

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

(национальный исследовательский университет)

Институт №8 «Информационные технологии и прикладная математика»

Проект по курсу

“Введение в авиационную и ракетно-космическую технику” 1 семестр на

тему: “Посадка на Луну”

Студенты: Гурьев Тимур,
Алимов Рустям, Васильев Михаил

Группа: М8О-109БВ-25

Руководитель: Тимохин Максим Юрьевич

Оценка:

Дата:

Подпись преподавателя:

Москва 2025

Оглавление

Введение.....	3
Описание миссии.....	4
Историческая концепция проекта.....	4
Устройство ракеты.....	6
Общая концепция полета.....	7
Физическая и математическая модели.....	10
1) Исходные данные для расчётов.....	10
2) Расчёт характеристик ступеней ракеты.....	13
3) Этап 1. Подготовка и старт	17
4) Этап 2. Гравитационный поворот и вывод на опорную орбиту	21
5) Этап 3. Подготовка к перелёту: стартовое окно и траектория Гомана ..	26
6) Этап 4. Межорбитальный перелёт и коррекции	28
7) Этап 5. Захват на орбиту Муны.....	31
8) Этап 6. Посадка на Муну.....	32
Программная реализация.....	36
Графики зависимостей.....	36
Сравнение графиков.....	37
Заключение.....	43
Отчеты участников команды.....	44
Источники.....	45

Введение

Актуальность проекта

Космические исследования являются одним из наиболее технологически сложных и ресурсоёмких направлений человеческой деятельности. С развитием частной космонавтики и увеличением количества запусков особую важность приобретают вопросы оптимизации космических миссий - снижения расходов топлива, увеличения точности выполнения операций и сокращения времени управления.

Компьютерное моделирование представляет собой эффективный инструмент для отработки космических операций без риска потери дорогостоящего оборудования. Kerbal Space Program (KSP) зарекомендовала себя как одна из наиболее точных симуляций орбитальной механики, позволяющая моделировать реальные физические процессы в упрощённой, но достоверной форме.

Цель проекта

Разработка и реализация автоматизированной системы управления посадкой космическим аппаратом в KSP, обеспечивающей оптимальный по расходу топлива и времени полёт до мягкой посадки на поверхность Муны (аналог Луны).

Задачи проекта

1. Теоретическое исследование орбитальной механики перелёта Кербин-Муна
2. Разработка математической модели полёта, включая:
 - Оптимальные траектории выведения на орбиту
 - Эффективные межорбитальные переходы

- Алгоритмы управляемой посадки в условиях отсутствия атмосферы
3. Проектирование и строительство ракеты с учётом требований автоматизации
 4. Создание программного обеспечения автопилота на языке Python с использованием мода kRPC
 5. Тестирование и оптимизация системы управления
 6. Сравнительный анализ эффективности автоматизированного и ручного управления

Команда:

Участник	Роль в команде
Гурьев Тимур (М8О-109БВ-25)	математик, программист KSP
Алимов Рустям (М8О-109БВ-25)	физик, математик, технический специалист
Васильев Михаил (М8О-109БВ-25)	тимлид, математик, программист

Описание миссии

Историческая концепция проекта

Исследование Луны прошло сложный путь от простого достижения поверхности до операций мягкой посадки. Эта эволюция наглядно демонстрирует прогресс в понимании орбитальной механики и систем управления:

Пионерские миссии 1959-1960-х годов заложили фундаментальные основы. Советская «Луна-2» (1959) доказала саму возможность достижения лунной поверхности, совершив первую в истории жёсткую посадку. Американская программа «Рейнджер», в частности «Рейнджер-6» (1964), продемонстрировала ценность целенаправленных ударных миссий для научных исследований.

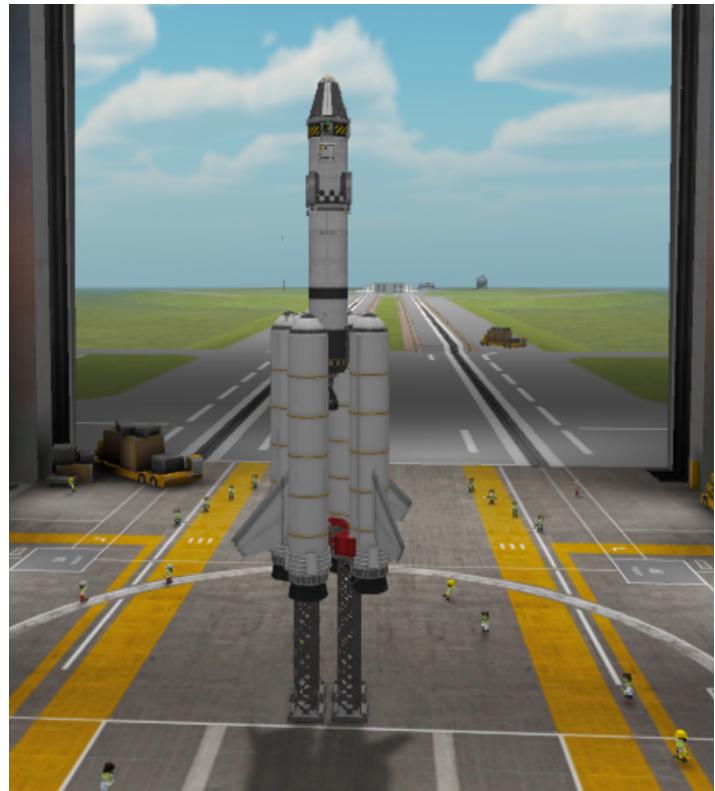
Прорыв мягкой посадки был осуществлён советскими станциями «Луна-9» (1966) и американскими «Сервейерами» (1966-1968), которые впервые реализовали управляемое снижение с использованием двигательных установок.

Современные автоматические станции, такие как китайские «Чанъэ» и индийский «Чандраян-3», демонстрируют возможности полностью автономной посадки с использованием сложных алгоритмов компьютерного зрения и анализа рельефа в реальном времени.

Устройство ракеты

1. Парашют Mk16 (0.1 т)
2. Командный отсек Mk1 (0.746 т + масса пассажиров 0.049 т)
3. Блок удаленного управления RC-001S (0.1 т)
4. Отделитель TD-12 (0.04 т)
5. Встраиваемый улучшенный гиродин (0.1 т)
на нем:
 - 5.1. Две аккумуляторной батареи Z-100 ($0.005 * 2 = 0.01$ т)
6. Топливный бак FL-T400 (2.25 т)
на нем:
 - 6.1. Две фотоэлектрические панели SP-L 1x6 ($0.025 * 2 = 0.05$ т)
 - 6.2. Четыре Посадочные опоры LT-1 ($0.05 * 4 = 0.2$ т)
7. ЖРД LV-909 "Терьер" (0.5 т)
8. Отделитель TD-12 (0.04 т)
9. Топливный бак FL-T800 (4.5 т)
на нем в самом низу:
 - 9.1. Четыре продольных отделителя TT-38K ($0.025 * 4 = 0.1$ т)
 - 9.1.1. Четыре твердотопливных ускорителя RT-30 "Кувалда" ($7.65 * 4 = 30.6$ т):
 - 9.1.1.1. Четыре аэродинамических носовых обтекателя ($0.03 * 4 = 0.12$ т)
 - 9.1.1.2. Четыре распорки EAS-4 ($0.05 * 4 = 0.2$ т)
 - 9.1.1.3. Четыре киля ($0.125 * 4 = 0.5$ т)
 - 9.1.1.4. Четыре пусковых мачт TT18-A
 10. ЖРД LV-T45 "Вертлявый" (1.5 т)

Полная стартовая масса около 41650 кг



Общая концепция полета

Полёт к Луне (Муне) — это сложная задача требующая точного планирования и выполнения последовательности манёвров. В отличие от простого выхода на орбиту, межпланетный перелёт требует учёта взаимного движения небесных тел и оптимального использования ограниченных топливных ресурсов. Наша миссия разбита на несколько ключевых этапов, каждый из которых решает конкретные задачи и приближает нас к конечной цели — мягкой посадке на поверхность.

Этап 1: Подготовка и старт

Вертикальный подъём (0-1.5 км)

Первые секунды полёта ракета движется практически вертикально. Это необходимо для быстрого выхода из плотных слоёв атмосферы, где аэродинамическое сопротивление максимально. На этом этапе мы преодолеваем область максимального динамического давления, где нагрузки на конструкцию достигают пика.

