Technische Hochschule Rosenheim

Grundlagen der Informatik

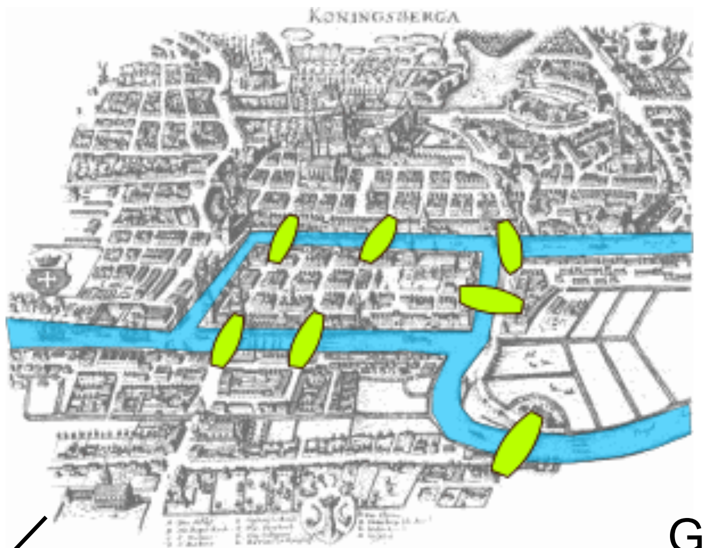
Prof. Dr. J. Schmidt
Fakultät für Informatik

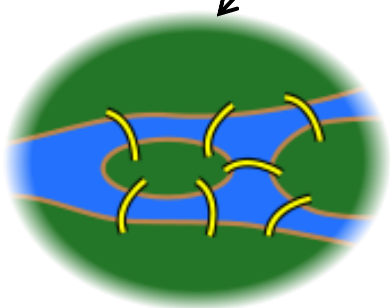
GDI – WS 2020/21

Graphentheorie – Einführung

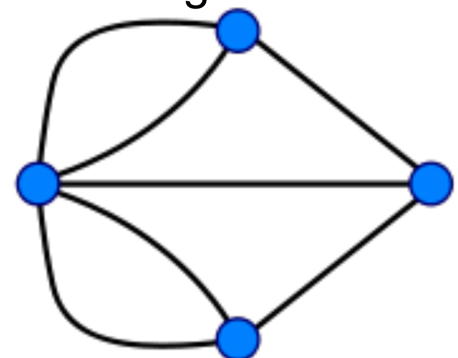
Königsberger Brückenproblem

Euler 1736: Gibt es einen Rundweg durch Königsberg, der jede der sieben Brücken über die Pregel genau einmal überquert?



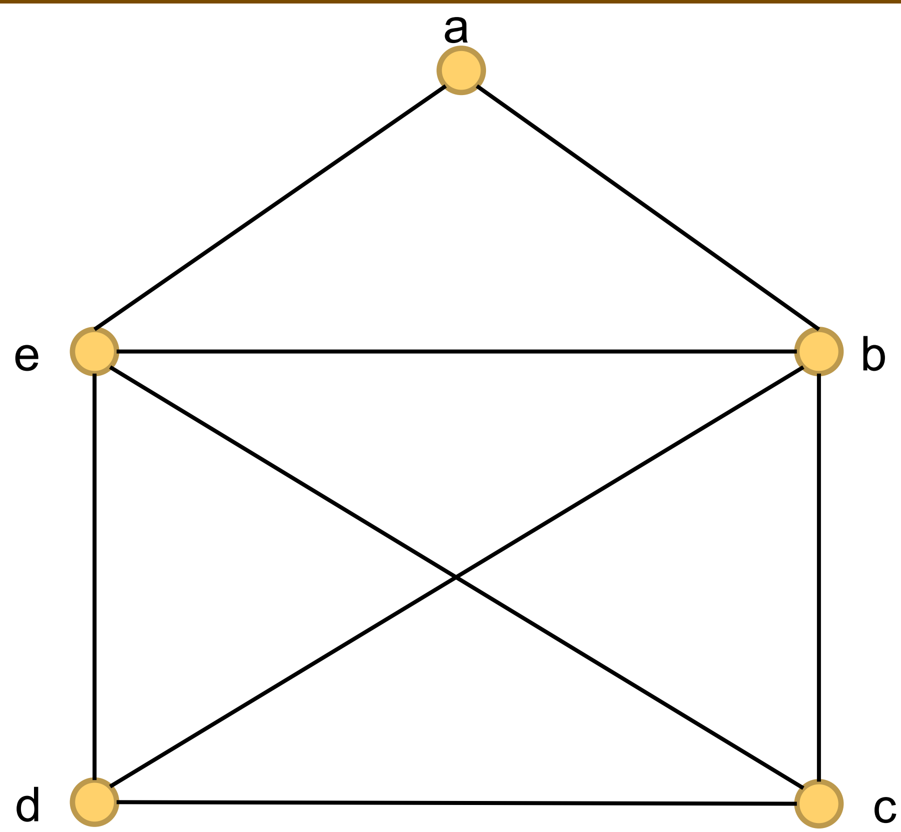


Gibt es einen Rundweg, der jede Kante genau einmal enthält?



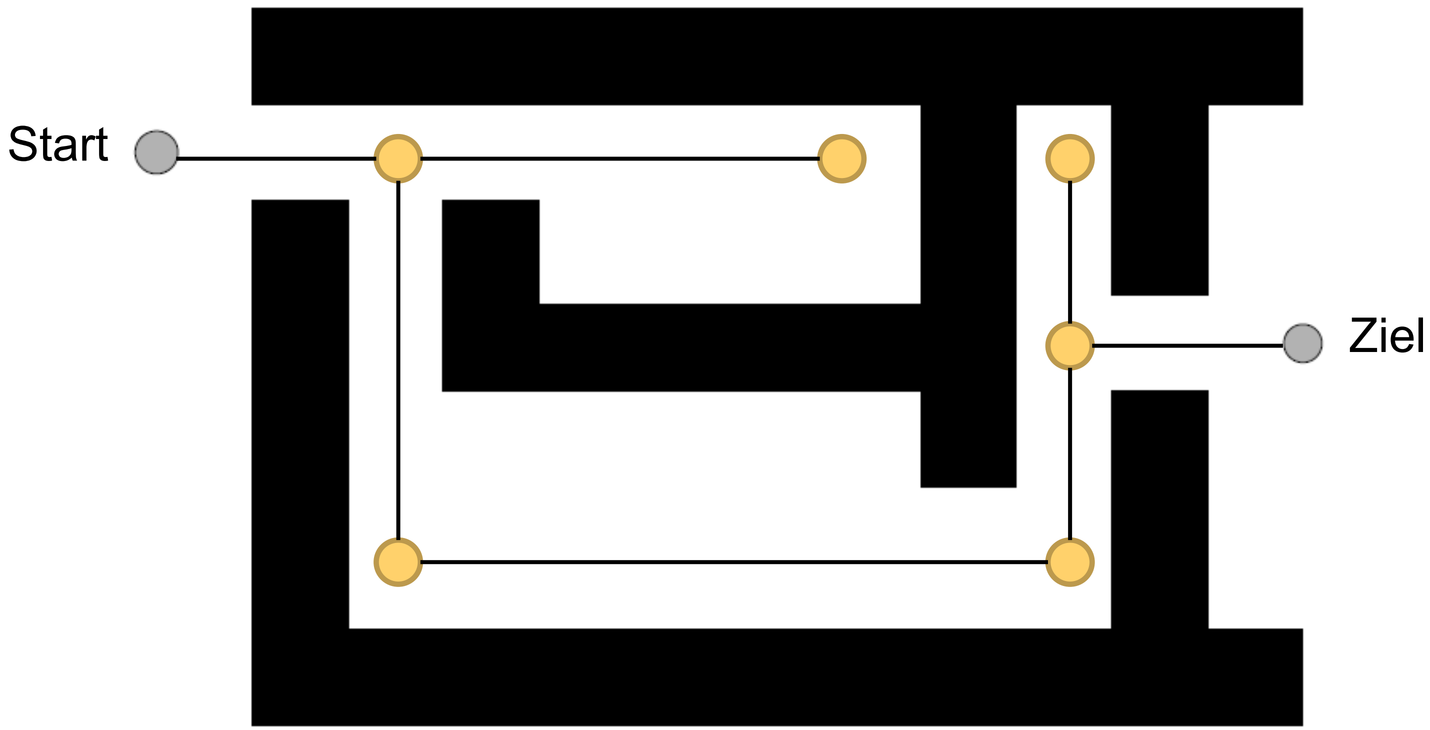
[Wikipedia, Public Domain]

