§6.2 坐标系、矢量的坐标

一、坐标系

二、空间直角坐标系、(球面坐标系)

三、矢量运算的坐标表达式

§6.2.1 坐标系

为了确定空间中的一点在一定参考系中的位置，按规定的方法选取的有序数组称为点的**坐标**.

一维：数轴

二维：平面直角坐标系、平面极坐标系

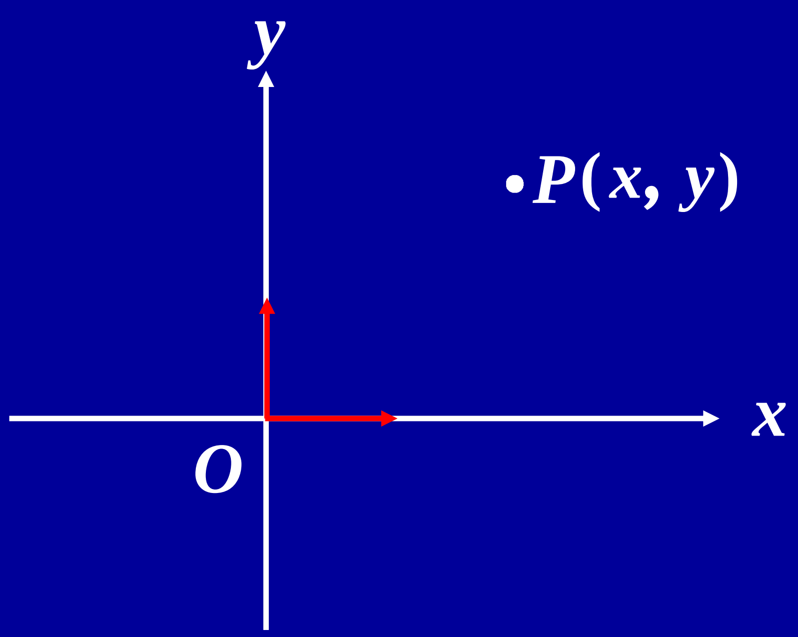
三维：空间直角坐标系、球面坐标系

数轴：规定了原点、正方向和单位长度的直线.

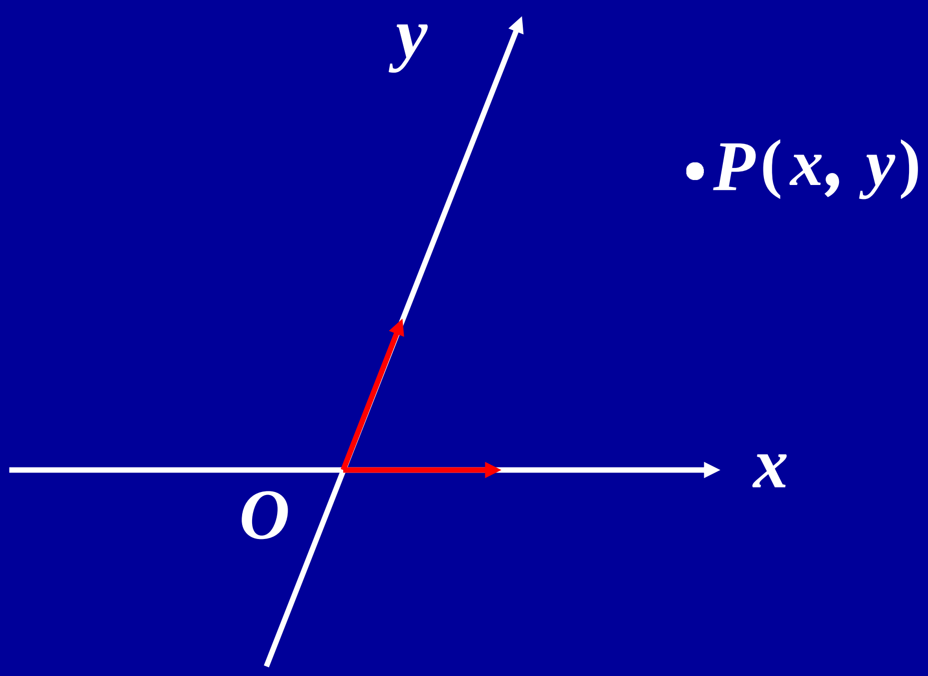
数轴：设i为一单位矢量，过其作一直线，令i的起点为O，这样就建立了以点O为原点、以i 的方向为正向的数轴.

