§ 5.2.2 第二类换元法

例 求$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

第一类换元法解决的问题

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,du\Big|_{u=\varphi(x)}$$

难求　　　　　　易求

若所求积分$\int f(u)\,du$难求，$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$易求，

则得第二类换元积分法 .

定理2 设 $x=\psi(t)$是严格单调可导函数，若 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 有原函数 $F(t)$ ，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(\psi^{-1}(x))+C.$$

其中 $t=\psi^{-1}(x)$是 $x=\psi(t)$ 的反函数.

证明 $(F(\psi^{-1}(x)))' = \dfrac{d(F(t))}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = f[\psi(t)]\psi'(t)\cdot\dfrac{1}{\psi'(t)} = f(x)$

$$\int f(x)\mathrm{d}x \overset{x=\psi(t)}{=} \int f[\psi(t)]\mathrm{d}\psi(t) = \int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t\,\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}.$$

$$= F(t)+C\,\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$$

$$= F(\psi^{-1}(x))+C$$

定理2 设 $x=\psi(t)$ 是严格单调可导函数，若 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 有原函数 $F(t)$，则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x \overset{x=\psi(t)}{=} \int f[\psi(t)]\mathrm{d}\psi(t) = \int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t \Big|_{t=\psi^{-1}(x)}.$$

$$= F(t)+C \Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$$

$$= F(\psi^{-1}(x))+C$$

第二类换元积分法的难点是： 如何选择合适的变量代换 $x=\psi(t)$. 这要从被积函数 $f(x)$ 的结构特点来确定.

主要有以下一些常用的变量代换法：

1、被积函数含有$\sqrt{a^2-x^2}$时，可以作代换$x=a\sin t$化去根式.

2、被积函数含有$\sqrt{x^2+a^2}$时，可以作代换$x=a\tan t$化去根式.

3、被积函数含有$\sqrt{x^2-a^2}$时，可以作代换$x=a\sec t$化去根式.

4、被积函数的分母含有x的较高次数时，可以作倒变换$x=\frac{1}{t}$化去分母中的x.

(22) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

(23) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\, x+\sqrt{x^2-a^2}\,\right|+C$$

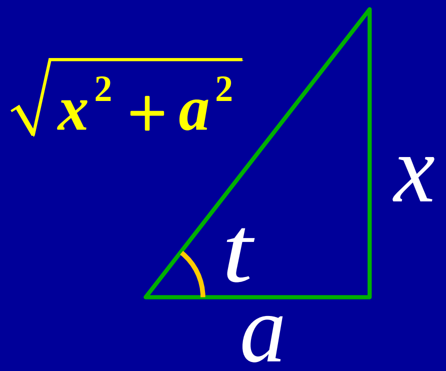
(24) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C \quad (a>0)$$

(22) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C(a>0).$

证明: 令 $x = a\tan t$, 则 $\mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$, 且

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\tan^2 t + a^2} = a\sec t$$

$$\therefore \text{原式} = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}dt = \int \sec t\,\mathrm{d}t$$



$$= \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C_1$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) + C_1$$

$$= \ln\left[\, x + \sqrt{x^2+a^2}\,\right] + C \qquad (C = C_1 - \ln a)$$

(23) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left| x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C\ (a>0).$

证明：令 $x = a\sec t$，则 $\mathrm{d}x = a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$. 且

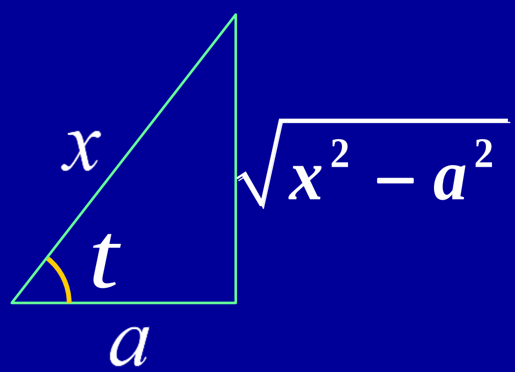
$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = a\tan t.$$

$$\therefore \text{原式} = \int \frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C_1$$

