第三节 泰勒公式

一、泰勒公式的建立

二、几个初等函数的麦克劳林公式

三、利用泰勒公式求极限

四、利用泰勒公式讨论函数性质

几个问题

1.函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在该点的某个邻域 $U(x_0)$ 上连续, 对吗?

2.函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在该点的某个邻域 $U(x_0)$ 上可导, 对吗?

3.函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在该点的某个邻域 $U(x_0)$ 上连续, 对吗?

4.函数 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导，则 $f(x)$ 在该点的某个邻域 $U(x_0)$ 上可导, 对吗?

5. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, 对吗 ?

一、泰勒公式的建立

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微，则

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

或 $$\underbrace{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x - x_0)} + o(x - x_0)$$ 误差

即 $$f(x) = P_1(x - x_0) + o(x - x_0).$$

$$P_n(x - x_0) = a_n(x - x_0)^n + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \cdots + a_1(x - x_0) + a_0$$

称为关于 $(x - x_0)$ 的 n 次多项式

当 $f(x)$ 在点 x_0 处可导时，$f(x)=P_1(x-x_0)+o(x-x_0)$.

当 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导时

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2$$

$$=P_2(x-x_0)+o(x-x_0)^2.$$

当 $f(x)$ 在点 x_0 处三阶可导时

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o(x-x_0)^3$$

$$=P_3(x-x_0)+o(x-x_0)^3$$

当 $f(x)$在点 x_0 处 n阶可导时，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$$

$$=P_n(x-x_0)+o(x-x_0)^n$$

下面证明当 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导时

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2$$

分析：即证 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}=0$

只需 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}=\dfrac{f''(x_0)}{2}$

下面证明当 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导时

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2$$

证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{2}$$

$$=\frac{f''(x_0)}{2}\quad ?$$

下面证明当 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导时

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2$$

证明 $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=\frac{f''(x_0)}{2}$$ 导数定义

所以 $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}=0$

即 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2$.

定理1 皮亚诺余项的泰勒(Taylor)中值定理：


泰勒，B.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则当

$x\in U(x_0)$ 时，有 $f(x)=P_n(x-x_0)+o(x-x_0)^n$.

其中
$$P_n(x-x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

多项式 $P_n(x-x_0)$ 称为函数 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展开的 n 次泰勒多项式，$\dfrac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$ 为泰勒系数 $(m=0,1,2,\cdots,n)$.

下证 $\dfrac{f(x)-P_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n} \to \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

$$=\frac{f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}]}{(x-x_0)^n}$$

$$=\frac{f'(x)-[f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)\cdots+\frac{1}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-2}]}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

$$=\cdots=\frac{1}{n!}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} \to \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

注:若 x_0 是区间端点结论亦成立. 例如, 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处 $f_+^{(n)}(x_0)$ 存在, 则当 $x\in(x_0\ ,x_0+\delta\ )$ 时, 有

$$f(x)=P_n(x-x_0)+o(x-x_0)^n.$$

$$P_n(x-x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

定理2 拉格朗日余项的泰勒(Taylor)中值定理：


泰勒，B.

若 $f(x)$ 在含有 x_0 的某开区间 (a, b) 内 $n+1$ 阶可导，则对任一 $x \in (a, b)$，有

$$f(x) = P_n(x - x_0) + R_n(x - x_0)$$

其中 $R_n(x - x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x_0 与 x 之间).

$$\frac{f(x) - P_n(x - x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

证明 在以x_0, x为端点的区间上使用柯西中值定理

$$\frac{f(x)-P_n(x-x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{f'(\xi_1)-P_n'(\xi_1-x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}\ \text{其中}\ \xi_1\in(x_0,x).$$

又在以x_0, ξ_1为端点的区间上使用柯西中值定理

$$\frac{f'(\xi_1)-P_n'(\xi_1-x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{f''(\xi_2)-P_n''(\xi_2-x_0)}{(n+1)\cdot n\cdot(\xi_2-x_0)^{n-1}}\ \text{其中}\ \xi_2\in(x_0,\xi_1).$$