平面直角坐标系：在同一个平面上互相垂直且有公共原点的两条数轴构成平面直角坐标系. 通常，两条数轴分别置于水平位置与垂直位置，取向右与向上的方向分别为两条数轴的正方向.

平面直角坐标系：在平面上取一定点O(原点)，作两个以O点为始端的互相垂直的单位矢量i，j，就确定了两条以O点为原点的两条互相垂直的数轴Ox，Oy，分别称为x轴、y轴．

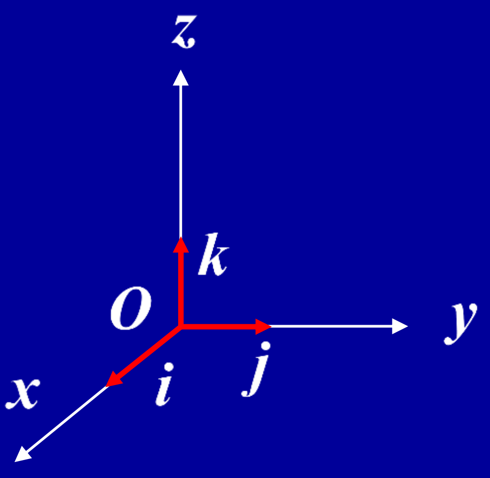


平面坐标系：在平面上取一定点O(原点)，作两个以O点为始端的非平行单位矢量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，就确定了两条以O点为原点的两条数轴Ox，Oy，分别称为x轴、y轴．



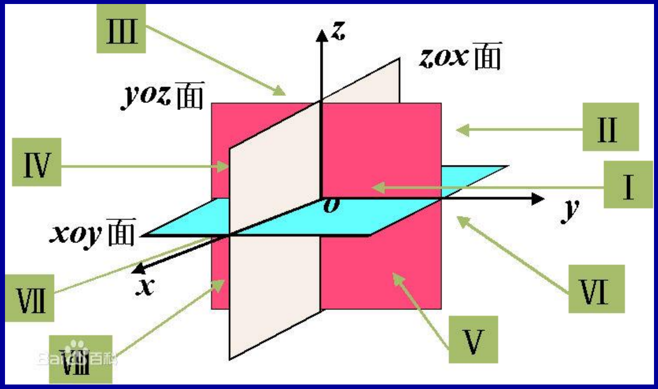
§ 6.2.2 空间直角坐标系

空间直角坐标系 取空间中一定点O，作三个以O点为始端的两两垂直的**单位矢量**i，j，k，就确定了三条以以O点为原点的两两垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，分别称为x**轴**、y**轴**、z**轴**，并依Ox，Oy，Oz 的顺序按**右手法则**规定坐标轴的正向. 这样就建立了一个空间直角坐标系.



