§ 8.2 坐标系、矢量的坐标

一、坐标系

二、空间直角坐标系、(球面坐标系)

三、矢量运算的坐标表达式

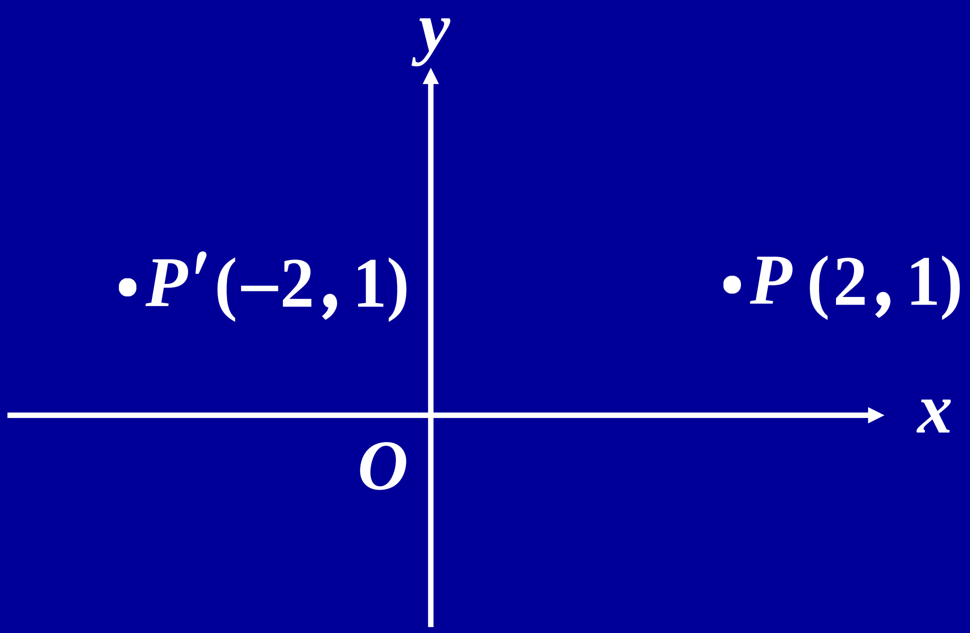
§8.2.1 坐标系

为了确定空间中的一点在一定参考系中的位置，按规定的方法选取的有序数组称为点的**坐标**.

一维：数轴

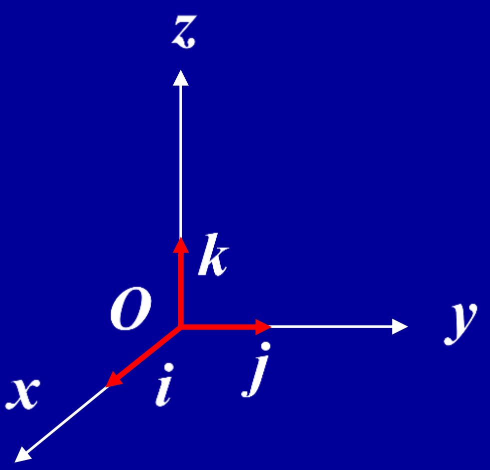
二维：平面直角坐标系、平面极坐标系

三维：空间直角坐标系、球面坐标系


y
$P'(-2, 1)$
$P(2, 1)$
x
O

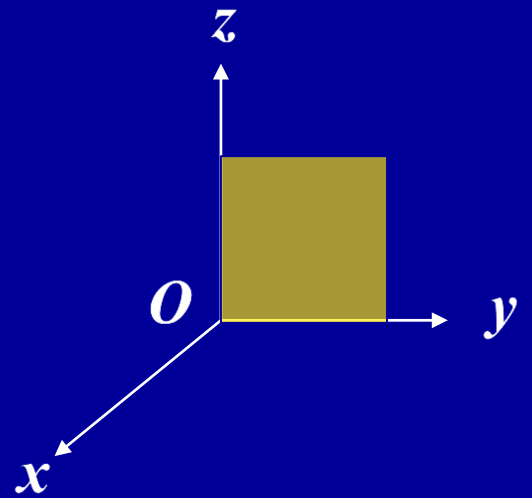
§ 8.2.2 空间直角坐标系、球面坐标系

空间直角坐标系 取空间中一定点O，作三个以O点为始端的两两垂直的**单位矢量**$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，就确定了三条以以O点为原点的两两垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，分别称为x轴、y轴、z轴，并依Ox，Oy，Oz 的顺序按**右手法则**规定坐标轴的正向. 这样就建立了一个空间直角坐标系.



