第五节 定积分的应用

一、定积分的元素法

二、定积分在几何中的应用

三、定积分在物理中的应用

§ 6.5.1 定积分的元素法

什么样的实际问题可以用定积分解决？

具有以下共性的问题就可以用定积分解决：

- 解决问题的方法步骤为：

  "分割，近似代替，求和，取极限"

- 所求量 U 极限结构式为：特殊乘积和式的极限

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

如果某一实际问题中所求量 U 符合下列条件，就可以用定积分来计算这个量.

(1)U是与一个变量(x)的变化区间[a，b]有关的量；

(2)量 U 对于区间[a, b]具有可加性. 如果把区间[a, b]分成 n 个部分区间，则 U 相应地分成 n 个部分量，U 等于所有部分量之和.

(3)设与第 i 个小区间对应的部分量 ΔU_i 的近似值可表示为某一函数 $f(x)$ 在任意点 ξ_i 的值与区间长度的乘积，即

$$\Delta U_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \ (\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]).$$

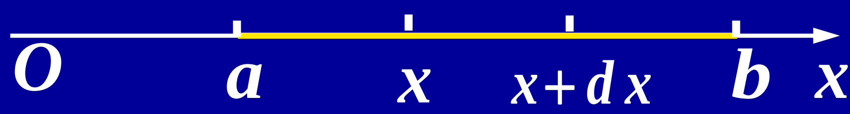
由定义，$U = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$

可以任取一小区间，只要与该小区间对应的部分量ΔU的近似值可表示为**某一函数 f 在任意点的值**与**区间长度**的乘积.

$$U=\int_a^b f(x)dx.$$

$$\mathrm{d}x=\Delta x$$

ΔU



$$\Delta U \approx f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow U=\int_a^b f(x)dx$$

求出量U的积分表达式的步骤为：

1)**求积分区间**：根据问题的具体情况，选取一个变量(x, y)为积分变量，并确定它的变化区间$[a, b]$；

2)**求被积表达式**：任取$[a, b]$的一个小区间$[x, x+dx]$，若求出相应于这个小区间的部分量ΔU的近似值为为$[a, b]$上的一函数 f 在 x 处的值 $f(x)$ 与 dx 的乘积，即

$$\Delta U \approx f(x)dx$$

称 $f(x)dx$ 为量U的元素且记作dU，即

$$dU = f(x)dx$$

3)写出积分表达式:以所求量U的元素 $f(x)dx$ 为被积表达式,在区间$[a,b]$上作定积分,得

$$U=\int_a^b f(x)dx.$$

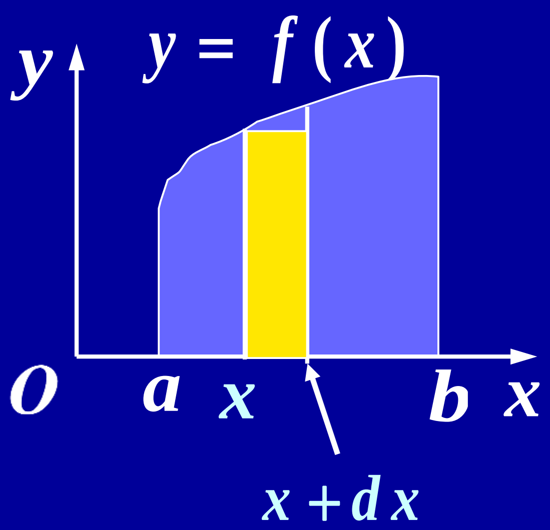
这就是所求量U的积分表达式.这种方法叫做元素法.

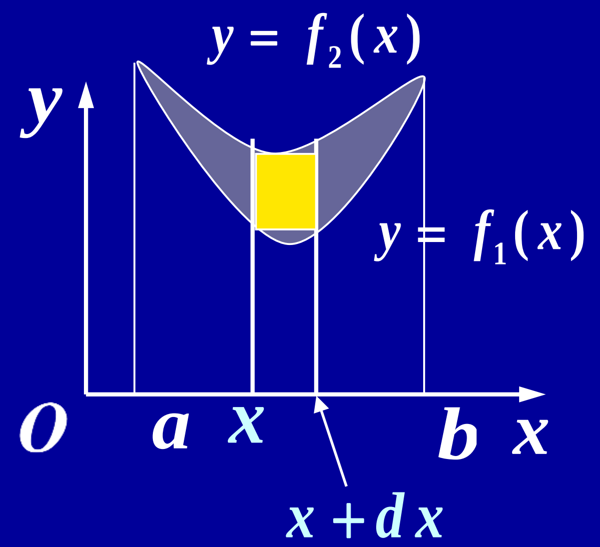
元素法的难点是什么? 被积函数 $f(x)$的确定.

