第六章

空间解析几何与矢量代数

§ 6.1 矢量及矢量的运算

一、矢量的概念

二、矢量的线性运算

三、矢量的数量积与矢量积运算

§ 8.1.1 矢量、矢量的模、单位矢量

矢量(向量)： 既有大小又有方向的量.

矢量表示： 用有向线段来表示矢量. 有向线段的长度表示矢量的大小，有向线段的方向表示矢量的方向.

B(终点)

A(起点)　记为 $\overrightarrow{AB}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 或 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

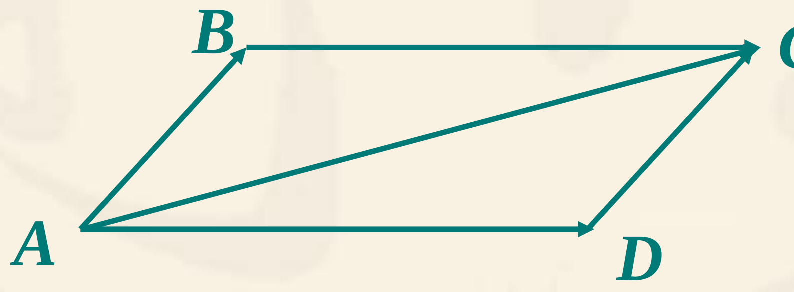
矢量的模： 矢量的大小，表示为 $|\overrightarrow{AB}|, |\boldsymbol{a}|, |\vec{a}|$.

定义1 若两个矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的大小相等，且方向相同，则称$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是**相等**，记为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这样的矢量称为**自由矢量**.

即一个自由矢量经平行移动后与原矢量相等.

如图所示，矢量$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

定义2 若两个矢量$\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相反，则则称$\boldsymbol{b}$为$\boldsymbol{a}$的负矢量，或$\boldsymbol{a}$为$\boldsymbol{b}$的负矢量. 记为$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$.



如图所示，矢量$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$.

定义3 长度为零的矢量，称为**零矢量**，记为0. 其无一定方向，所以也可看成是任意方向的矢量.

定义4 长度为一个单位(模为1)的矢量称为**单位矢量**.

单位矢量不唯一.

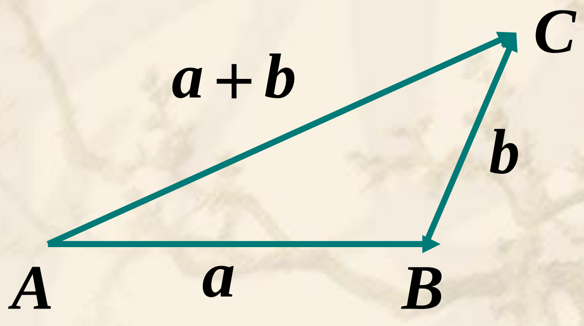
一个矢量a的单位矢量：是与a方向相同，长度(模)为1的矢量，记为$a^0(e_a)$.

§ 8.1.2 矢量的加法

三角形法则

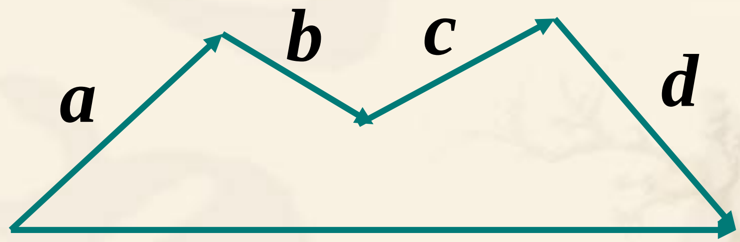
设有两个矢量a和b, 任取一点A, 作$\overrightarrow{AB}=a$, 再以B为始端, 作$\overrightarrow{BC}=b$, 连接AC, 那么矢量$\overrightarrow{AC}=c$称为矢量a与b的**和**, 记作$a+b$, 即 $c=a+b$. 也可表示为