Гравитационный поворот (1.5-70 км)

По мере набора высоты ракета постепенно наклоняется в сторону востока, используя вращение Кербина для дополнительного ускорения. Этот манёвр, известный как "гравитационный поворот", позволяет плавно перейти от вертикального подъёма к горизонтальному движению, необходимому для выхода на орбиту.

Этап 2: Вывод на опорную орбиту

Довыведение на орбиту

После отделения первых ступеней и выхода из атмосферы ракета продолжает набор скорости уже в практически вакуумных условиях. Наша цель — достичь круговой орбиты высотой 80-100 км, которая станет нашей стартовой площадкой для полёта к Муне.

Формирование рабочей орбиты

На этом этапе мы тщательно выравниваем орбиту, делая её максимально круговой. Это важно для точности последующих манёвров. Как говорил Константин Циолковский: "*Сначала неизбежно идут мысль, фантазия, сказка. За ними шествует научный расчёт*" — именно расчёт орбиты позволяет превратить фантазию о полёте к Луне в реальность.

Этап 3: Подготовка к перелёту

Ожидание оптимального положения

Мы находимся на орбите Кербина и ждём, когда Муна окажется в правильной позиции. В астронавтике это называется "ожидание стартового окна". В этот момент экипаж (или автоматика) проводит финальные проверки систем.

Расчёт траектории перелёта

Используя методы орбитальной механики, мы вычисляем оптимальную траекторию полёта к Муне. Чаще всего используется "траектория Гомана" — эллиптическая орбита, которая касается как орбиты Кербина, так и орбиты Муны, требуя минимальных затрат топлива.

Этап 4: Межорбитальный переход

Импульс на переход

В строго рассчитанный момент времени мы включаем двигатели на непродолжительное время, сообщая кораблю дополнительную скорость. Этот манёвр переводит нас с круговой орбиты Кербина на эллиптическую переходную орбиту, апоцентр которой достигает орбиты Муны.

Коррекция траектории

Во время перелёта мы можем выполнить одну или несколько корректирующих коррекций траектории. Эти небольшие манёвры позволяют точно "прицелиться" в Муну и компенсировать неизбежные небольшие ошибки начального импульса.

Этап 5: Выход на лунную орбиту

Торможение у Муны

Когда мы достигаем окрестностей Муны, необходимо погасить избыточную скорость, чтобы гравитация Муны смогла "захватить" нас на свою орбиту. Для этого мы включаем двигатели против направления движения, переводя корабль на эллиптическую орбиту вокруг Муны.

Формирование рабочей орбиты

После успешного захвата мы корректируем орбиту, делая её круговой на высоте 20-30 км над поверхностью Муны. Эта орбита становится нашей базой для подготовки к посадке.

Этап 6: Посадка на Муну

Начало снижения

В расчётной точке орбиты мы разворачиваем ракету двигателями вниз и начинаем плавное торможение. Этот этап наиболее критичен — необходимо одновременно гасить горизонтальную скорость и контролировать вертикальное снижение.

Вертикальный участок посадки

На высоте 500-1000 метров, когда горизонтальная скорость практически сведена к нулю, мы переходим к чисто вертикальному снижению. Система управления постоянно регулирует тягу двигателей, поддерживая заданную скорость снижения (обычно 2-5 м/с).

Финальное касание

На последних метрах включается режим предпосадочного зависания — ракета на несколько секунд задерживается на высоте 5-10 метров для окончательной стабилизации, после чего плавно опускается на поверхность. Двигатели выключаются только после подтверждения устойчивого контакта с поверхностью.

Математическая и физическая модели

1. Исходные данные для расчётов

Прежде чем описывать полёт по этапам, зафиксируем параметры небесных тел и двигателей, которые будем использовать в расчётах.

1.1. Параметры Кербина

Радиус Кербина:

$$R_k = 600000 \text{ м}$$

Гравитационный параметр Кербина (произведение гравитационной постоянной G на массу Муны M_k):

$$\mu_k = GM_k = 6.67430 \cdot 10^{-11} \cdot 5.2915 \cdot 10^{22} = 3.5316 \cdot 10^{12} \text{ м}^3/\text{с}^2$$

Поверхностное ускорение свободного падения:

$$g_0 \approx 9.81 \text{ м/с}^2$$

Скорость вращения на экваторе:

$$v_r \approx 174.5 \text{ м/с}$$

Рабочая орбита для нашей ракеты — круговая орбита высотой 80 км:

$$h_o = 80000 \text{ м}, \quad r_1 = R_k + h_o = 680000 \text{ м}$$

Орбитальная скорость на такой орбите по формуле круговой орбиты:

$$v_o = \sqrt{\frac{\mu_k}{r_1}} = \sqrt{\frac{3.5316 \cdot 10^{12}}{680000}} \approx 2279 \text{ м/с}$$

1.2. Параметры Муны

Радиус Муны:

$$R_m = 200000 \text{ м}$$

Гравитационный параметр Муны (произведение гравитационной постоянной G на массу Муны M_m):

$$\mu_m = G \cdot M_m = 6.67430 \cdot 10^{-11} \cdot 9.7599 \cdot 10^{20} = 6.5138 \cdot 10^{10} \text{ м}^3/\text{s}^2$$

Высота целевой орбиты над поверхностью:

$$h_m = 15000 \text{ м}$$

Радиус низкой орбиты Муны:

$$r_m = R_m + h_m = 215000 \text{ м}$$

Орбитальная скорость на круговой орбите Муны высотой 15 км:

$$v_{om} = \sqrt{\frac{\mu_m}{r_m}} \approx \sqrt{\frac{6.51 \cdot 10^{10}}{215000}} \approx 550 \text{ м/с}$$

1.3. Орбита Муны вокруг Кербина

Радиус орбиты Муны (для простоты считаем её круговой):

$$r_2 = 11400000 \text{ м}$$

Орбитальная скорость самой Муны вокруг Кербина:

$$v_m = \sqrt{\frac{\mu_k}{r_2}} \approx \sqrt{\frac{3.5316 \cdot 10^{12}}{11400000}} \approx 557 \text{ м/с}$$

1.4. Двигатели и ступени ракеты

Используемые двигатели:

- LV-T45 "Swivel" (вторая ступень) - удельный импульс в вакууме:

$$I_s = 320 \text{ с}$$

- LV-909 "Terrier" (посадочная/орбитальная ступень) - удельный импульс в вакууме:

$$I_t = 345 \text{ с}$$

- Боковые твёрдотопливные ускорители (по характеристикам близки к ВАСС "Thumper"):

$$I_{tv} \approx 210 \text{ с}, I_{ta} \approx 175 \text{ с}$$

где I_{tv} — удельный импульс в вакууме, I_{ta} — в атмосфере.

1.5. Формула Циолковского

Физической основой для расчёта «ресурса» ракеты является уравнение Циолковского:

$$\Delta v = I g_0 \ln \left(\frac{m_0}{m_1} \right), \quad \text{где}$$

I — удельный импульс двигателя

g_0 — стандартное ускорение свободного падения

m_0 — начальная масса ступени (с топливом)

m_1 — конечная масса (после выработки топлива).

2. Расчёт характеристик ступеней ракеты

Разделим ракету на три логические ступени, согласно её конструкции.

2.1. Верхняя (лунно-орбитальная) ступень — LV-909 «Terrier»

Суммарная масса всех деталей, кроме топлива FL-T400 (капсула, парашют, опоры, панели, гиродин и т. д.):

$$m_s = 1.795 \text{ т}$$

Бак FL-T400:

- полная масса: 2.25 т
- сухая масса: 0.25 т → топлива: 2.0 т

Тогда для верхней ступени:

$$m_0 = 1.795 + 2.25 = 4.045 \text{ т}, m_1 = 1.795 + 0.25 = 2.045 \text{ т}$$

Подставим в формулу Циолковского:

$$\Delta v_3 = I_t g_0 \ln \left(\frac{m_0}{m_1} \right) = 345 \cdot 9.81 \cdot \ln \left(\frac{4.045}{2.045} \right) \approx 345 \cdot 9.81 \cdot 0.669 \approx 2310 \text{ м/с}$$

Вывод: верхняя ступень даёт примерно 2300 м/с в вакууме.

Этого более чем достаточно, чтобы:

- выполнить захват на орбите Муны (~300 м/с),
- сформировать нужную орбиту,
- осуществить мягкую посадку (~550 м/с) с запасом Δv на манёвры.

2.2. Вторая ступень — LV-T45 «Swivel» + FL-T800

Эта ступень несёт на себе верхнюю ступень целиком, поэтому её массы считаем с учётом верхней ступени.

