

# Proces Markowa / Łańcuchy Markowa

Wykorzystywana literatura:

- (Prawdopodobnie) Wykłady (3,4): <https://kacpertopol.github.io/>

- Załączone zdjęcia (data dostępu 28.11.2024):

<http://statystyka.rezolwenta.eu.org/Materialy/Markowa.pdf>

<https://ww2.ii.uj.edu.pl/~spurek/publications/zbior.pdf>

Łańcuchy Markowa to procesy dyskretne w czasie i o dyskretnym zbiorze stanów, "bez pamięci".

Zwykle będziemy zakładać, że zbiór stanów to podzbiór zbioru liczb całkowitych  $\mathbb{Z}$  lub zbioru  $\{0, 1, 2, \dots\}$  jako uproszczenie zapisu  $\{S_0, S_1, S_2, \dots\}$ .

**Łańcuchem Markowa** nazywamy proces będący ciągiem zmiennych losowych

$$X_0, X_1, \dots$$

Określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej, przyjmujących wartości całkowite i spełniające warunek

$$\begin{aligned} P(X_n = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) &= \\ &= P(X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}) \quad \bigwedge_n \bigwedge_{i_0, \dots, i_{n-1}, j \in \{0, 1, 2, \dots\}} \end{aligned}$$

Zatem dla łańcucha Markowa rozkład prawdopodobieństwa warunkowego położenia w  $n$ -tym kroku zależy tylko od prawdopodobieństwa warunkowego położenia w kroku poprzednim a nie od wcześniejszych punktów trajektorii (historia).

Niech

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_{n-1} = i)$$

oznacza prawdopodobieństwo warunkowe przejścia w  $n$ -tym kroku ze stanu  $i$  do stanu  $j$ .

Jeśli  $p_{ij}^{(n)}$  nie zależą od  $n$  to łańcuch nazywamy **jednorodnym (jednorodnym w czasie)** i stosujemy zapis  $p_{ij}$ .

Zakładając, że numery stanów są całkowite, nieujemne można prawdopodobieństwa przejść zapisać w macierzy

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \dots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

W pierwszym wierszu mamy kolejno prawdopodobieństwo pozostania w stanie 0 w  $n$ -tym kroku i prawdopodobieństwa przejścia w  $n$ -tym kroku ze stanu o numerze 0 do stanów o numerach 1, 2, itd. Analogicznie określone są pozostałe wiersze.

Dla łańcuchów jednorodnych powyższą macierz oznaczamy  $P$  i ma ona postać

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Własności macierzy prawdopodobieństw przejść:

- a)  $p_{ij}^{(n)} \geq 0$       b) suma każdego wiersza jest równa 1.

Zauważmy też, że w macierzy tej nie może istnieć kolumna złożona z samych zer.

Każda macierz spełniająca warunki a), b) nazywamy **macierzą stochastyczną**.

Będziemy dalej przyjmować najczęściej, że rozpatrywane łańcuchy Markowa mają skończoną liczbę stanów.

$p_i(n)$  - prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie  $i$  po  $n$  krokach (rozkład zmiennej losowej  $X_n$ ). Prawdopodobieństwa te stanowią składowe wektora  $p(n)$ , jest to rozkład łańcucha Markowa po  $n$  krokach.

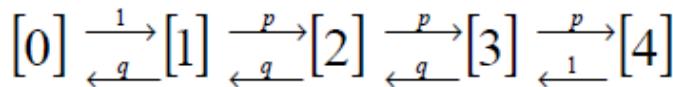
$p_i(0)$  - prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie  $i$  w chwili początkowej (rozkład zmiennej losowej  $X_0$  - rozkład początkowy). Prawdopodobieństwa te stanowią składowe wektora  $p(0)$ .

