Министерство образования и науки Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладной математики

Лабораторная работа №1

по дисциплине «Численные методы»

Группа ПМ-63

Студент Майер В. А.

Преподаватель Задорожный А.Г.

Вариант 10

Новосибирск, 2018

1. Цель работы

Разработать программу решения СЛАУ методом с LDU-разложением и хранением матрицы в профильном формате. Исследовать накопление погрешности и ее зависимость от числа обусловленности. Сравнить реализованный метод по точности получаемого решения и количеству действий с методом Гаусса.

1. Анализ

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений:

LDU-разложение является разложением матрицы A в произведение нижнетреугольной матрицы L с единицами на диагонали, диагональной матрицы D и верхнетреугольной матрицы U с единицами на диагонали.

Предположим, что нам удалось разложить матрицу:

Таким образом, решение СЛАУ сводится к четырем основным этапам:

1) из элементов матрицы  найти элементы матриц L, D и U;

2) решить систему с нижнетреугольной матрицей L;

3) получить вектор z;

4) решить систему с верхнетреугольной матрицей U.

Рассмотрим алгоритм получения LDU-разложения. Матрицы L, D и U будем искать в следующем виде:

, ,.

Перемножая L, D и U мы получим начальную матрицу А, следовательно, можно построить уравнение для каждого элемента матрицы A с неизвестными ,  и  (n – размерность СЛАУ):



Решая систему (1.7), можно получить общие формулы для нахождения элементов матриц L, D и U:

1. Влияние увеличения числа обусловленности на точность решения

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ak = | 5+10-k | -3 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 2 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -2 | 0 | 10 | 0 | -4 | -2 | 0 | -2 | 0 | 0 |
| -3 | -2 | 0 | 12 | -3 | -1 | 0 | -3 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | -3 | -1 | 11 | -4 | 0 | 0 | 0 | -3 |
| 0 | -3 | -1 | -4 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | -4 | -1 | -2 | -1 | -3 | 13 | 0 | -2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -2 | 0 | -1 | -4 | 8 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Xk = | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Fk = | -11  +10-k | -2 | -20 | -4 | -12 | 23 | -1 | 31 | -1 | 19 | |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | Xk (одинарная точность) | X\* - Xk (одинарная точность) | Xk (двойная точность) | X\* - Xk (дойная точность) | Xk (скалярное произведение) | X\* - Xk (скалярное произведение) |
| 0 | 0.9999939  1.9999926  2.9999926  3.9999926  4.9999924  5.9999928  6.9999928  7.9999928  8.9999933  9.9999933 | 6.079674e-06  7.390976e-06  7.390976e-06  7.390976e-06  7.629395e-06  7.152557e-06  7.152557e-06  7.152557e-06  6.675720e-06  6.675720e-06 | 1.000000000000012  2.000000000000014  3.000000000000014  4.000000000000014  5.000000000000014  6.000000000000015  7.000000000000014  8.000000000000014  9.000000000000016  10.000000000000016 | -1.176836e-14  -1.421085e-14  -1.421085e-14  -1.421085e-14  -1.421085e-14  -1.509903e-14  -1.421085e-14  -1.421085e-14  -1.598721e-14  -1.598721e-14 | 0.9999946  1.9999933  2.9999933  3.9999940  4.9999933  5.9999933  6.9999933  7.9999933  8.9999933  9.9999933 | 5.364418e-06  6.675720e-06  6.675720e-06  5.960464e-06  6.675720e-06  6.675720e-06  6.675720e-06  6.675720e-06  6.675720e-06  6.675720e-06 |
| 1 | 0.9999701  1.9999695  2.9999695  3.9999697  4.9999695  5.9999695  6.9999695  7.9999695  8.9999704  9.9999704 | 2.986193e-05  3.051758e-05  3.051758e-05  3.027916e-05  3.051758e-05  3.051758e-05  3.051758e-05  3.051758e-05  2.956390e-05  2.956390e-05 | 0.999999999999944  1.999999999999943  2.999999999999943  3.999999999999944  4.999999999999943  5.999999999999943  6.999999999999944  7.999999999999944  8.999999999999945  9.999999999999945 | 5.584422e-14  5.684342e-14  5.684342e-14  5.595524e-14  5.684342e-14  5.684342e-14  5.595524e-14  5.595524e-14  5.506706e-14  5.506706e-14 | 1.0000205  2.0000210  3.0000210  4.0000205  5.0000210  6.0000210  7.0000210  8.0000210  9.0000210  10.0000210 | -2.050400e-05  -2.098083e-05  -2.098083e-05  -2.050400e-05  -2.098083e-05  -2.098083e-05  -2.098083e-05  -2.098083e-05  -2.098083e-05  -2.098083e-05 |
| 2 | 0.9999998  1.9999998  2.9999998  3.9999993  4.9999995  5.9999995  6.9999995  7.9999995  9.0000000  10.0000000 | 2.384186e-07  2.384186e-07  2.384186e-07  7.152557e-07  4.768372e-07  4.768372e-07  4.768372e-07  4.768372e-07  0.000000e+00  0.000000e+00 | 0.999999999999293  1.999999999999291  2.999999999999291  3.999999999999292  4.999999999999290  5.999999999999291  6.999999999999291  7.999999999999291  8.999999999999289  9.999999999999289 | 7.071010e-13  7.087664e-13  7.087664e-13  7.083223e-13  7.096546e-13  7.087664e-13  7.087664e-13  7.087664e-13  7.105427e-13  7.105427e-13 | 1.0004508  2.0004518  3.0004518  4.0004516  5.0004520  6.0004520  7.0004520  8.0004520  9.0004530  10.0004530 | -4.508495e-04  -4.518032e-04  -4.518032e-04  -4.515648e-04  -4.520416e-04  -4.520416e-04  -4.520416e-04  -4.520416e-04  -4.529953e-04  -4.529953e-04 |
| 3 | 0.9962027  1.9962020  2.9962020  3.9962020  4.9962015  5.9962015  6.9962015  7.9962015  8.9962015  9.9962015 | 3.797293e-03  3.798008e-03  3.798008e-03  3.798008e-03  3.798485e-03  3.798485e-03  3.798485e-03  3.798485e-03  3.798485e-03  3.798485e-03 | 1.000000000014136  2.000000000014140  3.000000000014140  4.000000000014139  5.000000000014141  6.000000000014140  7.000000000014140  8.000000000014140  9.000000000014142  10.000000000014142 | -1.413625e-11  -1.413980e-11  -1.413980e-11  -1.413891e-11  -1.414069e-11  -1.413980e-11  -1.413980e-11  -1.413980e-11  -1.414158e-11  -1.414158e-11 | 1.0051655  2.0051665  3.0051665  4.0051665  5.0051665  6.0051661  7.0051670  8.0051670  9.0051670  10.0051670 | -5.165458e-03  -5.166531e-03  -5.166531e-03  -5.166531e-03  -5.166531e-03  -5.166054e-03  -5.167007e-03  -5.167007e-03  -5.167007e-03  -5.167007e-03 |