Das Haus vom Nikolaus

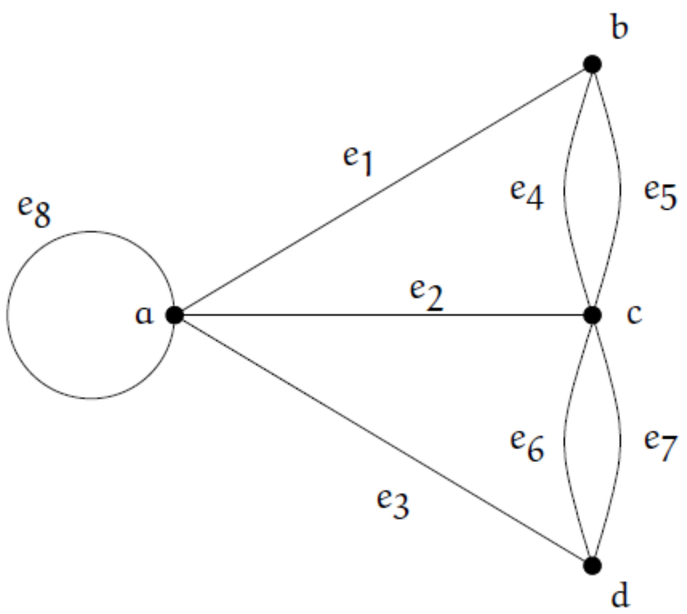


Labyrinth

Finde einen Weg durch das Labyrinth!



Graph: Allgemeines Beispiel



- Knoten: a, b, c, d
- Kanten: e_1 bis e_8, verbinden Knoten

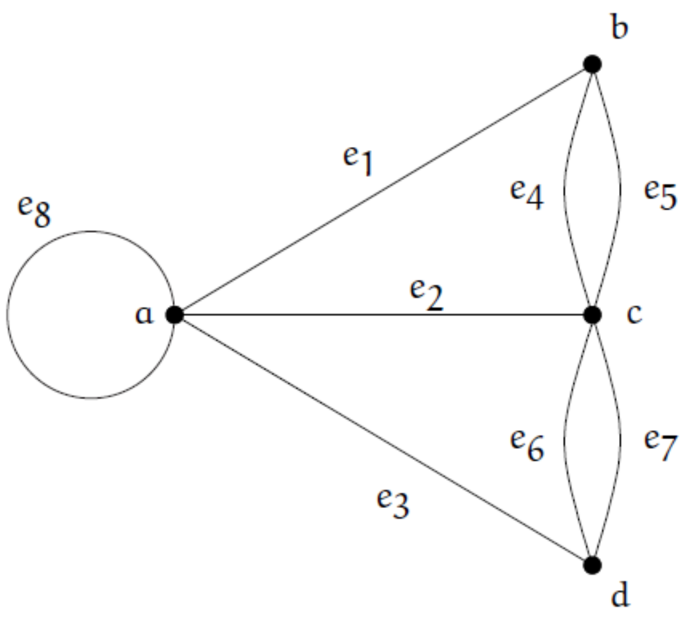
Definition: Graph

Ein (ungerichteter) Graph G besteht aus einer

- Menge von Knoten (vertices) V
- Menge von Kanten (edges) E
- einer Inzidenzabbildung I, die Kanten Knotenpaare (a, b), mit a, b $\in V$ zuordnet

- Adjazenz
  - die beiden Knoten a, b einer Kante e heißen adjazent
- Inzidenz
  - die Kante e, die die Knoten a, b verbindet, ist mit diesen inzident

- Ist V abzählbar unendlich, dann heißt G unendlicher Graph

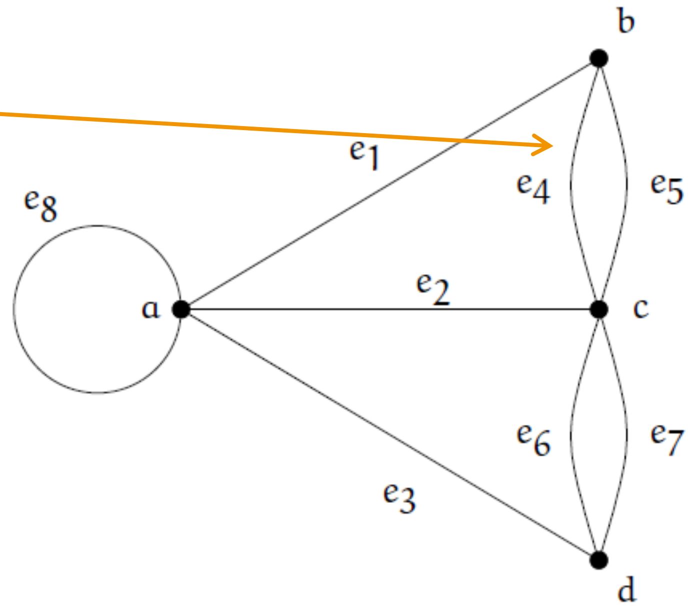


$V = \{a, b, c, d\}$

$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_8\}$

$$I = \{(e_1, \{a, b\}), (e_2, \{a, c\}), \ldots, (e_8, \{a\})\}$$

- parallele Kanten:
  Kanten sind zum selben Knoten inzident
- Schlinge (loop):
  Kante ist nur zu einem Knoten inzident



- schlichter (simple) Graph:
  Graph hat weder Schlingen noch parallele Kanten

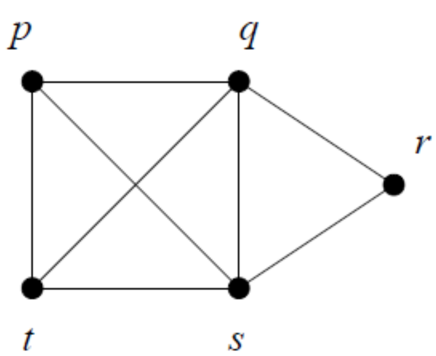
Darstellung durch Diagramme

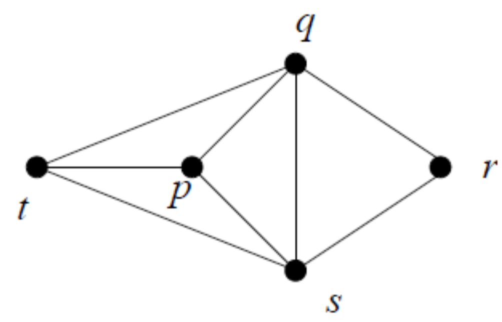
- Graphen werden durch Diagramme veranschaulicht
- für einen Graphen kann es viele verschiedene Diagramme geben

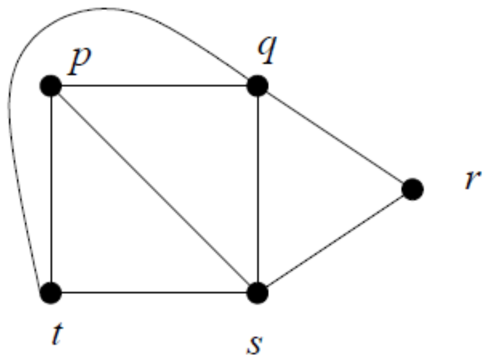
$V = \{p, q, r, s, t\}$

$E = \{\{p, q\}, \{p, s\}, \{p, t\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{q, t\}, \{r, s\}, \{s, t\}\}$

vereinfachte Schreibweise für schlichte Graphen

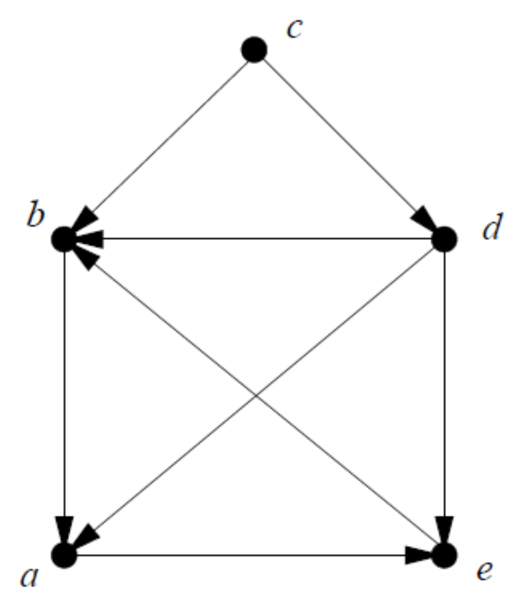






Ein gerichteter (directed) Graph G besteht aus einer

- Menge von Knoten V
- Menge von gerichteten Kanten E
  - bestehen aus geordneten Knotenpaaren (a, b) $\in V \times V$ zuordnet
  - a heißt Anfangsknoten
  - b heißt Endknoten

