

Elektrotechnik 1

HS 2023, Prof. Dr. Hans-Dieter Lang

Fabian Steiner, 14. September 2024

V1.0.0



1 Grundlagen

1.1 Einheiten

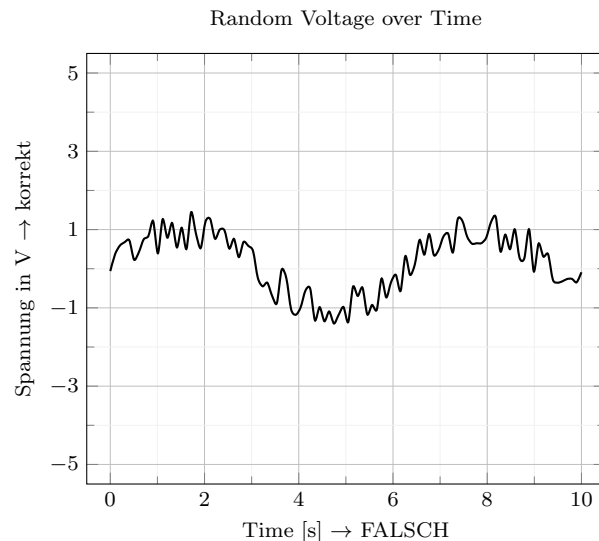
Korrekte Angabe von Werten:

12 μ m
└─┬─> Einheit
└─┬─> Präfix
└─> Wert

{x} → Zahlenwert = 12

[x] → Einheit abrufen = kg m s^{-2} → kann präfixe
enthalten ist technisch gesehen nicht ganz richtig

1.2 Graphen



Für Graphen muss darauf geachtet werden dass die Einheit korrekt angegeben wird. Die Angabe in Eckigen klammern ist nicht mehr zu verwenden.

2 Grundlagen Elektrotechnik

2.1 Ladung

Wichtigster Grundsatz: **Ladung ist eine Eigenschaft.**

Jedes Elementarteilchen hat eine Elementarladung. Daher ist jede gemessene Ladung immer ein vielfache,

dieser Elementarladung.

Die wichtigsten Eigenschaften sind:

- Es gibt 2 Arten. Positiv und negativ
- Gleiche Ladung stoßen sich ab, ungleiche ziehen sich an
- Ladung ist quantisierbar (ein Vielfaches einer Elementarladung)
- Ladung bleibt insgesamt erhalten
- Ladung ist an Masse gebunden

Ladung wird in $\text{C} \hat{=} \text{A s}$ quantisiert.

2.2 Ladungstransport

Elektrische Ladung wird unterschiedlich gut in verschiedenen Medien transportiert.

Medium	Beweglicher Ladungsträger	Beispiele
Metalle	freie Elektronen	Cu, Ag, Au, ...
Elektrolyte	freie Ionen	Salzwasser, Säuren, Laugen, ...
Gase, Plasma	freie Elektronen, freie Ionen	FL-Röhren, Sonnenplasma
Halbleiter	Freie Elektronen, Löcher	Si, Ge, Se, GaN, ...
Vakuum	Keine ("nichts")	CRT-Bildschirme
Isolatoren	"nichts"	Keramik, Kunststoffe, ...

Luft kann dabei zu den Gasen und zu den Isolatoren gezählt werden, je nach Spannung welche herrscht.

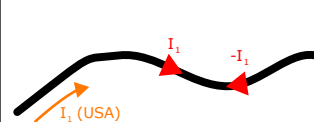
2.3 Elektrischer Strom

Elektrischer Strom ist der Transport von Ladung.

$$\text{Einfache definition: } I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{N_e}{\Delta t}$$

$$\text{Masseinheit: } [I] = \frac{[Q]}{[t]} = \frac{\text{A s}}{\text{s}} = \frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{A}$$

Elektrischer Strom braucht immer eine Bezugsrichtung:

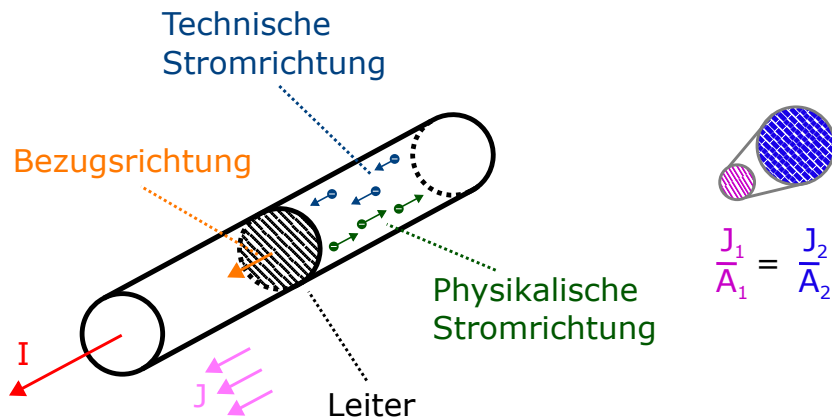


Die Richtung des elektrischen Stromes sagt aus in welche Richtung sich die Elektronen bewegen. Es wird zwischen der technischen und der physikalischen Richtung unterschieden, welche entgegen einander verlaufen. Die Elementarladung eines Elektrons ist negativ.

2.4 Stromdichte(rechtwinklig zur Fläche)

Stromdichte sagt aus wie viel Strom über einen Querschnitt fließt. In einem Leiter ohne konstanten Querschnitt bleibt die Stromdichte proportional zur Fläche.

$$\text{Masseinheit: } [J] = \frac{[I]}{[A]} = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$



2.4.1 Schmelzstromdichte

Die Schmelzstromdichte sagt aus wie viel Strom durch einen Leiter fließen muss bis dieser anfängt zu schmelzen (typischerweise tausende A).

2.5 Elektrisches Potenzial

Elektrisches Potenzial ist Arbeit, die für den Spannungstransport zur Verfügung steht oder die Freigesetzt wird bei Transport der Ladung.

$$\text{Einfache Definition: } [\varphi] = \frac{\Delta[W]}{[Q]} = \frac{J}{C} = V = \frac{m^2 \text{ kg}}{s^3 A}$$

2.6 Elektrische Spannung

Elektrische Spannung ist ein Potenzialunterschied. Dh. Elektrische Spannung ist eine Differenz von Energie, die zum Ladungstransport zur Verfügung steht.

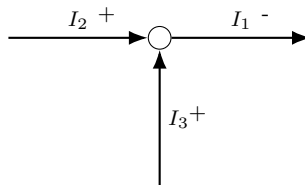
$$\text{Einfache Definition: } [U] = \varphi_a - \varphi_b = V$$

2.7 Kirchhoff current law / Kirchhoff 1 / KCL

Das Kirchhoff current law sagt aus das die Summe aller Ströme in einem geschlossenen Knoten 0 sein müssen.

$$\sum_n I_n = 0$$

Die einzige Bedingung ist das alle Ströme dieselbe Bezugsrichtung haben.



2.8 Kirchhoff voltage law / Kirchhoff 2 / KCV

Die Summe aller Teilspannungen in einer Masche ist 0.

$$\sum_n U_n = 0$$

Die Bedingung ist das alle Spannungen dasselbe Referenzpotential haben.

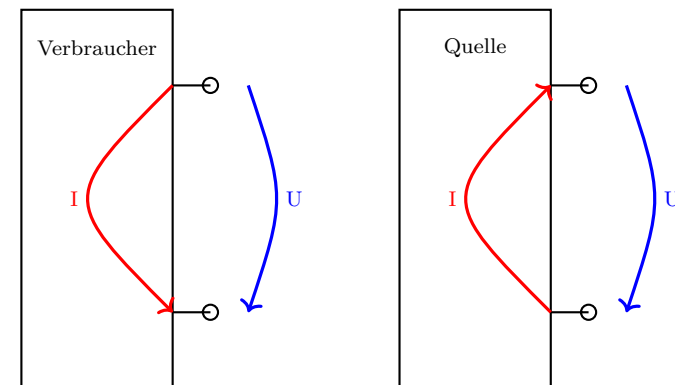
2.9 Elektrische Leistung

Elektrische Leistung ist Arbeit pro Zeit.

$$\text{Definition: } [P] = \frac{\Delta[W]}{\Delta[t]} = \frac{J}{s} = \frac{V A s}{s} = V A = W$$

2.10 Verbraucher oder Quelle

Um ein Verbraucher und eine Quelle auseinander zu halten kann man sich die Richtungen der Spannung und des Stromes überprüfen. Ist die Spannung und der der Strom parallel zu einander, handelt es sich um ein Verbraucher (Wie ein Widerstand). Ist die Spannung und der Strom antiparallel, handelt es sich um eine Quelle (aus einer Spannungsquelle fließt ein Strom hinaus).



2.11 Elektrischer Widerstand / Leitwert

Elektrischer Widerstand / Leitwert ist eine Konsequenz des Zusammenhangs von Elektrischen Strom und Spannung.

Ist Proportional zu U
 \propto

$$I = G \cdot U$$

G ist der so genannte Elektrische Leitwert und von oben abgeleitet: $G = \frac{I}{U}$ in der Masseinheit S (Siemens).

