HS 2023 (v1)

Formelblatt ELT 1 – Grundlagen, DC-Netzwerke & Strömungsfelder

Konstanten

Elementarladung (Ladung des Elektrons $q_e = -e$)	$e = 1.602 \times 10^{-19}$ C	$\approx 1.6 \times 10^{-19}$ C
Masse des Elektrons (Ruhemasse, $v \ll c_0$)	$m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg	$\approx 9 \times 10^{-31}$ kg
Avogadro-Konstante (Anzahl für molare Masse)	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$ mol^{-1}	$\approx 6 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1.3806 \times 10^{-23}$ J/K	$\approx 1.4 \times 10^{-23}$ J/K
Lichtgeschwindigkeit (in Vakuum)	$c_0 = 299\,792\,458$ m/s	$\approx 3 \times 10^{8}$ m/s

Grundgesetze

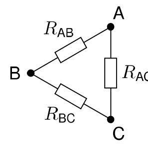
Kirchhoffscher Knotensatz *KH-1* (Kontinuität)	$\sum_n I_n = 0$	$\mathring{I} = \oint_{\text{Hülle}} \mathbf{J} \cdot ds = 0$
Kirchhoffscher Maschensatz *KH-2* (Konservativität)	$\sum_n U_n = 0$	$\mathring{U} = \oint_{C=\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$
Ohmsches Gesetz	$R = \frac{U}{I}$ bzw. $G = \frac{I}{U} = \frac{1}{R}$	$[R] = \Omega$, $[G] = \text{S}$

Grundlagen

Stromstärke	$I = \left.\frac{dQ}{dt}\right\vert_{\text{durch } A} = \int_A \mathbf{J} \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{n}}\, ds}_{ds} \overset{\text{homogen}}{=} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}$	$[I] = \frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{A}$
Stromdichte *Bewegte Ladungsdichte*	$\mathbf{J} = \frac{dI}{dA}\hat{\mathbf{n}} = \rho\mathbf{v} = \sigma\mathbf{E} \quad (\hat{\mathbf{n}} \perp A,\ \mathbf{A} = \hat{\mathbf{n}}A)$	$[J] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$
Driftgeschwindigkeit (der Ladungsträger)	$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{J}}{q\,n} = \frac{\mathbf{J}}{\rho}$	$[v] = \text{m/s}$, $[q] = \text{C} = \text{A s}$, $[n] = 1/\text{m}^3$, $[\rho] = \text{A s/m}^3$
Elektrische Leitfähigkeit und spez. Widerstand ϱ	$\sigma = \frac{1}{\varrho} = q\,n\,\mu$	$[\sigma] = \text{S/m}$, $[\varrho] = \Omega\,\text{m}$, $[\mu] = \frac{\text{m/s}}{\text{V/m}} = \text{A s}^2\text{/kg}$
Temperaturabhängigkeit von Widerständen	$\Delta R = \left(\alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \ldots\right) R_{T_0} \quad (\Delta T = T - T_0)$	$[\alpha] = 1/\text{K}$, $[\beta] = 1/\text{K}^2$
Elektrisches Potential *normalisierte pot. Energie*	$\varphi = \frac{W}{Q}$	$[\varphi] = \text{V} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{A s}^3}$
Elektrische Spannung *Potentialdifferenz*	$U_{\text{AB}} = \varphi_{\text{A}} - \varphi_{\text{B}} = \frac{\Delta W}{Q} = \int_{\text{A}}^{\text{B}} \mathbf{E} \cdot \underbrace{d\mathbf{l}}_{\hat{\mathbf{l}}dl} \overset{\text{hom.}}{=} \mathbf{E} \cdot \mathbf{l}_{\text{AB}}$	$[U] = \text{V}$
Leistung *Arbeit pro Zeiteinheit*	$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = UI = \int_V p\,dv \overset{\text{homogen}}{=} pV$	$[P] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$
Leistungsdichte des el. Strömungsfelds	$p = \frac{dP}{dv} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \varrho J^2$	$[p] = \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$
Wirkungsgrad *Effizienz*	$\eta = \frac{\Delta W_{\text{ab}}}{\Delta W_{\text{zu}}}$ bzw. $\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}} = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{ab}} + P_{\text{ver}}}$	$[\eta] = 1$ (bzw. %)
Ladungsänderung (aus Stromfluss)	$Q(t_2) = \Delta Q + Q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt + Q(t_1)$	$[Q] = \text{C} = \text{A s}$