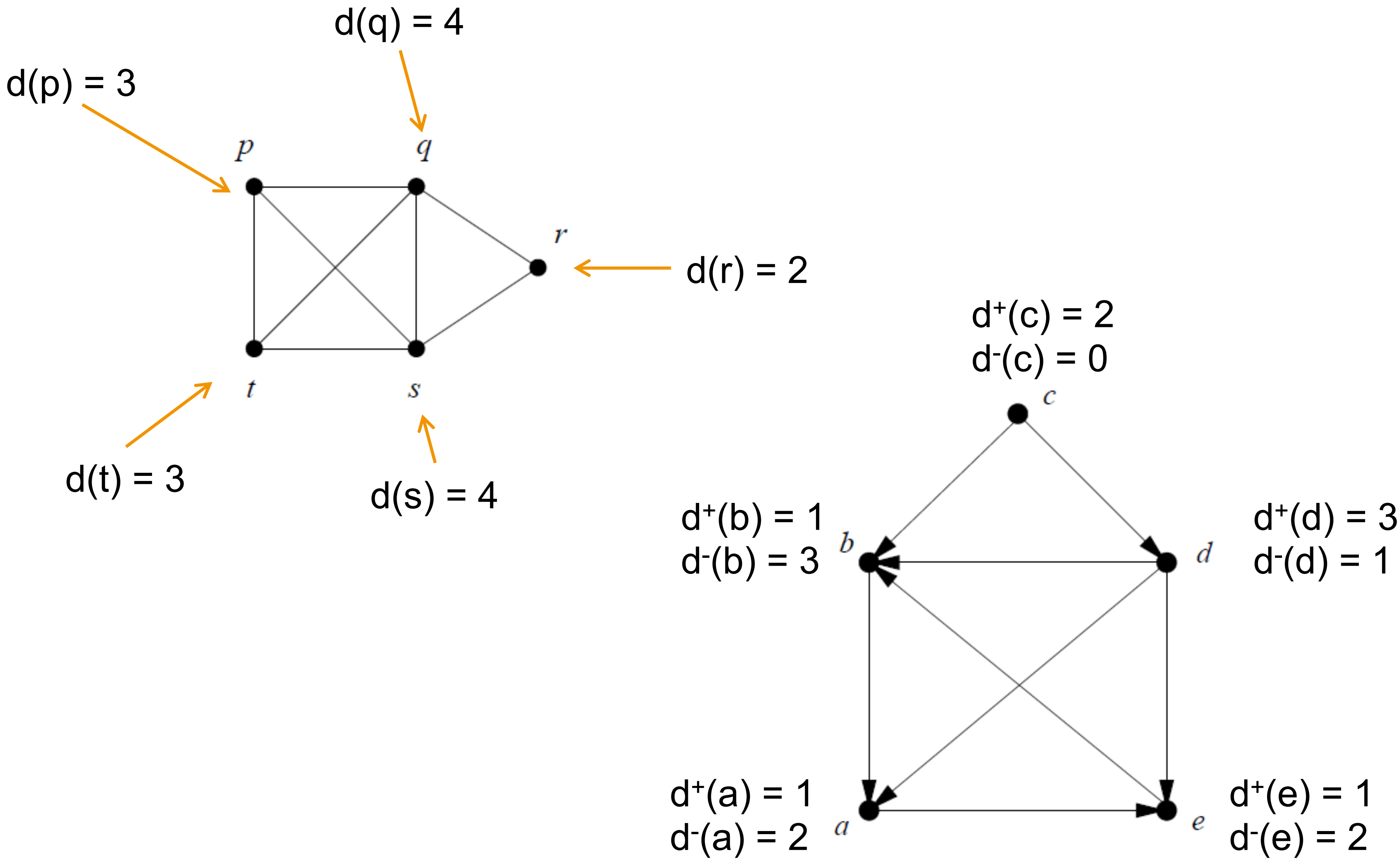


Grad eines Knotens

- ungerichtete Graphen
  - Grad (degree) des Knotens x_i
    $d(x_i)$ = Anzahl der inzidenten Kanten
- gerichtete Graphen
  - Ausgangsgrad
    $d^+(x_i)$ = Anzahl der von x_i ausgehenden Kanten
  - Eingangsgrad
    $d^-(x_i)$ = Anzahl der in x_i ankommenden Kanten
- Es gilt für einen Graphen mit n Knoten und k Kanten:

$$\sum_{i=1}^{n} d^+(x_i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(x_i) = k \qquad \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = 2k$$

Grad eines Knotens – Beispiel



Vollständiger Graph

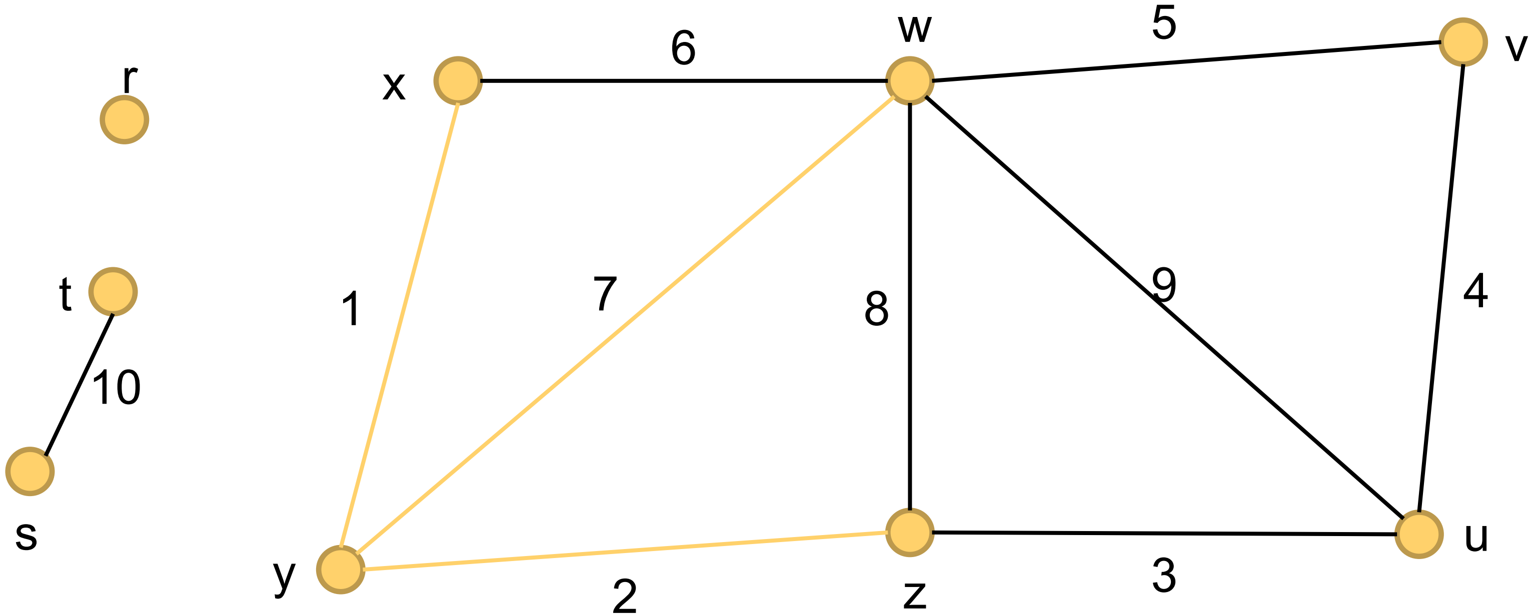
- ein Graph heißt vollständig, wenn es eine Kante von jedem Knoten zu jedem anderen gibt