Der Elektrische Widerstand entsteht durch den Kehrwert von dem Leitwert $[R] = \frac{1}{[G]} = \frac{[U]}{[I]} = \Omega$ (Ohm).

2.12 Leitfähigkeit

Elektrische Leitfähigkeit ist eine Materialeigenschaft und hängt von der Mobilität, Anzahl freier Ladungsträger und der Ladung der freien Ladungsträger ab.

$$[\text{Leitfähigkeit}] = n \cdot q \cdot \mu = \sigma = \frac{A}{V \cdot m} = \frac{S}{m}$$

n = Anzahl freier Ladungsträger

q = Ladung pro Ladungsträger

μ = Mobilität / Freiheit der Elektronen sich zu bewegen

Die Faktoren “ n ” und “ q ” sind dabei Material konstanten. Die Variable “ μ ” ist allerdings temperaturabhängig.

2.12.1 Mobilität

Die Mobilität (μ) eines Ladungsträgers setzt sich wie folgt zusammen:

$$\mu = \frac{q\tau}{m}$$

q = Ladung des Ladungsträger

τ = Mittlere Stoszeit zwischen den Ladungsträger

m = Masse des Ladungsträger

$$[\mu] = \frac{C \cdot s}{kg} = \frac{m^2}{V \cdot s}$$

2.12.2 Spezifischer Widerstand

Der Kehrwert der Leitfähigkeit wird oftmals auch verwendet:

$$[\text{Spezifischer Widerstand}] = \left[\frac{1}{\sigma} \right] = [\varrho] = \frac{V}{m \cdot A}$$

2.12.3 Widerstandsberechnungen

Um aus Leitfähigkeit und spez. Widerstand einen Widerstand berechnen zu können können folgende Formeln verwendet werden.

$$\Omega = \frac{\varrho \cdot [\text{Leiterlänge}]}{[\text{Leiterfläche}]} = \frac{\varrho \cdot m}{m^2} \quad \Omega = \frac{[\text{Leiterlänge}]}{\sigma \cdot [\text{Leiterfläche}]} = \frac{m}{\sigma \cdot m^2}$$

Allerdings sind diese Formeln nicht allgemeingültig und können nur dann verwendet werden, wenn die Feldlinien senkrecht zu der Fläche stehen (und sich das nicht verändert). Manchmal wird die Einheit auch gekürzt dargestellt (machen aber nur evtl fiese Dozenten).

2.13 Temperaturabhängigkeit

Nicht ideale Widerstände ändern ihren Wert, unter anderem, abhängig mit der Temperatur. In der Regel ändern sich der Widerstand nicht linear und ist von Widerstand zu Widerstand etwas anders. Um trotzdem Widerstandswerte annähern zu können wird die Funktion des Widerstands angenähert. Dies erfolgt

je nach Anwendung mit einem, zwei oder noch mehr Termen.

$$\Delta T = \alpha \cdot \Delta T \cdot R_{t20} \quad \rightarrow \text{Lineare Annäherung}$$

$$\Delta T = (\alpha \cdot \Delta T + \beta \cdot \Delta T) \cdot R_{t20} \quad \rightarrow \text{Quadratische Annäherung}$$

...

$$R_{(T)} = (1 + \alpha \cdot \Delta T) \cdot R_{t20} \quad \rightarrow \text{Lineare Annäherung}$$

$$R_{(T)} = (1 + \alpha \cdot \Delta T + \beta \cdot \Delta T) \cdot R_{t20} \quad \rightarrow \text{Quadratische Annäherung}$$

Der Widerstand R_{t20} setzt hier jeweils den “Nullpunkt” oder den Ausgangspunkt, von welcher aus die Temperatur berechnet wird.

2.13.1 PPM's

Eine andere, in der Praxis häufig verwendete Art, Temperaturkoeffizienten anzugeben, sind die so genannten PPM's oder auch parts per milion (in der Praxis auch TCR / temperature coefficient). Diese sagen aus um wie viel sich ein Widerstands Wert pro Grad Kelvin ändert daher handelt es sich hier nur um ein lineares Modell mit beschränkter Genauigkeit. Sie haben meist keine Potenz oder sind ganzzahlig da, wie der Name es schon andeutet, sie mit 10^{-6} multipliziert werden. Die korrespondierende Formel dazu lautet:

$$\frac{\Delta R(\Delta T)}{R_{T0}} = \frac{\Delta R}{10^6}$$

3 Gleichstromnetzwerke

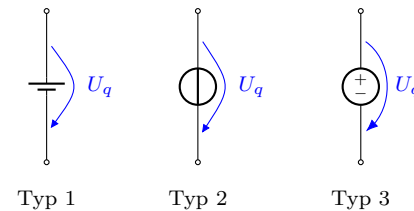
Generell wird im folgenden Abschnitt nur lineare Gleichstromnetzwerke behandelt. Ein Netzwerk besteht in der Regel aus mindestens 2 verknüpften Komponenten. Alle Verbindungen werden als ideale Verbindung zu betrachten.

3.1 Ideale Quellen

3.1.1 Spannungsquelle

Eine Ideale Spannungsquelle legt fest das über den Anschlüssen die festgelegte Spannung herrscht. Es ist egal, wie gross die Last ist. Die Spannung bleibt gleich.

Es gibt verschiedene Symbole:

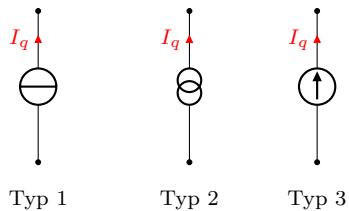


- **Typ 1** stellt eine Batterie dar. Durch das Symbol ist klar welche Polarität herrscht. Dh kann nur eine Spannung ohne Spannungspfeil gezeichnet werden.
- **Typ 2** ist die Europäische Darstellungsart. Sie ist weniger gebräuchlich da zwingend immer ein Pfeil mit der Spannung gezeichnet werden muss.
- **Typ 3** ist die Amerikanische Variante. Sie ist die gebräuchlichste Variante da die Polarität auch klargestellt ist.

3.1.2 Stromquelle

Eine Ideale Stromquelle legt fest das durch das Symbol der festgelegte Strom fliesst. Es ist egal wie gross die Last ist. Der Strom fliesst durch.

Es gibt verschiedene Symbole:



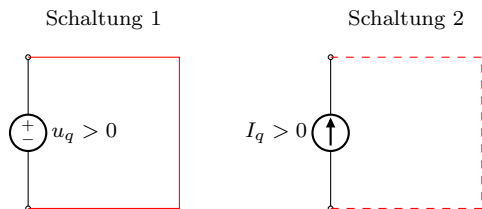
- **Typ 1** ist die Europäische Darstellungsart. Sie braucht ein Strompfeil da die Richtung des Stromes nicht definiert ist.
- **Typ 2** braucht auch ein Strompfeil, aber nicht sehr gebräuchlich.
- **Typ 3** ist die amerikanische Art und am gebräuchlichsten da die Stromrichtung schon definiert ist.

3.1.3 Aussage ob Quelle oder keine Quelle

Die obigen Quellen sagen lediglich aus, ob eine Spannung oder ein Strom an einem Punkt existiert. Ob die Quelle schlussendlich wirklich eine Quelle ist, daher Energie ins System liefert, muss durch abgleich mit der korrespondierenden Spannung / Strom über der Quelle (siehe Kapitel 2.10).

3.1.4 Widersprüche

Es gibt Widersprüche welche durch die obigen Quellen entstehen können:



Die beiden obigen Schaltungen sind widersprüchlich, hervorgerufen durch (oder fehlenden) roten idealen Verbindungen.

In Schaltung 1 sind die beiden Pole einer idealen Spannungsquelle verbunden. Allerdings ist die Spannung grösser als 0. Die Spannung kann nicht grösser als 0 sein, aber an beiden Polen gleich. Ein Widerspruch. In Schaltung 2 erzeugt die ideale Stromquelle ein Strom der grösser ist als 0, dieser kann allerdings nicht fliessen da keine Verbindung vorhanden ist. Ein Widerspruch.

3.2 Gesteuerte Quellen

In der Elektrotechnik viel gebrauchte Elemente sind sogenannte gesteuerte Quellen. Sie haben eine Messgrösse, welcher dann mit dem Steuerparameter multipliziert wird und dann als Ausgangsgrösse ausgegeben wird. Die Messgrösse und Ausgangsgrösse kann entweder Spannung oder Strom sein. Daher gibt es 4 verschiedene Arten Gesteuerte Quellen.

