Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Дисциплина: **Вычислительная математика**

Лабораторная работа №4

"Аппроксимация фунцкии"

Вариант: 9

Выполнил: Кузнецов Максим Александрович

Группа: P3211

Преподаватель: Малышева Татьяна Алексеевна

Санкт-Петербург 2022 г

Цель работы:

Цель лабораторной работы: найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов

Условия и задание:

№ варианта определяется как номер в списке группы согласно ИСУ.

Вычислительная реализация задачи:

a) Для заданной функции (см. таблицу 1) построить наилучшие линейное и квадратичное приближения по 11 точкам указанного интервала.
b) Найти среднеквадратические отклонения. Ответы дать с тремя знаками после запятой.
c) Построить графики линейного и квадратичного приближений и заданной функции.
d) ***Привести в отчете подробные вычисления***.

Программная реализация задачи:

a) Предусмотреть ввод исходных данных из файла/консоли (таблица $y=f(x)$ должна содержать 10–12 точек).
b) Реализовать метод наименьших квадратов, исследуя все функции:
   - линейную функцию;
   - полиномиальную функцию 2-й степени;
   - полиномиальную функцию 3-й степени;
   - экспоненциальную функцию;
   - логарифмическую функцию;
   - степенную функцию.

c) Предусмотреть вывод результатов в файл/консоль.
d) Для линейной зависимости вычислить коэффициент корреляции Пирсона.
e) Программа должна отображать наилучшую аппроксимирующую функцию.
f) Организовать вывод графиков функций, графики должны полностью отображать весь исследуемый интервал (с запасом).

Вычислительная задача по варианту:

9	$y = \dfrac{4x}{x^4 + 5}$	$x \in [0, 2] \quad h = 0{,}2$

X	Y
0	0
0.2	0.159
0.4	0.318
0.6	0.469
0.8	0.592
1	0.667
1.2	0.679
1.4	0.633
1.6	0.554
1.8	0.465
2	0.381

Квадратичная аппроксимация:

$\sum x_i = 11$

$$\sum x_i^2 = 15.4$$

$$\sum x_i^3 = 24.3$$

$$\sum x_i^4 = 40.5$$

$$\sum y_i = 4.9$$

$$\sum x_i y_i = 5.8$$

$$\sum x_i^2 y_i = 7.9$$

Подставим в систему:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases}$$

Решим, получим:

a0 = -0.277

a1 = 1.888

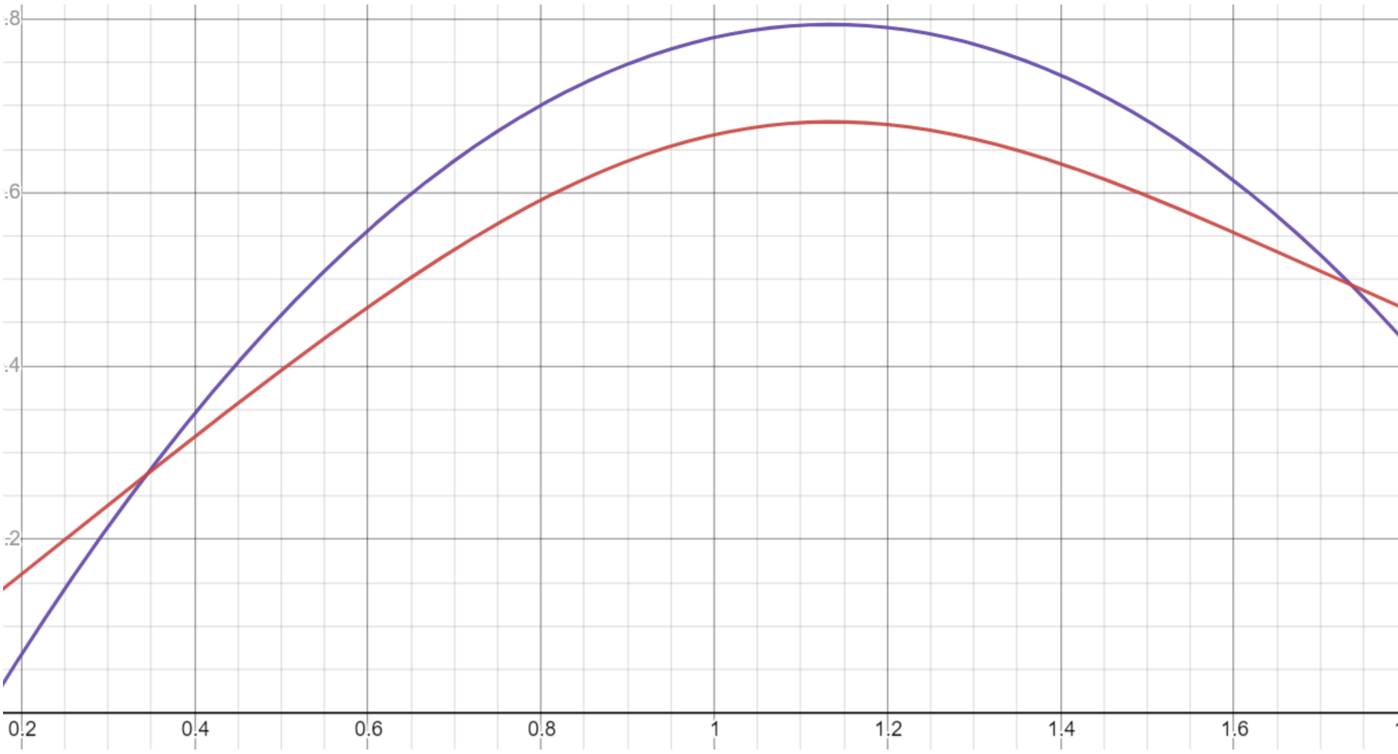
a2 = -0.832

Полученная аппроксимация: -0.277+1.888x-0,832x^2

X	P(X)
0	0.277
0.2	0.067
0.4	0.345
0.6	0.556
0.8	0.701
1	0.779
1.2	0.790
1.4	0.735
1.6	0.614
1.8	0.426
2	0.171

Среднеквадратичное отклонение: 0.101414

График:



Линейная аппроксимация:

$$\sum x_i = 11$$

$$\sum x_i^2 = 15{,}4$$

$$\sum y_i = 4{,}9$$

$$\sum x_i y_i = 5{,}8$$

Решим следующую систему

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Полученные результаты

a = 0,205

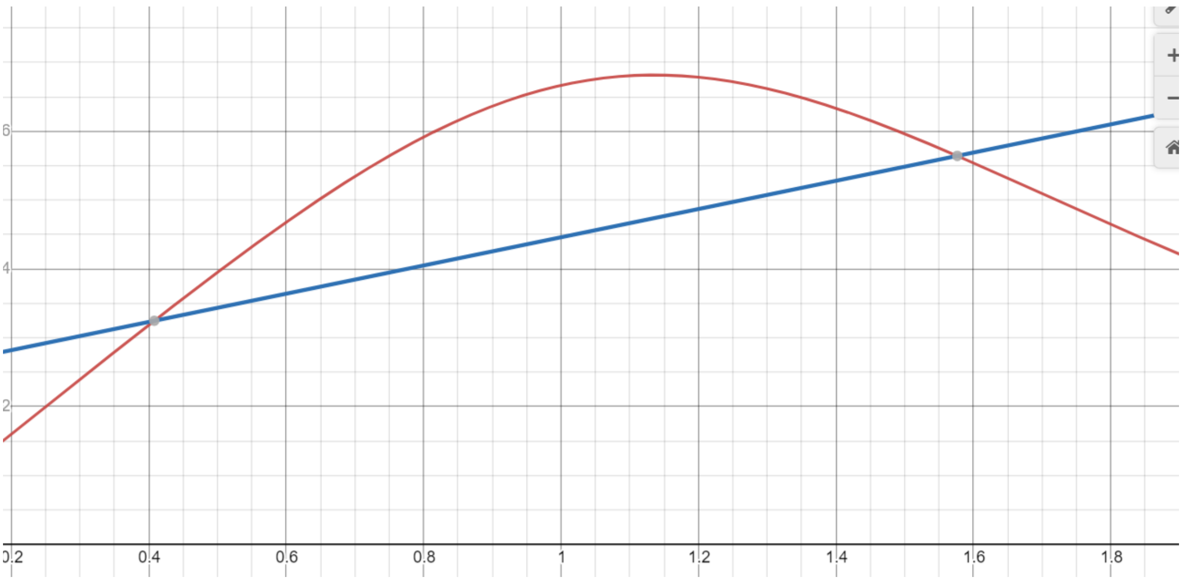
b = 0,241

Полученная аппроксимация: 0,205x + 0,241

X	P(X)
0	0.241
0.2	0.282
0.4	0.323
0.6	0.364
0.8	0.405
1	0.446
1.2	0.487
1.4	0.528
1.6	0.569
1.8	0.610
2	0.651

Среднеквадратичное отклонение: 0,1680

График



Листинг программы:

```
import numpy as np
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.lines as mlines
from numpy import genfromtxt
import sys
import math
import pandas as pd
from IPython.display import display, HTML
import matplotlib.lines as mlines
from matplotlib.pyplot import figure
from math import sqrt

x: int
y: int
content = []

def draw(f, a, b, c, d):
    plt.figure(figsize=(8, 4))
    plt.plot(x, y, 'ko')
    plt.plot(x, f)
    plt.grid()
    plt.show()
def cof_cor(Xs, Ys):
    X_mean = np.mean(Xs)
    Y_mean = np.mean(Ys)
    numerator = 0
    denominator_x = 0
    denominator_y = 0
    for x, y in zip(Xs, Ys):
        numerator += (x-X_mean)*(y-Y_mean)
        denominator_x += (x-X_mean) ** 2
        denominator_y += (y-Y_mean) ** 2
    return numerator / sqrt(denominator_x * denominator_y)

def lin_approx(Xs, Ys):
    A = np.array([[sum(Xs ** 2), sum(Xs)],[sum(Xs), len(Xs)]])
    B = np.array([sum(Xs*Ys), sum(Ys)])
    a, b = np.linalg.solve(A, B)
    return a, b

def linear(array):
    Xs = np.array(array[0])
    Ys = np.array(array[1])
```

```python
    #Подсчет аппроксимации
    a, b = lin_approx(Xs, Ys)
    print(f'Коэффициент корреляции = {cof_cor(Xs, Ys)}')
    f = a * Xs + b
    #СКО
    eps = Ys - f
    delta = (sum(eps ** 2) / len(Xs)) ** 0.5
    #мера отклонения
    S = sum(eps ** 2)
    print(f'\n\nЛинейная аппроксимация\nf = {a} * x + {b}')
    print(f'Мера отклонения = {S}')
    print(f'СКО = {delta}\n\n')
    draw(f, a, b, 0, 0)

def squared(array):
    Xs = np.array(array[0])
    Ys = np.array(array[1])
    #Подсчет аппроксимации
    A = np.array([[len(Xs), sum(Xs), sum(Xs ** 2)],
                  [sum(Xs), sum(Xs ** 2), sum(Xs ** 3)],
                  [sum(Xs ** 2), sum(Xs ** 3), sum(Xs ** 4)]])
    B = np.array([sum(Ys), sum(Xs*Ys), sum((Xs**2)*Ys)])
    c, b, a = np.linalg.solve(A, B)
    f = a * Xs ** 2 + b * Xs + c
    #СКО
    eps = Ys - f
    delta = (sum(eps ** 2) / len(Xs)) ** 0.5
    #Мера отклонения
    S = sum(eps ** 2)
    print(f'\n\nКвадратичная аппроксимация\nf = {a} * x^2 + {b} * x +{c}')
    print(f'Мера отклонения = {S}')
    print(f'СКО = {delta}\n\n')
    draw(f, a, b, c, 0)

def triple(array):
    Xs = np.array(array[0])
    Ys = np.array(array[1])
    #Подсчет аппроксимации
    A = np.array([[len(Xs), sum(Xs), sum(Xs ** 2), sum(Xs ** 3)],
                  [sum(Xs), sum(Xs ** 2), sum(Xs ** 3), sum(Xs ** 4)],
                  [sum(Xs ** 2), sum(Xs ** 3), sum(Xs ** 4), sum(Xs ** 5)],
                  [sum(Xs ** 3), sum(Xs ** 4), sum(Xs ** 5), sum(Xs ** 6)]])
    B = np.array([sum(Ys), sum(Xs*Ys), sum((Xs**2)*Ys), sum((Xs **3 )*Ys)])
    d, c, b, a = np.linalg.solve(A, B)
    f = a * Xs ** 3 + b * Xs ** 2 + c * Xs + d
    #СКО
    eps = Ys - f
    delta = (sum(eps ** 2) / len(Xs)) ** 0.5
```

