

## Preface

本笔记旨在分享笔者对 **Riemann-Hilbert** 方法的理解, 因仅为一家之言, 仓促之间又后期无他人审校, 难免存在疏漏, 错误和挂一漏万之处. 望各位读者在阅读时能指出不足, 共同探讨与完善.

本笔记为在老家过年期间编写, 整个过程并不算顺利, 老家的房子年久失修, 塌了外墙和两间屋顶, 白天需要和父亲一起修房子, 应付家庭琐事; 只有夜间才能缓慢的推进写作. 另外农村没有暖气, 零下十余度的环境实难称舒适, 需要字面意义上的争分夺秒. 尤其深夜伏案时, 恍若独行于漫长甬道, 徘徊在黑暗迷宫之中. 然正如 A. Zee 所言, 夜航人自有夜行法 [1]. 历时一月的艰辛写作中, 笔者感到一种难以言喻的, 某种漠然的相互理解, 并在微茫中获得慰藉. 是邪, 非邪? 解释或属妄诞, 感受毕竟真实. 序曲将终, 敬无穷的远方, 与无尽的人们.

本笔记存档于 <https://github.com/IceySwan/Notes>, 如发现任何错误请提 **issue** 或联系 [hi@icey.one](mailto:hi@icey.one)

Icey Swan  
2025 年 2 月

# 第一章 预备知识

## 1.1 Plemelj 公式

### 定理 1.1 (Abel 定理)

设  $A \in \mathbb{C}$ , 对矩阵微分方程  $Y_x = A(x)Y$ , 可得标量微分方程

$$(\det Y)_x = \operatorname{tr}(A) \det Y \quad (1.1.1)$$

从而有

$$\det(Y(x)) = \det(Y(x_0)) \cdot \exp \int_{x_0}^x \operatorname{tr}(A(t)) dt \quad (1.1.2)$$

### 定理 1.2 (Morera)

如果  $f(z)$  在单连通区域  $D$  内连续, 且对于  $D$  内任意闭曲线  $\sum$ , 有  $\int_{\sum} f(z) dz = 0$ , 则有  $f(z)$  在  $D$  内解析

### 定义 1.1 (Schwartz 空间)

欧几里得空间  $\mathbb{R}^n$  上的 Schwartz 空间  $S(\mathbb{R}^n)$  定义为

$$S(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \|f\|_{\alpha, \beta} = \sum_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \partial_\beta f(x)| < \infty, \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \right\} \quad (1.1.3)$$

其中  $\alpha, \beta$  为多重指标,  $\partial_\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_n}^{\beta_n}$ .  $f$  称为速降函数或 Schwartz 函数.

简单来说, 速降函数是指当  $x \rightarrow \infty$  时趋近于零的速度比所有的多项式的倒数都快, 并且任意阶的导数都有这种性质的函数。

### 定理 1.3 (Painleve 开拓定理)

设  $D_1, D_2$  为两个没有公共点的区域, 边界为  $\Gamma$ , 并设  $f_1(z), f_2(z)$  分别在  $D_1, D_2$  内解析, 在  $D_1 + \Gamma, D_2 + \Gamma$  上连续, 且  $f_1(z) = f_2(z), \forall z \in \Gamma$ , 则

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1, \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in \Gamma, \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases} \quad (1.1.4)$$

在  $D_1 + D_2 + \Gamma$  内解析.

**证明** 显然  $f(Z)$  在  $D_1 + D_2 + \Gamma$  上连续, 根据定理 1.2, 只需证明  $f(z)$  沿任何闭曲线  $\sum$  的积分为 0.

如果  $\sum \subset D_1$ , 或  $\sum \subset D_2$ , 则由  $f(z)$  的解析性可得

$$\int_{\sum} f(z) dz = 0 \quad (1.1.5)$$

如果  $\sum$  同时包含于  $D_1, D_2$  内, 把  $\Gamma$  在  $\sum$  内的曲线记为  $C_\gamma$ , 则

$$\int_{C_1 + C_\gamma} f(z) dz = 0, \quad \int_{C_1 + C_\gamma}^- f(z) dz = 0 \quad (1.1.6)$$

故

$$\int_{\sum} f(z) dz = \int_{C_1 + C_2} f(z) dz = \int_{C_1 + C_\gamma} f(z) dz = \int_{C_1 + C_\gamma}^- f(z) dz = 0. \quad (1.1.7)$$

□

## 引理 1.1

设  $f(\xi)$  在  $z \in \Sigma$  满足  $\mu$  次 Hölder 条件, 且  $z' \rightarrow z$  时,  $h/d$  有界, 其中

$$h = |z' - z|, \quad d = \min_{\xi \in \Sigma} |\xi - z'|, \quad (1.1.8)$$

则

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z'} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \quad (1.1.9)$$

证明

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z'} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{(\xi - z)(f(\xi) - f(z)) - (\xi - z')(f(\xi) - f(z))}{(\xi - z')(\xi - z)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{z' - z}{\xi - z} \cdot \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{h}{d} M \frac{(\xi - z)^{\mu}}{\xi - z} d\xi = \Delta_1 + \Delta_2 \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

其中

$$\begin{aligned} |\Delta_1| &\leq \frac{hM}{2\pi d} \int_{C_{\delta}} \frac{(\xi - z)^{\mu}}{\xi - z} d|\xi| \leq \frac{hM}{2\pi d} \int_0^{\delta} t^{\mu-1} dt = \frac{hM}{2\pi d \delta} \delta^{\mu} (C_{\delta} = \{|\xi - z| \leq \delta\}) \\ |\Delta_2| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma \setminus C_{\delta}} \frac{(f(\xi) - f(z))(z - z')}{\xi - z} d\xi \right| \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

由于  $\Sigma \setminus C_{\delta}$  不包含  $z$ , 故  $\Delta_2$  为关于  $z'$  的连续函数, 则

$$|\Delta_2| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma \setminus C_{\delta}} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z'} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma \setminus C_{\delta}} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| < |\Delta_1| \quad (1.1.12)$$

取  $\delta \rightarrow 0$ , 可令  $|\Delta_1| < \frac{\epsilon}{2}$ , 故  $|\Delta_1| + |\Delta_2| < \epsilon$  □

## 定理 1.4 (Plemelj)

设  $z \in \Sigma$  为正则点, 且不为边界点,  $f(\xi)$  在  $z$  点满足  $\mu$  次 Hölder 条件, 且  $z' \rightarrow z$  时,  $h/d$  有界, 其中  $h = |z' - z|$ ,  $d = \min_{\xi \in \Sigma} |\xi - z'|$ , 则

$$F_+ = \lim_{\substack{z' \rightarrow z \\ z' \in \Sigma_+}} F(z') = F(z) + \frac{1}{2} f(z) \quad (1.1.13)$$

$$F_- = \lim_{\substack{z' \rightarrow z \\ z' \in -\Sigma_-}} F(z') = F(z) - \frac{1}{2} f(z) \quad (1.1.14)$$

证明 首先证明闭区线情形:

$$\begin{aligned} F_+ &= \lim_{\substack{z' \rightarrow z \\ z' \in \Sigma_+}} F(z') = \lim_{z' \rightarrow z} \int_{\Sigma} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{\xi - z'} d\xi \\ &= \lim_{z' \rightarrow z} \int_{\Sigma} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z'} d\xi + \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{1}{\xi - z'} d\xi \\ &= \lim_{z' \rightarrow z} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_+} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z'} d\xi + f(z) \\ &= \lim_{z' \rightarrow z} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_+} \frac{f(\xi)}{\xi - z'} d\xi - \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Sigma_+} \frac{1}{\xi - z'} d\xi + f(z) \\ &= F(z) + \frac{1}{2} f(z) \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

$F_-(z')$  同理, 下证  $\Sigma$  为开曲线情形, 则可补充  $\Sigma'$ , s.t.  $\Sigma \cup \Sigma'$  为闭曲线, 且定义  $\forall \xi \in \Sigma', f(\xi) = 0$ , 则

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma \cup \Sigma'} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi. \quad (1.1.16)$$

则由开曲线情形可得

$$\begin{aligned} F_+(z) &= \lim_{\substack{z' \rightarrow z \\ z' \in \Sigma}} \int_{\Sigma \cup \Sigma'} \frac{f(\xi)}{\xi - z'} d\xi = \int_{\Sigma \cup \Sigma'} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Sigma \cup \Sigma'} \frac{1}{\xi - z'} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi - \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Sigma'} \frac{1}{\xi - z} d\xi + f(z) = F(z) + \frac{1}{2}f(z) \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

$F_-(z')$  同理

**注** 如果  $z \in \Sigma$  为一个角点, 在其两切线的夹角为  $\alpha$ , 则可

$$\begin{aligned} F_+(z) &= \lim_{\substack{z' \rightarrow z \\ z' \in D}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi)}{\xi - z'} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + \frac{\alpha}{2\pi} f(z) + (1 - \frac{\alpha}{2\pi}) f(z) \\ &= F(z) - \frac{\alpha}{2\pi} f(z) \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

$$\begin{aligned} F_-(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + \frac{\alpha}{2\pi} f(z) - \frac{\alpha}{2\pi} f(z) \\ &= F(z) - \frac{\alpha}{2\pi} f(z) \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

### 定义 1.2 (Plemelj 公式)

由 (1.1.13) - (1.1.14), (1.1.18) - (1.1.19) 可以看出, 无论  $z$  是正则点还是角点, 都有

$$F_+(z) - F_-(z) = f(z), \quad z \in \Sigma \quad (1.1.20)$$

$$F_+(z) - F_-(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =: H(f)(z) \quad (1.1.21)$$

称为标量 RH 问题, 其解可用 Cauchy 积分给出

$$F(z) = A + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in \mathbb{C} \quad (1.1.22)$$

其中  $A$  为任意常数, 一般被边值或渐进条件决定, 这一公式被称为 Plemelj 公式.