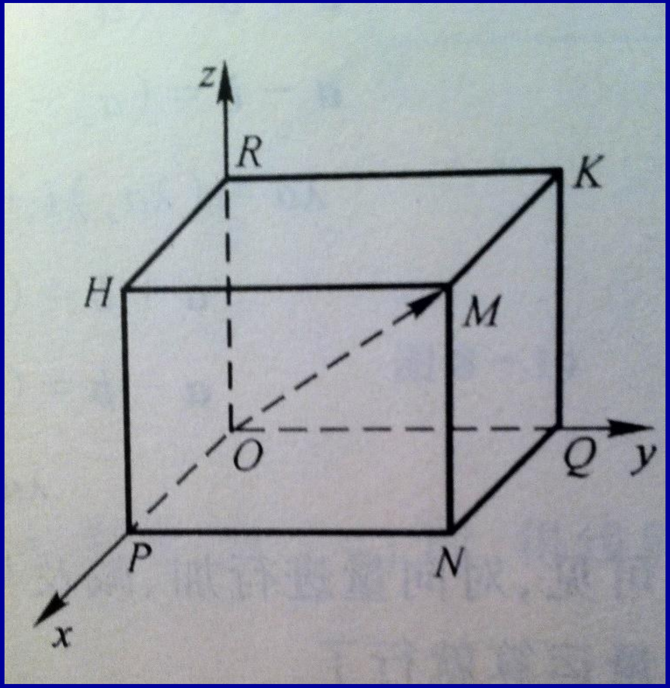
三条坐标轴的任意两条可以确定一个平面，称为**坐标面**. 其中，由 y 轴和 z 轴确定的坐标面称为 **Oyz 面**，由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为 **Oxy 面**，由 z 轴和 x 轴确定的坐标面称为 **Ozx 面**.

三个坐标面把空间分成八个部分，称为八个**卦限**. 含有 x 轴，y 轴，z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限，其他第二、第三、第四卦限在 Oxy 面上方，按逆时针方向确定.



点的坐标

对空间任意点 M，以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK-OPNQ$. 则



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM}$$

$$= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

设 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$， $\overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}$， $\overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k}$，则

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

上式称为矢量 $\overrightarrow{OM}$ 的**坐标分解式**，$x\boldsymbol{i}, y\boldsymbol{j}, z\boldsymbol{k}$ 称为矢量 $\overrightarrow{OM}$

沿三个坐标轴方向的分矢量.

这说明对给定点M就确定了$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$三个分矢量，进而确定了 x, y, z 三个有序数；反之，给三个有序数x, y, z，也就确定了点M.于是点M与三个有序数x, y, z之间有一一对应的关系：

$$M \leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \leftrightarrow (x, y, z)$$

有序数x, y, z称为点M的坐标，记作$M(x, y, z)$，并分别称为横坐标，纵坐标，竖坐标.

