Preface

本笔记旨在分享笔者对 Riemann-Hilbert 方法的理解, 因仅为一家之言, 仓促间完成又后期无他人审校, 难免存在疏漏, 错误和挂一漏万之处. 望各位读者在阅读时能指出不足, 共同探讨与完善.

本笔记为在老家过年期间编写, 整个过程并不算顺利, 老家的房子年久失修, 塌了外墙和两间屋顶, 白天需要和父亲一起修房子, 应付家庭琐事; 只有夜间才能缓慢的推进写作. 另外农村没有暖气, 零下十余度的环境实难称舒适, 需要字面意义上的争分夺秒. 尤其深夜伏案时, 恍若独行于漫长甬道, 徘徊在黑暗迷宫之中. 然正如 A. Zee 所言, 夜航人自有夜行法 [1]. 历时一月的艰辛写作中, 笔者感到一种难以言喻的, 某种漠然的相互理解, 如越过高墙, 漫步在满月下的林地, 并在微茫中获得慰籍. 是邪，非邪？解释或属妄诞，感受毕竟真实.

序曲将终，敬无穷的远方，与无尽的人们.

本笔记存档于 https://github.com/IceySwan/Notes, 更新记录请看 https://blog.icey.one/RH-Note, 如发现任何错误请提 issue 或联系 hi@icey.one

Icey Swan

2025 年 2 月

第一章 预备知识

1.1 Plemelj 公式

定理 1.1 (Abel 定理)

设 $A \in \mathbb{C}$, 对矩阵微分方程 $Y_x = A(x)Y$, 可得标量微分方程

$$(\det Y)_x = \operatorname{tr}(A) \det Y \tag{1.1.1}$$

从而有

$$\det(Y(x)) = \det(Y(x_0)) \cdot \exp \int_{x_0}^{x} \operatorname{tr}(\mathrm{A(t)})\mathrm{dt} \tag{1.1.2}$$

♡

定理 1.2 (Morera)

如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对于 D 内任意闭曲线 $\sum$, 有 $\int_{\sum} f(z)\mathrm{d}z = 0$, 则有 $f(z)$ 在 D 内解析

♡

定义 1.1 (Schwartz 空间)

欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 上的 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^\kappa) : \|f\|_{\alpha,\beta} = \sum_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_\beta f(x)| < \infty, \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \right\} \tag{1.1.3}$$

其中 α, β 为多重指标, $\partial_\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_n}^{\beta_n}$. f 称为速降函数或 Schwartz 函数.

♣

简单来说，速降函数是指当 $x \to \infty$ 时趋近于零的速度比所有的多项式的倒数都快，并且任意阶的导数都有这种性质的函数。

定理 1.3 (Painleve 开拓定理)

设 D_1, D_2 为两个没有公共点的区域, 边界为 Γ, 并设 $f_1(z), f_2(z)$ 分别在 D_1, D_2 内解析, 在 $D_1 + \Gamma, D_2 + \Gamma$ 上连续, 且 $f_1(z) = f_2(z), \forall z \in \Gamma$, 则

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1, \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in \Gamma, \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

在 $D_1 + D_2 + \Gamma$ 内解析.

♡

证明 显然 $f(Z)$ 在 $D_1 + D_2 + \Gamma$ 上连续, 根据定理 1.2, 只需证明 $f(z)$ 沿任何闭曲线 $\sum$ 的积分为 0.

如果 $\sum \subset D_1$, 或 $\sum \subset D_1$, 则由 $f(z)$ 的解析性可得

$$\int_{\sum} f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{1.1.5}$$

如果 $\sum$ 同时包含于 D_1, D_2 内, 把 Γ 在 $\sum$ 内的曲线记为 C_γ, 则

$$\int_{C_1+C_\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0, \quad \int_{C_1+C_\gamma}^{-} f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{1.1.6}$$

故

$$\int_{\sum} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1+C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1+C_\gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1+C_\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{1.1.7}$$

□

引理 1.1

设 $f(\xi)$ 在 $z\in\sum$ 满足 μ 次 Hölder 条件, 且 $z'\to z$ 时, h/d 有界, 其中

$$h=|z'-z|,\quad d=\min_{\xi\in\sum}|\xi-z'|, \tag{1.1.8}$$

则

$$\lim_{z'\to z}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z'}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \tag{1.1.9}$$

证明

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z'}\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\\
=&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{(\xi-z)(f(\xi)-f(z))-(\xi-z')(f(\xi)-f(z))}{(\xi-z')(\xi-z)}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{z'-z}{\xi-z}\cdot\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\\
=&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{h}{d}M\frac{(\xi-z)^{\mu}}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\Delta_1+\Delta_2
\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

其中

$$\begin{aligned}
|\Delta_1|&\le\frac{hM}{2\pi d}\int_{C_\delta}\frac{(\xi-z)^{\mu}}{\xi-z}\mathrm{d}|\xi|\le\frac{hM}{2\pi d}\int_0^{\delta}t^{\mu-1}\,\mathrm{d}t=\frac{hM}{2\pi d\delta}\delta^{\mu}(C_\delta=\{|\xi-z|\le\delta\})\\
|\Delta_2|&=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\sum\backslash C_\delta}\frac{(f(\xi)-f(z))(z-z')}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\right|
\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

由于 $\sum\backslash C_\delta$ 不包含 z, 故 Δ_2 为关于 z' 的连续函数, 则

$$|\Delta_2|=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum\backslash C_\delta}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z'}\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2\pi}\int_{\sum\backslash C_\delta}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\right|<|\Delta_1| \tag{1.1.12}$$

取 $\delta\to 0$, 可令 $|\Delta_1|<\frac{\epsilon}{2}$, 故 $|\Delta_1|+|\Delta_2|<\epsilon$ □

定理 1.4 (Plemelj)

设 $z\in\sum$ 为正则点, 且不为边界点, $f(\xi)$ 在 z 点满足 μ 次 Hölder 条件, 且 $z'\to z$ 时, h/d 有界, 其中 $h=|z'-z|,\quad d=\min_{\xi\in\sum}|\xi-z'|$, 则

$$F_+=\lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in\sum_+}}F(z')=F(z)+\frac{1}{2}f(z) \tag{1.1.13}$$

$$F_-=\lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in\sum_-}}F(z')=F(z)-\frac{1}{2}f(z) \tag{1.1.14}$$

证明 首先证明闭区线情形:

$$\begin{aligned}
F_+=\lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in\sum_+}}F(z')&=\lim_{z'-z}\int_{\sum}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{f(\xi)}{\xi-z'}\mathrm{d}\xi\\
&=\lim_{z'-z}\int_{\sum}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z'}\mathrm{d}\xi+\frac{f(\xi)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{1}{\xi-z'}\mathrm{d}\xi\\
&=\lim_{z'-z}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum_+}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z'}\mathrm{d}\xi+f(z)\\
&=\lim_{z'-z}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum_+}\frac{f(\xi)}{\xi-z'}\mathrm{d}\xi-\frac{f(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum_+}\frac{1}{\xi-z'}\mathrm{d}\xi+f(z)\\
&=F(z)+\frac{1}{2}f(z)
\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

$F_-(z')$ 同理, 下证 $\sum$ 为开曲线情形, 则可补充 $\sum'$, s.t. $\sum\cup\sum'$ 为闭曲线, 且定义 $\forall\xi\in\sum'$, $f(\xi)=0$, 则

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum\cup\sum'}\frac{f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi. \tag{1.1.16}$$

则由开曲线情形可得

$$\begin{aligned} F_+(z) &= \lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in+\sum}} \int_{\sum\cup\sum'} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi = \int_{\sum\cup\sum'} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi + \frac{f(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum\cup\sum'}\frac{1}{\xi-z'}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi - \frac{f(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum'}\frac{1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi + f(z) = F(z) + \frac{1}{2}f(z) \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

$F_-(z')$ 同理 □

注 如果 $z\in\sum$ 为一个角点, 在其两切线的夹角为 α, 则可

$$\begin{aligned} F_+(z) &= \lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in D}} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi + \frac{\alpha}{2\pi}f(z) + (1-\frac{\alpha}{2\pi})f(z) \\ &= F(z) - \frac{\alpha}{2\pi}f(z) \end{aligned} \tag{1.1.18}$$

$$\begin{aligned} F_-(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi + \frac{\alpha}{2\pi}f(z) - \frac{\alpha}{2\pi})f(z) \\ &= F(z) - \frac{\alpha}{2\pi}f(z) \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

定义 1.2 (Plemelj 公式)

由 (1.1.13) - (1.1.14), (1.1.18) - (1.1.19) 可以看出, 无论 z 是正则点还是角点, 都有

$$F_+(z) - F_-(z) = f(z), \quad z\in\sum \tag{1.1.20}$$

$$F_+(z) - F_-(z) = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi =: H(f)(z) \tag{1.1.21}$$

称为标量 RH 问题, 其解可用 Cauchy 积分给出

$$F(z) = A + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi, \quad z\in\mathbb{C} \tag{1.1.22}$$

其中 A 为任意常数, 一般被边值或渐进条件决定, 这一公式被称为 Plemelj 公式.