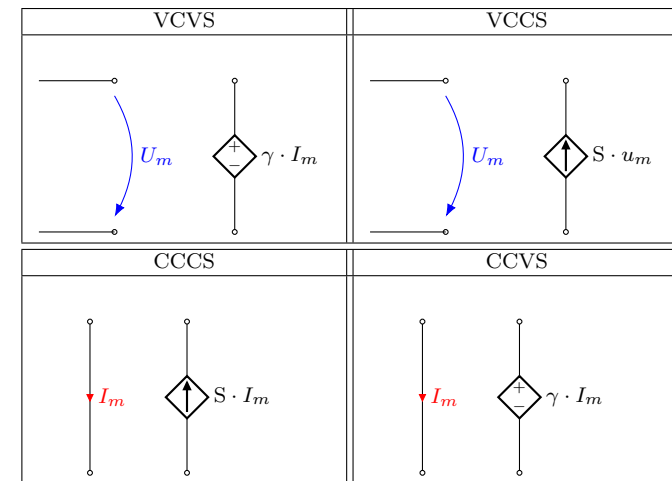
- Spannungsgesteuerte Spannungsquelle (VCVS)
- Spannungsgesteuerte Stromquelle (VCCS)
- Stromgesteuerte Spannungsquelle (CCVS)
- Stromgesteuerte Stromquelle (CCCS)

Der Steuerparameter der VCVS und CCCS sind einheitenlose Grössen, welche meist mit Symbolen wie g , v , r oder γ bezeichnet. Die Steuerparameter der VCCS und CCVS müssen die Messgrösse in die Ausgangsgrösse umwandeln und haben dadurch eine Einheit.

VCCS $\rightarrow \Omega$

CCVS $\rightarrow S$

Symbole und dessen Messklemmen:



3.3 Lineare Quellen

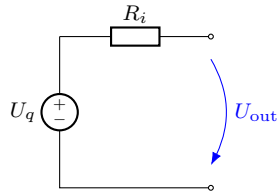
Eine lineare Quelle besteht aus einer idealen Quelle und einem (linearen) Widerstand. Die Spannung der Quelle verhält sich linear zu dem Strom, der aus der Quelle fliesst. Man kann eine lineare Quelle mit einer Spannungs- oder Stromquelle realisieren. Man unterscheidet dabei zwischen einer Thévenin oder einer Norton Quelle. Lineare Quellen haben 3 verschiedene Eigenschaften.

- **Leerlaufspannung** ist die Spannung welche an der Ausgangsklemme anliegt wenn keine Last anliegt
- **Kurzschlussstrom** ist der maximale Strom welche durch einen Kurzschluss an der Ausgangsklemme angelegt erzeugt werden kann
- **Innenwiderstand** ist der innere Widerstand der Quelle

Wenn 2 dieser Eigenschaften bekannt sind, kann die letzte berechnet werden da diese linear abhängig ist.

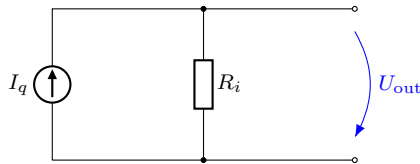
3.3.1 Thévenin Quelle

Eine Thévenin Quelle besteht aus einer idealen Spannungsquelle und einem Widerstand in der folgenden Konstellation:



3.3.2 Norton Quelle

Eine Nortonquelle besteht aus einer Idealen Stromquelle und einem Widerstand in der folgenden Konstellation:

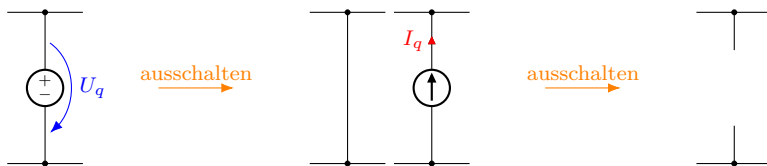


3.4 Helmholtz, Thévenin, Norton - Theorem

Das Helmholtz- / Thévenin- und das Nortontheorem sagen etwas sehr Ähnliches aus. Helmholtz / Thévenin stellen fest das alle Kombinationen aus linearen Widerständen und idealen Spannungsquellen auf eine Thévenin Quelle reduziert werden können. Norton hat das erweitert das man auch auf eine Norton Quelle reduzieren kann. Daher, wenn man eine Thévenin quelle hat, kann man diese zu einer Norton Quelle umwandeln und umgekehrt. Dies kann sehr nützlich sein, um lineare Netzwerke zu lösen.

3.5 Superposition / Überlagerungssatz

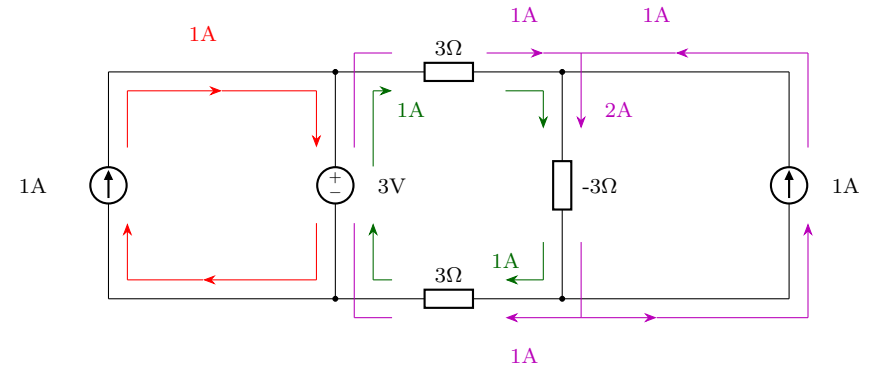
Superposition ermöglicht das schrittweise Erkunden von Schaltungen durch Ausschalten von idealen Quellen bis auf eine und das anschliessende überlagern(summieren der ströme). Voraussetzung ist eine Lineare Schaltung. Alle passiven Bauteile bleiben immer gleich. Es werden nur die Quellen verändert. Wenn abhängige Quellen, welche wirklich abhängig sind, im Netzwerk vorhanden sind dann dürfen diese nicht ausgeschaltet werden und müssen immer eingeschalten bleiben. Thévenin und Norton Quellen werden verschieden abgeschaltet. Eine Thévenin Quellen wird zu einer idealen Verbindung (nicht kurzgeschlossen!). Eine Norton Quelle wird zu einem idealen Unterbruch.



3.5.1 Leistung bei Superposition

Leistung darf während dem Superpositionieren nicht separat berechnet werden. Es müssen alle Quellen superponiert werden, summiert und dann darf erst Leistung berechnet werden. Ansonsten stimmt das Resultat nicht.

3.5.2 Beispiel

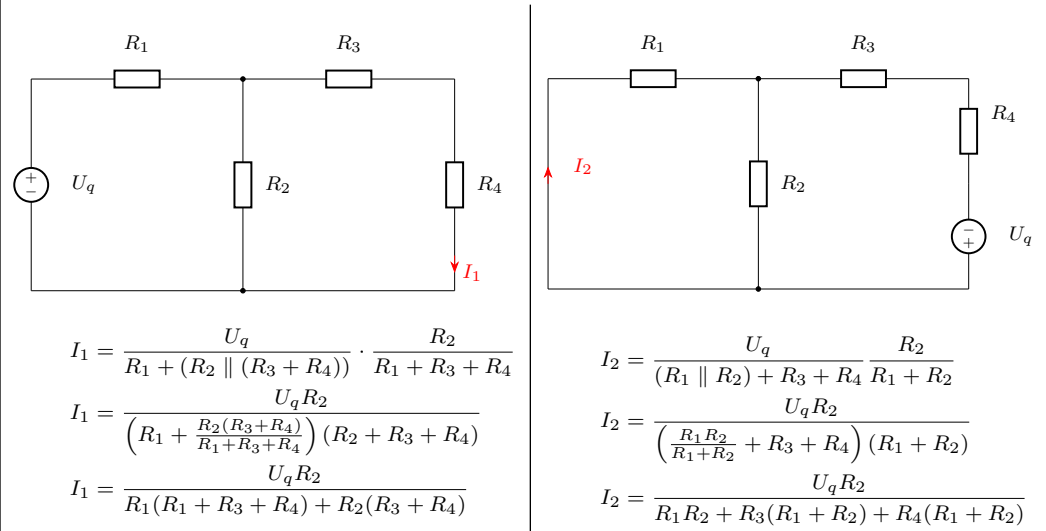


In diesem Beispiel wurden alle Quellen nacheinander ausgeschaltet und die Ströme eingezeichnet. Nun können die Ströme summiert und die Leistungen bestimmt werden.

3.6 Reziprozität / Kirchhoffscher Umkehrungssatz

In einem Netzwerk mit nur einer realen Idealen Quelle kann die Quelle und eine Messgrösse ausgetauscht werden. Das Verhältnis bleibt gleich. Die Quellgrösse, welche im veränderten Netzwerk angelegt wird, ist aber nicht gleich.

