§ 6.3 平面与直线

§6.3.1 平面方程

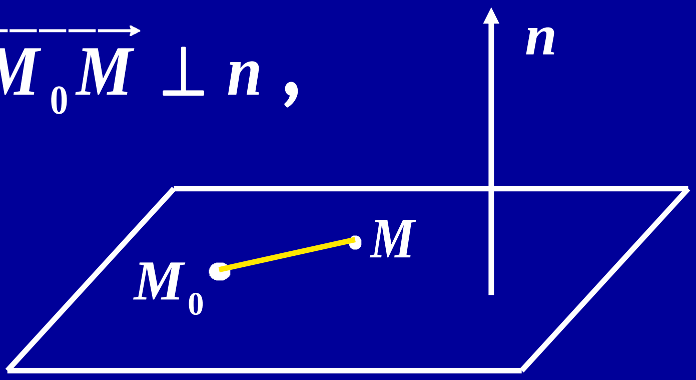
平面：在空间中，到两点距离相等的点的轨迹.

1. 点法式(法)

过一定点且与已知非零矢量垂直的平面是唯一确定的，设定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，非零矢量 $n=(A, B, C)$，对平面上任意一点 $M(x, y, z)$，必有 $\overrightarrow{M_0M} \perp n$，

即 $\overrightarrow{M_0M} \cdot n = 0$. 而

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$,



故得平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (8.14)$$

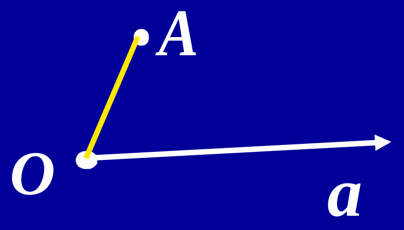
(8.14)式称为平面的**点法式方程**，矢量 n 称为此平面的**法矢量**.

注 1) 与 n 平行的所有非零矢量均可作为此平面的法矢量.

2) x, y, z 的系数即为平面的一法矢量的坐标.

例 设一平面过原点O及点$A(6,-3,2)$, 且与矢量$\boldsymbol{a}=(4,-1,2)$平行，求此平面方程.

法矢量$\boldsymbol{n}=(-4,-4,6)$, $2x+2y-3z=0$.



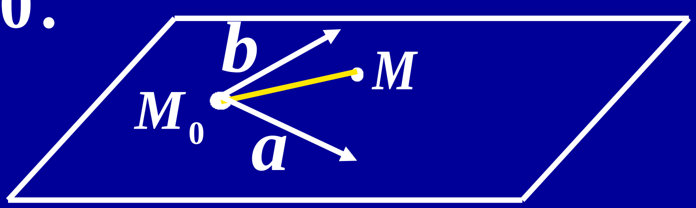
2. 三矢量共面法

过一定点且与两不共线的矢量平行的平面是唯一确定的.

设定点为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，两不共线的矢量为 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$.

设平面上任意一点 $M(x, y, z)$，则 $\overrightarrow{M_0M}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共面，故 $[\overrightarrow{M_0M}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]=0$. 而 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$，所以

平面方程为 $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0.$

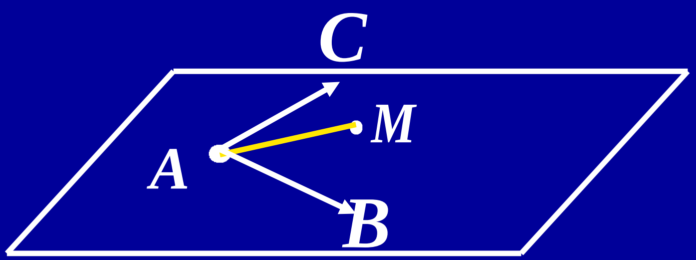


注 求经过两相交直线的平面方程也常使用该法.

推论1 已知不在同一直线上的三点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. 则过 A, B, C 三点的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.15)$$

证 设平面上任意一点 $M(x, y, z)$, 则矢量 $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 共面.



而 $\overrightarrow{AM} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$,

$\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$,

$\overrightarrow{AC} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$.

由$[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$, 得

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.15)$$

(6.15)式称为**平面的三点式方程**.

推论2 设三点为$A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$,也即已知平面与三坐标轴的交点, a,b,c称为平面在三坐标轴的**截距**. 此时平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (6.16)$$

(6.16)式称为平面的**截距式方程**.

例 设一平面过原点O及点$A(6,-3,2)$, 且与矢量$a=(4,-1,2)$平行，求此平面方程.