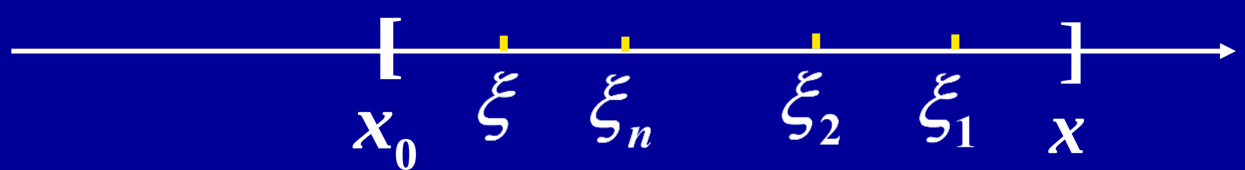
$$\Rightarrow\frac{f(x)-P_n(x-x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{f''(\xi_2)-P_n''(\xi_2-x_0)}{(n+1)\cdot n\cdot(\xi_2-x_0)^{n-1}}\quad(\xi_2\in(x_0,x))$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-P_n(x-x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{f''(\xi_2)-P_n''(\xi_2-x_0)}{(n+1)\cdot n\cdot(\xi_2-x_0)^{n-1}} \quad (\xi_2\in(x_0\,,\,x))$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi\in(x_0\,,\,\xi_n)\subset(x_0\,,\,x))$$

$$\therefore \quad f(x)=P_n(x-x_0)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}(x-x_0)^{n+1}.$$



定理2 拉格朗日余项的泰勒(Taylor)中值定理：

若 $f(x)$ 在含有 x_0 的某开区间 (a, b) 内 $n+1$ 阶可导，则对任一 $x \in (a, b)$，有

$$f(x) = P_n(x-x_0) + R_n(x-x_0)$$

其中 $R_n(x-x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x_0 与 x 之间).

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

两种余项的泰勒公式比较:

(1)拉格朗日余项要求 $f(x)$ 在区间内 $n+1$ 阶可导，皮亚诺余项则要求 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导;

(2)在讨论函数性质与误差估计时使用拉格朗日余项，而在求极限时使用皮亚诺余项.

(3)在拉格朗日余项的泰勒公式中，x_0 可以为区间的端点. 设函数 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\delta]$ 上 $n+1$ 阶可导，对任意的 $x\in[x_0, x_0+\delta]$，有 $f(x)=P_n(x-x_0)+R_n(x-x_0)$.

麦克劳林公式

特别地，当 $x_0 = 0$，记 $\xi = \theta x \ (0 < \theta < 1)$，则有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称为带有拉格朗日余项的麦克劳林公式 .

同样的，称

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

为带有佩亚诺余项的麦克劳林公式 .

二、几个初等函数的麦克劳林公式

$$(1)\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)[R_n(x)]$$

$$(2)\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})[R_{2n}(x)]$$

$$(3)\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})[R_{2n+1}(x)]$$

奇函数的展开式中没有偶数次项；偶函数的展开式中没有奇数次项.

$$(4)(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+o(x^{n})[R_{n}(x)]$$

$$(5)\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}+o(x^{n})[R_{n}(x)]$$

$$(6)\ln(1-x)=-x-\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{3}}{3}-\cdots-\frac{x^{n}}{n}+o(x^{n})[R_{n}(x)]$$

(1) $f(x)=\mathrm{e}^x$

解 因为 $f^{(k)}(x)=\mathrm{e}^x,\quad f^{(k)}(0)=1\quad(k=1,2,3,\cdots,)$

所以 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+R_n(x)$

其中 $R_n(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(2) $f(x)=\sin x$

解 $\because f^{(n)}(x)=\sin(x+n\dfrac{\pi}{2}),\ \therefore f^{(n)}(0)=\sin\dfrac{n\pi}{2}.$

$$f(0)=0,\ f^{(1)}(0)=1,\ f^{(2)}(0)=0,\ f^{(3)}(0)=-1,\cdots$$

$$\therefore \sin x=\sin 0+\sin'(0)x+\frac{\sin''(0)}{2!}x^2+\frac{\sin'''(0)}{3!}x^3+\frac{\sin^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots$$

$$+\frac{\sin^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\frac{\sin^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\quad+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\quad+o(x^{2n})$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

推广(1): 求 $f(x)=e^{x^2}$ 的带有皮亚诺余项的麦克劳林公式.