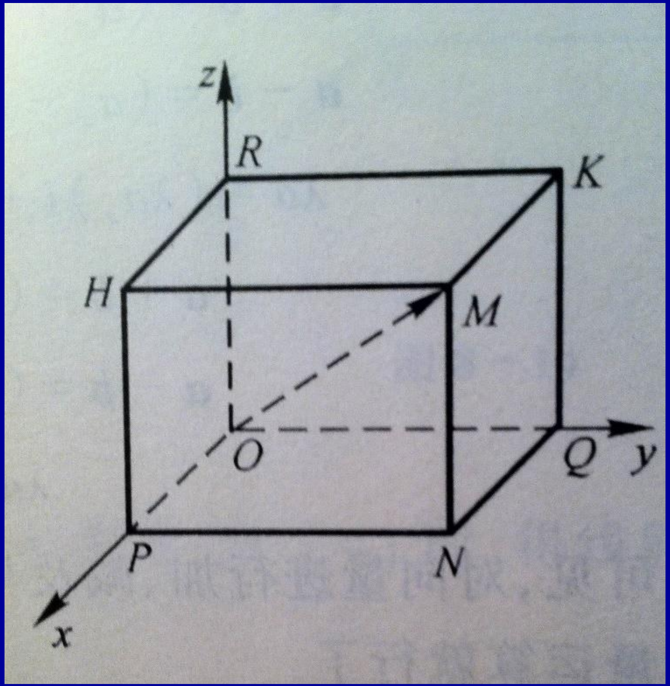
矢量的坐标

对于给定矢量r，作$\overrightarrow{OM}=r$，若M点的坐标为(x, y, z)，称矢量r的坐标为x, y, z，记为

$$r=(x, y, z)=xi+yj+zk.\ (\overrightarrow{OM}=xi+yj+zk)$$

设$M(x, y, z)$是空间中任一点，矢量$\overrightarrow{OM}$称为点M关于原点O的矢径，简写为r_M，即$r_M=(x, y, z)=xi+yj+zk$.

所以一个点与该点的矢径有相同的记号，(x, y, z)既表示点M，又可表示矢径r_M，也表示与r_M相等的矢量r.



矢量的模、方向角、方向余弦

设矢量 $r=(x,y,z)$，作

$$\overrightarrow{OM}=r=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

$$|r|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2}$$

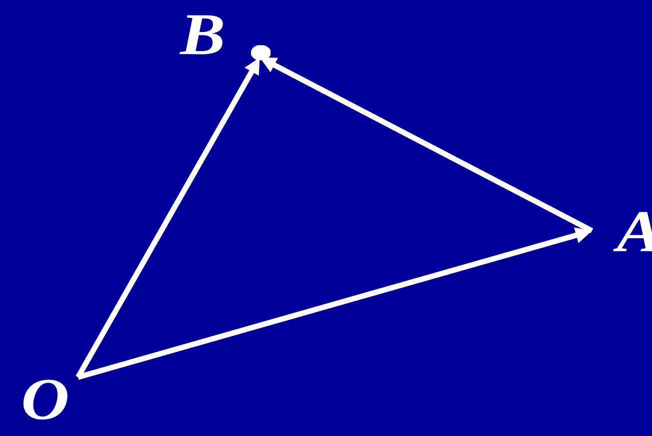
由分矢量 $\overrightarrow{OP}=xi$, $\overrightarrow{OQ}=yj$, $\overrightarrow{OR}=zk$，有

$$|\overrightarrow{OP}|=|x|,\ |\overrightarrow{OQ}|=|y|,\ |\overrightarrow{OR}|=|z|,$$

于是得到矢量模的坐标表示式 $|r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

从而得到两点间距离公式.

结论 设空间中两点为 $A(x_1, y_1, z_1)$ 与 $B(x_2, y_2, z_2)$，则矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的模为 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.



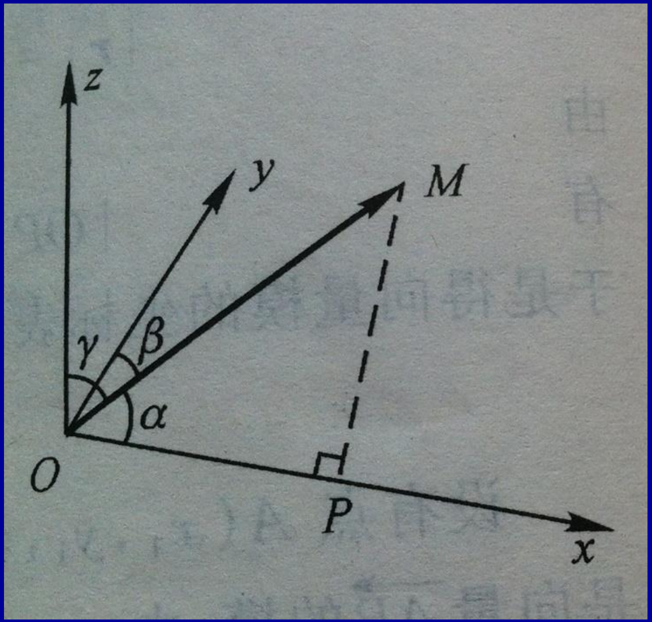
证 因为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= x_2 i + y_2 j + z_2 k - (x_1 i + y_1 j + z_1 k)$

$= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

设非零矢量 r 与 x 轴、y 轴、z 轴**正向**的夹角为 α, β, γ，亦即 $\overrightarrow{OM}$ 与 i, j, k 的夹角，把它们称为矢量 r 的**方向角**.



