

Proces Markowa / Łańcuchy Markowa

Wykorzystywana literatura:

- (Prawdopodobnie) Wykłady (3,4): <https://kacpertopol.github.io/>

- Załączone zdjęcia (data dostępu 28.11.2024):

<http://statystyka.rezolwenta.eu.org/Materialy/Markowa.pdf>

<https://ww2.ii.uj.edu.pl/~spurek/publications/zbior.pdf>

Łańcuchy Markowa to procesy dyskretne w czasie i o dyskretnym zbiorze stanów, "bez pamięci".

Zwykle będziemy zakładać, że zbiór stanów to podzbiór zbioru liczb całkowitych Z lub zbioru $\{0, 1, 2, \dots\}$ jako uproszczenie zapisu $\{S_0, S_1, S_2, \dots\}$.

Łańcuchem Markowa nazywamy proces będący ciągiem zmiennych losowych

$$X_0, X_1, \dots$$

Określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej, przyjmujących wartości całkowite i spełniające warunek

$$\begin{aligned} P(X_n = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = \\ = P(X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}) \bigwedge_n \bigwedge_{i_0, \dots, i_{n-1}, j \in \{0, 1, 2, \dots\}} \end{aligned}$$

Zatem dla łańcucha Markowa rozkład prawdopodobieństwa warunkowego położenia w n -tym kroku zależy tylko od prawdopodobieństwa warunkowego położenia w kroku poprzednim a nie od wcześniejszych punktów trajektorii (historia).

Niech

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_{n-1} = i)$$

oznacza prawdopodobieństwo warunkowe przejścia w n -tym kroku ze stanu i do stanu j .

Jeśli $p_{ij}^{(n)}$ nie zależą od n to łańcuch nazywamy **jednorodnym** (jednorodnym w czasie)

i stosujemy zapis p_{ij} .

Zakładając, że numery stanów są całkowite, nieujemne można prawdopodobieństwa przejść zapisać w macierzy

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \dots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

W pierwszym wierszu mamy kolejno prawdopodobieństwo pozostania w stanie 0 w n -tym kroku i prawdopodobieństwa przejścia w n -tym kroku ze stanu o numerze 0 do stanów o numerach 1, 2, itd. Analogicznie określone są pozostałe wiersze.

Dla łańcuchów jednorodnych powyższą macierz oznaczamy P i ma ona postać

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Własności macierzy prawdopodobieństw przejść:

- a) $p_{ij}^{(n)} \geq 0$ b) suma każdego wiersza jest równa 1.

Zauważmy też, że w macierzy tej nie może istnieć kolumna złożona z samych zer.

Każdą macierz spełniającą warunki a), b) nazywamy **macierzą stochastyczną**.

Będziemy dalej przyjmować najczęściej, że rozpatrywane łańcuchy Markowa mają skończoną liczbę stanów.

$p_i(n)$ - prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie i po n krokach (rozkład zmiennej losowej X_n). Prawdopodobieństwa te stanowią składowe wektora $p(n)$, jest to rozkład łańcucha Markowa po n krokach.

$p_i(0)$ - prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie i w chwili początkowej (rozkład zmiennej losowej X_0 - rozkład początkowy). Prawdopodobieństwa te stanowią składowe wektora $p(0)$.

p_{ij} - prawdopodobieństwo przejścia od stanu i do stanu j w jednym (dowolnym) kroku,

$P = [p_{ij}]$ - macierz prawdopodobieństw przejść (w jednym kroku), jest to macierz stochastyczna.

Przykład.

Błądzenie przypadkowe z odbiciem. Np. gdy stany 0 i 4 są odbijające

$$[0] \xrightarrow{1} [1] \xrightarrow{p} [2] \xrightarrow{p} [3] \xrightarrow{p} [4]$$

$$\xleftarrow{q} \quad \xleftarrow{q} \quad \xleftarrow{q} \quad \xleftarrow{1}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład.

Błądzenie przypadkowe z pochłanianiem. Np. gdy stany 0 i 4 są pochłaniające

$$1 \hookrightarrow [0] \xleftarrow{q} [1] \xrightleftharpoons[q]{p} [2] \xrightleftharpoons[q]{p} [3] \xrightarrow{p} [4] \hookleftarrow 1$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problem ruiny gracza jest szczególnym przypadkiem błądzenia przypadkowego z pochłanianiem. Gracz dysponuje początkowo kwotą k zł. W kolejnych etapach z prawdopodobieństwem p wygrywa 1zł albo z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$ przegrywa 1zł. Gra kończy się gdy gracz osiągnie kwotę $w > k$ zł lub przegra wszystko.