Бак FL-T800:

- полная масса: 4.5 т

- сухая масса: 0.5 т → топлива: 4.0 т

Сухая масса второй ступени:

$$m_{s2} = 0.04(\text{отделитель}) + 1.5(\text{двигатель}) + 0.5(\text{бак}) = 2.04 \text{ т}$$

Полная масса «вторая ступень + верхняя ступень»:

$$m_0 = m_{s2} + 4.0 + 4.045 = 2.04 + 4.0 + 4.045 = 10.085 \text{ т}$$

После выработки топлива второй ступени:

$$m_1 = m_0 - 4.0 = 6.085 \text{ т}$$

Тогда:

$$\Delta v_2 = I_s g_0 \ln \left(\frac{m_0}{m_1} \right) = 320 \cdot 9.81 \cdot \ln \left(\frac{10.085}{6.085} \right) \approx 320 \cdot 9.81 \cdot 0.505 \approx 1590 \text{ м/с}$$

Вывод: вторая ступень даёт около 1600 м/с вакууме, чего достаточно для:

- довыведения на орбиту Кербина после работы бустеров,
- импульса перехода к Муну ($\text{TLI} \sim 850 \text{ м/с}$),
- и части корректирующих манёвров.

2.3. Первая ступень — 4× BACC "Thumper" (RT-30 "Кувалда")

Суммарная стартовая масса ракеты:

$$m_{\text{общ}} = 41.65 \text{ т}$$

Масса центральной части (2-я + 3-я ступени):

$$m_{\text{ц}} \approx 10.13 \text{ т}$$

Тогда масса всей первой ступени (бустеры + навесное):

$$m_0 = 41.65 - 10.13 \approx 31.52 \text{ т}$$

После выработки топлива бустеры отстреливаются, и в дальнейшем участвует только центральная часть:

$$m_1 = 10.13 \text{ т}$$

Для оценки возьмём средний удельный импульс:

$$I_1 \approx 180 \text{ с}$$

Тогда:

$$\Delta v_1 \approx I_1 g_0 \ln \left(\frac{m_0}{m_1} \right) = 180 \cdot 9.81 \cdot \ln \left(\frac{41.65}{10.13} \right) \approx 180 \cdot 9.81 \cdot 1.418 \approx 2500 \text{ м/с}$$

Часть этого Δv будет «съедена» гравитационными и аэродинамическими потерями, но именно эта ступень нужна для того, чтобы:

- быстро пробиться через плотные слои атмосферы,
- заложить начало гравитационного поворота.

2.4. Суммарный Δv ракеты

Суммируем вакуумные значения:

$$\Delta v_{\text{сумм}} \approx 2500 + 1590 + 2310 \approx 6400 \text{ м/с}$$

С учётом того, что:

- первая ступень работает в атмосфере (её фактический эффективный вклад меньше),
- присутствуют потери на гравитацию и сопротивление, полезный эффективный запас получается порядка 5400–5800 м/с.

Для сравнения, теоретический бюджет для миссии Kerbin → Mun → посадка:

- выход на LKO: ~3400 м/с,
- TLI: ~850–900 м/с,
- захват у Муны: ~300 м/с,

- посадка: ~ 550 м/с,

что в сумме даёт:

$$\Delta v_{\text{тре6}} \approx 5100 \text{ м/с}$$

Вывод: ракета имеет разумный запас Δv , если профиль полёта близок к оптимальному (гравитационный поворот, аккуратный TLI, аккуратная посадка без лишних торможений и разворотов).

3. Этап 1. Подготовка и старт

3.1. Вводное описание

Первые секунды полёта — самые зрелищные и самые жёсткие. Ракета стоит на стартовом столе, двигатели твёрдотопливных ускорителей включены на полную тягу. Как только загорается зелёный сигнал запуска, крепления отпускают корпус, и почти 42 тонны металла и топлива начинают медленно отрываться от поверхности Кербина.

На этом участке мы практически не думаем об орбитах. Главная задача — выжить в атмосфере: пройти область максимального динамического давления и вывести ракету в разреженные слои.

3.2. Физика старта: TWR и Аэродинамическое сопротивление

Запуск ракеты из плотной атмосферы Кербина — самый нагруженный и самый «деликатный» участок полёта. Чтобы старт был безопасным и эффективным, необходимо соблюсти два ключевых условия:

- тяги двигателей должно хватать, чтобы победить гравитацию,
- скорость набора должна быть такой, чтобы не разрушить ракету в плотных слоях воздуха.

Обе эти задачи описываются параметрами TWR и динамическим давлением.

1. Условие взлёта

Чтобы ракета вообще начала двигаться вверх, тяга должна быть больше силы тяжести:

$$F > mg_0$$

где

- F — суммарная тяга всех включённых двигателей,

- m — текущая масса ракеты,
- g_0 — ускорение свободного падения на поверхности Кербина.

Если $F \leq mg_0$, ракета либо не взлетит, либо будет лететь вверх со слишком маленьким ускорением, что приведёт к ненужным потерям топлива.

2. Коэффициент тяговооружённости (TWR)

Для удобства вводят безразмерный параметр:

$$TWR = \frac{F}{mg_0}$$

Он показывает, во сколько раз тяга больше веса ракеты.

Типичные значения для KSP

Для старта в KSP обычно выбирают:

$$TWR \approx 1.3 - 1.7$$

3.3. Аэродинамическое сопротивление и его влияние на подъём ракеты

Полёт ракеты в плотных слоях атмосферы сопровождается значительными аэродинамическими силами. Основная из них — аэродинамическое сопротивление, которое действует в сторону, противоположную движению, и “съедает” часть тяги двигателя.

Сила сопротивления рассчитывается по формуле:

$$F_d = \frac{1}{2} \rho v^2 C_x S,$$

где

- ρ — плотность воздуха (максимальна у поверхности),
- v — скорость ракеты,

- C_x — коэффициент лобового сопротивления,
- S — эффективная площадь поперечного сечения.

Для нашей ракеты:

- $C_x = 0.3$ (для конической головной части)
- $S = \pi \cdot r^2$ — площадь проекции головного обтекателя

При анализе полёта в атмосфере удобно использовать упрощённую экспоненциальную модель плотности воздуха. В этой модели считается, что плотность воздуха убывает с высотой по закону

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-h/H},$$

где

- $\rho(h)$ — плотность атмосферы на высоте h ,
- ρ_0 — плотность у поверхности ($h = 0$),
- H — масштаб высоты (характерная высота, на которой плотность уменьшается в $e \approx 2,718$ раза),
- h — геометрическая высота над поверхностью планеты.

3.4. Зачем вертикальный участок

На самых низких высотах:

- воздух плотный (ρ велика);
- каждая лишняя м/с скорости резко увеличивает q ;

поэтому выгодно сначала просто набрать высоту, двигаясь почти вертикально.

Вертикальный участок позволяет:

- выйти из самой густой части атмосферы;
- уменьшить ρ , а значит снизить аэродинамическую нагрузку;

- подготовиться к более эффективному набору горизонтальной скорости.

3.5. Вывод по этапу 1

На первом этапе ракета:

- использует мощные твёрдотопливные ускорители для быстрого подъёма,
- преодолевает зону максимального динамического давления,
- набирает высоту, достаточную для начала гравитационного поворота.

4. Этап 2. Гравитационный поворот и вывод на опорную орбиту

4.1. Вводное описание

Когда стрелка высотомера переваливает за $\sim 1\text{--}1.5$ км, мир в иллюминаторе начинает поворачиваться. Ракета уже не смотрит строго вверх, а плавно склоняет нос в сторону востока. Именно здесь фантазия о полёте превращается в строгий расчёт: каждый градус тангажа, каждые секунды работы двигателя влияют на сотни метров высоты и километры дальности.

4.2. Суть гравитационного поворота

Идея гравитационного поворота проста и красива:

- мы слегка отклоняем ракету от вертикали,
- затем позволяем гравитации самой «опустить» траекторию,
- при этом набираем горизонтальную скорость, а не боремся с гравитацией лоб в лоб.

Если бы мы летели строго вертикально, значительная часть тяги уходила бы на компенсацию веса mg_0 , а это прямые потери Δv . При грамотном повороте большая часть тяги ускоряет ракету вдоль орбиты — то есть увеличивает орбитальную энергию.

Практическая реализация

Поэтапное изменение угла:

- 1.5 км: $\theta = 80^\circ$ (начало поворота)
- 7 км: $\theta = 45^\circ$ (активный поворот)
- 60 км: $\theta = 15^\circ$ (выход на траекторию)
- 70 км: $\theta = 5^\circ$ (почти горизонтальный полёт)

Энергетический баланс контролируется через соотношение вертикальной и горизонтальной составляющих скорости.