- ein vollständiger (ungerichteter) Graph mit n Knoten hat $\binom{n}{2}$ Kanten

Kantenfolgen

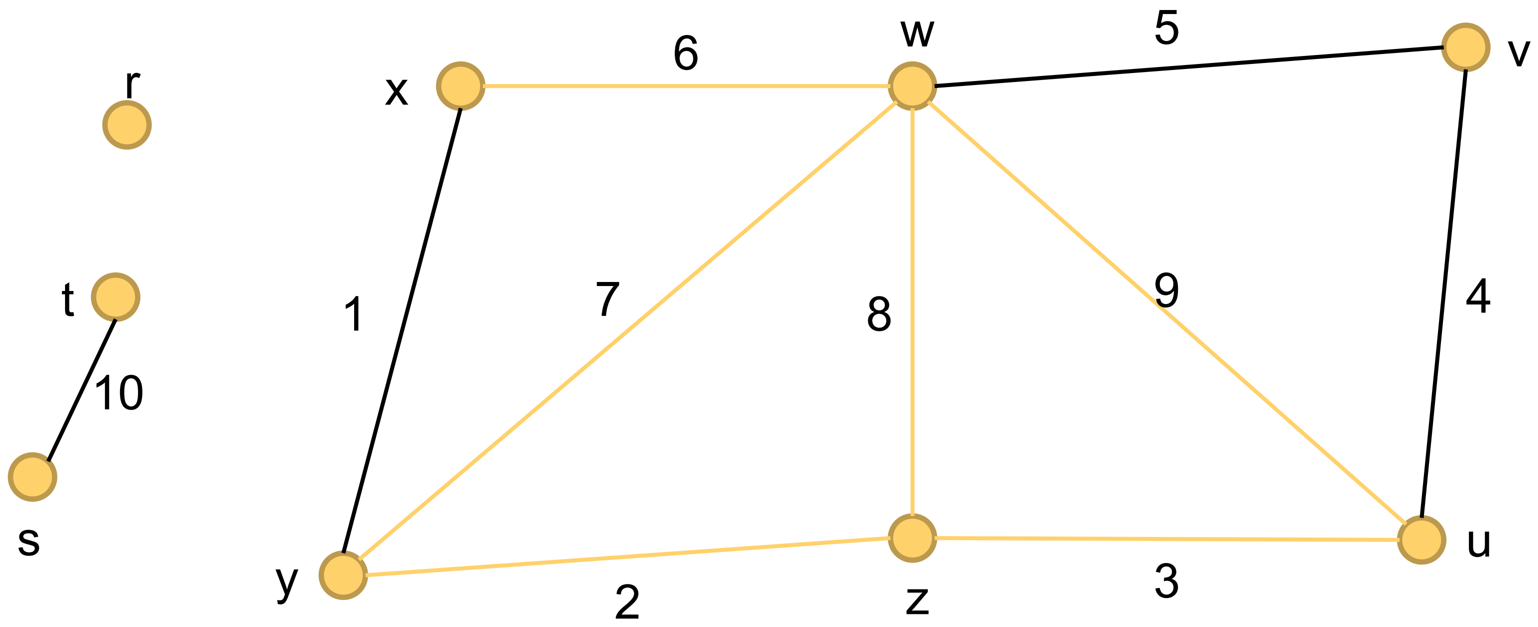
Eine Folge von adjazenten Kanten von Vertex v_0 nach v_n $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$ heißt Kantenfolge (oder Kantenzug, walk) der Länge n

- Kanten und Knoten dürfen sich wiederholen
- geschlossene Kantenfolge: $v_0 = v_n$



Kantenfolge von x nach z (aber kein Weg/Pfad): 1, 7, 7, 2 (x, y, w, y, z)

Weg (trail): alle *Kanten* sind paarweise verschieden

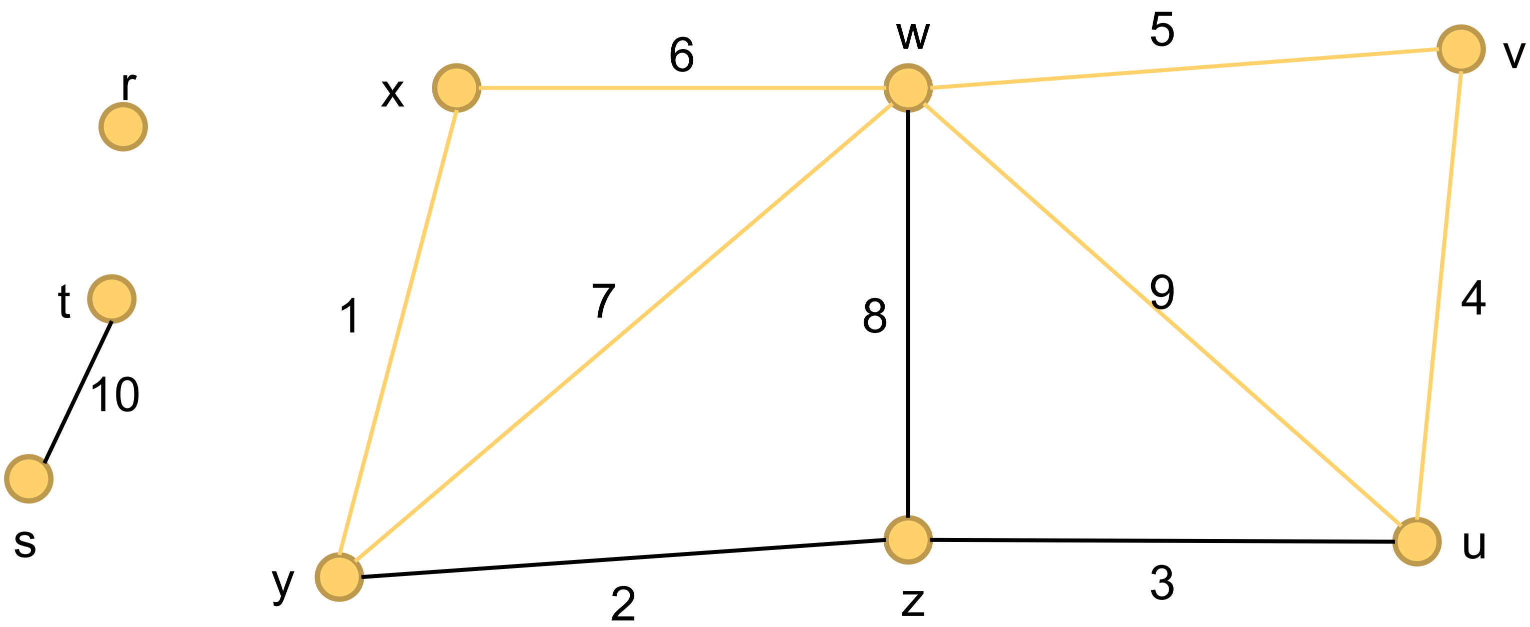


Weg von x nach z (aber kein Pfad): 6, 8, 3, 9, 7, 2 (x, w, z, u, w, y, z)

Kreise

Weg (trail): alle *Kanten* sind paarweise verschieden

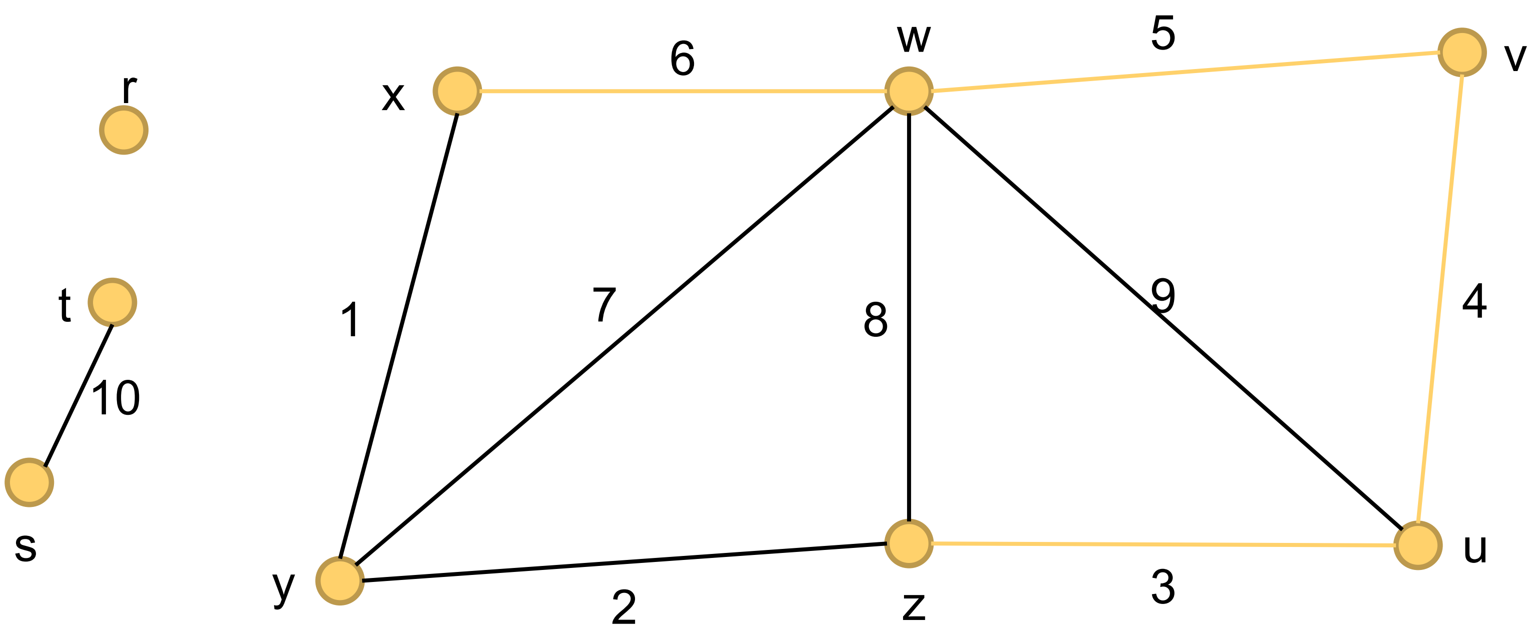
- Kreis: geschlossener Weg (closed trail) $v_0 = v_n$