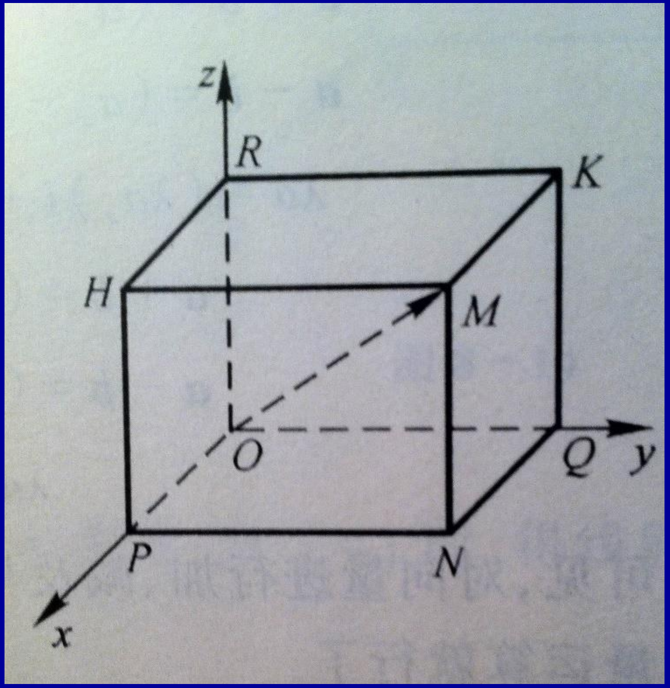
三条坐标轴的任意两条可以确定一个平面，称为**坐标面**．其中，由 y 轴和 z 轴确定的坐标面称为 **Oyz 面**，由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为 **Oxy 面**，由 z 轴和 x 轴确定的坐标面称为 **Ozx 面**．

三个坐标面把空间分成八个部分，称为八个**卦限**．含有 x 轴，y 轴，z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限，其他第二、第三、第四卦限在 Oxy 面上方，按逆时针方向确定．



点的坐标

对空间任意点 M，以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK-OPNQ$. 则



$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}$$
$$=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

则存在唯一的三个数 x, y, z，使得 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z$

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

上式称为矢量 $\overrightarrow{OM}$ 的**坐标分解式**，$x\boldsymbol{i}, y\boldsymbol{j}, z\boldsymbol{k}$ 称为矢量 $\overrightarrow{OM}$

沿三个坐标轴方向的分矢量.

这说明对给定点M就确定了$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$三个分矢量，进而确定了 x, y, z 三个有序数；反之，给三个有序数 x, y, z，也就确定了点 M. 于是点M与三个有序数 x, y, z 之间有一一对应的关系：

$$M \leftrightarrow \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk \leftrightarrow (x, y, z)$$

有序数 x, y, z称为点 M 的坐标，记作 $M(x, y, z)$，并分别称为横坐标，纵坐标，竖坐标.

也就是点$M(x, y, z) \Leftrightarrow$ 矢量$\overrightarrow{OM} = xi + yj + zk$.

矢量的坐标

对于给定矢量 r，作 $\overrightarrow{OM}=r$，若 M 点的坐标为 (x, y, z)，即 $\overrightarrow{OM}=xi+yj+zk$，则 $r=\overrightarrow{OM}=xi+yj+zk$，称矢量 r 的坐标为 x, y, z，又可记为 $r=(x, y, z)$，称其为矢量 r 的坐标表达式.

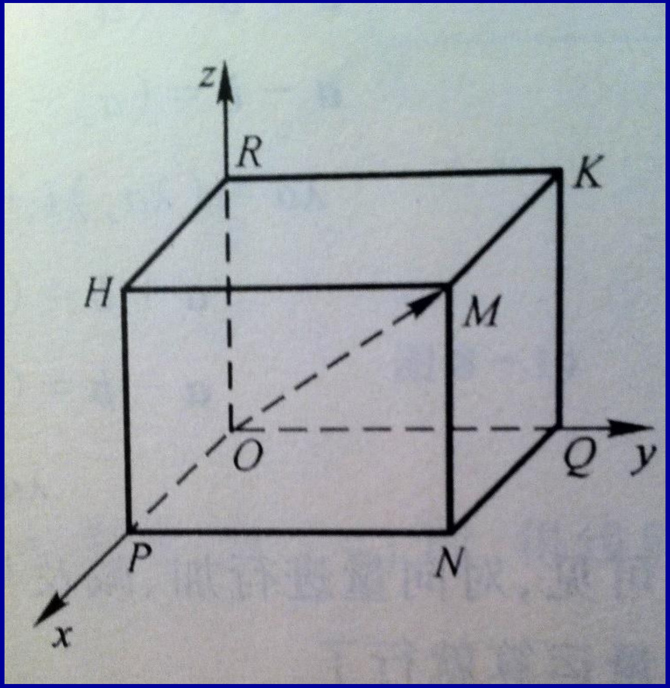
因此 (x, y, z) 既表示一点 M，又可表示一矢量 r.

