第三节 定积分的积分法

一、定积分的换元法

二、定积分的分部积分法

$$\text{不定积分}\begin{cases}\text{换元积分法}\\\text{分部积分法}\end{cases}\longrightarrow\text{定积分}\begin{cases}\text{换元积分法}\\\text{分部积分法}\end{cases}$$

由上一章知求原函数的问题已经完全解决，故定积分计算都可以通过牛顿-莱布尼茨公式而得到解决，但不一定简便. 故我们需建立定积分的计算法，以达到简化的目的.

不定积分的第二换元法

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=\psi(t)}{=} \int f[\psi(t)]\psi'(t)\,\mathrm{d}t \,\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$$

$$= F(t) + C \,\Big|_{t=\psi^{-1}(x)} = F(\psi^{-1}(x)) + C.$$

§ 6.3.1 定积分的换元法

定理1(第二类换元法) 设

(1) $f(x) \in C[a, b]$;

(2)函数(变换) $x = \varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上严格单增且有连续导数，其中 $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$，即当 t 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上变化时，$x = \varphi(t)$ 的值在 $[a, b]$ 上变化. 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

证明 设 $F(t)$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的一个原函数，则 $F(\varphi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = F(\varphi^{-1}(b)) - F(\varphi^{-1}(a))$$

$$= F(\beta) - F(\alpha)$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

注: 1)当 $x=\varphi(t)$ 单减时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\beta^\alpha f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

2)必须注意**换元必换限**.

3) 使用第二类换元法的两个重点:

1° 变换 $x=\varphi(t)$ 的选取; **被积函数的结构特点** $x=-t$

2° 积分上下限的确定. **反解方程** $x=\varphi(t)$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

4) 使用第二类换元法的步骤:

1° 根据被积函数的结构特点, 选取变换 $x=\varphi(t)$;

2° 微分 $\mathrm{d}x=\varphi'(t)dt$, 同时求出 α, β;

3° 代公式: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, $\cdots$

特别地, 若所作变换简单, 则直接使用公式:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=\varphi(t)}{=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\ , \cdots$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

5) 使用第二类换元法的作用：

1° 简化计算；

2° 将积分表达式变形，以达到解题的目的.

6)若只需使用一次第一换元法，常常直接求出原函数，使用牛顿－莱布尼茨公式即可. 否则需换限.

其变限公式为:

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f[\varphi(x)]\,\mathrm{d}\varphi(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

证明 设$F(u)$是 $f(u)$的一个原函数，则$F(\varphi(x))$是 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$的一个原函数.

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

例1 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \, \mathrm{d}x$.

解 原式 $= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, \mathrm{d}\cos x$

$$\underline{\underline{t = \cos x}} - \int_1^0 t^5 \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 t^5 \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{6} t^6 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{6}$$

解 原式 $= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, \mathrm{d}\cos x$

$$= -\frac{1}{6} \cos^6 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}$$

例2 计算$\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{1}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}dx$.

解 原式$=\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}\mathrm{d}\ln x$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt{t-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(t-\frac{1}{2})^2}}\mathrm{d}(t-\frac{1}{2})$$

$$=\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-u^2}}\mathrm{d}u$$

$$=\arcsin 2u\Big|_0^{\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{6}$$

例3 计算$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0)$.

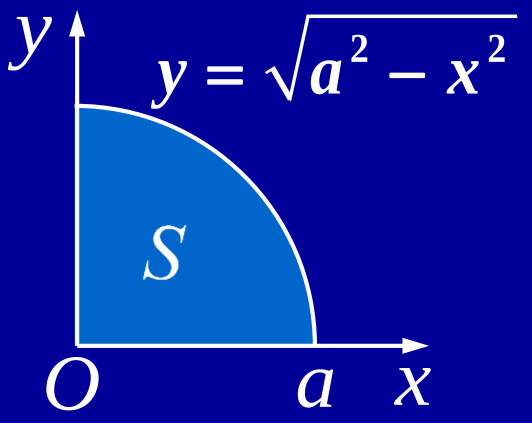
解：令 $x = a\sin t$，则 $dx = a\cos t\,dt$，且

当 $x = 0$ 时，$t = 0$； $x = a$ 时，$t = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\therefore \text{原式} = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$



$P95$四、设 $f(x)=\int_0^x \cos(x-t)^2 dt$，求 $f'(x)$.