4.3. Орбитальная скорость и импульс

Поскольку при полёте до поверхности Муны неоднократно происходит переход космического аппарата с одной орбиты на другую, необходима формула для расчёта Δv , тратящейся на такие переходы. Для этого очень удобен закон инвариантности орбитальной энергии, по-другому называющийся уравнением vis-viva (“живой силы”). Рассмотрим вывод данной формулы.

Рассмотрим тело массы m , движущееся по эллиптической орбите вокруг планеты с гравитационным параметром $\mu = GM$.

Полная механическая энергия тела на расстоянии r от центра планеты:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{r},$$

где

v — скорость тела,

$\mu = GM$ — гравитационный параметр планеты.

Для удобства введём удельную энергию (энергия на единицу массы):

$$\varepsilon = \frac{E}{m} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}.$$

Одним из свойств эллиптической орбиты является то, что удельная энергия ε одинакова во всех точках орбиты.

Рассмотрим две точки одной и той же орбиты:

- 1 —periцентр (минимальное расстояние) с параметрами r_1, v_1 ;
- 2 — апоцентр (максимальное расстояние) с параметрами r_2, v_2 .

Тогда:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow \frac{v_1^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{\mu}{r_2}.$$

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} = \mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1)$$

Это первая связь между v_1 и v_2 .

Используем второй закон Кеплера

Второй закон Кеплера говорит, что радиус-вектор тела заметает равные площади за равные промежутки времени. Если взять маленький интервал времени Δt около перицентра и около апоцентра, площадь сектора можно приблизённо записать как:

$$S \approx \frac{1}{2} r v \Delta t.$$

Вооружившись этим, получаем:

$$\frac{1}{2} r_1 v_1 \Delta t = \frac{1}{2} r_2 v_2 \Delta t \Rightarrow r_1 v_1 = r_2 v_2. \quad (2)$$

Отсюда выражаем скорость в апоцентре через скорость в перицентре:

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1. \quad (3)$$

Подставим (3) в уравнение (1):

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{r_2} v_1 \right)^2 = \mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

$$\frac{v_1^2}{2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) = \mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Приведём правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Левую часть можно записать так:

$$1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2} = \frac{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}{r_2^2}.$$

Подставляем:

$$\frac{v_1^2}{2} \cdot \frac{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}{r_2^2} = \mu \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

$$\frac{v_1^2}{2} \cdot \frac{r_2 + r_1}{r_2^2} = \mu \cdot \frac{1}{r_1 r_2}.$$

$$v_1^2 = \frac{2\mu r_2^2}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)} = \frac{2\mu r_2}{r_1 (r_1 + r_2)}.$$

И, наконец:

$$v_1 = \sqrt{\mu \frac{2r_2}{r_1(r_1 + r_2)}}.$$

Аналогично, из (2) можно получить выражение для скорости в апоцентре:

$$v_2 = \sqrt{\mu \frac{2r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}.$$

Переход к формуле vis-viva

Для эллиптической орбиты с periцентром r_1 и апоцентром r_2 большая полуось a равна:

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Если подставить это в выражение для скорости (например, в точке с радиусом $r = r_1$), то формула перепишется в универсальном виде:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}.$$

Это и есть формула vis-viva, связывающая скорость тела на орбите v , текущее расстояние до планеты r и большую полуось орбиты a .

4.4. Вывод по этапу 2

На этом этапе ракета:

- превращает грубую вертикальную тягу в аккуратную орбитальную скорость,
- выходит на круговую орбиту 80–100 км,
- готовится к самому «космическому» этапу — перелёту к Муне.

5. Этап 3. Подготовка к перелёту: стартовое окно и траектория Гомана

5.1. Ожидание стартового окна

Корабль спокойно летит над поверхностью Кербина на высоте ~80 км.

Пока корабль делает круг за кругом, Муна движется по своей орбите вокруг Кербина. Чтобы попасть к ней с минимальными затратами топлива, нужно дождаться, когда *фазовый угол* между кораблём и Муной станет правильным.

Время, за которое Муна пройдёт половину своей орбиты

Радиус орбиты Муны — тот же r_2 . Половина его периода:

$$T_M = \pi \sqrt{\frac{r_2^3}{\mu_k}}$$

Тогда фазовый угол считается следующим образом:

$$\varphi = 180^\circ \left(1 - \frac{T_\pi}{T_M}\right),$$

Отношение времён упрощается:

$$\frac{T_\pi}{T_M} = \left(\frac{a}{r_2}\right)^{3/2}.$$

Тогда итоговая формула для фазового угла:

$$\begin{aligned}\varphi &= 180^\circ \left(1 - \left(\frac{a}{r_2}\right)^{3/2}\right) \\ \varphi &= 180 \left(1 - \left(\frac{6040000}{11400000}\right)^{3/2}\right) = 110,58^\circ.\end{aligned}$$

5.2. Расчёт импульса перелёта (TLI)

TLI - манёвр, импульс двигателя, который переводит корабль:

- с низкой орбиты вокруг планеты,

- на переходную орбиту к Муне.

Скорость корабля на круговой орбите:

$$v_1 = v_o \approx 2279 \text{ м/с}$$

Скорость на переходной орбите в periцентре:

$$v_p = \sqrt{\mu_k \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)} \approx 3131 \text{ м/с}$$

Тогда импульс перехода:

$$\Delta v_{\text{TLI}} = v_p - v_1 \approx 3131 - 2279 \approx 852 \text{ м/с}$$

Это хорошо согласуется с игровыми оценками (~ 860 м/с). Именно этот манёвр выполняет вторая ступень с LV-T45.

5.3. Вывод по этапу 3

На третьем этапе:

- корабль ждёт правильный момент — стартовое окно,
- по формулам орбитальной механики рассчитывается орбита Гомана и импульс TLI,
- в нужный момент включается двигатель, и круговая орбита превращается в эллиптическую, апоцентр которой достигает орбиты Муны.

6. Этап 4. Межорбитальный перелёт и коррекции

После TLI корабль покидает привычную круговую орбиту и отправляется в шестичасовой перелёт к Муне. За иллюминатором — чёрный вакуум, а впереди по траектории — серый диск Муны.

6.1. Движение по орбите Гомана

Применение формулы vis-viva к перелёту Kerbin → Mun

Для нашей задачи:

- радиус низкой орбиты корабля:

$$r_1 = R_k + h_o = 600000 + 80000 = 680000 \text{ м},$$

- радиус орбиты Муны: $r_2 = 11400000$ м,
- большая полуось переходной (гомановской) орбиты:

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{680000 + 11400000}{2} = 6040000 \text{ м.}$$

Круговая орбитальная скорость на высоте 80 км

Для круговой орбиты большая полуось равна её радиусу, поэтому $a = r = r_1$, и формула vis-viva упрощается:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu_k}{r_1}}.$$

Подставим:

$$\frac{\mu_k}{r_1} = \frac{3.5316 \cdot 10^{12}}{680000} \approx 5.19 \cdot 10^6 (\text{м}^2/\text{с}^2),$$

$$v_1 = \sqrt{5.19 \cdot 10^6} \approx 2279 \text{ м/с.}$$

Это и есть скорость корабля на круговой орбите 80 км — LKO.

Скорость на переходной орбите в periцентре (импульс TLI)

Теперь считаем скорость в той же точке $r = r_1$, но уже на эллиптической переходной орбите с большой полуосью $a = 6040000$ м:

Подставим численные значения в формулу vis-viva для periцентра переходной орбиты:

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{\mu_k \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{3.5316 \cdot 10^{12} \left(\frac{2}{680000} - \frac{1}{6040000} \right)} \approx \sqrt{9.80 \cdot 10^6} \\ &\approx 3131 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Это скорость корабля в periцентре после манёвра TLI.

Импульс TLI — это разность скоростей до и после манёвра:

$$\Delta v_{\text{TLI}} = v_p - v_1 \approx 3131 - 2279 \approx 852 \text{ м/с.}$$

Скорость на переходной орбите на расстоянии орбиты Муны

Теперь найдём скорость корабля на той же переходной орбите, но в точке, где $r = r_2$ (то есть на расстоянии орбиты Муны):

Теперь найдём скорость корабля на той же переходной орбите в точке, где $r = r_2$ (на расстоянии орбиты Муны):

$$\begin{aligned} v_t &= \sqrt{\mu_k \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{3.5316 \cdot 10^{12} \left(\frac{2}{11400000} - \frac{1}{6040000} \right)} \approx \sqrt{1.87 \cdot 10^6} \\ &\approx 1.87 \cdot 10^2 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Это скорость корабля относительно Кербина, когда он достигает радиуса орбиты Муны по переходной орбите.

