Preface

Contents

本笔记旨在记录笔者对 Riemann-Hilbert 方法的理解, RH 方法作为一种强大的数学工具, 在非线性偏微分方程的求解, 尤其是可积系统中具有重要的应用价值. 通过对其理论背景, 基本方法及具体应用的学习, 笔者希望为读者提供一个清晰的入门指引.

主要内容如下:

第一章主要介绍 RH 方法的背景知识, 包括 Plemelj 定理, RH 问题等. 若读者对 RH 方法已有一定了解, 可跳过本章.

第二章主要介绍利用 RH 方法求解零边界的 NLS 方程, 通过构造特征函数, 分析其解析性与对称性, 以及建立相关的 RH 问题，最终推导出 NLS 方程的 N 孤子解. 本章节主要参考了复旦大学范恩贵老师的讲义. 这一章节感谢我的同门韩刻蓉的帮助与讲解.

第三章主要介绍利用 RH 方法求解反时间, 反空间, 及反时空的反演形式, 这些方程是耦合 NLS 方程在不同约束条件下的特殊形式. 通过 Lax 对出发, 分析其散射数据的对称性，进一步推导出这些非局部方程的 N 孤子解. 跳过了传统 RH 方法寻找 Jost 函数和跳跃矩阵的过程, 直接利用约化条件对散射数据进行分析, 极大简化了推导过程.

第四章为在第三章的基础上, 进一步推广到三维的反时空 NLS 方程. 通过分析其散射数据的对称性，推导出三维反时空 NLS 方程的 N 孤子解. 相比于第三章, 第四章的结论可以推广至 $N \times N$ 的情形, 是本笔记的精髓. 本章节构成了我的第一篇论文. 感谢君言师姐推导的约化, 她帮助了很多.

感想

初版感想

本笔记为在老家过年期间编写, 整个过程并不算顺利, 老家房子年久失修, 塌了外墙和两间屋顶, 白天需要和父亲一起修房子, 应付家庭琐事; 只有夜间才能缓慢的推进写作. 另外农村没有暖气, 零下十余度的环境实难称舒适, 需要物理意义上的热情与字面意义上的争分夺秒. 尤其深夜伏案时, 四野寂寂, 唯余键盘声在黑暗中回荡. 恍若独行于漫长甬道, 徘徊在黑暗迷宫之中. 然正如 A. Zee 所言:「夜航人自有夜行法」. 而我也悟到了适合自己的写作方式: 白天构思写作思路, 夜至十点后开机写作, 睡前再反思增补.

历时一月的艰辛写作中, 笔者感到一种难以言喻的, 某种漠然的相互理解, 如越过高墙, 漫步在满月下的林地, 并在夜色中获得慰籍. 是邪，非邪？解释或属妄诞，感受毕竟真实.

因仅为一家之言, 仓促间完成又后期无他人审校, 难免存在疏漏, 错误和挂一漏万之处. 望各位读者在阅读时能指出不足, 共同探讨与完善.

序曲将终，敬无穷的远方，与无尽的人们.

本笔记存档于 IceySwan/Notes, 如发现任何错误请提 issue 或联系 hi@icey.one

Icey Swan

2025 年 2 月 12 日

于河南老家深夜

目录

Preface **i**

第 1 章 预备知识 **1**

1.1 Plemelj 公式 1

1.2 矩阵 RH 问题 3

第 2 章 RH 方法求解零边界的 NLS 方程 **6**

2.1 聚焦 NLS 方程 6

2.2 解析性与对称性 7

2.3 相关的 RH 问题 11

2.4 NLS 方程的 N 孤子解 15

第 3 章 逆时空 NLS 方程 **18**

3.1 非局部 NLS 方程及其约化 18

3.2 耦合 NLS 方程的 N 孤子解 18

3.3 非局部 NLS 方程的对称关系 19

3.4 动力学分析 22

第 4 章 三阶 AKNS 方程组的逆时空约化 **24**

4.1 AKNS 方程组的约化 24

4.2 三阶 NLS 方程组的解 25

4.3 反时空情形的散射数据对称性 26

参考文献 **29**

第 1 章 预备知识

1.1 Plemelj 公式

定理 1.1 (Abel 定理)

设 $A \in \mathbb{C}$, 对矩阵微分方程 $Y_x = A(x)Y$, 可得标量微分方程

$$(\det Y)_x = \operatorname{tr}(A) \det Y \tag{1.1.1}$$

从而有

$$\det(Y(x)) = \det(Y(x_0)) \cdot \exp \int_{x_0}^{x} \operatorname{tr}(\mathrm{A(t)})\mathrm{dt} \tag{1.1.2}$$

定理 1.2 (Morera)

如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对于 D 内任意闭曲线 $\sum$, 有 $\int_{\sum} f(z)\mathrm{d}z = 0$, 则有 $f(z)$ 在 D 内解析

定义 1.1 (Schwartz 空间)

欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 上的 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^\varkappa) : \|f\|_{\alpha,\beta} = \sum_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_\beta f(x)| < \infty, \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \right\} \tag{1.1.3}$$

其中 α, β 为多重指标, $\partial_\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_n}^{\beta_n}$. f 称为速降函数或 Schwartz 函数.

简单来说，速降函数是指当 $x \to \infty$ 时趋近于零的速度比所有的多项式的倒数都快，并且任意阶的导数都有这种性质的函数。

定理 1.3 (Painleve 开拓定理)

设 D_1, D_2 为两个没有公共点的区域, 边界为 Γ, 并设 $f_1(z), f_2(z)$ 分别在 D_1, D_2 内解析, 在 $D_1 + \Gamma, D_2 + \Gamma$ 上连续, 且 $f_1(z) = f_2(z), \forall z \in \Gamma$, 则

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1, \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in \Gamma, \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

在 $D_1 + D_2 + \Gamma$ 内解析.

证明 显然 $f(Z)$ 在 $D_1 + D_2 + \Gamma$ 上连续, 根据定理 1.2, 只需证明 $f(z)$ 沿任何闭曲线 $\sum$ 的积分为 0.

如果 $\sum \subset D_1$, 或 $\sum \subset D_1$, 则由 $f(z)$ 的解析性可得

$$\int_{\sum} f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{1.1.5}$$

如果 $\sum$ 同时包含于 D_1, D_2 内, 把 Γ 在 $\sum$ 内的曲线记为 C_γ, 则

$$\int_{C_1 + C_\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0, \quad \int_{C_1 + C_\gamma}^{-} f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{1.1.6}$$

故

$$\int_{\sum} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1 + C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1 + C_\gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1 + C_\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{1.1.7}$$

□

引理 1.1

设 $f(\xi)$ 在 $z\in\sum$ 满足 μ 次 Hölder 条件, 且 $z'\to z$ 时, h/d 有界, 其中

$$h=|z'-z|,\quad d=\min_{\xi\in\sum}|\xi-z'|, \tag{1.1.8}$$

则

$$\lim_{z'\to z}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z'}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \tag{1.1.9}$$

证明

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z'}\,\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi\\
=&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{(\xi-z)(f(\xi)-f(z))-(\xi-z')(f(\xi)-f(z))}{(\xi-z')(\xi-z)}\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{z'-z}{\xi-z}\cdot\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi\\
=&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{h}{d}M\frac{(\xi-z)^{\mu}}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi=\Delta_1+\Delta_2
\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

其中

$$\begin{aligned}
|\Delta_1|&\le\frac{hM}{2\pi d}\int_{C_\delta}\frac{(\xi-z)^{\mu}}{\xi-z}\,\mathrm{d}|\xi|\le\frac{hM}{2\pi d}\int_0^{\delta}t^{\mu-1}\,\mathrm{d}t=\frac{hM}{2\pi d\delta}\delta^{\mu}(C_\delta=\{|\xi-z|\le\delta\})\\
|\Delta_2|&=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\sum\backslash C_\delta}\frac{(f(\xi)-f(z))(z-z')}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi\right|
\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

由于 $\sum\backslash C_\delta$ 不包含 z, 故 Δ_2 为关于 z' 的连续函数, 则

$$|\Delta_2|=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum\backslash C_\delta}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z'}\,\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2\pi}\int_{\sum\backslash C_\delta}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi\right|<|\Delta_1| \tag{1.1.12}$$

取 $\delta\to0$, 可令 $|\Delta_1|<\frac{\epsilon}{2}$, 故 $|\Delta_1|+|\Delta_2|<\epsilon$ □

定理 1.4 (Plemelj)

设 $z\in\sum$ 为正则点, 且不为边界点, $f(\xi)$ 在 z 点满足 μ 次 Hölder 条件, 且 $z'\to z$ 时, h/d 有界, 其中 $h=|z'-z|,\quad d=\min_{\xi\in\sum}|\xi-z'|$, 则

$$F_+=\lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in\sum_+}}F(z')=F(z)+\frac{1}{2}f(z) \tag{1.1.13}$$

$$F_-=\lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in\sum_-}}F(z')=F(z)-\frac{1}{2}f(z) \tag{1.1.14}$$

证明 首先证明闭区线情形:

$$\begin{aligned}
F_+&=\lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in\sum_+}}F(z')=\lim_{z'-z}\int_{\sum}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{f(\xi)}{\xi-z'}\,\mathrm{d}\xi\\
&=\lim_{z'-z}\int_{\sum}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z'}\,\mathrm{d}\xi+\frac{f(\xi)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{1}{\xi-z'}\,\mathrm{d}\xi\\
&=\lim_{z'-z}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum_+}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z'}\mathrm{d}\xi+f(z)\\
&=\lim_{z'-z}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum_+}\frac{f(\xi)}{\xi-z'}\mathrm{d}\xi-\frac{f(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum_+}\frac{1}{\xi-z'}\mathrm{d}\xi+f(z)\\
&=F(z)+\frac{1}{2}f(z)
\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

$F_-(z')$ 同理, 下证 $\sum$ 为开曲线情形, 则可补充 $\sum'$, s.t. $\sum\cup\sum'$ 为闭曲线, 且定义 $\forall\xi\in\sum'$, $f(\xi)=0$, 则

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum\cup\sum'}\frac{f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi. \tag{1.1.16}$$

则由开曲线情形可得

$$\begin{aligned} F_+(z) &= \lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in+\sum}} \int_{\sum\cup\sum'} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi = \int_{\sum\cup\sum'} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi + \frac{f(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum\cup\sum'}\frac{1}{\xi-z'}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi - \frac{f(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum'}\frac{1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi + f(z) = F(z) + \frac{1}{2}f(z) \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

$F_-(z')$ 同理 □

注 如果 $z\in\sum$ 为一个角点, 在其两切线的夹角为 α, 则可

$$\begin{aligned} F_+(z) &= \lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in D}} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi + \frac{\alpha}{2\pi}f(z) + (1-\frac{\alpha}{2\pi})f(z) \\ &= F(z) - \frac{\alpha}{2\pi}f(z) \end{aligned} \tag{1.1.18}$$

$$\begin{aligned} F_-(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi + \frac{\alpha}{2\pi}f(z) - \frac{\alpha}{2\pi})f(z) \\ &= F(z) - \frac{\alpha}{2\pi}f(z) \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

定义 1.2 (Plemelj 公式)

由 (1.1.13) - (1.1.14), (1.1.18) - (1.1.19) 可以看出, 无论 z 是正则点还是角点, 都有

$$F_+(z) - F_-(z) = f(z), \quad z\in\sum \tag{1.1.20}$$

$$F_+(z) - F_-(z) = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi =: H(f)(z) \tag{1.1.21}$$

称为标量 RH 问题, 其解可用 Cauchy 积分给出

$$F(z) = A + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi, \quad z\in\mathbb{C} \tag{1.1.22}$$

其中 A 为任意常数, 一般被边值或渐进条件决定, 这一公式被称为 Plemelj 公式.

对于如下 RH 问题

$$G_+(z) = G_-(z)v(z), \quad z\in\sum \tag{1.1.23}$$

只需两边取 log 变换则有

$$\log G_+(z) - \log G_-(z) = \log v(z), \quad z\in\sum \tag{1.1.24}$$

由 Plemelj 公式, 则有

$$\log G(z) = A + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{v(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \Longrightarrow G(z) = B\exp\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sum}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\right), \quad z\in\sum \tag{1.1.25}$$

其中 B 为任意常数.

1.2 矩阵 RH 问题

定义 1.3 (RH 问题)

设 $\sum$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 内的有向路径, 假设存在一个 $\sum^0$ 上的光滑映射 $v(z):\sum\to GL(n,\mathbb{C})$, 则 $(\sum,v)$ 决定了一个 RH 问题, 寻找一个 n 阶矩阵 $M(z)$ 满足

$$M(z)\in C, \quad (\mathbb{C}\setminus\sum) \tag{1.2.1}$$

$$M_+(z) = M_-(z)v(z), \quad z\in\sum \tag{1.2.2}$$

$$M(z)\to I, \quad z\to\infty \tag{1.2.3}$$

其中 $M_{\pm}$ 表示在正负区域内 $z' \to z$ 时的极限, $\sum$ 称为跳跃曲线, $v(z)$ 称为跳跃矩阵.

根据 Beadls-Coifman 定理, 如上 RH 问题的解可通过如下方式构造: 不妨设跳跃矩阵 $v(z)$ 具有如下分解

$$v = (b_-)^{-1} b_+ \tag{1.2.4}$$

由此, 可构造

$$w_+ = b_+ - I, \quad w_- = I - b_- \tag{1.2.5}$$

进一步可定义 Cauchy 投影算子

$$(C_{\pm} f)(z) = \lim_{\substack{z' \to z \in \sum \\ z' \in \pm \sum}} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sum} \frac{f(\xi)}{\xi - z'} \mathrm{d}\xi \tag{1.2.6}$$

则可以证明如果 $f(z) \in L^2(\sum)$, 则 $C_{\pm} : L^2 \to L^2$ 的有界算子, 且 $C_+ - C_- = 1$, 再定义算子

$$C_w f = C_+(f w_-) - C_-(f w_+) \tag{1.2.7}$$

则 $C_w : L^2 \cap L^\infty \to L^2$ 的有界算子.

定理 1.5

设 $\det v = 1$, 算子 $I - C_w$ 在 $L^2(\sum)$ 上可逆, $\mu \in I + L^2(\sum)$ 为下列方程

$$(I - C_w)\mu = I \tag{1.2.8}$$

的解, 且

$$(I - C_w)(\mu - I) = C_w I + C_+ w_- + C_- w_+ \in L^2\left(\sum\right) \tag{1.2.9}$$

则

$$M(z) = I + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sum} \frac{\mu(\xi) w(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \tag{1.2.10}$$

为上述 RH 问题的唯一解, RH 问题 $M(z)$ 的可解等价于奇异积分方程 (1.2.8).