需注意相应于小区间$[x,x+dx]$的部分量ΔU的具体含义.

§ 6.5.2 平面图形的面积

1. 直角坐标情形





$\mathrm{d}A = f(x)\mathrm{d}x$(面积元素)，

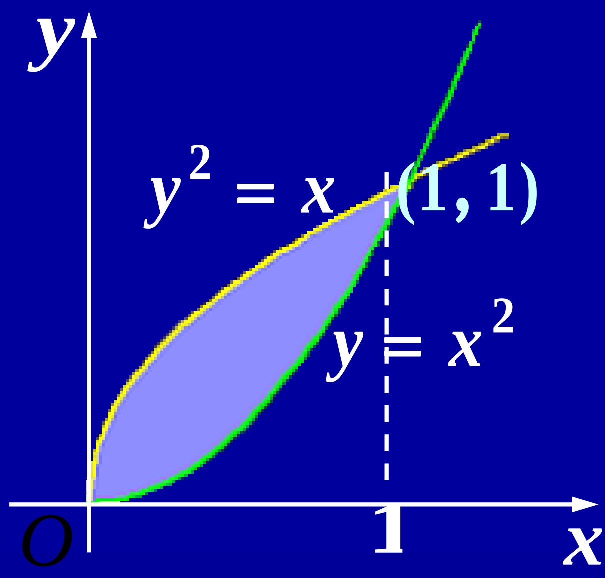
$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$\mathrm{d}A = (f_2(x) - f_1(x))\mathrm{d}x$

$$A = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\mathrm{d}x.$$

例1 计算两条抛物线 $y^2 = x$, $y = x^2$ 在第一象限所围图形的面积.

解: 由 $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$ 得交点 $(0,0)$, $(1,1)$.



$$\therefore \quad A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}.$$

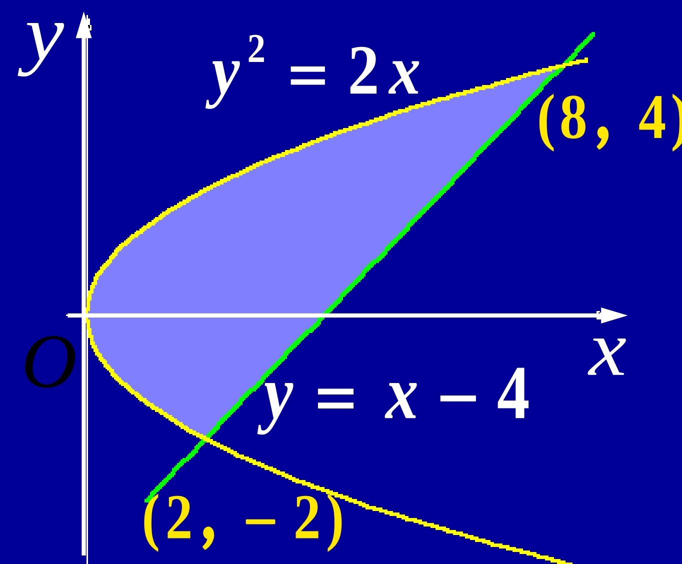
例 3 计算抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围图形的面积.

解: 由 $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$ 得交点 $(2, -2), (8, 4)$.