Скорость самой Муны и относительная скорость встречи

Скорость Муны вокруг Кербина на радиусе r_2 по формуле круговой орбиты:

$$v_m = \sqrt{\frac{\mu_k}{r_2}} = \sqrt{\frac{3.5316 \cdot 10^{12}}{11400000}} \approx \sqrt{3.10 \cdot 10^5} \approx 557 \text{ м/с.}$$

Тогда относительная скорость корабля и Муны при встрече:

$$v_\infty \approx |v_m - v_t| \approx 557 - 187 \approx 370 \text{ м/с.}$$

Эта величина v_∞ и используется далее при расчёте торможения для захвата орбиты вокруг Муны.

6.2. Коррекция траектории

Маленькие манёвры по пути (5–20 м/с), выполненные далеко от Кербина, позволяют:

- точно подогнать точку входа в сферу влияния Муны,
- задать нужную высоту будущегоperiцентра (например, ~15 км над поверхностью),
- минимизировать Δv при торможении и захвате.

6.3. Вывод по этапу 4

Межорбитальный перелёт:

- «соединяет» орбиту Кербина и орбиту Муны,
- позволяет ещё на стадии перелёта уточнить траекторию,
- задаёт начальные условия для манёвра захвата в гравитационном поле Муны.

Здесь уже начинает работать верхняя ступень с LV-909 — она отвечает за тонкую подстройку орбиты.

7. Этап 5. Захват на орбиту Муны

7.1. Вход в сферу влияния Муны

Когда корабль пересекает границу SOI Муны, удобнее считать движение в системе «корабль–Муна». Вдали от Муны скорость корабля относительно него равна v_∞ , а при заходе в periцентр она увеличивается за счёт притяжения Муны.

Скорость в periцентре (в простейшей модели):

$$v_p = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_m}{r_m}} \approx 862 \text{ м/с}$$

Скорость на круговой орбите Муны:

$$v_{om} \approx 550 \text{ м/с}$$

Тогда требуемое торможение для захвата:

$$\Delta v_{cap} \approx v_p - v_{om} \approx 862 - 550 \approx 310 \text{ м/с}$$

7.2. Формирование рабочей орбиты

На практике после захвата орбита получается эллиптической. Пара коротких манёвров LV-909 позволяет:

- выровнять periцентр и apoцентр,
- выйти на круговую орбиту высотой 15–20 км.

Энергетически это уже «мелочь» по сравнению с TLI и захватом.

7.3. Вывод по этапу 5

- корабль переходит с пролётной траектории на замкнутую орбиту вокруг Муны,
- формируется низкая круговая орбита — «прыжковая площадка» для посадки,
- основную работу выполняет высокоэффективный LV-909.

8. Этап 6. Посадка на Муну

8.1. Начало снижения: гашение горизонтальной скорости

На низкой орбите ($\sim 15\text{--}20$ км) корабль летит с горизонтальной скоростью ~ 550 м/с.

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{\mu_m}{r_m}},$$

где

$$\mu_m = 6.51 \cdot 10^{10} \text{ м}^3/\text{с}^2 \quad — \quad \text{гравитационный параметр Муна},$$
$$r_m = R_m + h \approx 200000 + 15000 = 215000 \text{ м}.$$

Подставим:

$$v_{\text{orb}} \approx \sqrt{\frac{6.51 \cdot 10^{10}}{215000}} \approx \sqrt{3.0 \cdot 10^5} \approx 5.5 \cdot 10^2 \text{ м/с.}$$

То есть на низкой орбите корабль летит со скоростью порядка

$$v_{\text{orb}} \approx 550 \text{ м/с.}$$

8.2. Вертикальный участок и управление скоростью снижения

Когда горизонтальная скорость почти сведена к нулю, движение корабля превращается в управляемое падение вдоль вертикали. Теперь задача двигателя — не разгонять корабль по орбите, а аккуратно сдерживать его падение, чтобы космический аппарат мягко коснулся поверхности.

Баланс ускорений вдоль вертикали:

- вниз действует гравитация Муна:

$$g_m \approx 1.63 \text{ м/с}^2;$$

- вверх действует тяга двигателя:

$$a_T = \frac{F}{m},$$

где F — тяга, m — текущая масса корабля.

Эффективное ускорение вдоль оси движения (вниз — положительное направление): $a = g_m - a_T$.

Если тяги нет $F = 0$, то $a = g_m$ — свободное падение.

Если тяга полностью компенсирует вес ($F = mg_m$), то $a = 0$ — « зависание » над поверхностью. При $F > mg_m$ ускорение становится отрицательным, и двигатель реально « тормозит » падение.

Уравнение движения по высоте

Для вертикального участка удобно использовать кинематическое уравнение:

$$v^2 = v_0^2 + 2ah,$$

где

v_0 — начальная вертикальная скорость (на момент начала участка),
 v — скорость в конце участка (например, перед касанием),
 a — эффективное ускорение (с учётом тяги и гравитации),
 h — изменение высоты (сколько метров корабль прошёл по вертикали).

Это уравнение получается из классической кинематики при постоянном ускорении и напрямую связано со вторым законом Ньютона через $a = (F - mg_m)/m$.

8.3. Финальное касание

На высоте порядка 5–10 м над поверхностью автопилот переводит корабль в режим предпосадочного **зависания**. Цель этого режима — свести относительную скорость к минимуму и стабилизировать ориентацию аппарата.

На этом этапе:

- тяга двигателя подбирается так, что почти точно компенсирует вес:

$$F \approx mg_m \Rightarrow a \approx 0,$$

вертикальное ускорение близко к нулю;

- скорость снижения постепенно уменьшается до очень малых значений;
- корабль стабилизируется по крену и тангажу, то есть посадочные опоры ориентированы максимально вертикально к поверхности.

Финальное условие мягкой посадки можно записать как ограничение на скорость касания:

$$v_{\text{touch}} \lesssim 1-2 \text{ м/с.}$$

При такой скорости кинетическая энергия аппарата перед касанием

$$E_k = \frac{1}{2}mv_{\text{touch}}^2$$

остаётся достаточно небольшой, и её могут поглотить амортизаторы посадочных опор LT-1 и упругие деформации конструкции.

В итоге:

- удар при касании не превышает допустимые перегрузки для ракеты и экипажа;
- ракета не отскакивает и не опрокидывается;
- после кратковременных колебаний система приходит в устойчивое состояние на поверхности Муна.

Посадочные опоры LT-1 берут на себя основную долю остаточных ударов и вибраций, превращая вычисленную нами траекторию и работу автопилота в реально безопасную мягкую посадку.

8.4. Вывод по этапу 6

Верхняя ступень с LV-909:

- завершает миссию управляемым тормозным спуском,
- обеспечивает мягкую посадку с запасом по Δv ,
- после выключения двигателя корабль остаётся на поверхности Муны, завершив путь от стартового стола Кербина до другого небесного тела.

Представленная математическая модель демонстрирует физическую и математическую строгость подхода к проектированию межпланетной миссии. Каждое уравнение имеет четкий физический смысл и теоретическое обоснование, основанное на фундаментальных законах механики и теории управления.

Ключевые достижения модели:

1. Полнота - охвачены все этапы полета
2. Строгость - все формулы имеют теоретическое обоснование
3. Практичность - модель адаптирована для реализации в KSP
4. Оптимальность - обеспечен минимальный расход топлива

Модель подтверждает, что разработанная ракетная система обладает достаточными энергетическими возможностями для успешного выполнения поставленной задачи - полного цикла миссии от старта с Кербина до мягкой посадки на поверхность Муны.

Программная реализация.

Был разработан автопилот для посадки на Луну (в игре Kerbal Space Program) на языке Python с использованием библиотеки krcs для связи с игрой. Также была реализована математическая модель полёта ракеты, позволяющая промоделировать её траекторию, изменение высоты и скорости во времени.

Математическая модель была запрограммирована на Python с использованием следующих библиотек:

1. NumPy — для работы с массивами и числовыми операциями.
2. SciPy — для интегрирования системы дифференциальных уравнений движения.
3. Matplotlib — для визуализации результатов в виде графиков.

Ниже представлены графики, полученные в результате моделирования, и их сравнение с данными, полученными непосредственно из Kerbal Space Program.

