第五章 不定积分

$$\left.\begin{array}{l}\text{微分法：} F'(x) = (\ ?\ ) \\ \text{积分法：} (\ ?\ )' = f(x)\end{array}\right\}\text{互逆运算}$$

第一节 不定积分的概念与运算性质

一、 不定积分的概念

二、 基本积分表

三、不定积分的性质

§5.1 原函数与不定积分的概念

定义1 若在区间I内定义的两个函数 $F(x)$ 及 $f(x)$，满足：$F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间I内的一个原函数.

例如，$(\sin x)'=\cos x$，所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

问题: 1. 在什么条件下， 一个函数的原函数存在 ?

2. 若原函数存在， 它是否唯一 ?

3. 若不唯一，它们之间有什么关系?

原函数存在定理 若函数 $f(x)$ 在区间 I 内连续，则 $f(x)$ 在 I 内存在原函数.

原函数不唯一 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, C 为任一常数，则 $F(x)+C$ 也为 $f(x)$ 的一个原函数.

原函数之间是什么关系?

若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，那么$f(x)$的其它原函数与$F(x)$只差一个常数.

设$G(x)$是$f(x)$的另一个原函数，即$G'(x)=f(x)$.

则$[G(x)-F(x)]'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$

所以$[G(x)-F(x)]=C$，即$G(x)=F(x)+C$（C为某个常数).

因此若$F(x)$是$f(x)$某一原函数，C为任意常数，则表达式$F(x)+C$就表示了$f(x)$的所有原函数.

定义2 在区间I内，函数 $f(x)$的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$在区间I上的**不定积分**，记作$\int f(x)\mathrm{d}x$. 即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$ antiderivative

$\int$ — 积分号； $f(x)$ — 被积函数；

x — 积分变量； $f(x)\mathrm{d}x$ — 被积表达式.

$F(x)$是 $f(x)$的**一个**原函数，C 称为**积分常数**.

d – 微分号 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\sin x$

例1 $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C,$

$$\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

例2 求$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$

解 因为$[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$，所以$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$

例3 设曲线通过点(1, 2)，且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的两倍，求此曲线的方程.

解 设所求曲线方程为 $y = f(x)$，由题意

$$y' = 2x.$$

$$\therefore \quad y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C.$$

所求曲线过点 (1, 2)，故有

$$2 = 1^2 + C，\text{所以} C = 1.$$

因此所求曲线为 $y = x^2 + 1.$

§ 5.2 基本积分公式与不定积分的性质

一、基本积分公式

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ （k 为常数）

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$

(3) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

(4) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$ 或 $-\operatorname{arccot} x + C$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 或 $-\arccos x + C$

(6) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$

(7) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$

(8) $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$

(9) $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$

(12) $\int \mathrm{e}^{x} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$

(13) $\int a^{x} \mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$

……

例4. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x}}$.

解: 原式 $= \int x^{-\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-\frac{4}{3}+1} x^{-\frac{4}{3}+1} + C$

$= -3x^{-\frac{1}{3}} + C.$

二、不定积分的性质

1. $\int k f(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$

2. $\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. $(\int f(x)\mathrm{d}x)' = f(x)$; $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$.

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C$$

2. $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

证明 设 $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$, 则

$$\int f(x)dx=F(x)+C_1,\int g(x)dx=G(x)+C_2,$$

$$\therefore\int f(x)dx+\int g(x)dx=F(x)+G(x)+C_1+C_2=F(x)+G(x)+C$$

又因为 $(F(x)+G(x))'=f(x)+g(x)$，从而

$$\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=F(x)+G(x)+C$$

故 $\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

例5 求积分 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx.$ **拆项法**

解 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx$

$$= \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{x}dx$$

$$= \arctan x + \ln|x| + C.$$

例6 求 $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$.　　　　恒等变形

解: 原式 $= \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$

$= \int \sec^2 x\mathrm{d}x - \int 1\mathrm{d}x = \tan x - x + C$.

例7 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

增减项

解: 原式 $= \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int (x^2-1)\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C$$

例8 若e^{-x}是$f(x)$的原函数，试求$\int x^2 f(\ln x)dx$.

解 因为$f(x)=(\mathrm{e}^{-x})'=-\mathrm{e}^{-x}$，所以

$$f(\ln x)=-\mathrm{e}^{-\ln x}=-\frac{1}{x}$$

故 $\int x^2 f(\ln x)\,\mathrm{d}x=\int -x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}x^2+C$