| 4 | 1.0094780  2.0094781  3.0094781  4.0094786  5.0094786  6.0094781  7.0094786  8.0094786  9.0094786  10.0094786 | -9.477973e-03  -9.478092e-03  -9.478092e-03  -9.478569e-03  -9.478569e-03  -9.478092e-03  -9.478569e-03  -9.478569e-03  -9.478569e-03  -9.478569e-03 | 0.999999999929324  1.999999999929323  2.999999999929323  3.999999999929323  4.999999999929323  5.999999999929322  6.999999999929324  7.999999999929324  8.999999999929322  9.999999999929322 | 7.067558e-11  7.067680e-11  7.067680e-11  7.067680e-11  7.067680e-11  7.067769e-11  7.067591e-11  7.067591e-11  7.067769e-11  7.067769e-11 | 0.9728619  1.9728613  2.9728613  3.9728615  4.9728613  5.9728613  6.9728613  7.9728613  8.9728613  9.9728613 | 2.713811e-02  2.713871e-02  2.713871e-02  2.713847e-02  2.713871e-02  2.713871e-02  2.713871e-02  2.713871e-02  2.713871e-02  2.713871e-02 |
| 5 | 0.3913060  1.3913047  2.3913047  3.3913047  4.3913050  5.3913050  6.3913040  7.3913040  8.3913040  9.3913040 | 6.086940e-01  6.086953e-01  6.086953e-01  6.086953e-01  6.086950e-01  6.086950e-01  6.086960e-01  6.086960e-01  6.086960e-01  6.086960e-01 | 0.999999999116578  1.999999999116577  2.999999999116577  3.999999999116576  4.999999999116577  5.999999999116576  6.999999999116576  7.999999999116576  8.999999999116577  9.999999999116577 | 8.834219e-10  8.834231e-10  8.834231e-10  8.834236e-10  8.834231e-10  8.834240e-10  8.834240e-10  8.834240e-10  8.834231e-10  8.834231e-10 | 0.7191983  1.7191978  2.7191978  3.7191980  4.7191978  5.7191978  6.7191978  7.7191978  8.7191973  9.7191973 | 2.808017e-01  2.808022e-01  2.808022e-01  2.808020e-01  2.808022e-01  2.808022e-01  2.808022e-01  2.808022e-01  2.808027e-01  2.808027e-01 |
| 6 | Матрица не может быть посчитана |  | 1.000000010601026  2.000000010601028  3.000000010601028  4.000000010601028  5.000000010601028  6.000000010601028  7.000000010601031  8.000000010601031  9.000000010601029  10.000000010601029 | -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08 | Матрица не может быть посчитана |  |
| 7 | /|\ | /|\ | 0.999999840984630  1.999999840984627  2.999999840984627  3.999999840984627  4.999999840984627  5.999999840984627  6.999999840984625  7.999999840984625  8.999999840984627  9.999999840984627 | 1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07 | /|\ | /|\ |
| 8 | /|\ | /|\ | 1.000000353367440  2.000000353367441  3.000000353367441  4.000000353367442  5.000000353367442  6.000000353367440  7.000000353367442  8.000000353367442  9.000000353367442  10.000000353367442 | -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07 | /|\ | /|\ |
| 9 | /|\ | /|\ | 0.999999999999998  1.999999999999998  2.999999999999998  3.999999999999998  4.999999999999998  5.999999999999998  6.999999999999997  7.999999999999997  9.000000000000000  10.000000000000000 | 2.109424e-15  2.220446e-15  2.220446e-15  1.776357e-15  1.776357e-15  1.776357e-15  2.664535e-15  2.664535e-15  0.000000e+00  0.000000e+00 | /|\ | /|\ |
| 10 | /|\ | /|\ | 1.000000000000002  2.000000000000002  3.000000000000002  4.000000000000002  5.000000000000002  6.000000000000002  7.000000000000002  8.000000000000002  9.000000000000000  10.000000000000000 | -2.220446e-15  -2.220446e-15  -2.220446e-15  -1.776357e-15  -1.776357e-15  -1.776357e-15  -1.776357e-15  -1.776357e-15  0.000000e+00  0.000000e+00 | /|\ | /|\ |
| 11 | /|\ | /|\ | 1.000706838664074  2.000706838664076  3.000706838664076  4.000706838664075  5.000706838664075  6.000706838664074  7.000706838664076  8.000706838664076  9.000706838664074  10.000706838664074 | -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04 | /|\ | /|\ |
| 12 | /|\ | /|\ | 0.989417989417989  1.989417989417987  2.989417989417987  3.989417989417988  4.989417989417987  5.989417989417987  6.989417989417988  7.989417989417988  8.989417989417989  9.989417989417989 | 1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02 | /|\ | /|\ |
| 13 | /|\ | /|\ | 0.894736842105266  1.894736842105265  2.894736842105265  3.894736842105264  4.894736842105263  5.894736842105264  6.894736842105264  7.894736842105264  8.894736842105264  9.894736842105264 | 1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01 | /|\ | /|\ |
| 14 | /|\ | /|\ | Матрица не может быть посчитана |  | /|\ | /|\ |