$p_{ij}$  - prawdopodobieństwo przejścia od stanu  $i$  do stanu  $j$  w jednym (dowolnym) kroku,

$P = [p_{ij}]$ - **macierz prawdopodobieństw przejść (w jednym kroku), jest to macierz stochastyczna.**

**Przykład.**

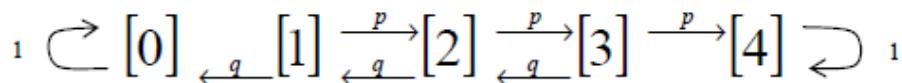
Błądzenie przypadkowe z odbiciem. Np. gdy stany 0 i 4 są odbijające



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Przykład.**

Błądzenie przypadkowe z pochłanianiem. Np. gdy stany 0 i 4 są pochłaniające

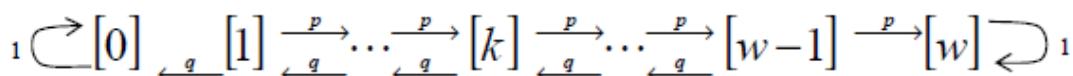


$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Problem ruinny gracza** jest szczególnym przypadkiem błądzenia przypadkowego z pochłanianiem. Gracz dysponuje początkowo kwotą  $k$  zł. W kolejnych etapach z prawdopodobieństwem  $p$  wygrywa 1 zł albo z prawdopodobieństwem  $q = 1 - p$  przegrywa 1 zł. Gra kończy się gdy gracz osiągnie kwotę  $w > k$  zł lub przegra wszystko.

Zatem mamy dwa stany pochłaniające 0 i  $w$ .

Graf i macierz rozpatrywanego łańcucha są następujące.



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

rozkład początkowy określa  $X_0 = k$

**Przykład.**

Rozpatrzmy łańcuch Markowa o macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

i rozkładzie początkowym  $p(0) = (1, 0, 0)$ .

Po pierwszym kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(1) = p(0)P = [1,0,0] \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} = [0,5;0;0,5]$$

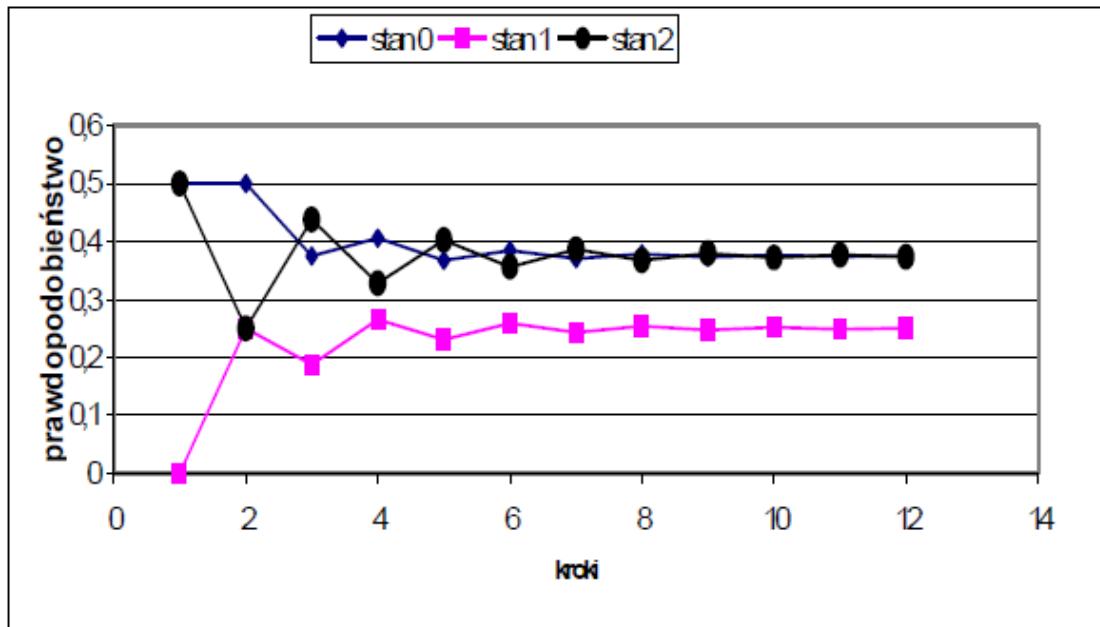
Po drugim kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(2) = p(0)P^2 = [1,0,0] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,375 & 0,438 & 0,188 \\ 0,25 & 0,125 & 0,625 \end{bmatrix} = [0,5;0,25;0,25]$$