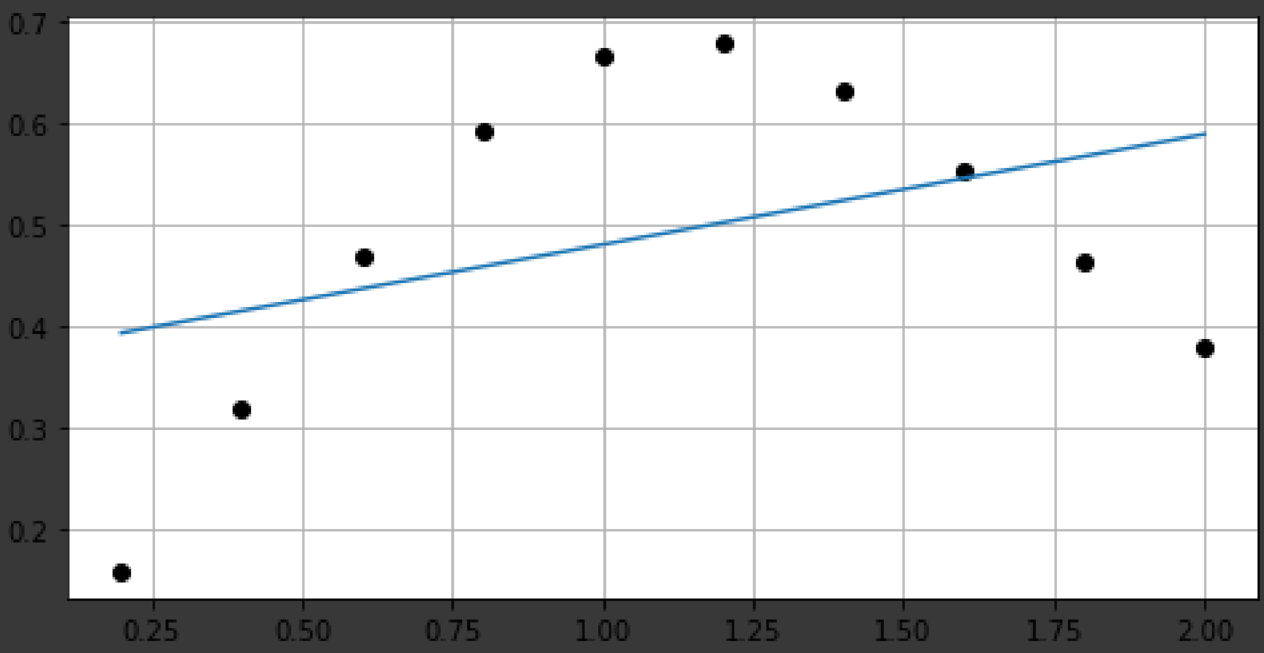
```
    #Мера отклонения
    S = sum(eps ** 2)
    print(f'\n\nТретичная аппроксимация\nf = {a} * x^3 + {b} * x^2 + {c} * x + {d}')
    print(f'Мера отклонения = {S}')
    print(f'СКО = {delta}\n\n')
    draw(f, a, b, c, d)
    return a, b, c, S, delta

def power(array):
    Xs = np.array(array[0])
    Ys = np.array(array[1])
    log_Xs = np.log(Xs)
    log_Ys = np.log(Ys)
    if True in np.isnan(log_Xs) or True in np.isnan(log_Ys):
        raise ValueError
    #Подсчет аппроксимации
    b, a = lin_approx(log_Xs, log_Ys)
    a = np.exp(a)
    f = a * (Xs ** b)
    #СКО
    eps = Ys - f
    delta = (sum(eps ** 2) / len(Xs)) ** 0.5
    #Мера отклонения
    S = sum(eps ** 2)
    print(f'\n\nСтепенная аппроксимация\nf = {a} * x ** {b}')
    print(f'Мера отклонения = {S}')
    print(f'СКО = {delta}\n\n')
    draw(f, a, b, 0, 0)

def exponential(array):
    Xs = np.array(array[0])
    Ys = np.array(array[1])
    log_Ys = np.log(Ys)
    if True in np.isnan(log_Ys):
        raise ValueError
    #Подсчет аппроксимации
    b, a = lin_approx(Xs, log_Ys)
    a = np.exp(a)
    f = a * (np.exp(Xs * b))
    #СКО
    eps = Ys - f
    delta = (sum(eps ** 2) / len(Xs)) ** 0.5
    #Мера отклонения
    S = sum(eps ** 2)
    print(f'\n\nЭкспоненциальная аппроксимация\nf = {a} * e**(x * {b})')
    print(f'Мера отклонения = {S}')
    print(f'СКО = {delta}\n\n')
    draw(f, a, b, 0, 0)
```

```
    return a, b, '-', S, delta

def logarithm(array):
    Xs = np.array(array[0])
    Ys = np.array(array[1])
    log_Xs = np.log(Xs)
    if True in np.isnan(log_Xs):
        raise ValueError
    #Подсчет аппроксимации
    a, b = lin_approx(log_Xs, Ys)
    f = a * (log_Xs) + b
    #СКО
    eps = Ys - f
    delta = (sum(eps ** 2) / len(Xs)) ** 0.5
    #Мера отклонения
    S = sum(eps ** 2)
    print(f'\n\nЛогарифмическая аппроксимация\nf = {a} * ln(x) + {b}')
    print(f'Мера отклонения = {S}')
    print(f'СКО = {delta}\n\n')
    draw(f, a, b, 0, 0)
    return a, b, '-', S, delta
def run():
    again = True
    while again:
        again = False
        in_type = input('Введите:\n\t* k - если вводить с клавиатуры\n\t* f - если хот
ите вводить из файла\n')
        if in_type.strip() == 'k':
            line_x = input()
            content.append([float(x) for x in line_x.split(" ")])
            line_y = input()
            content.append([float(x) for x in line_y.split(" ")])
        elif in_type.strip() == 'f':
            with open("input.txt") as f:
              for line in f:
                content.append([float(x) for x in line.split(" ")])
            f.close()
        else:
            print('Введено неверно, попробуйте снова.')
            again = True
    global x
    x = np.array(content[0])
    global y
    y = np.array(content[1])
    linear(content)
    squared(content)
    triple(content)
    power(content)
```