对于如下 RH 问题

$$G_+(z) = G_-(z)v(z), \quad z \in \Sigma \quad (1.1.23)$$

只需两边取  $\log$  变换则有

$$\log G_+(z) - \log G_-(z) = \log v(z), \quad z \in \Sigma \quad (1.1.24)$$

由 Plemelj 公式, 则有

$$\log G(z) = A + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{v(\xi)}{\xi - z} d\xi \implies G(z) = B \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right), \quad z \in \Sigma \quad (1.1.25)$$

其中  $B$  为任意常数.

## 1.2 矩阵 RH 问题

### 定义 1.3 (RH 问题)

设  $\Sigma$  为复平面  $\mathbb{C}$  内的有向路径, 假设存在一个  $\Sigma^0$  上的光滑映射  $v(z) : \Sigma \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ , 则  $(\Sigma, v)$  决定了一个 RH 问题, 寻找一个  $n$  阶矩阵  $M(z)$  满足

$$M(z) \in C, \quad (\mathbb{C} \setminus \Sigma) \quad (1.2.1)$$

$$M_+(z) = M_-(z)v(z), \quad z \in \Sigma \quad (1.2.2)$$

$$M(z) \rightarrow I, \quad z \rightarrow \infty \quad (1.2.3)$$

其中  $M_{\pm}$  表示在正负区域内  $z' \rightarrow z$  时的极限,  $\sum$  称为跳跃曲线,  $v(z)$  称为跳跃矩阵.

根据 Beadls-Coifman 定理, 如上 RH 问题的解可通过如下方式构造: 不妨设跳跃矩阵  $v(z)$  具有如下分解

$$v = (b_-)^{-1} b_+ \quad (1.2.4)$$

由此, 可构造

$$w_+ = b_+ - I, \quad w_- = I - b_- \quad (1.2.5)$$

进一步可定义 Cauchy 投影算子

$$(C_{\pm} f)(z) = \lim_{\substack{z' \rightarrow z \in \sum \\ z' \in \pm \sum}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sum} \frac{f(\xi)}{\xi - z'} d\xi \quad (1.2.6)$$

则可以证明如果  $f(z) \in L^2(\sum)$ , 则  $C_{\pm} : L^2 \rightarrow L^2$  的有界算子, 且  $C_+ - C_- = 1$ , 再定义算子

$$C_w f = C_+(fw_-) - C_-(fw_+) \quad (1.2.7)$$

则  $C_w : L^2 \cap L^{\infty} \rightarrow L^2$  的有界算子.

#### 定理 1.5

设  $\det v = 1$ , 算子  $I - C_w$  在  $L^2(\sum)$  上可逆,  $\mu \in I + L^2(\sum)$  为下列方程

$$(I - C_w)\mu = I \quad (1.2.8)$$

的解, 且

$$(I - C_w)(\mu - I) = C_w I + C_+ w_- + C_- w_+ \in L^2(\sum) \quad (1.2.9)$$

则

$$M(z) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sum} \frac{\mu(\xi)w(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (1.2.10)$$

为上述 RH 问题的唯一解, RH 问题  $M(z)$  的可解等价于奇异积分方程 (1.2.8).

**证明** 只需证明 (1.2.10) 满足 (1.2.8)

$$\begin{aligned} M_+ &= I + \lim_{z' \rightarrow z \in \sum} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sum} \frac{\mu(\xi)w(\xi)}{\xi - z'} d\xi \stackrel{(1.2.6)}{=} I + C_+(\mu w) \\ &= I + C_+(\mu w_-) + C_+(\mu w_+) = I + C_+(\mu w_-) + C_-(\mu w_+) + C_+(\mu w_+) + C_-(\mu w_+) \\ &\stackrel{(1.2.7)}{=} I + C_w(\mu) + \mu w_+ \stackrel{(1.2.8)}{=} \mu + \mu w_+ = \mu(I + w_+) = \mu b_+ \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

同理有

$$M_-(z) = \mu b_- \quad (1.2.12)$$

故有

$$M_+(z) = \mu b_+ = \mu b_-(b_-)^{-1} b_+ = M_-(z)v(z) \quad (1.2.13)$$

下证唯一性, 先证  $M$  可逆, 对 (1.2.2) 取行列式, 并注意到  $\det v(z) = 1$ , 则  $\det M_+(z) = \det M_-(z)$ . 故由 Painleve 开拓定理得  $\det M(z)$  在  $\mathbb{C}$  上解析. 由 (1.2.3) 得

$$\det M(z) \rightarrow 1, z \rightarrow \infty \quad (1.2.14)$$

故由 Liouville 定理可知  $\det M(z) = c$ , 再由渐进条件得  $c = 1$ , 故  $M(z)$  可逆.

设  $\tilde{M}$  为上述 RH 问题的另一个解, 则  $\tilde{M}$  可逆, 且在  $\mathbb{C} \setminus \sum$  上解析, 且在  $\sum$  上满足

$$(M\tilde{M}^{-1})_+ = M_+ \tilde{M}_+^{-1} = M_- v(\tilde{M}_- v)^{-1} = M_- (\tilde{M}_-)^{-1} = (M\tilde{M}^{-1})_- \quad (1.2.15)$$

由 Painleve 开拓定理,  $M\tilde{M}^{-1}$  在  $\mathbb{C}$  上解析. 另外由  $M, \tilde{M} \rightarrow I$ , 故  $M\tilde{M}^{-1}$  有界, 故为常矩阵. 由渐进性得

$$M\tilde{M}^{-1} = I \implies M = \tilde{M} \quad (1.2.16)$$

□

**注** 由 RH 问题解的唯一性, RH 问题 (1.2.1) - (1.2.3) 的解与跳跃矩阵  $v(z)$  的分解无关, 因此可以考虑  $v(z)$  的平凡解

$$b_- = I, \quad b_+ = v \quad (1.2.17)$$

故可构造

$$\begin{aligned} w_- &= 0, \quad w_+ = v - I, \quad w = v - I \\ C_w f &= C_+(f w_-) + C_-(f w_+) = C_+(f(v - I)), \quad \mu = (I - C_w)^{-1} I \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

则 RH 问题的解可表示为

$$M(z) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{+\Sigma} \frac{\mu(\xi)(v(\xi) - I)}{\xi - z} d\xi \quad (1.2.19)$$

**注** RH 方法的关键思想就是改变积分路径, 通过跳跃矩阵的分解情况, 确定对积分路径进行一系列形变, 再取极限去除跳跃矩阵为单位阵的情形, 将其化解为可解的 RH 问题, 所以一个自然的问题就是: “为什么可以扔掉跳跃矩阵为单位阵的路径? 或者说为什么跳跃矩阵对 RH 问题的解不产生贡献.”

