Technische Hochschule Rosenheim

Grundlagen der Informatik

Prof. Dr. J. Schmidt
Fakultät für Informatik

GDI – WS 2020/21
Zahlendarstellung – Zahlensysteme

Leitfragen 2.1

- Wie werden die Begriffe Nachricht, Information und Daten in der Informatik definiert?
- Welche Zahlensysteme spielen in der Informatik eine besondere Rolle?

Definition Nachricht (1)

- Stützt sich auf den Begriff des „Alphabets“
- Alphabet besteht aus
  - einer **abzählbaren Menge von Zeichen** (Zeichenvorrat) und
  - einer **Ordnungsrelation**
    (Regel, durch die feste Reihenfolge der Zeichen definiert ist)

- Beispiele:
  - {a, b, c, ..., z}
    Menge aller Kleinbuchstaben in lexikografischer Ordnung
  - {0, 1, 2, ..., 9}
    endliche Menge der ganzen Zahlen 0 bis 9 mit der Ordnungsrelation „<“
  - {2, 4, 6, … }
    unendliche Menge der geraden natürlichen Zahlen mit der Ordnungsrelation „<“
  - {0, 1}
    Binärziffern 0 und 1 mit $0 < 1$

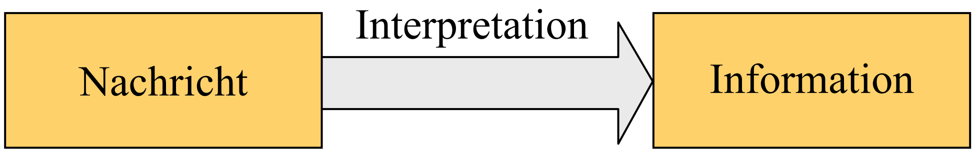
Definition Nachricht (2)

- **Nachricht**
  - ist eine aus den Zeichen eines Alphabets gebildete **Zeichenfolge**
  - Zeichenfolge muss nicht endlich sein, aber **abzählbar**
    - d.h. die einzelnen Zeichen müssen durch eine Abbildung auf die natürlichen Zahlen durchnummeriert werden können
    - damit ist die Identifizierbarkeit der Zeichen sichergestellt

- **Nachrichtenraum N(A)**
  - Menge aller Nachrichten, die mit den Zeichen des Alphabets A gebildet werden können
  - entspricht der Kleeneschen Hülle A* des Alphabets A

- **Eingeschränkter Nachrichtenraum $N(A^s)$**
  - nur Zeichenreihen mit einer maximalen Länge s sind enthalten
  - entspricht $A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots A^s$, wobei A^s die Menge aller Zeichenketten über A mit exakt Länge s ist

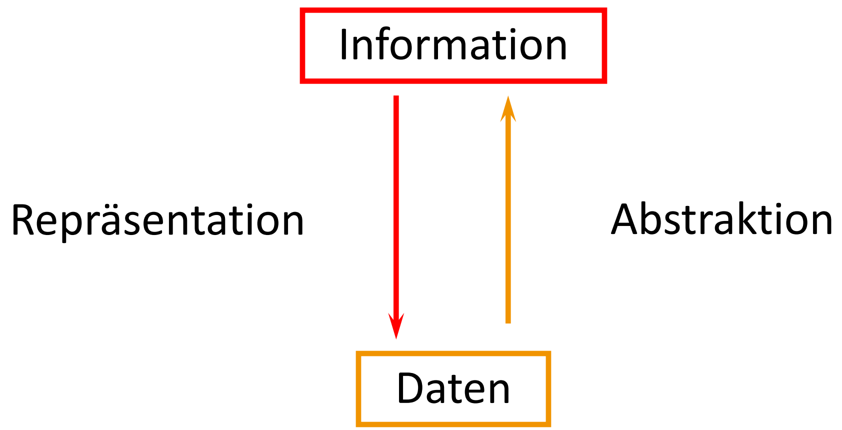
- **Information**
  - stellt den Bedeutungsgehalt einer Nachricht dar
- Zuordnung (Abbildung) notwendig



  - muss nicht eindeutig sein
  - verschiedene Interpretationen möglich
- Das heißt:
  - Information ist vielschichtiger Begriff
  - Informationen sind nicht exakt definierbare **abstrakte** Objekte
- Formale (statistische) Definition des Informationsbegriffs durch Claude Shannon
  → folgt

Daten

- Zum Zweck der (formalen) Bearbeitung (z.B. mit Hilfe eines Rechners)
  - werden Informationen durch Daten repräsentiert
  - und als solche gespeichert



Konrad Ernst Otto Zuse

geb. 22.06.1910

01001010 01011110
11010101 00010111
11010101 11011110
11011101 ...

