

Grundlagen der Informatik

Prof. Dr. J. Schmidt

Fakultät für Informatik

GDI – WS 2020/21

Zahlendarstellung – Konvertierung von
Zahlen

Wie können Zahlen zwischen den verschiedenen Darstellungsformen konvertiert werden?



Einfachster Fall: kleine Zahlen

- Verwendung von Tabellen

Dezimal	Dual	Oktal	Hexadezimal
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F



Konvertieren zwischen **Dezimalsystem** und **Dualsystem**

- Division der umzuwandelnden Dezimalzahl durch die **größte Potenz von 2**, die kleiner oder gleich ist als diese Dezimalzahl und Schreiben einer 1 an die erste (höchstwertige) Binärstelle
- Division des Ergebnisses durch die **nächste kleinere Potenz von 2** (Resultat, 0 oder 1, gibt die nächste Binärstelle an)
- Analoges weiteres Vorgehen bis nach der Division durch $2^0 = 1$ das Verfahren abbricht



Direkte Methode (3)

Kapitel 2: Zahlendarstellung

- Dezimalzahl 116 ist in binärer Schreibweise anzugeben

$$\begin{array}{rcl} 116 & : & 64 = 1 \\ \underline{-64} & & \\ 52 & : & 32 = 1 \\ \underline{-32} & & \\ 20 & : & 16 = 1 \\ \underline{-16} & & \\ 4 & : & 8 = 0 \\ \underline{-0} & & \\ 4 & : & 4 = 1 \\ \underline{-4} & & \\ 0 & : & 2 = 0 \\ \underline{-0} & & \\ 0 & : & 1 = 0 \end{array}$$

- Ergebnis: $111\,0100_{(2)}$ bzw. $(111\,0100)_2$



Konvertieren zwischen **Dualsystem** und **Oktalsystem**

- Um eine im Dualsystem dargestellte Zahl ins Oktalsystem zu konvertieren, bildet man von rechts beginnend so genannte **Dualtriaden** (Dreiergruppen)

Dualzahl

110 111 001 110 010

Oktalzahl

6 7 1 6 2

- Bei der Umwandlung einer Oktalzahl in ihre Dualdarstellung geht man den umgekehrten Weg

Oktalzahl

3 2 1 5

Dualzahl

011 010 001 101



Konvertieren zwischen **Dualsystem** und **Hexadezimalsystem**

- Um eine im Dualsystem dargestellte Zahl ins Hexadezimalsystem zu konvertieren, bildet man von rechts beginnend so genannte **Dualtetraden** (Vierergruppen)

Dualzahl

1 0111 0101 1101

Hexzahl

1 7 5 D

Triade: 1 011 101 011 101
Oktal: 1 3 5 3 5

- ... und Umwandlung Hex → Dual: umgekehrter Weg

Hexzahl

A D A

Dualzahl

1010 1101 1010

Triade: 101 011 011 010
Oktal: 5 3 3 2



- Konvertieren Sie die Zahl $(2E4)_{16}$ sowohl in das Dualsystem als auch in das Dezimalsystem
- Konvertieren Sie die Zahl $(753)_8$ sowohl in das Dualsystem als auch in das Hexadezimalsystem
- Konvertieren Sie die Zahl $(1101011111111010)_2$ sowohl in das Oktalsystem als auch in das Hexadezimalsystem



Horner- Schema und Restwertmethode

Kapitel 2: Zahlendarstellung

- Eine in einem Positionssystem mit der Basis B dargestellte natürliche Zahl

$$n = \sum_{i=0}^N b_i \cdot B^i$$

lässt sich mit Hilfe des **Horner- Schemas** wie folgt darstellen:

$$n = \left(\dots \left((b_N \cdot B + b_{N-1}) \cdot B + b_{N-2} \right) \cdot B + b_{N-3} \right) \cdot B + \dots + b_1 \right) \cdot B + b_0$$