Po trzecim kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(3) = p(0)P^3 = [1,0,0] \begin{bmatrix} 0,375 & 0,188 & 0,438 \\ 0,281 & 0,203 & 0,516 \\ 0,438 & 0,344 & 0,219 \end{bmatrix} = [0,375; 0,188; 0,438]$$

Obliczając kolejne potęgi macierzy  $P$  możemy wyliczone wartości  $p(n)$  zestawić dla  $n = 1, \dots, 12$  w następującej tabeli i przedstawić na wykresie.

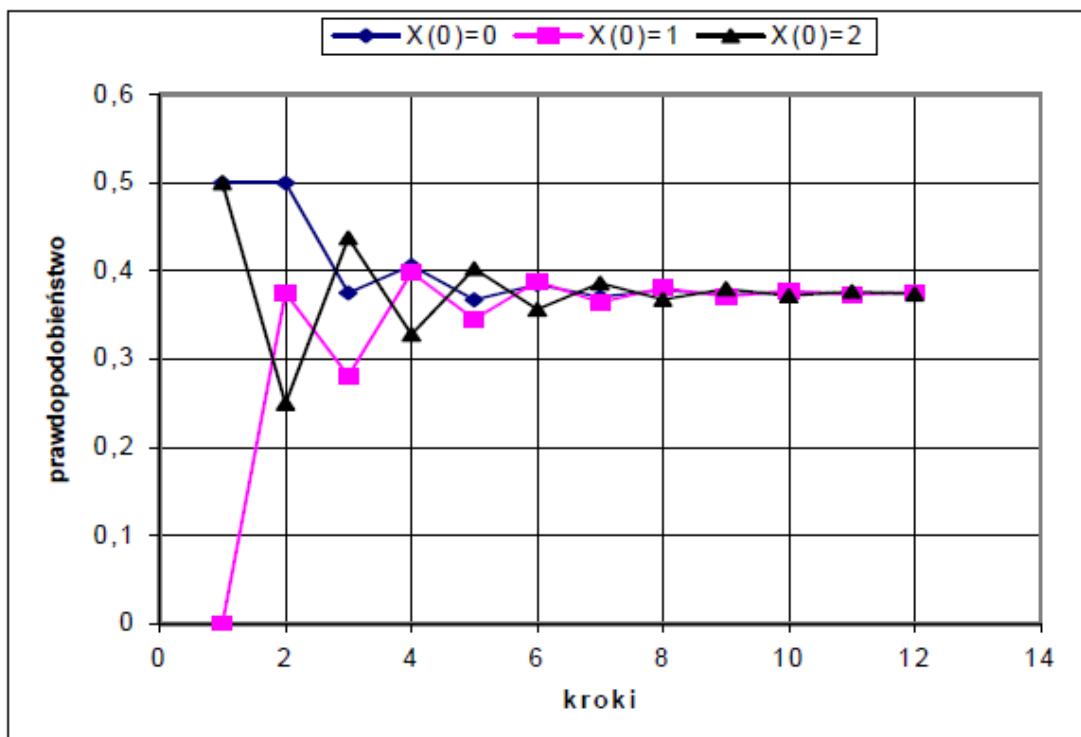


Zauważmy, że rozpatrywane prawdopodobieństwa stabilizują się na określonym poziomie i dążą do pewnych granic, co związane jest z regularnością rozpatrywanej macierzy stochastycznej.

Zobaczmy teraz jak zmienia się prawdopodobieństwo znalezienia się w ustalonym stanie w poszczególnych krokach, gdy zmienia się rozkład początkowy.

Rozpatrzmy stan 0 i rozkłady początkowe  $p(0) = (1, 0, 0)$ ,  $p(0) = (0, 1, 0)$ ,  $p(0) = (0, 0, 1)$ .