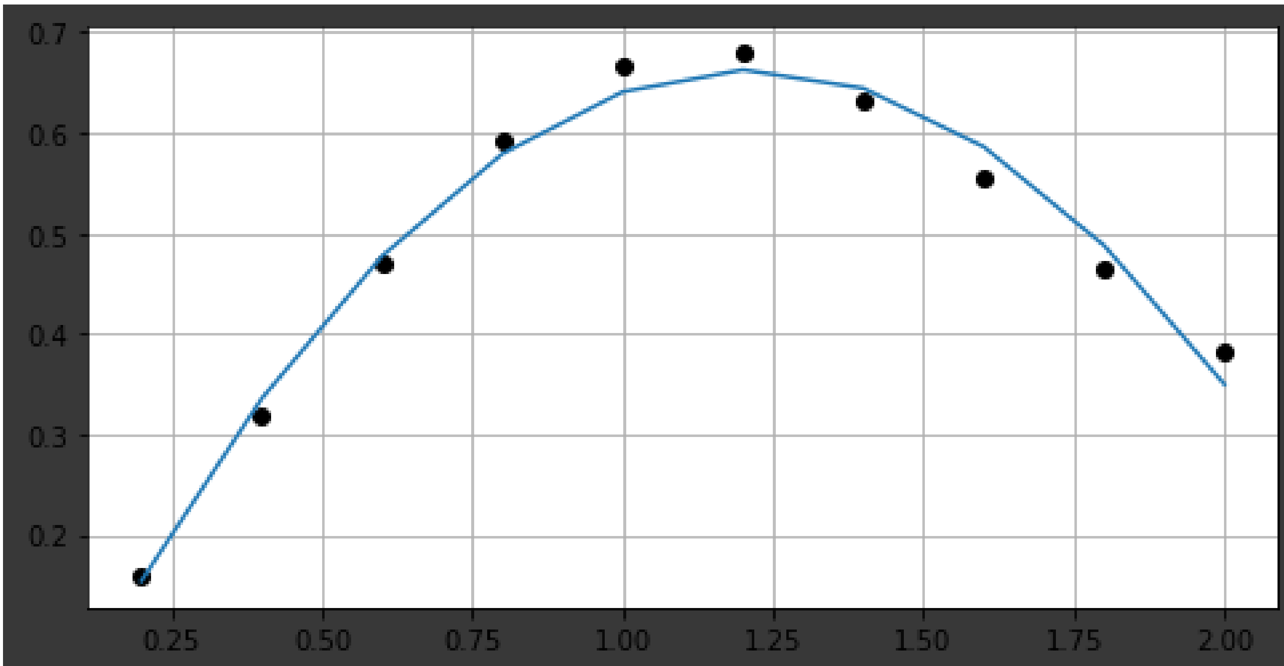
```
    exponential(content)
    logarithm(content)

run()
```