为简便计算，选取 y 作积分

$$A = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,\mathrm{d}x.$$

变量，则有



$$A = \int_{-2}^{4} \left(y + 4 - \frac{1}{2} y^2 \right) \mathrm{d}y$$

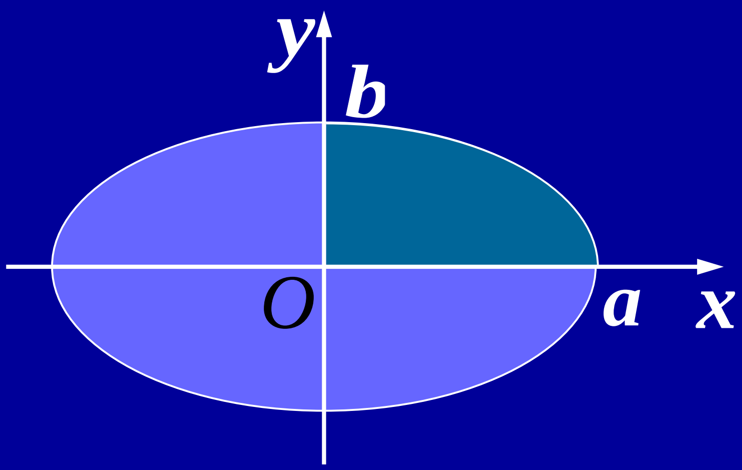
$$= \left[\frac{1}{2} y^2 + 4y - \frac{1}{6} y^3 \right]_{-2}^{4} = 18.$$

例4 求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围图形的面积.

解: 利用对称性， 有

$$A = 4\int_0^a y\,\mathrm{d}x$$

$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$



令 $x = a\sin t$， 则 $dx = a\cos t dt$,

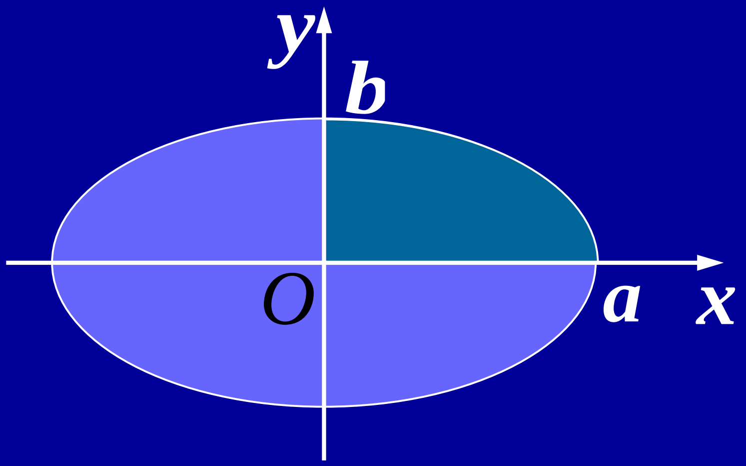
$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\cos t\cdot(a\cos t)\,\mathrm{d}t = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= 4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi ab$$

例4 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积.

解: 利用对称性，有

$$A=4\int_0^a y\,\mathrm{d}x$$



利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$$

$$A=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\pi ab$$

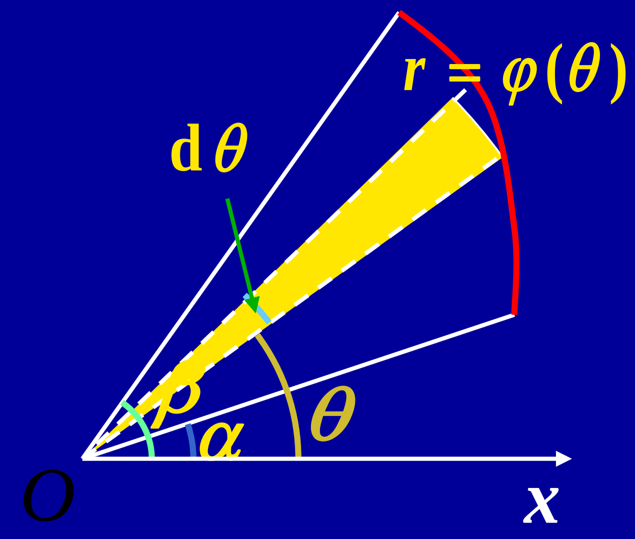
使用参数方程实际上就是第二类换元法

2. 极坐标情形

设 $\varphi(\theta) \in C[\alpha, \beta]$，$\varphi(\theta) \geq 0$, 求由曲线 $r = \varphi(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 围成的曲边扇形的面积.

