Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Дисциплина: **Вычислительная математика**

Лабораторная работа №3

"Численное интегрирование"

Вариант: 9

Выполнил: Кузнецов Максим Александрович

Группа: P3211

Преподаватель: Малышева Татьяна Алексеевна

Санкт-Петербург 2022 г

Цель работы:

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Условия и задание:

№ варианта определяется как номер в списке группы согласно ИСУ.

Вычислительная реализация задачи:

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1 (столбец 3), точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при $n = 6$.
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 6$.
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений.
6. В отчете ***отразить последовательные вычисления***.

Программная реализация задачи:

1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя, исходя из варианта:
   - Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
   - Метод трапеций
   - Метод Симпсона
2. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
3. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
4. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.
5. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

Вычислительная задача по варианту:

1. Вычисление интеграла точно:

$$\int_1^2 (2x^3 - 3x^2 + 5x - 9)\,dx$$

$$2\int_1^2 x^3\,dx - 3\int_1^2 x^2\,dx + 5\int_1^2 x\,dx - 9 \times \int_1^2 1\,dx$$

$$\frac{15}{2} - 7 + \frac{15}{2} - 9$$

Это равно -1. (Решение через Ньютона-Лейбница)

2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при $n = 6$

$$c_6^0 = c_6^6 = \frac{41(b-a)}{840}, \quad c_6^1 = c_6^5 = \frac{9(b-a)}{35}, \quad c_6^2 = c_6^4 = \frac{9(b-a)}{280}, \quad c_6^3 = \frac{34(b-a)}{105}$$

$$\int_1^2 (2x^3 - 3x^2 + 5x - 9)dx \approx \frac{41(2-1)}{840} * f\left(\frac{6}{6}\right) + \frac{9(2-1)}{35} * f\left(\frac{7}{6}\right) + \frac{9(2-1)}{280} * f(8/6) + \frac{34(2-1)}{105} * f(9/6) + \frac{9(2-1)}{280} * f(10/6) + \frac{9(2-1)}{35} * f(11/6) + \frac{41(2-1)}{840} * f(12/6) =$$

$$-\frac{41}{168} + \frac{41}{168} - \frac{22}{21} + \frac{13}{21} - \frac{79}{840} + \frac{1}{120} - \frac{17}{35}$$

Если сложить, то получим -1. А значит – все решено верно.

3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при n=6

Метод средних прямоугольников:

h=(2-1)/6=1/6

i	0	1	2	3	4	5	6
X(i)	1	1+1/6	1+2/6	1+3/6	1+4/6	1+5/6	2
Y(i)	-5	-110/27	-79/27	-3/2	7/27	65/27	5
X(i-1/2)		13/12	5/4	17/12	19/12	7/4	23/12
Y(i-1/2)		-3941/864	-113/32	-1945/864	-575/864	41/32	3149/864

Итого сумма нижней строки равна = -73/12. Умножим на 1/6 и получим -1.0138 что примерно равно точному значению -1.

Метод трапеций:

i	0	1	2	3	4	5	6
X(i)	1	1+1/6	1+2/6	1+3/6	1+4/6	1+5/6	2
Y(i)	-5	-110/27	-79/27	-3/2	7/27	65/27	5

$$h * \left(\frac{Yo + Yn}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} Yi\right) = \frac{1}{6} * \left(\frac{-5+5}{2} + \left(-\frac{110}{27} - \frac{79}{27} - \frac{3}{2} + \frac{7}{27} + \frac{65}{27}\right)\right) \approx -0.97(2)$$

Метод Симпсона:

i	0	1	2	3	4	5	6
X(i)	1	1+1/6	1+2/6	1+3/6	1+4/6	1+5/6	2
Y(i)	-5	-110/27	-79/27	-3/2	7/27	65/27	5

$$\frac{h}{3} * ((Y0 + 4(Y1 + Y3 + Y5) + 2(Y2 + Y4) + Y6)) =$$
$$= \frac{1}{18} * \left(-5 + 4\left(-\frac{110}{27} - \frac{3}{2} + \frac{65}{27}\right) + 2\left(-\frac{79}{27} + \frac{7}{27}\right) + 5\right) = -18 * 1/18$$
$$= -1$$

Погрешности:

Отн. Погрешность для метода ср. прямоугольников = $\frac{0.0138}{1} = 1{,}38\%$

Отн. Погрешность для метода трапеций = $\frac{0.028}{1} = 2{,}8\%$

Отн. Погрешность для метода Симпсона = $\frac{0}{1} = 0\%$

Описание программных методов по варианту:

Метод прямоугольников

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_0 + h_2 y_1 + \dots + h_n y_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} h_i\, y_{i-1}$ - левые прямоугольники

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_1 + h_2 y_2 + \dots + h_n y_n = \sum_{i=1}^{n} h_i y_i$ - правые прямоугольники

