，如何求旋转曲面的方程.

注 : 常见的旋转曲面方程见表6.1.

要求 1)掌握常见旋转曲面的几何形状;

2)掌握常见旋转曲面的方程;

3)会画草图.

定义3 直线沿定曲线平行移动形成的轨迹叫做柱面，动直线叫做柱面的母线，定曲线叫做柱面的准线.

柱面就是圆柱面吗?

直线保持过某一定点且与某一定曲线相交并沿此曲线运动的轨迹，称为锥面. 同样，动直线称为母线，定曲线称为准线，定点称为顶点. 圆锥面为锥面的特殊情况.

下面讨论准线为某坐标面上的曲线，且母线平行于与该坐标面垂直的坐标轴的柱面方程.

命题： 设Oxy面上的曲线方程为$\begin{cases} F(x, y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，则母线平行于$z$轴的柱面方程为$F(x, y)=0$.

证 设$M(x, y, z)$为柱面上任一点，则$M'(x, y, 0)$为准线上对应点，故柱面方程为：$F(x, y)=0$.

因此方程$F(x, y)=0$表示母线平行于z轴的柱面.

注：反之，若已知柱面方程为$F(x, y)=0$，则在Oxy面上的准线方程为$\begin{cases} F(x, y)=0 \\ z=0 \end{cases}$.

常见的柱面见表(2).

§ 6.4.2 曲线方程

空间曲线可以由两个曲面相交而得到. 设两曲面方程为$F(x, y, z)=0$和$G(x, y, z)=0$.则曲线方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z)=0 \\ G(x, y, z)=0 \end{cases}.$$

称为曲线的交面式方程, 也称为一般式方程.

例如Oxy面上的曲线方程为$\begin{cases} F(x, y)=0 \\ z=0 \end{cases}$,因此

坐标面上的曲线方程，分别为柱面与坐标面的交线.

Ozx面上的曲线方程为$\begin{cases} F(x, z)=0, \\ y=0. \end{cases}$

Oyz面上的曲线方程为$\begin{cases} F(y, z)=0, \\ x=0. \end{cases}$

例6 中心轴分别为z轴与y轴，半径均为R的两个圆柱面，相交在第一卦限部分的交线如图8.29所示，其交线方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x^2+z^2=R^2 \end{cases}$$

$(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$

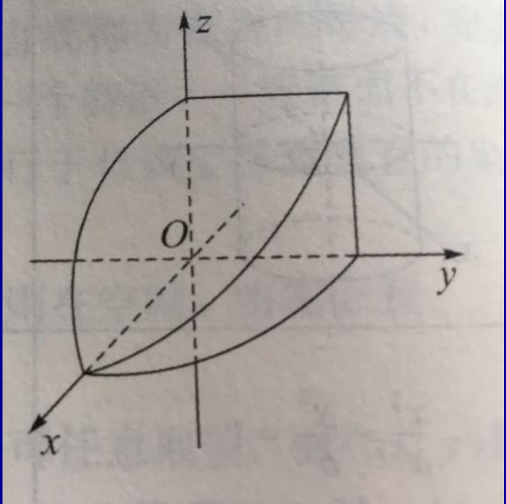


图 8.29

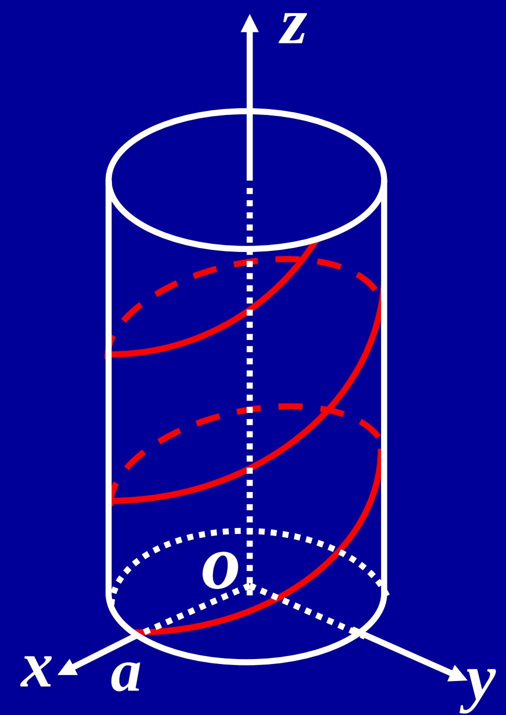
空间曲线C的方程除了一般方程之外，也可以用参数形式表示，即坐标x, y, z表示为参数t的函数：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

当给定$t = t_1$时，就得到曲线上的一个点(x_1, y_1, z_1)，随着参数t的变化可得到曲线C上的全部点. 方程组称为**空间曲线的参数方程**.

注 求空间曲线的参数方程既是一个难点，又是一个重点.

例7 空间曲线$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt (a>0, b>0) \end{cases}$为圆柱面螺旋线.



曲线在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上,

且曲线上的点(x, y, z)随t的增加,

不断地绕z轴螺旋式上升.

空间曲线$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{cases}$为圆锥面螺旋线.