3. 待定系数法

平面的一般式方程

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

注：若 $D = 0 \Leftrightarrow$ 平面过原点；

若 $A = 0 \Leftrightarrow$ 平面平行于 x 轴；

若 $A = D = 0 \Leftrightarrow$ 平面过 x 轴；

…… ……

例 求平行于 x 轴且过两点 $A(4, 0, -2)$, $B(5, 1, 7)$ 的平面.

$9y - z - 2 = 0$

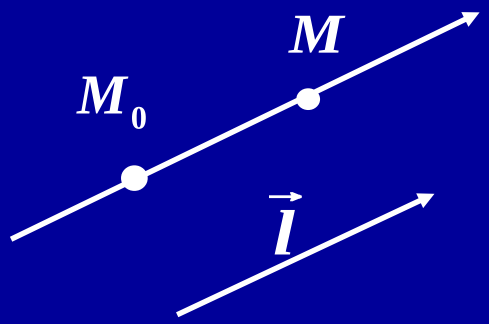
§ 6.3.2 直线方程

直线：在空间中，沿相同或相反方向运动的点的轨迹.

1. 点向式法

过一定点且与已知非零矢量平行的直线是唯一确定的.设定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 非零矢量 $\vec{l}(s) = (m, n, p)$,

设直线上任意一点 $M(x, y, z)$, 则



$\overrightarrow{M_0M} \,//\, \vec{l}$, 所以 $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{l} = (tm, tn, tp)$.

而 $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, 因而有

$x - x_0 = tm$，$y - y_0 = tn$，$z - z_0 = tp$，所以直线方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (6.18)$$

(6.18)式称为直线的**点向式(对称式)方程**，m，n，p称为**方向数**，非零矢量$\vec{l} = (m, n, p)$称为直线的**方向矢量**.

直线的参数方程：

$$x = mt + x_0,\ y = nt + y_0,\ z = pt + z_0,$$

其中t为参变量.

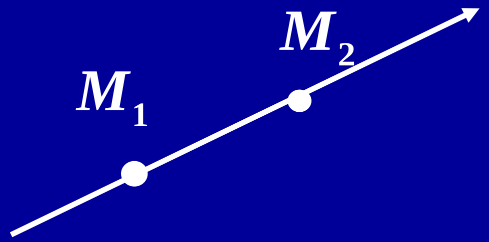
推论 已知不同的两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 则过此两点的直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (6.21)$$

证 直线平行于 $\overrightarrow{M_1M_2}$, 因 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$,

所以直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$



(8.21)式称为直线的两点式方程.

2.交面式法

因为两不同平面相交成一条直线，故方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

表示一直线方程，称为直线的交面式方程或一般式方程.

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} \\ \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$$

例5 已知直线的一般式方程为 $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$，求(1)此直线的点向式与参数式方程;(2)与平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 的交点坐标.

解法1 由方程组 $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$，令 $x = 0, 1$ 可得直线两点 $(0, -1, 1), (1, \frac{4}{3}, \frac{-1}{3})$.

故由两点式可得点向式方程为 $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-1}{-1}$,

从而参数式为 $x = 3t,\ y = 7t - 1,\ z = -t + 1$.

(2)将 $x=3t$, $y=7t-1$, $z=-t+1$代入平面方程整理得

$9t-1=0$, 所以$t=\frac{1}{9}$. 故交点坐标为$(\frac{1}{3},-\frac{2}{9},\frac{8}{9})$.

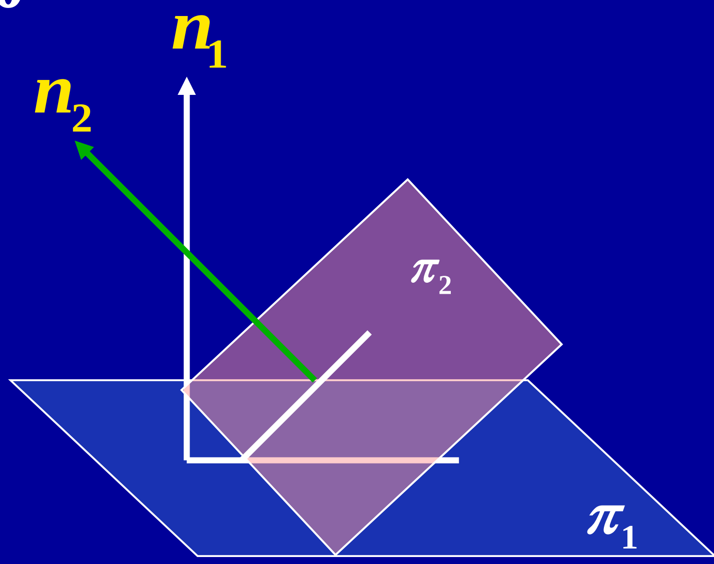
例5 已知直线的一般式方程为$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$，求(1)此直线的点向式与参数式方程;(2)与平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 的交点坐标.