证明 只需证明 (1.2.10) 满足 (1.2.8)

$$\begin{aligned} M_+ &= I + \lim_{z' \to z \in \sum} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sum} \frac{\mu(\xi) w(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \overset{(1.2.6)}{=} I + C_+(\mu w) \\ &= I + C_+(\mu w_-) + C_+(\mu w_+) = I + C_+(\mu w_-) + C_-(\mu w_+) + C_+(\mu w_+) + C_-(\mu w_+) \\ &\overset{(1.2.7)}{=} I + C_w(\mu) + \mu w_+ \overset{(1.2.8)}{=} \mu + \mu w_+ = \mu(I + w_+) = \mu b_+ \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

同理有

$$M_-(z) = \mu b_- \tag{1.2.12}$$

故有

$$M_+(z) = \mu b_+ = \mu b_-(b_-)^{-1} b_+ = M_-(z) v(z) \tag{1.2.13}$$

下证唯一性, 先证 M 可逆, 对 (1.2.2) 取行列式, 并注意到 $\det v(z) = 1$, 则 $\det M_+(z) = \det M_-(z)$. 故由 Painleve 开拓定理得 $\det M(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析. 由 (1.2.3) 得

$$\det M(z) \to 1, z \to \infty \tag{1.2.14}$$

故由 Liouville 定理可知 $\det M(z) = c$, 再由渐进条件得 $c = 1$, 故 $M(z)$ 可逆.

设 $\widetilde{M}$ 为上述 RH 问题的另一个解, 则 $\widetilde{M}$ 可逆, 且在 $\mathbb{C} \setminus \sum$ 上解析, 且在 $\sum$ 上满足

$$(M\widetilde{M}^{-1}) = M_+ \widetilde{M}_+^{-1} = M_- v (\widetilde{M}_- v)^{-1} = M_-(\widetilde{M}_-)^{-1} = (M\widetilde{M}^{-1})_- \tag{1.2.15}$$

由 Painleve 开拓定理, $M\widetilde{M}^{-1}$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析. 另外由 $M, \widetilde{M} \to I$, 故 $M\widetilde{M}^{-1}$ 有界, 故为常矩阵. 由渐进性得

$$M\widetilde{M}^{-1} = I \implies M = \widetilde{M} \tag{1.2.16}$$

□

注 由 RH 问题解的唯一性, RH 问题 (1.2.1) - (1.2.3) 的解与跳跃矩阵 $v(z)$ 的分解无关, 因此可以考虑 $v(z)$ 的平凡解

$$b_- = I, \quad b_+ = v \tag{1.2.17}$$

故可构造

$$\begin{gathered} w_- = 0, \quad w_+ = v - I, \quad w = v - I \\ C_w f = C_+(fw_-) + C_-(fw_+) = C_+(f(v - I)), \quad \mu = (I - C_w)^{-1} I \end{gathered} \tag{1.2.18}$$

则 RH 问题的解可表示为

$$M(z) = I + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{+\sum} \frac{\mu(\xi)(v(\xi) - I)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \tag{1.2.19}$$

注 RH 方法的关键思想就是改变积分路径, 通过跳跃矩阵的分解情况, 确定对积分路径进行一系列形变, 再取极限去除跳跃矩阵为单位阵的情形, 将其化解为可解的 RH 问题, 所以一个自然的问题就是: "为什么可以扔掉跳跃矩阵为单位阵的路径? 或者说为什么跳跃矩阵对对 RH 问题的解不产生贡献."

这很容易通过表达式 (1.2.19) 看出, 我们将积分路径分解为 $\sum = \sum_1 + \sum_2$ 且

$$v = \begin{cases} v_1 \neq I & \sum_1, \\ v_1 = I & \sum_2 \end{cases} \tag{1.2.20}$$

则在 $\sum_1$ 上, $v - I = v_1 - I \neq 0$, 在 $\sum_2$ 上, $v - I = v_1 - I = 0$, 故

$$\begin{aligned} M(z) &= I + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sum} \frac{\mu(\xi)(v(\xi) - I)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \\ &= I + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sum_1} \frac{\mu(\xi)(v_1(\xi) - I)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sum_2} \frac{\mu(\xi)(v_2(\xi) - I)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \\ &= I + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sum_1} \frac{\mu(\xi)(v_1(\xi) - I)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

易得 RH 问题 $(\sum, v(z))$ 的解与 $(\sum_1, v_1(z))$ 的解相同, 即跳跃矩阵为单位阵的路径 $\sum_2$ 对 RH 问题的解无贡献, 可以舍去. 只求 $\sum_1$ 上的 RH 问题

第 2 章 RH 方法求解零边界的 NLS 方程

本章节我们以聚焦 NLS 方程为例, 介绍 RH 方法求解零边界非线性偏微分方程的基本步骤. 主要参考复旦大学范恩贵老师的讲义 [4].

2.1 聚焦 NLS 方程

对于二阶 AKNS 系统, 为表示方便, 我们引入 Pauli 矩阵

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

下文如无特别声明, 默认 $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ 表示 Pauli 矩阵.

2.1.1 特征函数

考虑聚焦 NLS 方程的初值问题

$$\mathrm{i}q_t(x,t) + q_{xx}(x,t) + 2q(x,t)|q(x,t)|^2 = 0 \tag{2.1.2}$$

$$q(x,0) = q_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \tag{2.1.3}$$

其中 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 表示 Schwartz 空间. NLS 方程 (2.1.2) 具有如下矩阵形式的 Lax 对

$$\psi_x = -\mathrm{i}z\sigma_3\psi + P\psi \tag{2.1.4}$$

$$\psi_t = -2\mathrm{i}z^2\sigma_3\psi + Q\psi \tag{2.1.5}$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} & q \\ -q^* & \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \mathrm{i}|q|^2 & \mathrm{i}q_x \\ \mathrm{i}q_x^* & -\mathrm{i}|q|^2 \end{pmatrix} + 2zP$$

满足零曲率方程 $U_t - V_x + [U, V] = 0$, 即

$$(P - \mathrm{i}z\sigma_3)_t - \left(Q - 2\mathrm{i}z^2\sigma_3\right)_x + \left[P - \mathrm{i}z\sigma_3, Q - 2\mathrm{i}z^2\sigma_3\right] = 0 \tag{2.1.6}$$

2.1.2 渐进性

由于 $q_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 且 $q(x,t), q_x(x,t) \to 0, (x \to \infty)$, 故 x 足够大时, P, Q 可忽略, 从而 Lax 对 (2.1.4) - (2.1.5) 可近似为

$$\psi_x \sim -\mathrm{i}z\sigma_3\psi, \quad \psi_t \sim -2\mathrm{i}z^2\sigma_3\psi$$

可得渐进形式的 Jost 解 $\psi = e^{-\mathrm{i}\theta(z)\sigma_3}, (x \to \infty)$, 其中 $\theta(z) = zx + 2z^2t$. 下面为表示方便, 不妨记 $E := e^{\mathrm{i}\theta(z)\sigma_3}$, 做变换 $\mu(x,t,z) = \psi(x,t,z)E$, 则有

$$E^{-1} = e^{-\mathrm{i}\theta(z)\sigma_3}, \quad \mu(x,t,z) \to I(x \to \infty) \tag{2.1.7}$$

则可得

$$\mu_x = \psi_x E + \psi E(\mathrm{i}\sigma_3 z) \tag{2.1.8}$$

$$\mu_t = \psi_t E + \psi E(2\mathrm{i}\sigma_3 z^2) \tag{2.1.9}$$

带入 Lax 对 (2.1.4) - (2.1.5) 可得

$$\mu_x = (P\psi - \mathrm{i}z\sigma_3\psi)E + \psi E(\mathrm{i}\sigma_3 z) \tag{2.1.10}$$

$$\mu_t = (Q\psi - 2\mathrm{i}z^2\sigma_3\psi)E + \psi E(2\mathrm{i}\hat{\sigma}_3 z^2) \tag{2.1.11}$$

故有

$$\mu_x = P\mu - \mathrm{i}z[\sigma_3, \mu] \implies \mu_x + \mathrm{i}z[\sigma_3, \mu] = P\mu \tag{2.1.12}$$

同理可得

$$\mu_t + 2\mathrm{i}z^2[\sigma_3, \mu] = Q\mu \tag{2.1.13}$$

由 (2.1.12) 式可得

$$\mu_x + \mathrm{i}z\hat{\sigma}\mu = P\mu \tag{2.1.14}$$

$$e^{\mathrm{i}\theta(z)\hat{\sigma}_3}\mu_x + \mathrm{i}z\hat{\sigma}_3 e^{\mathrm{i}\theta(z)\hat{\sigma}_3}\mu = e^{\mathrm{i}\theta(z)\hat{\sigma}_3}P\mu \tag{2.1.15}$$

其中 $\hat{\sigma}_3 X = [\sigma_3, X], e^{\mathrm{i}\theta(z)\hat{\sigma}_3}X = EXE^{-1}$, 为表示方便不妨记 $\hat{E} = e^{\mathrm{i}\theta(z)\hat{\sigma}_3}$. 易得 Lax 对的全微分形式

$$\mathrm{d}(\hat{E}\mu) = \hat{E}[(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}t)\mu] \tag{2.1.16}$$

为构造规范的 Riemann-Hilbert 问题, 即其解在 $z \to \infty$ 时渐进于单位阵, 现只需证明 $\mu \to I(z \to \infty)$.

证明 将 μ 在无穷远点 Taylor 展开

$$\mu = \mu^{(0)} + \frac{1}{z}\mu^{(1)} + \cdots = \mu^{(0)} + O(z^{-1}) \tag{2.1.17}$$

其中 $\mu^{(0)}, \mu^{(1)}$ 与 z 无关, 将上式代入 (2.1.12), (2.1.13) 比较 z 的次数可得

$$\begin{aligned} &\left[\mu^{(0)} + O(z^{-1})\right]_x + \mathrm{i}z\left[\sigma_3, \mu^{(0)} + \frac{\mu^{(1)}}{z} + O(z^{-2})\right] = P\left[\mu^{(0)} + O(z^{-1})\right] \\ &[\mu^{(0)} + O(z^{-1})]_t + 2\mathrm{i}z^2\left[\sigma_3, \mu^{(0)} + \frac{\mu^{(1)}}{z} + O(z^{-2})\right] = (Q_0 + 2zP)[\mu^{(0)} + O(z^{-1})] \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

可得 x 部分:

$$\left.\begin{aligned} z: &\quad [\sigma_3, \mu^{(0)}] = 0 \\ z^0: &\quad \mu^{(0)} + 2\mathrm{i}z[\sigma_3, \mu^{(1)}] = P\mu^{(0)} \end{aligned}\right. \implies \mu^{(0)}\text{为对角阵} \tag{2.1.19}$$

t 部分:

$$\left.\begin{aligned} z^2: &\quad [\sigma_3, \mu^{(0)}] = 0 \\ z: &\quad \mathrm{i}[\sigma_3, \mu^{(1)}] = P\mu^{(0)} \end{aligned}\right. \implies \mu_x^{(0)} = 0 \tag{2.1.20}$$

故 $\mu^{(0)}$ 为与 x 无关的对角矩阵, 因此 (2.1.17) 式对 x, z 同时取极限, 并交换极限顺序可得

$$\lim_{z\to\infty}\lim_{x\to\infty}\mu = \lim_{x\to\infty}\lim_{z\to\infty}\left(\mu^{(0)} + O(z^{(-1)})\right) \tag{2.1.21}$$

利用 (2.1.7), (2.1.17) 式可得 $\mu^{(0)} = I$, 故 $\mu \to I(z \to \infty)$. □

再将 $\mu^{(0)} = I$ 带入 (2.1.20) 式比较矩阵对角元素得

$$q(x,t) = 2\mathrm{i}(\mu^{(1)})_{12} = 2\mathrm{i}\lim_{z\to\infty}(z\mu)_{12} \tag{2.1.22}$$

注 上式可将 NLS 方程与特征函数联系起来, 接下来将特征函数与 RH 问题建立联系. 从而 NLS 方程的解可用 RH 问题的解表示, 然后通过 RH 问题反接触 NLS 方程的解, 即

$$NLS \rightleftharpoons \text{特征函数} \rightleftharpoons RH\text{问题}$$

2.2 解析性与对称性

由于 (2.1.16) 为全微分形式, 积分与路径无关, 故选择两个特殊路径:

$$(-\infty, t) \to (x, t), \quad (+\infty, t) \to (x, t)$$

因此可获得 Lax 对 (2.1.12), (2.1.13) 的两个特征函数

$$\mu_1 = I + \int_{-\infty}^{x} e^{-\mathrm{i}z(x-y)\sigma_3}P\mu_1\mathrm{d}x, \quad \mu_2 = I - \int_{+\infty}^{x} e^{-\mathrm{i}z(x-y)\sigma_3}P\mu_2\mathrm{d}x \tag{2.2.1}$$

证明 由 (2.1.16) 式, 由 $(\hat{E}\mu)_x = \hat{E}P\mu$ 可得

$$\hat{E}\mu|_{-\infty}^{x} = \int_{-\infty}^{x} \hat{E}P\mu \mathrm{d}y \tag{2.2.2a}$$

$$LHS = \hat{E}\mu - \hat{E}I, \quad RHS = \int_{-\infty}^{x} e^{\mathrm{i}(zy+z^2t)\hat{\sigma}_3} P\mu \mathrm{d}y \tag{2.2.2b}$$

两边同时乘以 $\hat{E}^{-1}$, 即得 μ_1, 同理可得 μ_2 . □

显然, 其仍具有如下性质

$$\mu_1, \mu_2 \to I(x \to \pm\infty), \quad \mu_1, \mu_2 \to I(z \to +\infty) \tag{2.2.3}$$

由于 $\psi_1 = \mu_1 E^{-1}, \psi_2 = \mu_2 E^{-1}$, 为 Lax 对的两个解, 而 Lax 对为一节齐次线性方程组, 故这两个解线性相关, 故有

$$\mu_1(x,t,z) = \mu_2(x,t,z)\hat{E}S(z), \quad S(z) = \begin{pmatrix} S_{11}(z) & S_{12}(z) \\ S_{21}(z) & S_{22}(z) \end{pmatrix} \tag{2.2.4}$$

其中矩阵 $S(z)$ 与 x, t 无关, 称为谱函数矩阵.

再由 $\mu = \psi E$ 可知 $\det(\mu_j) = \det(\psi_j)$. 又因为 $tr(P - \mathrm{i}z\sigma_3) = tr(Q - 2\mathrm{i}z^2\sigma_3) = 0$, 由 Abel 定理可得

$$\det(\psi_j)_x = \det(\psi_j)_t = 0 \tag{2.2.5}$$

故有 $\det(\mu_j)_x = \det(\mu_j)_t = 0$, 这说明 $\det(\mu_j)$ 与 x, t 无关, 再由渐进性可得

$$\det(\mu_j) = \lim_{|x|\to\infty} \det(\mu_j) = 1, \quad (j = 1, 2) \tag{2.2.6}$$

故对 (2.2.4) 两边取行列式有 $\det S(z) = 1$.

