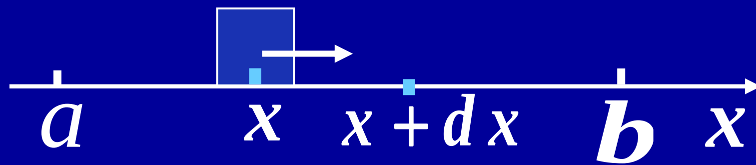
§ 5.5.5 物理中的应用

1. 变力沿直线所作的功

设物体在连续变力 $F(x)$ 作用下沿 x 轴从 $x = a$ 移动到 $x = b$，力的方向与运动方向平行，求变力所做的功 .

在 $[a, b]$ 上任取子区间 $[x, x + \mathrm{d}x]$，在其上所作的功元素为



$$\mathrm{d}W = F(x)\,\mathrm{d}x$$

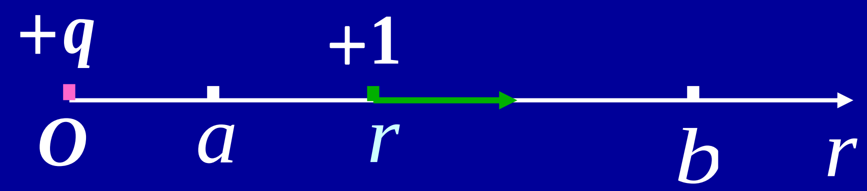
因此变力 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上所作的功为

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

例1 在一个带 $+q$ 电荷所产生的电场作用下，一个单位正电荷沿直线从距离点电荷 a 处移动到 b 处 $(a < b)$，求电场力所作的功 .

解: 当单位正电荷距离原点 r 时，其电场力为 $F = k\dfrac{q}{r^2}$

所求功为 $W = \displaystyle\int_a^b \frac{kq}{r^2}\,\mathrm{d}r$



$$= kq\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = kq\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

从而电场在 $r = a$ 处的电势为 $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{kq}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{kq}{a}.$

例3 一蓄满水的圆柱形水桶高为 5 m，底圆半径为 3m，试问要把桶中的水全部吸出需作多少功？

解: 建立坐标系如图．在任一小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上的一薄层水的重力为

$$g \cdot \rho \cdot \pi 3^2 \mathrm{d}x \quad (\mathrm{KN})$$

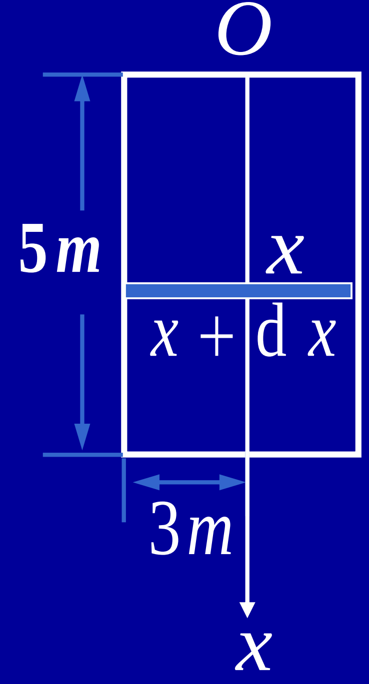
这薄层水吸出桶外所作的功(功元素)为

$$\mathrm{d}W = 9\pi g \rho\, x\, \mathrm{d}x$$

故所求功为

$$W = \int_0^5 9\pi g \rho x \,\mathrm{d}x = 9\pi g \rho \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5$$