♣

对于如下 RH 问题

$$G_+(z) = G_-(z)v(z), \quad z\in\sum \tag{1.1.23}$$

只需两边取 log 变换则有

$$\log G_+(z) - \log G_-(z) = \log v(z), \quad z\in\sum \tag{1.1.24}$$

由 Plemelj 公式, 则有

$$\log G(z) = A + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{v(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \implies G(z) = B\exp\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\right), \quad z\in\sum \tag{1.1.25}$$

其中 B 为任意常数.

1.2 矩阵 RH 问题

定义 1.3 (RH 问题)

设 $\sum$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 内的有向路径, 假设存在一个 $\sum^0$ 上的光滑映射 $v(z):\sum\to GL(n,\mathbb{C})$, 则 $(\sum,v)$ 决定了一个 RH 问题, 寻找一个 n 阶矩阵 $M(z)$ 满足

$$M(z)\in C, \quad (\mathbb{C}\setminus\sum) \tag{1.2.1}$$

$$M_+(z) = M_-(z)v(z), \quad z\in\sum \tag{1.2.2}$$

$$M(z)\to I, \quad z\to\infty \tag{1.2.3}$$

其中 $M_\pm$ 表示在正负区域内 $z' \to z$ 时的极限, $\sum$ 称为跳跃曲线, $v(z)$ 称为跳跃矩阵.

根据 Beadls-Coifman 定理, 如上 RH 问题的解可通过如下方式构造: 不妨设跳跃矩阵 $v(z)$ 具有如下分解

$$v = (b_-)^{-1} b_+ \tag{1.2.4}$$

由此, 可构造

$$w_+ = b_+ - I, \quad w_- = I - b_- \tag{1.2.5}$$

进一步可定义 Cauchy 投影算子

$$(C_\pm f)(z) = \lim_{\substack{z' \to z \in \sum \\ z' \in \pm \sum}} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sum} \frac{f(\xi)}{\xi - z'} \mathrm{d}\xi \tag{1.2.6}$$

则可以证明如果 $f(z) \in L^2(\sum)$, 则 $C_\pm : L^2 \to L^2$ 的有界算子, 且 $C_+ - C_- = 1$, 再定义算子

$$C_w f = C_+(f w_-) - C_-(f w_+) \tag{1.2.7}$$

则 $C_w : L^2 \cap L^\infty \to L^2$ 的有界算子.

定理 1.5

设 $\det v = 1$, 算子 $I - C_w$ 在 $L^2(\sum)$ 上可逆, $\mu \in I + L^2(\sum)$ 为下列方程

$$(I - C_w)\mu = I \tag{1.2.8}$$

的解, 且

$$(I - C_w)(\mu - I) = C_w I + C_+ w_- + C_- w_+ \in L^2\left(\sum\right) \tag{1.2.9}$$

则

$$M(z) = I + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sum} \frac{\mu(\xi) w(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \tag{1.2.10}$$

为上述 RH 问题的唯一解, RH 问题 $M(z)$ 的可解等价于奇异积分方程 (1.2.8).

证明 只需证明 (1.2.10) 满足 (1.2.8)

$$\begin{aligned} M_+ &= I + \lim_{z' \to z \in \sum} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sum} \frac{\mu(\xi) w(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \overset{(1.2.6)}{=} I + C_+(\mu w) \\ &= I + C_+(\mu w_-) + C_+(\mu w_+) = I + C_+(\mu w_-) + C_-(\mu w_+) + C_+(\mu w_+) + C_-(\mu w_+) \\ &\overset{(1.2.7)}{=} I + C_w(\mu) + \mu w_+ \overset{(1.2.8)}{=} \mu + \mu w_+ = \mu(I + w_+) = \mu b_+ \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

同理有

$$M_-(z) = \mu b_- \tag{1.2.12}$$

故有

$$M_+(z) = \mu b_+ = \mu b_- (b_-)^{-1} b_+ = M_-(z) v(z) \tag{1.2.13}$$

下证唯一性, 先证 M 可逆, 对 (1.2.2) 取行列式, 并注意到 $\det v(z) = 1$, 则 $\det M_+(z) = \det M_-(z)$. 故由 Painleve 开拓定理得 $\det M(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析. 由 (1.2.3) 得

$$\det M(z) \to 1, z \to \infty \tag{1.2.14}$$

故由 Liouville 定理可知 $\det M(z) = c$, 再由渐进条件得 $c = 1$, 故 $M(z)$ 可逆.

设 $\widetilde{M}$ 为上述 RH 问题的另一个解, 则 $\widetilde{M}$ 可逆, 且在 $\mathbb{C} \setminus \sum$ 上解析, 且在 $\sum$ 上满足

$$(M \widetilde{M}^{-1}) = M_+ \widetilde{M}_+^{-1} = M_- v (\widetilde{M}_- v)^{-1} = M_- (\widetilde{M}_-)^{-1} = (M \widetilde{M}^{-1})_- \tag{1.2.15}$$

由 Painleve 开拓定理, $M \widetilde{M}^{-1}$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析. 另外由 $M, \widetilde{M} \to I$, 故 $M \widetilde{M}^{-1}$ 有界, 故为常矩阵. 由渐进性得

$$M \widetilde{M}^{-1} = I \implies M = \widetilde{M} \tag{1.2.16}$$

□

注 由 RH 问题解的唯一性, RH 问题 (1.2.1) - (1.2.3) 的解与跳跃矩阵 $v(z)$ 的分解无关, 因此可以考虑 $v(z)$ 的平凡解

$$b_- = I, \quad b_+ = v \tag{1.2.17}$$

故可构造

$$\begin{aligned} w_- = 0, \quad w_+ = v - I, \quad w = v - I \\ C_w f = C_+(f w_-) + C_-(f w_+) = C_+(f(v-I)), \quad \mu = (I - C_w)^{-1} I \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

则 RH 问题的解可表示为

$$M(z) = I + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{+\sum} \frac{\mu(\xi)(v(\xi) - I)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \tag{1.2.19}$$

注 RH 方法的关键思想就是改变积分路径, 通过跳跃矩阵的分解情况, 确定对积分路径进行一系列形变, 再取极限去除跳跃矩阵为单位阵的情形, 将其化解为可解的 RH 问题, 所以一个自然的问题就是: “为什么可以扔掉跳跃矩阵为单位阵的路径? 或者说为什么跳跃矩阵对对 RH 问题的解不产生贡献.”

这很容易通过表达式 (1.2.19) 看出, 我们将积分路径分解为 $\sum = \sum_1 + \sum_2$ 且

$$v = \begin{cases} v_1 \neq I & \sum_1, \\ v_1 = I & \sum_2 \end{cases} \tag{1.2.20}$$

则在 $\sum_1$ 上, $v - I = v_1 - I \neq 0$, 在 $\sum_2$ 上, $v - I = v_1 - I = 0$, 故

$$\begin{aligned} M(z) &= I + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sum} \frac{\mu(\xi)(v(\xi) - I)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \\ &= I + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sum_1} \frac{\mu(\xi)(v_1(\xi) - I)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sum_2} \frac{\mu(\xi)(v_2(\xi) - I)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \\ &= I + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sum_1} \frac{\mu(\xi)(v_1(\xi) - I)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

易得 RH 问题 $(\sum, v(z))$ 的解与 $(\sum_1, v_1(z))$ 的解相同, 即跳跃矩阵为单位阵的路径 $\sum_2$ 对 RH 问题的解无贡献, 可以舍去. 只求 $\sum_1$ 上的 RH 问题

第二章 RH 方法求解零边界的 NLS 方程

2.1 聚焦 NLS 方程

2.1.1 特征函数

考虑聚焦 NLS 方程的初值问题

$$\mathrm{i}q_t(x,t) + q_{xx}(x,t) + 2q(x,t)|q(x,t)|^2 = 0 \tag{2.1.1}$$

$$q(x,0) = q_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \tag{2.1.2}$$

其中 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 表示 Schwartz 空间. NLS 方程 (2.1.1) 具有如下矩阵形式的 Lax 对

$$\psi_x + \mathrm{i}z\sigma_3\psi = P\psi \tag{2.1.3}$$

$$\psi_t + 2\mathrm{i}z^2\sigma_3\psi = Q\psi \tag{2.1.4}$$

其中

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} & q \\ -q^* & \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \mathrm{i}|q|^2 & \mathrm{i}q_x \\ \mathrm{i}q_x^* & -\mathrm{i}|q|^2 \end{pmatrix} + 2zP$$

满足零曲率方程

$$(P - \mathrm{i}z\sigma_3)_t - \left(Q - 2\mathrm{i}z^2\sigma_3\right)_x + \left[P - \mathrm{i}z\sigma_3, Q - 2\mathrm{i}z^2\sigma_3\right] = 0 \tag{2.1.5}$$

2.1.2 渐进性

由于 $q_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 且 $q(x,t), q_x(x,t) \to 0, (x \to \infty)$, 故 x 足够大时, P, Q 可忽略, 从而 Lax 对 (2.1.3) - (2.1.4) 可近似为

$$\psi_x \sim -\mathrm{i}z\sigma_3\psi, \quad \psi_t \sim -2\mathrm{i}z^2\sigma_3\psi$$

