Übungsblatt 1

Zentralübung

Aufgabe 1 (Elementare Beweistechniken)

Man beweise die folgenden Aussagen:

a) $\forall n \in \mathbb{N} : 2|\, n \Rightarrow 2|\, n^2$

b) $\forall n \in \mathbb{N} : 2|\, n^2 \Rightarrow 2|\, n$

c) $\forall n \in \mathbb{N} : 2|\, n\,(n+1)$

d) Ist p eine Primzahl, so gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : p|\, n \Leftrightarrow p|\, n^2$

e) Es gibt unendlich viele Primzahlen

Hinweis: Für $m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}$ bedeute $m|n$, dass m ein Teiler von n ist.

Aufgabe 2 (Abzählbarkeit)

Man begründe:

a) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar

b) $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist abzählbar

c) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar

Aufgabe 3 (Manipulation von Summen)

Es seien $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$. Man beweise mit vollständiger Induktion:

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} c a_k = c \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k + \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$

c) $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{k=0}^{n-m} a_{m+k}$

d) $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}$

Präsenzübung

Aufgabe 4 (Ein Kriterium für Surjektivität, Injektivität und Bijektivität)

Seien X, Y beliebige Mengen und $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung. Zeigen Sie:

a) $f : X \to Y$ ist surjektiv $\Leftrightarrow \forall y \in Y : |f^{-1}(\{y\})| \geq 1$

b) $f : X \to Y$ ist injektiv $\Leftrightarrow \forall y \in Y : |f^{-1}(\{y\})| \leq 1$

c) $f : X \to Y$ ist bijektiv $\Leftrightarrow \forall y \in Y : |f^{-1}(\{y\})| = 1$

Aufgabe 5 (Geometrische Summenformel)

Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Aufgabe 6 (Berechnung von endlichen Summen)

Man berechne die folgenden Summen:

a) $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$ b) $\sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1)$ c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

Hausaufgaben

Aufgabe 7 (Injektivität und Surjektivität von Kompositionen)

Es seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen und $g \circ f : A \to C$ die Komposition von f und g. Zeigen Sie oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen durch ein Gegenbeispiel:

a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

c) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch f surjektiv.

d) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

Aufgabe 8 (Die binomische Formel)

Für $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n! := \prod_{m=1}^{n} m$ und $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$, falls $0 \leq k \leq n$ und 0 sonst. Zeigen Sie für alle $a, b, x \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$:

a) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

b) $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

c) $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Aufgabe 9 (Die Anzahl k-elementiger Teilmengen aus n-elementigen Mengen)

Zeigen Sie für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ und die Menge M mit $|M| = n$ durch Induktion nach n: Die Anzahl $B(n,k)$ der $k-$elementigen Teilmengen von M ist $\binom{n}{k}$.

Abgabe: 02.11.2021