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$



封闭多边形法则

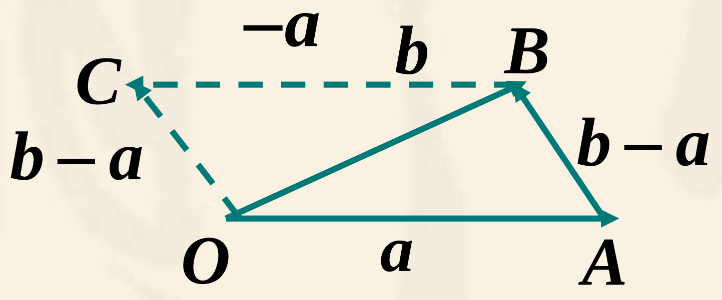
设有矢量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$，作加法$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$. 只需把矢量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$的首尾相连，那么从$\boldsymbol{a}$的始端到$\boldsymbol{d}$的终端的矢量为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$.



$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$.

矢量的减法

规定两个矢量b与a的差　$b-a=b+(-a)$.



即从a的终端向b的终端所引矢量便是矢量b与a的差$b-a$.

负矢量: 设a为一矢量, 与a的模相等而方向相反的矢量称为a的**负矢量**, 记作$-a$.

矢量加法的运算规律

(1)若$a+b=0$, 则$a=-b$或$b=-a$.

(2)$a+0=a$.

(3)$a+b=b+a$(交换律).

(4)$(a+b)+c=a+(b+c)$(结合律).

(5)若$a+b=a+c$, 则$b=c$(消去律).

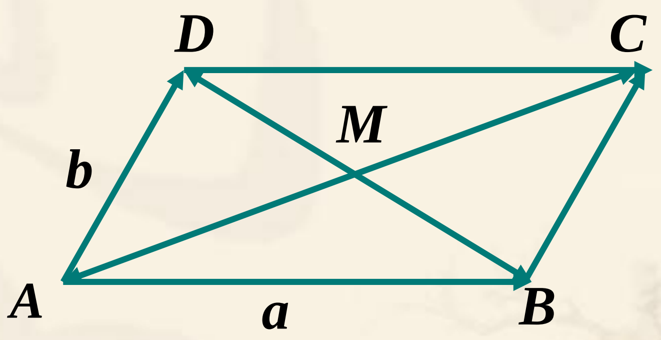
§ 8.1.3 数乘矢量

实数k与矢量a的乘积称为**数乘矢量**，记为ka. 它的模$|ka|=|k||a|$. 它的方向为：当$k>0$时与a相同；当$k<0$时与a相反.

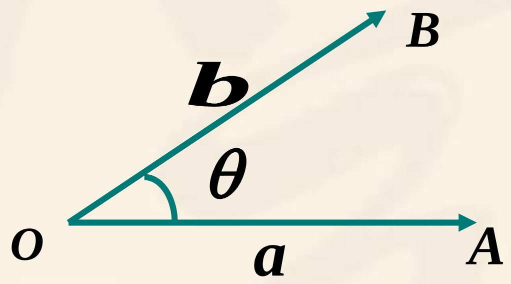
设a为非零矢量，则$a^0=\frac{1}{|a|}a$. 这表明任一非零矢量除以它的模即为原矢量的单位矢量.

注：任意矢量a等于模$|a|$与其(同方向的)单位矢量的乘积.

例 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示矢量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点.



矢量的夹角 设有两个非零矢量a, b, 任取空间一点O, 作$\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{OB}=b$, 规定**不超过π**的$\angle AOB$称为矢量a与b的**夹角**, 记作(a, b)或(b, a).



平行与垂直

如果$(a, b)=0$或π, 称**矢量a与b平行**, 记作$a//b$.

如果$(a, b)=\dfrac{\pi}{2}$, 称**矢量a与b垂直**, 记作$a\perp b$.