2.2.1 解析性

下面我们考虑特征函数 μ_1, μ_1 和谱矩阵 $S(z)$ 的解析性, 记 μ_1 的第一二列分别为

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} \mu_1^{11} & \mu_1^{12} \\ \mu_1^{21} & \mu_1^{22} \end{pmatrix} = (\mu_1^+, \mu_1^-) \tag{2.2.7}$$

则由积分方程 (2.2.1) 可得如下 Voltarra 积分方程

$$\mu_1^+(x,t,z) = (1,0)^T - \int_{-\infty}^{x} \begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{\mathrm{i}z(x-y)} \end{pmatrix} P\mu_1^+ \mathrm{d}y \tag{2.2.8}$$

$$\mu_1^-(x,t,z) = (0,1)^T - \int_{-\infty}^{x} \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}z(x-y)} & \\ & 1 \end{pmatrix} P\mu_1^- \mathrm{d}y \tag{2.2.9}$$

对于上面两方程, 由于积分变量 $y < x$, 可得

$$e^{2\mathrm{i}Z(x-y)} = e^{2\mathrm{i}(x-y)\mathrm{Re}(z)}e^{-2\mathrm{i}(x-y)\mathrm{Im}(z)}, \quad e^{-2\mathrm{i}Z(x-y)} = e^{-2\mathrm{i}(x-y)\mathrm{Re}(z)}e^{2\mathrm{i}(x-y)\mathrm{Im}(z)}$$

因此当 $q(x) \in L^1(\mathbb{R})$ 时, 通过构造序列与 Neumann 级数, 可得 μ_1^+, μ_1^- 分别在 $\mathbb{C}_\pm$ 解析性.

注 上面 Voltarra 积分的推导: 考虑到 $e^{\hat{\sigma}_3}X = e^{\sigma_3}Xe^{-\sigma_3}$, 故有

$$\begin{aligned} \mu_1 &= I + \int_{-\infty}^{x} e^{-\mathrm{i}z(x-y)\hat{\sigma}_3} P\mu_1 \mathrm{d}y = I + \int_{-\infty}^{x} e^{-\mathrm{i}z(x-y)\sigma_3} P e^{\mathrm{i}z(x-y)\sigma_3} \mu_1 \mathrm{d}y \\ &= I + \int_{-\infty}^{x} \begin{pmatrix} & qe^{2\mathrm{i}z(x-y)} \\ -q^* e^{-2\mathrm{i}z(x-y)} & \end{pmatrix} \mu \mathrm{d}y \end{aligned}$$

故 $\mu_1^+ =, \quad \mu_1^- =$

证明 下证 μ_1^+ 的解析性.

Step1. 解的存在性: 事实上方程 (2.2.8) 有如下 Neumann 级数分解

$$\mu_1^+ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x,z), \quad c_{n+1} = \int_{-\infty}^{x} \begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{\mathrm{i}z(x-y)} \end{pmatrix} Pc_n(y,z)\mathrm{d}y \tag{2.2.10}$$

其分量形式为

$$c_{n+1}^{(1)}(x,z)=\int_{-\infty}^{x} q(y)c_n^{(2)}(y,z)\mathrm{d}y,\quad c_{n+1}^{(2)}(x,z)=\int_{-\infty}^{x} e^{2\mathrm{i}z(x-y)}p(y)c_n^{(1)}(y,z)\mathrm{d}y \tag{2.2.11}$$

其中 $c_{n+1}=(c_{n+1}^{(1)},c_{n+1}^{(2)})^T, p=-q^*$. 由 $c_0^{(2)}=0 \implies c_{2n+1}^{(1)}=c_{2n}^{(2)}=0$, 故上面方程可简化为

$$c_{2n}^{(1)}(x,z)=\int_{-\infty}^{x} q(y)c_{2n-1}^{(2)}(y,z)\mathrm{d}y,\quad c_{2n+1}^{(2)}(x,z)=\int_{-\infty}^{x} e^{2\mathrm{i}z(x-y)}p(y)c_{2n}^{(1)}(y,z)\mathrm{d}y \tag{2.2.12}$$

对上面方程组进一步简化, 引入如下恒等式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{j!}\int_{-\infty}^{x}|f(\xi)|\left[\int_{-\infty}^{\xi}|f(\eta)|\right]^{j}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{(j+1)!}\int_{-\infty}^{x}\frac{d}{d\xi}\left[\int_{-\infty}^{\xi}|f(\eta)|\right]^{j+1}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{(j+1)!}\left[\int_{-\infty}^{x}|f(\xi)|d\xi\right]^{j+1}\qquad (f\in L^1(\mathbb{R}))\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

利用归纳法可证明当 $\mathrm{Im}(z)>0$ 时, 有

$$|c_{2n+1}^{(2)}|=\frac{u^{n+1}(x)}{(n+1)!}\frac{v^n(x)}{n!},\quad |c_{2n}^{(1)}|=\frac{u^n(x)}{n!}\frac{v^n(x)}{n!} \tag{2.2.14}$$

其中

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x}|p(y)|\mathrm{d}y,\quad v(x)=\int_{-\infty}^{x}|q(y)|\mathrm{d}y \tag{2.2.15}$$

事实上, 当 $\mathrm{Im}(z)>0$ 时, $|e^{2\mathrm{i}z(x-y)}|\le 1$, 利用 $c_0^{(1)}=1$, 由 (2.2.14) 可得

$$c_1^{(2)}(x,y)=\int_{-\infty}^{x} e^{2\mathrm{i}z(x-y)}p(y)\mathrm{d}y,\quad c_2^{(1)}(x,y)=\int_{-\infty}^{x} e^{2\mathrm{i}z(x-y)}q(y)c_1^{(2)}\mathrm{d}y \tag{2.2.16}$$

又由 $u(x)\ge 0, v(x)\ge 0$, 有 $c_1^{(2)}\le v(x)$

$$\begin{aligned}|c_2^{(1)}(x,y)\le&\int_{-\infty}^{x}|q|c_1^{(2)}(y,z)\mathrm{d}y\le\int_{-\infty}^{x}|q|v(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{x}v'(y)u(y)\mathrm{d}y\\=&\,u(x)v(x)-\int_{-\infty}^{x}u'(y)v(y)\mathrm{d}y\le u(x)v(x)\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

进而可得

$$\begin{aligned}|c_3^{(2)}(x,z)|\le&\int_{-\infty}^{x}|p|c_2^{(1)}(y,z)\mathrm{d}y\le\int_{-\infty}^{x}|p|u(y)v(y)\mathrm{d}y\\\le&\int_{-\infty}^{x}u'(y)u(y)v(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}u^2(x)v(x)-\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}u^2(x)v'(x)\mathrm{d}y\le\frac{1}{2}u^2(x)v(x)\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

不妨设对于 $k\le l$ 时满足 $|c_{2l+1}^{(2)}|\le\frac{u^{l+1}(x)}{(l+1)!}\frac{v^l(x)}{l!}, |c_{2l}^{(1)}|\le\frac{u^l(x)}{l!}\frac{v^l(x)}{l!}$, 下证对于 $k=l+1$ 仍成立, 利用 (2.2.13) 式可得

$$|c_{2l+2}^{(1)}|\le\int_{-\infty}^{x}|q(y)|\frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!}\frac{v^l(y)}{l!}\mathrm{d}y\le\int_{-\infty}^{x}v'(y)\frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!}\frac{v^l(y)}{l!}\mathrm{d}y=\frac{u^{l+1}}{(l+1)!}\frac{v^{l+1}}{(l+1)!} \tag{2.2.19}$$

及

$$|c_{2l+3}^{(2)}|\le\int_{-\infty}^{x}|p(y)|\frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!}\frac{v^l(y)}{l!}\mathrm{d}y\le\int_{-\infty}^{x}u'(y)\frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!}\frac{v^l(y)}{l!}\mathrm{d}y=\frac{u^{l+2}}{(l+2)!}\frac{v^{l+1}}{(l+1)!} \tag{2.2.20}$$

从而上述 (2.2.12) 式得证. 注意到 $|q(x)|=|p(x)|$, 则 $v(x)=u(x)$, 故 (2.2.12) 式可化简为

$$|c_{2n+1}^{(2)}|\le\frac{u^{2n+1}}{n!(n+1)!},\quad |c_{2n}^{(1)}|\le\frac{u^{2n}}{n!n!} \tag{2.2.21}$$

当 $q\in L^1(\mathbb{R})$ 时, 有 $u(x)$ 的上述级数均收敛, 故 Neumann 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x,z)$ 绝对收敛, 此时 μ_1^+ 在 $Imz>0$ 上解析, 且在 $Imz\ge 0$ 上连续.

Step2. 解的唯一性: 不妨设 $\tilde{\mu}_1^+$ 为方程 (2.2.8) 的另一个解, 不妨设 $h=\mu_1^+-\tilde{\mu}_1^+$, 则有

$$\|h(x,t,z)\|=\left\|\int_{-\infty}^{x}\begin{pmatrix}1&\\&e^{\mathrm{i}z(x-y)}\end{pmatrix}Ph\mathrm{d}y\right\|\le 2\int_{-\infty}^{x}|q|\|h\|\mathrm{d}y\implies\|h(x,t,z)\|\equiv 0 \tag{2.2.22}$$

故 μ_1^+ 为方程的唯一解, 同理可得 μ_1^- 的解析性. □

所以可得 μ_1^+,μ_1^- 分别在 $\mathbb{C}_+,\mathbb{C}_-$ 上解析. 同理可得 μ_2 的第一二列分别在 $\mathbb{C}_-,\mathbb{C}_+$ 上解析. 记作

$$\mu_2=\begin{pmatrix}\mu_2^{(11)} & \mu_2^{(12)}\\ \mu_2^{(21)} & \mu_2^{(22)}\end{pmatrix}=(\mu_2^-,\mu_2^+)$$

由 (2.2.6) 可知, μ_1,μ_2 可逆, 且逆矩阵为其伴随阵, 另外基于 μ_1,μ_2 的列向量函数的解析性, 可得 μ_1^{-1} 的第一二行在 $\mathbb{C}_-,\mathbb{C}_+$ 上解析, μ_2^{-1} 的第一二行在 $\mathbb{C}_+,\mathbb{C}_-$ 上解析. 记为

$$\mu_1^{-1}=\begin{pmatrix}\mu_1^{(22)} & -\mu_1^{(21)}\\ -\mu_1^{(12)} & \mu_1^{(11)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\hat{\mu_1^-}\\ \hat{\mu_1^+}\end{pmatrix},\quad \mu_2^{-1}=\begin{pmatrix}\mu_2^{(22)} & -\mu_2^{(21)}\\ -\mu_2^{(12)} & \mu_2^{(11)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\hat{\mu_2^+}\\ \hat{\mu_2^-}\end{pmatrix} \tag{2.2.23}$$

利用 (2.2.4), (2.2.7), (2.2.23) 可得谱函数 $S(z)$ 的解析性

$$S(z)=\mu_2^{-1}\mu_1=\begin{pmatrix}-\hat{\mu_2^+}\\ \hat{\mu_2^-}\end{pmatrix}(\mu_1^+,\mu_1^-)=\begin{pmatrix}-\hat{\mu_2^+}\mu_1^+ & -\hat{\mu_2^+}\mu_1^-\\ \hat{\mu_2^-}\mu_1^+ & \hat{\mu_2^-}\mu_1^-\end{pmatrix} \tag{2.2.24}$$

可见 $S_{11}(z)$ 在 $\mathbb{C}_+$ 解析, $S_{22}(z)$ 在 $\mathbb{C}_-$ 解析, S_{12},S_{21} 在 $\mathbb{C}_+,\mathbb{C}_-$ 均不解析, 但连续到边界.

2.2.2 对称性

定理 2.1

如上构造的特征函数 μ_1,μ_2 与谱函数 $S(z)$ 具有如下对称性

$$\mu_j^\dagger(x,t,z^*)=\mu_j^{-1}(x,t,z),\quad S^\dagger(z^*)=S^{-1}(z)\quad (j=1,2) \tag{2.2.25}$$

证明 由 (2.1.12) 有

$$\mu_{j,x}(x,t,z)=\mathrm{i}z[\sigma_3,\mu_j(x,t,z)]=P\mu_j(x,t,z) \tag{2.2.26}$$

将 z 替换为 z^*, 并在两边同时取 Hermite 共轭, 则有

$$\mu_{j,x}^\dagger(x,t,z^*)+\mathrm{i}z[\sigma_3,\mu_j^\dagger(X,t,z^*)]=\mu_j^\dagger(x,t,z^*)P^\dagger \tag{2.2.27}$$

由于 $P^\dagger=-P$, 故上式可化为

$$\mu_{j,x}^\dagger(x,t,z^*)+\mathrm{i}z[\sigma_3,\mu_j^\dagger(X,t,z^*)]=-\mu_j^\dagger(x,t,z^*)P \tag{2.2.28}$$

另外对于 $\mu_j\cdot\mu_j^{-1}=I$ 对 x 求偏导有

$$\mu_{j,x}\mu_j^{-1}+\mu_j\mu_{j,x}^{-1}=0\implies \mu_{j,x}^{-1}=-\mu_j^{-1}\mu_{j,x}\mu_j^{-1} \tag{2.2.29}$$

将 (2.2.26) 带入上式有

$$\mu_{j,x}^{-1}=-\mu_j^{-1}(P\mu_j(x,t,z)-\mathrm{i}z[\sigma_3,\mu_j(x,t,z)]\mu_j^{-1}(x,t,z)\implies \mu_{j,x}^{-1}+\mathrm{i}z[\sigma_3,\mu_j^{-1}]=\mu_j^{-1}P \tag{2.2.30}$$

由 (2.2.8), (2.2.10) 可得 $\mu_j^\dagger,\mu_j^{-1}$ 满足相同的一次线性微分方程, 具有相同的渐进性, 又因为

$$\mu_j^\dagger(x,t,z^*),\mu_j^{-1}(x,t,z)\to I,\quad |x|\to\infty \tag{2.2.31}$$

因此两者相等, 得到对称关系 $\mu_j^\dagger(x,t,z^*)=\mu_j^{-1}(x,t,z),(j=1,2)$. 接下来考虑 S 的对称性, 将 (2.2.4) 式改写为

$$S(z)=e^{\mathrm{i}\theta(z)\hat{\sigma}_3}(\mu_2^{-1}\mu_1)=\hat{E}(\mu_2^{-1}\mu_1) \tag{2.2.32}$$

由 (2.2.31) 可得如下

$$S(z^*)^\dagger=e^{\mathrm{i}\theta(z^*)\sigma_3}(\mu_2^{-1}\mu_1)e^{-\mathrm{i}\theta(z^*)}=E\mu_2^{-1}\mu_1E^{-1}=E\mu_1^\dagger(\mu_2^{-1})^\dagger E^{-1}=E\mu_1^\dagger\mu_2E^{-1}=S(z)^{-1} \tag{2.2.33}$$

比较对应元素, 有

$$S_{11}^*(z^*)=S_{22}(z),S_{12}^*(z^*)=-S_{21}(z) \tag{2.2.34}$$

□

2.3 相关的 RH 问题

2.3.1 规范 RH 问题

基于 2.2 节的结论, 我们构造 RH 问题, 引入记号

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

并定义两个矩阵

$$\begin{aligned} P_+(x,t,z) &= \mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 = \begin{pmatrix} \mu_1^{(11)} & \mu_2^{(12)} \\ \mu_1^{(21)} & \mu_2^{(22)} \end{pmatrix} = (\mu_1^+, \mu_2^+) \\ P_-(x,t,z) &= H_1\mu_1^{-1} + H_2\mu_2^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1^{(22)} & -\mu_1^{(12)} \\ -\mu_2^{(21)} & \mu_2^{(11)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1^- \\ \hat{\mu}_2^- \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