- Beispiel

$$(1578)_{10} = ((1 \cdot 10 + 5) \cdot 10 + 7) \cdot 10 + 8$$

- Mit Hilfe dieser Darstellung können Konvertierungen in das Dezimalsystem einfach durchgeführt werden

- Beispiel

$$\begin{aligned} (754)_8 &= (7 \cdot 8 + 5) \cdot 8 + 4 \\ &= (492)_{10} \end{aligned}$$



- Konvertieren Sie die Zahl $(375)_8$ unter Zuhilfenahme des Horner- Schemas in das Dezimalsystem



Konvertierung vom Dezimalsystem in andere Positionssysteme

- Die fortgesetzte Division einer Dezimalzahl durch die Basis
- liefert als **Divisionsrest** die Koeffizienten b_n bis b_0
- für die Darstellung dieser Zahl zur jeweiligen Basis



Für die Umwandlung einer Dezimalzahl x in ein Zahlensystem mit der Basis B kann folgender Algorithmus verwendet werden:

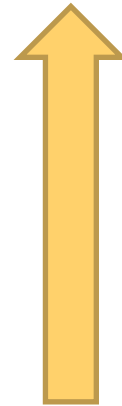
1. $x : B = y \text{ Rest } z$
2. Mache y zum neuen x
 - wenn dieses x ungleich 0 ist, fahre wieder mit Schritt 1 fort,
 - sonst fahre mit Schritt 3 fort
3. Die ermittelten Reste z von unten nach oben nebeneinander geschrieben ergeben die entsprechende umgewandelte Zahl



Beispiel

- $(43)_{10} = (?)_2$

x	B	y		z
43	:	2	=	21
			Rest	1
21	:	2	=	10
			Rest	1
10	:	2	=	5
			Rest	0
5	:	2	=	2
			Rest	1
2	:	2	=	1
			Rest	0
1	:	2	=	0
			Rest	1



Die Reste z von unten nach oben geschrieben liefern die gesuchte Dualzahl.

- Ergebnis: $(101011)_2$



Konvertieren Sie die Zahl $(10172)_{10}$ unter Anwendung der Restwertmethode sowohl in das Dualsystem als auch in das Hexadezimalsystem

$$\begin{array}{lcl} 10172_{(10)} & & \\ = & & (2) \\ = & & (16) \end{array}$$



Konvertieren echt gebrochener Zahlen (1)

Kapitel 2: Zahlendarstellung

- Eine echt gebrochene Zahl n ($n < 1$)

$$n = \sum_{i=-M}^{-1} b_i \cdot B^i$$

lässt sich mit Hilfe des Horner- Schemas wie folgt darstellen

$$n = \frac{1}{B} \cdot \left(b_{-1} + \frac{1}{B} \cdot \left(b_{-2} + \frac{1}{B} \cdot \left(b_{-3} + \dots + \frac{1}{B} \cdot \left(b_{-M+1} + \frac{1}{B} \cdot b_{-M} \right) \dots \right) \right) \right)$$

- Beispiel

$$0,193_{(10)} = \frac{1}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} \cdot \left(9 + \frac{1}{10} \cdot 3 \right) \right)$$

- Auch Verwendung zur Konvertierung von anderen Systemen in das Dezimalsystem



Algorithmus zur Umwandlung des Nachkommateils einer Dezimalzahl in ein Zielsystem zur Basis B:

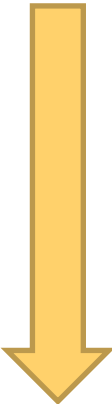
1. $x \cdot B = y$ Überlauf z (z = ganzzahliger Anteil)
2. Mache Nachkommaanteil von y zum neuen x
 - wenn dieses neue x ungleich 0 ist und noch nicht genügend Nachkommastellen ermittelt sind, fahre mit Schritt 1 fort,
 - sonst fahre mit Schritt 3 fort
3. Schreibe die ermittelten Überläufe von oben nach unten nach 0. nebeneinander, um die entsprechende umgewandelte Zahl zu erhalten



Beispiel

- $(0,34375)_{10} = (?)_2$

x	B	y	z
0,34375	· 2 = 0,6875	Überlauf	0
0,6875	· 2 = 1,375	Überlauf	1
0,375	· 2 = 0,75	Überlauf	0
0,75	· 2 = 1,5	Überlauf	1
0,5	· 2 = 1,0	Überlauf	1
0,0	· 2 = 0,0	Überlauf	0



Die Überläufe z
von oben nach
unten geschrieben
nach 0. liefern die
gesuchte Dualzahl.