在区间 $[\alpha, \beta]$ 上任取小区间 $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$, 则面积元素为

$$dA = \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 \mathrm{d}\theta$$



故所求曲边扇形的面积为

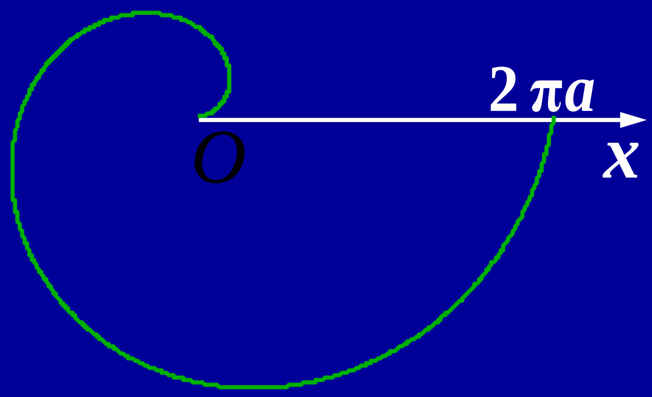
$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

例4 计算阿基米德螺线 $r = a\theta\ \ (a>0)$ 对应 θ 从0变到 2π 所围图形面积 .

解: $A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(a\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4}{3}\pi^3 a^2 .$$



阿基米德螺线: 动点沿一直线作等速移动，而此直线又围绕与其直交的轴线作等角速的旋转运动时，动点在该直线的旋转平面上的轨迹.

例5 计算心形线 $r = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 所围图形的面积.

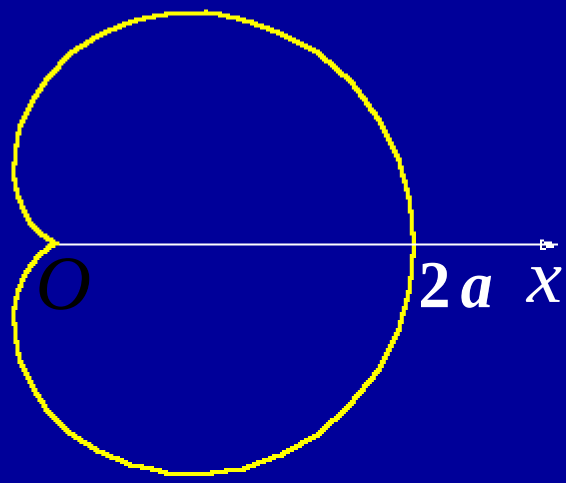
解: $A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1+\cos\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta$

$= a^2 \int_0^{\pi} 4\cos^4 \frac{\theta}{2} \, \mathrm{d}\theta$

令 $t = \frac{\theta}{2}$

$= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, \mathrm{d}t$

$= 8a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2.$



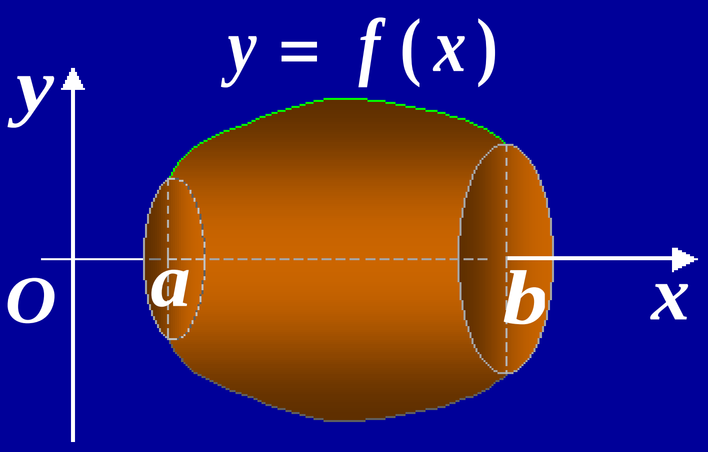
心形线: 是一个圆上的固定一点在它绕着与其相切且半径相同的另外一个圆周滚动时所形成的轨迹.