这很容易通过表达式 (1.2.19) 看出, 我们将积分路径分解为  $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$  且

$$v = \begin{cases} v_1 \neq I & \Sigma_1, \\ v_1 = I & \Sigma_2 \end{cases} \quad (1.2.20)$$

则在  $\Sigma_1$  上,  $v - I = v_1 - I \neq 0$ , 在  $\Sigma_2$  上,  $v - I = v_1 - I = 0$ , 故

$$\begin{aligned} M(z) &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\mu(\xi)(v(\xi) - I)}{\xi - z} d\xi \\ &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_1} \frac{\mu(\xi)(v_1(\xi) - I)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_2} \frac{\mu(\xi)(v_2(\xi) - I)}{\xi - z} d\xi \\ &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_1} \frac{\mu(\xi)(v_1(\xi) - I)}{\xi - z} d\xi \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

易得 RH 问题  $(\Sigma, v(z))$  的解与  $(\Sigma_1, v_1(z))$  的解相同, 即跳跃矩阵为单位阵的路径  $\Sigma_2$  对 RH 问题的解无贡献, 可以舍去. 只求  $\Sigma_1$  上的 RH 问题

## 第二章 RH 方法求解零边界的 NLS 方程

### 2.1 聚焦 NLS 方程

#### 2.1.1 特征函数

考虑聚焦 NLS 方程的初值问题

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2q(x, t)|q(x, t)|^2 = 0 \quad (2.1.1)$$

$$q(x, 0) = q_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad (2.1.2)$$

其中  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  表示 Schwartz 空间. NLS 方程 (2.1.1) 具有如下矩阵形式的 Lax 对

$$\psi_x + iz\sigma_3\psi = P\psi \quad (2.1.3)$$

$$\psi_t + 2iz^2\sigma_3\psi = Q\psi \quad (2.1.4)$$

其中

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} & q \\ -q^* & \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} i|q|^2 & iq_x \\ iq_x^* & -i|q|^2 \end{pmatrix} + 2zP$$

满足零曲率方程

$$(P - iz\sigma_3)_t - (Q - 2iz^2\sigma_3)_x + [P - iz\sigma_3, Q - 2iz^2\sigma_3] = 0 \quad (2.1.5)$$

#### 2.1.2 渐进性

由于  $q_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 且  $q(x, t), q_x(x, t) \rightarrow 0, (x \rightarrow \infty)$ , 故  $x$  足够大时,  $P, Q$  可忽略, 从而 Lax 对 (2.1.3) - (2.1.4) 可近似为

$$\psi_x \sim -iz\sigma_3\psi, \quad \psi_t \sim -2iz^2\sigma_3\psi$$

可得渐进形式的 Jost 解  $\psi = e^{-i\theta(z)\sigma_3}, (x \rightarrow \infty)$ , 其中  $\theta(z) = zx + 2z^2t$ . 下面为表示方便, 不妨记  $E := e^{i\theta(z)\sigma_3}$ , 做变换  $\mu(x, t, z) = \psi(x, t, z)E$ , 则有

$$E^{-1} = e^{-i\theta(z)\sigma_3}, \quad \mu(x, t, z) \rightarrow I (x \rightarrow \infty) \quad (2.1.6)$$

则可得

$$\mu_x = \psi_x E + \psi E(i\sigma_3 z) \quad (2.1.7)$$

$$\mu_t = \psi_t E + \psi E(2i\sigma_3 z^2) \quad (2.1.8)$$

带入 Lax 对 (2.1.3) - (2.1.4) 可得

$$\mu_x = (P\psi - iz\sigma_3\psi)E + \psi E(i\sigma_3 z) \quad (2.1.9)$$

$$\mu_t = (Q\psi - 2iz^2\sigma_3\psi)E + \psi E(2i\sigma_3 z^2) \quad (2.1.10)$$

故有

$$\mu_x = P\mu - iz[\sigma_3, \mu] \implies \mu_x + iz[\sigma_3, \mu] = P\mu \quad (2.1.11)$$

同理可得

$$\mu_t + 2iz^2[\sigma_3, \mu] = Q\mu \quad (2.1.12)$$

由 (2.1.11) 式可得

$$\mu_x + iz\hat{\sigma}_3\mu = P\mu \quad (2.1.13)$$

$$e^{i\theta(z)\hat{\sigma}_3}\mu_x + iz\hat{\sigma}_3e^{i\theta(z)\hat{\sigma}_3}\mu = e^{i\theta(z)\hat{\sigma}_3}P \quad (2.1.14)$$

其中  $\hat{\sigma}_3 X = [\sigma_3, X]$ ,  $e^{i\theta(z)\hat{\sigma}_3}X = EXE^{-1}$ , 为表示方便不妨记  $\hat{E} = e^{i\theta(z)\hat{\sigma}_3}$ . 易得 Lax 对的全微分形式

$$d(\hat{E}\mu) = \hat{E}[(Pdx + Qdt)\mu] \quad (2.1.15)$$

为构造规范的 Riemann-Hilbert 问题, 即其解在  $z \rightarrow \infty$  时渐进于单位阵, 现只需证明  $\mu \rightarrow I(z \rightarrow \infty)$ .

**证明** 将  $\mu$  在无穷远点 Taylor 展开

$$\mu = \mu^{(0)} + \frac{1}{z}\mu^{(1)} + \dots = \mu^{(0)} + O(z^{-1}) \quad (2.1.16)$$

其中  $\mu^{(0)}, \mu^{(1)}$  与  $z$  无关, 将上式代入 (2.1.11), (2.1.12) 比较  $z$  的次数可得

$$\begin{aligned} [\mu^{(0)} + O(z^{-1})]_x + iz \left[ \sigma_3, \mu^{(0)} + \frac{\mu^{(1)}}{z} + O(z^{-2}) \right] &= P [\mu^{(0)} + O(z^{-1})] \\ [\mu^{(0)} + O(z^{-1})]_t + 2iz^2 [\sigma_3, \mu^{(0)} + \frac{\mu^{(1)}}{z} + O(z^{-2})] &= (Q_0 + 2zP) [\mu^{(0)} + O(z^{-1})] \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

可得  $x$  部分:

$$\begin{aligned} z: [\sigma_3, \mu^{(0)}] &= 0 \\ z^0: \mu^{(0)} + 2iz[\sigma_3, \mu^{(1)}] &= P\mu^{(0)} \implies \mu^{(0)} \text{ 为对角阵} \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

$t$  部分:

$$\begin{aligned} z^2: [\sigma_3, \mu^{(0)}] &= 0 \\ z: i[\sigma_3, \mu^{(1)}] &= P\mu^{(1)} \implies \mu_x^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

故  $\mu^{(0)}$  为与  $x$  无关的对角矩阵, 因此 (2.1.16) 式对  $x, z$  同时取极限, 并交换极限顺序可得

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \mu = \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow \infty} (\mu^{(0)} + O(z^{-1})) \quad (2.1.20)$$

利用 (2.1.6), (2.1.16) 式可得  $\mu^{(0)} = I$ , 故  $\mu \rightarrow I(z \rightarrow \infty)$ .  $\square$

再将  $\mu^{(0)} = I$  代入 (2.1.19) 式比较矩阵对角元素得

$$q(x, t) = 2i(\mu^{(1)})_{12} = 2i \lim_{z \rightarrow \infty} (z\mu)_{12} \quad (2.1.21)$$

**注** 上式可将 NLS 方程与特征函数联系起来, 接下来将特征函数与 RH 问题建立联系. 从而 NLS 方程的解可用 RH 问题的解表示, 然后通过 RH 问题反接触 NLS 方程的解, 即

$$NLS \iff \text{特征函数} \iff RH \text{问题}$$

## 2.2 解析性与对称性

由于 (2.1.15) 为全微分形式, 积分与路径无关, 故选择两个特殊路径:

$$(-\infty, t) \rightarrow (x, t), \quad (+\infty, t) \rightarrow (x, t)$$

因此可获得 Lax 对 (2.1.11), (2.1.12) 的两个特征函数

$$\mu_1 = I - \int_{-\infty}^x e^{-iz(x-y)\sigma_3} P \mu_1 dy, \quad \mu_2 = I - \int_{+\infty}^x e^{-iz(x-y)\sigma_3} P \mu_2 dy \quad (2.2.1)$$

**证明** 由 (2.1.15) 式, 由  $(\hat{E}\mu)_x = \hat{E}P\mu$  可得

$$\begin{aligned} \hat{E}\mu|_{-\infty}^x &= \int_{-\infty}^x \hat{E}P\mu dy \\ LHS &= \hat{E}\mu - \hat{E}I, \quad RHS = \int_{-\infty}^x e^{izy+z^2t\hat{\sigma}_3} P \mu dy \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

两边同时乘以  $\hat{E}$ , 即得  $\mu_1, \mu_2$  同理可得.  $\square$



显然, 其仍具有如下性质

$$\mu_1, \mu_2 \rightarrow I(x \rightarrow \pm\infty), \quad \mu_1, \mu_2 \rightarrow I(z \rightarrow +\infty) \quad (2.2.3)$$

由于  $\psi_1 = \mu_1 E^{-1}, \psi_2 = \mu_2 E^{-1}$ , 为 Lax 对的两个解, 而 Lax 对为一节齐次线性方程组, 故这两个解线性相关, 故有

$$\mu_1(x, t, z) = \mu_2(x, t, z) \hat{E} S(z), \quad S(z) = \begin{pmatrix} s_{11}(z) & s_{12}(z) \\ s_{21}(z) & s_{22}(z) \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

其中矩阵  $S(z)$  与  $x, t$  无关, 称为谱函数矩阵.

再由  $\mu = \psi E$  可知  $\det(\mu_j) = \det(\psi_j)$ . 又因为  $\text{tr}(P - iz\sigma_3) = \text{tr}(Q - 2iz^2\sigma_3) = 0$ , 由 Abel 定理可得

$$\det(\psi_j)_x = \det(\psi_j)_t = 0 \quad (2.2.5)$$

故有  $\det(\mu_j)_x = \det(\mu_j)_t = 0$ , 这说明  $\det(\mu_j)$  与  $x, t$  无关, 再由渐进性可得

$$\det(\mu_j) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \det(\mu_j) = 1, \quad (j = 1, 2) \quad (2.2.6)$$

故对 (2.2.4) 两边取行列式有  $\det S(z) = 1$ .