Пример работы:

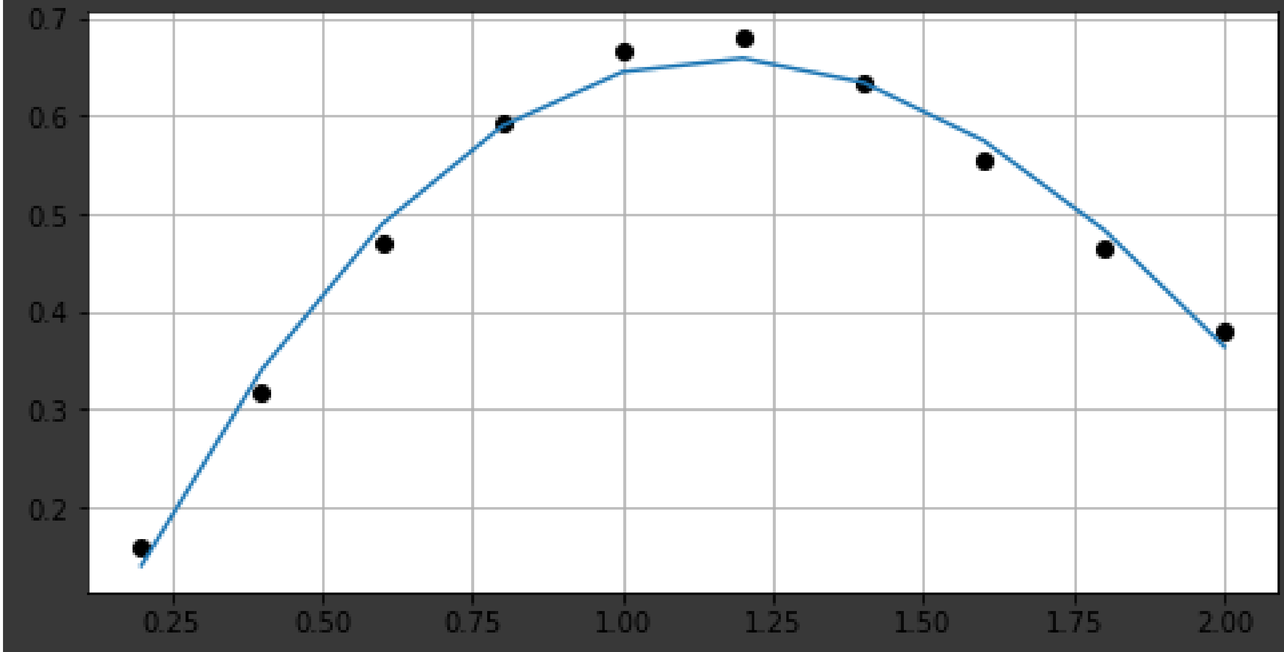
```
Введите:
        * k - если вводить с клавиатуры
        * f - если хотите вводить из файла
f
Коэффициент корреляции = 0.3917459046255321


Линейная аппроксимация
f = 0.1086969696969697 * x + 0.37213333333333337
Мера отклонения = 0.215072496969697
СКО = 0.1466535021640114
```