Ухудшение точности происходит из-за последнего элемента в матрице D (d10), т.к. при увеличение k, уменьшается влияние добавки на результат, а определитель самой матрицы A равен 0, это значит, что элемент d10 стремится к 0. Для получения z10 мы будем делить число y10 на число, которое стремиться к 0. Это отношение и дает погрешность.

1. Исследования на матрицах Гильберта различной размерности

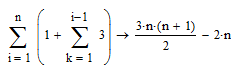
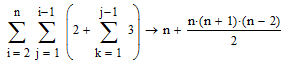
|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | Xk (одинарная точность) | X\* - Xk (одинарная точность) | Xk (двойная точность) | X\* - Xk (дойная точность) | Xk (скалярное произведение) | X\* - Xk (скалярное произведение) |
| 1 | 1.0000000 | 0.000000e+00 | 1.000000000000000 | 0.000000e+00 | 1.0000000 | 0.000000e+00 |
| 2 | 1.0000004  1.9999993 | -3.576279e-07  7.152557e-07 | 1.000000000000001  1.999999999999999 | -6.661338e-16  1.332268e-15 | 1.0000004  1.9999993 | --3.576279e-07  7.152557e-07 |
| 3 | 1.0000020  1.9999888  3.0000107 | -2.026558e-06  1.120567e-05  -1.072884e-05 | 1.000000000000004  1.999999999999983  3.000000000000015 | -3.774758e-15  1.731948e-14  -1.509903e-14 | 1.0000002  1.9999995  3.0000000 | -2.384186e-07  4.768372e-07  0.000000e+00 |
| 4 | 0.9999881  2.0001221  2.9997277  4.0001669 | 1.192093e-05  -1.220703e-04  2.722740e-04  -1.668930e-04 | 1.000000000000099  1.999999999998847  3.000000000002832  3.999999999998135 | -9.880985e-14  1.153300e-12  -2.832401e-12  1.865175e-12 | 0.9999816  2.0001903  2.9995661  4.0002713 | 1.835823e-05  -1.902580e-04  4.339218e-04  -2.713203e-04 |
| 5 | 0.9999735  2.0005670  2.9974289  4.0039711  4.9980354 | 2.646446e-05  -5.669594e-04  2.571106e-03  -3.971100e-03  1.964569e-03 | 1.000000000000430  1.999999999991804  3.000000000035821  3.999999999945366  5.000000000026929 | -4.301004e-13  8.195666e-12  -3.582112e-11  5.463363e-11  -2.692868e-11 | 0.9999900  2.0002532  2.9987812  4.0019464  4.9990153 | 1.001358e-05  -2.532005e-04  1.218796e-03  -1.946449e-03  9.846687e-04 |
| 6 | 1.0005798  1.9862485  3.0808086  3.8124685  5.1881227  5.9317074 | -5.798340e-04  1.375151e-02  -8.080864e-02  1.875315e-01  -1.881227e-01  6.829262e-02 | 0.999999999998758  2.000000000033129  2.999999999788191  4.000000000526052  4.999999999441110  6.000000000213274 | 1.242340e-12  -3.312950e-11  2.118092e-10  -5.260521e-10  5.588898e-10  -2.132738e-10 | 0.9995852  2.0145397  2.8902922  4.3058014  4.6457872  6.1446390 | 4.148483e-04  -1.453972e-02  1.097078e-01  -3.058014e-01  3.542128e-01  -1.446390e-01 |
| 7 | 0.9945756  2.2088377  1.0499020  11.3856487  -8.2466011  17.2364578  3.3684211 | 5.424380e-03  -2.088377e-01  1.950098e+00  -7.385649e+00  1.324660e+01  -1.123646e+01  3.631579e+00 | 0.999999999993768  2.000000000241329  2.999999997745670  4.000000008524220  4.999999984747841  6.000000012903040  6.999999995841168 | 6.232126e-12  -2.413292e-10  2.254330e-09  -8.524220e-09  1.525216e-08  -1.290304e-08  4.158832e-09 | 1.0023546  1.9025111  3.9584868  0.2282982  11.9677811  -0.0513897  8.9937983 | -2.354622e-03  9.748888e-02  -9.584868e-01  3.771702e+00  -6.967781e+00  6.051390e+00  -1.993798e+00 |
| 8 | Матрица не может быть посчитана |  | 1.000000000058947  1.999999996593750  3.000000046705909  3.999999738348894  5.000000722874683  5.999998956396468  7.000000754728866  7.999999784231155 | -5.894663e-11  3.406250e-09  -4.670591e-08  2.616511e-07  -7.228747e-07  1.043604e-06  -7.547289e-07  2.157688e-07 | 0.9941851  2.2146924  1.1314449  10.2261848  -3.4771442  8.4814377  10.8379955  5.5867562 | 5.814910e-03  -2.146924e-01  1.868555e+00  -6.226185e+00  8.477144e+00  -2.481438e+00  -3.837996e+00  2.413244e+00 |
| 9 | /|\ | /|\ | 1.000000002500557  1.999999824554480  3.000003005845477  3.999978341792559  5.000080025222925  5.999835630663991  7.000189697135063  7.999884947800751  9.000028526440532 | -2.500557e-09  1.754455e-07  -3.005845e-06  2.165821e-05  -8.002522e-05  1.643693e-04  -1.896971e-04  1.150522e-04  -2.852644e-05 | Матрица не может быть посчитана |  |
| 10 | /|\ | /|\ | 1.000000004595354  1.999999591534530  3.000008865194702  3.999918339044051  5.000393256259114  5.998911142628408  7.001796378881245  7.998256472407199  9.000918503643355  9.999797442225070 | -4.595354e-09  4.084655e-07  -8.865195e-06  8.166096e-05  -3.932563e-04  1.088857e-03  -1.796379e-03  1.743528e-03  -9.185036e-04  2.025578e-04 | /|\ | /|\ |
| 11 | /|\ | /|\ | 1.000000076461369  1.999992092164025  3.000203033912005  3.997750135897830  5.013299933791998  5.953556526896495  7.100515065618588  7.863704482161239  9.112668308327819  9.948098288282310  11.010212097407699 | -7.646137e-08  7.907836e-06  -2.030339e-04  2.249864e-03  -1.329993e-02  4.644347e-02  -1.005151e-01  1.362955e-01  -1.126683e-01  5.190171e-02  -1.021210e-02 | /|\ | /|\ |
| 12 | /|\ | /|\ | 1.000000184989908  1.999978381472006  3.000632808198202  3.991912571819874  5.055972554912605  5.766549074447063  7.620335037536279  6.924790065050665  10.211259818633124  9.144963537630460  11.343578381925482  11.940027554907205 | -1.849899e-07  2.161853e-05  -6.328082e-04  8.087428e-03  -5.597255e-02  2.334509e-01  -6.203350e-01  1.075210e+00  -1.211260e+00  8.550365e-01  -3.435784e-01  5.997245e-02 | /|\ | /|\ |
| 13 | /|\ | /|\ | Матрица не может быть посчитана | /|\ | /|\ | /|\ |