3.6.1 Herleitung mit Spannungsquelle



$$I_1 = \frac{U_q}{R_1 + (R_2 \parallel (R_3 + R_4))} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_3 + R_4}$$

$$I_1 = \frac{U_q R_2}{\left(R_1 + \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_1+R_3+R_4}\right) (R_2 + R_3 + R_4)}$$

$$I_1 = \frac{U_q R_2}{R_1(R_1 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)}$$

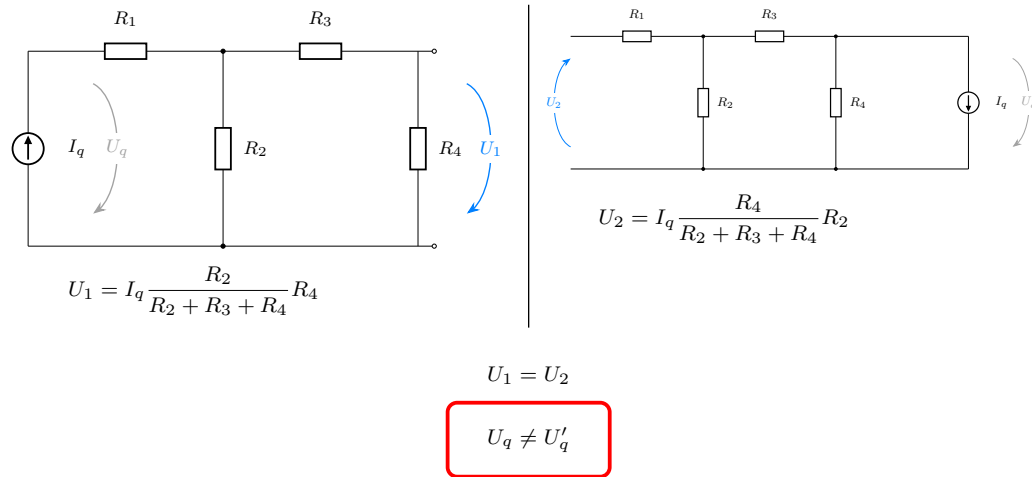
$$I_2 = \frac{U_q}{(R_1 \parallel R_2) + R_3 + R_4} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = \frac{U_q R_2}{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4\right) (R_1 + R_2)}$$

$$I_2 = \frac{U_q R_2}{R_1 R_2 + R_3(R_1 + R_2) + R_4(R_1 + R_2)}$$

$$R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4 = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4$$

3.6.2 Herleitung mit Stromquelle

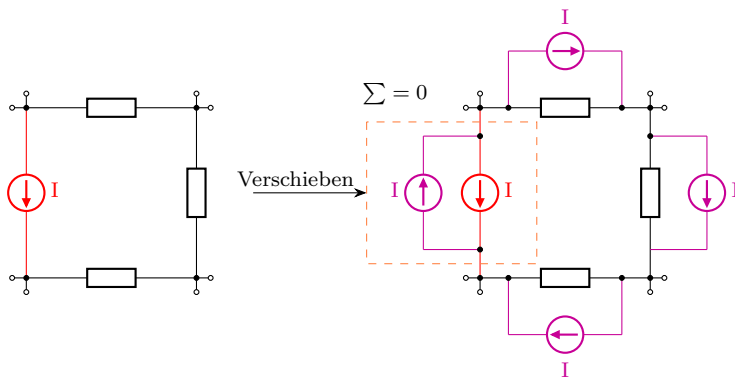


3.7 Ideale Quellen verschieben

Ideale Quellen Lassen sich verschieben. Für das Systematische lösen von Netzwerken kann das von Vorteil sein. Allerdings ist es immer ein tradeof. Man verfälscht und verliert immer Potenziale oder Ströme. Mann kann sich jedoch zu Beginn eine Formel zurechtlegen, falls diese wieder interessant werden. Das Verfahren für Strom und Spannungsquelle ist prinzipiell das gleiche.

3.7.1 Ideale Stromquellen

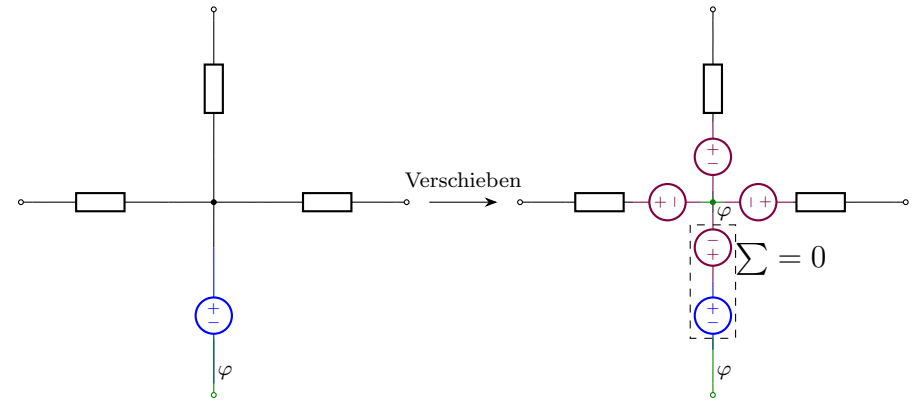
Ein virtueller Strom wird über die vorhandene Quelle gelegt. Der Quellstrom wird in der Summe null. Da der Strom jedoch nicht einfach so verschwindet müssen neue Stromquellen hinzugefügt werden, welche den Strom im Kreis führen:



Das Netzwerk hat nun eine möglicherweise mühsame Stromquelle weniger, allerdings generell mehr. Am besten schiebt man diese auf eine ideale Spannungsquelle, um diese ebenso zu eliminieren.

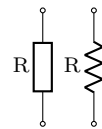
3.7.2 Ideale Spannungsquellen

Bei Idealen Spannungsquellen gilt dasselbe wie für ideale Stromquellen. Sie werden über einen Knoten hinweg geschoben. Mann kann sich das auch als zwingenden Ausgleich durch das Entfernen der ersten Spannungsquelle vorstellen.



Note: Das Potenzial φ hat sich nach oben verschoben.

3.8 Widerstände



Fixe, lineare Widerstände haben typischerweise die links stehenden Schaltungssymbole. Links das Europäische(mehr gebräuchlich), rechts das Amerikanische. Es gibt verschieden elementare Schaltungen welche einfacher separat analysiert werden können.

3.8.1 Serienschaltung

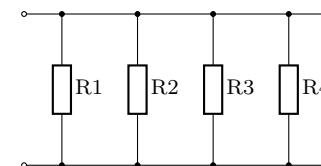
Wenn Widerstände in Serie zueinander stehen, können sie summiert werden.



$$R_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n R_i$$

3.8.2 Parallelschaltung

Wenn Widerstände parallel zueinander stehen, können ihre Leitwerte zusammengezählt werden.

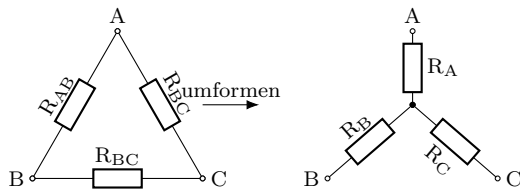
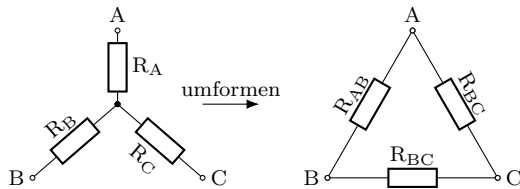


$$R_{\text{tot}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}$$

Wenn **nur 2** Widerstände parallel stehen, kann folgende vereinfachte Formel verwendet werden: $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

3.8.3 Stern - dreieck umwandlung

Wenn Widerstände in eine Dreieckskonstellation sind, kann man sie in einen Stern und umgekehrt umwandeln.



$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A \cdot R_B}{R_C}$$

$$R_{AC} = R_A + R_C + \frac{R_A \cdot R_C}{R_B}$$

$$R_{CB} = R_B + R_C + \frac{R_B \cdot R_C}{R_A}$$

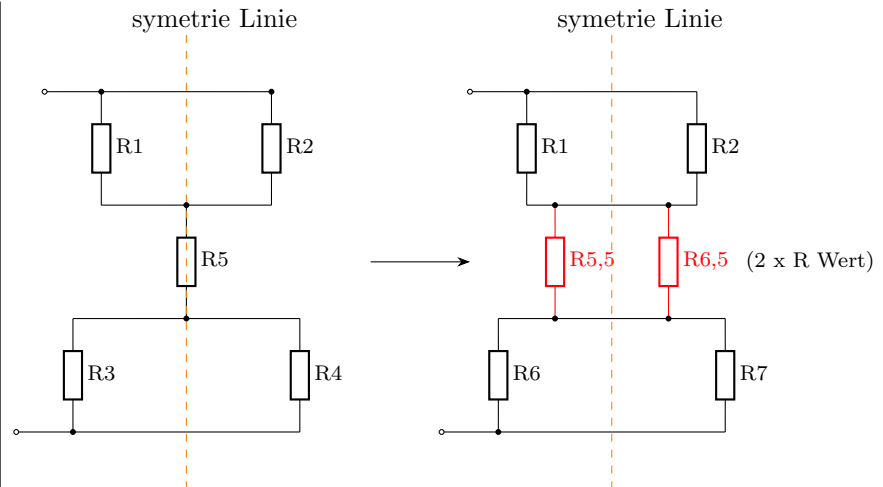
$$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}}$$

$$R_C = \frac{R_{AC} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}}$$

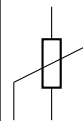
3.9 Symetrien in Widerstandsnetzwerken

Symmetrien können beim Lösen von Widerstandsnetzwerken nützlich sein da komplette Netzwerke nur einmal zusammengefasst werden müssen. Dabei ist das Äquipotentialprinzip sehr wichtig da ein Widerstand, der auf der Symmetrielinie liegt, aufgeteilt werden darf. Dabei ist es egal ob in parallel oder in serie. Voraussetzung ist das Gleiche Widerstandswerte vorliegen.