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+o(x^{n})$$

$$\mathrm{e}^{x^{2}}\overset{t=x^{2}}{=}\mathrm{e}^{t}=1+t+\frac{t^{2}}{2!}+\frac{t^{3}}{3!}+\cdots+\frac{t^{n}}{n!}+o(t^{n})$$

$$=1+(x^{2})+\frac{(x^{2})^{2}}{2!}+\frac{(x^{2})^{3}}{3!}+\cdots+\frac{(x^{2})^{n}}{n!}+o((x^{2})^{n})$$

$$=1+x^{2}+\frac{x^{4}}{2!}+\frac{x^{6}}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+o(x^{2n})$$

推广(2): 如何求有关 $f(x)=e^x$ 的等价无穷向量.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

若 $\beta(x) \sim \alpha(x) \Leftrightarrow \beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$.

$$e^x - 1 = x + o(x) \quad \Rightarrow e^x - 1 \sim x$$

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \Rightarrow e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \sim \frac{x^3}{6}$$

推广:(3)若 $f(x)$在含有 x_0 的某开区间 (a,b) 内 $n+1$阶可导,对任一 $x\in(a,b)$,则 $f'(x)$的拉格朗日余项的泰勒公式为:

$$f'(x)=f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f'''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

推广：(3)若 $f(x)$ 在含有 x_0 的某开区间 (a,b) 内 $n+1$ 阶可导，对任一 $x\in(a,b)$，则 $f'(x)$ 的拉格朗日余项的泰勒公式为：

$$f'(x)=f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f'''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

分析：令 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内 n 阶可导，对任一 $x\in(a,b)$，

$$g(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}g''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}g^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}+\frac{g^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

三、利用泰勒公式求极限

例3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$.

分析 在使用泰勒公式时，如何确定展开式中最高项的次数是一个难点也是一个重点.

例3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$.

解 因为 $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)$$

而 $x^2[x+\ln(1-x)] = x^2(-\frac{x^2}{2}+o(x^2))$

$$= -\frac{x^4}{2}+x^2\cdot o(x^2)$$

$$= -\frac{x^4}{2}+o(x^4)$$

$$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{12}x^4+o(x^4),$$

所以，原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)} = \dfrac{1}{6}$.

例 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解 $\because \quad e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2!}x^4+o(x^4)$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$$

$$\therefore \quad e^{x^2}+2\cos x-3=(\frac{1}{2!}+2\cdot\frac{1}{4!})x^4+o(x^4)$$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\dfrac{7}{12}$.

抽象函数求极限

思考题 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，已知

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 2x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=0$$

(1)写出 $f(x)$ 的二阶皮亚诺公式，

(2)求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$，

(3)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+2}{x^2}$.

四、利用泰勒公式讨论函数性质

在涉及高阶导函数(根)的问题时，方法之二使用泰勒公式.

例4 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 n 阶导数, 且 $f(a)=f(b)=f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f^{(n)}(\xi)=0$. 本题是4.1节命题的直接推论. ？

注: 在使用泰勒公式展开时, 关键是展开点的选取.

展开点一般选取特殊点：端点、中点. 其选取的原则是：展开式越简单越好.

例4若 $f(x)$在$[a,b]$上具有n阶导数，且

$$f(a)=f(b)=f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0$$

证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f^{(n)}(\xi)=0$.

证明因为 $f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{1}{2!}f''(b)(x-b)^2+\cdots$

$$+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(b)(x-b)^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-b)^n.$$

$$=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-b)^n.$$

又由于 $0=f(a)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(a-b)^n.$

故存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f^{(n)}(\xi)=0.$

例5 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有2阶连续导函数，满足 $f(0)=f(1)$，并且当 $x\in(0,1)$ 时，$|f''(x)|\le 1$，求证：

$$|f'(x)|\le\frac{1}{2},\ x\in[0,1].$$

证明 任取 $x_0\in(0,1)$，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

所以 $f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(-x_0)^2 \qquad (1)$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(1-x_0)^2 \qquad (2)$$

(1)−(2)得 $f(x_0)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2.$

例5 已知 $f(x)$ 在[0, 1]上具有2阶连续导函数，满足 $f(0) = f(1)$，并且当 $x \in (0,1)$ 时，$|f''(x)| \le 1$，求证：

$$|f'(x)| \le \frac{1}{2},\ x \in [0,1].$$

(1) − (2)得 $f(x_0) = \frac{1}{2} f''(\xi_1) x_0^2 - \frac{1}{2} f''(\xi_2)(1 - x_0)^2$.

$$|f(x_0)| \le \frac{x_0^2 + (1 - x_0)^2}{2} \le \frac{1}{2}$$

思考题 设 $f(x)$在$[a, b]$上二阶可导，且 $|f''(x)| \geq m > 0$ (m为常数)，又 $f(a) = f(b) = 0$，试证明

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \geq \frac{m}{8}(b-a)^2 .$$

$P61$四. 求 a, b, 使 $x \to 0$ 时, $f(x) = \sin 2x + ax + bx^3$ 为 x 的尽可能高阶无穷小, 并求此时的阶.