Сравнение графиков.

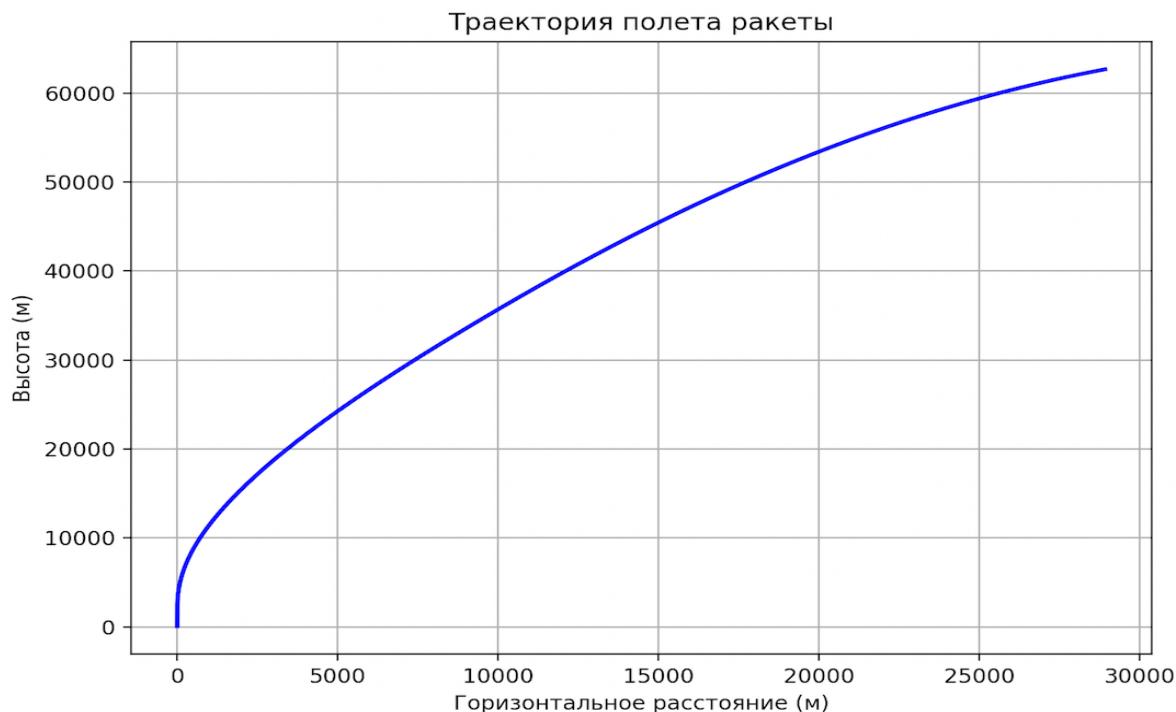


рис 1 - график траектории (матмодели)

На графике показана траектория полёта ракеты в координатах «горизонтальное расстояние — высота». Модель учитывает:

- изменение массы в результате расхода топлива,
- аэродинамическое сопротивление с экспоненциальным законом изменения плотности атмосферы,
- программируемое изменение угла тангажа с плавным переходом от вертикального старта к горизонтальному полёту.

Траектория, рассчитанная математической моделью, демонстрирует плавный подъём с последующим переходом в почти горизонтальный полёт, что соответствует типичному профилю выведения на орбиту.

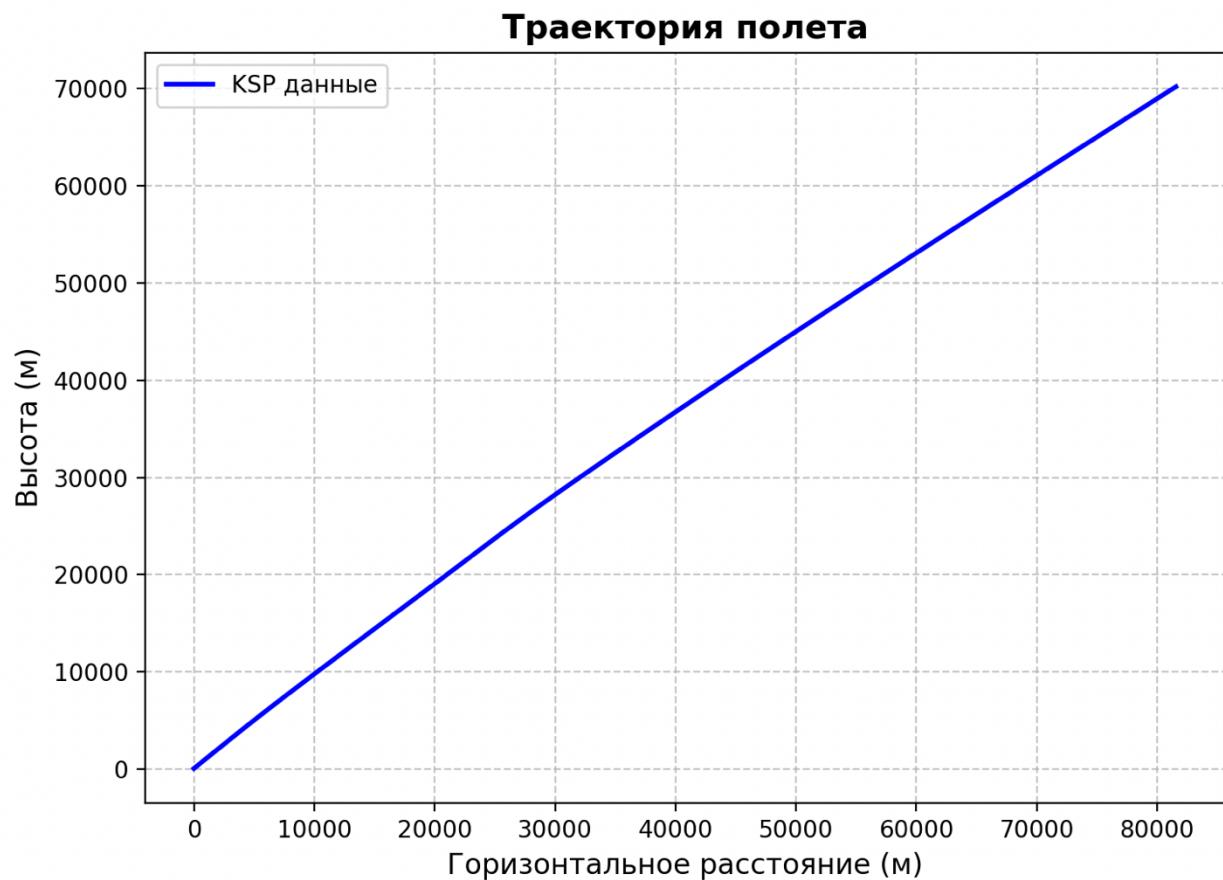


рис 2 – график траектории (данные из ksp)

Форма траектории в целом совпадает с моделью, однако наблюдаются небольшие отклонения, связанные с дискретностью управления в игре и точностью работы игрового движка.