$$= 112.5\pi g \rho \quad (\mathrm{KJ})$$



设水的密度为 ρ

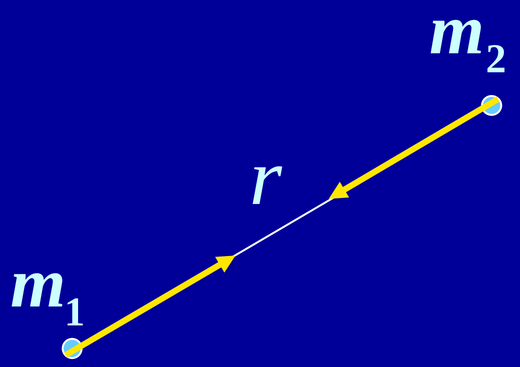
2. 引力问题

质量分别为 m_1, m_2 的质点，相距 r，

二者间的引力

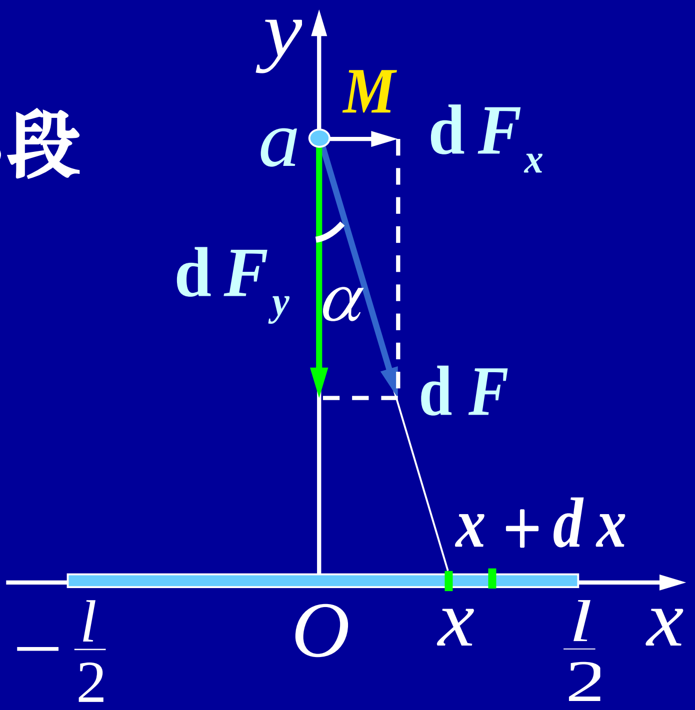
大小：$F = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

方向：沿两质点的连线



若考虑物体对质点的引力，则需用积分解决 .

例5 设有一长度为 l，线密度为 μ 的均匀细直棒，在其中垂线上距 a 单位处有一质量为 m 的质点 M，试计算该棒对质点的引力.



解: 建立坐标系如图. 细棒上小段 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 对质点的引力大小为

$$\mathrm{d}F = k\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$$

故铅直分力元素为

$$\mathrm{d}F_y = -\mathrm{d}F\cdot\cos\alpha$$

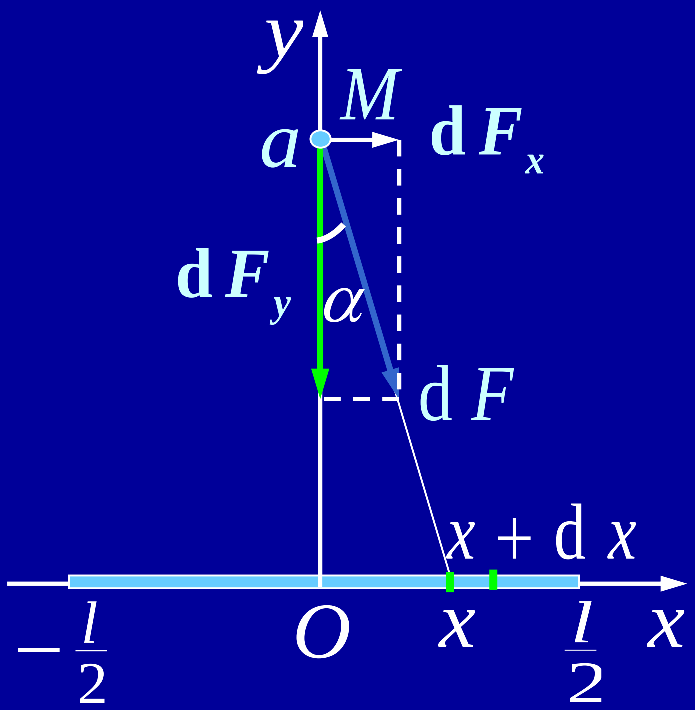
$$= -k\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} = -km\mu a\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

棒对质点的引力的铅直分力为

$$F_y = -2k\,m\mu a\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= -k\,m\mu a\left[\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\right]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$= \frac{2k\,m\mu l}{a}\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$$



利用对称性

棒对质点引力的水平分力 $F_x = 0.$

故棒对质点的引力大小为 $F = \dfrac{2k\,m\mu l}{a}\dfrac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$

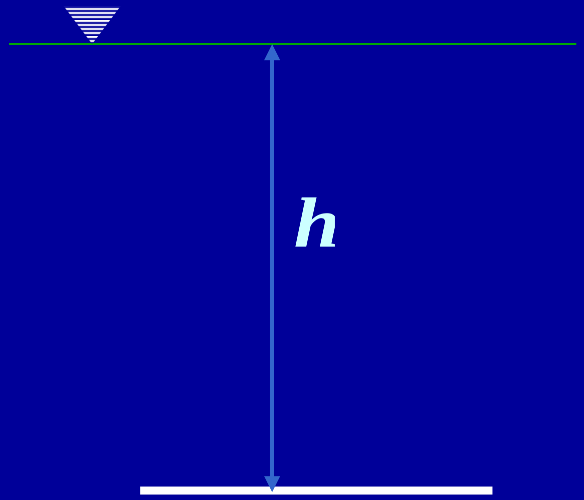
3.液体的侧压力

设液体密度为 ρ 深为 h 处的压强为 $p = g\rho h$.