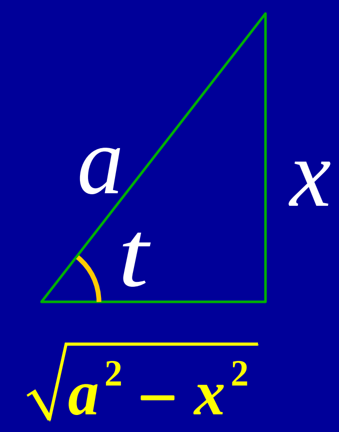
$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1$$

$$= \ln\left| x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C \quad (C = C_1 - \ln a).$$



(24) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0)$.

解: 令 $x = a\sin t$，则 $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$. 且



$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t$$

$$\therefore \text{原式} = \int a\cos t \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t = a^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + C$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

例22 求$\int \frac{1}{x(x^7+2)}dx.$

解 令 $x=\frac{1}{t}$, 则$dx=-\frac{1}{t^2}dt.$

$$\int \frac{1}{x(x^7+2)}dx=\int \frac{1}{\frac{1}{t}((\frac{1}{t})^7+2)}\cdot(-\frac{1}{t^2})dt=-\int \frac{t^6}{1+2t^7}dt$$

$$=-\frac{1}{14}\int \frac{1}{1+2t^7}d(1+2t^7)=-\frac{1}{14}\ln|1+2t^7|+C$$

$$=-\frac{1}{14}\ln|2+x^7|+\frac{1}{2}\ln|x|+C$$

例21 求$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx.$

解 令$t=\sqrt{1+e^x}$, 则$x=\ln(t^2-1)$, $dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx=\int \frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=2\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-x+C$$

§ 5.2.3 分部积分法

$$\int x\cos x \, dx.$$

在复合函数求导法则的基础上，得到了换元积分法. 现在利用两个函数乘积的求导法则，得到另一个求积分的基本方法---分部积分法.

设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 具有连续导数，由导数公式

$(uv)'=u'v+uv'$， 移项得， $uv'=(uv)'-u'v$

积分得：$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$ （分部积分公式）

$$\Downarrow \qquad\qquad \Uparrow$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

使用分部积分的难点：$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx$

u, v' 选择的原则：

1) v 容易求得；

2) $\int u'v\,\mathrm{d}x$ 比 $\int uv'\,\mathrm{d}x$ 容易计算.

使用分部积分的难点：$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx =$

$$\int u(x)dv(x).$$

选取 u 及 v' 的一般方法：

(1)若被积函数是幂函数与正(余)弦或与指数函数的乘积，一般设幂函数为 u，另一个函数为 v'.

例1 求$\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$$

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

解: 令 $u = x$, $v' = \cos x$,

$\therefore$ 原式 $= \int x\,\mathrm{d}\sin x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$

$= x\sin x + \cos x + C$.

求$\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$$

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

例2 求$\int x e^x \,\mathrm{d}x$.

解 令$u = x$, $v' = e^x$.

原式$=\int x\,de^x = xe^x - \int e^x dx$

$$= xe^x - e^x + C.$$

(2)若被积函数是幂函数与对数函数或与反三角函数的乘积，一般设对数函数或反三角函数为u，幂函数为v'.

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

例3 求 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.

解 原式 $= \int \ln x\,\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\,\mathrm{d}(\ln x)$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

$$\int uv' \, \mathrm{d}x = uv - \int u'v \, \mathrm{d}x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

例4 求$\int \arccos x \, \mathrm{d}x$.

解 原式$= x\arccos x - \int x d(\arccos x)$

$$= x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2)$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

(3)当被积函数正好是三角函数与指数函数的乘积时，这时一般都需要建立积分方程求解.

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$$

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

例5 求 $\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x$.

解 原式 $= \int \sin x \,\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

$$= \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x$$

同时，原式 $= \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}(-\cos x) \quad = -\mathrm{e}^x \cos x + \int \cos x \,\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

即有 $\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx \qquad (1)$

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int \cos x\, e^x dx \qquad (2)$$

由(1)(2)可得

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

例6 求积分$\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解 原式$=\int \arctan x\, d\sqrt{1+x^2}$

$$=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$$

例7 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-x^2}，求 $\int x f'(x)dx$.