Элемент матрицы D – отношение определителей главных миноров. Определитель матрицы Гильберта – обратное целое число, то есть элементы матрицы D постепенно уменьшаются(di < di+1 ) и при поиске Z () при большом i(7 для одинарной точности и 13 для двоичной) мы получаем деление большого числа, на малое, что имеет очень большую погрешность. В этом случае накопление суммы скалярных произведений в двоичной точности не играет никакой роли, т.к. погрешность накопления имеет другой порядок погрешности.

1. Расчет количества действий реализованного метода решений

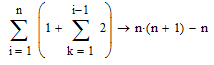
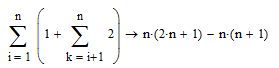
Количество действий, для получения матриц LDU в худшем случае(полная матрица)

Построение матриц D и L, U

, 

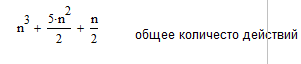
 

Поиск Y , Z, X

Общий результат

1. Сравнение с методом Гаусса c выбором главного элемента

Сравнение по точность на примере 3 и 4 пункта

Будем использовать двойную точность в обоих методах.

3) Влияние увеличения числа обусловленности на точность решения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| k | Xk (LDU) | X\* -Xk (LDU) | Xk (Gauss+) | X\* -Xk (Gauss+) |
| 0 | 1.000000000000012  2.000000000000014  3.000000000000014  4.000000000000014  5.000000000000014  6.000000000000015  7.000000000000014  8.000000000000014  9.000000000000016  10.000000000000016 | -1.176836e-14  -1.421085e-14  -1.421085e-14  -1.421085e-14  -1.421085e-14  -1.509903e-14  -1.421085e-14  -1.421085e-14  -1.598721e-14  -1.598721e-14 | 1.000000000000026  2.000000000000032  3.000000000000031  4.000000000000031  5.000000000000032  6.000000000000033  7.000000000000036  8.000000000000034  9.000000000000034  10.000000000000034 | -2.597922e-14  -3.153033e-14  -3.108624e-14  -3.108624e-14  -3.197442e-14  -3.286260e-14  -3.641532e-14  -3.375078e-14  -3.375078e-14  -3.375078e-14 |
| 1 | 0.999999999999944  1.999999999999943  2.999999999999943  3.999999999999944  4.999999999999943  5.999999999999943  6.999999999999944  7.999999999999944  8.999999999999945  9.999999999999945 | 5.584422e-14  5.684342e-14  5.684342e-14  5.595524e-14  5.684342e-14  5.684342e-14  5.595524e-14  5.595524e-14  5.506706e-14  5.506706e-14 | 1.000000000000115  2.000000000000117  3.000000000000118  4.000000000000118  5.000000000000119  6.000000000000118  7.000000000000124  8.000000000000123  9.000000000000124  10.000000000000124 | -1.150191e-13  -1.172396e-13  -1.181277e-13  -1.181277e-13  -1.190159e-13  -1.181277e-13  -1.243450e-13  -1.225686e-13  -1.243450e-13  -1.243450e-13 |
| 2 | 0.999999999999293  1.999999999999291  2.999999999999291  3.999999999999292  4.999999999999290  5.999999999999291  6.999999999999291  7.999999999999291  8.999999999999289  9.999999999999289 | 7.071010e-13  7.087664e-13  7.087664e-13  7.083223e-13  7.096546e-13  7.087664e-13  7.087664e-13  7.087664e-13  7.105427e-13  7.105427e-13 | 0.999999999996339  1.999999999996331  2.999999999996335  3.999999999996335  4.999999999996334  5.999999999996333  6.999999999996338  7.999999999996334  8.999999999996337  9.999999999996337 | 3.660516e-12  3.669287e-12  3.665068e-12  3.664624e-12  3.665512e-12  3.667289e-12  3.661960e-12  3.665512e-12  3.662848e-12  3.662848e-12 |