Umwandlung

Stern-Dreieck-Umwandlung ⅄ ⇒ △

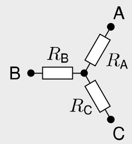


$$R_{\text{AB}} = R_{\text{A}} + R_{\text{B}} + \frac{R_{\text{A}}R_{\text{B}}}{R_{\text{C}}}$$

$$R_{\text{AC}} = R_{\text{A}} + R_{\text{C}} + \frac{R_{\text{A}}R_{\text{C}}}{R_{\text{B}}}$$

$$R_{\text{BC}} = R_{\text{B}} + R_{\text{C}} + \frac{R_{\text{B}}R_{\text{C}}}{R_{\text{A}}}$$

Dreieck-Stern-Umwandlung △ ⇒ ⅄



$$R_{\text{A}} = \frac{R_{\text{AB}}R_{\text{AC}}}{R_{\text{AB}} + R_{\text{BC}} + R_{\text{AC}}}$$

$$R_{\text{B}} = \frac{R_{\text{AB}}R_{\text{BC}}}{R_{\text{AB}} + R_{\text{BC}} + R_{\text{AC}}}$$

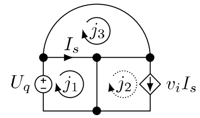
$$R_{\text{C}} = \frac{R_{\text{AC}}R_{\text{BC}}}{R_{\text{AB}} + R_{\text{BC}} + R_{\text{AC}}}$$

Graphentheorie

Graph $G(V,E)$ bzw. $G(K,Z)$	Ein Graph G besteht aus je einer Menge k Knoten, K, und einer Menge z Zweige (Verbindungen zwischen Knoten), Z.	
Baum *verzweigter Pfad*	Ein Baum ist ein (verzweigter) Pfad/Linienzug (zusammenhängende Zweige bzw. Verbindungen von Knoten) *ohne Zyklen/Kreise*.	
Spannbaum *vollständiger Baum*	Ein Spannbaum ist ein Baum, welcher *alle* Knoten verbindet; er besteht aus $k-1$ *Baumzweigen* (daneben $z-k+1$ Verbindungszweige).	
Masche *innerer/äusserer Kreis*	Eine Masche ist ein Kreis (einzelner Zyklus, d.h. Pfad mit gleichem Start- und Endknoten) *ohne innere <u>oder</u> äussere Zweige*; Anzahl: m.	
Eulerscher Polyedersatz für *planare* Graphen	Anz. Maschen $\quad m = z - k + 2$	z = Anz. Zweige, k = Anz. Knoten

Systematische Netzwerkanalyse

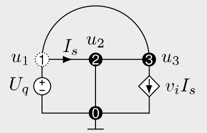
Maschen-/Kreisstrommethode



$$\mathbf{R}\mathbf{j} = \mathbf{u}$$

- Unbekannte $\mathbf{j}$
  - Maschen- bzw. Kreisströme
  - Anzahl: $m - 1 - i$
- Widerstandsmatrix $\mathbf{R}$
  - $r_{xx} = \left[\sum_n R_n\right]_{\text{in } j_x}$
  - $r_{xy} = \pm\left[\sum_n R_n\right]_{\text{in } j_x \cap j_y}$
  - sowie Steuerparameter von gesteuerten Quellen
- Spannungsquellenvektor $\mathbf{u}$
  - $u_x = \mp\left[\sum_n U_{q,n}\right]_{\text{in } j_x}$
  - positiv: $U_{q,n}$ entgegen j_n

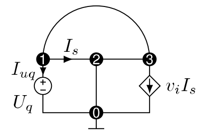
Knotenpotentialmethode (KPM)



$$\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{i}$$

- Unbekannte $\mathbf{u}$
  - Knotenspannungen $\varphi - \varphi_0$
  - Anzahl: $k - 1 - v$
- Leitwertmatrix $\mathbf{G}$
  - $g_{xx} = \left[\sum_n G_n\right]_{\text{an } u_x}$
  - $g_{xy} = -\left[\sum_n G_n\right]_{\text{an } u_x\ \&\ u_y}$
  - sowie Steuerparameter von gesteuerten Quellen
- Stromquellenvektor $\mathbf{i}$
  - $i_x = \pm\left[\sum_n I_{q,n}\right]_{\text{an } u_x}$
  - positiv: fliesst in u_x *hinein*

modifizierte Knotenpot. (MNA)



$$\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{w} = \mathbf{s}$$

- Unbekannte $\mathbf{w}$
  - alle Knotenspannungen $\mathbf{u}$, sowie einige Zweigströme ($I_{qu} \Rightarrow v$, $I_s \Rightarrow s$)
  - Anzahl: $k - 1 + v + s$
- modifizierte Leitwertmatrix $\tilde{\mathbf{G}}$
  - Form:
    $$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{\Gamma}_u \\ \mathbf{\Gamma}_i & -\mathbf{R} \end{bmatrix}$$
    ($\mathbf{G}$ ähnlich KPM)
- Quellenvektor $\mathbf{s}$
  - Spannungsquellen
  - Stromquellen