Nun können beide Seiten separat angeschaut werden. Da beide Seiten identisch sind, kann nur eine Seite berechnet und der resultierende Wert halbiert werden.

4 Nichtlineare Netzwerke / Leistungsanpassung



Viele Netzwerke sind in der Praxis nicht linear.

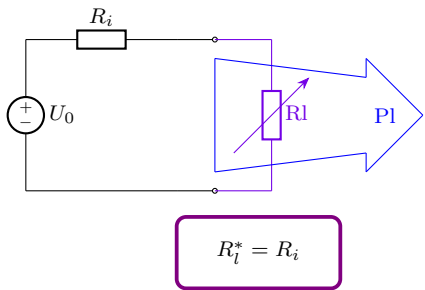
Meistens wird dabei ein nicht linearen Widerstand verwendet, um diesen Effekt zu modellieren.

Das links stehende Schemasymbol wird dabei verwendet.

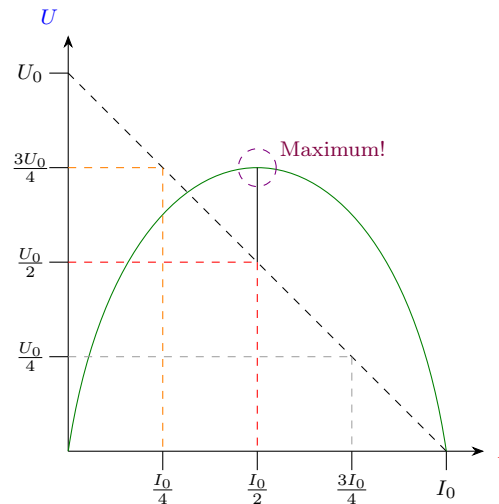
Die Änderung des Widerstandswertes durch einen Effekt wie zum Beispiel Temperatur, licht oder mechanische Einwirkung herbeigeführt wird können Symbole diesen Effekt signalisieren. Symbole wie z.B. Pfeile oder ein Temperatursymbol.

4.1 Leistungsanpassung

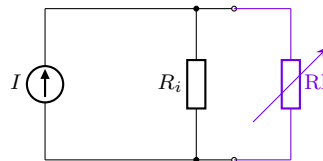
Leistungsanpassung beschreibt das Verfahren ein Widerstand an einer realen Quelle anzupassen, sodass die maximal mögliche Energie aus der Quelle fließt. Im Lineraren Fall entspricht der Lastwiderstand dem Innenwiderstand der Quelle.



Maximale Leistung, $\eta = 50\%$
Der Stern am R_l signalisiert, dass
Leistungsanpassung gemacht wurde.



4.1.1 Herleitung des optimalen Lastwiderstands einer linearen Stromquelle



$$\begin{aligned}
 U_{RL} &= \frac{R_i R_l I}{R_i + R_l} \\
 P_{R_l} &= \frac{1}{R_l} (U(R_l))^2 \\
 0 &= \frac{dP(R_l)}{dR_l} \\
 0 &= R_l' (U(R_l))^2 + 2 \frac{1}{R_l} (U(R_l))' \\
 0 &= -\frac{1}{R_l^2} \frac{R_i^2 R_l^2 I^2}{(R_i + R_l)^2} + 2 \frac{1}{R_l} \frac{R_i R_l I}{R_i + R_l} \left(\frac{R_i I (R_i + R_l) - R_i R_l I}{(R_i + R_l)^2} \right) \\
 0 &= 2 \frac{R_i^3 I^2}{(R_i + R_l)^3} - \frac{R_i^2 I^2}{(R_i + R_l)^2} \\
 \frac{R_i^2 I^2}{(R_i + R_l)^2} &= 2 \frac{R_i^3 I^2}{(R_i + R_l)^3} \\
 R_i^2 I^2 (R_i + R_l) &= 2 R_i^3 I^2 \\
 2 R_l &= R_i + R_l \\
 R_i &= R_l
 \end{aligned}$$

Im Falle eines nicht linearen Widerstands muss eine Formel für die Leistung über dem Lastwiderstand gefunden werden. Die gefundene Formel muss dann abgeleitet und null gesetzt werden, ähnlich wie in der Herleitung.

5 Systematische Netzwerkanalyse

Wichtiger Grundsatz

Das zu analysierende Netzwerk **MUSS** linear sein. Ansonsten kann das Netzwerk nicht mit den folgenden Methoden analysiert werden. Grundsätzlich sollte das zu analysierende Netzwerk immer zuerst maximal vereinfacht werden, da dies meist zu weniger Aufwand führt. Das schlussendliche Ziel ist es eine Matrixgleichung zu erhalten, welche man zuletzt invertieren muss.

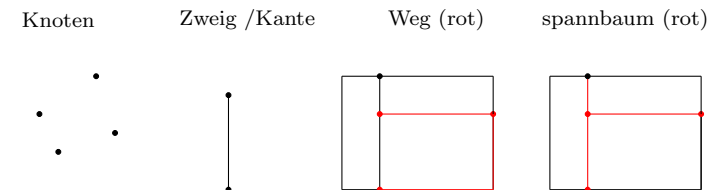
5.1 Auswahl einer geeigneten Methode

Meistens ist die Wahl der Methode frei. Um die optimale zu wählen, sollte immer der Aufwand von allen Methoden bestimmt werden und aufgrund dessen entschieden werden.

5.2 Graphentheorie

Um elektrische Netzwerke zu analysieren wird ein mathematisches Teilgebiet namens Graphentheorie angewendet. Für systematische Netzwerkanalyse müssen ein paar Grundbegriffe geläufig sein:

- **Knoten** : Ein Punkt in welchem Zweige enden
- **Zweig/Kante** : Verbindet Knoten untereinander
- **Weg** : Eine zusammenhängende Reihe von Knoten und Zweigen (keine Kante doppelt)
- **Baum** : Ein Weg welcher nirgends in einem Kreis geschlossen ist (sehr bildlich)
- **Spannbaum** : Ein Weg welcher alle Knoten miteinander verbindet
- **Zyklus** : Ein Weg welcher im gleichen Knoten beginnt und endet
- **Kreis** : Ein Zyklus welcher keinen Knoten zweimal enthält
- **Masche** : Ein Kreis welcher keine inneren oder äußeren Zweige aufweist.



Anzahl an Elementen wird wie folgt angegeben:

- **Zyklen** : z
- **Knoten** : k
- **Maschen** $M = z - (k - 1) = z - k + 1$
- **Ideale (nicht lineare) Spannungsquellen** : v
- **Ideale (nicht lineare) Stromquellen** : i

5.3 Zweigstrommethode

Bei der Zweigstrommethode wird das Ohmsche und die beiden Kirchhoffschen Gesetze systematisch angewendet. 3 Gruppen an Gleichungen entstehen.

5.3.1 Zweiggleichungen

Anzahl: $z - i - v$

Ohmsches Gesetz anwenden. Darauf achten das keine Brüche vorkommen

5.3.2 Stromgleichungen

Anzahl: $k - 1$

Kirchhoff current law umsetzen. Bekannte Quellen nach links nehmen.

5.3.3 Spannungsgleichungen

Anzahl: $z - k + 1$

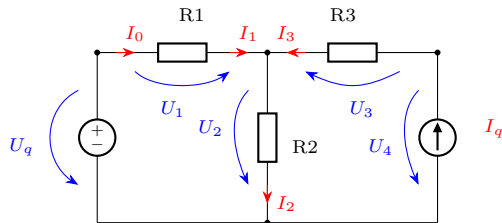
Kirchhoff voltage law anwenden. Bekannte Quellen auf die linke Seite nehmen.

5.3.4 Zusammenführen

Zweiggleichungen in die Strom- und Spannungsgleichungen einsetzen. Gleichungstablo aufstellen mit unbekannten als Vektor.

5.3.5 Beispiel

In diesem Beispiel wird die maximale Anzahl Knoten verwendet. Ein Knoten könnte man sparen, allerdings bleibt der Rechenaufwand gleich.