可得渐进形式的 Jost 解 $\psi = e^{-\mathrm{i}\theta(z)\sigma_3}, (x \to \infty)$, 其中 $\theta(z) = zx + 2z^2t$. 下面为表示方便, 不妨记 $E := e^{\mathrm{i}\theta(z)\sigma_3}$, 做变换 $\mu(x,t,z) = \psi(x,t,z)E$, 则有

$$E^{-1} = e^{-\mathrm{i}\theta(z)\sigma_3}, \quad \mu(x,t,z) \to I(x \to \infty) \tag{2.1.6}$$

则可得

$$\mu_x = \psi_x E + \psi E(\mathrm{i}\sigma_3 z) \tag{2.1.7}$$

$$\mu_t = \psi_t E + \psi E(2\mathrm{i}\sigma_3 z^2) \tag{2.1.8}$$

带入 Lax 对 (2.1.3) - (2.1.4) 可得

$$\mu_x = (P\psi - \mathrm{i}z\sigma_3\psi)E + \psi E(\mathrm{i}\sigma_3 z) \tag{2.1.9}$$

$$\mu_t = (Q\psi - 2\mathrm{i}z^2\sigma_3\psi)E + \psi E(2\mathrm{i}\hat{\sigma}_3 z^2) \tag{2.1.10}$$

故有

$$\mu_x = P\mu - \mathrm{i}z[\sigma_3, \mu] \implies \mu_x + \mathrm{i}z[\sigma_3, \mu] = P\mu \tag{2.1.11}$$

同理可得

$$\mu_t + 2\mathrm{i}z^2[\sigma_3, \mu] = Q\mu \tag{2.1.12}$$

由 (2.1.11) 式可得

$$\mu_x + \mathrm{i}z\hat{\sigma}\mu = P\mu \tag{2.1.13}$$

$$e^{\mathrm{i}\theta(z)\hat{\sigma}_3}\mu_x + \mathrm{i}z\hat{\sigma}_3 e^{\mathrm{i}\theta(z)\hat{\sigma}_3}\mu = e^{\mathrm{i}\theta(z)\hat{\sigma}_3}P \tag{2.1.14}$$

其中 $\hat{\sigma}_3 X = [\sigma_3, X], e^{\mathrm{i}\theta(z)\hat{\sigma}_3}X = EXE^{-1}$, 为表示方便不妨记 $\hat{E} = e^{\mathrm{i}\theta(z)\hat{\sigma}_3}$. 易得 Lax 对的全微分形式

$$\mathrm{d}(\hat{E}\mu) = \hat{E}[(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}t)\mu] \tag{2.1.15}$$

为构造规范的 Riemann-Hilbert 问题, 即其解在 $z \to \infty$ 时渐进于单位阵, 现只需证明 $\mu \to I(z \to \infty)$.

证明 将 μ 在无穷远点 Taylor 展开

$$\mu = \mu^{(0)} + \frac{1}{z}\mu^{(1)} + \cdots = \mu^{(0)} + O(z^{-1}) \tag{2.1.16}$$

其中 $\mu^{(0)}, \mu^{(1)}$ 与 z 无关, 将上式代入 (2.1.11), (2.1.12) 比较 z 的次数可得

$$\begin{aligned} &\left[\mu^{(0)} + O(z^{-1})\right]_x + \mathrm{i}z\left[\sigma_3, \mu^{(0)} + \frac{\mu^{(1)}}{z} + O(z^{-2})\right] = P\left[\mu^{(0)} + O(z^{-1})\right] \\ &[\mu^{(0)} + O(z^{-1})]_t + 2\mathrm{i}z^2[\sigma_3, \mu^{(0)} + \frac{\mu^{(1)}}{z} + O(z^{-2})] = (Q_0 + 2zP)[\mu^{(0)} + O(z^{-1})] \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

可得 x 部分:

$$\left.\begin{aligned} z: &\quad [\sigma_3, \mu^{(0)}] = 0 \\ z^0: &\quad \mu^{(0)} + 2\mathrm{i}z[\sigma_3, \mu^{(1)}] = P\mu^{(0)} \end{aligned}\right. \implies \mu^{(0)}\text{为对角阵} \tag{2.1.18}$$

t 部分:

$$\left.\begin{aligned} z^2: &\quad [\sigma_3, \mu^{(0)}] = 0 \\ z: &\quad \mathrm{i}[\sigma_3, \mu^{(1)}] = P\mu^{(1)} \end{aligned}\right. \implies \mu_x^{(0)} = 0 \tag{2.1.19}$$

故 $\mu^{(0)}$ 为与 x 无关的对角矩阵, 因此 (2.1.16) 式对 x, z 同时取极限, 并交换极限顺序可得

$$\lim_{z\to\infty}\lim_{x\to\infty}\mu = \lim_{x\to\infty}\lim_{z\to\infty}\left(\mu^{(0)} + O(z^{(-1)})\right) \tag{2.1.20}$$

利用 (2.1.6), (2.1.16) 式可得 $\mu^{(0)} = I$, 故 $\mu \to I(z \to \infty)$. □

再将 $\mu^{(0)} = I$ 带入 (2.1.19) 式比较矩阵对角元素得

$$q(x,t) = 2\mathrm{i}(\mu^{(1)})_{12} = 2\mathrm{i}\lim_{z\to\infty}(z\mu)_{12} \tag{2.1.21}$$

注 上式可将 NLS 方程与特征函数联系起来, 接下来将特征函数与 RH 问题建立联系. 从而 NLS 方程的解可用 RH 问题的解表示, 然后通过 RH 问题反接触 NLS 方程的解, 即

$$NLS \rightleftharpoons \text{特征函数} \rightleftharpoons RH\text{问题}$$

2.2 解析性与对称性

由于 (2.1.15) 为全微分形式, 积分与路径无关, 故选择两个特殊路径:

$$(-\infty, t) \to (x, t), \quad (+\infty, t) \to (x, t)$$

因此可获得 Lax 对 (2.1.11), (2.1.12) 的两个特征函数

$$\mu_1 = I - \int_{-\infty}^{x} e^{-\mathrm{i}z(x-y)\sigma_3}P\mu_1\mathrm{d}x, \quad \mu_2 = I - \int_{+\infty}^{x} e^{-\mathrm{i}z(x-y)\sigma_3}P\mu_2\mathrm{d}x \tag{2.2.1}$$

证明 由 (2.1.15) 式, 由 $(\hat{E}\mu)_x = \hat{E}P\mu$ 可得

$$\hat{E}\mu|_{-\infty}^{x} = \int_{-\infty}^{x}\hat{E}P\mu\mathrm{d}y \tag{2.2.2}$$

$$LHS = \hat{E}\mu - \hat{E}I, \quad RHS = \int_{-\infty}^{x} e^{\mathrm{i}zy+z^2t\hat{\sigma}_3}P\mu\mathrm{d}y$$

两边同时乘以 $\hat{E}$, 即得 μ_1, μ_2 同理可得. □

显然, 其仍具有如下性质

$$\mu_1, \mu_2 \to I(x \to \pm\infty), \quad \mu_1, \mu_2 \to I(z \to +\infty) \tag{2.2.3}$$

由于 $\psi_1 = \mu_1 E^{-1}, \psi_2 = \mu_2 E^{-1}$, 为 Lax 对的两个解, 而 Lax 对为一节齐次线性方程组, 故这两个解线性相关, 故有

$$\mu_1(x,t,z) = \mu_2(x,t,z)\hat{E}S(z), \quad S(z) = \begin{pmatrix} S_{11}(z) & S_{12}(z) \\ S_{21}(z) & S_{22}(z) \end{pmatrix} \tag{2.2.4}$$

其中矩阵 $S(z)$ 与 x, t 无关, 称为谱函数矩阵.

再由 $\mu = \psi E$ 可知 $\det(\mu_j) = \det(\psi_j)$. 又因为 $tr(P - \mathrm{i}z\sigma_3) = tr(Q - 2\mathrm{i}z^2\sigma_3) = 0$, 由 Abel 定理可得

$$\det(\psi_j)_x = \det(\psi_j)_t = 0 \tag{2.2.5}$$

故有 $\det(\mu_j)_x = \det(\mu_j)_t = 0$, 这说明 $\det(\mu_j)$ 与 x, t 无关, 再由渐进性可得

$$\det(\mu_j) = \lim_{|x|\to\infty} \det(\mu_j) = 1, \quad (j = 1, 2) \tag{2.2.6}$$

故对 (2.2.4) 两边取行列式有 $\det S(z) = 1$.