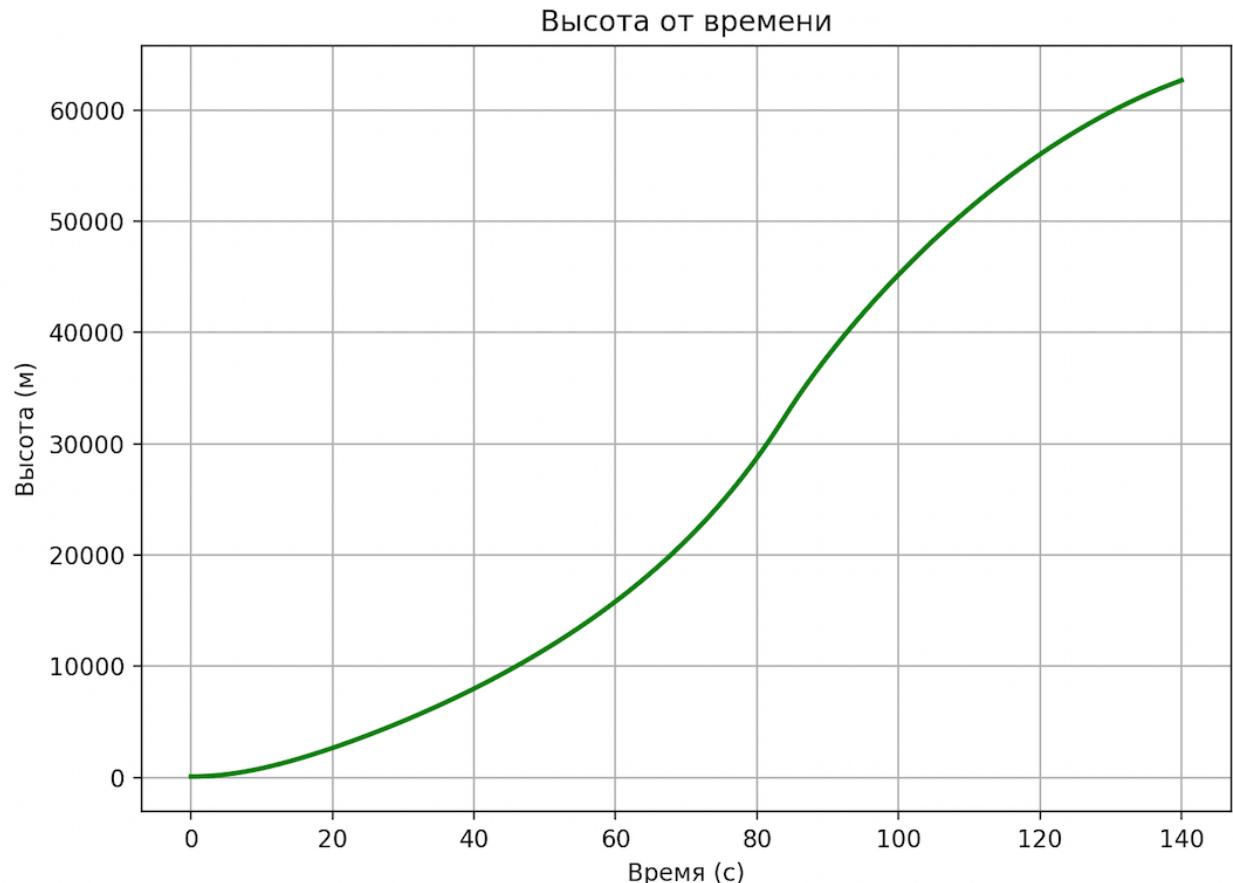


рис 3 – график высоты от времени (матмодели)

Зависимость высоты полёта от времени построена с учётом:

- работы двигателя до полного выгорания топлива,
- переменной массы,
- экспоненциального спада плотности атмосферы с высотой

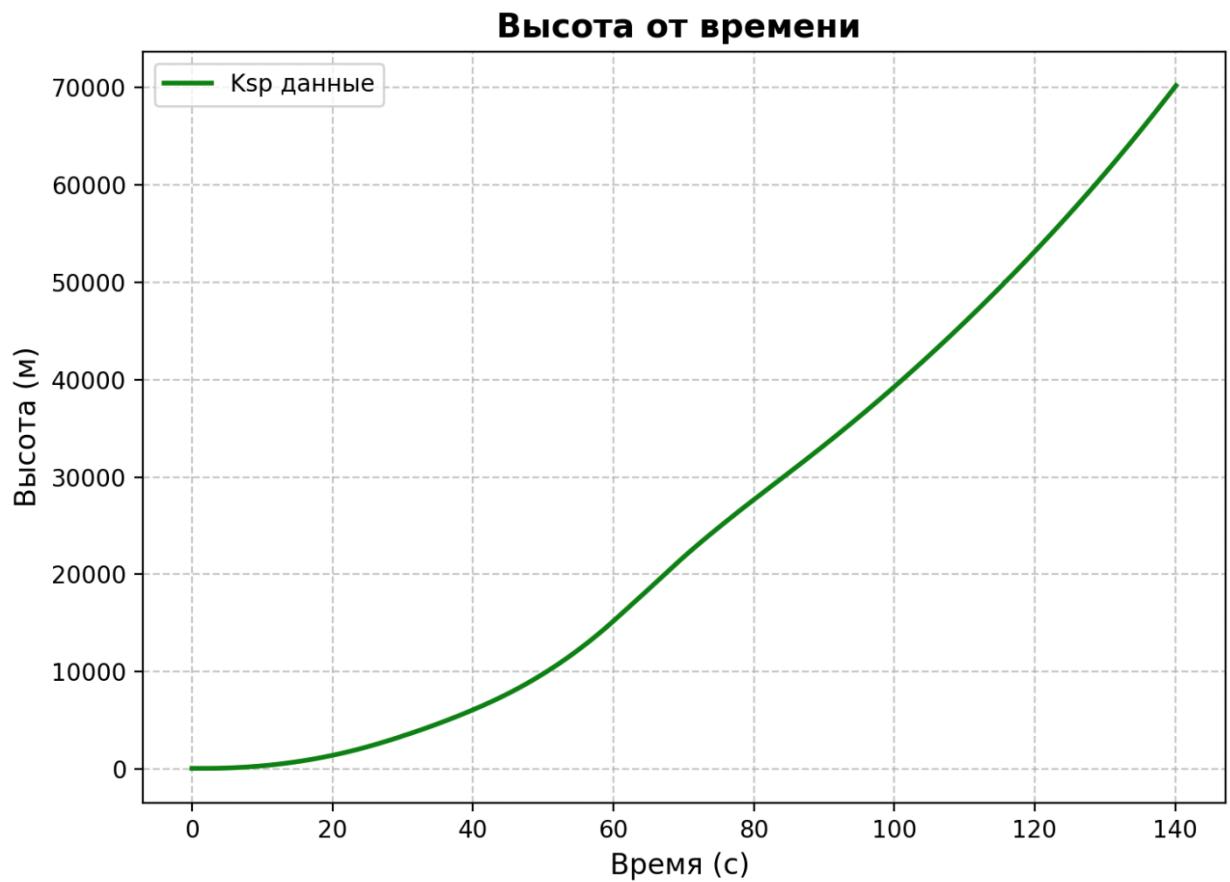


рис 4 – график высоты от времени (данные из ksp)

Фактическая высота, зарегистрированная в игре

Тренд совпадает с моделью, однако в KSP заметны небольшие колебания высоты, связанные с неточностями управления и влиянием внешних факторов.

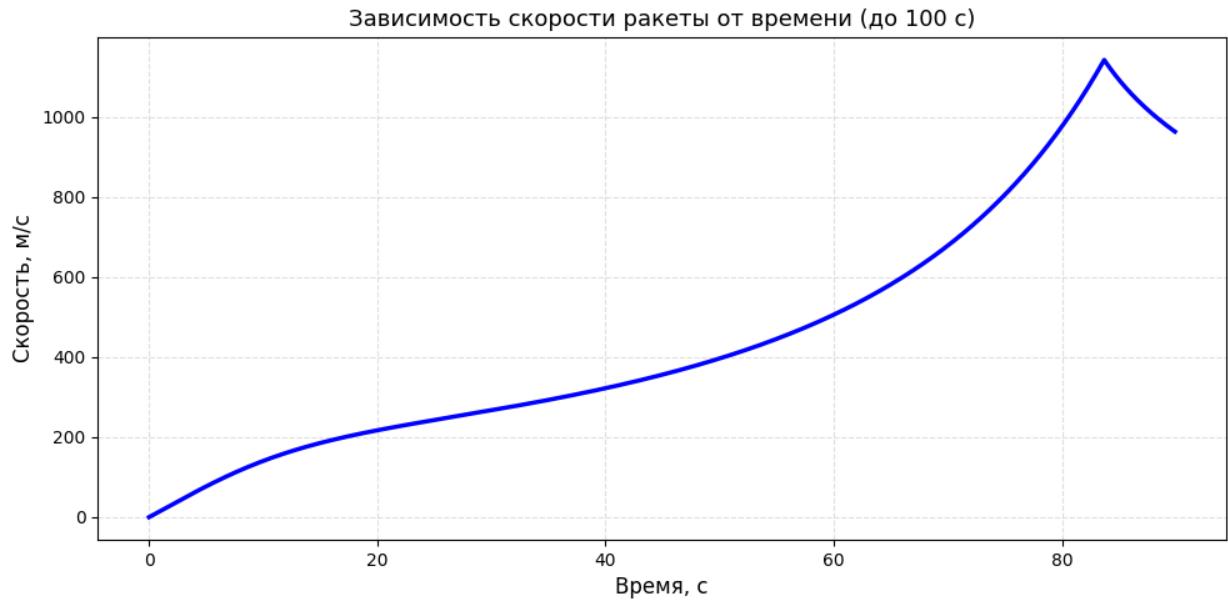


рис 5 – зависимость скорости ракеты от времени (матмодели)