共线与共面

互相平行的矢量称为**共线矢量**,即两矢量共线与两矢量平行是一回事. 从几何上看,若两矢量共线,则当将始端放在同一点时，它们的终端与公共始端在一条直线上.

平行于同一个平面的矢量称为**共面矢量**，设有$k(k \geq 3)$个矢量共面，当把它们的始端放在同一点时，则k个终端和公共起端在一个平面上.

对于共线矢量与共面矢量有以下常见结论:

结论1 零矢量与任何矢量共线.

结论2 若有非零矢量a, b, 则a与b共线$\Leftrightarrow$存在唯一的数k, 使得$a = kb$.

结论3 矢量a与b共线的充要条件是存在不全为零的数k_1, k_2使得$k_1 a + k_2 b = 0$.

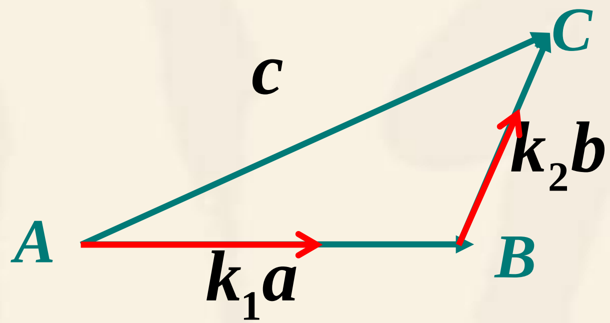
结论3 矢量a与b共线的充要条件是存在不全为零的数k_1, k_2使得$k_1a+k_2b=0.$

证明 必要性 当$a=0$或$b=0$时，结论显然成立. 当a, b均不为零时，由a与b平行，则存在实数l，使得$a=lb.$ 即得$a-lb=0.$ 令$k_1=1, k_2=-l$，故存在不全为零的数k_1, k_2使得$k_1a+k_2b=0.$

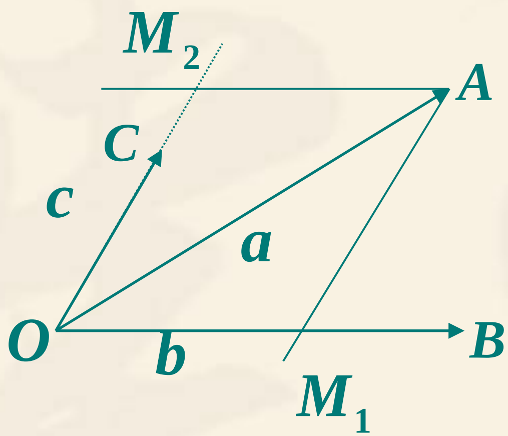
充分性 若存在不全为零的数k_1, k_2使得$k_1a+k_2b=0.$

不妨$k_1\neq 0$时，则$a=-\dfrac{k_2}{k_1}b$，由结论2知a与b共线.

结论4 若矢量a,b,c 满足$c=k_1a+k_2b$，则a,b,c共面.



结论5 三个矢量a,b,c共面的充要条件是存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3 使得$k_1a+k_2b+k_3c=0$.

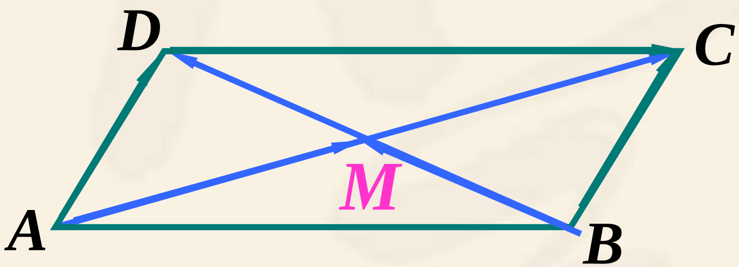


$a=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$

$\overrightarrow{OM_1}=xb,$

$\overrightarrow{OM_2}=yc$

例 试用矢量方法证明：对角线互相平分的四边形必是平行四边形.



证 $\because \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 平行且相等,结论得证.