Obliczone prawdopodobieństwa (w podobny sposób jak wyżej) zestawiono w tabeli i przedstawiono na wykresie dla  $n = 1, \dots, 12$ .



Zauważmy, że rozpatrywane prawdopodobieństwo dla dużych  $n$  nie zależy od rozkładu początkowego.

Granicę  $\Pi = p(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(n)$  (o ile istnieje) nazywamy **rozkładem granicznym** łańcuchu Markowa.

$$\Pi = (\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \dots).$$

Łańcuch Markowa dla którego istnieje rozkład graniczny niezależny od rozkładu początkowego  $p(0)$  nazywamy **łańcuchem ergodycznym**.

**Sposoby wyznaczania rozkładu granicznego:**

**Sposób I.**

Rozkład graniczny  $\Pi$  jest jedynym niezerowym rozwiązaniem układu

$$(P^T - I) \Pi^T = 0,$$

spełniającym warunek  $\sum_{i=1} \Pi_i = 1$ ,

**Uwaga.**

Z powyższej równości wynika, że  $\Pi P = \Pi$  co oznacza, że wektor  $\Pi$  jest wektorem własnym macierzy  $P$  odpowiadającym wartości własnej równej 1.

## Klasyfikacja stanówłańcucha Markowa.

Niekiedy będziemy utożsamiać stan  $s_k$  z liczbą  $k$ .

Stan  $s_k$  jest osiągalny ze stanu  $s_j$  jeśli  $p_{jk}(n) > 0$  dla pewnego  $n$ .

Stany  $s_k$  i  $s_j$  nazywamy wzajemnie komunikującymi się jeśli stan  $s_k$  jest osiągalny ze stanu  $s_j$ , i odwrotnie.

Relacja wzajemnego komunikowania się określona na zbiorze stanówłańcucha Markowa jest:

- symetryczna,
- przechodnia (z równości Chapman-Kolmogorowa).

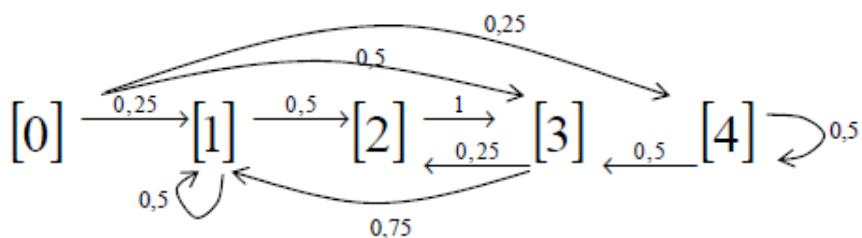
Zbiór stanów  $C$  nazywamy zamkniętym, jeżeli żaden stan spoza  $C$  nie da się osiągnąć wychodząc z dowolnego stanu w  $C$ .

Stan  $s_k$  jest stanem nieistotnym (chwilowym) gdy istnieje stan  $s_j$  osiągalny ze stanu  $s_k$  a stan  $s_k$  nie jest osiągalny ze stanu  $s_j$ ,

Stan, który nie jest nieistotny nazywa się istotny (powracający).

**Przykład.**

Rozpatrzmyłańcuch Markowa



Jego macierz  $P$  ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Stany 0 i 4 są nieistotne.

Stany 1, 2 i 3 są istotne.

Zbiór stanów  $\{1, 2, 3\}$  jest zamknięty.

Pojedynczy stan zamknięty (musi być  $p_{kk} = 1$ ) nazywamy stanem pochlaniającym.

Stan  $s_k$  jest odbijający gdy  $p_{kk} = 0$ . Stan odbijający może być zarówno chwilowy jak i powracający.

Lańcuch Markowa jest nieprzypadkowy, gdy wszystkie jego stany wzajemnie komunikują się, w przeciwnym przypadku lańcuch jest przypadkowy.