当平板与水面平行时,

平板一侧所受的压力为

$$F = pA$$



面积为 A 的平板

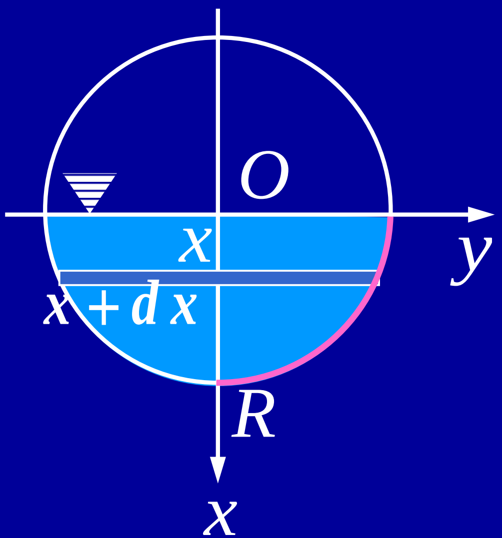
当平板不与水面平行时,

所受侧压力问题就需用积分解决.

例6 一水平横放的半径为R 的圆桶，内盛半桶密度为ρ 的液体，求桶的一个端面所受的侧压力.

解: 建立坐标系如图. 所论半圆的方程为

$$y=\sqrt{R^2-x^2}\qquad (0\le x\le R)$$



侧压力元素

$$\mathrm{d}F=2g\rho x\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

端面所受侧压力为

$$F=\int_0^R 2g\rho x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2g\rho}{3}R^3.$$

注 当桶内充满液体时，小窄条上的压强为 $g\rho(R+x)$，

侧压力元素 $\mathrm{d}F = 2g\rho(R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$，

故端面所受侧压力为

$$F=\int_{-R}^{R}2g\rho(R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

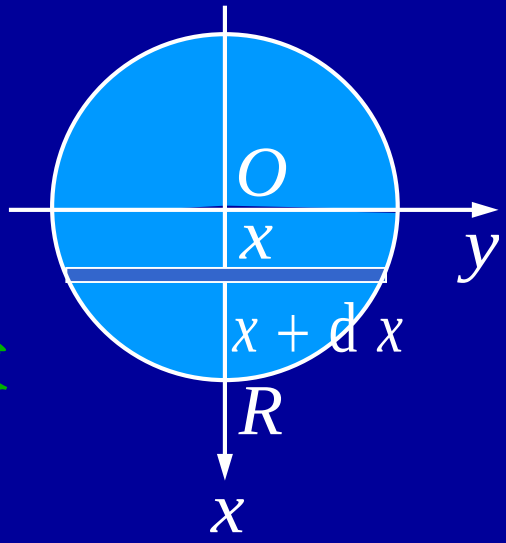
奇函数

$$=4Rg\rho\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

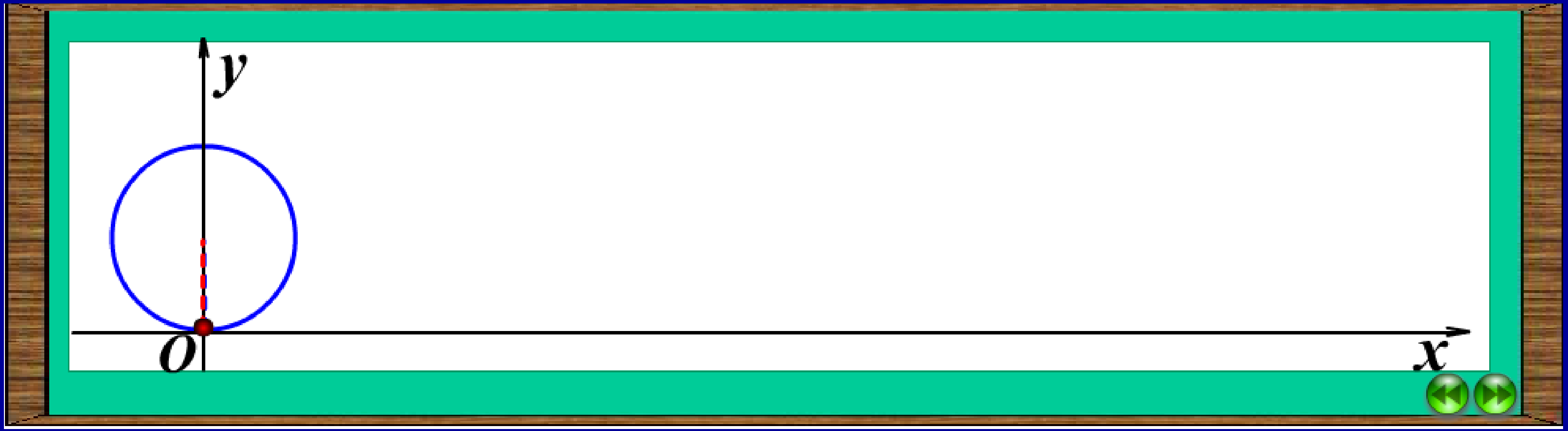
令 $x=R\sin t$

$$=4Rg\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\pi g\rho R^3.$$



摆线简介:



摆线: 半径为 a 的圆周沿直线无滑动地滚动时，其上定点 M 的轨迹即为摆线 .