При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}$$

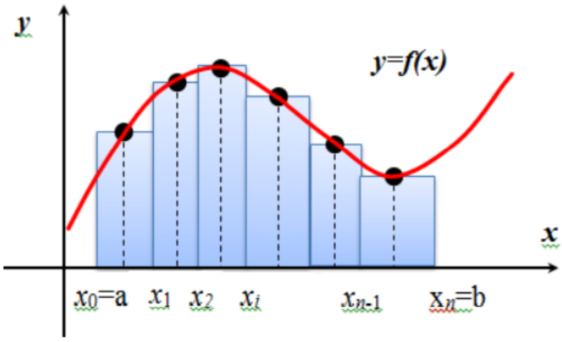
$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Метод прямоугольников. Метод средних

Для аналитически заданных функций более точным является использование значений в средних точках элементарных отрезков (полуцелых узлах):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n h_i\, f(x_{i-1/2})$$

$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, i = 1, 2, \dots n$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2})$$

Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left[(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n)\right]$$

Листинг программы:

```
import math
n = 0
def f1(x):
    return x*x
def f2(x):
    return 2*x/5
def f3(x):
    return math.cos(x)/x
def left_rectangle_method(a, b, eps, f):
    global n
    s = 0
    n = 4
    while(True):
        sum = 0
        h = (b - a)/n
```

```python
        for i in range(0, n):
            x = a + i * h
            sum += f(x)
        sum *= h
        if (abs(s - sum) < eps):
            return sum
        else:
            n *= 2
            s = sum
def right_rectangle_method(a, b, eps, f):
    global n
    s = 0
    n = 4
    while(True):
        sum = 0
        h = (b - a)/n
        for i in range(1, n+1):
            x = a + i * h
            sum += f(x)
        sum *= h
        if (abs(s - sum) < eps):
            return sum
        else:
            n *= 2
            s = sum
def medium_rectangle_method(a, b, eps, f):
    global n
    s = 0
    n = 4
    while(True):
        sum = 0
        h = (b - a)/n
        for i in range(0, n):
            x = a + i * h + h/2
            sum += f(x)
        sum *= h
        if (abs(s - sum) < eps):
            return sum
        else:
            n *= 2
            s = sum
def simpson_method(a, b, eps, f):
    global n
    s = 0
    n = 4
    while(True):
        sum = 0
        h = (b - a)/n
```

```
        for i in range(1, n):
            x = a + i * h
            if (i % 2 == 1):
                sum += 4*f(x)
            else:
                sum += 2*f(x)
        sum += f(a) + f(b)
        sum *= h/3
        if (abs(s - sum) < eps):
            return sum
        else:
            n *= 2
            s = sum
print("\nВведите номер функции для интегрирования:\n"+
     "1. y = x^2\n" +
     "2. y = 2x/5\n" +
     "3. y = cos(x)\n")
while(True):
    fun = float(input())
    if (fun == 1):
      f = f1
      break
    elif (fun == 2):
      f = f2
      break
    elif (fun == 3):
      f = f3
      break
    else:
      print("Ввеeден неверный номер функции.\n" +
          "Попробуйте еще раз:")

print("\nВведите левый и правый пределы интегрирования:\n")
while(True):
    try:
        a = float(input())
        b = float(input())
        if (a > b):
            raise
        break
    except :
        print("Введен неверные предел интегрирования.\n" +
             "Попробуйте еще раз")

print("\nВведите точность:\n")
while(True):
      eps = float(input())
      if (eps > 0):
```

```
            break
        print("Введенное значение точности (должно быть < 0).\n" +
            "Попробуйте еще раз:")

print("\nВведите метод для интегрирования:\n"+
     "1. метод прямоугольников\n" +
     "2. метод Симпсона\n")
while(True):
    method = float(input())
    if (method >= 1) and (method <= 2):
        break
    print("Введен неверный номер метода.\n" +
          "Попробуйте еще раз:")

if(method == 1):
  print(f'\nМетодом левых прямоугольников: {left_rectangle_method(a, b, eps, f
)} (Количество интервалов - {n})\n' +
      f'Методом правых прямоугольников: {right_rectangle_method(a, b, eps, f)}
 (Количество интервалов - {n})\n' +
      f'Методом средних прямоугольников: {medium_rectangle_method(a, b, eps, f
)} (Количество интервалов - {n})\n')

if(method == 2):
  print(f'\nМетодом Симпсона: {simpson_method(a, b, eps, f)} (Количество интер
валов - {n})')
```

Пример работы:

```
Введите номер функции для интегрирования:
1. y = x^2
2. y = 2x/5
3. y = cos(x)/x

1

Введите левый и правый пределы интегрирования:

-2
2

Введите точность:

0.001

Введите метод для интегрирования:
1. метод прямоугольников
2. метод Симпсона

1

Методом левых прямоугольников: 5.33349609375 (Количество интервалов - 256)
Методом правых прямоугольников: 5.33349609375 (Количество интервалов - 256)
Методом средних прямоугольников: 5.3330078125 (Количество интервалов - 128)
```

Вывод:

В результате выполнения лабораторной работы я:

- Познакомился с численными методами интегрирования, попрактиковался в решении «на бумаге» и реализации программной реализации
- Укрепил ранее имеющиеся знания в математике