U_q und I_q gegeben

Knoten : 4, Zweige : 5

Zweiggleichungen:

$$z - v - i = 5 - 1 - 1 = 3$$

$$U_1 = R_1 \cdot I_1$$

$$U_2 = R_2 \cdot I_2$$

$$U_3 = R_3 \cdot I_3$$

Stromgleichungen:

$$k - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$0 = I_1 + I_3 - I_2$$

$$I_q = I_3$$

$$0 = I_1 - I_0$$

Spannungsgleichungen:

$$z - k + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$$

$$U_q = U_1 + U_2$$

$$0 = U_2 + U_3 + U_4$$

Einsetze der Zweiggleichungen:

$$U_q = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 \quad 0 = R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 + -U_4 \quad 0 = I_1 - I_2 + I_3 \quad I_q = I_3 \quad 0 = I_1 - I_0$$

Tablo erstellen:

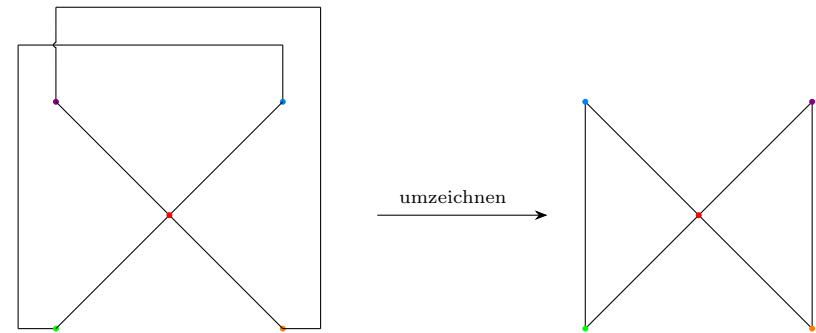
$$\begin{bmatrix} \cdot & R_1 & R_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & R_2 & R_3 & \cdot & -1 \\ \cdot & 1 & -1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_q \\ \cdot \\ \cdot \\ I_q \\ \cdot \end{pmatrix}$$

5.4 Maschenstrom-/Kreislstrommethode

Aufwand : $M - 1 - i$

Bei der Kreisstrommethode werden verschiedene Kreisströme als unbekannte definiert. Liegen diese auf Maschen spricht man von der Maschenstrommethode. KVL wird dabei stark genutzt. Falls Ströme oder Spannungen gesucht werden, können diese durch einen einzelnen Kreisstrom am einfachsten bestimmt werden.

Das Verfahren kann nur bei Planaren Schaltungen verwendet werden. Das darf keine Überschneidungen der Zweige geben. **Achtung!** nicht planar wirkende Schaltungen können planar sein, wenn sie etwas umgezeichnet werden:



5.4.1 Vorgehen

1. Knoten definieren

2. Stammbaum definieren

Es darf keine Ideale Stromquelle im Pfad des Stammbaums sein

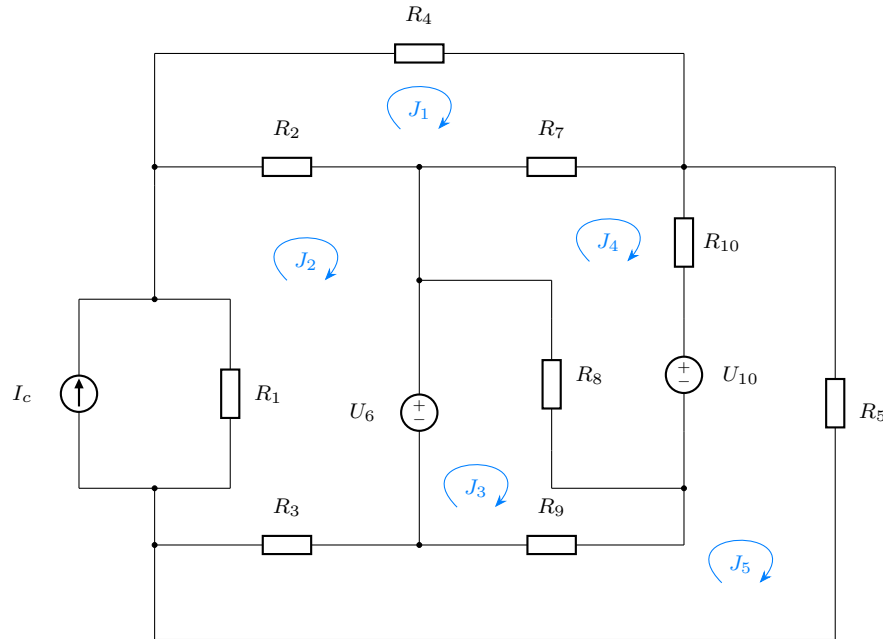
3. Matrix einfüllen:

$$\begin{bmatrix} R + R & R + v \\ R & R + R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{q1} \\ U_{q2} \end{bmatrix}$$

Die Matrix ist grundsätzlich Symmetrisch an der diagonalen. In der Diagonalen sind die Summen aller Widerstände im Pfad der Kreisströme. Alle Überlagerungen welche durch verschiedene Kreisströme

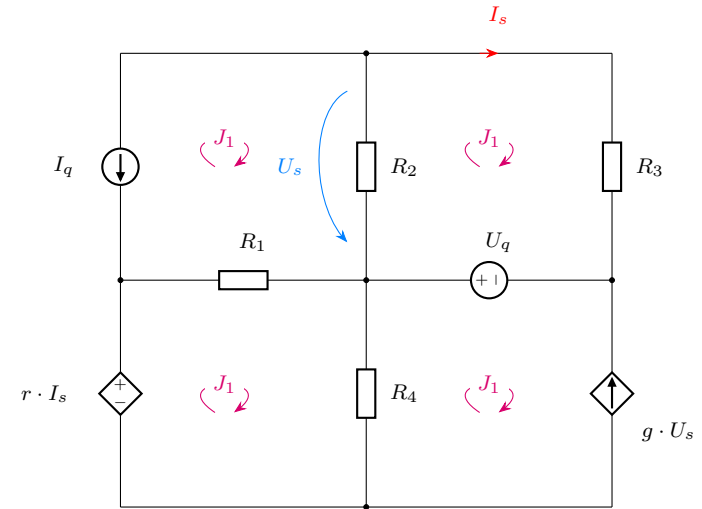
durch denselben Widerstand entstehen, werden jeweils oberhalb und unterhalb davon notiert. Diese sind **negativ**. Entgegengesetzte Richtung „-“ sonst „+“. Gesteuerte Quellen brechen diese Symmetrie. Wenn Kreisströme nicht unabhängig definiert sind müssen sie trotzdem als Störfaktoren mit einbezogen werden. Diese können in den Quellenvektor genommen werden. Falls basierend auf vorherige Größen können sie in die Matrix genommen werden.

5.4.2 Einfaches Beispiel ohne gesteuerte Quellen



$$\begin{bmatrix} R_2 + R_4 + R_7 & -R_2 & \cdot & -R_7 & \cdot \\ -R_2 & R_1 + R_2 + R_3 & \cdot & \cdot & -R_3 \\ \cdot & \cdot & R_8 + R_9 & -R_8 & -R_9 \\ -R_7 & \cdot & -R_8 & R_7 + R_8 + R_{10} & -R_{10} \\ \cdot & -R_3 & -R_9 & -R_{10} & R_3 + R_5 + R_9 + R_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ R_1 \cdot I_c - U_6 \\ U_6 \\ -U_{10} \\ U_{10} \end{bmatrix}$$

5.4.3 2. Beispiel mit gesteuerten Quellen



Vorbereitungsgleichungen:

$$\begin{aligned} J_1 &= -I_q \\ J_2 &= I_s \\ J_4 &= -g \cdot U_s = -g \cdot R_2 \cdot (J_1 - J_2) = g \cdot R_2 \cdot (I_q + J_2) \end{aligned}$$

gesucht sind J_2 & J_3

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & \cdot \\ \cdot & R_1 + R_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{r \cdot I_s}_{J_2} + \underbrace{J_1 \cdot R_1}_{-I_q \cdot R_1} + \underbrace{U_q + J_1 \cdot R_2}_{U_q - I_q \cdot R_2} + \underbrace{J_4 \cdot R_4}_{g \cdot R_2 \cdot R_4 \cdot I_q + g \cdot R_2 \cdot R_4 \cdot J_2} \end{pmatrix}$$

Vereinfachen:

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & \cdot \\ -g \cdot R_2 \cdot R_4 - r & R_1 + R_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_q - I_q \cdot R_2 \\ -I_q \cdot R_1 + g \cdot R_2 \cdot R_4 \cdot I_q \end{pmatrix}$$

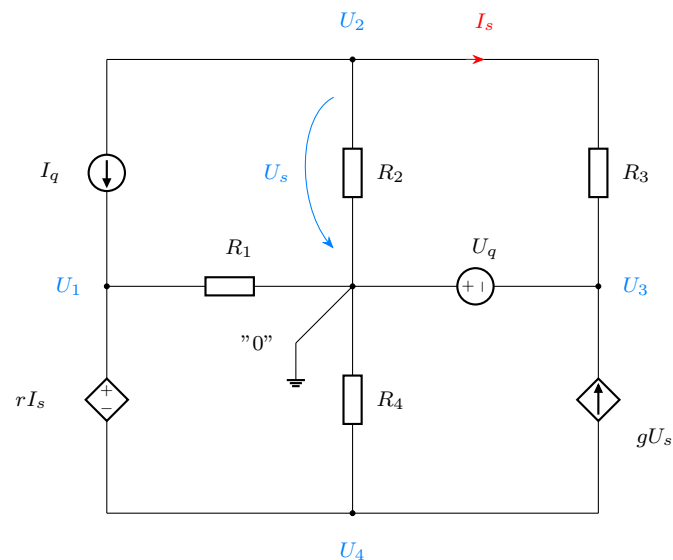
Überprüfen ob in der Matrix nur Widerstände stehen und im Quellenvektor nur Spannungen.