**Lańcuchy okresowe.**

Okrętem stanu powracającego  $j$  nazywamy liczbę:

$$\omega(j) = \text{NWD}(n: p_{jj}(n) > 0)$$

jest to największy wspólny dzielnik takich liczb  $n$ , że powrót do stanu  $j$  może nastąpić po  $n$  krokach.

Stan  $j$  nazywamy okresowym gdy ma okres większy od 1 i nieokresowym gdy ma okres 1.

**Twierdzenie.**

W skończonym nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa wszystkie stany mają ten sam okres.

Zatem nieprzywiedlny łańcuch Markowa nazywamy okresowym, gdy jego stany mają okres większy od 1, w przeciwnym przypadku łańcuch nazywamy nieokresowym.

Stan, który jest powracający, niezerowy i nieokresowy nazywa się **ergodyczny**.

**Łańcuch ergodyczny.**

Łańcuch jest **ergodyczny** jeśli istnieje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_j \quad \sum_j \pi_j = 1 \quad \Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \dots)$$

Rozkład  $\Pi$  nazywamy **rozkładem granicznym**.

**Twierdzenie** Jeśli w łańcuchu Markowa o skończeniu wielu stanach, wszystkie stany istotne są nieokresowe i tworzą jedną klasę, to istnieją prawdopodobieństwa ergodyczne, przy czym dla stanów istotnych są one dodatnie, zaś dla stanów chwilowych są one równe 0.

**Łańcuch stacjonarny .**

Jednorodny łańcuch Markowa jest **stacjonarny** gdy istnieje rozkład  $\Pi$  jego stanów, zwany **rozkładem stacjonarnym**, że

$$\Pi P = \Pi$$

(tzn.  $\Pi$  jest wektorem własnym macierzy  $P$  dla wartości własnej 1).

Zatem dla dowolnego  $n$ ,  $\Pi P^n = \Pi$ , oznacza to, że jeśli rozkład początkowy jest równy  $\Pi$ , to rozkład łańcucha po dowolnej liczbie kroków jest taki sam i równy  $\Pi$ .

Jeśli macierz  $P$  łańcucha jest nierozkładalna to rozkład stacjonarny jest dokładnie jeden. Jeśli macierz  $P$  łańcucha jest rozkładalna to rozkładów stacjonarnych jest więcej niż jeden.

W łańcuchu ergodycznym rozkład stacjonarny (graniczny) nie zależy od rozkładu początkowego.

**Uwaga.**

$$\text{ergodyczny} \Rightarrow \text{stacjonarny}$$

Odwrotna implikacja nie musi zachodzić.

**Zadanie 9.1.** W pewnym mieście każdy dzień jest słoneczny albo deszczowy. Po dniu słonecznym dzień słoneczny następuje z prawdopodobieństwem 0.7, a po dniu deszczowym z prawdopodobieństwem 0.4.

Narysuj łańcuch markowa oraz wyznacz macierz przejścia dla niego.

**Zadanie 9.2.** W pewnym mieście każdy dzień jest słoneczny albo deszczowy. Po dniu słonecznym dzień słoneczny następuje z prawdopodobieństwem 0.7, a po dniu deszczowym z prawdopodobieństwem 0.4.

W poniedziałek padało. Stwórz prognozę na wtorek, środę i czwartek.

Oznaczenia: stan 1 = dzień słoneczny, 2 = deszczowy.

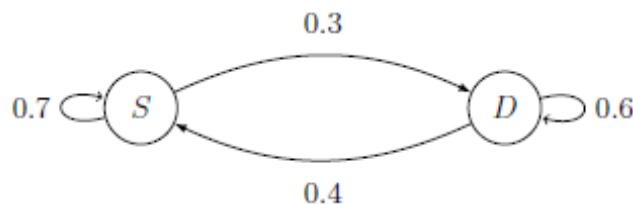
**Zadanie 9.3.** W pewnym mieście każdy dzień jest słoneczny albo deszczowy. Po dniu słonecznym dzień słoneczny następuje z prawdopodobieństwem 0.7, a po dniu deszczowym z prawdopodobieństwem 0.4.