### 2.2.1 解析性

下面我们考虑特征函数  $\mu_1, \mu_1$  和谱矩阵  $S(z)$  的解析性, 记  $\mu_1$  的第一二列分别为

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} \mu_1^{11} & \mu_1^{12} \\ \mu_1^{21} & \mu_1^{22} \end{pmatrix} = (\mu_1^+, \mu_1^-) \quad (2.2.7)$$

则由积分方程 (2.2.1) 可得如下 Volterra 积分方程

$$\mu_1^+(x, t, z) = (1, 0)^T - \int_{-\infty}^x \begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{iz(x-y)} \end{pmatrix} P \mu_1^+ dy \quad (2.2.8)$$

$$\mu_1^-(x, t, z) = (0, 1)^T - \int_{-\infty}^x \begin{pmatrix} e^{-iz(x-y)} & \\ & 1 \end{pmatrix} P \mu_1^- dy \quad (2.2.9)$$

对于上面两方程, 由于积分变量  $y < x$ , 可得

$$e^{2iz(x-y)} = e^{2i(x-y)\Re(z)} e^{-2i(x-y)\Im(z)}, \quad e^{-2iz(x-y)} = e^{-2i(x-y)\Re(z)} e^{2i(x-y)\Im(z)}$$

因此当  $q(x) \in L^1(\mathbb{R})$  时, 通过构造序列与 Neumann 级数, 可得  $\mu_1^+, \mu_1^-$  分别在  $\mathbb{C}_\pm$  解析性.

**注** 上面 Volterra 积分的推导: 考虑到  $e^{\hat{\sigma}_3 X} = e^{\sigma_3 X} e^{-\sigma_3}$ , 故有

$$\begin{aligned} \mu_1 &= I + \int_{-\infty}^x e^{-iz(x-y)\hat{\sigma}_3} P \mu_1 dy = I + \int_{-\infty}^x e^{-iz(x-y)\sigma_3} P e^{iz(x-y)\sigma_3} \mu_1 dy \\ &= I + \int_{-\infty}^x \begin{pmatrix} q e^{2iz(x-y)} & \\ -q^* e^{-2iz(x-y)} & \end{pmatrix} \mu dy \end{aligned}$$

故  $\mu_1^+ =, \quad \mu_1^- =$

**证明** 下证  $\mu_1^+$  的解析性.

Step1. 解的存在性: 事实上方程 (2.2.8) 有如下 Neumann 级数分解

$$\mu_1^+ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x, z), \quad c_{n+1} = \int_{-\infty}^x \begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{iz(x-y)} \end{pmatrix} P c_n(y, z) dy \quad (2.2.10)$$

其分量形式为

$$c_{n+1}^{(1)}(x, z) = \int_{-\infty}^x q(y) c_n^{(2)}(y, z) dy, \quad c_{n+1}^{(2)}(x, z) = \int_{-\infty}^x e^{2iz(x-y)} p(y) c_n^{(1)}(y, z) dy \quad (2.2.11)$$

其中  $c_{n+1} = (c_{n+1}^{(1)}, c_{n+1}^{(2)})^T, p = -q^*$ . 由  $c_0^{(2)} = 0 \implies c_{2n+1}^{(1)} = c_{2n}^{(2)} = 0$ , 故上面方程可简化为

$$c_{2n}^{(1)}(x, z) = \int_{-\infty}^x q(y) c_{2n-1}^{(2)}(y, z) dy, \quad c_{2n+1}^{(2)}(x, z) = \int_{-\infty}^x e^{2iz(x-y)} p(y) c_{2n}^{(1)}(y, z) dy \quad (2.2.12)$$

对上面方程组进一步简化, 引入如下恒等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{j!} \int_{-\infty}^x |f(\xi)| \left[ \int_{-\infty}^{\xi} |f(\eta)| \right]^j d\xi &= \frac{1}{(j+1)!} \int_{-\infty}^x \frac{d}{d\xi} \left[ \int_{-\infty}^{\xi} |f(\eta)| \right]^{j+1} d\xi \\ &= \frac{1}{(j+1)!} \left[ \int_{-\infty}^x |f(\xi)| d\xi \right]^{j+1} \quad (f \in L^1(\mathbb{R})) \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

利用归纳法可证明当  $\Im(z) > 0$  时, 有

$$|c_{2n+1}^{(2)}| = \frac{u^{n+1}(x)}{(n+1)!} \frac{v^n(x)}{n!}, \quad |c_{2n}^{(1)}| = \frac{u^n(x)}{n!} \frac{v^n(x)}{n!} \quad (2.2.14)$$

其中

$$u(x) = \int_{-\infty}^x |p(y)| dy, \quad v(x) = \int_{-\infty}^x |q(y)| dy \quad (2.2.15)$$

事实上, 当  $\Im(z) > 0$  时,  $|e^{2iz(x-y)}| \leq 1$ , 利用  $c_0^{(1)} = 1$ , 由 (2.2.14) 可得

$$c_1^{(2)}(x, y) = \int_{-\infty}^x e^{2iz(x-y)} p(y) dy, \quad c_2^{(1)}(x, y) = \int_{-\infty}^x e^{2iz(x-y)} q(y) c_1^{(2)} dy \quad (2.2.16)$$

又由  $u(x) \geq 0, v(x) \geq 0$ , 有  $c_1^{(2)} \leq v(x)$

$$\begin{aligned} |c_2^{(1)}(x, y)| &\leq \int_{-\infty}^x |q| c_1^{(2)}(y, z) dy \leq \int_{-\infty}^x |q| v(y) dy = \int_{-\infty}^x v'(y) u(y) dy \\ &= u(x) v(x) - \int_{-\infty}^x u'(y) v(y) dy \leq u(x) v(x) \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

进而可得

$$\begin{aligned} |c_3^{(2)}(x, z)| &\leq \int_{-\infty}^x |p| c_2^{(1)}(y, z) dy \leq \int_{-\infty}^x |p| u(y) v(y) dy \\ &\leq \int_{-\infty}^x u'(y) u(y) v(y) dy = \frac{1}{2} u^2(x) v(x) - \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} u^2(x) v'(x) dy \leq \frac{1}{2} u^2(x) v(x) \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

不妨设对于  $k \leq l$  时满足  $|c_{2l+1}^{(2)}| \leq \frac{u^{l+1}(x)}{(l+1)!} \frac{v^l(x)}{l!}, |c_{2l}^{(1)}| \leq \frac{u^l(x)}{l!} \frac{v^l(x)}{l!}$ , 下证对于  $k = l+1$  仍成立, 利用 (2.2.13) 式可得

$$|c_{2l+2}^{(1)}| \leq \int_{-\infty}^x |q(y)| \frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!} \frac{v^l(y)}{l!} dy \leq \int_{-\infty}^x v'(y) \frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!} \frac{v^l(y)}{l!} dy = \frac{u^{l+1}}{(l+1)!} \frac{v^{l+1}}{(l+1)!} \quad (2.2.19)$$

及

$$|c_{2l+3}^{(2)}| \leq \int_{-\infty}^x |p(y)| \frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!} \frac{v^l(y)}{l!} dy \leq \int_{-\infty}^x u'(y) \frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!} \frac{v^l(y)}{l!} dy = \frac{u^{l+2}}{(l+2)!} \frac{v^{l+1}}{(l+1)!} \quad (2.2.20)$$

从而上述 (2.2.12) 式得证. 注意到  $|q(x)| = |p(x)|$ , 则  $v(x) = u(x)$ , 故 (2.2.12) 式可化简为

$$|c_{2n+1}^{(2)}| \leq \frac{u^{2n+1}}{n!(n+1)!}, \quad |c_{2n}^{(1)}| \leq \frac{u^{2n}}{n!n!} \quad (2.2.21)$$

当  $q \in L^1(\mathbb{R})$  时, 有  $u(x)$  的上述级数均收敛, 故 Neumann 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x, z)$  绝对收敛, 此时  $\mu_1^+$  在  $\text{Im} z > 0$  上解析, 且在  $\text{Im} z \geq 0$  上连续.