Zatem mamy dwa stany pochłaniające 0 i w .

Graf i macierz rozpatrywanego łańcucha są następujące.

$$1 \hookrightarrow [0] \xleftarrow{q} [1] \xrightleftharpoons[q]{p} \dots \xrightleftharpoons[q]{p} [k] \xrightleftharpoons[q]{p} \dots \xrightleftharpoons[q]{p} [w-1] \xrightarrow{p} [w] \hookleftarrow 1$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

rozkład początkowy określa $X_0 = k$

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa o macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

i rozkładzie początkowym $p(0) = (1, 0, 0)$.

Po pierwszym kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(1) = p(0)P = [1,0,0] \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} = [0,5;0;0,5]$$

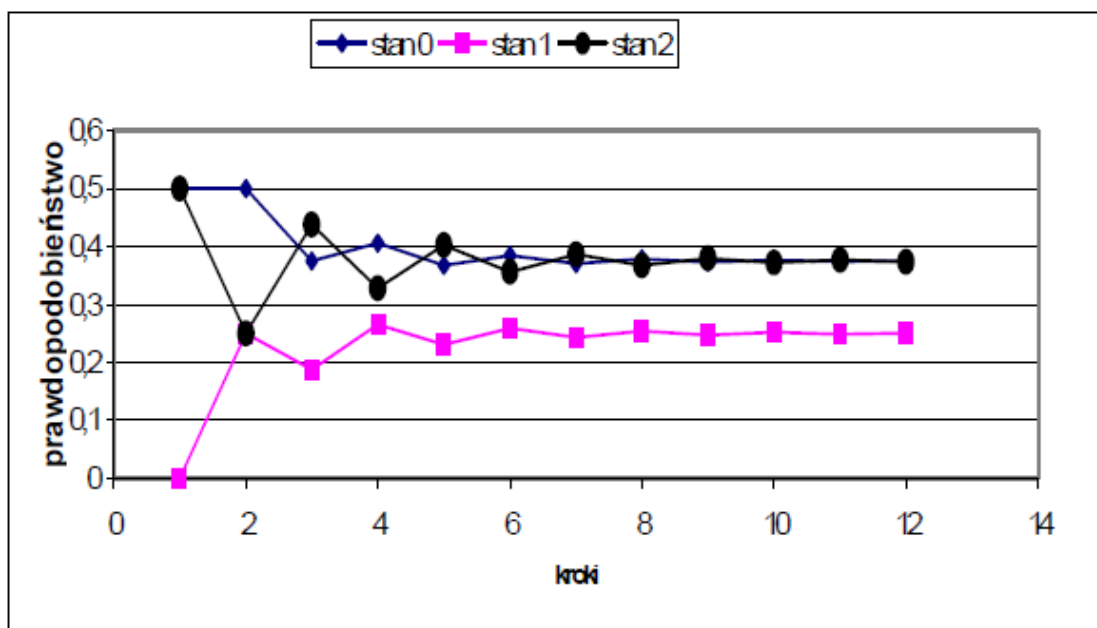
Po drugim kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(2) = p(0)P^2 = [1,0,0] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,375 & 0,438 & 0,188 \\ 0,25 & 0,125 & 0,625 \end{bmatrix} = [0,5;0,25;0,25]$$

Po trzecim kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(3) = p(0)P^3 = [1,0,0] \begin{bmatrix} 0,375 & 0,188 & 0,438 \\ 0,281 & 0,203 & 0,516 \\ 0,438 & 0,344 & 0,219 \end{bmatrix} = [0,375; 0,188; 0,438]$$

Obliczając kolejne potęgi macierzy P możemy wyliczone wartości $p(n)$ zestawzić dla $n = 1, \dots, 12$ w następującej tabeli i przedstawić na wykresie.