该类题型十分重要，即被积函数也含有求导变量 x.

解：令 $x-t=y$，则 $t=x-y$，$dt=-dy$. 当 $t=0$时，$y=x$，当 $t=x$时，$y=0$.

所以 $f(x)=-\int_x^0 \cos y^2 dy=\int_0^x \cos y^2 dy$，故

$$f'(x)=\cos x^2.$$

例3(性质) 设 $f(x)\in C[-a,a]$，

$\boxed{\text{偶倍奇零}}$

(1)若 $f(-x)=f(x)$，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$；

(2)若 $f(-x)=-f(x)$，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

证 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\downarrow x=-t$$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{a} [f(-x)+f(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x, & f(-x)=f(x)\text{时} \\ 0, & f(-x)=-f(x)\text{时} \end{cases}$$

注 对称区间上的积分$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$常利用奇偶性将其化简. 若无奇偶性, 常使用公式

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x}{2}$$

将其化简.

例4(公式) 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$;

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\sin x, \cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x)\,dx$;

(3) $\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$;

(4) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$. 并计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

$$(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx;$$

证 (1)令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$，则 $dx=-dt$，且当 $x=0$时，$t=\dfrac{\pi}{2}$;

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$时，$t=0$. 于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\frac{\pi}{2}-t))dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

$$(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\sin x, \cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x)\,dx;$$

证 令 $x = \dfrac{\pi}{2} - t$，则 $dx = -dt$，且当 $x = 0$ 时，$t = \dfrac{\pi}{2}$；

所以 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\sin x, \cos x)\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} R(\cos t, \sin t)\,dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\cos t, \sin t)\,dt$$

(3) $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx.$

证明 因为$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx$

令 $x = \frac{\pi}{2} + t$，则 $dx = dt$，且当 $x = \frac{\pi}{2}$时，$t = 0$；当 $x = \pi$时，

$t = \frac{\pi}{2}$. 所以

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(\frac{\pi}{2}+t))dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx.$$

证毕.

$$(4)\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

证 (2)令 $x=\pi-t$，则 $dx=-dt$，且当 $x=0$ 时，$t=\pi$；当 $x=\pi$ 时，$t=0$. 于是

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)\,f(\sin(\pi-t))\,dt$$

$$= \int_0^{\pi}(\pi-t)\,f(\sin t)\,d\,t$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt - \int_0^{\pi} t\,f(\sin t)\,dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx - \int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx$$

所以 $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

例5(公式) 若 $f(x)$是连续的周期函数, 周期为T, 则

(1) $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,dx$;

(2) $\int_a^{a+nT} f(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathrm{N})$, 并由此计算

定积分 $\int_0^{n\pi} \sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

证 (1)令 $\Phi(a) = \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$, 则

$$\Phi'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$$

可见$\Phi(a)$与a无关， 因此$\Phi(a) = \Phi(0)$, 即

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) $\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x \quad (n \in \mathrm{N})$,并由此计算

$$\int_0^{n\pi} \sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$$

(1) $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$

$= \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$

$$(2)\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{T+T} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2T}^{2T+T} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{(n-1)T}^{(n-1)T+T} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

$$= n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

因为$\sqrt{1+\sin 2x}$是以π为周期的周期函数，所以

$$\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,dx = n\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,dx$$

$$= n\int_0^{\pi}\sqrt{(\cos x+\sin x)^2}\,dx = n\int_0^{\pi}|\cos x+\sin x|\,dx$$

$$= n\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos x+\sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$= n(\sin x-\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= 2\sqrt{2}n.$$

$$\boxed{(1)\ \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{T} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

§ 6.3.2 定积分的分部积分法

定理 设 $u(x), v(x) \in C^1[a, b]$(连续导数), 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 $\because$ $u'(x)v(x) = [u(x)v(x)]' - u(x)v'(x)$, 两端在 $[a, b]$ 上积分, 有

$$\therefore \quad \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

§ 6.3.2 定积分的分部积分法

定理 设 $u(x), v(x) \in C^1[a, b]$(连续导数), 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x)\\ &= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}\,u(x)\\ &= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注: 当被积函数含有积分或导数时, 常用分部积分公式.