Step2. 解的唯一性: 不妨设  $\tilde{\mu}_1^+$  为方程 (2.2.8) 的另一个解, 不妨设  $h = \mu_1^+ - \tilde{\mu}_1^+$ , 则有

$$\|h(x, t, z)\| = \left\| \int_{-\infty}^x \begin{pmatrix} 1 \\ e^{iz(x-y)} \end{pmatrix} P h dy \right\| \leq 2 \int_{-\infty}^x |q| \|h\| dy \implies \|h(x, t, z)\| \equiv 0 \quad (2.2.22)$$

故  $\mu_1^+$  为方程的唯一解, 同理可得  $\mu_1^-$  的解析性.  $\square$

所以可得  $\mu_1^+, \mu_1^-$  分别在  $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$  上解析. 同理可得  $\mu_2$  的第一二列分别在  $\mathbb{C}_-, \mathbb{C}_+$  上解析. 记作

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} \mu_2^{(11)} & \mu_2^{(12)} \\ \mu_2^{(21)} & \mu_2^{(22)} \end{pmatrix} = (\mu_2^-, \mu_2^+)$$

由 (2.2.6) 可知,  $\mu_1, \mu_2$  可逆, 且逆矩阵为其伴随阵, 另外基于  $\mu_1, \mu_2$  的列向量函数的解析性, 可得  $\mu_1^{-1}$  的第一二行

在  $\mathbb{C}_-, \mathbb{C}_+$  上解析,  $\mu_2^{-1}$  的第一二行在  $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$  上解析. 记为

$$\mu_1^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1^{(22)} & -\mu_1^{(21)} \\ -\mu_1^{(12)} & \mu_1^{(11)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{\mu}_1^+ \\ \hat{\mu}_1^- \end{pmatrix}, \quad \mu_2^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_2^{(22)} & -\mu_2^{(21)} \\ -\mu_2^{(12)} & \mu_2^{(11)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{\mu}_2^+ \\ \hat{\mu}_2^- \end{pmatrix} \quad (2.2.23)$$

利用 (2.2.4), (2.2.7), (2.2.23) 可得谱函数  $S(z)$  的解析性

$$S(z) = \mu_2^{-1} \mu_1 = \begin{pmatrix} -\hat{\mu}_2^+ \\ \hat{\mu}_2^- \end{pmatrix} (\mu_1^+, \mu_1^-) = \begin{pmatrix} -\hat{\mu}_2^+ \mu_1^+ & -\hat{\mu}_2^+ \mu_1^- \\ \hat{\mu}_2^- \mu_1^+ & \hat{\mu}_2^- \mu_1^- \end{pmatrix} \quad (2.2.24)$$

可见  $s_{11}(z)$  在  $\mathbb{C}_+$  解析,  $s_{22}(z)$  在  $\mathbb{C}_-$  解析,  $s_{12}, s_{21}$  在  $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$  均不解析, 但连续到边界.

## 2.2.2 对称性

### 定理 2.1

如上构造的特征函数  $\mu_1, \mu_2$  与谱函数  $S(z)$  具有如下对称性

$$\mu_j^\dagger(x, t, z^*) = \mu_j^{-1}(x, t, z), \quad S^\dagger(z^*) = S^{-1}(z) \quad (j = 1, 2) \quad (2.2.25)$$

**证明** 由 (2.1.11) 有

$$\mu_{j,x}(x, t, z) = iz[\sigma_3, \mu_j(x, t, z)] = P\mu_j(x, t, z) \quad (2.2.26)$$

将  $z$  替换为  $z^*$ , 并在两边同时取 Hermite 共轭, 则有

$$\mu_{j,x}^\dagger(x, t, z^*) + iz[\sigma_3, \mu_j^\dagger(x, t, z^*)] = \mu_j^\dagger(x, t, z^*)P^\dagger \quad (2.2.27)$$

由于  $P^\dagger = -P$ , 故上式可化为

$$\mu_{j,x}^\dagger(x, t, z^*) + iz[\sigma_3, \mu_j^\dagger(x, t, z^*)] = -\mu_j^\dagger(x, t, z^*)P \quad (2.2.28)$$

另外对于  $\mu_j \cdot \mu_j^{-1} = I$  对  $x$  求偏导有

$$\mu_{j,x}\mu_j^{-1} + \mu_j\mu_{j,x}^{-1} = 0 \implies \mu_{j,x}^{-1} = -\mu_j^{-1}\mu_{j,x}\mu_j^{-1} \quad (2.2.29)$$

将 (2.2.26) 带入上式有

$$\mu_{j,x}^{-1} = -\mu_j^{-1}(P\mu_j(x, t, z) - iz[\sigma_3, \mu_j(x, t, z)])\mu_j^{-1}(x, t, z) \implies \mu_{j,x}^{-1} + iz[\sigma_3, \mu_j^{-1}] = \mu_j^{-1}P \quad (2.2.30)$$

由 (2.2.8), (2.2.10) 可得  $\mu_j^\dagger, \mu_j^{-1}$  满足相同的一次线性微分方程, 具有相同的渐进性, 又因为

$$\mu_j^\dagger(x, t, z^*), \mu_j^{-1}(x, t, z) \rightarrow I, \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.2.31)$$

因此两者相等, 得到对称关系  $\mu_j^\dagger(x, t, z^*) = \mu_j^{-1}(x, t, z), (j = 1, 2)$ . 接下来考虑  $S$  的对称性, 将 (2.2.4) 式改写为

$$S(z) = e^{i\theta(z)\hat{\sigma}_3}(\mu_2^{-1}\mu_1) = \hat{E}(\mu_2^{-1}\mu_1) \quad (2.2.32)$$

由 (2.2.31) 可得如下

$$S(z^*)^\dagger = e^{i\theta(z^*)\sigma_3}(\mu_2^{-1}\mu_1)e^{-i\theta(z^*)} = E\mu_2^{-1}\mu_1E^{-1} = E\mu_1^\dagger(\mu_2^{-1})^\dagger E^{-1} = E\mu_1^\dagger\mu_2E^{-1} = S(z)^{-1} \quad (2.2.33)$$

比较对应元素, 有

$$s_{11}^*(z^*) = s_{22}(z), s_{12}^*(z^*) = -s_{21}(z) \quad (2.2.34)$$

□

## 2.3 相关的 RH 问题

### 2.3.1 规范 RH 问题

基于 2.2 节的结论, 我们构造 RH 问题, 引入记号

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

并定义两个矩阵

$$\begin{aligned} P_+(x, t, z) &= \mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 = \begin{pmatrix} \mu_1^{(11)} & \mu_2^{(12)} \\ \mu_1^{(21)} & \mu_2^{(22)} \end{pmatrix} = (\mu_1^+, \mu_2^+) \\ P_-(x, t, z) &= H_1 \mu_1^{-1} + H_2 \mu_2^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1^{(22)} & -\mu_1^{(12)} \\ -\mu_2^{(21)} & \mu_2^{(11)} \end{pmatrix} = (\hat{\mu}_1^-, \hat{\mu}_2^-) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

则由  $\mu_j, \mu_j^{-1} (j = 1, 2)$  的解析性与渐进性, 直接可得  $P_+$  在  $\mathbb{C}_+$  上解析,  $P_-$  在  $\mathbb{C}_-$  上解析, 且具有如下渐进性

$$P_+, P_- \rightarrow I \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.3.3)$$

由此可证明如下对称关系

#### 定理 2.2

$P_+(x, t, z), P_-(x, t, z)$  具有如下对称性

$$P_+^\dagger(x, t, z^*) = P_-(x, t, z) \quad (2.3.4)$$

**证明** 利用 (2.2.31) 可得

$$\begin{aligned} P_+^\dagger(x, t, z^*) &= (\mu_1(x, t, z)H_1 + \mu_2(x, t, z)H_2)^\dagger = H_1 \mu_1^\dagger(z^*) + H_2 \mu_2^\dagger(z^*) \\ &= H_1 \mu_1^{-1}(x, t, z) + H_2 \mu_2^{-1}(x, t, z) = P_-(x, t, z) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

□

#### 定义 2.1

概括上面结果, 我们可以得到下面 RH 问题

$$P_\pm(x, t, z) \in C(\mathbb{C}_\pm) \quad (2.3.6)$$

$$p_- p_+ = G(x, t, z) \quad z \in \mathbb{R} \quad (2.3.7)$$

$$P_\pm \rightarrow I \quad z \rightarrow \infty \quad (2.3.8)$$

其中跳跃矩阵为

$$G(x, t, z) = \hat{E}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -s_{12}(z) \\ s_{21}(z) & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

进一步 NLS 方程的解  $q(x, t)$  可由 RH 问题的解给出

$$q(x, t) = 2i \lim_{z \rightarrow \infty} (z P_+)_{12} = 2i (P_+^{(1)})_{12} \quad (2.3.10)$$

其中  $P_+ = I + \frac{P_+^{(1)}}{z} + O(z^{-2})$

**证明** 只需证明跳跃关系即可, 注意到  $\hat{E} H_j = H_j, (j = 1, 2)$  可得

$$\begin{aligned} G &= P_- P_+ = (H_1 \mu_1^{-1} + H_2 \mu_2^{-1})(\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2) \\ &\stackrel{(2.2.4)}{=} [H_1(\hat{E}^{-1} S^{-1})\mu_2^{-1} + H_2 \mu_2^{-1}][\mu_2(\hat{E}^{-1} S)H_1 + \mu_2 H_2] \\ &= \hat{E}^{-1} [(H_1 S^{-1} + H_2)(S H_1 + H_2)] = \hat{E}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -s_{12}(z) \\ s_{21}(z) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\det(P_+) &= \det(\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2) = \det(\mu_2 \hat{E}^{-1} S) H_1 + \mu_2 H_2 \\ &= \det(\mu_2) \det((\hat{E}^{-1} S) H_1 + \mu_2 H_2) = s_{11}(z)\end{aligned}\quad (2.3.12)$$