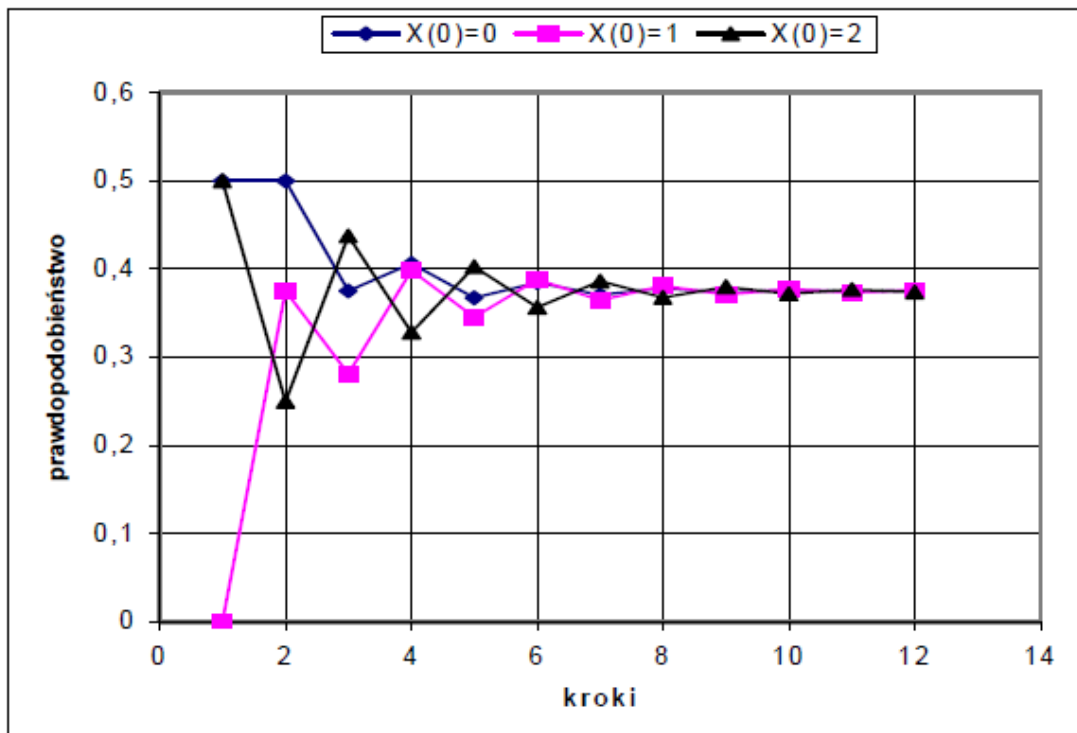


Zauważmy, że rozpatrywane prawdopodobieństwa stabilizują się na określonym poziomie i dążą do pewnych granic, co związane jest z regularności rozpatrywanej macierzy stochastycznej.

Zobaczmy teraz jak zmienia się prawdopodobieństwo znalezienia się w ustalonym stanie w poszczególnych krokach, gdy zmienia się rozkład początkowy.

Rozpatrzmy stan 0 i rozkłady początkowe $p(0) = (1, 0, 0)$, $p(0) = (0, 1, 0)$, $p(0) = (0, 0, 1)$.

Obliczone prawdopodobieństwa (w podobny sposób jak wyżej) zestawiono w tabeli i przedstawiono na wykresie dla $n = 1, \dots, 12$.



Zauważmy, że rozpatrywane prawdopodobieństwo dla dużych n nie zależy od rozkładu początkowego.

Granicę $\Pi = p(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(n)$ (o ile istnieje) nazywamy **rozkładem granicznym** łańcuch Markowa.

$$\Pi = (\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \dots).$$

Łańcuch Markowa dla którego istnieje rozkład graniczny niezależny od rozkładu początkowego $p(0)$ nazywamy **łańcuchem ergodycznym**.

Sposoby wyznaczania rozkładu granicznego:

Sposób I.

Rozkład graniczny Π jest jedynym niezerowym rozwiązaniem układu

$$(P^T - I) \Pi^T = 0,$$

$$\text{spełniającym warunek } \sum_{i=1} \Pi_i = 1,$$

Uwaga.

Z powyższej równości wynika, że $\Pi P = \Pi$ co oznacza, że wektor Π jest wektorem własnym macierzy P odpowiadającym wartości własnej równej 1.

Klasyfikacja stanów łańcucha Markowa.

Niekiedy będziemy utożsamiać stan s_k z liczbą k .

Stan s_k jest osiągalny ze stanu s_j jeśli $p_{jk}(n) > 0$ dla pewnego n ,

Stany s_k i s_j nazywamy **wzajemnie komunikującymi się** jeśli stan s_k jest osiągalny ze stanu s_j , i odwrotnie.