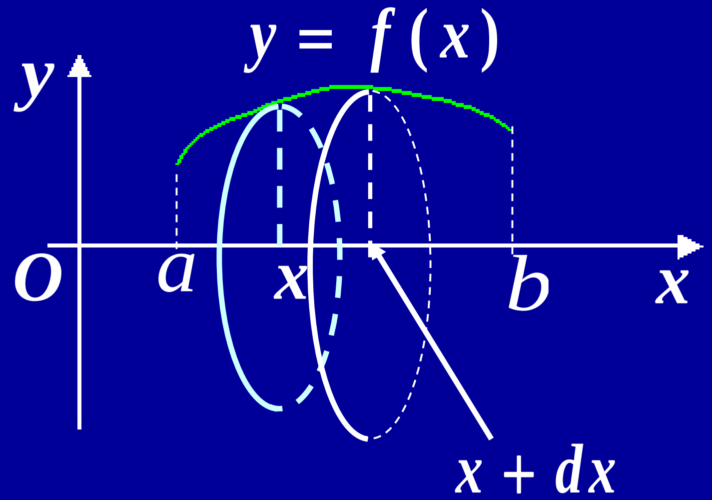
§ 6.5.3 体积

1. 旋转体的体积

旋转体就是一个平面图形绕这平面内**一条直线**旋转一周而成的立体.

特别地，如果旋转体是由连续曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a$，$x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体，求其体积V？





在$[a, b]$上任取小区间$[x, x + dx]$，则以$\pi[f(x)]^2$为底，dx为高的薄片的体积为**体积元素**dV，即

$$dV = \pi[f(x)]^2 dx.$$

所以旋转体的体积为

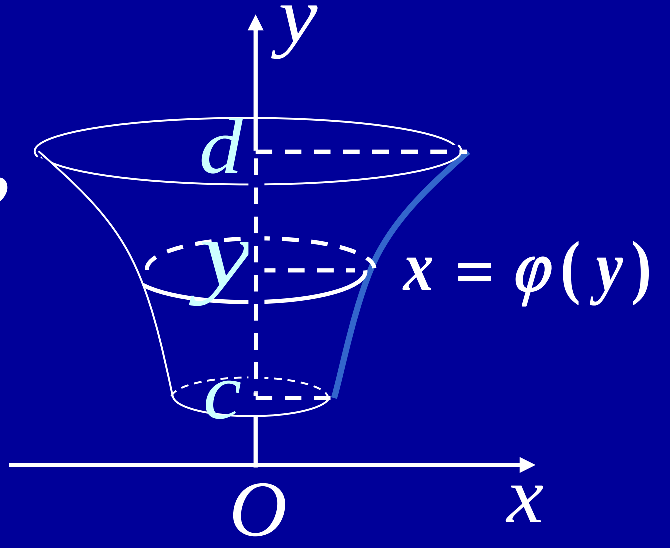
$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$$

当考虑连续曲线段

$$x=\varphi(y)\ \ (c\le y\le d)$$

绕 y 轴旋转一周围成的立体体积时，

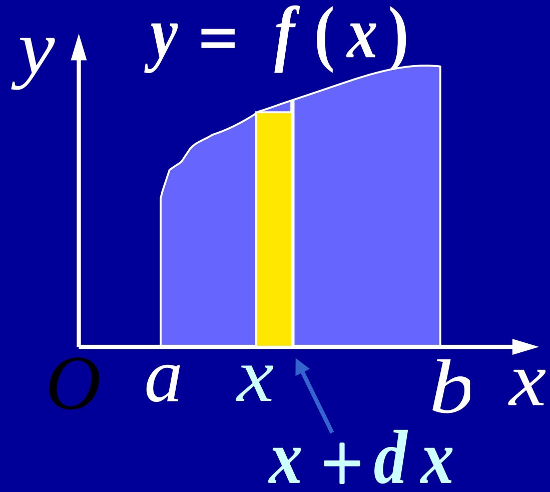
有



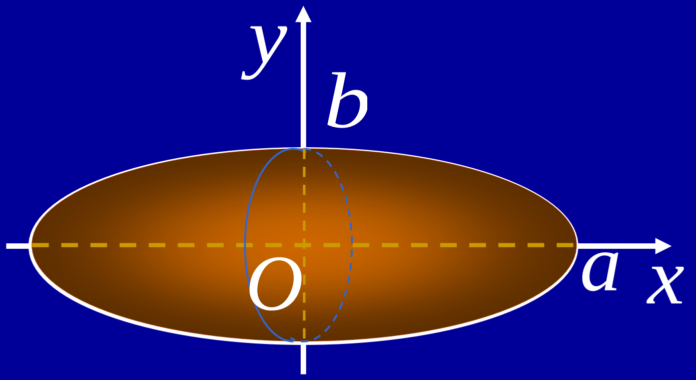
$$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 \mathrm{d}y$$