2.2.1 解析性

下面我们考虑特征函数 μ_1, μ_1 和谱矩阵 $S(z)$ 的解析性, 记 μ_1 的第一二列分别为

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} \mu_1^{11} & \mu_1^{12} \\ \mu_1^{21} & \mu_1^{22} \end{pmatrix} = (\mu_1^+, \mu_1^-) \tag{2.2.7}$$

则由积分方程 (2.2.1) 可得如下 Volterra 积分方程

$$\mu_1^+(x,t,z) = (1,0)^T - \int_{-\infty}^{x} \begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{\mathrm{i}z(x-y)} \end{pmatrix} P\mu_1^+ \mathrm{d}y \tag{2.2.8}$$

$$\mu_1^-(x,t,z) = (0,1)^T - \int_{-\infty}^{x} \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}z(x-y)} & \\ & 1 \end{pmatrix} P\mu_1^- \mathrm{d}y \tag{2.2.9}$$

对于上面两方程, 由于积分变量 $y < x$, 可得

$$e^{2\mathrm{i}Z(x-y)} = e^{2\mathrm{i}(x-y)\Re(z)} e^{-2\mathrm{i}(x-y)\Im(z)}, \quad e^{-2\mathrm{i}Z(x-y)} = e^{-2\mathrm{i}(x-y)\Re(z)} e^{2\mathrm{i}(x-y)\Im(z)}$$

因此当 $q(x) \in L^1(\mathbb{R})$ 时, 通过构造序列与 Neumann 级数, 可得 $\mu_1^\pm, \mu_1^-$ 分别在 $\mathbb{C}_\pm$ 解析性.

注 上面 Volterra 积分的推导: 考虑到 $e^{\hat{\sigma}_3}X = e^{\sigma_3}Xe^{-\sigma_3}$, 故有

$$\begin{aligned} \mu_1 &= I + \int_{-\infty}^{x} e^{-\mathrm{i}z(x-y)\hat{\sigma}_3} P\mu_1 \mathrm{d}y = I + \int_{-\infty}^{x} e^{-\mathrm{i}z(x-y)\sigma_3} P e^{\mathrm{i}z(x-y)\sigma_3} \mu_1 \mathrm{d}y \\ &= I + \int_{-\infty}^{x} \begin{pmatrix} & qe^{2\mathrm{i}z(x-y)} \\ -q^* e^{-2\mathrm{i}z(x-y)} & \end{pmatrix} \mu \mathrm{d}y \end{aligned}$$

故 $\mu_1^+ =, \quad \mu_1^- =$

证明 下证 μ_1^+ 的解析性.

Step1. 解的存在性: 事实上方程 (2.2.8) 有如下 Neumann 级数分解

$$\mu_1^+ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x,z), \quad c_{n+1} = \int_{-\infty}^{x} \begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{\mathrm{i}z(x-y)} \end{pmatrix} Pc_n(y,z)\mathrm{d}y \tag{2.2.10}$$

其分量形式为

$$c_{n+1}^{(1)}(x,z) = \int_{-\infty}^{x} q(y)c_n^{(2)}(y,z)\mathrm{d}y, \quad c_{n+1}^{(2)}(x,z) = \int_{-\infty}^{x} e^{2\mathrm{i}z(x-y)} p(y)c_n^{(1)}(y,z)\mathrm{d}y \tag{2.2.11}$$

其中 $c_{n+1} = (c_{n+1}^{(1)}, c_{n+1}^{(2)})^T, p = -q^*$. 由 $c_0^{(2)} = 0 \implies c_{2n+1}^{(1)} = c_{2n}^{(2)} = 0$, 故上面方程可简化为

$$c_{2n}^{(1)}(x,z) = \int_{-\infty}^{x} q(y)c_{2n-1}^{(2)}(y,z)\mathrm{d}y, \quad c_{2n+1}^{(2)}(x,z) = \int_{-\infty}^{x} e^{2\mathrm{i}z(x-y)} p(y)c_{2n}^{(1)}(y,z)\mathrm{d}y \tag{2.2.12}$$

对上面方程组进一步简化, 引入如下恒等式

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{j!}\int_{-\infty}^{x}|f(\xi)|\left[\int_{-\infty}^{\xi}|f(\eta)|\right]^{j}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{(j+1)!}\int_{-\infty}^{x}\frac{d}{d\xi}\left[\int_{-\infty}^{\xi}|f(\eta)|\right]^{j+1}\mathrm{d}\xi\\
=&\frac{1}{(j+1)!}\left[\int_{-\infty}^{x}|f(\xi)|d\xi\right]^{j+1}\qquad (f\in L^{1}(\mathbb{R}))
\end{aligned}
\tag{2.2.13}
$$

利用归纳法可证明当 $\Im(z)>0$ 时, 有

$$
|c_{2n+1}^{(2)}|=\frac{u^{n+1}(x)}{(n+1)!}\frac{v^{n}(x)}{n!},\quad |c_{2n}^{(1)}|=\frac{u^{n}(x)}{n!}\frac{v^{n}(x)}{n!}
\tag{2.2.14}
$$

其中

$$
u(x)=\int_{-\infty}^{x}|p(y)|\mathrm{d}y,\quad v(x)=\int_{-\infty}^{x}|q(y)|\mathrm{d}y
\tag{2.2.15}
$$

事实上, 当 $\Im(z)>0$ 时, $|e^{2\mathrm{i}z(x-y)}|\le 1$, 利用 $c_0^{(1)}=1$, 由 (2.2.14) 可得

$$
c_{1}^{(2)}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}e^{2\mathrm{i}z(x-y)}p(y)\mathrm{d}y,\quad c_{2}^{(1)}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}e^{2\mathrm{i}z(x-y)}q(y)c_{1}^{(2)}\mathrm{d}y
\tag{2.2.16}
$$

又由 $u(x)\ge 0, v(x)\ge 0$, 有 $c_1^{(2)}\le v(x)$

$$
\begin{aligned}
|c_{2}^{(1)}(x,y)\le&\int_{-\infty}^{x}|q|c_{1}^{(2)}(y,z)\mathrm{d}y\le\int_{-\infty}^{x}|q|v(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{x}v'(y)u(y)\mathrm{d}y\\
=&u(x)v(x)-\int_{-\infty}^{x}u'(y)v(y)\mathrm{d}y\le u(x)v(x)
\end{aligned}
\tag{2.2.17}
$$

进而可得

$$
\begin{aligned}
|c_{3}^{(2)}(x,z)|\le&\int_{-\infty}^{x}|p|c_{2}^{(1)}(y,z)\mathrm{d}y\le\int_{-\infty}^{x}|p|u(y)v(y)\mathrm{d}y\\
\le&\int_{-\infty}^{x}u'(y)u(y)v(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}u^{2}(x)v(x)-\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}u^{2}(x)v'(x)\mathrm{d}y\le\frac{1}{2}u^{2}(x)v(x)
\end{aligned}
\tag{2.2.18}
$$

不妨设对于 $k\le l$ 时满足 $|c_{2l+1}^{(2)}|\le\frac{u^{l+1}(x)}{(l+1)!}\frac{v^{l}(x)}{l!}, |c_{2l}^{(1)}|\le\frac{u^{l}(x)}{l!}\frac{v^{l}(x)}{l!}$, 下证对于 $k=l+1$ 仍成立, 利用 (2.2.13) 式可得

$$
|c_{2l+2}^{(1)}|\le\int_{-\infty}^{x}|q(y)|\frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!}\frac{v^{l}(y)}{l!}\mathrm{d}y\le\int_{-\infty}^{x}v'(y)\frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!}\frac{v^{l}(y)}{l!}\mathrm{d}y=\frac{u^{l+1}}{(l+1)!}\frac{v^{l+1}}{(l+1)!}
\tag{2.2.19}
$$

及

$$
|c_{2l+3}^{(2)}|\le\int_{-\infty}^{x}|p(y)|\frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!}\frac{v^{l}(y)}{l!}\mathrm{d}y\le\int_{-\infty}^{x}u'(y)\frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!}\frac{v^{l}(y)}{l!}\mathrm{d}y=\frac{u^{l+2}}{(l+2)!}\frac{v^{l+1}}{(l+1)!}
\tag{2.2.20}
$$

从而上述 (2.2.12) 式得证. 注意到 $|q(x)|=|p(x)|$, 则 $v(x)=u(x)$, 故 (2.2.12) 式可化简为

$$
|c_{2n+1}^{(2)}|\le\frac{u^{2n+1}}{n!(n+1)!},\quad |c_{2n}^{(1)}|\le\frac{u^{2n}}{n!n!}
\tag{2.2.21}
$$

当 $q\in L^1(\mathbb{R})$ 时, 有 $u(x)$ 的上述级数均收敛, 故 Neumann 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x,z)$ 绝对收敛, 此时 μ_1^+ 在 $Imz>0$ 上解析, 且在 $Imz\ge 0$ 上连续.