则由 $\mu_j, \mu_j^{-1}(j=1,2)$ 的解析性与渐进性, 直接可得 P_+ 在 $\mathbb{C}_+$ 上解析, P_- 在 $\mathbb{C}_-$ 上解析, 且具有如下渐进性

$$P_+, P_- \to I \quad |x| \to \infty \tag{2.3.3}$$

由此可证明如下对称关系

定理 2.2

$P_+(x,t,z), P_-(x,t,z)$ 具有如下对称性

$$P_+^\dagger(x,t,z^*) = P_-(x,t,z) \tag{2.3.4}$$

证明 利用 (2.2.31) 可得

$$\begin{aligned} P_+^\dagger(x,t,z^*) &= (\mu_1(x,t,z)H_1 + \mu_2(x,t,z)H_2)^\dagger = H_1\mu_1^\dagger(z^*) + H_2\mu_2^\dagger(z^*) \\ &= H_1\mu_1^{-1}(x,t,z) + H_2\mu_2^{-1}(x,t,z) = P_-(x,t,z) \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

□

定义 2.1

概括上面结果, 我们可以得到下面 RH 问题

$$P_\pm(x,t,z) \in C(\mathbb{C}_\pm) \tag{2.3.6}$$

$$P_- P_+ = G(x,t,z) \quad z \in \mathbb{R} \tag{2.3.7}$$

$$P_\pm \to I \quad z \to \infty \tag{2.3.8}$$

其中跳跃矩阵为

$$G(x,t,z) = \hat{E}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -S_{12}(z) \\ S_{21}(z) & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3.9}$$

进一步 NLS 方程的解 $q(x,t)$ 可由 RH 问题的解给出

$$q(x,t) = 2\mathrm{i} \lim_{z\to\infty} (zP_+)_{12} = 2\mathrm{i}(P_+^{(1)})_{12} \tag{2.3.10}$$

其中 $P_+ = I + \frac{P_+^{(1)}}{z} + O(z^{-2})$

证明 只需证明跳跃关系即可, 注意到 $\hat{E}H_j = H_j, (j=1,2)$ 可得

$$\begin{aligned} G = P_- P_+ &= (H_1\mu_1^{-1} + H_2\mu_2^{-1})(\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2) \\ &\overset{(2.2.4)}{=} [H_1(\hat{E}^{-1}S^{-1})\mu_2^{-1} + H_2\mu_2^{-1}][\mu_2(\hat{E}^{-1}S)H_1 + \mu_2 H_2] \\ &= \hat{E}^{-1}[(H_1 S^{-1} + H_2)(SH_1 + H_2)] = \hat{E}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -S_{12}(z) \\ S_{21}(z) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\det(P_+) &= \det(\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2) = \det(\mu_2 \hat{E}^{-1} S) H_1 + \mu_2 H_2) \\ &= \det(\mu_2)\det((\hat{E}^{-1} S) H_1 + \mu_2 H_2) = S_{11}(z)\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

同理, 有 $\det(P_-) = S_{22}(z)$ □

2.3.2 RH 问题的可解性

下面分两种情况讨论 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 的解

Case1. 如果

$$\det P_\pm(z) \neq 0 (\forall z \in \mathbb{C}), \tag{2.3.13}$$

则称 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 为正则的, 将方程 (2.3.7) 改写为

$$P_+^{-1} - P_- = (I - G) P_+^{-1} := \hat{C} P_+^{-1} \tag{2.3.14}$$

由 Plemelj 公式可得

$$P_+ = I + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{C}(x,t,z) P_+^{-1}(x,t,z)}{s - z} \mathrm{d}s, \quad z \in \mathbb{C}_+ \tag{2.3.15}$$

Case2. 如果条件 (2.3.13) 不满足, 则称 RH 问题为非正则的, 假设 $\det P_\pm$ 在某些离散的点处为零, 由谱函数对称性 (2.2.34) 有

$$\det P_+(z) = S_{11}(z) = S_{22}^*(z^*) = \det P_-^*(z^*) = \det P_-(z^*) \tag{2.3.16}$$

故

$$\det P_+(z) = 0 \iff \det P_-(Z^*) = 0, \tag{2.3.17}$$

因此 $\det P_+(z)$ 与 $\det P_-(z)$ 有相同的零点个数, 且彼此共轭. 即若设 $z_j (j = 1, 2, \ldots, N)$ 为 $\det P_+(z)$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上的单零点, 则 $z_j^* (j = 1, 2, \ldots, N)$ 为 $\det P_-(z)$ 在 $\mathbb{C}_-$ 上的单零点.

由于 $\det P_+(z_j) = \det P_-(z_j^*) = 0$, 假设 w_j, w_j^* 分别为下列线性方程组的解

$$P_+(z_j) w_j(z_j) = 0, \quad w_j^*(z_j^*) P_-(z_j^*) = 0 \tag{2.3.18}$$

对上式取共轭转置, 则有 $w_j^\dagger(z_j) P_+^\dagger(z_j) = 0$, 再利用对称性 (2.3.4) 有

$$w_j^\dagger(z_j) P_-(z_j^*) = 0 \tag{2.3.19}$$

比较可得 $w_j^\dagger(z) = w_j^*(z^*)$.

非正则 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 的解可由下面定理给出

定理 2.3 (Zakharov, Shabat, 1979)

带有零点结构 (2.3.18) 的非正则 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 可分解为

$$P_+(z) = \hat{P}_+(z)\Gamma(z), \quad P_-(z) = \Gamma^{-1}(z)\hat{P}_-(z) \tag{2.3.20}$$

其中

$$\Gamma(z) = I + \sum_{k,j=1}^{N} \frac{w_k (M^{-1})_{kj} w_j^*}{z - z_j^*}, \quad \Gamma(z)^- = I - \sum_{k,j=1}^{N} \frac{w_k (M^{-1})_{kj} w_j^*}{z - z_k} \tag{2.3.21}$$

这里 M 为 $N \times N$ 矩阵, 其 $(k.j)$ 元素由下式给定

$$M_{kj} = \frac{w_k^* w_j}{z_k^* - z_j}, \quad k, j = 1, 2, \ldots, N, \quad \det \Gamma(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z - z_k}{z - z_k^*} \tag{2.3.22}$$

而 $\hat{P}_\pm$ 为正则 RH 问题的唯一解, 且

1. $\hat{P}_\pm$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上解析,
2. $\hat{P}_- \hat{P}_+ = \Gamma(z) G \Gamma^{-1}(z), z \in \mathbb{R}$

3. $\hat{P_{\pm}}(z) \to I, \quad z \to \infty,$

证明 非正则 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 是由于 $2N$ 个离散谱上的 $\det P_+(z_j) = \det P_-(Z_{j^*}) = 0 (j = 1, 2, \ldots N)$ 造成的. 所以主要任务是消除这些零点结构, 并且去除 $P_+(z_j), P_-(z_j^*)$ 在 z_j, z_j^* 上的零点结构, 为此需定义单极点矩阵

$$\Gamma_1(z) = I + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1^*} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} \tag{2.3.23}$$

其具有如下性质

$$\begin{aligned}
&F_1^{-1}(z) = I - \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} \\
&\det \Gamma_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_1^*}, \quad \det \Gamma_1^{-1}(z) = \frac{z - z_1^*}{z - z_1} \\
&\Gamma_1(z_1) w_1 = w_1 + \frac{z_1^* - z_1}{z_1 - z_1^*} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} \cdot w_1 = \frac{z^* - z_1}{z - z_1^*} \frac{w_1(w_1^* w_1)}{w^* w_1} = w_1 - w_1 = 0 \\
&w_1^* \Gamma_1^{-1}(z_1^*) = w_1^* - \frac{z_1^* - z_1}{z^* - z_1} \cdot \frac{w_1^* w_1}{w_1^* w_1} \cdot w_1^* = w_1^* - w_1^* = 0
\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

令 $x_j = \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1}$, 则 x_j 为投影算子, 即 $x_j^2 = x_j$, 由上定义知 x_j 为一阶矩阵, 故与矩阵 $\mathrm{diga}\{1, 0\}$ 相似, 既有可逆阵 T_j 使得 $T_j^{-1} x_j T_j = \mathrm{diag}\{1, 0\}$, 从而有

$$\Gamma_1(z) = \det\left(I + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1^*} T_j^{-1} X_j T_j\right) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1^*} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{z - z_1}{z - z_1^*} \tag{2.3.25}$$

定义矩阵函数 $R_1^+(z) = P_+(z)\Gamma_+^{-1}(z), R_1^{-1} = \Gamma_1(z) P_-(z)$, 由 (2.3.18) - (2.3.19) 知

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{z=z_1} R_1^+(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_1} \left(P_+(z) - P_+(z) \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1}\right) = -\frac{z_1^* - z_1}{w_1 w_1^*} (P_+(z) w_1) w_1^* = 0 \\
&\operatorname*{Res}_{z=z_1^*} R_1^{-1}(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_!^*} \left(P_1(z) + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} P_-(z)\right) = -\frac{z_1^* - z_1}{w_1^* w_1} w_1(w_1^* P_-(z_1^*)) = 0
\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

因此 $R_1^+(z), R_1^-(z)$ 分别在 $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ 上解析, 且

$$\begin{aligned}
\det R_1^+(z_1) &= \lim_{z \to z_1} \left[\det P_+(z) \cdot \det \Gamma_1^{-1}(z)\right] = \lim_{z \to z_1} S_{11}(z) \frac{z - z_1^*}{z - z_1} \\
&= \lim_{z \to z_1} \frac{S_{11}(z) - S_{11}(z_1)}{z - z_1} (z - z^*) \Leftarrow (S_{11}(z) = 0) \\
&= \lim_{z \to z_1} S'_{11}(z)(z - z_1^*) = 0 \\
\det R_1^{-1}(z_1^*) &= \lim_{z \to z_1^*} [\det \Gamma_1(z) \cdot \det P_-(z)] = \lim_{z \to z_1^*} \frac{z - z_1}{z - z_1^*} S_{22}(z) = \lim_{z \to z_1^*} S'_{22}(z)(z - z_1) = 0
\end{aligned} \tag{2.3.27}$$

这说明 $R_1^+(z), R_1^-(z)$ 分别在 $z = z_1, z = z_1^*$ 不再具有零点结构, 然后去除其在 z_2, z_2^* 上的零点结构, 由于

$$\begin{aligned}
\det R_1^+(z_2) = \det P_+(z_2) \det \Gamma_1^{-1}(z_2) = S_{11}(z_2) \frac{z_2 - z_1^*}{z_2 - z_1} = 0 \\
\det R_1^{-1}(z_2^*) = \det \Gamma_1(z_2^*) \det P_-(z_2^*) = \frac{z_2^* - z_1}{z_2^* - z_1} S_{22}(z_2^*) = 0
\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

因此, 下列齐次线性方程组有非零解, 即存在 $v_2(z_2), v_2^*(z_2^*)$, 使得

$$R_1^+(z_2) v(z_2) = P_+(z_2) \Gamma_1^{-1}(z_2) v_2(z_2) = 0, \quad v_2^*(z_2^*) R_1^{-1}(z_2^*) = v_2^*(z_2^*) \Gamma_1(z_2^*) P_-(z_2^*) = 0 \tag{2.3.29}$$

与 (2.3.18) 比较可得

$$w_2(z_2) = \Gamma_1^{-1}(z_2) v_2(z_2), \quad w_2^*(z_2^*) = v_2^*(z_2^*) \Gamma_1(z_2^*) \tag{2.3.30}$$

为去除 $R_1^+(z_2), R_1^-(z_2^*)$ 在 z_2, z_2^* 上的零点结构，令

$$
\begin{aligned}
\Gamma_2(z) &= I + \frac{z_2^* - z_2}{z - z_2^*} \cdot \frac{v_2 v_2^*}{v_2^* v_2}, \quad \det \Gamma_2(z) = \frac{z - z_2}{z - z_2^*} \\
\Gamma_2^{-1}(z) &= I - \frac{z_2^* - z_2}{z - z_2} \cdot \frac{v_2 v_2^*}{v_2^* v_2}, \quad \det \Gamma_2^{-1} = \frac{z - z_2^*}{z - z_2} \\
R_2^+(z) &= P_1^+(z)\Gamma_2^{-1}(z) = P_1^+(z)\Gamma_1^{-1}(z)\Gamma_2^{-1}(z) \\
R_2^{-1}(z) &= \Gamma_2(z)P_1^{-1}(z) = \Gamma_2(z)\Gamma_1(z)P_1^{-1}(z)
\end{aligned}
\tag{2.3.31}
$$

则

$$
\operatorname*{Res}_{z=z_2} R_2^+(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_2} \left[\left(P_+(z) - P_+(z)\frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{w_2^* w_1} \right) \left(I - \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{v_2^* v_1} \right) \right] = -\frac{z_2^* - z_1 R_1(z_2) v_2 v_2^*}{v_2^* v_2} \tag{2.3.32}
$$

同理 $\operatorname{Res}_{z=z_2^*} R_2^{-1}(z) = 0$, 由此可得 $R_2^+(z), R_2^{-1}(z)$ 分别在在 $z = z_1, z_2, z = z_1^*, z_2^*$ 上无零点结构，则

$$
\begin{aligned}
\det R_2^+(z_j) &= \lim_{z \to z_j} \left[\det P_+(z) \det \Gamma_1^{-1}(z) \det \Gamma_2^{-1}(z) \right] \\
&= \lim_{z \to z_j} S_{11}(z) \frac{z - z_1^*}{z - z_1} \cdot \frac{z - z_2^*}{z - z_2} \\
&= s_{11}'(z_j) \frac{(z_j - z_1^*)(z_j - z_2^*)}{z_j - z_k} \neq 0 \\
\det R_2^-(z_j^*) &\neq 0 \quad (k = 1, 2, k \neq z)
\end{aligned}
\tag{2.3.33}
$$

更一般的，可得

$$
\begin{aligned}
w_j &= \Gamma_1^{-1}(z_j) \cdots \Gamma_{j-1}^{-1}(z_j) \cdot v_j(z_j) \\
w_j^* &= v_j^*(z_j^*) \cdot \Gamma_1(z_j^*) \cdots \Gamma_{j-1}(z_j^*) \\
R_j^+(z) &= P_+(z) \cdot \Gamma_1^{-1}(z) \cdots \Gamma_j^{-1}(z) \\
R_j^{-1}(z) &= \Gamma_j(z) \cdots \Gamma_1(z) \cdot P_-(z)
\end{aligned}
\tag{2.3.34}
$$

其中

$$
\Gamma_j(z) = I + \frac{z_j^* - z_j}{z - z_j^*} \cdot \frac{v_j v_j^*}{v_j^* v_j}, \quad \Gamma_j^{-1}(z) = I - \frac{z_j^* - z_j}{z - z_j} \cdot \frac{v_j v_j^*}{v_j^* v_j} \tag{2.3.35}
$$