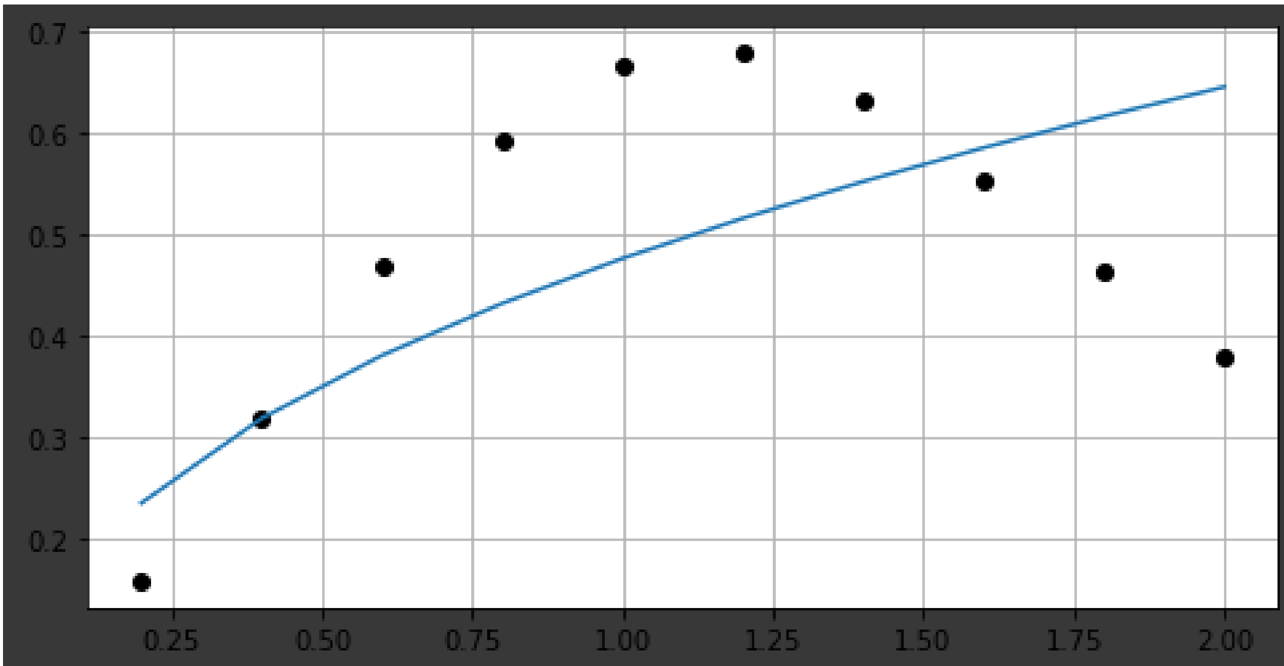

```
Квадратичная аппроксимация
f = -0.4996212121211979 * x^2 + 1.2078636363636035 * x +-0.06753333333331886
Мера отклонения = 0.004192375757575746
СКО = 0.020475291835712003
```



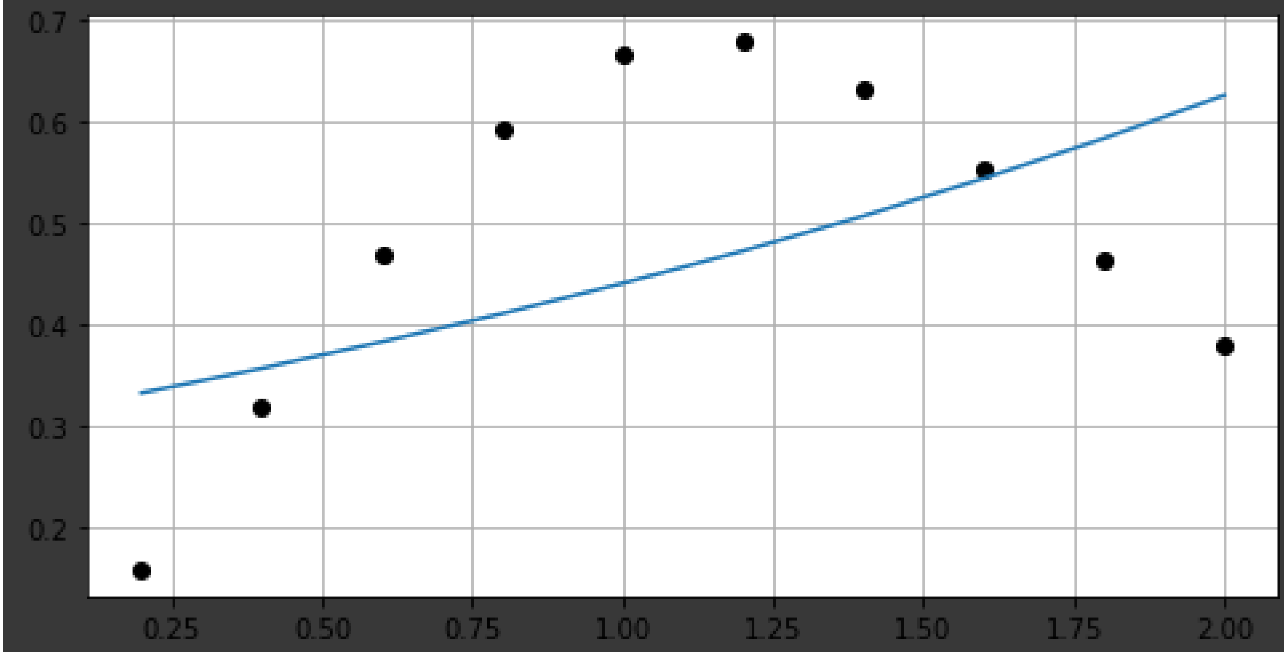
Третичная аппроксимация
f = 0.06983294483287979 * x^3 + -0.7300699300697105 * x^2 + 1.4204351204349117 * x + -0.11546666666661744
Мера отклонения = 0.003228345920745921
СКО = 0.017967598394738014