Step2. 解的唯一性: 不妨设 $\tilde{\mu}_1^+$ 为方程 (2.2.8) 的另一个解, 不妨设 $h=\mu_1^+-\tilde{\mu}_1^+$, 则有

$$
\|h(x,t,z)\|=\left\|\int_{-\infty}^{x}\begin{pmatrix}1&\\&e^{\mathrm{i}z(x-y)}\end{pmatrix}Ph\mathrm{d}y\right\|\le 2\int_{-\infty}^{x}|q|\|h\|\mathrm{d}y\implies\|h(x,t,z)\|\equiv 0
\tag{2.2.22}
$$

故 μ_1^+ 为方程的唯一解, 同理可得 μ_1^- 的解析性. □

所以可得 μ_1^+,μ_1^- 分别在 $\mathbb{C}_+,\mathbb{C}_-$ 上解析. 同理可得 μ_2 的第一二列分别在 $\mathbb{C}_-,\mathbb{C}_+$ 上解析. 记作

$$
\mu_2=\begin{pmatrix}\mu_2^{(11)}&\mu_2^{(12)}\\\mu_2^{(21)}&\mu_2^{(22)}\end{pmatrix}=(\mu_2^-,\mu_2^+)
$$

由 (2.2.6) 可知, μ_1,μ_2 可逆, 且逆矩阵为其伴随阵, 另外基于 μ_1,μ_2 的列向量函数的解析性, 可得 μ_1^{-1} 的第一二行

在 $\mathbb{C}_-, \mathbb{C}_+$ 上解析, μ_2^{-1} 的第一二行在 $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ 上解析. 记为

$$\mu_1^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1^{(22)} & -\mu_1^{(21)} \\ -\mu_1^{(12)} & \mu_1^{(11)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{\mu_1^-} \\ \hat{\mu_1^+} \end{pmatrix}, \quad \mu_2^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_2^{(22)} & -\mu_2^{(21)} \\ -\mu_2^{(12)} & \mu_2^{(11)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{\mu_2^+} \\ \hat{\mu_2^-} \end{pmatrix} \tag{2.2.23}$$

利用 (2.2.4), (2.2.7), (2.2.23) 可得谱函数 $S(z)$ 的解析性

$$S(z) = \mu_2^{-1}\mu_1 = \begin{pmatrix} -\hat{\mu_2^+} \\ \hat{\mu_2^-} \end{pmatrix} (\mu_1^+, \mu_1^-) = \begin{pmatrix} -\hat{\mu_2^+}\mu_1^+ & -\hat{\mu_2^+}\mu_1^- \\ \hat{\mu_2^-}\mu_1^+ & \hat{\mu_2^-}\mu_1^- \end{pmatrix} \tag{2.2.24}$$

可见 $S_{11}(z)$ 在 $\mathbb{C}_+$ 解析, $S_{22}(z)$ 在 $\mathbb{C}_-$ 解析, S_{12}, S_{21} 在 $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ 均不解析, 但连续到边界.

2.2.2 对称性

定理 2.1

如上构造的特征函数 μ_1, μ_2 与谱函数 $S(z)$ 具有如下对称性

$$\mu_j^\dagger(x,t,z^*) = \mu_j^{-1}(x,t,z), \quad S^\dagger(z^*) = S^{-1}(z) \quad (j = 1,2) \tag{2.2.25}$$

证明 由 (2.1.11) 有

$$\mu_{j,x}(x,t,z) = \mathrm{i}z[\sigma_3, \mu_j(x,t,z)] = P\mu_j(x,t,z) \tag{2.2.26}$$

将 z 替换为 z^*, 并在两边同时取 Hermite 共轭, 则有

$$\mu_{j,x}^\dagger(x,t,z^*) + \mathrm{i}z[\sigma_3, \mu_j^\dagger(X,t,z^*)] = \mu_j^\dagger(x,t,z^*)P^\dagger \tag{2.2.27}$$

由于 $P^\dagger = -P$, 故上式可化为

$$\mu_{j,x}^\dagger(x,t,z^*) + \mathrm{i}z[\sigma_3, \mu_j^\dagger(X,t,z^*)] = -\mu_j^\dagger(x,t,z^*)P \tag{2.2.28}$$

另外对于 $\mu_j \cdot \mu_j^{-1} = I$ 对 x 求偏导有

$$\mu_{j,x}\mu_j^{-1} + \mu_j\mu_{j,x}^{-1} = 0 \implies \mu_{j,x}^{-1} = -\mu_j^{-1}\mu_{j,x}\mu_j^{-1} \tag{2.2.29}$$

将 (2.2.26) 带入上式有

$$\mu_{j,x}^{-1} = -\mu_j^{-1}(P\mu_j(x,t,z) - \mathrm{i}z[\sigma_3, \mu_j(x,t,z)]\mu_j^{-1}(x,t,z) \implies \mu_{j,x}^{-1} + \mathrm{i}z[\sigma_3, \mu_j^{-1}] = \mu_j^{-1}P \tag{2.2.30}$$

由 (2.2.8), (2.2.10) 可得 $\mu_j^\dagger, \mu_j^{-1}$ 满足相同的一次线性微分方程, 具有相同的渐进性, 又因为

$$\mu_j^\dagger(x,t,z^*), \mu_j^{-1}(x,t,z) \to I, \quad |x| \to \infty \tag{2.2.31}$$

因此两者相等, 得到对称关系 $\mu_j^\dagger(x,t,z^*) = \mu_j^{-1}(x,t,z), (j = 1,2)$. 接下来考虑 S 的对称性, 将 (2.2.4) 式改写为

$$S(z) = e^{\mathrm{i}\theta(z)\hat{\sigma}_3}(\mu_2^{-1}\mu_1) = \hat{E}(\mu_2^{-1}\mu_1) \tag{2.2.32}$$

由 (2.2.31) 可得如下

$$S(z^*)^\dagger = e^{\mathrm{i}\theta(z^*)\sigma_3}(\mu_2^{-1}\mu_1)e^{-\mathrm{i}\theta(z^*)} = E\mu_2^{-1}\mu_1E^{-1} = E\mu_1^\dagger(\mu_2^{-1})^\dagger E^{-1} = E\mu_1^\dagger\mu_2E^{-1} = S(z)^{-1} \tag{2.2.33}$$

比较对应元素, 有

$$S_{11}^*(z^*) = S_{22}(z), S_{12}^*(z^*) = -S_{21}(z) \tag{2.2.34}$$

□

2.3 相关的 RH 问题

2.3.1 规范 RH 问题

基于 2.2 节的结论, 我们构造 RH 问题, 引入记号

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

并定义两个矩阵

$$\begin{aligned} P_+(x,t,z) &= \mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 = \begin{pmatrix} \mu_1^{(11)} & \mu_2^{(12)} \\ \mu_1^{(21)} & \mu_2^{(22)} \end{pmatrix} = (\mu_1^+, \mu_2^+) \\ P_-(x,t,z) &= H_1\mu_1^{-1} + H_2\mu_2^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1^{(22)} & -\mu_1^{(12)} \\ -\mu_2^{(21)} & \mu_2^{(11)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1^- \\ \hat{\mu}_2^- \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

则由 $\mu_j, \mu_j^{-1} (j = 1, 2)$ 的解析性与渐进性, 直接可得 P_+ 在 $\mathbb{C}_+$ 上解析, P_- 在 $\mathbb{C}_-$ 上解析, 且具有如下渐进性

$$P_+, P_- \to I \quad |x| \to \infty \tag{2.3.3}$$

由此可证明如下对称关系

定理 2.2

$P_+(x,t,z), P_-(x,t,z)$ 具有如下对称性

$$P_+^\dagger(x,t,z^*) = P_-(x,t,z) \tag{2.3.4}$$

♡

证明 利用 (2.2.31) 可得

$$\begin{aligned} P_+^\dagger(x,t,z^*) &= (\mu_1(x,t,z)H_1 + \mu_2(x,t,z)H_2)^\dagger = H_1\mu_1^\dagger(z^*) + H_2\mu_2^\dagger(z^*) \\ &= H_1\mu_1^{-1}(x,t,z) + H_2\mu_2^{-1}(x,t,z) = P_-(x,t,z) \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

□

定义 2.1

概括上面结果, 我们可以得到下面 RH 问题

$$P_\pm(x,t,z) \in C(\mathbb{C}_\pm) \tag{2.3.6}$$

$$p_-p_+ = G(x,t,z) \quad z \in \mathbb{R} \tag{2.3.7}$$

$$P_\pm \to I \quad z \to \infty \tag{2.3.8}$$

其中跳跃矩阵为

$$G(x,t,z) = \hat{E}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -S_{12}(z) \\ S_{21}(z) & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3.9}$$

进一步 NLS 方程的解 $q(x,t)$ 可由 RH 问题的解给出

$$q(x,t) = 2\mathrm{i}\lim_{z\to\infty}(zP_+)_{12} = 2\mathrm{i}(P_+^{(1)})_{12} \tag{2.3.10}$$

其中 $P_+ = I + \frac{P_+^{(1)}}{z} + O(z^{-2})$

♣

证明 只需证明跳跃关系即可, 注意到 $\hat{E}H_j = H_j, (j = 1, 2)$ 可得

$$\begin{aligned} G &= P_-P_+ = (H_1\mu_1^{-1} + H_2\mu_2^{-1})(\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2) \\ &\overset{(2.2.4)}{=} [H_1(\hat{E}^{-1}S^{-1})\mu_2^{-1} + H_2\mu_2^{-1}][\mu_2(\hat{E}^{-1}S)H_1 + \mu_2 H_2] \\ &= \hat{E}^{-1}[(H_1S^{-1} + H_2)(SH_1 + H_2)] = \hat{E}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -S_{12}(z) \\ S_{21}(z) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\det(P_+) &= \det(\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2) = \det(\mu_2 \hat{E}^{-1} S) H_1 + \mu_2 H_2) \\ &= \det(\mu_2)\det((\hat{E}^{-1} S) H_1 + \mu_2 H_2) = S_{11}(z)\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