Meteorolodzy przewidują 80% szans na deszcz w poniedziałek. Stwórz prognozę na wtorek, środę i czwartek.

Oznaczenia: stan 1 = dzień słoneczny, 2 = deszczowy.

**Zadanie 9.4.** Znajdź rozkład stacjonarny dla łańcucha markowa z powyższych zadań.

**Rozwiązanie 9.1.** Zaczniemy od narysuj łańcucha markowa.



Możemy teraz napisać macierz przejścia

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że wiersze sumują się do 1.

**Rozwiązanie 9.2.** Zauważmy, że mamy dokładnie taki sam łańcuch Markowa jak w poprzednim zadaniu. Wyznaczmy pogodę na kolejne dni

1. Wtorek

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

2. Środa

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

3. Czwartek

$$\begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.556 & 0.444 \end{bmatrix}$$

**Rozwiązanie 9.3.** Zauważmy, że mamy dokładnie taki sam łańcuch Markowa jak w poprzednim zadaniu. Wyznaczmy pogodę na kolejne dni

1. Wtorek

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.54 \end{bmatrix}$$

2. Środa

$$\begin{bmatrix} 0.46 & 0.54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.538 & 0.462 \end{bmatrix}$$

## 3. Czwartek

$$\begin{bmatrix} 0.538 & 0.462 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5614 & 0.4386 \end{bmatrix}$$

**Rozwiązanie 9.4.** Zauważmy, że mamy dokładnie taki sam łańcuch Markowa jak w poprzednim zadaniu. Przypomnij, że macierz przejścia jest postaci

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Aby wyznaczyć rozkład stacjonarny musimy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Obliczymy

$$\pi P = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 & 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujeśmy układ równań

$$\begin{cases} 0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 = \pi_1 \\ 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1 = 1 - \pi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0.3\pi_1 + 0.4\pi_2 = 0 \\ 0.3\pi_1 - 0.4\pi_2 = 0 \\ \pi_1 = 1 - \pi_2 \end{cases}$$

$$-0.3 + 0.3\pi_2 + 0.4\pi_2 = 0$$

$$0.7\pi_2 = 0.3$$

$$\pi_2 = \frac{0.3}{0.7} = \frac{3}{7}$$

$$\pi_1 = \frac{4}{7}.$$

Rozkład stacjonarny to:

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}.$$

```
In[1]:= P = {{0.7, 0.3}, {0.4, 0.6}};
MatrixForm[P]
postać macierzy

Out[1]//MatrixForm=
( 0.7 0.3 )
( 0.4 0.6 )

In[2]:= P.P // MatrixForm
postać macierzy

Out[2]//MatrixForm=
( 0.61 0.39 )
( 0.52 0.48 )

In[3]:= P.P.P // MatrixForm
postać macierzy

Out[3]//MatrixForm=
( 0.583 0.417 )
( 0.556 0.444 )

In[4]:= P.P.P.P // MatrixForm
postać macierzy

Out[4]//MatrixForm=
( 0.5749 0.4251 )
( 0.5668 0.4332 )

In[5]:= P.P.P.P.P.P.P.P // MatrixForm
postać macierzy

Out[5]//MatrixForm=
( 0.571431 0.428569 )
( 0.571425 0.428575 )

In[6]:= N[{4/7, 3/7}]
przybliżenie numeryczne

Out[6]= {0.571429, 0.428571}
```

Oraz:

**Sposoby wyznaczania rozkładu granicznego:**

**Sposób I.**

Rozkład graniczny  $\Pi$  jest jedynym niezerowym rozwiązaniem układu

$$(P^T - I) \Pi^T = 0,$$

spełniającym warunek  $\sum_{i=1} \Pi_i = 1$ ,

**Uwaga.**

Z powyższej równości wynika, że  $\Pi P = \Pi$  co oznacza, że wektor  $\Pi$  jest wektorem własnym macierzy  $P$  odpowiadającym wartości własnej równej 1.

```
In[1]:= PT = Transpose[P];
          ↳ transpozycja
MatrixForm[PT]
          ↳ postać macierzy
Out[1]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