Kreis (aber kein Zyklus): 6, 5, 4, 9, 7, 1 (x, w, v, u, w, y, x)

Pfade

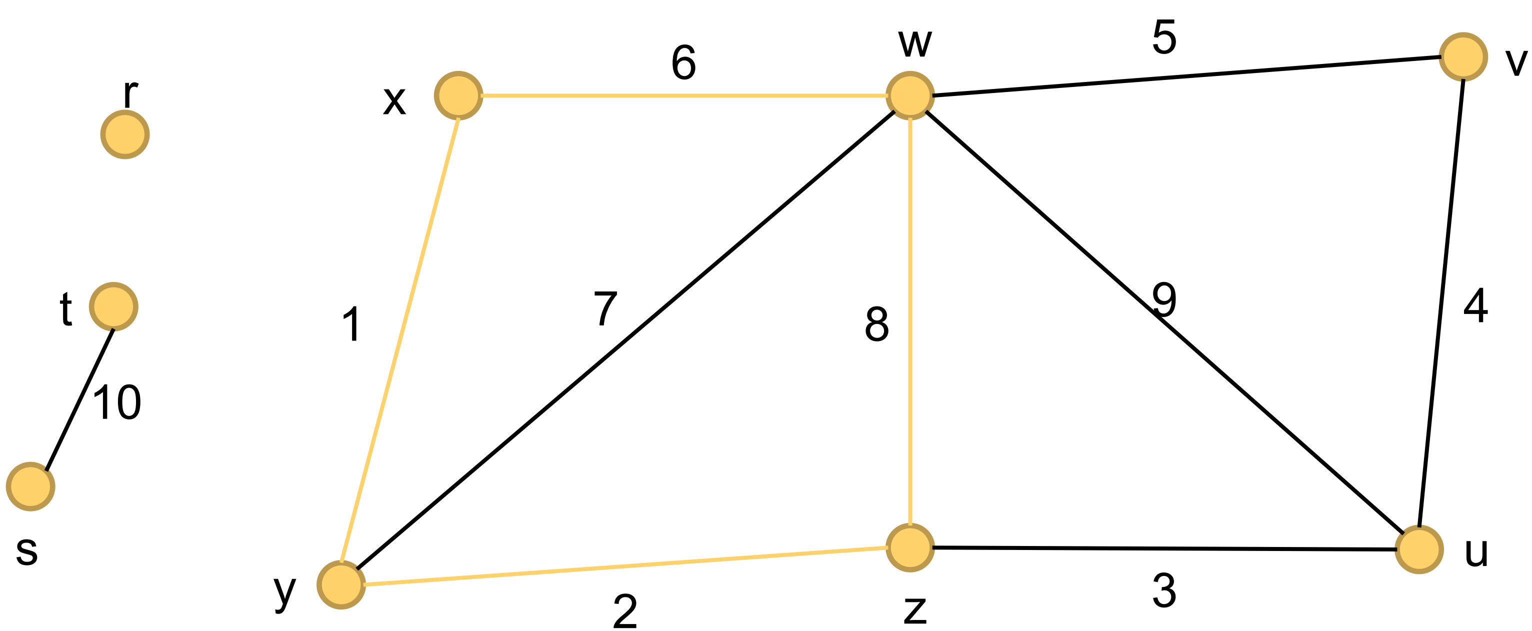
Pfad (path): alle *Knoten* sind paarweise verschieden



Pfad von x nach z: 6, 5, 4, 3 (x, w, v, u, z)

Pfad (path): alle *Knoten* sind paarweise verschieden

- Zyklus (cycle): geschlossener Pfad $v_0 = v_n$
  (Start-/Endknoten sind von der Regel ausgenommen)



Zyklus: 6, 8, 2, 1 (x, w, z, y, x)

Wege/Pfade und Kreise/Zyklen

- eine Folge von adjazenten Kanten von Vertex v_0 nach v_n $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$ heißt Kantenfolge (oder Kantenzug, walk) der Länge n
  - Kanten und Knoten dürfen sich wiederholen
  - geschlossene Kantenfolge: $v_0 = v_n$
- Weg (trail): alle *Kanten* sind paarweise verschieden
  - Kreis: geschlossener Weg (closed trail) $v_0 = v_n$
- Pfad (path): alle *Knoten* sind paarweise verschieden
  - Zyklus (cycle): geschlossener Pfad $v_0 = v_n$ (Start-/Endknoten sind von der Regel ausgenommen)

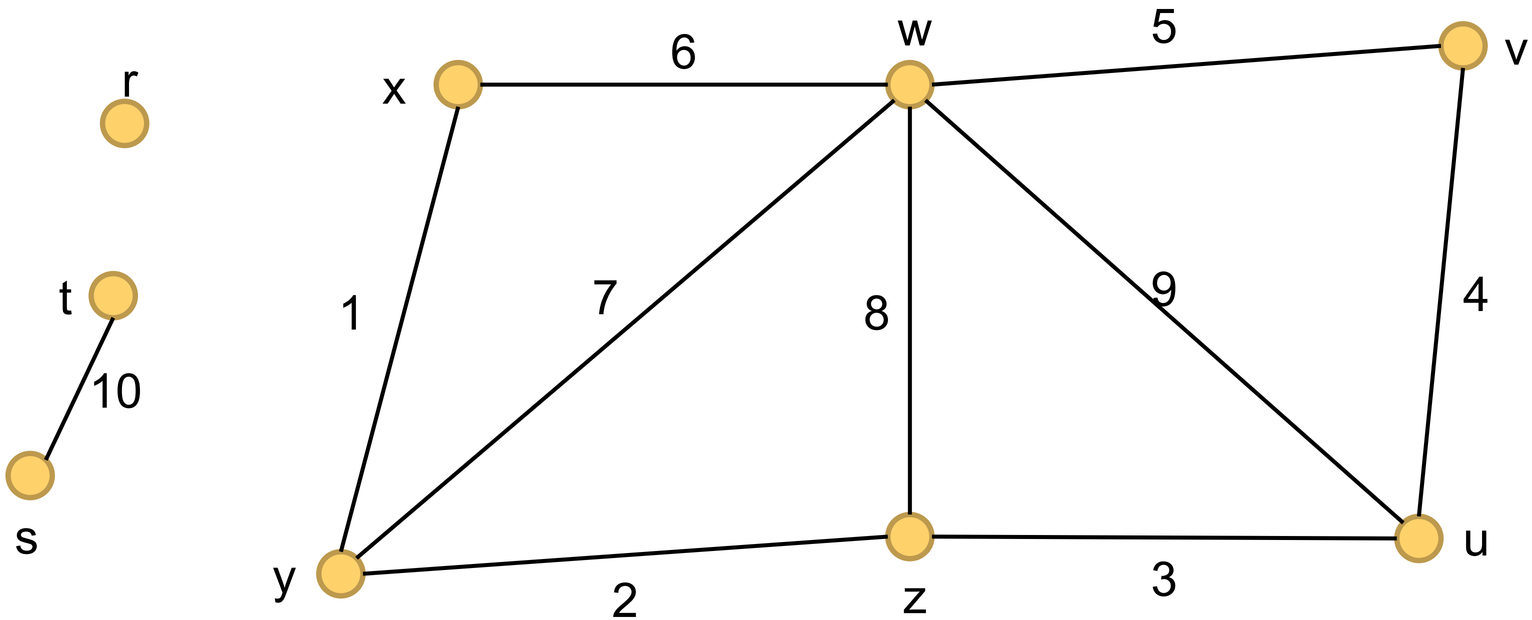
Anmerkung: Die Bezeichnungen werden in der Literatur unterschiedlich verwendet

Zusammenhang

- Zwei Knoten v, w heißen verbunden (connected) genau dann wenn es einen Weg von v nach w gibt

- Ein Graph G heißt zusammenhängend (connected) genau dann wenn die Knoten von G paarweise verbunden sind
  - jeder zusammenhängende Graph mit n Knoten hat mindestens $n - 1$ Kanten

- Eine Zusammenhangskomponente von G ist ein durch eine Knotenmenge $U \subseteq V$ induzierter Untergraph $G(U)$, der zusammenhängend und bzgl. der Knotenzahl maximal ist