则 $R_j^+(z), R_j^{-1}(z)$ 在 $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ 上解析，且在 $z_k, z_k^* (k = 1, 2, \ldots j)$ 上无零点结构，即

$$
\left.
\begin{aligned}
\det R_j^+(z_k) &= s_{11}'(z_k) \frac{\prod_{l=1}^j (z_k - z_l^*)}{\prod_{l=1, l \neq k}^j (z_k - z_l)} \neq 0 \\
\det R_j^{-1}(z_k^*) &= s_{22}'(z_k^*) \frac{\prod_{l=1}^j (z_k^* - z_l)}{\prod_{l=1, l \neq k}^j (z_k^* - z_l)} \neq 0
\end{aligned}
\right. \quad (k = 1, 2, \ldots, j)
\tag{2.3.36}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\det R_j^+(z_{j+1}) &= S_{11}(z_{j+1}) \prod_{j=1}^{j} \frac{z_{j+1} - z_k^*}{z_{j+1} - z_k} = 0 \\
\det R_j^{-1}(z_{j+1}^*) &= S_{22}(z_{j+1}^*) \prod_{j=1}^{j} \frac{z_{j+1}^* - z_k}{z_{j+1}^* - z_k} = 0
\end{aligned}
\tag{2.3.37}
$$

最后令

$$
\begin{aligned}
\Gamma_z &= \Gamma_N(z) \cdots \Gamma_1(z), \quad \Gamma_z^{-1} = \Gamma_1^{-1}(z) \cdots \Gamma_N^{-1}(z) \\
\hat{P}_+(z) &= P_+(z)\Gamma_z^{-1}(z), \quad \hat{P}_-(z) = \Gamma_z(z)P_-(z)
\end{aligned}
\tag{2.3.38}
$$

则 $\hat{P}_+(z), \hat{P}_-(z)$ 在 $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ 上解析，且在 $z_j, z_j^* (j = 1, 2, \ldots, N)$ 上无零点结构 (实际上在解析区域内无零点结构)，即

$$
\det \hat{P}_+(z_k) \neq 0, \quad \det \hat{P}_-(z_k^*) \neq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{2.3.39}
$$

得到分解 (2.3.20). 下证 (2.3.21). 注意到 $\Gamma(z), \Gamma^{-1}(z)$ 分别为具有单极点 $z_j, z_j^* (1 \leq j \leq N)$ 的亚纯函数，以及分解

(2.3.35), (2.3.38), 寻找的向量使得

$$\Gamma(Z) = i + \sum_{j=1}^{N} \frac{\xi_j w_j^*}{z - z_j^*}, \quad \Gamma^{-1}(z) = I - \sum_{j=1}^{N} \frac{w_j^* \xi_j}{z - z_j} \tag{2.3.40}$$

注意到 $\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z) = I$ 对任意 z 都成立, 当然也在 $z = z_k$ 处成立, 即 $\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z) = I$ 在 $z = z_k$ 处正则, 为保证 $\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z) = I$ 在 $z = z_k$ 处成立, 只需让其留数为 0, 因此利用 (2.3.40) 可得

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname*{Res}_{z=z_k}[\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z)] = \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(\Gamma(z) - \sum_{j=1}^{N}\Gamma(z)\frac{w_j\xi_j^*}{z - z_j}\right) = -\Gamma(z_k)w_k\xi_k^* \\ &-\left(I + \sum_{j=1}^{N}\frac{\xi_j w_j^*}{z_k - z_j^*}\right)w_k\xi_k^* = \left(-w_k + \sum_{j=1}^{N}\frac{w_j^* w_k}{z_j^* - z_k}\xi_j^*\right)\xi_k^* \end{aligned} \tag{2.3.41}$$

对上式两边同时作用 ξ_k, 则有

$$\left(-w_k + \sum_{j=1}^{N}\frac{w_j^* w_k}{z_j^* - z_k}\xi_j\right)|\xi_k|^2 = 0 \implies -w_k + \sum_{j=1}^{N}\frac{w_j^* w_k}{z_j^* - z_k}\xi_j = 0 \quad (1 \le k \le N) \tag{2.3.42}$$

将上式改写为 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ 的分块矩阵形式的线性方程组, 则有

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)M = (w_1^*, w_2^*, \ldots, w_N^*) \tag{2.3.43}$$

其中 $M = (M_{kj})_{N\times N}$, 其中 $M_{kj} = \frac{w_k^* w_j}{z_k^* - z_j}$ 则

$$\begin{cases} \frac{w_1^* w_1}{z_1^*-z_1}\xi_1 + \frac{w_2^* w_1}{z_2^*-z_1}\xi_2 + \cdots + \frac{w_N^* w_1}{z_N^*-z_1}\xi_N = w_1 \\ \frac{w_1^* w_2}{z_1^*-z_2}\xi_1 + \frac{w_2^* w_2}{z_2^*-z_2}\xi_2 + \cdots + \frac{w_N^* w_2}{z_N^*-z_2}\xi_N = w_2 \\ \vdots \\ \frac{w_1^* w_N}{z_1^*-z_N}\xi_1 + \frac{w_2^* w_N}{z_2^*-z_N}\xi_2 + \cdots + \frac{w_N^* w_N}{z_N^*-z_N}\xi_N = w_N \end{cases} \implies M = \begin{pmatrix} \frac{w_1^* w_1}{z_1^*-z_1} & \frac{w_1^* w_2}{z_1^*-z_2} & \cdots & \frac{w_1^* w_N}{z_1^*-z_N} \\ \frac{w_2^* w_1}{z_2^*-z_1} & \frac{w_2^* w_2}{z_2^*-z_2} & \cdots & \frac{w_2^* w_N}{z_2^*-z_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_N^* w_1}{z_N^*-z_1} & \frac{w_N^* w_2}{z_N^*-z_2} & \cdots & \frac{w_N^* w_N}{z_N^*-z_N} \end{pmatrix} \tag{2.3.44}$$

可得 $\xi_j = \sum_{k=1}^{N}(M^{-1})_{kj}w_k$. 最后将其带入 (2.3.40) 得到 (2.3.21) □

2.4 NLS 方程的 N 孤子解

2.4.1 矩阵向量解的时空演化

对方程 (2.3.18) 第一个式子两边分别对 x, t 求导, 可得

$$P_{+,x}w_j + P_+ w_{j,x} = 0, \quad P_{+,t}w_j + P_+ w_{j,t} = 0 \tag{2.4.1}$$

利用 P_+ 的定义与 Lax 对 (2.1.12), (2.1.13) 可得

$$\begin{aligned} P_{+,x} &= \mu_{1,x}H_1 + \mu_{2,x}H_2 = \left(\mathrm{i}z_j[\sigma_3, \mu_1] + P\mu_1\right)H_1 + \left(-\mathrm{i}z_j[\sigma_3, \mu_2] + P\mu_2\right)H_2 \\ &- \mathrm{i}z_j\left(\mu_1\sigma_3 H_1 - \mu_2\sigma_3 H_2 + \sigma_3\mu_1 H_1 + \sigma_3\mu_2 H_2\right) + P\mu_1 H_1 + P\mu_2 H_2 \\ &= -\mathrm{i}z[\sigma_3, p_+] + PP_+ \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

同理有

$$P_{+,t} = -\mathrm{i}z_j^2[\sigma_3, P_+] + QP_+ \tag{2.4.3}$$

将 (2.4.2), (2.4.3) 代入 (2.4.1) 且由于 $P_+ w_j = 0, w_j P = 0$, 有

$$(-\mathrm{i}z_j[\sigma_3, P_+] + PP_+)w_j + P_+ w_{j,x} = 0 \implies \mathrm{i}z_j P_+\sigma_3 w_j + P_+ w_{j,x} = 0 \implies P_+(w_{j,x} + \mathrm{i}z_j\sigma_3 w_j) = 0 \tag{2.4.4}$$

同理有 $P_+(w_{j,t} + \mathrm{i}z_j^2\sigma_3 w_j) = 0$.

$$\begin{cases} w_{j,x} + \mathrm{i}z_j\sigma_3 w_j = 0 \\ w_{j,t} + \mathrm{i}z_j^2\sigma_3 w_j = 0 \end{cases} \implies w_j = e^{-\mathrm{i}\theta(z_j)\sigma_3}w_{j,0}, \quad (j = 1, 2, \ldots, N) \tag{2.4.5}$$

其中 $w_{j,0}$ 为 2 维常向量, 从而 $w_j^* = w_{j,0}^{\dagger} e^{i\theta(z_j^*)\sigma_3}$.

2.4.2 N 维孤子解公式

已知 $P_- P_+ = G \implies P_+^{-1} - P_- = \hat{G} P_+$(其中 $I - G = \hat{G}$), 且 $\hat{P_-}(z)\hat{P_+}(z) = \Gamma(z) G \Gamma^{-1}(z) (z \in \mathbb{R})$, 可得

$$\begin{aligned} \hat{P_+^{-1}} - \hat{P_-} &= (I - \hat{P_-}\hat{P_+})\hat{P_+^{-1}} = \left(I - \Gamma(z) G \Gamma^{-1}(z)\right) \hat{P_+^{-1}} = (\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z) - \Gamma(z) G \Gamma^{-1}(z))\hat{P_+^{-1}} \\ &= \Gamma(z)(I - G)\Gamma^{-1}(z)\hat{P_+^{-1}} = \Gamma(z)\hat{G}\Gamma^{-1}(z)\hat{P_+^{-1}} \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

由 Taylor 公式 $\frac{1}{s-z} = -\frac{1}{z}(\frac{1}{1-s/z}) = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{s}{z} + \cdots\right)$, 故 Plemelj 公式可写为

$$\begin{aligned} \hat{P_+^{-1}} &= I + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(z)\hat{G}\Gamma^{-1}(z)\hat{P_+^{-1}}}{s - z} \mathrm{d}s \\ &= I - \frac{1}{2\pi \mathrm{i} z} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{z} + (\frac{s}{z})^2 + \cdots\right) \Gamma(z)\hat{G}\Gamma^{-1}(z)\hat{P_+^{-1}} \mathrm{d}s \\ &= I - \frac{1}{2\pi \mathrm{i} z} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(z)\hat{G}\Gamma^{-1}(z)\hat{P_+^{-1}} \mathrm{d}s + O(z^{-2}) \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

由 $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$, $(P^{-1} = I + \frac{A}{z} + \ldots, P = \frac{B}{z} + \ldots)$, 可得

$$\hat{P_+} = I + \frac{1}{2\pi \mathrm{i} z} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(z)\hat{G}\Gamma^{-1}(z)\hat{P_+} \mathrm{d}s + O(z^{-2}) \tag{2.4.8}$$

再由

$$\Gamma(z) = i + \sum_{k,j=1}^{N} \frac{w_k (M^{-1})_{kj} w_j^*}{z - z_j^*} \implies \Gamma(z) = I + \frac{1}{z} \sum_{k,j=1}^{N} w_k (M^{-1})_{kj} w_j^* + O(z^{-2}) \tag{2.4.9}$$

将上渐进式带入 (2.3.20), 比较 z^{-1} 的次数可得

$$P_+^{(1)} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(z)\hat{G}\Gamma^{-1}(z)\hat{P_+^{-1}} \mathrm{d}s = \sum_{k,j=1}^{N} w_k (M^{-1})_{kj} w_j^* \tag{2.4.10}$$

特别的, 当散射数据 $S_{12} = S_{21} = 0$ 时, 有 $\hat{G} = I - G = 0$. 故上式 (2.4.10) 可简化为

$$P_+^{-1} = \sum_{k,j=1}^{N} w_k (M^{-1})_{kj} w_j^* \tag{2.4.11}$$

不妨取 $\lambda_j = -\mathrm{i}(z_j x + 2z_j^2 t)$, 并取 $w_{j,0} = (c_j, 1)^T$, 则有

$$w_j = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j} & \\ & e^{-\lambda_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_j e^{\lambda_j} \\ e^{-\lambda_j} \end{pmatrix} \tag{2.4.12}$$

从而 $w_j^* = w_{j,0}^* \cdot e_j^{\lambda}\sigma_3 = (c_j^* e^{\lambda_j^*}, e^{-\lambda_j})$. 故

$$M_{k.j} = \frac{w_k^* w_j}{z_k^* - z_j} = \frac{1}{z_k^* - z_j}(c_k^* c_j e^{\lambda_k^* + \lambda_j} + e^{-\lambda_k - \lambda_j}) \tag{2.4.13}$$

再由 (2.4.9)

$$\begin{aligned} q(x,t) &= 2\mathrm{i} \lim_{z \to \infty} (z P_+)_{12} = 2\mathrm{i}(P_+^{(1)})_{12} \\ &= 2\mathrm{i} \sum_{k,j}^{N} (w_k w_j^*)_{12} (M^{-1})_{kj} = 2\mathrm{i} \sum_{k,j}^{N} c_k e^{\lambda_k - \lambda_j^*} (M^{-1})_{kj} \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

令

$$R = \begin{pmatrix} 0 & c_1 e^{\lambda_1} & \cdots & c_N e^{\lambda_N} \\ e^{-\lambda_1^*} & M_{11} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-\lambda_N^*} & M_{N1} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix} \tag{2.4.15}$$

则

$$\begin{aligned}
\det R &= \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+2}c_k e^{\lambda_k}\det\begin{pmatrix} e^{-\lambda_1^*} & M_{11} & \cdots & M_{1,k-1} & M_{1,k+1} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-\lambda_N^*} & M_{N1} & \cdots & M_{N,k-1} & M_{N,k+1} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+2}c_k e^{\lambda_k}\sum_{j=1}^{N} e^{-\lambda_j^*}\det\underline{\begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1,k-1} & M_{1,k+1} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & \cdots & M_{N,k-1} & M_{N,k+1} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix}} := \Delta \\
&= \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+j+3}c_k e^{\lambda_k-\lambda_j^*}\det(\Delta) \\
&= -c_k e^{\lambda_k-\lambda_j^*(M^*)_{jk}} \qquad \Leftarrow \left((M^*)_{jk} - (-1)^{k+j}\det(\Delta)\right) \\
&= -\det M \sum c_k e^{\lambda_k-\lambda_j^*} \qquad \Leftarrow \left((M^{-1})_{jk}(M^*) = |M|M^{-1}\right)
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k-\lambda_j^*}(M^{-1})_{jk} = -\frac{\det R}{\det M} \tag{2.4.17}$$

将 (2.4.17) 带入 (2.4.14) 可得 NLS 方程的 N 孤子解

$$q = -2\mathrm{i}\frac{\det R}{\det M} \tag{2.4.18}$$

第 3 章 逆时空 NLS 方程

本章节我们考虑非局部 NLS 方程的三种逆问题, 主要参考杨建科老师的文章 [2]. 在正式开始之前, 我们需要先介绍耦合方程 (coupled equations) 和非局部方程 (nonlocal equations) 的定义.

定义 3.1 (耦合方程)

若一系统由两个或多个相互依赖的场函数组成，例如

$$\mathrm{i}q_t + q_{xx} - 2q^2 r = 0, \quad \mathrm{i}r_t - r_{xx} - 2r^2 q = 0, \tag{3.0.1}$$

其中 $q(x,t)$ 与 $r(x,t)$ 为彼此耦合的复函数，则称该系统为一组耦合方程.