如果旋转体是由连续曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体，则体积为

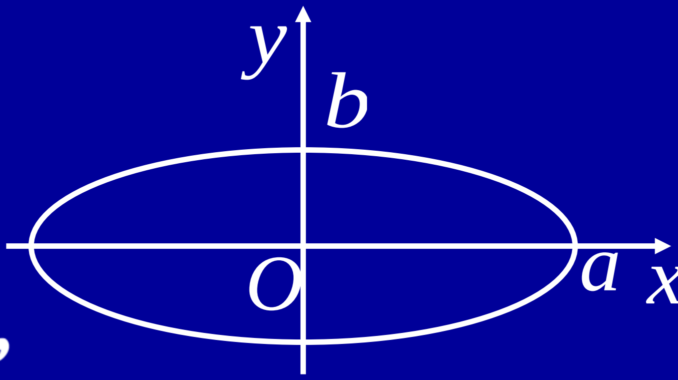
$$V_y = 2\pi\int_a^b x|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$



例7 计算由椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围图形绕$x$轴旋转而成的椭球体的体积.



例7 计算由椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围图形绕$x$轴旋转而成的椭球体的体积.



解: 因为

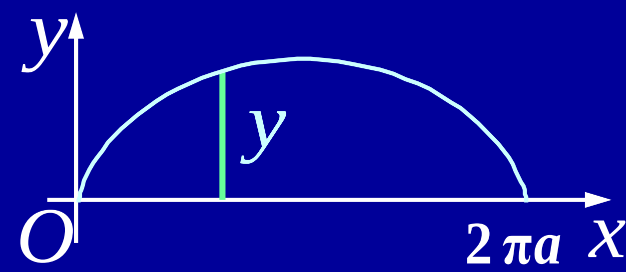
$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\le x\le a),$$

则 $V=2\int_0^a \pi y^2\,\mathrm{d}x=2\pi\dfrac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$ （利用对称性）

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

例8 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$的一拱与 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴，y 轴旋转而成的立体体积 .

解: 绕 x 轴旋转而成的体积为



$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2 \, dx$$

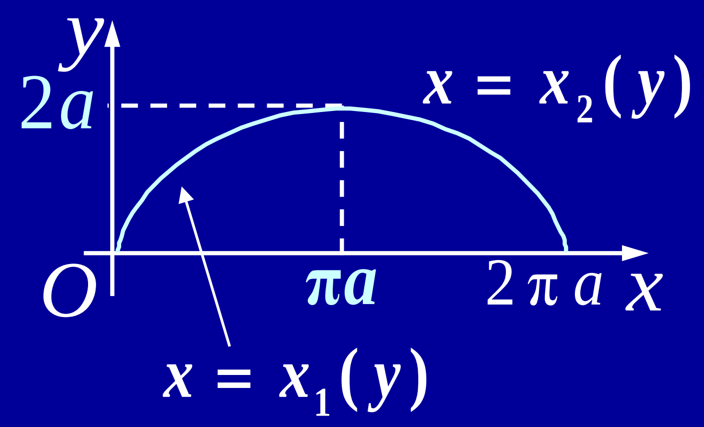
$$= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2 \cdot a(1-\cos t)\, dt$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 \, dt = 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} \, dt \quad (\text{令 } u = \frac{t}{2})$$

$$= 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 u \, du = 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u \, du$$

$$= 32\pi a^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3 .$$

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0)$$



绕 y 轴旋转而成的体积为

$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t\,\mathrm{d}t$$

注意上下限！

$$- \pi \int_0^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\pi^3 a^3 .$$