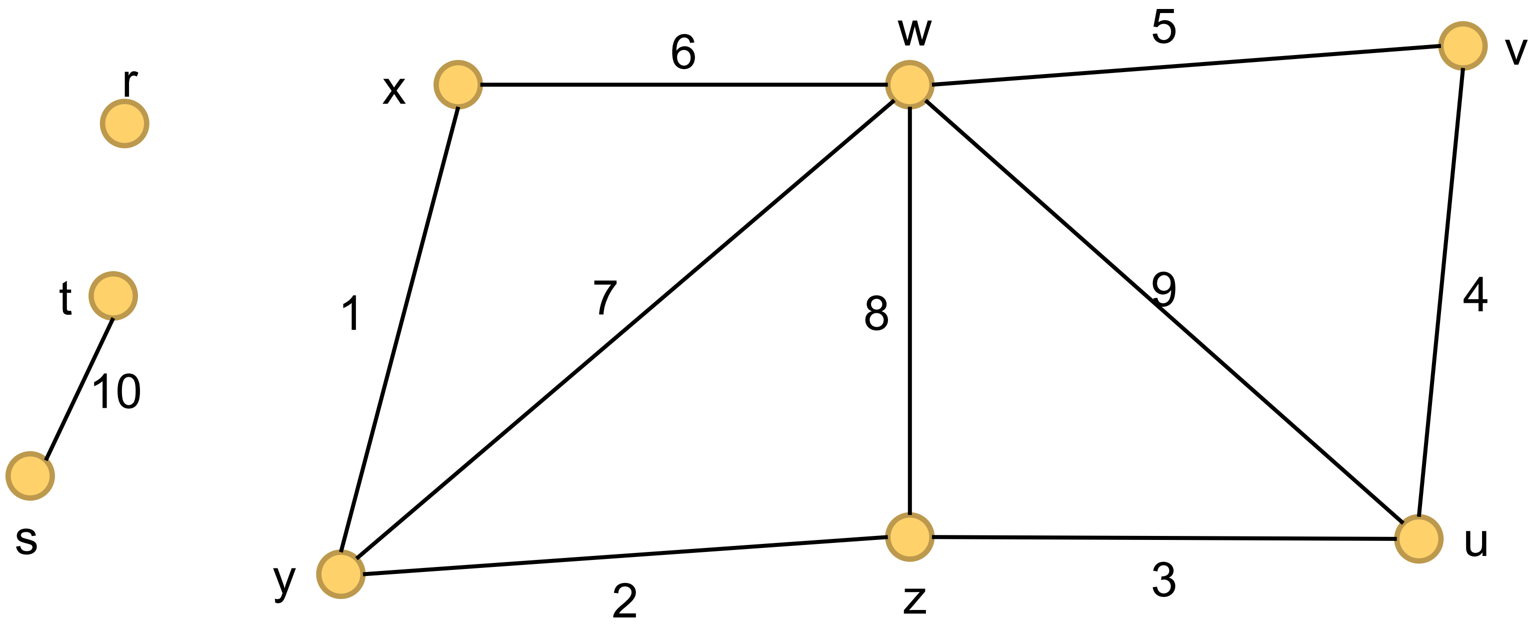


- r ist ein isolierter Knoten
- s und t sind verbunden
- s und y sind nicht verbunden
- der Graph ist nicht zusammenhängend
- er besteht aus drei Zusammenhangskomponenten
  - {r}
  - {s, t}
  - {x, y, z, u, v, w}

Clique

- Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ bzw. der induzierte Untergraph $G(U)$ heißt Clique genau dann wenn $G(U)$ ein vollständiger Graph ist

- maximale Größe einer Clique:
$$\omega(G) := \max\{|U| \mid U \text{ ist Clique in } G\}$$

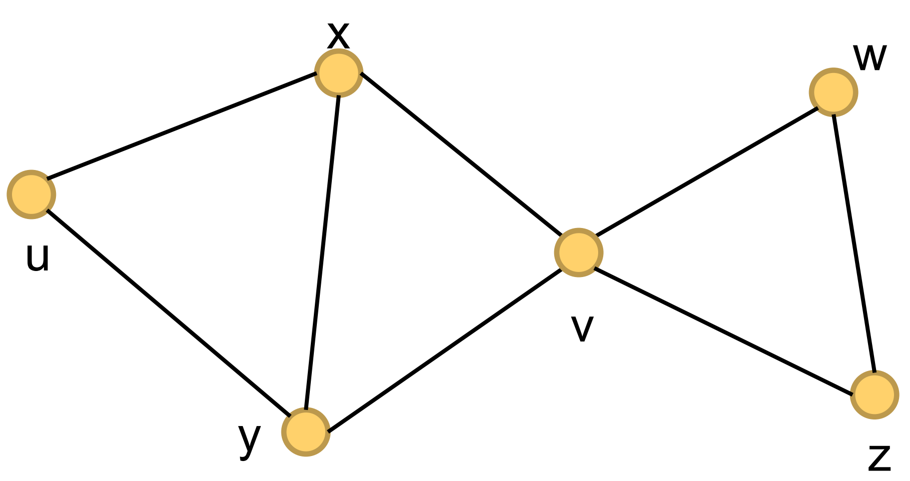


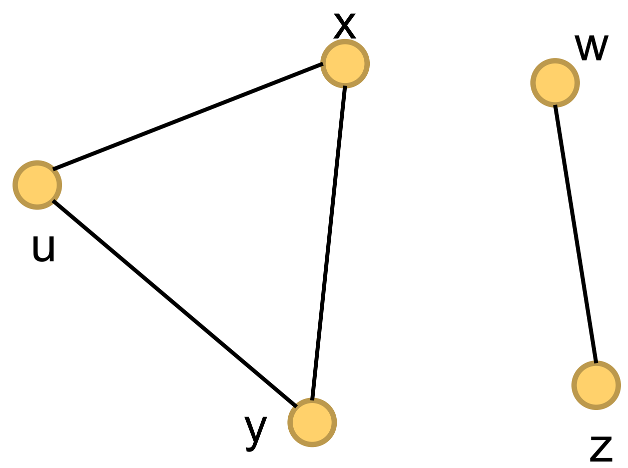
Beispiele für Cliquen:
- {r}
- {s, t}
- {x, y, w}

maximale Clique: $\omega(G) = 3$

Trennende Knoten

- Ein Knoten heißt trennend, wenn nach Herausnahme dieses Knotens (und der inzidenten Kanten) der Restgraph mehr Komponenten hat als vorher
- Beispiele
  - im Graph von vorhin gibt es keine trennenden Knoten
  - nur v ist ein trennender Knoten:





Isomorphie

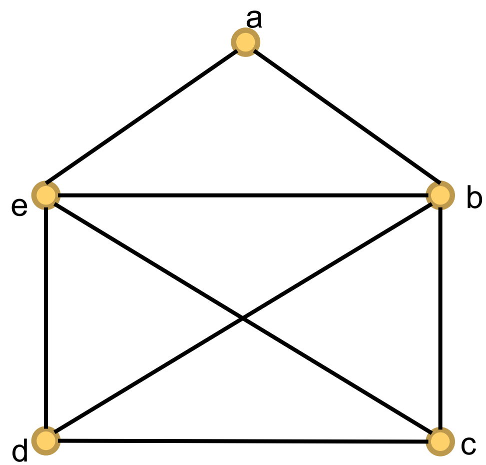
- Zwei Graphen G_1 und G_2 heißen isomorph genau dann wenn es eine bijektive Abbildung der Knotenmengen V_1 und V_2 gibt, so dass gilt

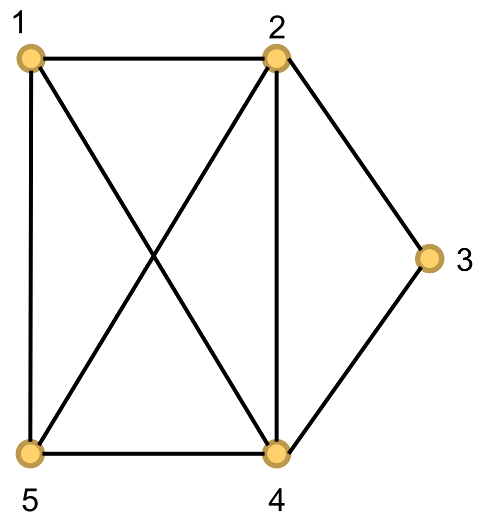
  $$\forall v, w \in V_1 : \{v, w\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\mathrm{h}(v), \mathrm{h}(w)\} \in E_2$$