Relacja wzajemnego komunikowania się określona na zbiorze stanów łańcucha Markowa jest:

- symetryczna,
- przechodnia (z równości Chapmana-Kołmogorowa).

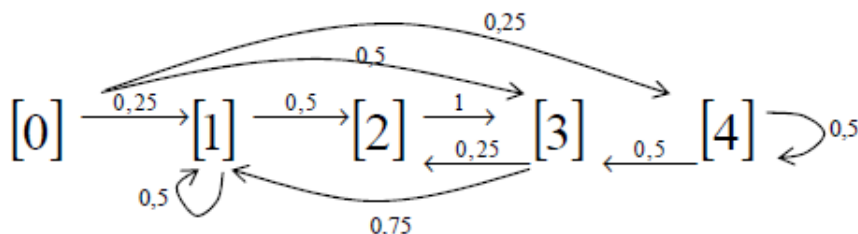
Zbiór stanów C nazywamy **zamkniętym**, jeżeli żaden stan spoza C nie da się osiągnąć wychodząc z dowolnego stanu w C .

Stan s_k jest **stanem nieistotnym (chwilowym)** gdy istnieje stan s_j osiągalny ze stanu s_k a stan s_k nie jest osiągalny ze stanu s_j ,

Stan, który nie jest nieistotny nazywa się **istotny (powracający)**.

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa



Jego macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Stany 0 i 4 są nieistotne.

Stany 1, 2 i 3 są istotne.

Zbiór stanów $\{1, 2, 3\}$ jest zamknięty.

Pojedynczy stan zamknięty (musi być $p_{kk} = 1$) nazywamy stanem **pochłaniającym**.

Stan s_k jest **odbijający** gdy $p_{kk} = 0$. Stan odbijający może być zarówno chwilowy jak i powracający.

Łańcuch Markowa jest **nieprzywiedlny**, gdy wszystkie jego stany wzajemnie komunikują się, w przeciwnym przypadku łańcuch jest **przywiedlny**.

Łańcuchy okresowe.

Okresem stanu powracającego j nazywamy liczbę:

$$o(j) = \text{NWD}(n: p_{jj}(n) > 0)$$

jest to największy wspólny dzielnik takich liczb n , że powrót do stanu j może nastąpić po n krokach.

Stan j nazywamy **okresowym** gdy ma okres większy od 1 i **nieokresowym** gdy ma okres 1.

Twierdzenie.

W skończonym nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa wszystkie stany mają ten sam okres.

Zatem nieprzywiedlny łańcuch Markowa nazywamy okresowym, gdy jego stany mają okres większy od 1, w przeciwnym przypadku łańcuch nazywamy nieokresowym.

Stan, który jest powracający, niezerowy i nieokresowy nazywa się **ergodyczny**.

Łańcuch ergodyczny.

Łańcuch jest **ergodyczny** jeśli istnieje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \sum_j \pi_j = 1 \quad \Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \dots)$$

Rozkład Π nazywamy **rozkładem granicznym**.

Twierdzenie Jeśli w łańcuchu Markowa o skończenie wielu stanach, wszystkie stany istotne są nieokresowe i tworzą jedną klasę, to istnieją prawdopodobieństwa ergodyczne, przy czym dla stanów istotnych są one dodatnie, zaś dla stanów chwilowych są one równe 0.

Łańcuch stacjonarny .

Jednorodny łańcuch Markowa jest **stacjonarny** gdy istnieje rozkład Π jego stanów, zwany **rozkładem stacjonarnym**, że

$$\Pi P = \Pi$$

(tzn. Π jest wektorem własnym macierzy P dla wartości własnej 1).

Zatem dla dowolnego n , $\Pi P^n = \Pi$, oznacza to, że jeśli rozkład początkowy jest równy Π , to rozkład łańcucha po dowolnej liczbie kroków jest taki sam i równy Π .

Jeśli macierz P łańcucha jest nierozkładalna to rozkład stacjonarny jest dokładnie jeden. Jeśli macierz P łańcucha jest rozkładalna to rozkładów stacjonarnych jest więcej niż jeden.

W łańcuchu ergodycznym rozkład stacjonarny (graniczny) nie zależy od rozkładu początkowego.

Uwaga.

$$\text{ergodyczny} \Rightarrow \text{stacjonarny}$$

Odwrotna implikacja nie musi zachodzić.