同理, 有  $\det(P_-) = s_{22}(z)$  □

### 2.3.2 RH 问题的可解性

下面分两种情况讨论 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 的解

Case1. 如果

$$\det P_{\pm}(z) \neq 0 (\forall z \in \mathbb{C}), \quad (2.3.13)$$

则称 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 为正则的, 将方程 (2.3.7) 改写为

$$P_+^{-1} - P_- = (I - G)P_+^{-1} := \hat{C}P_+^{-1} \quad (2.3.14)$$

由 Plemelj 公式可得

$$P_+ = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{C}(x, t, z) P_+^{-1}(x, t, z)}{s - z} ds, \quad z \in \mathbb{C}_+ \quad (2.3.15)$$

Case2. 如果条件 (2.3.13) 不满足, 则称 RH 问题为非正则的, 假设  $\det P_{\pm}$  在某些离散的点处为零, 由谱函数对称性 (2.2.34) 有

$$\det P_+(z) = s_{11}(z) = s_{22}^*(z^*) = \det P_-^*(z^*) = \det P_-(z^*) \quad (2.3.16)$$

故

$$\det P_+(z) = 0 \iff \det P_-(z^*) = 0, \quad (2.3.17)$$

因此  $\det P_+(z)$  与  $\det P_-(z)$  有相同的零点个数, 且彼此共轭. 即若设  $z_j (j = 1, 2, \dots, N)$  为  $\det P_+(z)$  在  $\mathbb{C}_+$  上的单零点, 则  $z_j^* (j = 1, 2, \dots, N)$  为  $\det P_-(z)$  在  $\mathbb{C}_-$  上的单零点.

由于  $\det P_+(z_j) = \det P_-(z_j^*) = 0$ , 假设  $w_j, w_j^*$  分别为下列线性方程组的解

$$P_+(z_j)w_j(z_j) = 0, \quad w_j^*(z_j^*)P_-(z_j^*) = 0 \quad (2.3.18)$$

对上式取共轭转置, 则有  $w_j^\dagger(z_j)P_+^\dagger(z_j) = 0$ , 再利用对称性 (2.3.4) 有

$$w_j^\dagger(z_j)P_-(z_j^*) = 0 \quad (2.3.19)$$

比较可得  $w_j^\dagger(z) = w_j^*(z^*)$ .

非正则 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 的解可由下面定理给出

#### 定理 2.3 (Zakharov, Shabat, 1979)

带有零点结构 (2.3.18) 的非正则 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 可分解为

$$P_+(z) = \hat{P}_+(z)\Gamma(z), \quad P_-(z) = \Gamma^{-1}(z)\hat{P}_-(z) \quad (2.3.20)$$

其中

$$\Gamma(z) = I + \sum_{k,j=1}^N \frac{w_k(M^{-1})_{kj}w_j^*}{z - z_j^*}, \quad \Gamma(z)^- = I - \sum_{k,j=1}^N \frac{w_k(M^{-1})_{kj}w_j^*}{z - z_k} \quad (2.3.21)$$

这里  $M$  为  $N \times N$  矩阵, 其  $(k, j)$  元素由下式给定

$$M_{kj} = \frac{w_k^* w_j}{z_k^* - z_j}, \quad k, j = 1, 2, \dots, N, \quad \det \Gamma(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z - z_k}{z - z_k^*} \quad (2.3.22)$$

而  $\hat{P}_{\pm}$  为正则 RH 问题的唯一解, 且

1.  $\hat{P}_{\pm}$  在  $\mathbb{C}_+$  上解析,
2.  $\hat{P}_- \hat{P}_+ = \Gamma(z) G \Gamma^{-1}(z), z \in \mathbb{R}$

$$3. \hat{P}_{\pm}(z) \rightarrow I, \quad z \rightarrow \infty,$$

**证明** 非正则 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 是由于  $2N$  个离散谱上的  $\det P_+(z_j) = \det P_-(z_j^*) = 0 (j = 1, 2, \dots, N)$  造成的. 所以主要任务是消除这些零点结构, 并且去除  $P_+(z_j), P_-(z_j^*)$  在  $z_j, z_j^*$  上的零点结构, 为此需定义单极点矩阵

$$\Gamma_1(z) = I + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1^*} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} \quad (2.3.23)$$

其具有如下性质

$$\begin{aligned} F_1^{-1}(z) &= I - \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} \\ \det \Gamma_1(z) &= \frac{z - z_1}{z - z_1^*}, \quad \det \Gamma_1^{-1}(z) = \frac{z - z_1^*}{z - z_1} \\ \Gamma_1(z_1) w_1 &= w_1 + \frac{z_1^* - z_1}{z_1 - z_1^*} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} \cdot w_1 = \frac{z_1^* - z_1}{z_1 - z_1^*} \frac{w_1 (w_1^* w_1)}{w_1^* w_1} = w_1 - w_1 = 0 \\ w_1^* \Gamma_1^{-1}(z_1^*) &= w_1^* - \frac{z_1^* - z_1}{z_1^* - z_1} \cdot \frac{w_1^* w_1}{w_1^* w_1} \cdot w_1^* = w_1^* - w_1^* = 0 \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

令  $x_j = \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1}$ , 则  $x_j$  为投影算子, 即  $x_j^2 = x_j$ , 由上定义知  $x_j$  为一阶矩阵, 故与矩阵  $\text{diga}\{1, 0\}$  相似, 既有可逆阵  $T_j$  使得  $T_j^{-1} x_j T_j = \text{diag}\{1, 0\}$ , 从而有

$$\Gamma_1(z) = \det \left( I + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1^*} T_j^{-1} X_j T_j \right) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1^*} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{z - z_1}{z - z_1^*} \quad (2.3.25)$$

定义矩阵函数  $R_1^+(z) = P_+(z) \Gamma_1^{-1}(z)$ ,  $R_1^-(z) = \Gamma_1(z) P_-(z)$ , 由 (2.3.18) - (2.3.19) 知

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=z_1} R_1^+(z) &= \text{Res}_{z=z_1} \left( P_+(z) - P_+(z) \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} \right) = -\frac{z_1^* - z_1}{w_1 w_1^*} (P_+(z) w_1) w_1^* = 0 \\ \text{Res}_{z=z_1^*} R_1^-(z) &= \text{Res}_{z=z_1^*} \left( P_1(z) + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} P_-(z) \right) = -\frac{z_1^* - z_1}{w_1^* w_1} w_1 (w_1^* P_-(z_1^*)) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

因此  $R_1^+(z), R_1^-(z)$  分别在  $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$  上解析, 且

$$\begin{aligned} \det R_1^+(z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} [\det P_+(z) \cdot \det \Gamma_1^{-1}(z)] = \lim_{z \rightarrow z_1} s_{11}(z) \frac{z - z_1^*}{z - z_1} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{s_{11}(z) - s_{11}(z_1)}{z - z_1} (z - z_1^*) \Leftarrow (s_{11}(z) = 0) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} s'_{11}(z) (z - z_1^*) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

$$\det R_1^-(z_1^*) = \lim_{z \rightarrow z_1^*} [\det \Gamma_1(z) \cdot \det P_-(z)] = \lim_{z \rightarrow z_1^*} \frac{z - z_1}{z - z_1^*} s_{22}(z) = \lim_{z \rightarrow z_1^*} s'_{22}(z) (z - z_1) = 0$$

这说明  $R_1^+(z), R_1^-(z)$  分别在  $z = z_1, z = z_1^*$  不再具有零点结构, 然后去除其在  $z_2, z_2^*$  上的零点结构, 由于

$$\begin{aligned} \det R_1^+(z_2) &= \det P_+(z_2) \det \Gamma_1^{-1}(z_2) = s_{11}(z_2) \frac{z_2 - z_1^*}{z_2 - z_1} = 0 \\ \det R_1^-(z_2^*) &= \det \Gamma_1(z_2^*) \det P_-(z_2^*) = \frac{z_2^* - z_1}{z_2^* - z_1} s_{22}(z_2^*) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

因此, 下列齐次线性方程组有非零解, 即存在  $v_2(z_2), v_2^*(z_2^*)$ , 使得

$$R_1^+(z_2) v(z_2) = P_+(z_2) \Gamma_1^{-1}(z_2) v(z_2) = 0, \quad v_2^*(z_2^*) R_1^-(z_2^*) = v_2^*(z_2^*) \Gamma_1(z_2^*) P_-(z_2^*) = 0 \quad (2.3.29)$$

与 (2.3.18) 比较可得

$$w_2(z_2) = \Gamma_1^{-1}(z_2) v_2(z_2), \quad w_2^*(z_2^*) = v_2^*(z_2^*) \Gamma_1(z_2^*) \quad (2.3.30)$$