设 $\overrightarrow{OM} = r = (x, y, z) = xi + yj + zk$，则

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot i}{|\overrightarrow{OM}||i|} = \frac{(xi + yj + zk) \cdot i}{|\overrightarrow{OM}||i|} = \frac{x}{|r|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

同理 $\cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$，$\cos\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

称 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为矢量 r 的**方向余弦**， 并有

(1) $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

同时由 $r = (x, y, z) = xi + yj + zk$, 得

$$r^0 = \frac{r}{|r|} = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

$$= (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

(2)一矢量的单位矢量其坐标就是该矢量的方向余弦; 反之,以一矢量的方向余弦为坐标的矢量就是该矢量的单位矢量 r^0.

例2 求与三坐标轴夹角相等的单位矢量.

§ 8.2.3 矢量运算的坐标表达式

设矢量

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k = (a_1 , a_2 , a_3),$$

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k = (b_1 , b_2 , b_3),$$

$$c = c_1 i + c_2 j + c_3 k = (c_1 , c_2 , c_3).$$

矢量加法 $a+b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) + (b_1 i + b_2 j + b_3 k)$

$$= (a_1 + b_1) i + (a_2 + b_2) j + (a_3 + b_3) k$$

$$= (a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , a_3 + b_3)$$

数乘矢量

$$ka = k(a_1 i + a_2 j + a_3 k)$$

$$= ka_1 i + ka_2 j + ka_3 k$$

$$= (ka_1, ka_2, ka_3)$$

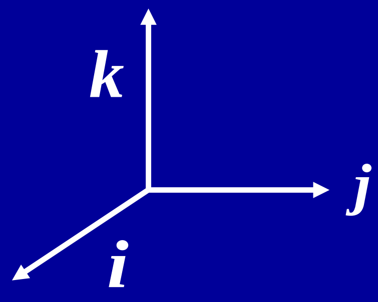
矢量的数量积 因为 $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$ 且 $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$,

所以有

$$a \cdot b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot (b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

矢量的矢量积 因为 $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$, 且 $i \times i =$ $j \times j = k \times k = 0$, 所以有



$$a \times b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) i - (a_1 b_3 - a_3 b_1) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

矢量的混合积 $[a, b, c] = (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

性质：a, b, c 共面的充要条件为 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

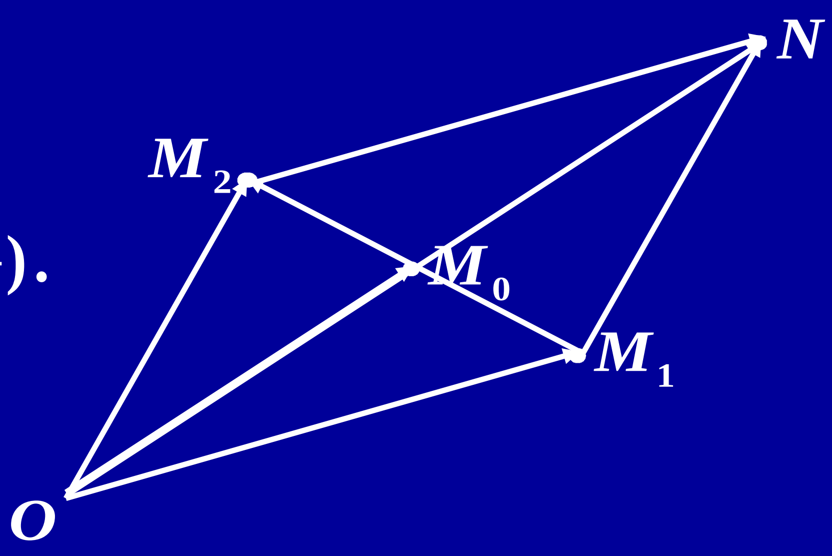
例4 设两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求 M_1 与 M_2 连线中点的坐标.