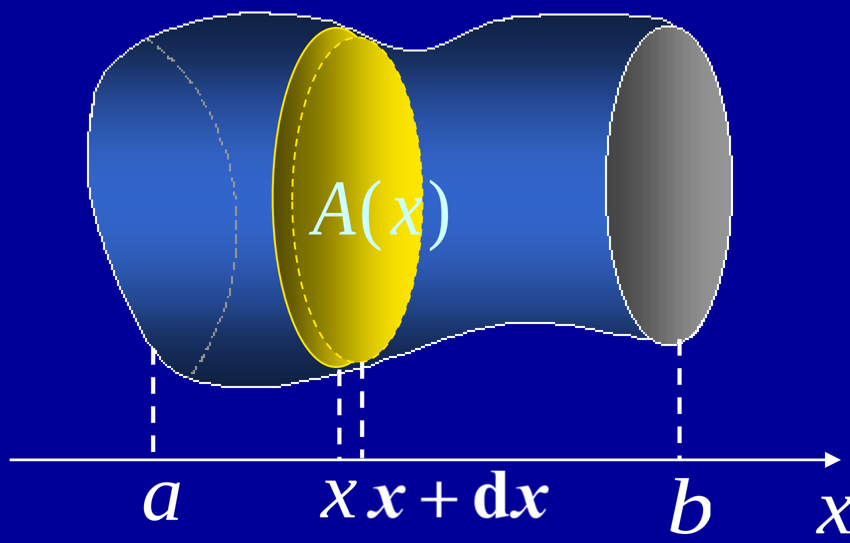
2.已知平行截面面积的立体的体积

设所给立体垂直于x轴的截面面积为$A(x)$, $A(x)$在$[a, b]$上连续，则对应于小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$的体积元素为

$$\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}x$$

因此所求立体体积为

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

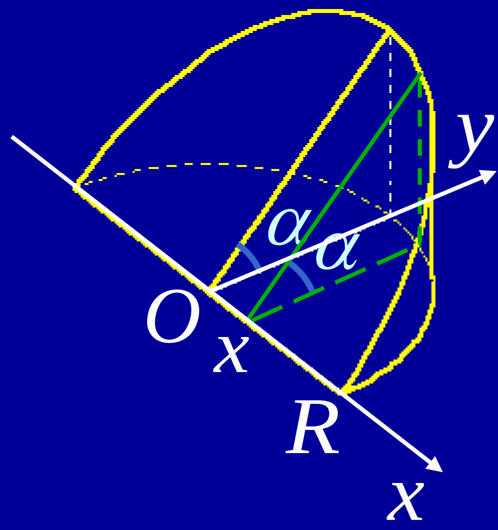


例10 一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心，并与底面交成α角，计算该平面截圆柱体所得立体的体积.

解 如图所示取坐标系，则圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2$.

垂直于x轴的截面是直角三角形，其面积为

$$A(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha \quad (-R \le x \le R)$$



利用对称性

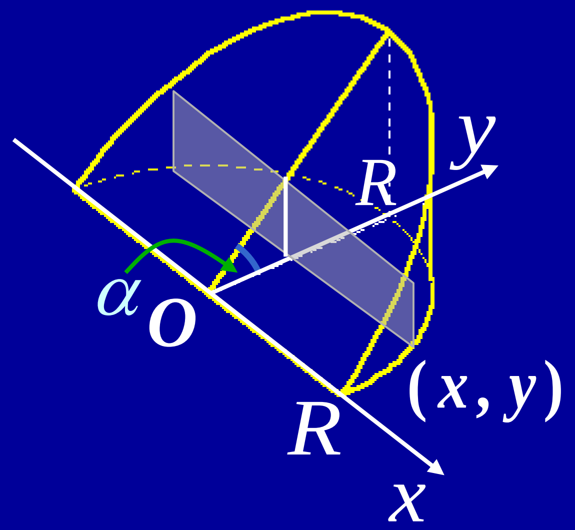
$$V = 2\int_0^R \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha \, dx$$

$$= 2\tan\alpha \left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^R = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$$