为去除  $R_1^+(z_2), R_1^-(z_2^*)$  在  $z_2, z_2^*$  上的零点结构, 令

$$\begin{aligned}\Gamma_2(z) &= I + \frac{z_2^* - z_2}{z - z_2^*} \cdot \frac{v_2 v_2^*}{v_2^* v_2}, \quad \det \Gamma_2(z) = \frac{z - z_2}{z - z_2^*} \\ \Gamma_2^{-1}(z) &= I - \frac{z_2^* - z_2}{z - z_2} \cdot \frac{v_2 v_2^*}{v_2^* v_2}, \quad \det \Gamma_2^{-1} = \frac{z - z_2^*}{z - z_2}\end{aligned}\quad (2.3.31)$$

$$\begin{aligned}R_2^+(z) &= P_1^+(z) \Gamma_2^{-1}(z) = P_1^+(z) \Gamma_1^{-1}(z) \Gamma_2^{-1}(z) \\ R_2^{-1}(z) &= \Gamma_2(z) P_1^{-1}(z) = \Gamma_2(z) \Gamma_1(z) P_1^{-1}(z)\end{aligned}$$

则

$$\operatorname{Res}_{z=z_2} R_2^+(z) = \operatorname{Res}_{z=z_2} \left[ \left( P_+(z) - P_+(z) \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{w_2^* w_1} \right) \left( I - \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{v_2^* v_1} \right) \right] = -\frac{z_2^* - z_1 R_1(z_2) v_2 v_2^*}{v_2^* v_2} \quad (2.3.32)$$

同理  $\operatorname{Res}_{z=z_2^*} R_2^{-1}(z) = 0$ , 由此可得  $R_2^+(z), R_2^{-1}(z)$  分别在在  $z = z_1, z_2, z = z_1^*, z_2^*$  上无零点结构, 则

$$\begin{aligned}\det R_2^+(z_j) &= \lim_{z \rightarrow z_j} [\det P_+(z) \det \Gamma_1^{-1}(z) \det \Gamma_2^{-1}(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_j} s_{11}(z) \frac{z - z_1^*}{z - z_1} \cdot \frac{z - z_2^*}{z - z_2} \\ &= s'_{11}(z_j) \frac{(z_j - z_1^*)(z_j - z_2^*)}{z_j - z_k} \neq 0\end{aligned}\quad (2.3.33)$$

$$\det R_2^-(z_j^*) \neq 0 \quad (k = 1, 2, k \neq j)$$

更一般的, 可得

$$\begin{aligned}w_j &= \Gamma_1^{-1}(z_j) \cdots \Gamma_{j-1}^{-1}(z_j) \cdot v_j(z_j) \\ w_j^* &= v_j^*(z_j^*) \cdot \Gamma_1(z_j^*) \cdots \Gamma_{j-1}(z_j^*) \\ R_j^+(z) &= P_+(z) \cdot \Gamma_1^{-1}(z) \cdots \Gamma_j^{-1}(z) \\ R_j^{-1}(z) &= \Gamma_j(z) \cdots \Gamma_1(z) \cdot P_-(z)\end{aligned}\quad (2.3.34)$$

其中

$$\Gamma_j(z) = I + \frac{z_j^* - z_j}{z - z_j^*} \cdot \frac{v_j v_j^*}{v_j^* v_j}, \quad \Gamma_j^{-1}(z) = I - \frac{z_j^* - z_j}{z - z_j} \cdot \frac{v_j v_j^*}{v_j^* v_j} \quad (2.3.35)$$

则  $R_j^+(z), R_j^{-1}(z)$  在  $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$  上解析, 且在  $z_k, z_k^* (k = 1, 2, \dots, j)$  上无零点结构, 即

$$\begin{aligned}\det R_j^+(z_k) &= s'_{11}(z_k) \frac{\prod_{l=1}^j (z_k - z_l^*)}{\prod_{l=1, l \neq k}^j (z_k - z_l)} \neq 0 \\ \det R_j^{-1}(z_k^*) &= s'_{22}(z_k^*) \frac{\prod_{l=1}^j (z_k^* - z_l)}{\prod_{l=1, l \neq k}^j (z_k^* - z_l)} \neq 0\end{aligned}\quad (k = 1, 2, \dots, j) \quad (2.3.36)$$

而

$$\begin{aligned}\det R_j^+(z_{j+1}) &= s_{11}(z_{j+1}) \prod_{j=1}^j \frac{z_{j+1} - z_k^*}{z_{j+1} - z_k} = 0 \\ \det R_j^{-1}(z_{j+1}^*) &= s_{22}(z_{j+1}^*) \prod_{j=1}^j \frac{z_{j+1}^* - z_k}{z_{j+1}^* - z_k} = 0\end{aligned}\quad (2.3.37)$$

最后令

$$\begin{aligned}\Gamma_z &= \Gamma_N(z) \cdots \Gamma_1(z), \quad \Gamma_z^{-1} = \Gamma_1^{-1}(z) \cdots \Gamma_N^{-1}(z) \\ \hat{P}_+(z) &= P_+(z) \Gamma_z^{-1}(z), \quad \hat{P}_-(z) = \Gamma_z(z) P_-(z)\end{aligned}\quad (2.3.38)$$

则  $\hat{P}_+(z), \hat{P}_-(z)$  在  $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$  上解析, 且在  $z_j, z_j^* (j = 1, 2, \dots, N)$  上无零点结构 (实际上在解析区域内无零点结构), 即

$$\det \hat{P}_+(z_k) \neq 0, \quad \det \hat{P}_-(z_k^*) \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2.3.39)$$

得到分解 (2.3.20). 下证 (2.3.21). 注意到  $\Gamma(z), \Gamma^{-1}(z)$  分别为具有单极点  $z_j, z_j^* (1 \leq j \leq N)$  的亚纯函数, 以及分解

(2.3.35), (2.3.38), 寻找的向量使得

$$\Gamma(Z) = I + \sum_{j=1}^N \frac{\xi_j w_j^*}{z - z_j^*}, \quad \Gamma^{-1}(z) = I - \sum_{j=1}^N \frac{w_j^* \xi_j}{z - z_j} \quad (2.3.40)$$

注意到  $\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z) = I$  对任意  $z$  都成立, 当然也在  $z = z_k$  处成立, 即  $\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z) = I$  在  $z = z_k$  处正则, 为保证  $\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z) = I$  在  $z = z_k$  处成立, 只需让其留数为 0, 因此利用 (2.3.40) 可得

$$\begin{aligned} 0 = \text{Res}_{z=z_k} [\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z)] &= \text{Res}_{z=z_k} \left( \Gamma(z) - \sum_{j=1}^N \Gamma(z) \frac{w_j^* \xi_j}{z - z_j} \right) = -\Gamma(z_k) w_k \xi_k^* \\ &- \left( I + \sum_{j=1}^N \frac{\xi_j w_j^*}{z_k - z_j^*} \right) w_k \xi_k^* = \left( -w_k + \sum_{j=1}^N \frac{w_j^* w_k}{z_j^* - z_k} \xi_j^* \right) \xi_k^* \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

对上式两边同时作用  $\xi_k$ , 则有

$$\left( -w_k + \sum_{j=1}^N \frac{w_j^* w_k}{z_j^* - z_k} \xi_j \right) |\xi_k|^2 = 0 \implies -w_k + \sum_{j=1}^N \frac{w_j^* w_k}{z_j^* - z_k} \xi_j = 0 \quad (1 \leq k \leq N) \quad (2.3.42)$$

将上式改写为  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  的分块矩阵形式的线性方程组, 则有

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) M = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_N^*) \quad (2.3.43)$$

其中  $M = (M_{kj})_{N \times N}$ , 其中  $M_{kj} = \frac{w_k^* w_j}{z_k^* - z_j}$  则

$$\begin{cases} \frac{w_1^* w_1}{z_1^* - z_1} \xi_1 + \frac{w_2^* w_1}{z_2^* - z_1} \xi_2 + \dots + \frac{w_N^* w_1}{z_N^* - z_1} \xi_N = w_1 \\ \frac{w_1^* w_2}{z_1^* - z_2} \xi_1 + \frac{w_2^* w_2}{z_2^* - z_2} \xi_2 + \dots + \frac{w_N^* w_2}{z_N^* - z_2} \xi_N = w_2 \\ \vdots \\ \frac{w_1^* w_N}{z_1^* - z_N} \xi_1 + \frac{w_2^* w_N}{z_2^* - z_N} \xi_2 + \dots + \frac{w_N^* w_N}{z_N^* - z_N} \xi_N = w_N \end{cases} \implies M = \begin{pmatrix} \frac{w_1^* w_1}{z_1^* - z_1} & \frac{w_1^* w_2}{z_1^* - z_2} & \dots & \frac{w_1^* w_N}{z_1^* - z_N} \\ \frac{w_2^* w_1}{z_2^* - z_1} & \frac{w_2^* w_2}{z_2^* - z_2} & \dots & \frac{w_2^* w_N}{z_2^* - z_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_N^* w_1}{z_N^* - z_1} & \frac{w_N^* w_2}{z_N^* - z_2} & \dots & \frac{w_N^* w_N}{z_N^* - z_N} \end{pmatrix} \quad (2.3.44)$$