- Ergebnis: $(0,01011)_2$

Konvertieren echt gebrochener Zahlen (4)

Kapitel 2: Zahlendarstellung

Manche gebrochenen Zahlen, die sich exakt im Dezimalsystem darstellen lassen, lassen sich nicht ganz exakt als Dualzahl darstellen

- Typisches Beispiel
 $0,1_{(10)} = 0,0\ 0011\ 0011\ \dots_{(2)}$
- Periodische Ziffernfolge, Bitmuster 0011 wiederholt sich
- Im Rechner treten Ungenauigkeiten auf
- Genauigkeitsverluste bei Umwandlung

x	B	y	z
0,1	· 2 = 0,2	Überl.	0
0,2	· 2 = 0,4	Überl.	0
0,4	· 2 = 0,8	Überl.	0
0,8	· 2 = 1,6	Überl.	1
0,6	· 2 = 1,2	Überl.	1
0,2	· 2 = 0,4	Überl.	0
0,4	· 2 = 0,8	Überl.	0
0,8	· 2 = 1,6	Überl.	1
0,6	· 2 = 1,2	Überl.	1



Konvertieren echt gebrochener Zahlen (5)

Kapitel 2: Zahlendarstellung

- Andersherum: **Alle** gebrochenen Zahlen, die sich im Dualsystem exakt darstellen lassen, lassen sich auch als Dezimalzahl exakt darstellen
- Allgemein: Eine rationale Zahl p/q mit $\text{ggT}(p, q) = 1$ lässt sich zur Basis b exakt darstellen, wenn **alle** Primfaktoren von q auch Primfaktoren von b sind
- Beispiele
 - $1/3_{(10)} = 0,33333..._{(10)}$ 3 ist kein Primfaktor von 10
 - $1/3_{(10)} = 0,010101..._{(2)}$ 3 ist kein Primfaktor von 2
 - $1/3_{(10)} = 0,1_{(3)}$ 3 ist ein Primfaktor von 3
 - $1/10_{(10)} = 0,1_{(10)}$ 2 und 5 sind Primfaktoren von 10
 - $1/10_{(10)} = 0,000110011..._{(2)}$ 5 ist kein Primfaktor von 2



Konvertieren Sie folgende Zahlen

- $(0,375)_{10}$ = im Dualsystem?
- $(0,25)_{10}$ = im Fünfersystem?
- $(0,19)_{10}$ = im Hexadezimalsystem?



Konvertieren unecht gebrochener Zahlen

Kapitel 2: Zahlendarstellung

- Aufteilung der Zahl
 - in ihren ganzzahligen Teil
 - und ihren echt gebrochenen Teil,
die dann getrennt von einander zu konvertieren sind.

- Beispiel

$$(12,25)_{10} = (1100,01)_2$$

- ganzzahliger Teil

12	:	2	=	6	Rest	0
6	:	2	=	3	Rest	0
3	:	2	=	1	Rest	1
1	:	2	=	0	Rest	1

$$(12)_{10} = (1100)_2$$

- echt gebrochener Teil

0,25	·	2	=	0,5	Überl.	0
0,5	·	2	=	1,0	Überl.	1
0,0	·	2	=	0,0	Überl.	0

$$(0,25)_{10} = (0,01)_2$$



Geben Sie die Dezimalzahl $39,6875_{(10)}$ in binärer sowie in hexadezimaler Form an.