- Informationen werden durch Nullen und Einsen im Rechner repräsentiert

Kleinste Informationseinheit

Bit (*Binary Digit*)

- Alphabet = {0, 1}
- Einzelne Binärstelle, die ein Computer speichert
- Zwei Möglichkeiten: Binärer Code (Zeichen 0 und 1)
- Notwendig, da technisch einfach realisierbar z.B. mit
  - elektrischer Ladung (0 = ungeladen; 1 = geladen)
  - elektrischer Spannung (0 = 0 Volt; 1 = 5 Volt)
  - Magnetisierung (0/1 je nach Polung der Magnetisierung)

Bitfolgen (1)

- 2-Bitfolge
  - 4 Möglichkeiten
    (00, 01, 10, 11)
- 3-Bitfolge
  - 8 Möglichkeiten
    (000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111)
- Allgemein gilt:
  Jedes zusätzliche Bit verdoppelt die Anzahl der möglichen Bitfolgen.

  ➔ Es gibt genau 2^N mögliche Bitfolgen der Länge N.

Bitfolgen (2)

- Rechner arbeiten immer nur mit Gruppen von Bits
  - typisch: 8 Bits, 16 Bits, 32 Bits oder 64 Bits
- Byte
  - eigentlich: die kleinste per Adressbus adressierbare Datenmenge eines Systems
  - heute üblich: eine Gruppe von **8 Bits** nennt man ein **Byte**
- Ein Byte kann verwendet werden, um z.B. folgendes zu speichern:
  - eine Zahl zwischen 0 und 255,
  - eine Zahl zwischen -128 und +127,
  - ein kodiertes Zeichen (in einem Zeichencode z.B. ASCII)
  - die Farbkodierung eines Punktes in einer Graphik bzw. in einem Bild genannt „Pixel“ (Pixel = Picture Element)

Datei- und Speichergrößen

- Eine Datei ist eine beliebig lange Folge von Bytes (gespeichert auf einem Datenträger)
- Größe einer Datei = Anzahl der darin enthaltenen Bytes
  Maßeinheiten

k	=	1024	=	2^{10}	$\cong 10^{3}$	(k = Kilo)
M	=	1024^{2}	=	2^{20}	$\cong 10^{6}$	(M = Mega)
G	=	1024^{3}	=	2^{30}	$\cong 10^{9}$	(G = Giga)
T	=	1024^{4}	=	2^{40}	$\cong 10^{12}$	(T = Tera)
P	=	1024^{5}	=	2^{50}	$\cong 10^{15}$	(P = Peta)
N	=	1024^{6}	=	2^{60}	$\cong 10^{18}$	(E = Exa)

- Nomenklatur uneinheitlich, manchmal werden auch die bekannten metrischen Werte verwendet
  (z.B. bei Festplatten)

Datei- und Speichergrößen

- zur klareren Abgrenzung:
  Vorschlag der Verwendung anderer Präfixe
- bereits 1996, standardisiert in
  Norm IEC 80000-13:2008
- konnte sich bisher noch nicht vollständig durchsetzen

```
Kibibyte (KiB)    = 2^10 Byte (Ki = Kilo, bi = binär)
Mebibyte (MiB)    = 2^20 Byte (Me = Mega)
Gibibyte (GiB)    = 2^30 Byte (Gi = Giga)
Tebibyte (TiB)    = 2^40 Byte (Te = Tera)
```

Zeiteinheiten

- Es werden dezimale Einheiten benutzt
- Zeitangaben
  - 2,6 GHz Prozessor mit $2{,}6 \cdot 10^9$ = 2 600 000 000 Hertz (Schwingungen pro Sekunde) getaktet
  - ein Takt dauert also $1/(2{,}6 \cdot 10^9) = 0{,}38 \cdot 10^{-9}$ s, das sind 0,38 ns

```
m  =  1/1000 = 10^-3 (m = milli)
µ  =  1/1000000 = 10^-6 (µ = mikro)
n  =  1/1000000000 = 10^-9 (n = nano)
p  =  ... = 10^-12 (p = pico)
f  =  ... = 10^-15 (f = femto)
```

Darstellung von Zahlen

- Fokus: **effiziente** und **eindeutig umkehrbare** Zuordnung zwischen Zahlen und Bitfolgen
- Bitfolgen einer festen Länge N
  → 2^N viele Zahlen darstellbar
- Gebräuchlich sind N = 8, 16, 32 oder 64.