5.5 Knotenpotentialmethode

Aufwand: $k - 1 - v$

Bei der Knotenpotentialmethode wird implizit KCL verwendet. Es werden Knoten definiert, welche in den Unbekanntenvektor eingefüllt werden. Ein Knoten wird als „0“ definiert. Dieser wird nicht in den Vektor eingefügt. Die Matrix enthält nur Leitwerte. Die Diagonale sind die Leitwerte, die an den Knoten angeschlossen sind. Die Positionen neben der diagonalen sind **immer Negativ**. Sie sind die Verbindungen zwischen den jeweiligen Knoten. Wenn keine gesteuerte Quellen vorhanden sind, treten Widerstände entweder 1 oder 4-mal in der Matrix auf. Bis auf die gesteuerten Quellen ist die Matrix symmetrisch. Spannungsquellen sind problematisch da sie weder in die Matrix noch in den Quellenvektor eingefügt werden können. Sie müssen verschoben werden wie im Kapitel 3.7 gezeigt.

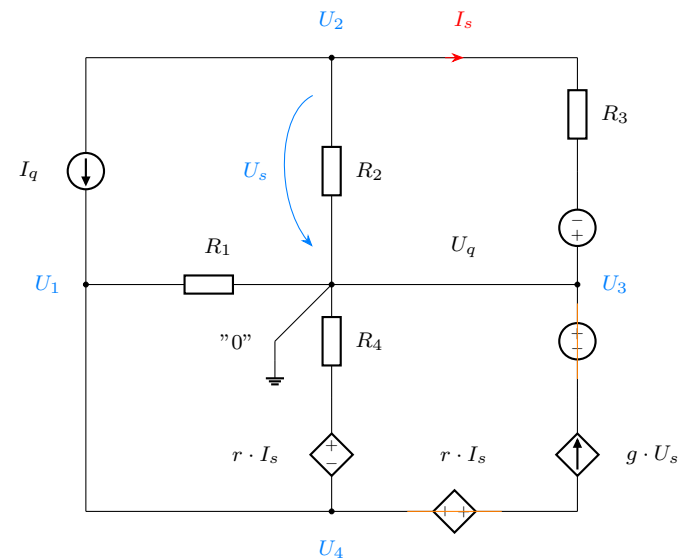
5.5.1 Beispiel



Vorbereitung:

$$\begin{aligned} U_3 &= -U_q \\ U_4 &= U_1 - r \cdot I_s \\ I_s &= \frac{1}{R_3} \cdot (U_2 - U_3) \\ U_s &= U_2 \end{aligned}$$

Verschieben der Spannungsquellen:



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q - \frac{r \cdot \frac{1}{R_3} (U_2 - U_3)}{R_3 \cdot R_4} \\ I_q - \frac{r \cdot I_s}{R_4} - g \cdot U_s \end{pmatrix}$$

vereinfachen:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} & -\frac{r}{R_3 \cdot R_4} - g \\ \cdot & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q \\ -I_q - \frac{U_q}{R_3} \end{pmatrix}$$

Kontrolle: Matrix enthält nur Leitwert und Quellvektor nur Ströme.

5.6 Modifizierte Knotenpotentialmethode

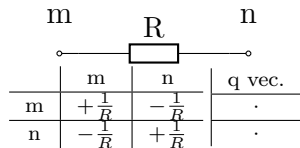
Aufwand: K - 1 + v + s (s sind gesuchte grössen)

Die modifizierte Knotenpotentialmethode ist die allgemeinere Form der kpm. Mit dieser kann jedes Netzwerk ohne vorherige Veränderung analysiert werden. Die Matrix der kpm erhält lediglich mehr Variablen. Zu der aufgestellten Matrix der kpm werden für die Ströme in idealen Spannungsquellen, gesuchte Ströme und Ströme in Spulen eine zusätzliche Variable ermittelt. Für diese muss dann auch eine zusätzliche Gleichung aufgestellt werden. Für Ideale Spannungsquellen wird der Strom generell hinein definiert. Im Allgemeinen kann die Matrix auch mit Elementstempel aufgestellt werden. Diese sind für alle Elemente definiert, die in einer Schaltung vorkommen.

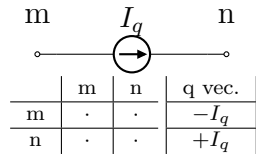
5.6.1 elementstempel

Jedes Bauteil in einer zu analysierenden Schaltung fügt bestimmte Teile in eine Matrix / Quellvektor hinzu. Da diese immer gleich sind, können diese nach folgendem Muster 1:1 hinzugefügt werden. Für Abhängige Größen wird jeweils eine weitere Gleichung gebraucht welche mit a (auxiliary) benannt wird.

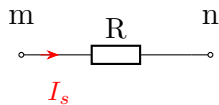
5.6.2 Widerstand



5.6.3 Unabhängige Stromquelle



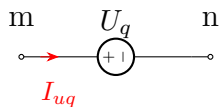
5.6.4 Widerstand mit gesuchtem Strom



$$a : U_m - U_n = -RI_s = 0$$

	m	n	I_s	q vec.
m	.	.	1	.
n	.	.	-1	.
a	1	-1	-R	0

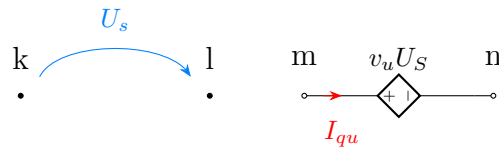
5.6.5 Unabhängige Spannungsquelle



$$a : U_m - U_n = U_q$$

	m	n	I_s	q vec.
m	.	.	1	.
n	.	.	-1	.
a	1	-1	.	U_q

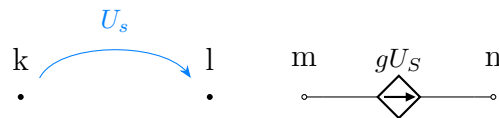
5.6.6 Spannungsgesteuerte Spannungsquelle



$$\begin{aligned} m - n &= v_u U_s \\ U_s &= k - l \\ 0 &= m - n - k v_u \end{aligned}$$

	k	l	m	n	I_q	q vec.
k
l
m	1	.
n	-1	.
a	$-v_u$	v_u	1	-1	.	.

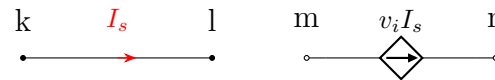
5.6.7 Spannungsgesteuerte Stromquelle



$$\begin{aligned} U_s &= k - l \\ I_{mn} &= g(k - l) \\ I_{mn} &= gk - gl \end{aligned}$$

	k	l	m	n	q vec.
k
l
m	g	-g	.	.	.
n	-g	g	.	.	.

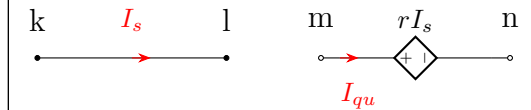
5.6.8 Stromgesteuerte Spannungsquelle



$$U_k - U_l = 0$$

	k	l	m	n	I_s	q vec.
k	1	.
l	-1	.
m	v_i	.
n	$-v_i$.
a_1	1	-1

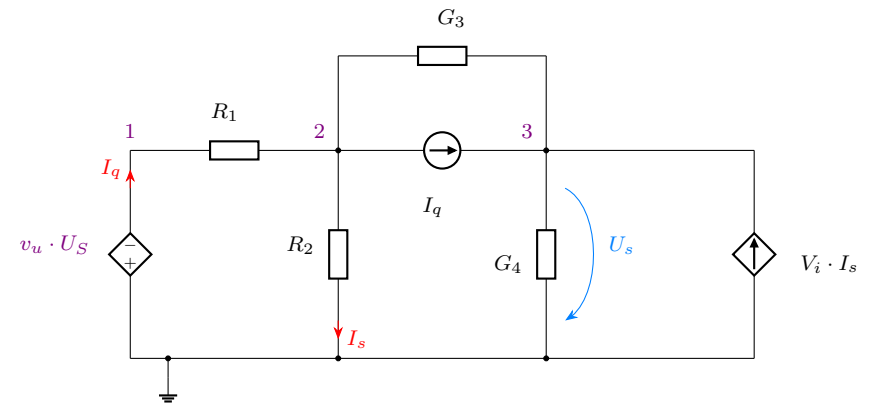
5.6.9 Stromgesteuerte Stromquelle



$$\begin{aligned} a_1 : 0 &= k - l \\ a_2 : r I_s &= m - n \end{aligned}$$

	k	l	m	n	I_s	I_{qu}	q vec.
k	1	.	.
l	-1	.	.
m	1	.
n	-1	.
a_1	1	-1
a_2	.	.	1	-1	-r	.	.