解 $\int x f'(x)dx = \int x\, d f(x) = x f(x) - \int f(x)dx$

$\because \quad f(x) = (e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$, $\int f(x)dx = e^{-x^2} + C$,

$\therefore \quad \int x f'(x)dx = -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C$.

习题$P72$

$$5.\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx;$$

解 $$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int \frac{4}{\sin^2 2x}dx$$

$$=\int 2\csc^2 2x d(2x)$$

$$=-2\cot 2x+C$$

习题$P72$

$$6.\int\frac{2+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx;$$

解 $$\int\frac{2+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{3-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int\left(\frac{3}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int 3\sec^2 x dx-\int 1 dx$$

$$=3\tan x-x+C$$

习题$P72$

$$7.\int \frac{1}{1+\sin x}dx.$$

解 $$\int \frac{1}{1+\sin x}dx=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int \frac{1}{\cos^2 x}dx-\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int \sec^2 x dx+\int \frac{1}{\cos^2 x}d\cos x$$

$$=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$$

习题$P73$

一、填空题

3.$F(x)$为$f(x)$的一个原函数，$f(x)=\dfrac{F(x)}{1+x^2}$,则$f(x)=$_____.

解 由$f(x)=\dfrac{F(x)}{1+x^2}$得,$\dfrac{f(x)}{F(x)}=\dfrac{1}{1+x^2}$, 即$\dfrac{F'(x)}{F(x)}=\dfrac{1}{1+x^2}$

故 $(\ln F(x))'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

所以 $\ln F(x)=\arctan x+C$,则$F(x)=Ce^{\arctan x}$.

从而 $f(x)=F'(x)=C\dfrac{1}{1+x^2}e^{\arctan x}$.

习题$P73$

二、计算下列不定积分　2.$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

解　$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}}d(x-\frac{1}{2})$

$=\arcsin(2x-1)+C$

(22)　$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}\,x=\arcsin\frac{x}{a}+C$

习题$P74$

$$9.\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$$

解 $$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 2} dx$$

$$= \int \frac{1}{\tan^2 x + 2} d\tan x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\tan x) + C$$

$$(20) \quad \int \frac{1}{a^2 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

习题$P74$ $\int x^m(1-x)^n dx = \int x^n(1-x)^m dx$.

三、计算下列不定积分 1. $\int x^2(1-x)^{1000}dx$

解 令$1-x=t$,则$x=1-t$, $dx=-dt$.

$$原式=-\int(1-t)^2t^{1000}dt=-\int(1-2t+t^2)t^{1000}dt$$

$$=-\int(t^{1000}-2t^{1001}+t^{1002})dt$$

$$=-\frac{1}{1001}t^{1001}+\frac{2}{1002}t^{1002}-\frac{1}{1003}t^{1003}+C$$

$$=-\frac{1}{1001}(1-x)^{1001}+\frac{2}{1002}(1-x)^{1002}-\frac{1}{1003}(1-x)^{1003}+C$$

例10. 设 $I_n = \int \sec^n x\,\mathrm{d}x$, 证明递推公式:

$$I_n = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\cdot\tan x + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2} \qquad (n \ge 2)$$

证: $\boxed{I_n} = \int \sec^{n-2}x\cdot\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

$$= \sec^{n-2}x\cdot\tan x$$

$$-(n-2)\int \sec^{n-3}x\cdot\sec x\tan x\cdot\tan x\,\mathrm{d}x$$

$$= \sec^{n-2}x\cdot\tan x - (n-2)\int \sec^{n-2}x\cdot(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sec^{n-2}x\cdot\tan x \boxed{-(n-2)I_n} + (n-2)I_{n-2}$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\cdot\tan x + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2} \qquad (n \ge 2)$$

例11. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\dfrac{\cos x}{x}$, 求 $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

解: $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}f(x)$

$= x f(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\boxed{\frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}}$$

$= x\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)' - \dfrac{\cos x}{x} + C$