解法2 由方程组$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$，令 $x = 0$ 可得直线

一点$(0, -1, 1)$. 平面 $2x - y - z = 0$,

$3x - y + 2z - 3 = 0$ 的法矢量分别为

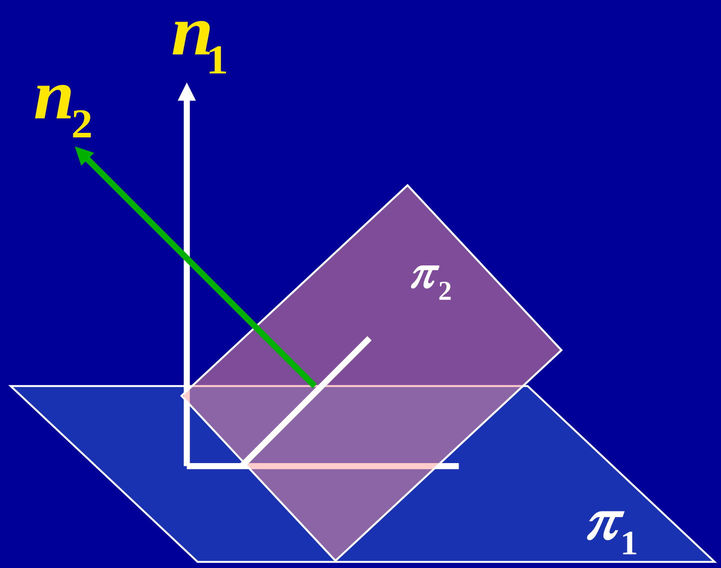
$n_1 = (2, -1, -1)$, $n_2 = (3, -1, 2)$,



直线的方向矢量$\vec{l}$(可取)为

$$n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-3, -7, 1).$$

由点向式可得直线方程为



$$\frac{x}{-3} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-1}{1}.$$

(2)由方程组$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$

解之得 $x = \dfrac{1}{3}, y = -\dfrac{2}{9}, z = \dfrac{8}{9}$，故交点坐标为$(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{9}, \dfrac{8}{9})$.

例5 已知直线的一般式方程为$\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 3x-y+2z-3=0 \end{cases}$，求(1)此直线的点向式与参数式方程;(2)与平面 $x+2y-z+1=0$ 的交点坐标.

解法3 由方程组$\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 3x-y+2z-3=0 \end{cases}$消去 y, 得

$x+3z-3=0$， 即 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$.

同理消去 z 得, $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{7}$, 所以点向式方程为

$$\frac{x}{3}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-1}{-1}.$$

§ 6.3.3 点到平面与点到直线的距离

命题1：设平面π：$Ax+By+Cz+D=0$，平面外一点

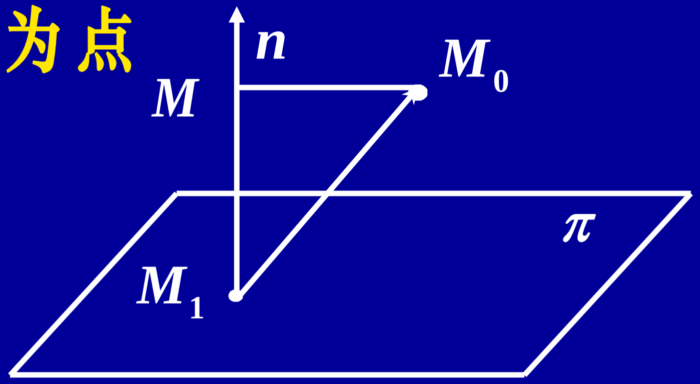
$M_0(x_0, y_0, z_0)$. 则点M_0到平面π的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

证明 在平面π上任取一点$M_1(x_1, y_1, z_1)$，则矢量$\overrightarrow{M_1M_0}$

在平面π的法矢量n上投影的绝对值为点

M_0到平面π的距离.