5.6.10 Beispiel



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & . & -1 & . \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + G_3 & -G_3 & . & 1 \\ . & -G_3 & G_3 + G_4 & . & v_i \\ -1 & . & -v_u & . & . \\ . & 1 & . & . & -R_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ I_q \\ I_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . \\ -I_q \\ I_q \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

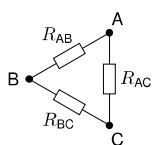
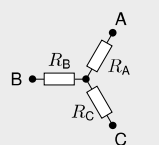
An der markierten Stelle würde eigentlich $\frac{1}{R_2}$ stehen laut NA. Da aber ein Strom des Widerstandes gesucht wird, ist dieser nach unten rechts gerutscht da er ansonsten doppelt vorkommt. Siehe Elementstempel.

Formelblatt ELT 1 – Grundlagen, DC-Netzwerke & Strömungsfelder

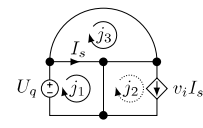
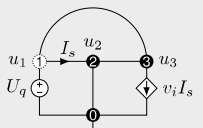
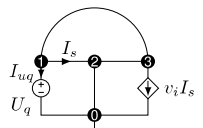
Konstanten	Elementarladung (Ladung des Elektrons $q_e = -e$)	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$	$\approx 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
	Masse des Elektrons (Ruhemasse, $v \ll c_0$)	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$	$\approx 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$
	Avogadro-Konstante (Anzahl für molare Masse)	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	$\approx 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
	Boltzmann-Konstante	$k_B = 1.3806 \times 10^{-23} \text{ J/K}$	$\approx 1.4 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
	Lichtgeschwindigkeit (in Vakuum)	$c_0 = 299\,792\,458 \text{ m/s}$	$\approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

Grundgesetze	Kirchhoffscher Knotensatz <i>KH-1 (Kontinuität)</i>	$\sum_n I_n = 0$	$\vec{I} = \oint_{\text{Hülle}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0$
	Kirchhoffscher Maschensatz <i>KH-2 (Konservativität)</i>	$\sum_n U_n = 0$	$\vec{U} = \oint_{C=\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$
	Ohmsches Gesetz	$R = \frac{U}{I} \quad \text{bzw.} \quad G = \frac{I}{U} = \frac{1}{R}$	$[R] = \Omega, [G] = \text{S}$

Grundlagen	Stromstärke	$I = \left. \frac{dQ}{dt} \right _{\text{durch } A} = \int_A \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \frac{ds}{ds} \stackrel{\text{homogen}}{=} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \quad [I] = \frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{A}$
	Stromdichte <i>Bewegte Ladungsdichte</i>	$\mathbf{J} = \frac{dI}{dA} \hat{\mathbf{n}} = \rho \mathbf{v} = \sigma \mathbf{E} \quad (\hat{\mathbf{n}} \perp A, \mathbf{A} = \hat{\mathbf{n}} A) \quad [J] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$
	Driftgeschwindigkeit (der Ladungsträger)	$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{J}}{qn} = \frac{\mathbf{J}}{\rho} \quad [v] = \text{m/s}, [q] = \text{C} = \text{A s}, [n] = 1/\text{m}^3, [\rho] = \text{A s}/\text{m}^3$
	Elektrische Leitfähigkeit und spez. Widerstand ϱ	$\sigma = \frac{1}{\varrho} = qn\mu \quad [\sigma] = \text{S/m}, [\varrho] = \Omega \text{ m}, [\mu] = \frac{\text{m}^2 \text{S}}{\text{V m}} = \text{A s}^2/\text{kg}$
	Temperaturabhängigkeit von Widerständen	$\Delta R = (\alpha \Delta T + \beta \Delta T^2 + \dots) R_{T_0} \quad (\Delta T = T - T_0) \quad [\alpha] = 1/\text{K}, [\beta] = 1/\text{K}^2$
	Elektrisches Potential <i>normalisierte pot. Energie</i>	$\varphi = \frac{W}{Q} \quad [\varphi] = \text{V} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{A s}^3}$
	Elektrische Spannung <i>Potentialdifferenz</i>	$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\Delta W}{Q} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dl} \stackrel{\text{hom.}}{=} \mathbf{E} \cdot \mathbf{l}_{AB} \quad [U] = \text{V}$
	Leistung <i>Arbeit pro Zeiteinheit</i>	$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = UI = \int_V p \, dv \stackrel{\text{homogen}}{=} pV \quad [P] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$
	Leistungsdichte des el. Strömungsfelds	$p = \frac{dP}{dv} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \varrho J^2 \quad [p] = \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$
	Wirkungsgrad <i>Effizienz</i>	$\eta = \frac{\Delta W_{ab}}{\Delta W_{zu}} \quad \text{bzw.} \quad \eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{P_{ab}}{P_{ab} + P_{ver}} \quad [\eta] = 1 \text{ (bzw. \%)}$
	Ladungsänderung (aus Stromfluss)	$Q(t_2) = \Delta Q + Q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} I(t) \, dt + Q(t_1) \quad [Q] = \text{C} = \text{A s}$

Umwandlung	Stern-Dreieck-Umwandlung $\star \Rightarrow \triangle$	Dreieck-Stern-Umwandlung $\triangle \Rightarrow \star$
	 $R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C}$ $R_{AC} = R_A + R_C + \frac{R_A R_C}{R_B}$ $R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B R_C}{R_A}$	 $R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}}$ $R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}}$ $R_C = \frac{R_{AC} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}}$

Graphentheorie	Graph $G(V, E)$ bzw. $G(K, Z)$	Ein Graph G besteht aus je einer Menge k Knoten, K , und einer Menge z Zweige (Verbindungen zwischen Knoten), Z .	
	Baum <i>verzweigter Pfad</i>	Ein Baum ist ein (verzweigter) Pfad/Linienzug (zusammenhängende Zweige bzw. Verbindungen von Knoten) <i>ohne</i> Zyklen/Kreise.	
	Spannbaum <i>vollständiger Baum</i>	Ein Spannbaum ist ein Baum, welcher <i>alle</i> Knoten verbindet; er besteht aus $k-1$ <i>Baumzweigen</i> (daneben $z-k+1$ Verbindungszweige).	
	Masche <i>innerer/äusserer Kreis</i>	Eine Masche ist ein Kreis (einzeln Zyklus, d.h. Pfad mit gleichem Start- und Endknoten) <i>ohne innere oder äussere Zweige</i> ; Anzahl: m .	
	Eulerscher Polyedersatz für <i>planare</i> Graphen	Anz. Maschen $m = z - k + 2$	$z = \text{Anz. Zweige}$ $k = \text{Anz. Knoten}$

Systematische Netzwerkanalyse	Maschen-/Kreisstrommethode	Knotenpotentialmethode (KPM)	modifizierte Knotenpot. (MNA)
	 $\mathbf{R} \mathbf{j} = \mathbf{u}$	 $\mathbf{G} \mathbf{u} = \mathbf{i}$	 $\tilde{\mathbf{G}} \mathbf{w} = \mathbf{s}$
	<ul style="list-style-type: none">■ Unbekannte \mathbf{j}<ul style="list-style-type: none">• Maschen- bzw. Kreisströme• Anzahl: $m - 1 - i$■ Widerstandsmatrix \mathbf{R}<ul style="list-style-type: none">• $r_{xx} = [\sum_n R_n]_{\text{in } j_x}$• $r_{xy} = \pm [\sum_n R_n]_{\text{in } j_x \cap j_y}$• sowie Steuerparameter von gesteuerten Quellen■ Spannungsquellenvektor \mathbf{u}<ul style="list-style-type: none">• $u_x = \mp [\sum_n U_{q,n}]_{\text{in } j_x}$• positiv: $U_{q,n}$ entgegen j_n	<ul style="list-style-type: none">■ Unbekannte \mathbf{u}<ul style="list-style-type: none">• Knotenspannungen $\varphi - \varphi_0$• Anzahl: $k - 1 - v$■ Leitwertmatrix \mathbf{G}<ul style="list-style-type: none">• $g_{xx} = [\sum_n G_n]_{\text{an } u_x}$• $g_{xy} = - [\sum_n G_n]_{\text{an } u_x \& u_y}$• sowie Steuerparameter von gesteuerten Quellen■ Stromquellenvektor \mathbf{i}<ul style="list-style-type: none">• $i_x = \pm [\sum_n I_{q,n}]_{\text{an } u_x}$• positiv: fliesst in u_x <i>hinein</i>	<ul style="list-style-type: none">■ Unbekannte \mathbf{w}<ul style="list-style-type: none">• alle Knotenspannungen \mathbf{u}, sowie einige Zweigströme ($I_{uq} \Rightarrow v, I_s \Rightarrow s$)• Anzahl: $k - 1 + v + s$■ modifizierte Leitwertmatrix $\tilde{\mathbf{G}}$<ul style="list-style-type: none">• Form:$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{I}_u \\ \mathbf{I}_s & -\mathbf{R} \end{bmatrix}$($\mathbf{G}$ ähnlich KPM)■ Quellenvektor \mathbf{s}<ul style="list-style-type: none">• Spannungsquellen• Stromquellen