| 3 | 1.000000000014136  2.000000000014140  3.000000000014140  4.000000000014139  5.000000000014141  6.000000000014140  7.000000000014140  8.000000000014140  9.000000000014142  10.000000000014142 | -1.413625e-11  -1.413980e-11  -1.413980e-11  -1.413891e-11  -1.414069e-11  -1.413980e-11  -1.413980e-11  -1.413980e-11  -1.414158e-11  -1.414158e-11 | 1.000000000020628  2.000000000020634  3.000000000020631  4.000000000020631  5.000000000020631  6.000000000020632  7.000000000020636  8.000000000020632  9.000000000020629  10.000000000020629 | -2.062839e-11  -2.063416e-11  -2.063150e-11  -2.063150e-11  -2.063150e-11  -2.063238e-11  -2.063594e-11  -2.063238e-11  -2.062883e-11  -2.062883e-11 |
| 4 | 0.999999999929324  1.999999999929323  2.999999999929323  3.999999999929323  4.999999999929323  5.999999999929322  6.999999999929324  7.999999999929324  8.999999999929322  9.999999999929322 | 7.067558e-11  7.067680e-11  7.067680e-11  7.067680e-11  7.067680e-11  7.067769e-11  7.067591e-11  7.067591e-11  7.067769e-11  7.067769e-11 | 0.999999999943739  1.999999999943736  2.999999999943740  3.999999999943740  4.999999999943741  5.999999999943739  6.999999999943750  7.999999999943744  8.999999999943746  9.999999999943746 | 5.626144e-11  5.626410e-11  5.625989e-11  5.625989e-11  5.625900e-11  5.626077e-11  5.625012e-11  5.625633e-11  5.625367e-11  5.625367e-11 |
| 5 | 0.999999999116578  1.999999999116577  2.999999999116577  3.999999999116576  4.999999999116577  5.999999999116576  6.999999999116576  7.999999999116576  8.999999999116577  9.999999999116577 | 8.834219e-10  8.834231e-10  8.834231e-10  8.834236e-10  8.834231e-10  8.834240e-10  8.834240e-10  8.834240e-10  8.834231e-10  8.834231e-10 | 1.000000000750034  2.000000000750037  3.000000000750032  4.000000000750033  5.000000000750031  6.000000000750032  7.000000000750023  8.000000000750029  9.000000000750031  10.000000000750031 | -7.500338e-10  -7.500374e-10  -7.500320e-10  -7.500329e-10  -7.500311e-10  -7.500320e-10  -7.500232e-10  -7.500294e-10  -7.500311e-10  -7.500311e-10 |
| 6 | 1.000000010601026  2.000000010601028  3.000000010601028  4.000000010601028  5.000000010601028  6.000000010601028  7.000000010601031  8.000000010601031  9.000000010601029  10.000000010601029 | -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08  -1.060103e-08 | 0.999999960623432  1.999999960623424  2.999999960623426  3.999999960623426  4.999999960623424  5.999999960623422  6.999999960623432  7.999999960623426  8.999999960623427  9.999999960623427 | 3.937657e-08  3.937658e-08  3.937657e-08  3.937657e-08  3.937658e-08  3.937658e-08  3.937657e-08  3.937657e-08  3.937657e-08  3.937657e-08 |
| 7 | 0.999999840984630  1.999999840984627  2.999999840984627  3.999999840984627  4.999999840984627  5.999999840984627  6.999999840984625  7.999999840984625  8.999999840984627  9.999999840984627 | 1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07  1.590154e-07 | 1.000000318762715  2.000000318762722  3.000000318762720  4.000000318762719  5.000000318762720  6.000000318762721  7.000000318762718  8.000000318762719  9.000000318762721  10.000000318762721 | -3.187627e-07  -3.187627e-07  -3.187627e-07  -3.187627e-07  -3.187627e-07  -3.187627e-07  -3.187627e-07  -3.187627e-07  -3.187627e-07  -3.187627e-07 |
| 8 | 1.000000353367440  2.000000353367441  3.000000353367441  4.000000353367442  5.000000353367442  6.000000353367440  7.000000353367442  8.000000353367442  9.000000353367442  10.000000353367442 | -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07  -3.533674e-07 | 1.000000468768622  2.000000468768624  3.000000468768619  4.000000468768620  5.000000468768620  6.000000468768621  7.000000468768607  8.000000468768617  9.000000468768619  10.000000468768619 | -4.687686e-07  -4.687686e-07  -4.687686e-07  -4.687686e-07  -4.687686e-07  -4.687686e-07  -4.687686e-07  -4.687686e-07  -4.687686e-07  -4.687686e-07 |