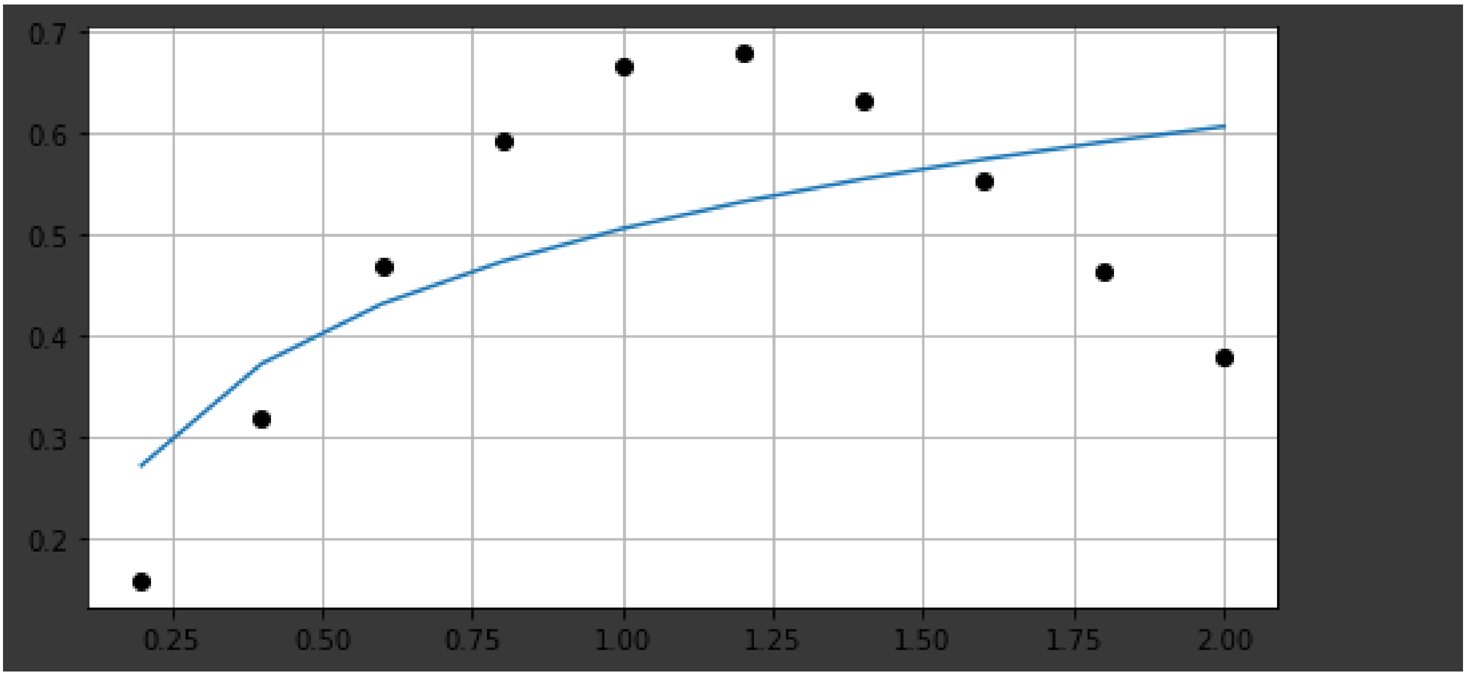
Степенная аппроксимация
f = 0.4769530595277907 * x ** 0.43762360608042794
Мера отклонения = 0.20224322072624246
СКО = 0.14221224304758098



Экспоненциальная аппроксимация
f = 0.31050865647035136 * e**(x * 0.3508027500223356)
Мера отклонения = 0.255583656520769
СКО = 0.15986983971993246



Логарифмическая аппроксимация
f = 0.1452428944189 7606 * ln(x) + 0.5060785607283772
Мера отклонения = 0.1520460441937742
СКО = 0.12330695203181945



Вывод:

В результате выполнения лабораторной работы я:

- Познакомился с видами аппроксимации функции
- На практике в коде и на бумаге посчитал и реализовал различные виды аппроксимаций
- Вспомнил о методе МНК