思考: 可否选择 y 作积分变量？

此时截面面积函数是什么？

如何用定积分表示体积？



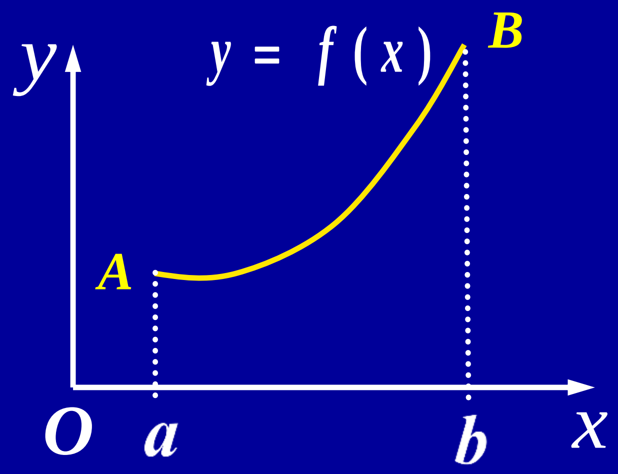
提示:

$$A(y)=2\sqrt{R^2-y^2}\cdot y\tan\alpha$$

$$V=2\tan\alpha\cdot\int_0^R y\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$$

§ 6.5.4 平面曲线的弧长

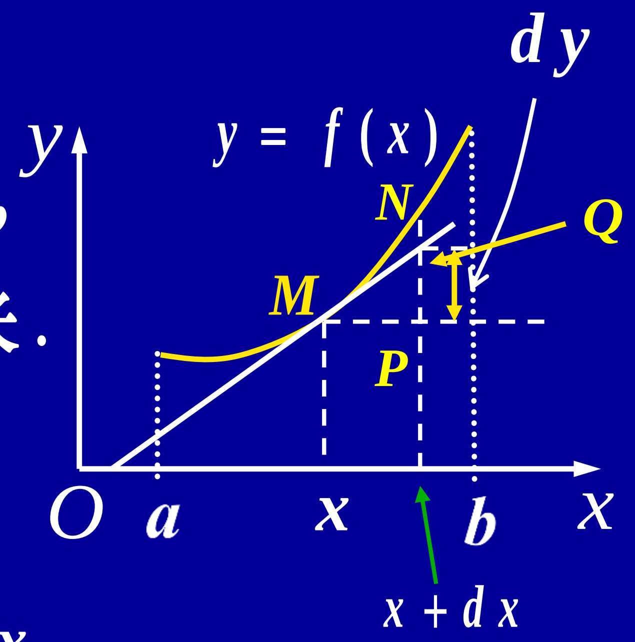


1. 曲线弧由直角坐标方程给出:

$$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

在 $[a, b]$ 上任取小区间 $[x, x + dx]$,

以对应小切线段的长代替小弧段的长.



弧长元素(弧微分):

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

因此所求弧长 $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$

2. 曲线弧由参数方程给出:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

弧长元素(弧微分) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

因此所求弧长

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

3. 曲线弧由极坐标方程给出:

设曲线弧为 $r = r(\theta)(\alpha \le \theta \le \beta)$, 其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数. 令 $x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta$, 则得

弧长元素(弧微分):

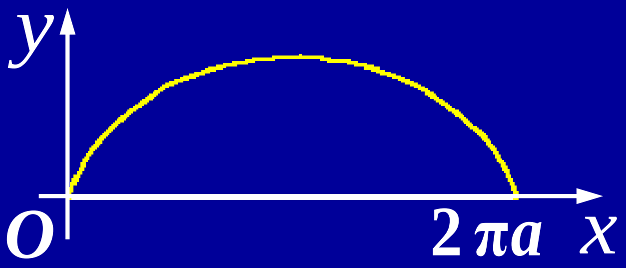
$$\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

因此所求弧长

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$

例11 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 的一拱 $(0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长 .



解: $\mathrm{d}s = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$

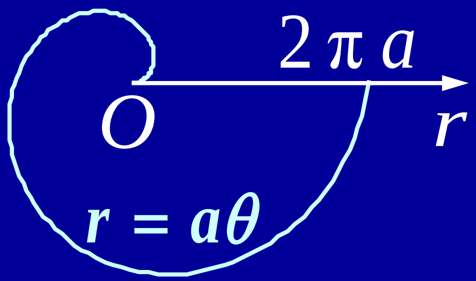
$$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\;dt$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}\,t$$

$$= 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$\therefore \quad s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}\,t = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a.$$

例 12 求阿基米德螺线 $r = a\theta \ (a > 0)$ 相应于 $0 \le \theta \le 2\pi$ 一段的弧长.



解: $\mathrm{d}s = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

$$= \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= a\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \quad s = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\theta + \sqrt{1+\theta^2}\right|\right]_0^{2\pi}$$

$$= a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}).$$