$= -\sin x - 2\dfrac{\cos x}{x} + C$

说明: 此题若先求出 $f'(x)$ 再求积分反而复杂.

$$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(-\cos x + \frac{2\sin x}{x} + \frac{2\cos x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

例13. 求 $I=\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

解: 令 $t=\ln x$, 则 $x=\mathrm{e}^t,\ \mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$

$$\therefore\quad I=\int \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t \longrightarrow \boxed{=\mathrm{e}^t\sin t-\int \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \sin t & & \cos t & & -\sin t & & \\ & + & & - & & + & \int \\ \mathrm{e}^t & & \mathrm{e}^t & & \mathrm{e}^t & & \end{array}$$

$$=\mathrm{e}^t(\sin t-\cos t)-I$$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t-\cos t)+C$$

$$=\frac{1}{2}x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$$

可用表格法求
多次分部积分

例12. 求 $I=\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx.$

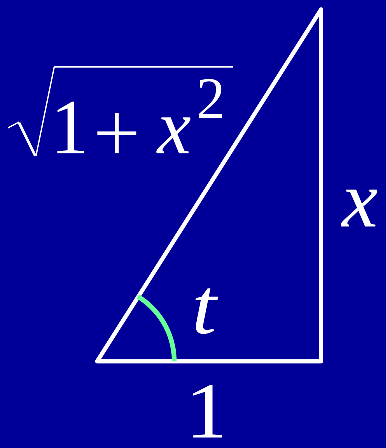
解法1 先换元后分部

令 $t=\arctan x$, 即 $x=\tan t$, 则

$$I=\int \frac{e^t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\,dt=\int e^t\cos t\,dt$$

$$=e^t\sin t-\int e^t\sin t\,dt$$

$$=e^t\sin t+e^t\cos t-\int e^t\cos t\,dt$$



故 $I=\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)e^t+C$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]e^{\arctan x}+C$$

解法2 直接用分部积分法

$$I=\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,d\,e^{\arctan x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+\int\frac{x\,e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,d\,e^{\arctan x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,e^{\arctan x}(1+x)-I$$

$$\therefore\quad I=\frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}}\,e^{\arctan x}+C$$

备用题. 求不定积分 $\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x$.

解: 方法1 (先分部 , 再换元)

$$\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-1)$$

$$= 2\int x\,\mathrm{d}\sqrt{\mathrm{e}^x-1} = 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 2\int \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$$

令 $u=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$, 则 $\mathrm{d}x = \frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$

$$= 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 4\int \frac{u^2+1-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \qquad \boxed{-4(u-\arctan u)+C}$$

$$= 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 4\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + 4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + C$$

$$\boxed{\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x}$$

方法2 (先换元,再分部)

令 $u=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$, 则 $x=\ln(1+u^2),\ \mathrm{d}x=\dfrac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$

故 $$\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{(1+u^2)\ln(1+u^2)}{u}\cdot\frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$=2\int \ln(1+u^2)\,\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4\int \frac{1+u^2-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4u+4\arctan u+C$$

$$=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$$

2. 求不定积分 $\int \frac{2\sin x\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}{2+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解: 利用凑微分法，得

$$\text{原式} = \int \frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{2+\sin^2 x}\,\mathrm{d}(1+\sin^2 x)$$

令 $t=\sqrt{1+\sin^2 x}$

$$= \int \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2t - 2\arctan t + C$$

$$= 2\left[\sqrt{1+\sin^2 x} - \arctan\sqrt{1+\sin^2 x}\,\right] + C$$

3. 求不定积分 $\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x.$

解: 令 $x = \sin t$, $1+x^2 = 1+\sin^2 t$, $\mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t$

原式 $= \int \frac{\cos t}{(1+\sin^2 t)\cos t} \mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+\sin^2 t} \mathrm{d}t$

分子分母同除以 $\cos^2 t$

$$= \int \frac{\sec^2 t}{\sec^2 t + \tan^2 t} \mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+2\tan^2 t} \mathrm{d}\tan t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}\tan t)^2} \mathrm{d}\sqrt{2}\tan t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan t) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}} + C$$