定义 3.2 (非局部方程)

若方程中某个场函数在空间或时间反演后仍与原场发生耦合, 如 $r(x,t) = \sigma q(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t)$ 或 $\sigma q^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t)$, 其中 $\epsilon_i = \pm 1$, 且不同时为 $1, \sigma = \pm 1$, 且则所得单个方程称为非局部方程.

3.1 非局部 NLS 方程及其约化

考虑非局部 NLS 方程

$$\mathrm{i}q_t + q_{xx} - 2q^2 r = 0, \quad \mathrm{i}r_t - r_{xx} - 2r^2 q = 0, \tag{3.1.1}$$

其中 $r(x,t)$ 为 $q(x,t)$ 的某种约化形式. 考曲率方程可得如下四种约化,

$$r(x,t) = -q^*(x,t), \tag{3.1.2a}$$

$$r(x,t) = -q^*(-x,t), \tag{3.1.2b}$$

$$r(x,t) = -q(x,-t), \tag{3.1.2c}$$

$$r(x,t) = -q(-x,-t), \tag{3.1.2d}$$

分别带入上面约化, 我们得到局部 NLS 方程

$$\mathrm{i}q_t(x,t) + q_{xx}(x,t) + 2q^2(x,t)q^*(x,t) = 0, \tag{3.1.3}$$

逆空间 NLS 方程

$$\mathrm{i}q_t(x,t) + q_{xx}(x,t) + 2q^2(x,t)q^*(-x,t) = 0, \tag{3.1.4}$$

逆时间 NLS 方程

$$\mathrm{i}q_t(x,t) + q_{xx}(x,t) + 2q^2(x,t)q^*(x,-t) = 0, \tag{3.1.5}$$

和逆时空 NLS 方程

$$\mathrm{i}q_t(x,t) + q_{xx}(x,t) + 2q^2(x,t)q^*(-x,-t) = 0. \tag{3.1.6}$$

3.2 耦合 NLS 方程的 N 孤子解

我们推导反空间, 反时间和反时空 NLS 方程(3.1.4)-(3.1.6) 的 N 孤子解的基本思路是承认这些方程是耦合 NLS(3.1.1) 的约化形式. 为此我们只需利用 RH 方法先求出耦合 NLS 方程 N 孤子解的形式, 然后对 Lax 对施加对应的约化条件, 则可得到对应的非局部 NLS 方程的 N 孤子解. 具体地, 我们考虑耦合 NLS 方程(3.1.1), 其 Lax 对为:

$$Y_x = MY = \mathrm{i}\zeta\sigma_3 + Q, \tag{3.2.1}$$

$$Y_t = NY = -2\mathrm{i}\zeta^2\sigma_3 + R, \tag{3.2.2}$$

其中 $R = -2\mathrm{i}\zeta^2\sigma_3 + 2\zeta Q - \mathrm{i}(Q^2 + Q_x)\sigma_3$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ r(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.3}$$

利用 RH 方法, 我们得到耦合 NLS 方程(3.1.1) 的 N 孤子解可以显式地写为

$$q(x,t) = -2\mathrm{i}\frac{\det F}{\det M}, \quad r(x,t) = 2\mathrm{i}\frac{\det G}{\det M} \tag{3.2.4}$$

其中 M 是一个 $N \times N$ 矩阵, F, G 是 $(N+1)\times(N+1)$ 矩阵. 矩阵 M 的元素 M_{jk} 由下式给出:

$$M_{jk} = \frac{\bar{v}_j v_k}{\bar{\zeta}_j - \zeta_k}, \quad v_k(x,t) = \mathrm{e}^{\theta_k\Lambda}v_{k0}, \quad \bar{v}_k(x,t) = \bar{v}_{k0}\mathrm{e}^{\bar{\theta}_k\Lambda} \tag{3.2.5}$$

其中 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+, \bar{\zeta}_k \in \mathbb{C}_-$ 是特征值, $v_{k0} = (a_k, b_k)^T, \bar{v}_{k0} = (\bar{a}_k, \bar{b}_k)$ 是对应的特征向量, 若记 $\theta_k = -\mathrm{i}\zeta_k x - 2\mathrm{i}\zeta_k^2 t$, $\bar{\theta}_k = \mathrm{i}\bar{\zeta}_k x + 2\mathrm{i}\bar{\zeta}_k^2 t$, 则

$$F = \begin{pmatrix} 0 & a_1\mathrm{e}^{\theta_1} & \cdots & a_N\mathrm{e}^{\theta_N} \\ \bar{b}_1\mathrm{e}^{-\bar{\theta}_1} & M_{11} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{b}_N\mathrm{e}^{-\bar{\theta}_N} & M_{N1} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & b_1\mathrm{e}^{-\bar{\theta}_1} & \cdots & b_N\mathrm{e}^{-\bar{\theta}_N} \\ \bar{a}_1\mathrm{e}^{\theta_1} & M_{11} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_N\mathrm{e}^{\theta_N} & M_{N1} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix} \tag{3.2.6}$$

3.3 非局部 NLS 方程的对称关系

我们首先给出逆空间 NLS 方程(3.1.4)和逆时间 NLS 方程(3.1.5)的散射数据的对称关系. 逆时空 NLS 方程(3.1.6)的散射数据的对称关系可以用类似的方法得到.

3.3.1 逆空间 NLS 方程

定理 3.1

对于逆空间方程(3.1.4), 若 ζ 是一个特征值, 则 $-\zeta^*$ 也是一个特征值. 因此, 非纯虚特征值成对出现, 即 $(\zeta, -\zeta^*)$, 且它们位于复平面的同一半平面上. 特征向量的对称关系如下:

1. 若 $(\zeta_k, \hat{\zeta}_k) \in \mathbb{C}_+$, 则 $\hat{\zeta}_k = -\zeta_k^*$, 它们的列特征向量满足关系 $\hat{v}_{k0} = \sigma_1 v_{k0}^*$.
2. 若 $\zeta_k \in i\mathbb{R}_+$, 其特征向量为 $v_{k0} = (1, e^{\mathrm{i}\theta_k})^T$, 其中 θ_k 为实常数.
3. 若 $(\bar{\zeta}_k, \hat{\bar{\zeta}}_k) \in \mathbb{C}_-$, 则 $\hat{\bar{\zeta}}_k = -\bar{\zeta}_k^*$, 它们的行特征向量满足关系 $\hat{\bar{v}}_{k0} = \bar{v}_{k0}^*\sigma_1$.
4. 若 $\bar{\zeta}_k \in i\mathbb{R}_-$, 其特征向量为 $\bar{v}_{k0} = (1, e^{\mathrm{i}\bar{\theta}_k})$, 其中 $\bar{\theta}_k$ 为实常数.

为了证明上述定理, 我们先考虑局部 NLS 方程(3.1.3), 它是在约化 (3.1.2a)下得到的, 在第二章我们得到它的反散射数据为 $\bar{\zeta}_k = \zeta_k^*, \bar{v}_{k0} = v_{k0}^{*T}$.

因此我们可以看到非局部 NLS 和局部 NLS 方程的散射数据的对称关系是不同的. 特别地, 对于逆空间和逆时空 NLS 方程, 上下半平面的特征值是完全独立的. 这种独立性允许出现新的特征值配置, 从而产生新的多孤子解类型. 我们将在下一节详细讨论这些新的类型.

在证明定理3.1之前, 我们先建立离散散射数据 $\{\zeta_k, \bar{\zeta}_k, a_k, b_k, \bar{a}_k, \bar{b}_k\}(1 \le k \le N)$ 和特征值问题 $Y_x = MY$ 及其伴随问题 $K_x = -KM$ 中的离散特征值的联系, 不妨设

$$Y_x = \mathrm{i}\zeta\sigma_3 Y + Q_0 Y, \tag{3.3.1a}$$

$$K_x = -\mathrm{i}\zeta\sigma_3 K - KQ_0 \tag{3.3.1b}$$

其中 $Q_0(x)=Q(x,0)$, 即在时间 $t=0$ 时刻的势矩阵. **注** 这里使用 $Q_0(x)=Q(x,0)$ 是因为在空间谱问题中, 时间 t 被视为固定参数, 故选择驻定解. 实际上也可使用时间谱问题求解, 取 $R_0(t)=R(0,t)$, 但过程更加复杂.

对于任意离散散射数据 $\{\zeta_k,a_k,b_k\}$, 其中 $\zeta\in\mathbb{C}_+$ 是特征值问题(3.3.1a)的特征值, 其离散特征函数 Y_k 具有如下渐近行为

$$Y_k(x)\to\begin{bmatrix}a_k e^{-i\zeta_k x}\\0\end{bmatrix}, x\to-\infty,\quad Y_k(x)\to\begin{bmatrix}0\\-b_k e^{i\zeta_k x}\end{bmatrix}, x\to+\infty \tag{3.3.2}$$

类似地, 对于伴随问题 (3.3.1b) 的特征值 $\bar\zeta\in\mathbb{C}_-$, 离散特征函数 K_k 具有以下渐近性

$$K_k(x)\to\begin{bmatrix}\bar a_k e^{-i\bar\zeta_k x} & 0\end{bmatrix}, x\to-\infty,\quad K_k(x)\to\begin{bmatrix}0 & -\bar b_k e^{-i\bar\zeta_k x}\end{bmatrix}, x\to+\infty \tag{3.3.3}$$

利用上面渐近行为, 以及对应特征问题 (3.3.1a)-(3.3.1b), 我们可以利用对称关系求解 Theorem. 3.1 -Theorem. 3.3

证明 逆空间 NLS 方程(3.1.4) 是从耦合薛定谔方程(3.1.1) 在约化条件(3.1.2b) 下导出的, 位势矩阵 Q_0 为

$$Q_0=\begin{pmatrix}0 & q(x,0)\\ -q^*(-x,0) & 0\end{pmatrix} \tag{3.3.4}$$

明显地, 我们有 $Q_0^*(-x)=-\sigma_1^{-1}Q_0\sigma_1$, 故

$$\begin{aligned}Y_x=i\zeta\sigma_3Y+Q_0Y &\implies -Y_x(-x)=i\zeta\sigma_3Y(-x)+Q_0(-x)Y(-x)\\ &\implies -Y^*_{-x}(-x)=-i\zeta^*\sigma_3Y^*(-x)+Q_0^*(-x)Y^*(-x)\\ &\implies -\alpha\sigma_1Y^*_{-x}(-x)=-i\alpha\sigma_1\zeta^*\sigma_3Y^*(-x)-\alpha\sigma_1(\sigma_1^{-1}Q_0\sigma_1)Y^*(-x)\\ &\implies \alpha\sigma_1Y^*_{-x}(-x)=\alpha\left[i(-\zeta^*)\sigma_3Y^*(-x)+Q_0\right]\sigma_1Y^*(-x)\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

则 $\hat Y_x=i\hat\zeta\sigma_3\hat Y+Q\hat Y$, 其中

$$\hat\zeta=-\zeta^*,\quad \hat Y=\alpha\sigma_1Y^*(-x),\quad \forall\alpha\in\mathbb{C} \tag{3.3.6}$$

由此可得, 若 $\zeta_k\in\mathbb{C}_+$ 是特征值问题(3.3.1a)的特征值, 则 $\hat\zeta_k=-\zeta_k^*\in\mathbb{C}_+$ 也是其特征值. 另外将 $(\hat Y_k,\hat\zeta_k)$ 带入 (3.3.2) 可得[1]

$$\begin{bmatrix}\hat a_k e^{-i\hat\zeta_k x}\\0\end{bmatrix}\leftarrow\hat Y_k(x)=\alpha\sigma_1Y_k(-x)\to\begin{bmatrix}0\\-b_k e^{i\zeta_k(-x)}\end{bmatrix}, (x\to-\infty) \tag{3.3.7}$$

类似的可得 $-\hat b_k=\alpha a_k^*$, 故有

$$\hat v_{k0}=-\alpha\sigma_1v^*_{k0}=\begin{pmatrix}-\alpha b_k^*\\-\alpha a_k^*\end{pmatrix} \tag{3.3.8}$$

若 $\mathrm{Re}(\zeta_k)\neq0\implies\hat\zeta_k=-\zeta_k^*\neq\zeta_k$. 将 $\hat v_{k0}$ 带入 (3.2.4), 则 $-\alpha$ 会被消去, 不失一般性, 可令 $-\alpha=1$, 则 $\hat v_{k0}=\sigma_1v^*_{k0}$, 故第一部分得证.

若 $\mathrm{Re}(\zeta_k)=0\implies\hat\zeta_k=-\zeta_k^*=\zeta_k$. 则 $\hat v_{k0}=v_{k0}$, 不失一般性, 可将特征向量 v_{k0} 进行缩放, 令 $a_k=1$, 将其带入 (3.3.8), 则有 $|\alpha|=1, v_{k0}=(1,-\alpha)^T$, 记 $-\alpha=e^{i\theta_k},\theta_k\in\mathbb{R}$, 则有 $v_{k0}=(1,e^{i\theta_k})^T$, 故第二部分得证.

类似地, 对于 $\bar\zeta_k\in\mathbb{C}_-$ 的情形同理可得. □

注 注意到对于逆空间方程, 我们有 $Q_0^\dagger(-x)=-Q_0(-x)=\sigma_1Q_0\sigma_1^{-1}$, 我们可得到 $\bar\zeta=-\zeta^*$ 和 $\bar Y=\sigma_1Y^\dagger(-x)$. 然而, 这种方法得到的是相对半平面之间散射数据的关系, 不如在相同半平面的对称关系更有价值.

[1]这里疑似存在问题 [2025.11.12]

3.3.2 逆时间 NLS 方程

定理 3.2

对于逆时间 NLS 方程(3.1.5), 若 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$ 是原谱问题(3.3.1a)的特征值, 则 $\bar{\zeta}_k = -\zeta_k \in \mathbb{C}_-$ 也是伴随谱问题(3.3.1b)的特征值. 因此特征值总是成对出现, 且分别位于复平面的相对半平面上, 即 $(\zeta_k, -\zeta_k)$. 它们对应的特征向量满足 $\bar{v}_{k0} = v_{k0}^T$.

证明 逆空间 NLS 方程(3.1.5) 是从耦合薛定谔方程(3.1.1) 在约化条件(3.1.2c) 下导出的, 位势矩阵 Q_0 为

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & q(x,0) \\ -q(x,0) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.9}$$

注意到 $Q_0^T(x) = -Q_0(x)$, 对 (3.3.1a) 两边同时取转置, 得

$$Y_x = \mathrm{i}\zeta\sigma_3 Y +_0 Y \implies Y_x^T = \mathrm{i}\zeta Y^T\sigma_3 + Y^T Q_0^T \implies Y_x^T = \mathrm{i}\zeta Y^T\sigma_3 - Y^T Q_0 \tag{3.3.10}$$

则有 $\bar{Y}_x = \mathrm{i}\bar{Y}\Lambda - Y^T Q_0$, 其中

$$\bar{\zeta} = -\zeta, \quad \bar{Y}(x) = Y^T(x) \tag{3.3.11}$$

这意味着 $(\bar{\zeta}, \bar{Y}(x))$ 满足伴随特征值问题(3.3.1b).