```

```
In[2]:= PT - {{1, 0}, {0, 1}} // MatrixForm
          ↳ postać macierzy
```

```
Out[2]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.3 & 0.4 \\ 0.3 & -0.4 \end{pmatrix}$$

```

$$\begin{pmatrix} -0.3 & 0.4 \\ 0.3 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-0.3\pi_1 + 0.4\pi_2 = 0$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

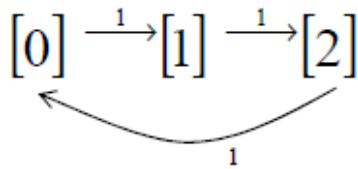
$$\pi_1 = \frac{4}{7}$$

$$\pi_2 = \frac{3}{7}$$

Uwaga!

**Przykład.**

Rozpatrzmy łańcuch Markowa



Jego macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany mają okres 3.

Zauważmy, że wielomian charakterystyczny tej macierzy ma postać

$$W(\lambda) = \lambda^3 - 1$$

i jej wartości własne są równe:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ,  $\lambda_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ .

Ponieważ wszystkie wartości własne mają moduł 1 i  $\lambda_1 = 1$  jest jednokrotną wartością własną to rozpatrywana macierz jest nierozkładalna i cykliczna.

Łańcuch ten jest stacjonarny, jego rozkładem stacjonarnym jest  $(1/3, 1/3, 1/3)$ .

Rozkład ten można wyznaczyć I lub II sposobem obliczania rozkładów granicznych.

Kolejne potęgi macierzy P są równe

$$P^2 = P^{3n+2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^3 = P^{3n+3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^4 = P = P^{3n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

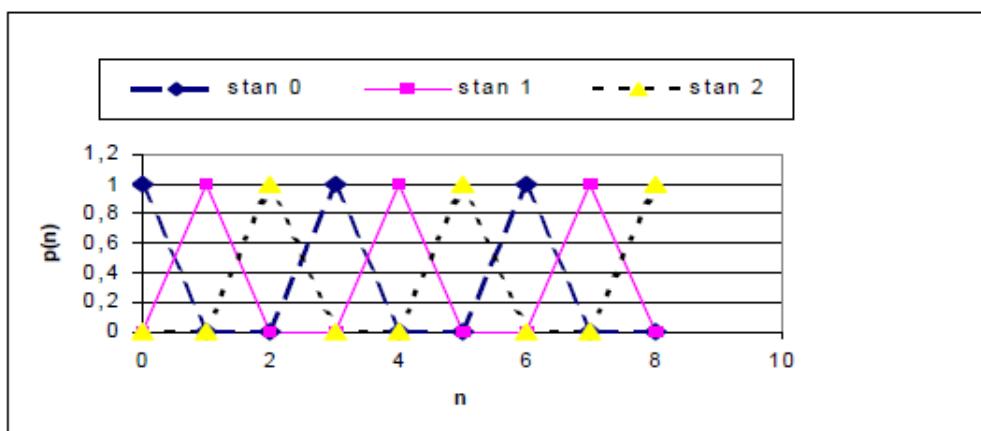
dla  $n = 0, 1, 2, \dots$

Zauważmy, że żadna kolumna  $P^n$  nie składa się wyłącznie z elementów dodatnich.

Rozkład graniczny nie istnieje.

Weźmy np. rozkład początkowy  $p(0) = (1, 0, 0)$ .

Obliczone prawdopodobieństwa  $p(n)$  zestawiono w tabeli i przedstawiono na wykresie dla



$$n = 0, \dots, 8.$$

$p(n) \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Stan 0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
Stan 1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
Stan 2	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Jak widać  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n)$  nie istnieje dla żadnej współrzędnej (dla żadnego stanu).

**Wniosek.**

Istnienie rozkładu stacjonarnego nie implikuje, że łańcuch jest ergodyczny.