Zadanie 9.1. W pewnym mieście każdy dzień jest słoneczny albo deszczowy. Po dniu słonecznym dzień słoneczny następuje z prawdopodobieństwem 0.7, a po dniu deszczowym z prawdopodobieństwem 0.4.

Narysuj łańcuch markowa oraz wyznacz macierz przejścia dla niego.

Zadanie 9.2. W pewnym mieście każdy dzień jest słoneczny albo deszczowy. Po dniu słonecznym dzień słoneczny następuje z prawdopodobieństwem 0.7, a po dniu deszczowym z prawdopodobieństwem 0.4.

W poniedziałek padało. Stwórz prognozę na wtorek, środę i czwartek.

Oznaczenia: stan 1 = dzień słoneczny, 2 = deszczowy.

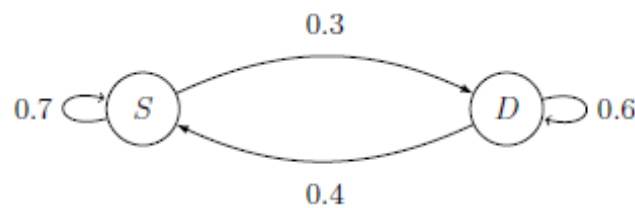
Zadanie 9.3. W pewnym mieście każdy dzień jest słoneczny albo deszczowy. Po dniu słonecznym dzień słoneczny następuje z prawdopodobieństwem 0.7, a po dniu deszczowym z prawdopodobieństwem 0.4.

Meteorolodzy przewidują 80% szans na deszcz w poniedziałek. Stwórz prognozę na wtorek, środę i czwartek.

Oznaczenia: stan 1 = dzień słoneczny, 2 = deszczowy.

Zadanie 9.4. Znajdź rozkład stacjonarny dla łańcucha markowa z powyższych zadań.

Rozwiązanie 9.1. Zaczynamy od narysuj łańcucha markowa.



Możemy teraz napisać macierz przejść

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że wiersze sumują się do 1.

Rozwiązanie 9.2. Zauważmy, że mamy dokładnie taki sam łańcuch Markowa jak w poprzednim zadaniu. Wyznamy pogodę na kolejne dni

1. Wtorek

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

2. Środa

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

3. Czwartek

$$\begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.556 & 0.444 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 9.3. Zauważmy, że mamy dokładnie taki sam łańcuch Markowa jak w poprzednim zadaniu. Wyznamy pogodę na kolejne dni

1. Wtorek

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.54 \end{bmatrix}$$

2. Środa

$$\begin{bmatrix} 0.46 & 0.54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.538 & 0.462 \end{bmatrix}$$

3. Czwartek

$$\begin{bmatrix} 0.538 & 0.462 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5614 & 0.4386 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 9.4. Zauważmy, że mamy dokładnie taki sam łańcuch Markowa jak w poprzednim zadaniu. Przypomnij, że macierz przejść jest postaci

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Aby wyznaczyć rozkład stacjonarny musimy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Obliczmy

$$\pi P = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 & 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} 0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 = \pi_1 \\ 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1 = 1 - \pi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0.3\pi_1 + 0.4\pi_2 = 0 \\ 0.3\pi_1 - 0.4\pi_2 = 0 \\ \pi_1 = 1 - \pi_2 \end{cases}$$

$$-0.3 + 0.3\pi_2 + 0.4\pi_2 = 0$$

$$0.7\pi_2 = 0.3$$

$$\pi_2 = \frac{0.3}{0.7} = \frac{3}{7}$$

$$\pi_1 = \frac{4}{7}.$$

Rozkład stacjonarny to:

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}.$$

Alto to to.

```
In[ ]:= P = {{0.7, 0.3}, {0.4, 0.6}};
MatrixForm[P]
|postać macierzy
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
( 0.7  0.3 )
( 0.4  0.6 )
```

```
In[ ]:= P.P // MatrixForm
|postać macierzy
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
( 0.61  0.39 )
( 0.52  0.48 )
```

```
In[ ]:= P.P.P // MatrixForm
|postać macierzy
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
( 0.583  0.417 )
( 0.556  0.444 )
```

```
In[ ]:= P.P.P.P // MatrixForm
|postać macierzy
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
( 0.5749  0.4251 )
( 0.5668  0.4332 )
```

```
In[ ]:= P.P.P.P.P.P.P.P // MatrixForm
|postać macierzy
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
( 0.571431  0.428569 )
( 0.571425  0.428575 )
```

```
In[ ]:= N[{4/7, 3/7}]
|przybliżenie numeryczne
```

```
Out[ ]:= {0.571429, 0.428571}
```

Oraz:

Sposoby wyznaczania rozkładu granicznego:

Sposób I.

