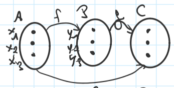
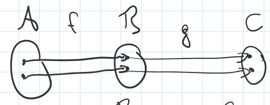
Aufgabe 7:

b) $x_1 \neq x_2$ mit $x_1, x_2 \in A$

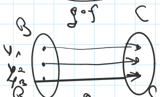
$g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$



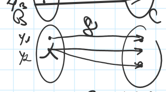
f injektiv

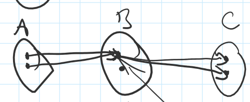


g∘f injektiv



≠ da g∘f injektiv





f nicht injektiv

Geht nicht da ein Element des Def.bereichs nicht auf zwei Elemente der Zielmenge abgebildet werden kann

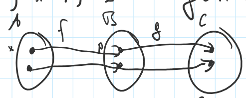
wenn f nicht injektiv

Abb. $\Rightarrow$ $y_2 = y_3$ ↯ $\Rightarrow \neg y_2 = y_3 \Rightarrow \underbrace{f(x_2)}_{y_2} \neq \underbrace{f(x_3)}_{y_3}$ $y_2, y_3 \in B$

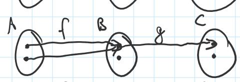
$\Rightarrow$ Behauptung ist wahr

a) $x_1 \neq x_2$ für g und f, da injektiv mit

↳ $f(x_1) \neq f(x_2) \wedge g(x_1) \neq g(x_2)$, da injektiv



injektiv g∘f, sowie f und g



g∘f nicht injektiv, f auch nicht ↯

g∘f nicht injektiv, g auch nicht ↯

Abb.

↳ damit f und g injektiv sind, muss gelten, dass auch g∘f injektiv ist

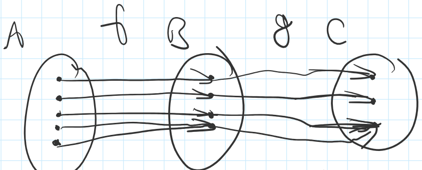
$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$f(x_1) = f(x_2)$

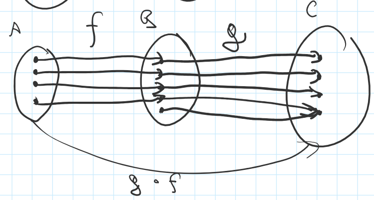
(nur wenn) $x_1 = x_2$ $x_1, x_2 \in A$

$\Rightarrow$ Behauptung stimmt

c)



g∘f surjektiv



f nicht surjektiv, g∘f schon

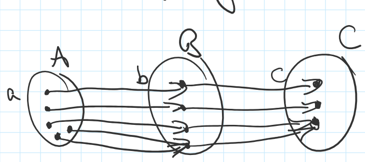
$|B| > |A|$ aber $|C| < |B|$ $a \in A; b \in B; c \in C$

hier $|A| = |C|$

$\Rightarrow$ wodurch $\exists a \in A: g(f(a)) = c$ erfüllt wird

$\Rightarrow$ Behauptung stimmt nicht

d)

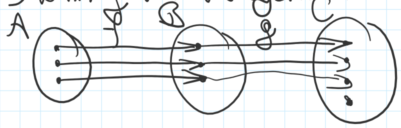


$c \in C$

(g∘f surjektiv $\Rightarrow \exists a \in A: g(f(a)) = c$ ↑)

$$\left(g \circ f \text{ surjektiv} \Rightarrow \exists a \in A: g(\underbrace{f(a)}_{f(a) \in B}) = c \right)$$

$\Rightarrow$ wenn g nicht surjektiv ist



$g \circ f$ nicht surjektiv, g auch nicht

$\hookrightarrow$ wenn g nicht surjektiv ist kann $g \circ f$ auch nicht surjektiv sein

$a \in A \quad b \in B \quad c \in C$

$\exists a \in A: f(a) = b$ surjektivität $f \Rightarrow |A| \geq |B|$

g nicht surjektiv $\Rightarrow |B| < |C| \Rightarrow \exists b \in B: g(b) \neq c$

$g \circ f$ kann nicht surjektiv sein, wenn $|B| < |C|$ oder $\exists b \in B: g(b) \neq c$

$\hookrightarrow$ g muss surjektiv sein, wenn $g \circ f$ surjektiv sind

$\Rightarrow$ Behauptung stimmt

Hausaufgabe 8

a) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!\,(k+1)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!}$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-k)!\,(k+1)!} = \frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)}$$

$$= \frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} + \frac{n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,(k+1+n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-k)!\,(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} \quad \square$$

b) $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

$(1+x)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} x^0$

$$1 = 1$$

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \cdot (1+x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] \cdot x^k + \binom{n}{0} \cdot x^0 + \binom{n}{n} x^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] \cdot x^k + \binom{n}{0} + \binom{n}{n} x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot x^k + \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{n+1} \cdot x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \quad \square
\end{aligned}
$$

c)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} \cdot a^0 b^0$$

$$1 = 1$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k b^{n-k}\right) \cdot (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] \cdot a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{\underbrace{n+1-1}_{n}} \cdot a^{n+1} b^{\overbrace{n-(n+1)+1}^{0}} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \quad {\scriptstyle k=0}
\end{aligned}
$$

nach a)

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^k b^{n-k+1} \quad \square
\end{aligned}
$$