例11 设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$，求 $\int_0^1 x\,f(x)\,dx$.

解 $\int_0^1 x\,f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,d(\frac{1}{2}x^2)$

$$=\frac{1}{2}[x^2 f(x)]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,d\,f(x)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\,dx$$

而 $f'(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x=\frac{2\sin x^2}{x}$，所以

$$原式=-\int_0^1 x\sin x^2\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\sin x^2\,d(x^2)$$

$$=[\frac{1}{2}\cos x^2]_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$$

例12 设 $f''(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 x f''(2x)\,dx$.

解 $\int_0^1 x f''(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,d\,f'(2x)$ $= f''(2x)\cdot 2\,dx$

$$=\frac{1}{2}[x\,f'(2x)]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}f'(2) - \frac{1}{4}[f(2x)]_0^1$$

$$=2$$

解 $\int_0^1 (2x) f''(2x)\,d(2x) =$

例14(华里士公式) 证明 $\mathrm{I}_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

证: 令 $u=\sin^{n-1}x$, $v'=\sin x$, 则

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}(-\cos x)$$

$$=\underbrace{\left[-\cos x\cdot\sin^{n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\parallel \atop 0}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$\boxed{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx}$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1-\sin^2 x) \, dx$$

$$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

由此得递推公式 $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

于是 $$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1$$

而 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = 1$ 证毕.

例 计算$\int_0^{\pi}\sin^4 2x dx$.

解 令$2x=t, dx=\frac{1}{2}dt$. 当$x=0$时, $t=0$, 当$x=\pi$, $t=2\pi$.

故原式$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^4 t\,dt=\int_0^{\pi}\sin^4 t\,dt=2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\,dt\ =2I_4$

$$=2\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}$$

$P95$三、设 $f(x)$连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$($A$为常数)，设

$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，求$\varphi'(0)$.

$P92$ 第九题 2.$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$.

思考题 设 $f(x)$具有连续导数，且 $f(0)=0$, $f'(0)=6$, 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3} f(t)dt}{[\int_0^x f(t)dt]^3}.$$

解 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=6$知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{6x}=1$

从而 $f(x)\sim 6x(x\to 0)$，则原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^3} 6tdt}{[\int_0^x 6tdt]^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^6}{[3x^2]^3}=\dfrac{1}{9}.$

当$x \to 0$时，变限积分中常用的一些等价无穷小量：

$$\int_0^x \sin t dt \sim \int_0^x \tan t dt \sim \int_0^x \arctan t dt \sim \int_0^x \arcsin t dt \sim \int_0^x \ln(1+t) dt \sim \frac{x^2}{2}$$

且应注意如下推广：$\int_0^{g(x)} \sin t dt \sim \frac{g(x)^2}{2}$，其中$x \to 0$, $g(x) \to 0$.

$P95$

三、设$f(x)$连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$($A$为常数)，设

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt,$$

求$\varphi'(0)$.

解：由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，可知$f(0)=0,$且$\varphi(0)=\int_0^1 f(0)dt=0.$

令$xt=y,$则$t=\dfrac{y}{x},dt=\dfrac{1}{x}dy.$ 当$t=0$时$,y=0.$当$t=1$时$,y=x.$

所以 $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt=\int_0^x f(y)\cdot\frac{1}{x}dy=\frac{\int_0^x f(y)dy}{x}$.

从而 $\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(y)dy}{x^2}$ $\boxed{\frac{0}{0}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$