| 9 | 0.999999999999998  1.999999999999998  2.999999999999998  3.999999999999998  4.999999999999998  5.999999999999998  6.999999999999997  7.999999999999997  9.000000000000000  10.000000000000000 | 2.109424e-15  2.220446e-15  2.220446e-15  1.776357e-15  1.776357e-15  1.776357e-15  2.664535e-15  2.664535e-15  0.000000e+00  0.000000e+00 | 0.999991562154575  1.999991562154571  2.999991562154575  3.999991562154575  4.999991562154574  5.999991562154575  6.999991562154580  7.999991562154578  8.999991562154575  9.999991562154575 | 8.437845e-06  8.437845e-06  8.437845e-06  8.437845e-06  8.437845e-06  8.437845e-06  8.437845e-06  8.437845e-06  8.437845e-06  8.437845e-06 |
| 10 | 1.000000000000002  2.000000000000002  3.000000000000002  4.000000000000002  5.000000000000002  6.000000000000002  7.000000000000002  8.000000000000002  9.000000000000000  10.000000000000000 | -2.220446e-15  -2.220446e-15  -2.220446e-15  -1.776357e-15  -1.776357e-15  -1.776357e-15  -1.776357e-15  -1.776357e-15  0.000000e+00  0.000000e+00 | 0.999746871044863  1.999746871044856  2.999746871044859  3.999746871044859  4.999746871044859  5.999746871044859  6.999746871044846  7.999746871044857  8.999746871044859  9.999746871044859 | 2.531290e-04  2.531290e-04  2.531290e-04  2.531290e-04  2.531290e-04  2.531290e-04  2.531290e-04  2.531290e-04  2.531290e-04  2.531290e-04 |
| 11 | 1.000706838664074  2.000706838664076  3.000706838664076  4.000706838664075  5.000706838664075  6.000706838664074  7.000706838664076  8.000706838664076  9.000706838664074  10.000706838664074 | -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04  -7.068387e-04 | 0.998687417963622  1.998687417963619  2.998687417963622  3.998687417963622  4.998687417963621  5.998687417963620  6.998687417963632  7.998687417963625  8.998687417963623  9.998687417963623 | 1.312582e-03  1.312582e-03  1.312582e-03  1.312582e-03  1.312582e-03  1.312582e-03  1.312582e-03  1.312582e-03  1.312582e-03  1.312582e-03 |
| 12 | 0.989417989417989  1.989417989417987  2.989417989417987  3.989417989417988  4.989417989417987  5.989417989417987  6.989417989417988  7.989417989417988  8.989417989417989  9.989417989417989 | 1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02  1.058201e-02 | 1.012229539040441  2.012229539040442  3.012229539040447  4.012229539040446  5.012229539040447  6.012229539040445  7.012229539040466  8.012229539040453  9.012229539040451  10.012229539040451 | -1.222954e-02  -1.222954e-02  -1.222954e-02  -1.222954e-02  -1.222954e-02  -1.222954e-02  -1.222954e-02  -1.222954e-02  -1.222954e-02  -1.222954e-02 |
| 13 | 0.894736842105266  1.894736842105265  2.894736842105265  3.894736842105264  4.894736842105263  5.894736842105264  6.894736842105264  7.894736842105264  8.894736842105264  9.894736842105264 | 1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01  1.052632e-01 | 1.559999999999998  2.560000000000013  3.560000000000002  4.560000000000003  5.560000000000002  6.560000000000005  7.560000000000000  8.560000000000002  9.560000000000000  10.560000000000000 | -5.600000e-01  -5.600000e-01  -5.600000e-01  -5.600000e-01  -5.600000e-01  -5.600000e-01  -5.600000e-01  -5.600000e-01  -5.600000e-01  -5.600000e-01 |
| 14 | Матрица не может быть посчитана |  | 0.000000000000002  0.999999999999999  2.000000000000002  3.000000000000001  4.000000000000001  5.000000000000001  6.000000000000001  7.000000000000001  8.000000000000000  9.000000000000000 | 1.000000e+00  1.000000e+00  1.000000e+00  1.000000e+00  1.000000e+00  1.000000e+00  1.000000e+00  1.000000e+00  1.000000e+00  1.000000e+00 |