设 $M(x, y, z)$ 是空间中任一点，矢量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的矢径，简写为 r_M，且 $r_M=(x, y, z)=xi+yj+zk$.

矢量的模、方向角、方向余弦

设矢量$\boldsymbol{r}=(x, y, z)$, 作

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$



$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2}$$

由分矢量 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$, 有

$$|\overrightarrow{OP}|=|x|,\ |\overrightarrow{OQ}|=|y|,\ |\overrightarrow{OR}|=|z|,$$

于是得到矢量 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$的模为$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

性质 设空间中两点为 $A(x_1, y_1, z_1)$ 与 $B(x_2, y_2, z_2)$，则

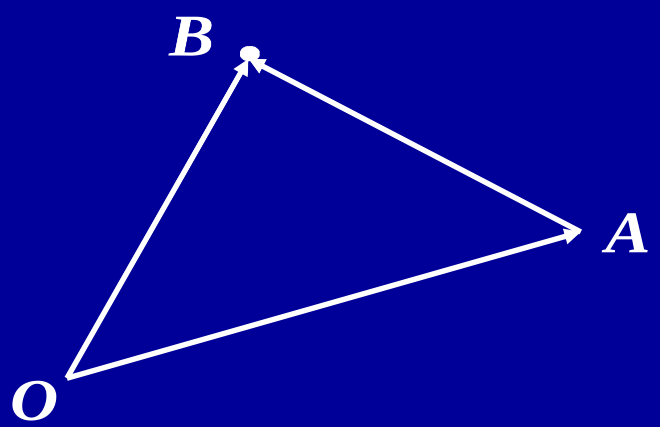
矢量 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$，且

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

证 因为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

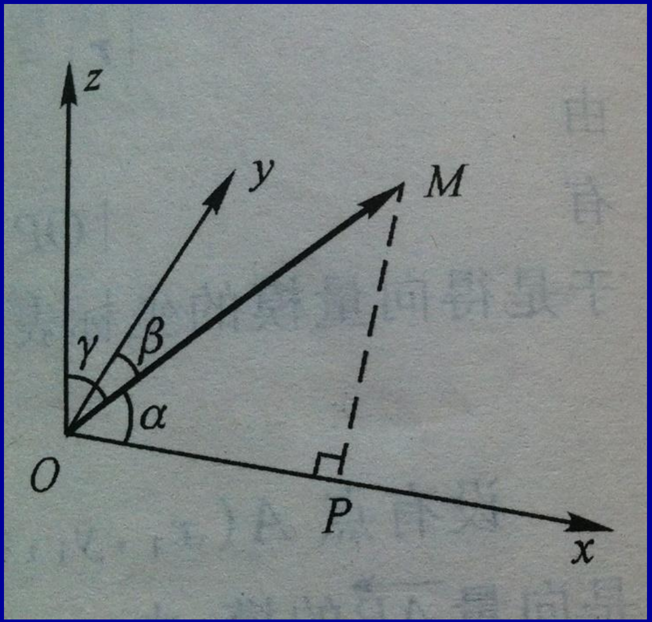
$$= x_2 i + y_2 j + z_2 k - (x_1 i + y_1 j + z_1 k)$$

$$= (x_2 - x_1) i + (y_2 - y_1) j + (z_2 - z_1) k$$



$$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

设非零矢量 r 与 x 轴、y 轴、z 轴**正向**的夹角为 α, β, γ，亦即 $\overrightarrow{OM}$ 与 i, j, k 的夹角，把它们称为矢量 r 的**方向角**.