解 因为 $\sin 2x = 2x - \dfrac{(2x)^3}{3!} + \dfrac{(2x)^5}{5!} + o(x^6)$, 故

$$f(x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + ax + bx^3 + o(x^6)$$

$$= (2+a)x + (b - \frac{4}{3})x^3 + \frac{(2x)^5}{5!} + o(x^6),$$

所以当 $a = -2$, $b = \dfrac{4}{3}$ 时, $f(x)$ 的阶数最高, 为5阶.

P_{125} 7. 已知 $f(x)$在$[0,+\infty)$ 内无穷阶可导,且 $f^{(m)}(0)=0$, 对$m=0,1,2,\cdots$均成立，又存在常数$M>0$，使得任意阶导数 $|f^{(n)}(x)|\le M$,求证 $f(x)\equiv 0$.

证明　由泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n$$

所以　$|f(x)|=\dfrac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!}x^n\le\dfrac{M}{n!}x^n$.　而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$收敛，

故$\dfrac{x^n}{n!}\to 0$，因此 $f(x)\equiv 0$.

P_{125} 8.设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内存在二阶连续导数，试证：至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

解 函数 $f(x)$在$x=\dfrac{a+b}{2}$的泰勒展式为:

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2!}f''(\tilde{\xi})(x-\frac{a+b}{2})^2$$

故 $$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{b-a}{2})+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(\frac{b-a}{2})^2 \quad (1)$$

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2})+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(\frac{a-b}{2})^2 \quad (2)$$

故 $$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{b-a}{2})+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(\frac{b-a}{2})^2 \quad (1)$$

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2})+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(\frac{a-b}{2})^2 \quad (2)$$

$(1)+(2)$，得

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}[\frac{1}{2}f''(\xi_1)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)]$$

又因为 $f''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，故存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,

使得 $f''(\xi)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)$. 证毕.

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1+\frac{1}{2}x^2)\sin x}{(x-\sin x)[x+\ln(1-x)]}$.

解 因为 $\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4+o(x^5)$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4),\ \ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

则 $\cos x-1+\dfrac{1}{2}x^2=\dfrac{1}{24}x^4+o(x^5)$

$$x-\sin x=\frac{x^3}{6}+o(x^4),\quad x+\ln(1-x)=-\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

则 $$\cos x-1+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{24}x^4+o(x^5)$$

$$x-\sin x=\frac{x^3}{6}+o(x^4),\ x+\ln(1-x)=-\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

$$(\cos x-1+\frac{1}{2}x^2)\cdot x=\frac{1}{24}x^5+o(x^6)$$

$$(x-\sin x)(x+\ln(1-x))=(\frac{x^3}{6}+o(x^4))\cdot(-\frac{x^2}{2}+o(x^2))$$

$$=-\frac{x^5}{12}+o(x^5)$$

因此，原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{24}x^5+o(x^6)}{-\frac{1}{12}x^5+o(x^5)}=-\dfrac{1}{2}$

例 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$.

解 因为 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + o(x^3)$

所以 $\sin x - x\cos x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3) - x + \dfrac{x^3}{2!} + xo(x^3)$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \dfrac{1}{3}$.

思考题 证明e为无理数.

证明 $e=1+1+\frac{1}{2\,!}+\cdots+\frac{1}{n\,!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{(n+1)\,!}\quad(0<\theta<1)$

两边同乘 $n\,!$，得

$$n!\mathrm{e}=\text{整数}+\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

假设e为有理数 $\frac{p}{q}$ $(p,q$为正整数$)$,

当 $n>q$ 时，等式左边为整数；

当 $n>2$ 时，等式右边不可能为整数.

矛盾. 故e为无理数.

$f(x)$在点x_0可导与在点x_0的邻域内可导不等价.

例如，设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\text{为有理数} \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$，则$f(x)$在0点处连续、可导. 但在0点的邻域内不连续,当然也不可导.

若函数$f(x)$在点x_0处n阶可导可得在点x_0的邻域内$n-1$阶导函数$f^{(n-1)}(x)$连续.