因此若 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$ 是原谱问题(3.3.1a)的特征值, 则 $\bar{\zeta}_k = -\zeta_k \in \mathbb{C}_-$ 也是伴随谱问题(3.3.1b)的特征值. 利用特征值的关系和特征函数的渐近行为(3.3.2)-(3.3.3), 我们很容易得到 $\bar{a}_k = a_k, \bar{b}_k = b_k$ 和 $\bar{v}_{k0} = v_{k0}^T$. □

3.3.3 逆时空 NLS 方程

定理 3.3

对于逆时空 NLS 方程 (3.1.6), 特征值 ζ 可以位于 $\mathbb{C}_+$ 的任意位置, 而特征值 $\bar{\zeta}_k$ 可以位于 $\mathbb{C}_-$ 的任意位置. 然而, 它们的特征向量必须具有以下形式

$$v_{k0} = (1, \omega_k)^T, \quad \bar{v}_{k0} = (1, \bar{\omega}_k) \tag{3.3.12}$$

其中 $\omega_k = \pm 1, \bar{\omega}_k = \pm 1$

证明 逆时空 NLS 方程(3.1.6) 是从耦合薛定谔方程(3.1.1) 在约化条件(3.1.2d) 下导出的, 位势矩阵 Q_0 为

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & q(x,0) \\ -q(-x,0) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.13}$$

注意到 $Q_0(-x) = -\sigma_1^{-1} Q_0(x)\sigma_1$, 则对 (3.3.1a) 两边同时取 $x \to -x$, 得

$$\begin{aligned} Y_x = \mathrm{i}\zeta\sigma_3 Y + Q_0 Y &\implies -Y_x(-x) = \mathrm{i}\zeta\sigma_3 Y(-x) + Q_0(-x)Y(-x) \\ &\implies -\sigma_1 Y_x(-x) = \mathrm{i}\zeta\sigma_1\sigma_3 Y(-x) - \sigma_1 Q_0(-x)Y(-x) \\ &\implies \sigma_1 Y_x(-x) = [\mathrm{i}\zeta\sigma_3 + Q_0(-x)]\,\sigma_1 Y(-x) \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

则有 $\hat{Y}_x(x) = \mathrm{i}\hat{\zeta}\sigma_3\hat{Y}(x) + Q_0(x)\hat{Y}(x)$, 其中

$$\hat{\zeta} = \zeta, \quad \hat{Y}(x) = \sigma_1 Y(-x) \tag{3.3.15}$$

这意味着对于任意特征值 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$, 若 $Y_k(x)$ 是其特征函数, 则 $\hat{Y}_k(x) = \sigma_1 Y(-x)$ 也是其特征函数. 因此 $\hat{Y}_k$ 和 Y_k 是线性相关的, 即

$$Y_k(x) = \omega_k \sigma_1 Y_k(x) \tag{3.3.16}$$

其中 ω_k 是某个常数. 利用这个关系和特征函数 $Y_k(x)$ 的渐近行为 (3.3.2), 我们很容易得到 $a_k = \omega_k b_k, b_k = \omega_k a_k$, 故 $\omega_k = \pm 1$. 不失一般性, 我们记 $a_k = 1$, 则 $v_{k0} = (1, \omega_k)^T$. □

对于 2×2 Lax 对导出的逆空间和逆时空 NLS 方程, 散射数据的对称关系可以通过初等变换得到, 这是二阶矩

阵的优势. 然而, 对于更高阶的 Lax 对, 如 3×3 Lax 对导出的四分量非局部 NLS 方程, 就只能通过转置或 Hermitian 转置, 我们将在下一章讨论.

注 实际上我们也可以直接解(3.2.4)施加约化条件(3.1.2b)-(3.1.2d), 提取散射数据 $\{\zeta_k, \bar{\zeta}_k, v_{k0}, \bar{v}_{k0}, 1 \le k \le N\}$ 的对称关系. 然而, 上面对这些关系的推导更为简单. 此外, 这种推导在逆散射和 Riemann-Hilbert 框架下更具启发性.

3.4 动力学分析

在本节中, 我们将利用前一节中得到的散射数据的对称关系, 分析逆空间, 逆时间和逆时空 NLS 方程的孤子动力学行为. 我们仅考虑 $N = 1$ 和 $N = 2$ 的情形, 重点在于双孤子是否为单孤子的简单 (非线性) 叠加, 或是表现出更复杂的相互作用行为. 为此我们需要先考虑局部 NLS 方程孤子解的动力系统. 当 $N = 1$ 时, 局部 NLS 方程的孤子解为

$$q(x,t) = -\frac{4\mathrm{i}a_1 b_1^* \mathrm{Im}(\zeta_1)}{|a_1|^2 e^{2\mathrm{i}\zeta_1^* x + 4\mathrm{i}(\zeta_1^*)^2 t} + |b_1|^2 e^{2\mathrm{i}\zeta_1 x + 4\mathrm{i}\zeta_1^2 t}} \tag{3.4.1}$$

且二 (N) 孤子为单孤子的非线性叠加. 下面我们分析逆空间, 逆时间和逆时空 NLS 方程的孤子动力学行为.

3.4.1 逆空间 NLS 方程的动力学分析

对于逆空间取 $N = 1$ 时, 则有 $\zeta_1 \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, 这是因为 $\zeta_1 = -\zeta_1^* \implies \mathrm{Re}(\zeta_1) = 0$. 令 $\zeta_1 = \mathrm{i}\eta_1 \in \mathbb{R}_+, \bar{\zeta}_1 = \mathrm{i}\bar{\eta}_1 \in \mathbb{R}_-$, 对应的特征值为 $v_{10} = (1, e^{\mathrm{i}\theta_1})^T, \bar{v}_{10} = (1, e^{\mathrm{i}\bar{\theta}_1})$, 则孤子解为

$$q(x,t) = 2(\eta_1 - \bar{\eta}_1)\frac{1}{e^{\Delta_1} + e^{\bar{\Delta}_1}} \tag{3.4.2}$$

其中

$$\Delta_1 = -\left(2\mathrm{i}\eta_1 x + 4\mathrm{i}\eta_1^2 t - \mathrm{i}\theta_1\right), \quad \bar{\Delta}_1 = -\left(2\bar{\eta}_1 x + 4\mathrm{i}\bar{\eta}_1^2 t + \mathrm{i}\bar{\theta}_1\right) \tag{3.4.3}$$

很容易发现 Δ_1 和 $\bar{\Delta}_1$ 中的 θ_1 和 $\bar{\theta}_1$ 符号不同, 这导致二 (N) 孤子解与单孤子解的动力系统完全不同, 不为单孤子的非线性叠加. 故其与局部 NLS 方程的孤子解的动力系统完全不同.

3.4.2 逆时间 NLS 方程的动力学分析

对于逆时间情形, 取 $N = 1$, 则有

$$q(x,t) = -4\mathrm{i}\zeta_1 b_1 \frac{e^{-4\mathrm{i}\zeta_1^2 t}}{e^{-2\mathrm{i}\zeta_1 x} + b_1^2 e^{2\mathrm{i}\zeta_1 x}} \tag{3.4.4}$$

可以发现, 不论 ζ_1 取何值, 孤子解始终是静止的, 且不会坍缩. 而 $N = 2$ 时, 若 $\mathrm{Im}(\zeta_1) \neq \mathrm{Im}(\zeta_2)$, 则解会反复坍缩, 所以双孤子解并非单孤子的简单叠加. 这种坍缩现象在局部 NLS 方程中是不存在的, 这说明逆时间 NLS 方程的动力学行为与局部 NLS 方程有本质的不同.

3.4.3 逆时空 NLS 方程的动力学分析

对于逆时空情形, 取 $N = 1$ 时,

$$q(x,t) = 2\mathrm{i}(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1)\frac{\bar{\omega}_1 e^{-2\mathrm{i}\bar{\zeta}_1 x - 4\mathrm{i}\bar{\zeta}_1^2 t}}{1 + \omega_1\bar{\omega}_1 e^{-2\mathrm{i}(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1)x - 4\mathrm{i}(\bar{\zeta}_1^2 - \zeta_1^2)t}} \tag{3.4.5}$$

很容易发现逆时空情形的多孤子解为简单孤子的非线性叠加, 这是因为特征值 $(\zeta_k, \bar{\zeta}_k)$ 是完全独立的, 且对应的特征向量 $v_{k0} = (1, \omega_k)^T, \bar{v}_{k0} = (1, \bar{\omega}_k)$ 仅有四种可能的组合, 且几乎不会发生复杂耦合, 这限制了孤子间的相互作用.

另外, 这是唯一可以移动的孤子解, 其速度为 $V = -2\mathrm{Im}(\bar{\zeta}_1^2 - \zeta_1^2)/\mathrm{Im}(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1)$. 在直线 $x = Vt$ 上模取得最大值,

$$|q(x,t)| = 2|\bar{\zeta}_1 - \zeta_1|\frac{e^{\beta t}}{1 + \omega_1\bar{\omega}_1 e^{\mathrm{i}\gamma t}} \tag{3.4.6}$$

其中

$$\beta = 2V\mathrm{Im}(\bar{\zeta}_1) + 4\mathrm{Im}(\bar{\zeta}_1^2) = -8\frac{\mathrm{Im}(\zeta_1)\mathrm{Im}(\bar{\zeta}_1)\mathrm{Re}(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1)}{\mathrm{Im}(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1)}, \tag{3.4.7}$$

$$\gamma = -2V\mathrm{Re}(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1) - 4\mathrm{Re}(\bar{\zeta}_1^2 - \zeta_1^2) = -4|\zeta_1 - \bar{\zeta}_1|^2\frac{\mathrm{Im}(\zeta_1 + \bar{\zeta}_1)}{\mathrm{Im}(\zeta_1 - \bar{\zeta}_1)} \tag{3.4.8}$$

如果 $\mathrm{Im}(\zeta_1 + \bar{\zeta}_1) \neq 0$, 则 $\gamma \neq 0$, 孤子解会反复坍缩, 坍缩周期为 $T = 2\pi/|\gamma|$. 若 $\mathrm{Re}(\zeta_1 - \bar{\zeta}_1) \neq 0 \implies \beta \neq 0$, 则孤子解会增加或减小, 具体取决于 β 的正负号. 只有当 $\mathrm{Im}(\zeta_1 + \bar{\zeta}_1) = 0$ 时, 孤子解才不会坍缩, 且当 $\mathrm{Re}(\zeta_1 - \bar{\zeta}_1) = 0$ 时, 孤子解的幅值保持不变.

第 4 章 三阶 AKNS 方程组的逆时空约化

4.1 AKNS 方程组的约化

In this chapter, let us focus on the 3×3 reverse space nonlocal AKNS system: Consider the Lax pair.

$$\begin{aligned} \Phi_x &= U\Phi = (\mathrm{i}\lambda\sigma_3 + P_0)\Phi, \\ \Phi_t &= V\Phi = -\left[2\mathrm{i}\lambda^2\sigma_3 + 2\lambda P + \mathrm{i}(P_0^2 + P_{0x})\sigma_3\right]\Phi, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

where

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ -r_1 & 0 & 0 \\ -r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.1.2}$$

where p, q, r_1, r_2 are functions of (x,t), $r_1 = ap_1 + bq_1, r_2 = cp_1 + dq_1$ and $a, b, c, d, \sigma_3 \in \mathbb{C}$. Thus, because the zero curve equation $U_t - V_x + [U, V] = 0$ can be written as

$$\mathrm{i}P_{0t} + P_{0xx}\sigma_3 + 2P_0^3\sigma_3 = 0, \tag{4.1.3}$$

we can obtain the following equations:

$$\mathrm{i}p_t + p_{xx} + 2p(pr_1 + qr_2) = 0, \tag{4.1.4a}$$

$$\mathrm{i}q_t + q_{xx} + 2q(pr_1 + qr_2) = 0, \tag{4.1.4b}$$

$$-\mathrm{i}r_{1t} + r_{1xx} + 2r_1(pr_1 + qr_2) = 0, \tag{4.1.4c}$$

$$-\mathrm{i}r_{2t} + r_{2xx} + 2r_2(pr_1 + qr_2) = 0. \tag{4.1.4d}$$

For the above equations (4.1.4), we can obtain p_1 maybe is $p, p(-x,t), p(x,-t), p(-x,-t)$ and their conjugation, due to the compatibility condition, p_1 can only be $p^*(x,t), p^*(-x,t), p(x,-t), p(-x,-t)$, and q_1 has a similar reductions.

If we condiser $p_1 = p^*(-x,t), q_1 = q^*(-x,t)$, then we can obtain the inverse space equations:

$$\mathrm{i}p_t + p_{xx} + 2p\left[app^*(-x,t) + bpq^*(-x,t) + b^*p^*(-x,t)q + dqq^*(-x,t)\right] = 0, \tag{4.1.5}$$

$$\mathrm{i}q_t + q_{xx} + 2q\left[app^*(-x,t) + bpq^*(-x,t) + b^*p^*(-x,t)q + dqq^*(-x,t)\right] = 0 \tag{4.1.6}$$

If we consider $p_1 = p(x,-t), q_1 = q(x,-t)$, then we can obtain the inverse time equations:

$$\mathrm{i}p_t + p_{xx} + 2p\left[app^*(x,-t) + bpq^*(x,-t) + b^*p^*(x,-t)q + dqq^*(x,-t)\right] = 0, \tag{4.1.7}$$

$$\mathrm{i}q_t + q_{xx} + 2q\left[app^*(x,-t) + bpq^*(x,-t) + b^*p^*(x,-t)q + dqq^*(x,-t)\right] = 0 \tag{4.1.8}$$

If we consider $p_1 = p(-x,-t), q_1 = q(-x,-t)$, then we can obtain the inverse time equations:

$$\mathrm{i}p_t + p_{xx} + 2p\left[app^*(-x,-t) + bpq^*(-x,-t) + b^*p^*(-x,-t)q + dqq^*(-x,-t)\right] = 0, \tag{4.1.9}$$

$$\mathrm{i}q_t + q_{xx} + 2q\left[app^*(-x,-t) + bpq^*(-x,-t) + b^*p^*(-x,-t)q + dqq^*(-x,-t)\right] = 0 \tag{4.1.10}$$

Before we get started, let's consider another Lax pair. This lax pair has better symmetry and ready solutions. And it avoids the disadvantages of $ad - bb^*$.

$$\Phi_x = (-\mathrm{i}\lambda\Lambda + P)\Phi, \tag{4.1.11}$$

$$\Phi_t = \left[2\mathrm{i}\lambda^2\Lambda - 2\mathrm{i}\lambda P + \mathrm{i}(P^2 + P_x\Lambda)\right]\Phi, \tag{4.1.12}$$

where

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & q \\ -r_1 & -r_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.1.13}$$

and p, q, r_1, r_2 is same as above. The Lax pair is equivalent to the AKNS system (4.1.1). You can see the zero curve equations's 13, 23, 31, 32 to find that is same to (4.1.4)

$$M_0 = \begin{pmatrix} a & b & \\ b^* & d & \\ & & 1 \end{pmatrix} \tag{4.1.14}$$

and the eigenvalue problem and the adjoint eigenvalue problem are given as follows:

$$Y_x = -\mathrm{i}\zeta\Lambda Y + PY, \tag{4.1.15a}$$

$$K_x = \mathrm{i}\zeta^* K\Lambda - KP, \tag{4.1.15b}$$

Following previous Chapter's Theorem. 3.1 - Theorem. 3.3 , we give the following three theorems.