Rozkład graniczny Π jest jedynym niezerowym rozwiązaniem układu

$$(P^T - I) \Pi^T = 0,$$

$$\text{spełniającym warunek } \sum_{i=1} \Pi_i = 1,$$

Uwaga.

Z powyższej równości wynika, że $\Pi P = \Pi$ co oznacza, że wektor Π jest wektorem własnym macierzy P odpowiadającym wartości własnej równej 1.

```
In[ ]:= PT = Transpose[P];
```

↳transpozycja

```
MatrixForm[PT]
```

↳postać macierzy

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= PT - {{1, 0}, {0, 1}} // MatrixForm
```

↳postać macierzy

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -0.3 & 0.4 \\ 0.3 & -0.4 \end{pmatrix}$$

$$\text{In[]:= } \begin{pmatrix} -0.3 & 0.4 \\ 0.3 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-0.3 \pi_1 + 0.4 \pi_2 = 0$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

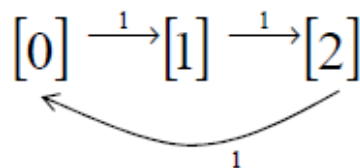
$$\pi_1 = \frac{4}{7}$$

$$\pi_2 = \frac{3}{7}$$

Uwaga!

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa



Jego macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany mają okres 3.

Zauważmy, że wielomian charakterystyczny tej macierzy ma postać

$$W(\lambda) = \lambda^3 - 1$$

i jej wartości własne są równe: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Ponieważ wszystkie wartości własne mają moduł 1 i $\lambda_1 = 1$ jest jednokrotną wartością własną to rozpatrywana macierz jest nierozkładalna i cykliczna.

Łańcuch ten jest stacjonarny, jego rozkładem stacjonarnym jest $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Rozkład ten można wyznaczyć I lub II sposobem obliczania rozkładów granicznych.

Kolejne potęgi macierzy P są równe

$$P^2 = P^{3n+2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, P^3 = P^{3n+3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P^4 = P = P^{3n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

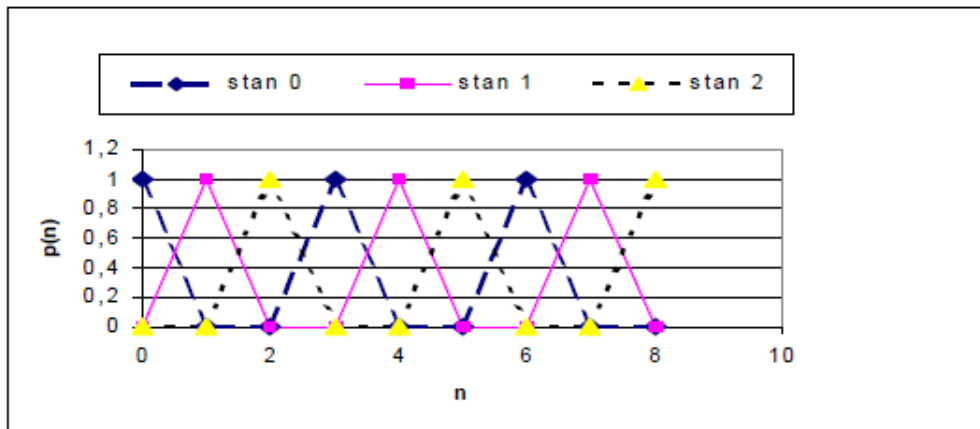
dla $n = 0, 1, 2, \dots$

Zauważmy, że żadna kolumna P^n nie składa się wyłącznie z elementów dodatnich.

Rozkład graniczny nie istnieje.

Weźmy np. rozkład początkowy $p(0) = (1, 0, 0)$.

Obliczone prawdopodobieństwa $p(n)$ zestawiono w tabeli i przedstawiono na wykresie dla



$n = 0, \dots, 8$.

$p(n) \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Stan 0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
Stan 1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
Stan 2	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Jak widać $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n)$ nie istnieje dla żadnej współrzędnej (dla żadnego stanu).

Wniosek.

Istnienie rozkładu stacjonarnego nie implikuje, że łańcuch jest ergodyczny.