- Man repräsentiert durch die Bitfolgen der Länge N
  - die natürlichen Zahlen von 0 bis $2^N - 1$, oder
  - die ganzen Zahlen zwischen -2^{N-1} und $2^{N-1} - 1$, oder
  - ein Intervall der reellen Zahlen mit begrenzter Genauigkeit

Positionssysteme

- Auch Stellenwertsysteme genannt
- **Wert** einer Zahl ist **abhängig von** der **Position** der Zeichen
  - Vorteil: einfache Rechenregeln
- Beispiele:
  - Dualsystem
  - Oktalsystem
  - Dezimalsystem
  - Hexadezimalsystem

Positionssystem bei natürlichen Zahlen

- Positionssystem mit der Basis B ist ein Zahlensystem, in dem eine Zahl nach Potenzen von B zerlegt wird
- Eine natürliche Zahl n wird durch folgende Summe dargestellt:

$$n = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \cdot B^i \qquad \text{wobei Folgendes gilt:}$$

  - B = Basis des Zahlensystems ($B \in \mathbb{N}, B \geq 2$)
  - b = Ziffern ($b_i \in \mathbb{N}_0, 0 \leq b_i < B$)
  - N = Anzahl der Stellen

Dezimalsystem

- Darstellung einer **ganzen Zahl** z
  - Summe von Potenzen zur Basis 10
  - $z = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$,

    wobei $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
  - Beispiel

$$\begin{aligned} 4711 &= 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 \\ &= 4 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 1 \end{aligned}$$

Dualsystem

- Darstellung der Zahlen zur Basis 2 und den Grundziffern {0,1}
- Die Bitfolge **1101** hat beispielsweise den Zahlenwert:

$$\begin{aligned} 1101 &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \\ &= 13 \end{aligned}$$

- Schreibweise: $(1101)_2 = (13)_{10}$

Oktalsystem

- Nachteil Dualsystem: sehr lange Zahlen und deshalb schwer zu merken
  - Ansatz: Zusammenfassung einer Anzahl von binären Stellen
- Oktalsystem
  - 3 binäre Stellen werden zu einer Oktalstelle zusammengefasst
  - Darstellung der Zahlen zur Basis $2^3 = 8$ und der Grundziffern {0,1,2,3,4,5,6,7}
  - Beispiele

$$(4711)_8 = 4 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = (2505)_{10}$$

$$(53)_{10} = (110\ 101)_2 = (65)_8$$

Hexadezimalsystem

- Noch kompaktere Zahlendarstellung
  - 4 binäre Stellen werden zu einer Hexadezimalstelle zusammengefasst
  - Darstellung der Zahlen zur Basis $2^4 = 16$ und die 16 Grundziffern {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F}
  - Beispiele

$$\begin{aligned}(53)_{10} &= (0011\ 0101)_2\\ &= (35)_{16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4711)_8 &= (100\ 111\ 001\ 001)_2\\ &= (1001\ 1100\ 1001)_2\\ &= (9C9)_{16}\end{aligned}$$

- Bei gebrochenen Zahlen trennt ein Punkt (Komma im Deutschen) in der Zahl
  - den ganzzahligen Teil der Zahl
  - vom gebrochenen Teil (Nachkommateil).
- Eine gebrochene Zahl n wird durch folgende Summe dargestellt:

$$n = \sum_{i=-M}^{N-1} b_i \cdot B^i \qquad \text{wobei Folgendes gilt:}$$

$$\mathsf{B} = \text{Basis des Zahlensystems } (B \in \mathbb{N}, B \geq 2)$$

$$\mathsf{b} = \text{Ziffern } (b_i \in \mathbb{N}_0, 0 \leq b_i < B)$$

$$\mathsf{N} = \text{Anzahl der Stellen vor dem Punkt (Komma)}$$

$$\mathsf{M} = \text{Anzahl der Stellen nach dem Punkt (Komma)}$$

Beispiele gebrochene Zahlen

$$(17{,}05)_{10} = 1\cdot10^{1} + 7\cdot10^{0} + 0\cdot10^{-1} + 5\cdot10^{-2}$$

$$(3758{,}0)_{10} = 3\cdot10^{3} + 7\cdot10^{2} + 5\cdot10^{1} + 8\cdot10^{0}$$

$$(9{,}702)_{10} = 9\cdot10^{0} + 7\cdot10^{-1} + 0\cdot10^{-2} + 2\cdot10^{-3}$$

$$(0{,}503)_{10} = 0\cdot10^{0} + 5\cdot10^{-1} + 0\cdot10^{-2} + 3\cdot10^{-3}$$