4.2 三阶 NLS 方程组的解

Following this Riemann-Hilbert mothed, the solution is given by Wang and Yang[1]. N-solitons in this system were explictly written as:

$$\begin{bmatrix} p(x,t) \\ q(x,t) \end{bmatrix} = 2\mathrm{i} \sum_{j,k=1}^{N} \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_j \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-(\theta_k^* - \theta_j)} (M^{-1})_{jk}, \tag{4.2.1}$$

where

$$M_{jk} = \frac{1}{\lambda_j^* - \lambda_k} \left[(a\alpha_j^*\alpha_k + b\beta_j^*\alpha_k + b^*\alpha_j^*\beta_k + d\beta_j^*\beta_k)\mathrm{e}^{-(\theta_k+\theta_j^*)} + \mathrm{e}^{\theta_k+\theta_j^*} \right] \tag{4.2.2}$$

and $\theta_k = -\mathrm{i}\lambda_k x + 2\mathrm{i}\lambda_k^2 t$.

证明 It can be written in a more general form

$$p(x,t) = -2\mathrm{i}P_{12} = -2\mathrm{i}\left(\sum_{j,k=1}^{N} v_j (M^{-1})_{jk} \hat{v}_k\right)_{12} \tag{4.2.3}$$

$$q(x,t) = -2\mathrm{i}P_{13} = -2\mathrm{i}\left(\sum_{j,k=1}^{N} v_j (M^{-1})_{jk} \hat{v}_k\right)_{13} \tag{4.2.4}$$

$$r_1(x,t) = -2\mathrm{i}P_{13} = -2\mathrm{i}\left(\sum_{j,k=1}^{N} v_j (M^{-1})_{jk} \hat{v}_k\right)_{31} \tag{4.2.5}$$

$$r_2(x,t) = -2\mathrm{i}P_{13} = -2\mathrm{i}\left(\sum_{j,k=1}^{N} v_j (M^{-1})_{jk} \hat{v}_k\right)_{32} \tag{4.2.6}$$

where

$$M_{jk} = \frac{\hat{v}_j v_k}{\lambda^* - \lambda_k}, \quad v_k = e^{\theta_k \sigma_3} v_{k0}, \quad \hat{v}_k = v_k^\dagger M_0 \tag{4.2.7}$$

If we set $\mathbf{v}_{k0} = (\alpha_k, \beta_k, 1)^T$, then

$$\begin{aligned} M_{jk} &= \frac{\hat{v}_j v_k}{\lambda^* - \lambda_k} = \frac{1}{\lambda_j^* - \lambda_k} v_j^\dagger M_0 v_k \\ &= \frac{1}{\lambda^* - \lambda_k} (\alpha_j^*, \beta_j^*, 1) e^{\theta_j^* \Lambda} M_0 e^{\theta_j \Lambda} (\alpha_k, \beta_k, 1)^T \\ &= \frac{1}{\lambda^* - \lambda_k} (\alpha_j^*, \beta_j^*, 1) M_0 e^{(\theta_j^* + \theta_j)\Lambda} (\alpha_k, \beta_k, 1)^T \Leftarrow (M_0 e^{\theta_j \Lambda} = e^{\theta_j \Lambda} M_0) \\ &= \frac{1}{\lambda_j^* - \lambda_k} \left[(a\alpha_j^*\alpha_k + b\beta_j^*\alpha_k + b^*\alpha_j^*\beta_k + d\beta_j^*\beta_k)\mathrm{e}^{-(\theta_k+\theta_j^*)} + \mathrm{e}^{\theta_k+\theta_j^*} \right] \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

The p, q can be similarly obtained. □

4.3 反时空情形的散射数据对称性

笔记 这里完全仿照上一章的写法, 有些地方尚未完善, 下面式子或许存在问题

Indeed $\forall\{\zeta_k, a_k, b_k\}$ of the discrete scattering data, where $\zeta \in \mathbb{C}_+$ is the eigenvalue of (3.3.1a), whose discrete eigenfunction Y_k has the following asymptotics

$$Y_k(x) \to \begin{bmatrix} \alpha_k e^{-i\zeta_k x} \\ \beta_k e^{-i\zeta_k x} \\ 0 \end{bmatrix}, x \to -\infty, \quad Y_k(x) \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_k e^{i\zeta_k x} \end{bmatrix}, x \to +\infty \tag{4.3.1}$$

Analogously, for the eigenvalue $\bar{\zeta} \in \mathbb{C}_-$ of the adjoint eigenvalue problem (3.3.1b), the discrete eigenfunction K_k has the following asymptotics

$$K_k(x) \to \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_k e^{-i\bar{\zeta}_k x} & \bar{\beta}_k e^{-i\bar{\zeta}_k x} & 0 \end{bmatrix} M_0, x \to -\infty, \quad K_k(x) \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\bar{\gamma}_k e^{-i\bar{\zeta}_k x} \end{bmatrix} M_0, x \to +\infty \tag{4.3.2}$$

In view of this connection, in order to derive symmetry relations on the (discrete) scattering data, we will use symmetry relations of discrete eigenmodes in the eigenvalue problems (4.1.15a)-(4.1.15b).

笔记 以下假设如果 v_k 为 $Y_x = -YM$ 的特征向量, 则 $(YA)_x = -(YA)M$ 的特征值为 $v_k A$

~~但还没有证明~~, 已证明

4.3.1 Inverse Space

In this case $a, d \in \mathbb{R}, b = c^*, p_1 = p^*(-x,t), q_1 = q^*(-x,t)$ and $\zeta \in \mathbb{C}_+$.

定理 4.1 (Inverse Space)

For the inverse-space AKNS (4.1.5), if ζ is an eigenvalue, so is $-\zeta^*$. Thus non-pirely-imaginary eigenvalues appear as $(\zeta, -\zeta^*)$, which lie in the same half of the complex plane. Symmetry relations are given as follows:

1. If $(\zeta_k, \hat{\zeta}_k) \in \mathbb{C}_+$, then $\hat{\zeta}_k = -\zeta_k^*$, their column eigenvectors are related as $\hat{\mathbf{v}}_{k0} = \mathbf{v}_{k0}^\dagger M_0 M_1$.
2. If $\zeta_k \in i\mathbb{R}_+$, its eigenvectors is of the form $\mathbf{v}_{k0} = (e^{i\theta_{k1}}, e^{i\theta_{k2}}, 1)^T$, where θ_{k1}, θ_{k2} are real constant.
3. If $(\bar{\zeta}_k, \hat{\bar{\zeta}}_k) \in \mathbb{C}_-$, then $\hat{\bar{\zeta}}_k = -\bar{\zeta}_k^*$, their row eigenvectors are related as $\hat{\bar{\mathbf{v}}}_{k0} = M_0 M_1 \bar{\mathbf{v}}_{k0}$.
4. If $\bar{\zeta}_k \in i\mathbb{R}_-$, its eigenvectors is of the form $\bar{\mathbf{v}}_{k0} = (e^{i\bar{\theta}_{k1}}, e^{i\bar{\theta}_{k2}}, 1)$, where $\bar{\theta}_{k1}, \bar{\theta}_{k2}$ are real constant.

证明 The reverse-space NLS equation (4.1.5) was derived from the couped Schrödinger equations under the reduction of $p_1 = p^*(-x,t), q_1 = q^*(-x,t)$ and the potential matrix P and M_1 is

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p(x,0) \\ 0 & 0 & q(x,0) \\ -r_1(-x,0) & -r_2(-x,0) & 0 \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} a & b^* & \\ b & d & \\ & & -1 \end{pmatrix} \tag{4.3.3}$$

obviously, we have $P^\dagger(-x) = M_1 P(x) M_1^{-1}$, so

$$\begin{aligned} Y_x = i\zeta\Lambda Y + PY &\implies -Y_x(-x) = i\zeta\Lambda Y(-x) + P(-x)Y(-x) \\ &\implies -Y_x^\dagger(-x) = -i\zeta^* Y^\dagger(-x)\Lambda + Y^\dagger(-x)P^\dagger(-x) = -i\zeta^* Y^\dagger(-x)\Lambda + Y^\dagger M_1 P(x) M_1^{-1} \\ &\implies Y_x^\dagger(-x)M_1 = i\zeta^* Y^\dagger(-x)\Lambda M_1 - Y^\dagger(-x)M_1 P(x) \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

If set $\hat{Y}(x) = Y(-x)^\dagger M_1, \hat{\zeta} = -\zeta^*$, and because $\Lambda M_1 = M_1\Lambda$, we have

$$\hat{Y}(x) = -i\hat{\zeta}\hat{Y}(x)\Lambda - \hat{Y}(x)P(x) = -\hat{Y}(i\hat{\zeta}\Lambda + P(x)) \tag{4.3.5}$$

It means that $[\hat{\zeta}, \hat{Y}(x)]$ is satifies the adjoint eigenvalue equation (4.1.15b). □

4.3.2 Inverse Time

In this case $b = c$, $p_1 = p(x, -t)$, $q_1 = q(x, -t)$

定理 4.2 (Inverse Time)

For the reverse-time NLS equation (4.1.7). If ζ is a discrete eigenvalue of the associated Lax pair, then so is $-\zeta$. Hence, the discrete spectrum is symmetric with respect to the origin, and eigenvalues always appear in pairs $(\zeta, -\zeta)$, located in opposite halves of the complex plane.

For each such pair $(\zeta_k, \hat{\zeta}_k)$ with $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$ and $\hat{\zeta}_k = -\zeta_k \in \mathbb{C}_-$, the associated eigenvectors $\mathbf{v}_{k0}$ and $\hat{\mathbf{v}}_{k0}$ satisfy $\hat{\mathbf{v}}_{k0} = \mathbf{v}_{k0}^{\dagger} M_0 M_2$.

证明 we can get $P^T(x) = -M_2 P(x) M_2^{-1}$, where M_2 is

$$M_2 = \begin{pmatrix} a & b & \\ b & d & \\ & & 1 \end{pmatrix} \tag{4.3.6}$$

$$\begin{aligned} Y_x(x) = \mathrm{i}\zeta\Lambda Y + PY &\implies Y_x(x) = \mathrm{i}\zeta\Lambda Y(x) + P(x)Y(x) \\ &\implies Y_x^T(x) = \mathrm{i}\zeta Y^T(x)\Lambda + Y^T(x)P^T(x) = \mathrm{i}\zeta Y^T(x)\Lambda - Y^T(x)M_2P(x)M_2^{-1} \\ &\implies Y_x^T(x)M_2 = \mathrm{i}\zeta Y^T(x)\Lambda M_2 - Y^T(x)M_2P(x) \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

If we set $\hat{Y}(t) = Y(-t)^T M_2$, $\hat{\zeta} = -\zeta$, and because $\sigma_3 M_2 = M_2\sigma_3$, we have

$$\hat{Y}_x(t) = -\mathrm{i}\hat{\zeta}\hat{Y}(t)\sigma_3 - \hat{Y}(t)P(t) = -\hat{Y}(t)(\mathrm{i}\hat{\zeta}\sigma_3 + P(t)) \tag{4.3.8}$$

It means that $[\hat{\zeta}, \hat{Y}(t)]$ is satifies the adjoint eigenvalue equation (4.1.15b).

Thus, if $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$ is an eigenvalue of the scattering problem (4.1.15a), then $\hat{\zeta}_k = -\zeta_k \in \mathbb{C}_-$ is an eigenvalue of the adjoint scattering problem (4.1.15b). □

4.3.3 Inverse Space-Time

In this case $b = c$, $p_1 = p(-x, -t)$, $q_1 = q(-x, -t)$ and $\zeta \in \mathbb{C}_+$.

定理 4.3 (Inverse Space-Time)

For the reverse-time NLS equation (4.1.7). Eigenvalues ζ_k can be anywhere in $mathbbC_+$, and eigenvalues $z\bar{e}ta_k$ can be anywhere in $\mathbb{C}_-$. However, their eigenvectors must satisfy the following symmetry relations:

$$v_{k0} = (e^{\mathrm{i}\theta_1}, e^{\mathrm{i}\theta_2}, 1)^T, \quad \bar{v}_{k0} = (e^{\mathrm{i}\bar{\theta}_1}, e^{\mathrm{i}\bar{\theta}_2}, 1) \tag{4.3.9}$$

where $\theta_1, \theta_2, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ are real constants.

证明 The reverse-space NLS equation (4.1.5) was derived from the couped Schrödinger equations under the reduction of $p_1 = p(-x, -t)$, $q_1 = q(-x, -t)$ and the potential matrix P and M_3 is

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & b & \\ b & d & \\ & & -1 \end{pmatrix} \tag{4.3.10}$$

obviously, we have $P^T(-x) = M_3 P(x) M_3^{-1}$, so

$$\begin{aligned} Y_x(x) = \mathrm{i}\lambda\sigma_3 Y + PY &\implies -Y_x(-x) = \mathrm{i}\lambda\sigma_3 Y(-x) + P(-x)Y(-x) \\ &\implies -Y_x^T(-x) = \mathrm{i}\lambda Y^T(-x)\sigma_3 + Y^T(-x)P^T(-x) = \mathrm{i}\lambda Y^T(x)\sigma_3 + Y^T(-x)M_2P(x)M_2^{-1} \\ &\implies Y_x^T(-x)M_2 = -\mathrm{i}\lambda Y^T(x)\sigma_3 M_2 - Y^T(-x)M_2P(x) \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

If we set $\hat{Y}(x) = Y(-x)^T M_3, \hat{\zeta} = \zeta$, and because $\sigma_3 M_3 = M_3\sigma_3$, we have

$$\hat{Y}_x(t) = -\mathrm{i}\hat{\zeta}\hat{Y}(t)\sigma_3 - \hat{Y}(t)P(t) = -\hat{Y}(t)(\mathrm{i}\hat{\zeta}\sigma_3 + P(t)) \tag{4.3.12}$$

It means that $[\hat{\zeta}, \hat{Y}(t)]$ is satifies the adjoint eigenvalue equation (4.1.15b).

Thus, if $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$ is an eigenvalue of the scattering problem (4.1.15a), then $\hat{\zeta}_k = \zeta_k \in \mathbb{C}_+$ is an eigenvalue of the adjoint scattering problem (4.1.15b). □

参考文献

[1] Deng-Shan Wang, Da-Jun Zhang, and Jianke Yang. "Integrable properties of the general coupled nonlinear Schrödinger equations". In: Journal of Mathematical Physics 51.2 (Feb. 2010), p. 023510. ISSN: 0022-2488.

[2] Jianke Yang. "General N-solitons and their dynamics in several nonlocal nonlinear Schrödinger equations". In: Physics Letters A 383.4 (2019), pp. 328–337. ISSN: 0375-9601.

[3] A. Zee. Fly by Night Physics: How Physicists Use the Backs of Envelopes. Princeton University Press, 2020.

[4] 范恩贵. 可积系统、正交多项式和随机矩阵——Riemann-Hilbert 方法. 科学出版社, 2022.