  - d.h., wenn (v, w) eine Kante von G_1 ist,
dann ist $(\mathrm{h}(v), \mathrm{h}(w))$ eine Kante von G_2
  - G_2 entsteht aus G_1 durch Umbenennung der Knoten
  - isomorphe Graphen haben die gleichen Eigenschaften

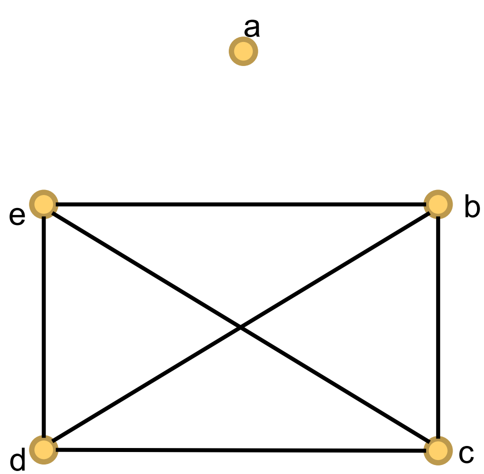
- h heißt Isomorphismus von G_1 auf G_2

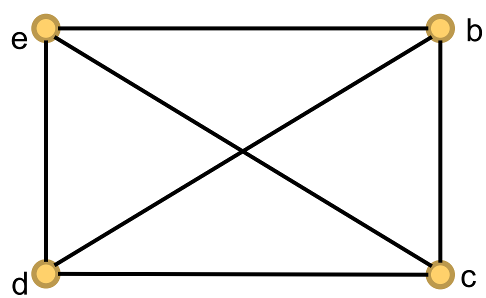
  $$G_1 \simeq G_2$$





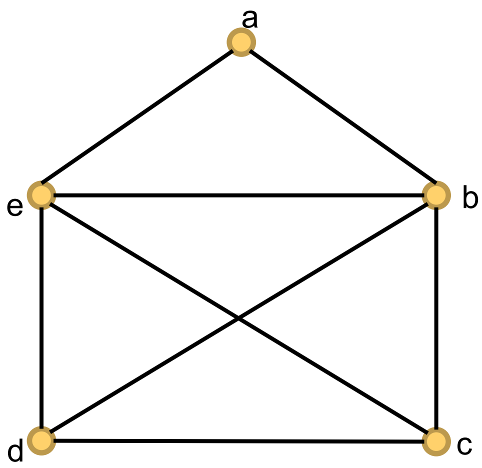
isomorph:
gedreht und
Knoten umbenannt

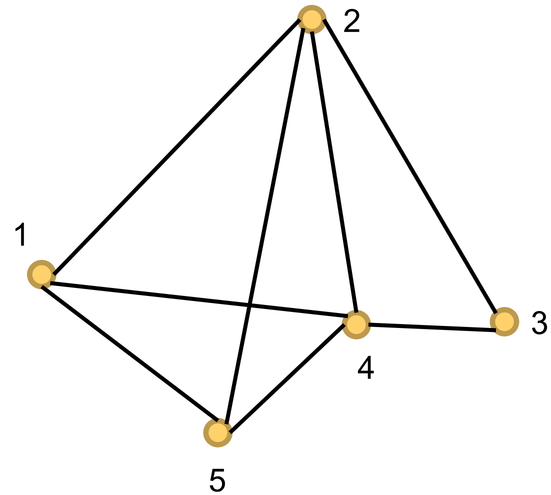




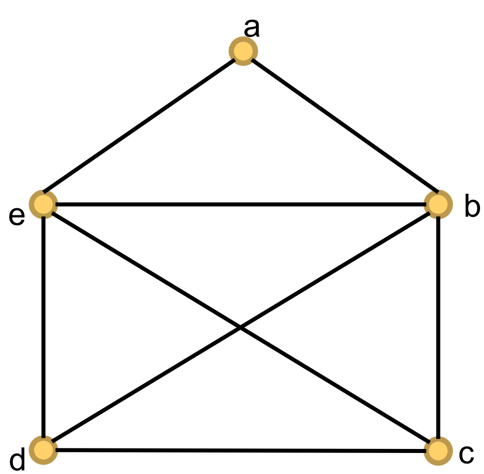
nicht isomorph:
Knotenzahl verschieden

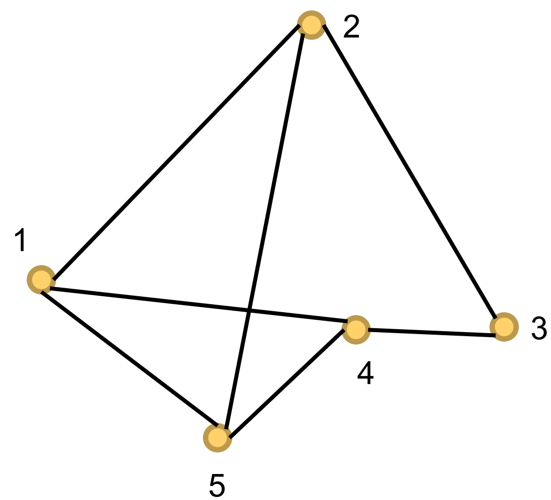
Isomorphie – Beispiel





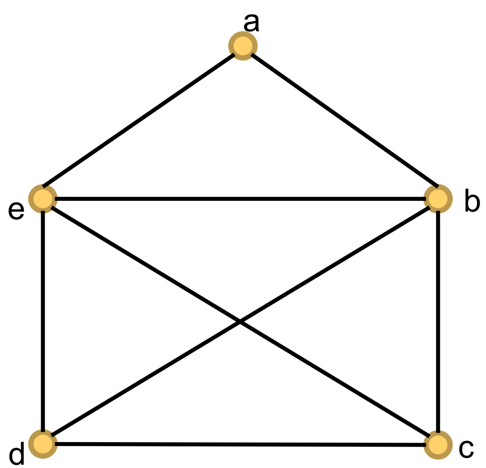
isomorph:
gedreht,
Knoten verschoben und
umbenannt

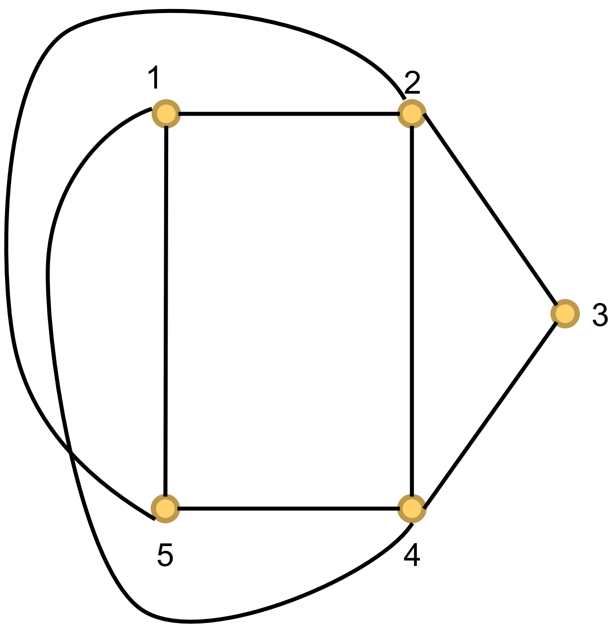


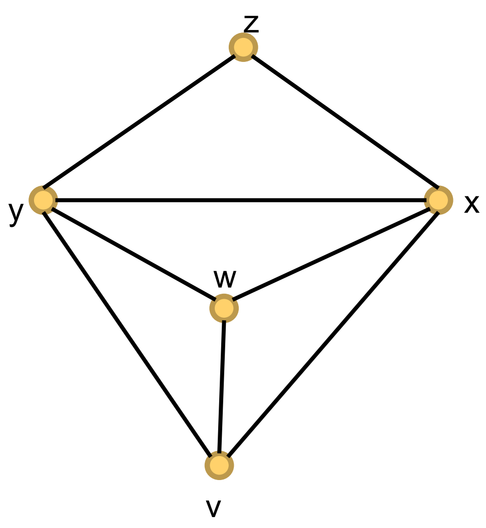


nicht isomorph:
Kantenzahl verschieden

Welche der folgenden Graphen sind isomorph?
Geben Sie für den Fall der Isomorphie die Abbildung an!