同理, 有 $\det(P_-) = S_{22}(z)$ □

2.3.2 RH 问题的可解性

下面分两种情况讨论 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 的解

Case1. 如果

$$\det P_\pm(z) \neq 0 (\forall z \in \mathbb{C}), \tag{2.3.13}$$

则称 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 为正则的, 将方程 (2.3.7) 改写为

$$P_+^{-1} - P_- = (I - G) P_+^{-1} := \hat{C} P_+^{-1} \tag{2.3.14}$$

由 Plemelj 公式可得

$$P_+ = I + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{C}(x,t,z) P_+^{-1}(x,t,z)}{s - z} \mathrm{d}s, \quad z \in \mathbb{C}_+ \tag{2.3.15}$$

Case2. 如果条件 (2.3.13) 不满足, 则称 RH 问题为非正则的, 假设 $\det P_\pm$ 在某些离散的点处为零, 由谱函数对称性 (2.2.34) 有

$$\det P_+(z) = S_{11}(z) = S_{22}^*(z^*) = \det P_-^*(z^*) = \det P_-(z^*) \tag{2.3.16}$$

故

$$\det P_+(z) = 0 \iff \det P_-(Z^*) = 0, \tag{2.3.17}$$

因此 $\det P_+(z)$ 与 $\det P_-(z)$ 有相同的零点个数, 且彼此共轭. 即若设 $z_j (j = 1, 2, \ldots, N)$ 为 $\det P_+(z)$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上的单零点, 则 $z_j^* (j = 1, 2, \ldots, N)$ 为 $\det P_-(z)$ 在 $\mathbb{C}_-$ 上的单零点.

由于 $\det P_+(z_j) = \det P_-(z_j^*) = 0$, 假设 w_j, w_j^* 分别为下列线性方程组的解

$$P_+(z_j) w_j(z_j) = 0, \quad w_j^*(z_j^*) P_-(z_j^*) = 0 \tag{2.3.18}$$

对上式取共轭转置, 则有 $w_j^\dagger(z_j) P_+^\dagger(z_j) = 0$, 再利用对称性 (2.3.4) 有

$$w_j^\dagger(z_j) P_-(z_j^*) = 0 \tag{2.3.19}$$

比较可得 $w_j^\dagger(z) = w_j^*(z^*)$.

非正则 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 的解可由下面定理给出

定理 2.3 (Zakharov, Shabat, 1979)

带有零点结构 (2.3.18) 的非正则 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 可分解为

$$P_+(z) = \hat{P}_+(z)\Gamma(z), \quad P_-(z) = \Gamma^{-1}(z)\hat{P}_-(z) \tag{2.3.20}$$

其中

$$\Gamma(z) = I + \sum_{k,j=1}^{N} \frac{w_k (M^{-1})_{kj} w_j^*}{z - z_j^*}, \quad \Gamma(z)^- = I - \sum_{k,j=1}^{N} \frac{w_k (M^{-1})_{kj} w_j^*}{z - z_k} \tag{2.3.21}$$

这里 M 为 $N \times N$ 矩阵, 其 $(k.j)$ 元素由下式给定

$$M_{kj} = \frac{w_k^* w_j}{z_k^* - z_j}, \quad k, j = 1, 2, \ldots, N, \quad \det \Gamma(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z - z_k}{z - z_k^*} \tag{2.3.22}$$

而 $\hat{P}_\pm$ 为正则 RH 问题的唯一解, 且

1. $\hat{P}_\pm$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上解析,
2. $\hat{P}_- \hat{P}_+ = \Gamma(z) G \Gamma^{-1}(z), z \in \mathbb{R}$

3. $\hat{P_{\pm}}(z) \to I, \quad z \to \infty,$

证明 非正则 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 是由于 $2N$ 个离散谱上的 $\det P_+(z_j) = \det P_-(Z_{j^*}) = 0 (j = 1, 2, \ldots N)$ 造成的. 所以主要任务是消除这些零点结构, 并且去除 $P_+(z_j), P_-(z_j^*)$ 在 z_j, z_j^* 上的零点结构, 为此需定义单极点矩阵

$$\Gamma_1(z) = I + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1^*} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} \tag{2.3.23}$$

其具有如下性质

$$\begin{aligned}
F_1^{-1}(z) &= I - \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} \\
\det \Gamma_1(z) &= \frac{z - z_1}{z - z_1^*}, \quad \det \Gamma_1^{-1}(z) = \frac{z - z_1^*}{z - z_1} \\
\Gamma_1(z_1) w_1 &= w_1 + \frac{z_1^* - z_1}{z_1 - z_1^*} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} \cdot w_1 = \frac{z^* - z_1}{z - z_1^*} \frac{w_1 (w_1^* w_1)}{w^* w_1} = w_1 - w_1 = 0 \\
w_1^* \Gamma_1^{-1}(z_1^*) &= w_1^* - \frac{z_1^* - z_1}{z^* - z_1} \cdot \frac{w_1^* w_1}{w_1^* w_1} \cdot w_1^* = w_1^* - w_1^* = 0
\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

令 $x_j = \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1}$, 则 x_j 为投影算子, 即 $x_j^2 = x_j$, 由上定义知 x_j 为一阶矩阵, 故与矩阵 diga$\{1, 0\}$ 相似, 既有可逆阵 T_j 使得 $T_j^{-1} x_j T_j = \mathrm{diag}\{1, 0\}$, 从而有

$$\Gamma_1(z) = \det \left(I + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1^*} T_j^{-1} X_j T_j \right) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1^*} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{z - z_1}{z - z_1^*} \tag{2.3.25}$$

定义矩阵函数 $R_1^+(z) = P_+(z) \Gamma_+^{-1}(z), R_1^{-1} = \Gamma_1(z) P_-(z)$, 由 (2.3.18) - (2.3.19) 知

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=z_1} R_1^+(z) &= \operatorname*{Res}_{z=z_1} \left(P_+(z) - P_+(z) \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} \right) = -\frac{z_1^* - z_1}{w_1 w_1^*} (P_+(z) w_1) w_1^* = 0 \\
\operatorname*{Res}_{z=z_1^*} R_1^{-1}(z) &= \operatorname*{Res}_{z=z_!^*} \left(P_1(z) + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} P_-(z) \right) = -\frac{z_1^* - z_1}{w_1^* w_1} w_1 (w_1^* P_-(z_1^*)) = 0
\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

因此 $R_1^+(z), R_1^-(z)$ 分别在 $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ 上解析, 且

$$\begin{aligned}
\det R_1^+(z_1) &= \lim_{z \to z_1} \left[\det P_+(z) \cdot \det \Gamma_1^{-1}(z) \right] = \lim_{z \to z_1} S_{11}(z) \frac{z - z_1^*}{z - z_1} \\
&= \lim_{z \to z_1} \frac{S_{11}(z) - S_{11}(z_1)}{z - z_1} (z - z^*) \Leftarrow (S_{11}(z) = 0) \\
&= \lim_{z \to z_1} S_{11}'(z)(z - z_1^*) = 0 \\
\det R_1^{-1}(z_1^*) &= \lim_{z \to z_1^*} [\det \Gamma_1(z) \cdot \det P_-(z)] = \lim_{z \to z_1^*} \frac{z - z_1}{z - z_1^*} S_{22}(z) = \lim_{z \to z_1^*} S_{22}'(z)(z - z_1) = 0
\end{aligned} \tag{2.3.27}$$

这说明 $R_1^+(z), R_1^-(z)$ 分别在 $z = z_1, z = z_1^*$ 不再具有零点结构, 然后去除其在 z_2, z_2^* 上的零点结构, 由于

$$\begin{aligned}
\det R_1^+(z_2) &= \det P_+(z_2) \det \Gamma_1^{-1}(z_2) = S_{11}(z_2) \frac{z_2 - z_1^*}{z_2 - z_1} = 0 \\
\det R_1^{-1}(z_2^*) &= \det \Gamma_1(z_2^*) \det P_-(z_2^*) = \frac{z_2^* - z_1}{z_2^* - z_1} S_{22}(z_2^*) = 0
\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

因此, 下列齐次线性方程组有非零解, 即存在 $v_2(z_2), v_2^*(z_2^*)$, 使得

$$R_1^+(z_2) v(z_2) = P_+(z_2) \Gamma_1^{-1}(z_2) v_2(z_2) = 0, \quad v_2^*(z_2^*) R_1^{-1}(z_2^*) = v_2^*(z_2^*) \Gamma_1(z_2^*) P_-(z_2^*) = 0 \tag{2.3.29}$$

与 (2.3.18) 比较可得

$$w_2(z_2) = \Gamma_1^{-1}(z_2) v_2(z_2), \quad w_2^*(z_2^*) = v_2^*(z_2^*) \Gamma_1(z_2^*) \tag{2.3.30}$$