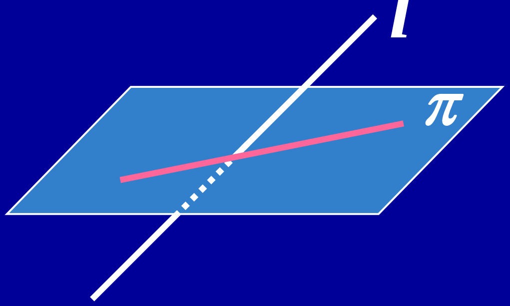
§ 6.4.3 投影柱面与投影曲线

定义 直线沿定曲线且与已知平面π垂直平行移动而形成的柱面称为**投影柱面**, 而投影柱面与平面π的交线称为定曲线在平面π上的**投影曲线**.

特别地, 当准线为直线时, 投影柱面为一经过已知直线且与平面π垂直的平面, 投影曲线为一直线. 如何求其方程?

定义3 直线沿定曲线平行移动形成的轨迹叫做**柱面**, 动直线叫做柱面的**母线**, 定曲线叫做柱面的**准线**.

例8 求直线 $l:\begin{cases} x+2y-z+3=0 \\ 2x+3z-1=0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x-y+z-4=0$ 上的投影直线方程.



解 过直线 l 的平面束方程为

$$x+2y-z+3+\lambda(2x+3z-1)=0$$

即 $(1+2\lambda)x+2y+(3\lambda-1)z+3-\lambda=0$，其法矢量为

$$(1+2\lambda,\ 2,\ 3\lambda-1)$$

已知平面π的法矢量为$(1,-1,1)$，由题意有

$$(1+2\lambda, 2, 3\lambda-1)\cdot(1,-1,1)=0,$$

解之得$\lambda=\frac{2}{5}$. 所以过直线l且垂直平面π的平面方程为

$$9x+10y+z+10=0.$$

于是, 所求投影直线方程为

$$\begin{cases} 9x+10y+z+10=0, \\ x-y+z-4=0. \end{cases}$$

问题 当已知平面 π 为坐标面 Oxy 时，如何求投影柱面与投影曲线?

命题 设准线的一般式方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$，从方程组中消去 z 得到 $H(x, y) = 0$, 即为母线平行于 z 轴的投影柱面方程; 同时方程 $\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 为曲线在 Oxy 面上的投影曲线方程.

设 $M(x, y, z)$ 为投影柱面上任意点, 则准线上有对应点 $M'(x, y, z')$, 则 $\begin{cases} F(x, y, z') = 0 \\ G(x, y, z') = 0 \end{cases}$， 消去 z' 即得 $H(x, y) = 0$.

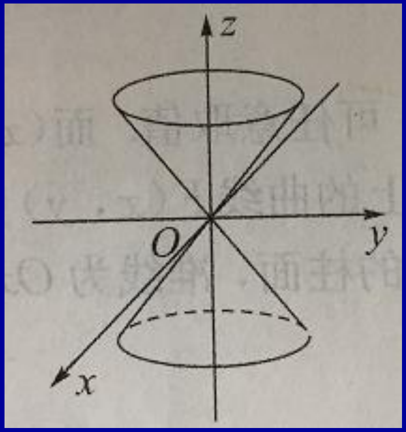
例9 写出圆锥面 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 分别与下列平面的交线在 Ozx 面上的投影曲线方程.

(1) $y = 2$;　(2) $y + z = 1$;　(3) $y + 4z = 1$.

解 (1)交线方程为 $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$，消去 y 整理得

$\dfrac{z^2}{4} - \dfrac{x^2}{4} = 1$，为双曲柱面. 在 Ozx 面上的投影曲线方程为

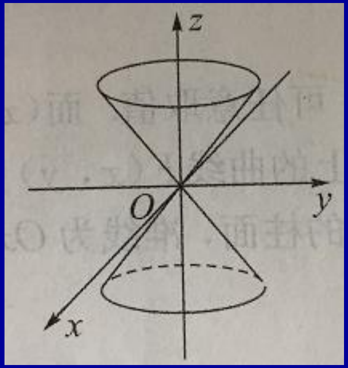
$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{x^2}{4} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$



(2)交线方程为$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$，消去 y 整理得

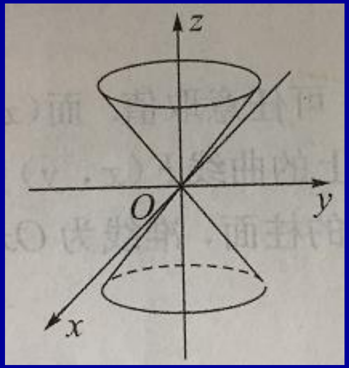
$x^2 = 2(z - \frac{1}{2})$, 为抛物柱面. 在Ozx面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2 = 2(z - \dfrac{1}{2}), \\ y = 0. \end{cases}$$



(3)交线方程为$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0, \\ y+4z=1. \end{cases}$ 消去 y 整理得

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2}+\frac{\left(z-\frac{4}{15}\right)^2}{\left(\frac{1}{15}\right)^2}=1,$$



为椭圆柱面. 在Ozx面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2}+\dfrac{\left(z-\frac{4}{15}\right)^2}{\left(\frac{1}{15}\right)^2}=1, \\ y=0. \end{cases}$$