Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский
университет информационных технологий, механики и оптики»

Кафедра Вычислительной Техники
Дисциплина: Информатика

Лабораторная работа №7
"Работа с системой компьютерной вёрстки TeX"

Варианты: 54, (1994)

Выполнил: Кузнецов Максим Александрович
Группа: P3111
Преподаватель: Малышева Татьяна Алексеевна

Санкт-Петербург
2020

В школьном курсе математики свойствам элементарных неравенств и методам их доказательства отводится значительно место. Однако на вступительных экзаменах в вузы многие абитуриенты с трудом применяют неравенства при исследовании элементарных функций и решении задач на максимум и минимум (преимущественно геометрического и физического содержания). Между тем, для решения подобных задач достаточно знать и, главно, уметь применять сравнительно несложные неравенства.

К числу таких неравенств относится, прежде всего, неравенство Коши: среднее арифмитическое двух положительных чисел a и b не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[3]{ab} \qquad (1)$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[3]{ab}$$

Наряду с неравенством Коши абитуриентам полезно знать некоторые следствия из него, а именно:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \qquad (2)$$

$$a^2+b^2 \geq 2ab \qquad (3)$$

$$ab \leq (\frac{a+b}{2}) \qquad (4)$$

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2) \qquad (5)$$

(выведите их самостоятельно).

Как известно, в неравенстве 1 равенство достигается лишь при $a = b$. Следовательно, и неравенства 2-5 переходят в равенства лишь при $a = b$.

Неравенства 1–5 эквивалентны друг другу (при $a > 0, b > 0$), любое из них можно применять при решении задач, и, как показывает практика вступительных экзаменов, решение конкурсных задач на максимум и минимум легко находится именно с помощью этих неравенств. Рассмотрим ряд примеров.

Задача 1. *Найти наибольшее значение произведения двух переменных, сумма которых постоянна.*

Этот вопрос решает неравенство 4, утверждающее, что произведение двух положительных чисел не больше квадрата их среднего арифмитического. Действительно, если a и b–две переменные, $a + b = M$, где M–некоторая постояная, то при $a \neq b$ согласно 4 $ab < (\frac{M}{2})^2$, а при $a = b$ неравенство 4 переходит в равенство $ab = (\frac{M}{2})^2$

Аналогично, если требуется найти наименьшее значение суммы двух переменных, произведение которых постоянно, то применяется неравенство 2

Задача 2. (МГУб мехмат 1966). *Из гранита нужно вырубить постамент в форме прямоугольного параллелепипеда, высота которого должна быть равна диагонали основания, а площадь основания должна быть равна 4 m^2. При каких длинах сторон основания площадь поверхности постамента будет наименьшей?*

Пусть x и y – длины (в метрах) сторон прямоугольника, лежащего в основании постамента. Тогда по условию задачи высота z постамента равна $\sqrt{x^2+y^2}$, а площадь его поверхности (в m^2)

$$S = 2(x+y) \cdot \sqrt{x^2+y^2} + 8$$

при этом xy = 4. Воспользовавшись неравенствами (2) и (3), получим $x+y \geq 2\sqrt{xy} = 4; x^2+y^2 \geq 2xy = 8$,откуда $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{8}$

Расмотрим как и раньше равенство

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$$

с различными простыми $p_1, p_2..., p_k$ и натуральными показателями $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ (Такое представление называется каноническим разложением числа N

Теорема. Если

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k} -$$

каноническое разложене натурального числа N, то

$$\tau(N) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1).$$

Доказательство. Любой положительный делитель числа N имеет вид $p_1^{\beta_1}, p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k}$, где $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, \leq \beta_2 \leq$

$\alpha_2 ... \leq \beta_k \leq \alpha_k$. Например, если все $\beta_k = 0$, то делитель равен N. Сколько же таких делителей можно образовать? Показатель β_k принимает ровно $\alpha_1 + 1$ значений и т.д. Поэтому различных делителей вида $p_1^{\beta_1}$ будет $1 + 1$, делителей вида $p_2^{\beta_2}$ будет $\alpha_2 + 1; p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}$ будет ровно $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)$. Продолжая этот процесс дальше, получим требуемый результат.

Пользуясь этой формулой, можно найти число делителей любого натурального числа, но сначала придется разложить это число на множители, чтобы узнать показатели $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. А это не всегда просто сделать: ведь для очень большого числа трудно понять, простое оно или составное, тем более – написать его каноническое разложение.

Это не единственный недостаток приведенной формулы. Поведение функции $\tau(N)$ хаотично: с одной стороны, для каждого простого числа $\tau(p) = 2$, и простых чисел бесконено много, т. е. как угодно далеко во второй строке нашей таблицы будут попадаться двойки; с другой стороны, ясно, что для некоторых N число делителей может быть сколько угодно большим – чтобы добиться этого, нужно лишь взять число, в каноническом разложении которого показатели $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_k$ достаточно велики. На рисунке 1 изображен график функции $\tau(N)$, точки для наглядности соединены отрезками. Видите, какие получаются «горы и ущелья?»

N	sfsf					6	7	8	9	10	11	12
τ	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6

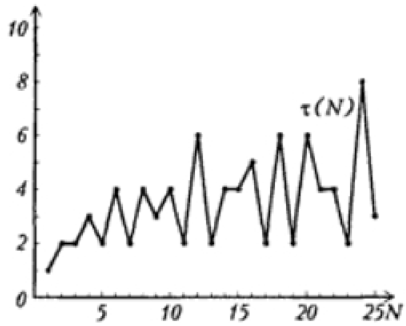

Рис. 1