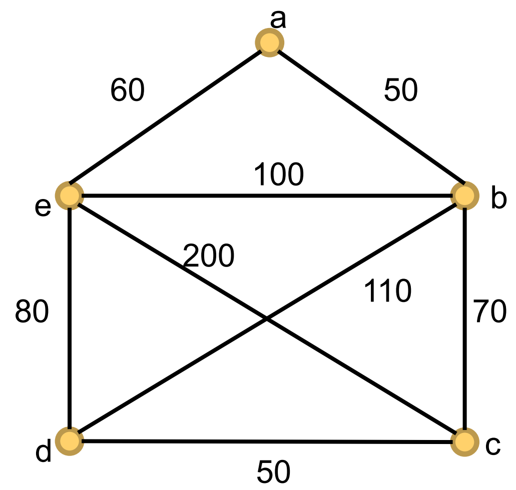






Gewichtete Graphen

- werden den Kanten eines Graphen Werte zugeordnet, so heißt dieser gewichteter Graph
- Beispiele:
  - Entfernungen/Längen
  - Zeit
  - Kosten
  - Wahrscheinlichkeiten



- prinzipiell können auch negative Gewichte sinnvoll sein
  - diese führen aber bei Abstandsberechnungen zu Problemen
  - daher wird hier vorausgesetzt, dass Gewichte nicht negativ sind
- ungewichteter Graph: Spezialfall, alle Gewichte 1

Gewichtete Graphen

- Länge einer Kantenfolge:
  Summe aller Kantengewichte

- Abstand $d(v, w)$ zweier Knoten v, w:
  - Minimum aller Wege von v nach w
  - falls es keinen Weg gibt: $d(v, w) = \infty$

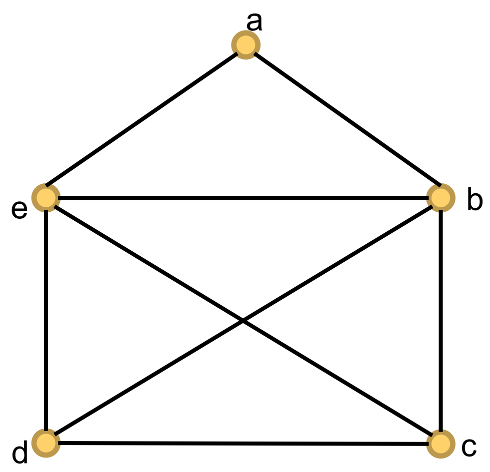
Adjazenzmatrix

- Darstellung eines Graphen in Matrixform
- Graph mit n Knoten ergibt n x n Matrix A
- Die Elemente a_{ij} von A ergeben sich für eine feste Numerierung der Knoten aus

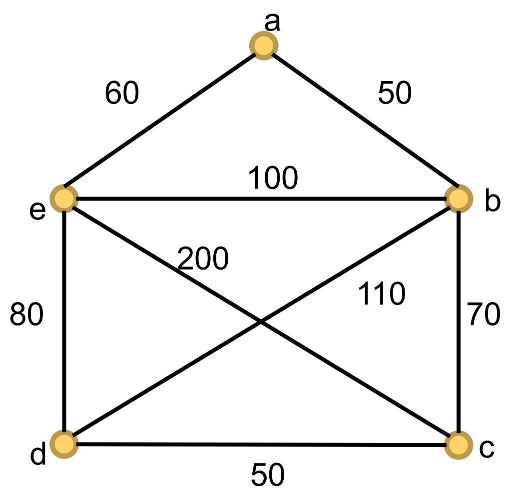
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{wenn } (x_i, x_j) \text{Kante des Graphen ist} \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

- A heißt Adjazenzmatrix des Graphen
  - für ungerichtete Graphen symmetrisch
  - für gerichtete Graphen i.a. unsymmetrisch
  - gewichtete Graphen: Verwendung der Kantengewichte an Stelle von 0 und 1

Adjazenzmatrix – Beispiel

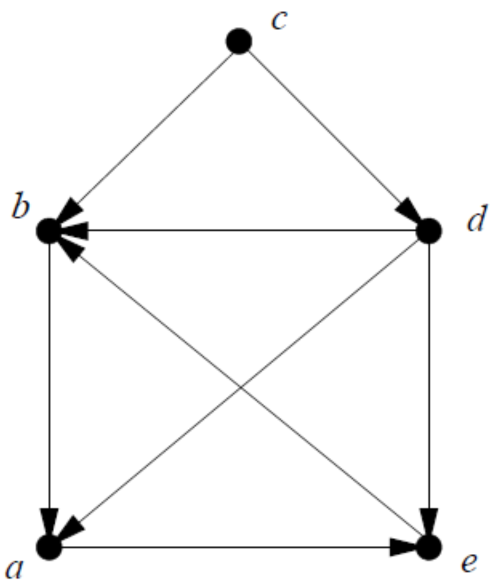


$$\begin{array}{c} \\ A = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

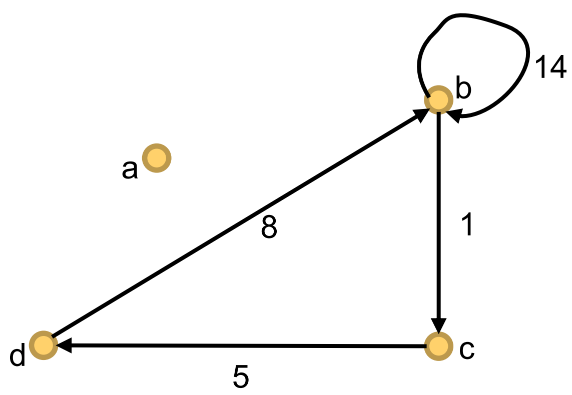


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 0 & 60 \\ 50 & 0 & 70 & 110 & 100 \\ 0 & 70 & 0 & 50 & 200 \\ 0 & 110 & 50 & 0 & 80 \\ 60 & 100 & 200 & 80 & 0 \end{pmatrix}$$

Adjazenzmatrix – Beispiel



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

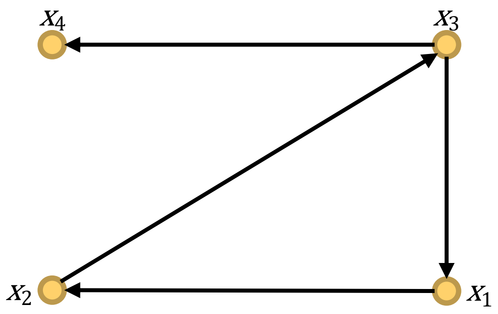


$$A = ?$$

Adjazenzmatrix – gerichtete Graphen

- Potenzen A^r der Adjazenzmatrix A erlauben Aussagen über Existenz und Anzahl von Kantenfolgen **gerichteter** Graphen
- Anzahl verschiedener Kantenfolgen der Länge r von x_i nach x_j = Element a_{ij} der Matrix A^r
- Graph mit n Knoten ist **azyklisch**, wenn es ein r mit $1 \leq r < n$ gibt, so dass gilt:

  $A^r \neq \mathbf{0}$, aber $A^s = \mathbf{0}\ \forall\ s > r$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alle Potenzen A, A^2, A^3, A^4 sind ungleich $\mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$ Graph hat Zyklen

Wegematrix

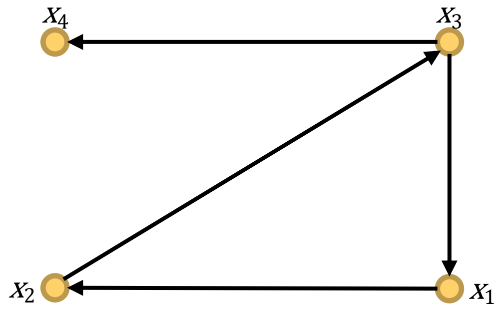
- Wegematrix W gibt an, ob ein Weg von x_i nach x_j existiert:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, \text{wenn Weg von } x_i \text{ nach } x_j \text{existiert} \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sonst} \end{cases}$$

- W erhält man, indem man in der Matrix

$$A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n$$

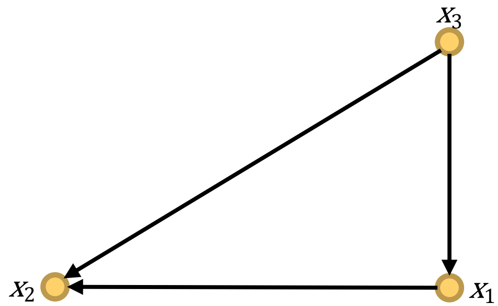
die von Null verschiedenen Elemente durch 1 ersetzt



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{A}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe



1. Bestimmen Sie die Adjazenzmatrix und ihre Potenzen.
2. Welche Aussagen lassen sich daraus ableiten?
3. Bestimmen Sie die Wegematrix

- Adjazenzmatrix
  - ungerichtete Graphen: es genügt die Speicherung der halben Matrix
  - enthält oft viele Nullen

- Adjazenzliste
  - verkettete Liste der Knoten
  - enthält für jeden Knoten eine verkettete Liste seiner Nachbarn
  - kompaktere Form als Adjazenzmatrix

Adjazenzliste – Beispiel