可得  $\xi_j = \sum_{k=1}^N (M^{-1})_{kj} w_k$ . 最后将其带入 (2.3.40) 得到 (2.3.21) □

## 2.4 NLS 方程的 N 孤子解

### 2.4.1 矩阵向量解的时空演化

对方程 (2.3.18) 第一个式子两边分别对  $x, t$  求导, 可得

$$P_{+,x} w_j + P_+ w_{j,x} = 0, \quad P_{+,t} w_j + P_+ w_{j,t} = 0 \quad (2.4.1)$$

利用  $P_+$  的定义与 Lax 对 (2.1.11), (2.1.12) 可得

$$\begin{aligned} P_{+,x} &= \mu_{1,x} H_1 + \mu_{2,x} H_2 = (iz_j [\sigma_3, \mu_1] + P \mu_1) H_1 + (-iz_j [\sigma_3, \mu_2] + P \mu_2) H_2 \\ &- iz_j (\mu_1 \sigma_3 H_1 - \mu_2 \sigma_3 H_2 + \sigma_3 \mu_1 H_1 + \sigma_3 \mu_2 H_2) + P \mu_1 H_1 + P \mu_2 H_2 \\ &= -iz [\sigma_3, P_+] + P P_+ \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

同理有

$$P_{+,t} = -iz_j^2 [\sigma_3, P_+] + Q P_+ \quad (2.4.3)$$

将 (2.4.2), (2.4.3) 代入 (2.4.1) 且由于  $P_+ w_j = 0, w_j P = 0$ , 有

$$(-iz_j [\sigma_3, P_+] + P P_+) w_j + P_+ w_{j,x} = 0 \implies iz_j P_+ \sigma_3 w_j + P_+ w_{j,x} = 0 \implies P_+ (w_{j,x} + iz_j \sigma_3 w_j) = 0 \quad (2.4.4)$$

同理有  $P_+ (w_{j,t} + iz_j^2 \sigma_3 w_j) = 0$ .

$$\begin{cases} w_{j,x} + iz_j \sigma_3 w_j = 0 \\ w_{j,t} + iz_j^2 \sigma_3 w_j = 0 \end{cases} \implies w_j = e^{-i\theta(z_j) \sigma_3} w_{j,0}, \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.4.5)$$



其中  $w_{j,0}$  为 2 维常向量, 从而  $w_j^* = w_{j,0}^\dagger e^{i\theta(z_j^*)\sigma_3}$ .

### 2.4.2 N 维孤子解公式

已知  $P_- P_+ = G \implies P_+^{-1} - P_- = \hat{G} P_+$  (其中  $I - G = \hat{G}$ ), 且  $\hat{P}_-(z) \hat{P}_+(z) = \Gamma(z) G \Gamma^{-1}(z) (z \in \mathbb{R})$ , 可得

$$\begin{aligned} \hat{P}_+^{-1} - \hat{P}_- &= (I - \hat{P}_- \hat{P}_+) \hat{P}_+^{-1} = \left( I - \Gamma(z) G \Gamma^{-1}(z) \right) \hat{P}_+^{-1} = (\Gamma(z) \Gamma^{-1}(z) - \Gamma(z) G \Gamma^{-1}(z)) \hat{P}_+^{-1} \\ &= \Gamma(z) (I - G) \Gamma^{-1}(z) \hat{P}_+^{-1} = \Gamma(z) \hat{G} \Gamma^{-1}(z) \hat{P}_+^{-1} \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

由 Taylor 公式  $\frac{1}{s-z} = -\frac{1}{z} \left( \frac{1}{1-s/z} \right) = -\frac{1}{z} \left( 1 + \frac{s}{z} + \dots \right)$ , 故 Plemelj 公式可写为

$$\begin{aligned} \hat{P}_+^{-1} &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(z) \hat{G} \Gamma^{-1}(z) \hat{P}_+^{-1}}{s-z} ds \\ &= I - \frac{1}{2\pi i z} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( 1 + \frac{s}{z} + \left( \frac{s}{z} \right)^2 + \dots \right) \Gamma(z) \hat{G} \Gamma^{-1}(z) \hat{P}_+^{-1} ds \\ &= I - \frac{1}{2\pi i z} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(z) \hat{G} \Gamma^{-1}(z) \hat{P}_+^{-1} ds + O(z^{-2}) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

由  $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots$ ,  $(P^{-1} = I + \frac{A}{z} + \dots, P = \frac{B}{z} + \dots)$ , 可得

$$\hat{P}_+ = I + \frac{1}{2\pi i z} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(z) \hat{G} \Gamma^{-1}(z) \hat{P}_+ ds + O(z^{-2}) \quad (2.4.8)$$

再由

$$\Gamma(z) = i + \sum_{k,j=1}^N \frac{w_k (M^{-1})_{kj} w_j^*}{z - z_j^*} \implies \Gamma(z) = I + \frac{1}{z} \sum_{k,j=1}^N w_k (M^{-1})_{kj} w_j^* + O(z^{-2}) \quad (2.4.9)$$

将上渐进式带入 (2.3.20), 比较  $z^{-1}$  的次数可得

$$P_+^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(z) \hat{G} \Gamma^{-1}(z) \hat{P}_+^{-1} ds = \sum_{k,j=1}^N w_k (M^{-1})_{kj} w_j^* \quad (2.4.10)$$

特别的, 当散射数据  $s_{12} = s_{21} = 0$  时, 有  $\hat{G} = I - G = 0$ . 故上式 (2.4.10) 可简化为

$$P_+^{-1} = \sum_{k,j=1}^N w_k (M^{-1})_{kj} w_j^* \quad (2.4.11)$$

不妨取  $\lambda_j = -i(z_j x + 2z_j^2 t)$ , 并取  $w_{j,0} = (c_j, 1)^T$ , 则有

$$w_j = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j} & \\ & e^{-\lambda_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_j e^{\lambda_j} \\ e^{-\lambda_j} \end{pmatrix} \quad (2.4.12)$$

从而  $w_j^* = w_{j,0}^* \cdot e_j^\lambda \sigma_3 = (c_j^* e^{\lambda_j^*}, e^{-\lambda_j})$ . 故

$$M_{k,j} = \frac{w_k^* w_j}{z_k^* - z_j} = \frac{1}{z_k^* - z_j} (c_k^* c_j e^{\lambda_k^* + \lambda_j} + e^{-\lambda_k - \lambda_j}) \quad (2.4.13)$$

再由 (2.4.9)

$$\begin{aligned} q(x, t) &= 2i \lim_{z \rightarrow \infty} (z P_+)_{12} = 2i (P_+^{(1)})_{12} \\ &= 2i \sum_{k,j}^N (w_k w_j^*)_{12} (M^{-1})_{kj} = 2i \sum_{k,j}^N c_k e^{\lambda_k - \lambda_j^*} (M^{-1})_{kj} \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

令

$$R = \begin{pmatrix} 0 & c_1 e^{\lambda_1} & \dots & c_N e^{\lambda_N} \\ e^{-\lambda_1^*} & M_{11} & \dots & M_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-\lambda_N^*} & M_{N1} & \dots & M_{NN} \end{pmatrix} \quad (2.4.15)$$

则

$$\begin{aligned}
\det R &= \sum_{k=1}^N (-1)^{k+2} c_k e^{\lambda_k} \det \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1^*} & M_{11} & \cdots & M_{1,k-1} & M_{1,k+1} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-\lambda_N^*} & M_{N1} & \cdots & M_{N,k-1} & M_{N,k+1} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^N (-1)^{k+2} c_k e^{\lambda_k} \sum_{j=1}^N e^{-\lambda_j^*} \det \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1,k-1} & M_{1,k+1} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & \cdots & M_{N,k-1} & M_{N,k+1} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix} := \Delta \\
&= \sum_{k=1}^N (-1)^{k+j+3} c_k e^{\lambda_k - \lambda_j^*} \det(\Delta) \\
&= -c_k e^{\lambda_k - \lambda_j^*} (M^*)_{jk} \Leftrightarrow \left( (M^*)_{jk} - (-1)^{k+j} \det(\Delta) \right) \\
&= -\det M \sum c_k e^{\lambda_k - \lambda_j^*} \Leftrightarrow \left( (M^{-1})_{jk} (M^*) = |M| M^{-1} \right)
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

因此

$$\sum_{k=1}^N c_k e^{\lambda_k - \lambda_j^*} (M^{-1})_{jk} = -\frac{\det R}{\det M} \tag{2.4.17}$$

将 (2.4.17) 代入 (2.4.14) 可得 NLS 方程的 N 孤子解

$$q = -2i \frac{\det R}{\det M} \tag{2.4.18}$$