解 设中点为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，如图所示，有

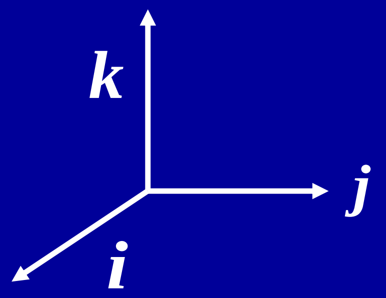
$$\overrightarrow{OM_0}=\frac{1}{2}\overrightarrow{ON}\quad=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2})=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

故中点坐标为

$$M_0\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$



例6 求$(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{k}$.

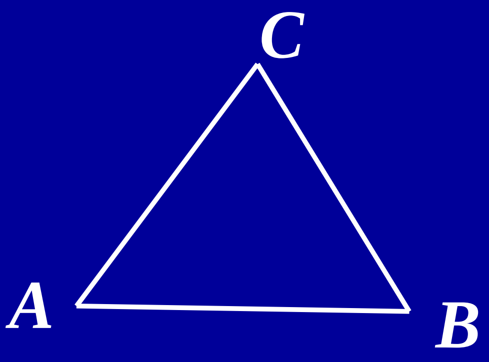


解法一 $(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}$

$$=-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{i}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$$

解法二 $(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$

例8 已知三角形的三顶点为$A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 1)$, $C(0, 2, 4)$, 求ΔABC的面积.



解 ΔABC的面积$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. 因为

$$\overrightarrow{AB}=r_B-r_A=(2, 1, 1)-(1, 0, 2)=(1, 1, -1),$$

$$\overrightarrow{AC}=r_C-r_A=(-1, 2, 2).$$

所以

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=(4, -1, 3).$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{26},$$

故ΔABC的面积$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{26}.$

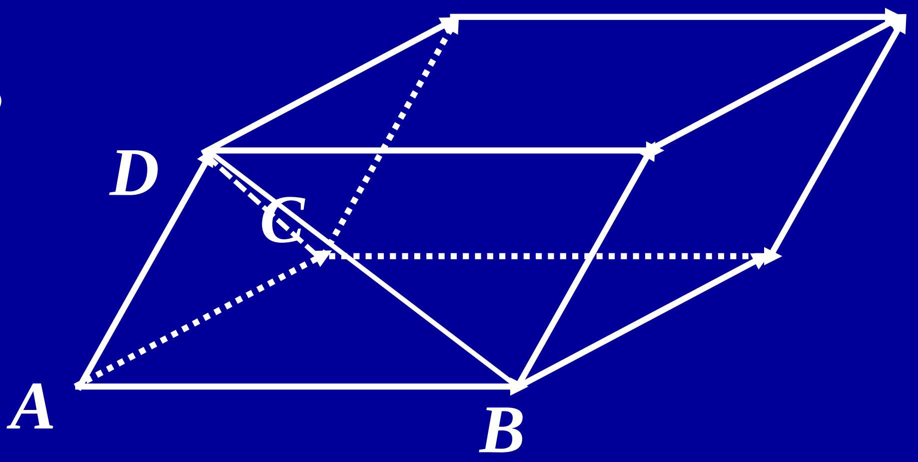
例9 已知四面体的顶点 $A(0, 0, 2)$, $B(3, 0, 5)$, $C(1, 1, 0)$, $D(4, 1, 2)$, 求此四面体的体积.

解 体积 $V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$, 因为

$$\overrightarrow{AB} = r_B - r_A = (3, 0, 5) - (0, 0, 2) = (3, 0, 3),$$

$$\overrightarrow{AC} = r_C - r_A = (1, 1, -2),$$

$$\overrightarrow{AD} = r_D - r_A = (4, 1, 0),$$



所以

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$ 故体积 $V = \frac{1}{6} |-3| = \frac{1}{2}$.

思考题 设矢量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 垂直于 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.