设 $\overrightarrow{OM}=r=(x, y, z)=xi+yj+zk$，则

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OM}\cdot i}{|\overrightarrow{OM}||i|}=\frac{(xi+yj+zk)\cdot i}{|\overrightarrow{OM}||i|}=\frac{x}{|r|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

同理 $\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

称 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为矢量 r 的方向余弦，并有

(1) $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

同时由 $r=(x, y, z)=xi+yj+zk$，得

$$r^0=\frac{r}{|r|}=\frac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

(2)一矢量的单位矢量其坐标就是该矢量的方向余弦；反之，以一矢量的方向余弦为坐标的矢量就是该矢量的单位矢量 r^0.

例2 求与三坐标轴夹角相等的单位矢量.

§ 6.2.3 矢量运算的坐标表达式

设矢量

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k = (a_1, a_2, a_3),$$

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k = (b_1, b_2, b_3),$$

$$c = c_1 i + c_2 j + c_3 k = (c_1, c_2, c_3).$$

矢量加法 $a+b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) + (b_1 i + b_2 j + b_3 k)$

$$= (a_1 + b_1) i + (a_2 + b_2) j + (a_3 + b_3) k$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

数乘矢量 $$ka = k(a_1 i + a_2 j + a_3 k)$$

$$= ka_1 i + ka_2 j + ka_3 k$$

$$= (ka_1, ka_2, ka_3)$$

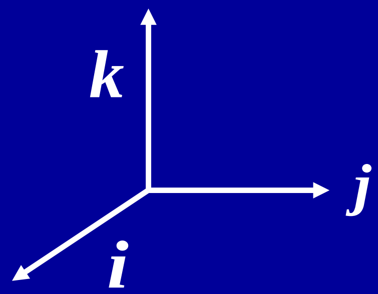
矢量的数量积 因为 $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$ 且 $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$,

所以有 $$a \cdot b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot (b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

矢量的矢量积 因为 $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$, 且 $i \times i =$

$j \times j = k \times k = 0$, 所以有



$$a\times b=(a_1 i+a_2 j+a_3 k)\times(b_1 i+b_2 j+b_3 k)$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)i-(a_1b_3-a_3b_1)j+(a_1b_2-a_2b_1)k=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

矢量的混合积 $[a,b,c]=(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

性质：a, b, c 共面的充要条件为 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0.$

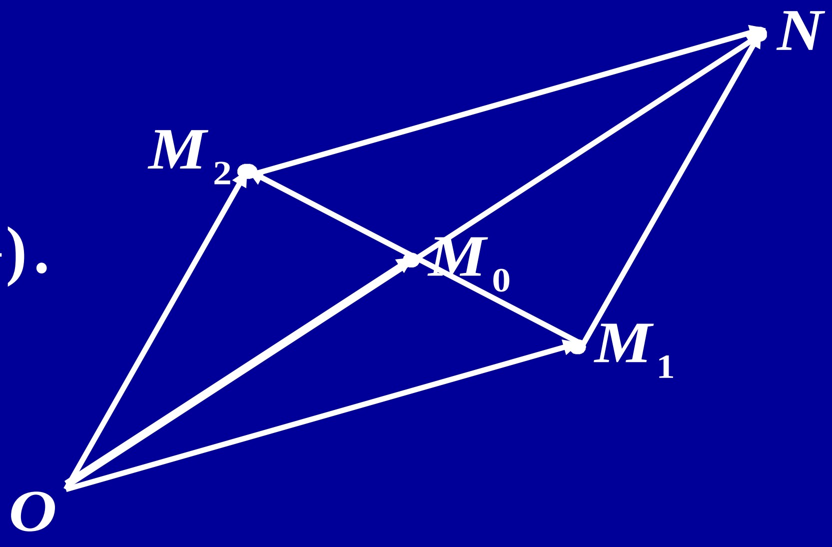
例4 设两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求 M_1 与 M_2 连线中点的坐标.