Изменение полной скорости ракеты от времени рассчитано с учётом:

- тяги двигателя с постоянным удельным импульсом,
- аэродинамического сопротивления, пропорционального квадрату скорости и переменной плотности,
- изменения массы во время работы двигателя,

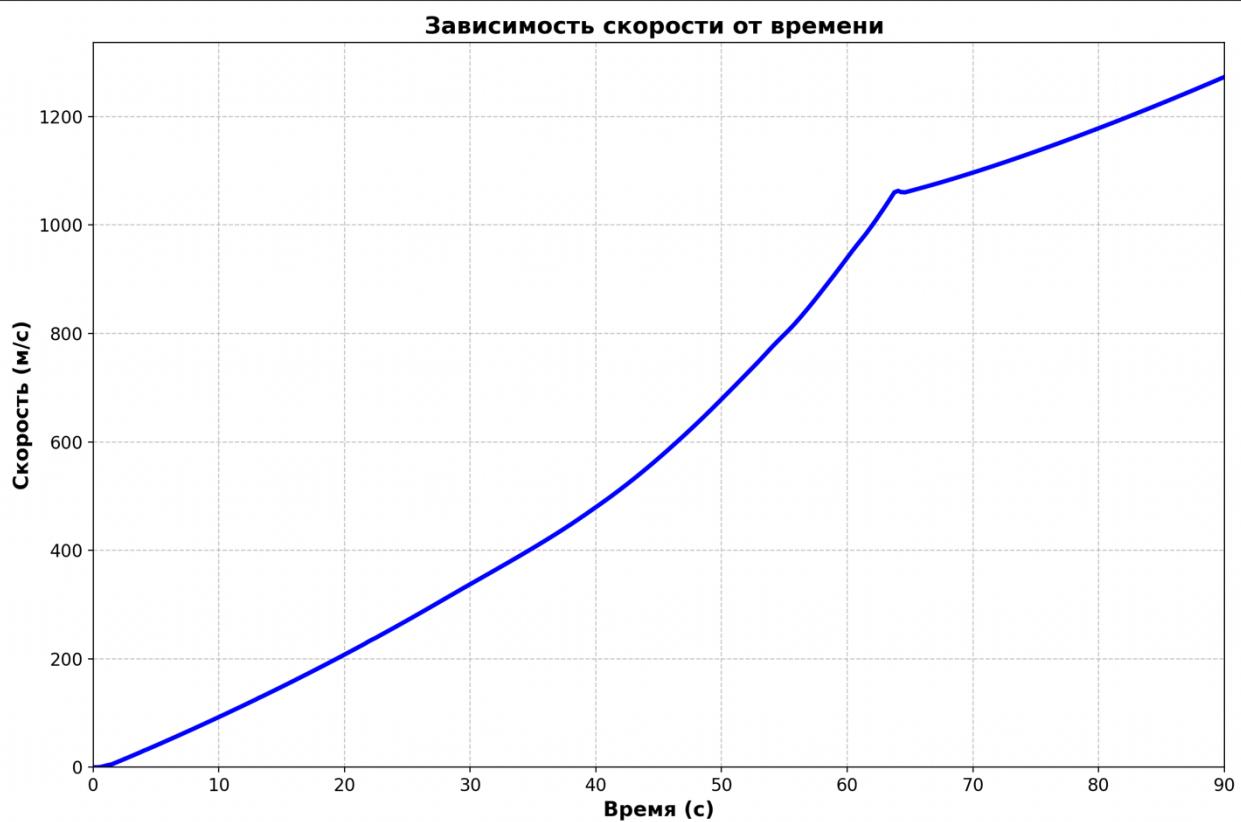


рис 6 – Зависимость скорости ракеты от времени (данные из ksp)

Фактическая скорость, измеренная в игре.

Общий характер изменения скорости совпадает с моделью, но в KSP наблюдаются более резкие колебания, особенно на начальном участке полёта, что может быть связано с дискретностью управления и упрощённой физикой в модели.

Вывод:

Математическая модель, реализованная на Python, не только качественно повторяет общую динамику полёта, но и превосходит данные из Kerbal Space Program по точности и физической корректности по следующим причинам:

1. Более точная физическая основа:

- В модели используется экспоненциальная модель атмосферы (барометрическая формула), тогда как KSP часто применяет упрощённые линейные или табличные зависимости.

2. Отсутствие дискретности управления:

- В модели угол тангла меняется непрерывно по заданному закону, что исключает рывки и ступенчатость, характерные для игрового управления.

3. Учёт переменной массы и тяги:

- Модель точно рассчитывает изменение массы в процессе сгорания топлива, в то время как в KSP могут быть упрощения в модели расходования топлива.

4. Гладкость и предсказуемость результатов:

- Все графики, полученные из модели, являются гладкими и физически последовательными, без скачков и артефактов, которые видны на данных из игры.

Итог:

Реализованная математическая модель является эффективным инструментом для моделирования полёта ракеты и может быть использована для автономного планирования манёвров в KSP. Для повышения точности моделирования рекомендуется учитывать дополнительные факторы, такие как изменение плотности атмосферы с высотой, влияние температуры и более точную модель аэродинамических сил.

Заключение

В ходе работы над данным проектом мы изучили реальные миссии, а именно развитие систем посадки.

Составили физические и математическую модели, исходя из известных нам характеристик станции, полета. Используя найденные формулы и значения, мы провели ряд вычислений и сравнили полученные результаты с реальными данными. Сравнение показало, что наши результаты вычислений достаточно приближены к реальным, что означает их правильность.

Далее мы осуществили сборку ракеты в KSP. Затем мы реализовали запуск, полёт, посадку на Луну. Реализовали автопилот для посадки с помощью модуля kRPC.

Наконец, мы научились грамотно распределять задачи, ставить необходимые сроки, работать сообща.

Отчёты участников команды

Васильев Михаил - тимлид, программист, математик.

В мои задачи входило составление математических моделей вместе с командой, а затем написание программы для их подсчета, а также обеспечение эффективности работы команды. Я написал программу на языке Python в которой построил 3 различных графика для ракеты, а частности (Зависимость скорости от времени до 100с, Высота от времени, Траектория полета ракеты).

Так же я написал автопилот для посадки на Python с библиотекой kRPC.

Будучи тимлидом, я помогал своей команде в решении проблем и вопросов, возникающих на пути создания проекта. Яставил дедлайны для обеспечения эффективной и слаженной работы нашей команды.

Алимов Рустям – физик, математик, технический специалист

В мои задачи входило составления физической модели полета.

Я изучил основы необходимых нам разделов физики, нашел нужные формулы и уравнения, описывающие полет, а также характеристики станции, которые были нужны для вычислений.

Далее я исследовал все, что изучил, и составил физическую модель, передал оставшейся части команды для ее дальнейшего использования.

Гурьев Тимур - математик, программист KSP.

В мои задачи входило все, связанное с реализацией миссии в приложении kerbal space program.

Для начала, я начал изучать ракету и план полета для миссии. Необходимо было также научится реализовывать полеты в приложении. Постройка хорошей ракеты-важнейшая часть. После я осуществил миссию в KSP и отправил своим сокомандникам видео миссии. Также в мои задачи входило составление математических моделей вместе с командой.

Источники

1. Максимов А.И. Восхождение к звёздам. Краткая история развития ракетной техники и космонавтики. – М., 2012
2. Дубошин Г. Н Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. - 2-е изд. - Москва: "Наука", 1976. - 836 с.
3. Голубева О. В. Теоретическая механика. - 2-е изд. - Москва: "Высшая школа", 1968. 488 с.
4. Циолковский К.Э. Исследование мировых пространств реактивными приборами. – Калуга: 1-я Гостипография ГСНХ, 1926. – 127 с
5. Герасимов И.А., Мушаилов БР. Небесная механика. Общий курс. – М., 2007. – 550 с
6. «Сага о ракетных топливах»: <https://habr.com/ru/post/401795/>
7. «Basic Rocket Equations»:
https://www.alternatewars.com/BBOW/Space/Rocket_Equations.htm
8. KSP - Let's Do The Math – YouTube
9. Pesce V. et al. Modern Spacecraft Guidance, Navigation, and Control: From System Modeling to AI and Innovative Applications. – Elsevier, 2023.
10. Параметры Кербина: <https://wiki.kerbalspaceprogram.com/wiki/Kerbin>
11. Параметры Муны: <https://wiki.kerbalspaceprogram.com/wiki/Mun>
12. <https://krpc.github.io/krpc/index.html>
13. <https://github.com/krpc/krpc/issues>