$$\overrightarrow{M_1M}=Prj_n\overrightarrow{M_1M_0}\cdot n^0$$

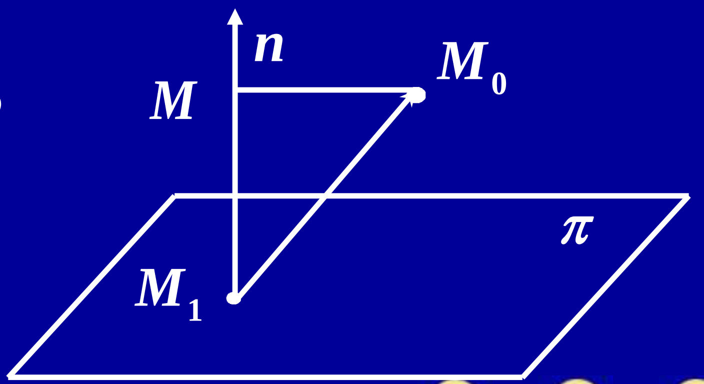
因为 $\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1)$, $n = (A, B, C)$,

所以 $$\mathrm{Prj}_n \overrightarrow{M_1M_0} = \frac{\overrightarrow{M_1M_0} \cdot n}{|n|} = \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

因为点 M_1 在平面 π 上, 即 $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, 有

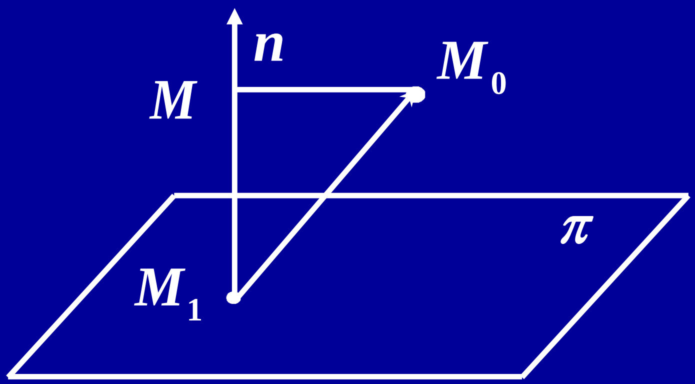
$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D,$$



所以点 M_0 到平面 π 的距离为

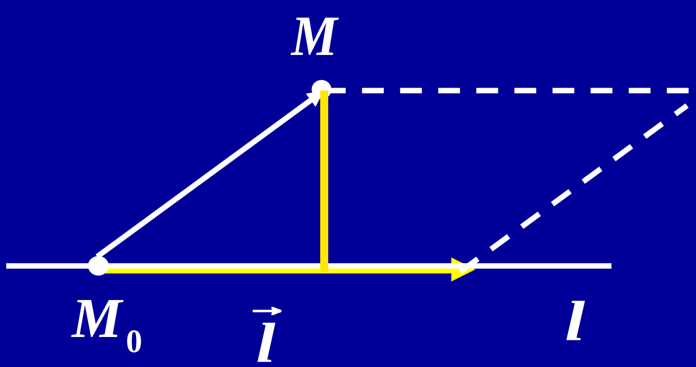
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

这就是点到平面的距离公式.



命题2 设直线方程 $l:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, 直线 l 外一点 $M(x,y,z)$. 则点 M 到直线 l 的距离为

$$d=\frac{|\vec{l}\times\overrightarrow{M_0M}|}{|\vec{l}|}$$



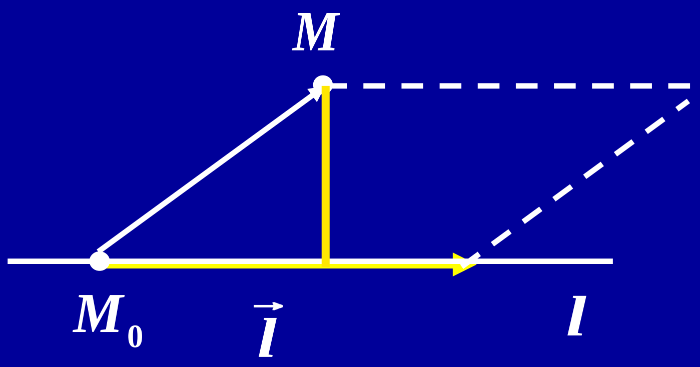
其中 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上的定点.

证明 连接 M_0M，以 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\vec{l}$ 为邻边作平行四边形，则边 $\vec{l}$ 上的高即为点 M 到直线 l 的距离.

平行四边形的面积 $S=|\vec{l}\times\overrightarrow{M_0M}|$，$|\vec{l}|$ 为底边长，

所以点 M 到直线 l 的距离公式为

$$d=\frac{|\vec{l}\times\overrightarrow{M_0M}|}{|\vec{l}|}.$$



例 求过点$M_0(2,1,3)$且与直线$L_0:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$$