解 设中点为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，如图所示，有

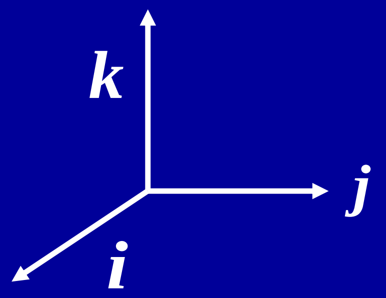
$$\overrightarrow{OM_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

故中点坐标为

$$M_0\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$



例6 求$(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{k}$.

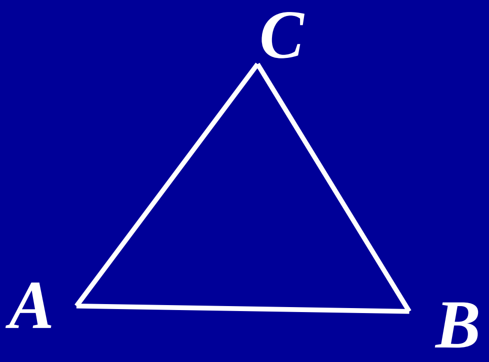


解法一 $(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}$

$$=-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{i}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$$

解法二 $(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$

例8 已知三角形的三顶点为$A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 1)$, $C(0, 2, 4)$, 求ΔABC的面积.



解 ΔABC的面积$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. 因为

$$\overrightarrow{AB}=r_B-r_A=(2, 1, 1)-(1, 0, 2)=(1, 1, -1),$$

$$\overrightarrow{AC}=r_C-r_A=(-1, 2, 2).$$

所以

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=(4, -1, 3).$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{26},$$

故ΔABC的面积 $S=\frac{1}{2}\sqrt{26}.$

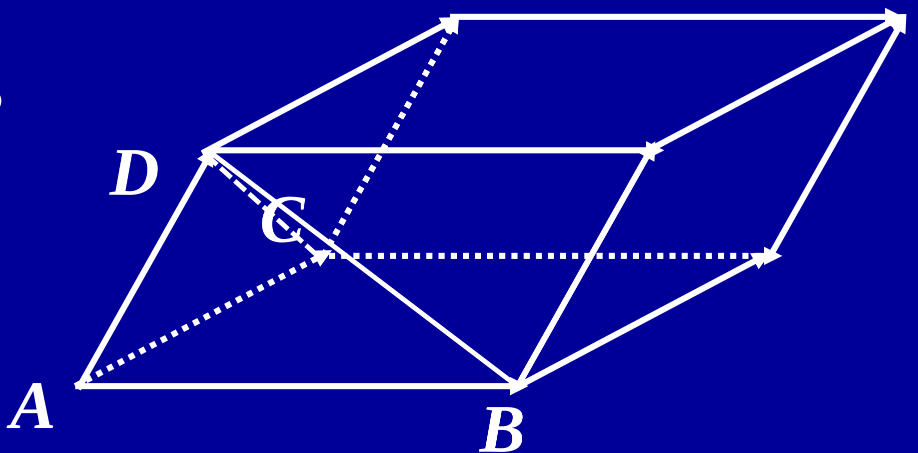
例9 已知四面体的顶点 $A(0, 0, 2)$, $B(3, 0, 5)$, $C(1, 1, 0)$, $D(4, 1, 2)$, 求此四面体的体积.

解 体积 $V=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$，因为

$$\overrightarrow{AB}=r_B-r_A=(3, 0, 5)-(0, 0, 2)=(3, 0, 3),$$

$$\overrightarrow{AC}=r_C-r_A=(1, 1, -2),$$

$$\overrightarrow{AD}=r_D-r_A=(4, 1, 0),$$



所以

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-3.$$ 故体积 $V=\frac{1}{6}|-3|=\frac{1}{2}.$

思考题 设矢量$a+3b$垂直于$7a-5b$, 且$a-4b$垂直$7a-2b$, 求矢量a与b的夹角θ.

作业

习题册 121-122