# 2015－2016 学年第一学期期末试题

## 一、填空题(本题共21分，每小题3分)

1.设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$____.

2.若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=4$，则 $f'(0)=$____.

3.设 $f(x)=xe^{-x}$ ，则 $f(x)$ 的单调减少的凸区间是____.

4.不定积分 $\int\dfrac{x^2}{1+x^2}dx=$_____.

5.由曲线 $y=\sqrt{x}$，$x=1$，$y=0$ 围成的平面区域绕 $x$ 轴旋转一周得到的旋转体的体积是_____.

6.将函数 $y=x(-\pi\le x\le\pi)$ 展开成傅里叶级数，则展开式中 $\cos 2x$ 项的系数 $a_2=$_____.

7.若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}(a>0)$ 发散，则 $x$ 的取值范围是 _____.

## 二、计算题(本题共30分，每小题6分)

1.计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

2.由方程 $ye^{xy}=1-x$ 确定的函数 $y=y(x)$，计算 $y''(0)$.

3.计算不定积分 $\int\ln(1+\sqrt{x})dx$.

4.计算定积分 $\int_0^1\dfrac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

5.求曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的所有渐近线.

**三、解答题(本题共20分，每小题10分)**

**1.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$的收敛域与和函数.**

**2.已知曲线$y=x^2$与$y=ax(0<a<1)$所围成的图形的面积为$S_1$，曲线$y=x^2$，$y=ax$ 与$x=1$所围成图形的面积为$S_2$，确定$a$的值，使$S_1+S_2$最小，并求出$S_1+S_2$的最小值.**

**四、证明题(共14分，每小题7分)**

**1. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，求证：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$也收敛.**

**2. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有二阶导数，且$f(0)=f(1)=0$，求证：存在$\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f''(\xi)+2f'(\xi)=0$.**

# 2015－2016 学年第一学期期末试题答案

## 一、填空题

1.1;　2.4;　3.(1, 2);　4.$x-\arctan x+C$;　5.$\dfrac{\pi}{2}$;　6.0;　7.$a\geq e$.

## 二、计算题

1.计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt{1+x^2}-1}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=e$.

2.由方程$ye^{xy}=1-x$确定的函数$y=y(x)$，计算$y''(0)$.

解：方程$ye^{xy}=1-x$两边同时对$x$求导：

$$y'e^{xy}+ye^{xy}(xy'+y)=-1$$

令$x=0$，由原方程得$y(0)=1$，得到$y'(0)=-2$.

上式再对$x$求导，$\cdots$，将$x=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=-2$代入得到$y''(0)=7$.

3.计算不定积分$\int\ln(1+\sqrt{x})dx$.

解 令$t=\ln(1+\sqrt{x})$，则$x=(e^t-1)^2$，$dx=2(e^t-1)e^t$，

原式$=\cdots=[\ln(1+\sqrt{x})-\dfrac{1}{2}](1+\sqrt{x})^2+2[1-\ln(1+\sqrt{x})](1+\sqrt{x})+C$

4.计算定积分$\int_0^1\dfrac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解 原式$=\int_0^1\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x+\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(1+x^2)+\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$=[\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})]_0^1=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})-1$

5.求曲线$y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$的所有渐近线.

解 (1)$\lim\limits_{x\to 0}y=\infty$，所以$x=0$是函数的垂直渐近线.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$,所以 $y=0$ 是函数的水平渐近线.

(3) $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}]=1$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{1+e^x}{e^x}=0.$

所以 $y=x$ 是函数是斜渐近线.

三、解答题(本题共20分,每小题10分)

1.求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

解 因为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^{n}$ 的收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1$,所以原级数的收敛半径也为1,

而当 $x=\pm1$ 时,原级数发散,所以收敛域为 $(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时,

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}x^{2n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{2n-1}\mathrm{d}x=2\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1})\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^x\frac{x}{1-x}dx=-\ln(1-x^2)$$

2.已知曲线 $y=x^2$ 与 $y=ax(0<a<1)$ 所围成的图形的面积为 $S_1$,曲线 $y=x^2$, $y=ax$ 与 $x=1$ 所围成图形的面积为 $S_2$,确定 $a$ 的值,使 $S_1+S_2$ 最小,并求出 $S_1+S_2$ 的最小值.

解(1)曲线 $y=x^2$ 与 $y=ax$ 围成的图形的面积为 $S_1$,

$$S_1=\int_0^a(ax-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}a^3$$

(2)曲线 $y=x^2$, $y=ax$ 与 $x=1$ 围成图形的面积为 $S_2$,

$$S_2=\int_a^1(x^2-ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{6}a^3$$

所以 $T=S_1+S_2=\dfrac{1}{3}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{3}a^3$

(3)求最大值:两边对 $a$ 求导,令 $T'=-\dfrac{1}{2}+a^2=0$,解之得 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又由于 $T''=\sqrt{2}>0$, $T$ 在 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得极小值,即最小值,此时

$$\max(S_1+S_2)=\frac{2-\sqrt{2}}{6}.$$

**四、证明题(共14分，每小题7分)**

**1. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛，求证：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$也收敛.**

**证明：由不等式$|\frac{a_n}{n}|\le\frac{1}{2}(a_n^2+\frac{1}{n^2})$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$均收敛，所以原级数绝对收敛，故收敛.**

**2. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有二阶导数，且$f(0)=f(1)=0$，求证：存在$\xi\in(0,1)$，使得$\xi f''(\xi)+2f'(\xi)=0$.**

**证明 由$f(0)=f(1)=0$，由洛尔定理，存在$\eta\in(0,1)$，使得$f'(\eta)=0$. 令**

$$\varphi(x)=x^2 f'(x)$$

**根据条件有$\varphi(0)=\varphi(\eta)=0$，又由洛尔定理，存在$\xi\in(0,1)$，使得$\varphi'(\xi)=0$，即**

$$\xi f''(\xi)+2f'(\xi)=0.$$