为去除 $R_1^+(z_2), R_1^-(z_2^*)$ 在 z_2, z_2^* 上的零点结构, 令

$$\begin{aligned}\Gamma_2(z) &= I + \frac{z_2^*-z_2}{z-z_2^*}\cdot\frac{v_2v_2^*}{v_2^*v_2}, \quad \det\Gamma_2(z) = \frac{z-z_2}{z-z_2^*}\\ \Gamma_2^{-1}(z) &= I - \frac{z_2^*-z_2}{z-z_2}\cdot\frac{v_2v_2^*}{v_2^*v_2}, \quad \det\Gamma_2^{-1} = \frac{z-z_2^*}{z-z_2}\\ R_2^+(z) &= P_1^+(z)\Gamma_2^{-1}(z) = P_1^+(z)\Gamma_1^{-1}(z)\Gamma_2^{-1}(z)\\ R_2^{-1}(z) &= \Gamma_2(z)P_1^{-1}(z) = \Gamma_2(z)\Gamma_1(z)P_1^{-1}(z)\end{aligned} \tag{2.3.31}$$

则

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} R_2^+(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_2}\left[\left(P_+(z) - P_+(z)\frac{z_1^*-z_1}{z-z_1}\cdot\frac{w_1w_1^*}{w_2^*w_1}\right)\left(I - \frac{z_1^*-z_1}{z-z_1}\cdot\frac{w_1w_1^*}{v_2^*v_1}\right)\right] = -\frac{z_2^*-z_1R_1(z_2)v_2v_2^*}{v_2^*v_2} \tag{2.3.32}$$

同理 $\operatorname{Res}_{z=z_2^*} R_2^{-1}(z) = 0$, 由此可得 $R_2^+(z), R_2^{-1}(z)$ 分别在在 $z = z_1, z_2, z = z_1^*, z_2^*$ 上无零点结构, 则

$$\begin{aligned}\det R_2^+(z_j) &= \lim_{z\to z_j}\left[\det P_+(z)\det\Gamma_1^{-1}(z)\det\Gamma_2^{-1}(z)\right]\\ &= \lim_{z\to z_j} S_{11}(z)\frac{z-z_1^*}{z-z_1}\cdot\frac{z-z_2^*}{z-z_2}\\ &= s_{11}'(z_j)\frac{(z_j-z_1^*)(z_j-z_2^*)}{z_j-z_k} \neq 0\\ \det R_2^-(z_j^*) &\neq 0 \quad (k=1,2, k\neq z)\end{aligned} \tag{2.3.33}$$

更一般的, 可得

$$\begin{aligned}w_j &= \Gamma_1^{-1}(z_j)\cdots\Gamma_{j-1}^{-1}(z_j)\cdot v_j(z_j)\\ w_j^* &= v_j^*(z_j^*)\cdot\Gamma_1(z_j^*)\cdots\Gamma_{j-1}(z_j^*)\\ R_j^+(z) &= P_+(z)\cdot\Gamma_1^{-1}(z)\cdots\Gamma_j^{-1}(z)\\ R_j^{-1}(z) &= \Gamma_j(z)\cdots\Gamma_1(z)\cdot P_-(z)\end{aligned} \tag{2.3.34}$$

其中

$$\Gamma_j(z) = I + \frac{z_j^*-z_j}{z-z_j^*}\cdot\frac{v_jv_j^*}{v_j^*v_j}, \quad \Gamma_j^{-1}(z) = I - \frac{z_j^*-z_j}{z-z_j}\cdot\frac{v_jv_j^*}{v_j^*v_j} \tag{2.3.35}$$

则 $R_j^+(z), R_j^{-1}(z)$ 在 $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ 上解析, 且在 $z_k, z_k^*(k=1,2,\ldots j)$ 上无零点结构, 即

$$\begin{aligned}\det R_j^+(z_k) &= s_{11}'(z_k)\frac{\prod_{l=1}^j(z_k-z_l^*)}{\prod_{l=1,l\neq k}^j(z_k-z_l)} \neq 0\\ \det R_j^{-1}(z_k^*) &= s_{22}'(z_k^*)\frac{\prod_{l=1}^j(z_k^*-z_l)}{\prod_{l=1,l\neq k}^j(z_k^*-z_l)} \neq 0\end{aligned} \quad (k=1,2,\ldots,j) \tag{2.3.36}$$

而

$$\begin{aligned}\det R_j^+(z_{j+1}) &= S_{11}(z_{j+1})\prod_{j=1}^{j}\frac{z_{j+1}-z_k^*}{z_{j+1}-z_k} = 0\\ \det R_j^{-1}(z_{j+1}^*) &= S_{22}(z_{j+1}^*)\prod_{j=1}^{j}\frac{z_{j+1}^*-z_k}{z_{j+1}^*-z_k} = 0\end{aligned} \tag{2.3.37}$$

最后令

$$\begin{aligned}\Gamma_z &= \Gamma_N(z)\cdots\Gamma_1(z), \quad \Gamma_z^{-1} = \Gamma_1^{-1}(z)\cdots\Gamma_N^{-1}(z)\\ \hat{P}_+(z) &= P_+(z)\Gamma_z^{-1}(z), \quad \hat{P}_-(z) = \Gamma_z(z)P_-(z)\end{aligned} \tag{2.3.38}$$

则 $\hat{P}_+(z), \hat{P}_-(z)$ 在 $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ 上解析, 且在 $z_j, z_j^*(j=1,2,\ldots,N)$ 上无零点结构 (实际上在解析区域内无零点结构), 即

$$\det\hat{P}_+(z_k) \neq 0, \quad \det\hat{P}_-(z_k^*) \neq 0 \quad (k=1,2,\ldots,N) \tag{2.3.39}$$

得到分解 (2.3.20). 下证 (2.3.21). 注意到 $\Gamma(z), \Gamma^{-1}(z)$ 分别为具有单极点 $z_j, z_j^*(1\leq j\leq N)$ 的亚纯函数, 以及分解

(2.3.35), (2.3.38), 寻找的向量使得

$$\Gamma(Z)=i+\sum_{j=1}^{N}\frac{\xi_j w_j^*}{z-z_j^*},\quad \Gamma^{-1}(z)=I-\sum_{j=1}^{N}\frac{w_j^*\xi_j}{z-z_j} \tag{2.3.40}$$

注意到 $\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z)=I$ 对任意 z 都成立, 当然也在 $z=z_k$ 处成立, 即 $\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z)=I$ 在 $z=z_k$ 处正则, 为保证 $\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z)=I$ 在 $z=z_k$ 处成立, 只需让其留数为 0, 因此利用 (2.3.40) 可得

$$\begin{aligned}0&=\operatorname*{Res}_{z=z_k}[\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z)]=\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(\Gamma(z)-\sum_{j=1}^{N}\Gamma(z)\frac{w_j\xi_j^*}{z-z_j}\right)=-\Gamma(z_k)w_k\xi_k^*\\ &-\left(I+\sum_{j=1}^{N}\frac{\xi_j w_j^*}{z_k-z_j^*}\right)w_k\xi_k^*=\left(-w_k+\sum_{j=1}^{N}\frac{w_j^*w_k}{z_j^*-z_k}\xi_j^*\right)\xi_k^*\end{aligned} \tag{2.3.41}$$

对上式两边同时作用 ξ_k, 则有

$$\left(-w_k+\sum_{j=1}^{N}\frac{w_j^*w_k}{z_j^*-z_k}\xi_j\right)|\xi_k|^2=0 \implies -w_k+\sum_{j=1}^{N}\frac{w_j^*w_k}{z_j^*-z_k}\xi_j=0\quad(1\le k\le N) \tag{2.3.42}$$

将上式改写为 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N$ 的分块矩阵形式的线性方程组, 则有

$$(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N)M=(w_1^*,w_2^*,\ldots,w_N^*) \tag{2.3.43}$$

其中 $M=(M_{kj})_{N\times N}$, 其中 $M_{kj}=\frac{w_k^*w_j}{z_k^*-z_j}$ 则

$$\begin{cases}\frac{w_1^*w_1}{z_1^*-z_1}\xi_1+\frac{w_2^*w_1}{z_2^*-z_1}\xi_2+\cdots+\frac{w_N^*w_1}{z_N^*-z_1}\xi_N=w_1\\ \frac{w_1^*w_2}{z_1^*-z_2}\xi_1+\frac{w_2^*w_2}{z_2^*-z_2}\xi_2+\cdots+\frac{w_N^*w_2}{z_N^*-z_2}\xi_N=w_2\\ \vdots\\ \frac{w_1^*w_N}{z_1^*-z_N}\xi_1+\frac{w_2^*w_N}{z_2^*-z_N}\xi_2+\cdots+\frac{w_N^*w_N}{z_N^*-z_N}\xi_N=w_N\end{cases}\implies M=\begin{pmatrix}\frac{w_1^*w_1}{z_1^*-z_1}&\frac{w_1^*w_2}{z_1^*-z_2}&\cdots&\frac{w_1^*w_N}{z_1^*-z_N}\\ \frac{w_2^*w_1}{z_2^*-z_1}&\frac{w_2^*w_2}{z_2^*-z_2}&\cdots&\frac{w_2^*w_N}{z_2^*-z_2}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{w_N^*w_1}{z_N^*-z_1}&\frac{w_N^*w_2}{z_N^*-z_2}&\cdots&\frac{w_N^*w_N}{z_N^*-z_N}\end{pmatrix} \tag{2.3.44}$$

可得 $\xi_j=\sum_{k=1}^{N}(M^{-1})_{kj}w_k$. 最后将其带入 (2.3.40) 得到 (2.3.21) □

2.4 NLS 方程的 N 孤子解

2.4.1 矩阵向量解的时空演化

对方程 (2.3.18) 第一个式子两边分别对 x,t 求导, 可得

$$P_{+,x}w_j+P_+w_{j,x}=0,\quad P_{+,t}w_j+P_+w_{j,t}=0 \tag{2.4.1}$$

利用 P_+ 的定义与 Lax 对 (2.1.11), (2.1.12) 可得

$$\begin{aligned}P_{+,x}&=\mu_{1,x}H_1+\mu_{2,x}H_2=(\mathrm{i}z_j[\sigma_3,\mu_1]+P\mu_1)H_1+(-\mathrm{i}z_j[\sigma_3,\mu_2]+P\mu_2)H_2\\ &-\mathrm{i}z_j(\mu_1\sigma_3H_1-\mu_2\sigma_3H_2+\sigma_3\mu_1H_1+\sigma_3\mu_2H_2)+P\mu_1H_1+P\mu_2H_2\\ &=-\mathrm{i}z[\sigma_3,p_+]+PP_+\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

同理有

$$P_{+,t}=-\mathrm{i}z_j^2[\sigma_3,P_+]+QP_+ \tag{2.4.3}$$

将 (2.4.2), (2.4.3) 代入 (2.4.1) 且由于 $P_+w_j=0, w_jP=0$, 有

$$(-\mathrm{i}z_j[\sigma_3,P_+]+PP_+)w_j+P_+w_{j,x}=0\implies \mathrm{i}z_jP_+\sigma_3w_j+P_+w_{j,x}=0\implies P_+(w_{j,x}+\mathrm{i}z_j\sigma_3w_j)=0 \tag{2.4.4}$$

同理有 $P_+(w_{j,t}+\mathrm{i}z_j^2\sigma_3w_j)=0$.

$$\begin{cases}w_{j,x}+\mathrm{i}z_j\sigma_3w_j=0\\ w_{j,t}+\mathrm{i}z_j^2\sigma_3w_j=0\end{cases}\implies w_j=e^{-\mathrm{i}\theta(z_j)\sigma_3}w_{j,0},\quad(j=1,2,\ldots,N) \tag{2.4.5}$$

其中 $w_{j,0}$ 为 2 维常向量, 从而 $w_j^* = w_{j,0}^{\dagger} e^{\mathrm{i}\theta(z_j^*)\sigma_3}$.

2.4.2 N 维孤子解公式

已知 $P_-P_+ = G \implies P_+^{-1} - P_- = \hat{G}P_+$(其中 $I - G = \hat{G}$), 且 $\hat{P_-}(z)\hat{P_+}(z) = \Gamma(z)G\Gamma^{-1}(z)(z \in \mathbb{R})$, 可得

$$\begin{aligned} \hat{P_+^{-1}} - \hat{P_-} &= (I - \hat{P_-}\hat{P_+})\hat{P_+^{-1}} = \left(I - \Gamma(z)G\Gamma^{-1}(z)\right)\hat{P_+^{-1}} = (\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z) - \Gamma(z)G\Gamma^{-1}(z))\hat{P_+^{-1}} \\ &= \Gamma(z)(I-G)\Gamma^{-1}(z)\hat{P_+^{-1}} = \Gamma(z)\hat{G}\Gamma^{-1}(z)\hat{P_+^{-1}} \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

由 Taylor 公式 $\frac{1}{s-z} = -\frac{1}{z}(\frac{1}{1-s/z}) = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{s}{z} + \cdots\right)$, 故 Plemelj 公式可写为

$$\begin{aligned} \hat{P_+^{-1}} &= I + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma(z)\hat{G}\Gamma^{-1}(z)\hat{P_+^{-1}}}{s-z}\mathrm{d}s \\ &= I - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}z}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 + \frac{s}{z} + (\frac{s}{z})^2 + \cdots\right)\Gamma(z)\hat{G}\Gamma^{-1}(z)\hat{P_+^{-1}}\mathrm{d}s \\ &= I - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}z}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(z)\hat{G}\Gamma^{-1}(z)\hat{P_+^{-1}}\mathrm{d}s + O(z^{-2}) \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

由 $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$, $(P^{-1} = I + \frac{A}{z} + \ldots, P = \frac{B}{z} + \ldots)$, 可得

$$\hat{P_+} = I + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}z}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(z)\hat{G}\Gamma^{-1}(z)\hat{P_+}\mathrm{d}s + O(z^{-2}) \tag{2.4.8}$$

再由

$$\Gamma(z) = i + \sum_{k,j=1}^{N}\frac{w_k(M^{-1})_{kj}w_j^*}{z - z_j^*} \implies \Gamma(z) = I + \frac{1}{z}\sum_{k,j=1}^{N}w_k(M^{-1})_{kj}w_j^* + O(z^{-2}) \tag{2.4.9}$$

将上渐进式带入 (2.3.20), 比较 z^{-1} 的次数可得

$$P_+^{(1)} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(z)\hat{G}\Gamma^{-1}(z)\hat{P_+^{-1}}\mathrm{d}s = \sum_{k,j=1}^{N}w_k(M^{-1})_{kj}w_j^* \tag{2.4.10}$$

特别的, 当散射数据 $S_{12} = S_{21} = 0$ 时, 有 $\hat{G} = I - G = 0$. 故上式 (2.4.10) 可简化为

$$P_+^{-1} = \sum_{k,j=1}^{N}w_k(M^{-1})_{kj}w_j^* \tag{2.4.11}$$

不妨取 $\lambda_j = -\mathrm{i}(z_jx + 2z_j^2t)$, 并取 $w_{j,0} = (c_j, 1)^T$, 则有

$$w_j = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j} & \\ & e^{-\lambda_j}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_j \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_je^{\lambda_j} \\ e^{-\lambda_j}\end{pmatrix} \tag{2.4.12}$$

从而 $w_j^* = w_{j,0}^* \cdot e_j^{\lambda}\sigma_3 = (c_j^*e^{\lambda_j^*}, e^{-\lambda_j})$. 故

$$M_{k.j} = \frac{w_k^*w_j}{z_k^* - z_j} = \frac{1}{z_k^* - z_j}(c_k^*c_je^{\lambda_k^*+\lambda_j} + e^{-\lambda_k-\lambda_j}) \tag{2.4.13}$$

再由 (2.4.9)

$$\begin{aligned} q(x,t) &= 2\mathrm{i}\lim_{z\to\infty}(zP_+)_{12} = 2\mathrm{i}(P_+^{(1)})_{12} \\ &= 2\mathrm{i}\sum_{k,j}^{N}(w_kw_j^*)_{12}(M^{-1})_{kj} = 2\mathrm{i}\sum_{k,j}^{N}c_ke^{\lambda_k-\lambda_j^*}(M^{-1})_{kj} \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

令

$$R = \begin{pmatrix} 0 & c_1e^{\lambda_1} & \cdots & c_Ne^{\lambda_N} \\ e^{-\lambda_1^*} & M_{11} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-\lambda_N^*} & M_{N1} & \cdots & M_{NN}\end{pmatrix} \tag{2.4.15}$$

则

$$
\begin{aligned}
\det R &= \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+2}c_k e^{\lambda_k}\det\begin{pmatrix} e^{-\lambda_1^*} & M_{11} & \cdots & M_{1,k-1} & M_{1,k+1} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-\lambda_N^*} & M_{N1} & \cdots & M_{N,k-1} & M_{N,k+1} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+2}c_k e^{\lambda_k}\sum_{j=1}^{N} e^{-\lambda_j^*}\det\underline{\begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1,k-1} & M_{1,k+1} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & \cdots & M_{N,k-1} & M_{N,k+1} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix}} := \Delta \\
&= \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+j+3}c_k e^{\lambda_k-\lambda_j^*}\det(\Delta) \\
&= -c_k e^{\lambda_k-\lambda_j^*(M^*)_{jk}} \qquad \Leftarrow \left((M^*)_{jk}-(-1)^{k+j}\det(\Delta)\right) \\
&= -\det M\sum c_k e^{\lambda_k-\lambda_j^*} \qquad \Leftarrow \left((M^{-1})_{jk}(M^*)=|M|M^{-1}\right)
\end{aligned}
\tag{2.4.16}
$$

因此

$$
\sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k-\lambda_j^*}(M^{-1})_{jk} = -\frac{\det R}{\det M} \tag{2.4.17}
$$

将 (2.4.17) 带入 (2.4.14) 可得 NLS 方程的 N 孤子解

$$
q = -2\mathrm{i}\frac{\det R}{\det M} \tag{2.4.18}
$$