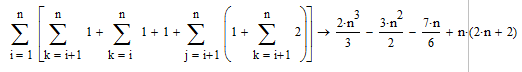
5) Исследования на матрицах Гильберта различной размерности

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| k | Xk (LDU) | X\* -Xk (LDU) | Xk (Gauss+) | X\* -Xk (Gauss+) |
| 1 | 1.000000000000000 | 0.000000e+00 | 1.000000000000000 | 0.000000e+00 |
| 2 | 1.000000000000001  1.999999999999999 | -6.661338e-16  1.332268e-15 | 1.000000000000001  1.999999999999999 | -6.661338e-16  1.332268e-15 |
| 3 | 1.000000000000004  1.999999999999983  3.000000000000015 | -3.774758e-15  1.731948e-14  -1.509903e-14 | 1.000000000000002  1.999999999999989  3.000000000000010 | -2.220446e-15  1.132427e-14  -1.021405e-14 |
| 4 | 1.000000000000099  1.999999999998847  3.000000000002832  3.999999999998135 | -9.880985e-14  1.153300e-12  -2.832401e-12  1.865175e-12 | 1.000000000000035  1.999999999999588  3.000000000001016  3.999999999999330 | -3.508305e-14  4.123368e-13  -1.015632e-12  6.701306e-13 |
| 5 | 1.000000000000430  1.999999999991804  3.000000000035821  3.999999999945366  5.000000000026929 | -4.301004e-13  8.195666e-12  -3.582112e-11  5.463363e-11  -2.692868e-11 | 0.999999999999940  2.000000000001114  2.999999999995304  4.000000000006954  4.999999999996653 | 6.039613e-14  -1.114220e-12  4.696243e-12  -6.953549e-12  3.346656e-12 |
| 6 | 0.999999999998758  2.000000000033129  2.999999999788191  4.000000000526052  4.999999999441110  6.000000000213274 | 1.242340e-12  -3.312950e-11  2.118092e-10  -5.260521e-10  5.588898e-10  -2.132738e-10 | 0.999999999999471  2.000000000015473  2.999999999895515  4.000000000269791  4.999999999704658  6.000000000115451 | 5.293543e-13  -1.547340e-11  1.044849e-10  -2.697913e-10  2.953424e-10  -1.154508e-10 |
| 7 | 0.999999999993768  2.000000000241329  2.999999997745670  4.000000008524220  4.999999984747841  6.000000012903040  6.999999995841168 | 6.232126e-12  -2.413292e-10  2.254330e-09  -8.524220e-09  1.525216e-08  -1.290304e-08  4.158832e-09 | 0.999999999998079  2.000000000070064  2.999999999376556  4.000000002266393  4.999999996074342  6.000000003231821  6.999999998982206 | 1.921130e-12  -7.006440e-11  6.234440e-10  -2.266393e-09  3.925658e-09  -3.231821e-09  1.017794e-09 |
| 8 | 1.000000000058947  1.999999996593750  3.000000046705909  3.999999738348894  5.000000722874683  5.999998956396468  7.000000754728866  7.999999784231155 | -5.894663e-11  3.406250e-09  -4.670591e-08  2.616511e-07  -7.228747e-07  1.043604e-06  -7.547289e-07  2.157688e-07 | 1.000000000023571  1.999999998764325  3.000000015802544  3.999999916048512  5.000000222379457  5.999999689790255  7.000000218009455  7.999999939169189 | -2.357137e-11  1.235675e-09  -1.580254e-08  8.395149e-08  -2.223795e-07  3.102097e-07  -2.180095e-07  6.083081e-08 |
| 9 | 1.000000002500557  1.999999824554480  3.000003005845477  3.999978341792559  5.000080025222925  5.999835630663991  7.000189697135063  7.999884947800751  9.000028526440532 | -2.500557e-09  1.754455e-07  -3.005845e-06  2.165821e-05  -8.002522e-05  1.643693e-04  -1.896971e-04  1.150522e-04  -2.852644e-05 | 1.000000000783496  1.999999946352538  3.000000901986764  3.999993597316923  5.000023371260183  5.999952478351061  7.000054379373237  7.999967257791723  9.000008067291116 | -7.834959e-10  5.364746e-08  -9.019868e-07  6.402683e-06  -2.337126e-05  4.752165e-05  -5.437937e-05  3.274221e-05  -8.067291e-06 |
| 10 | 1.000000004595354  1.999999591534530  3.000008865194702  3.999918339044051  5.000393256259114  5.998911142628408  7.001796378881245  7.998256472407199  9.000918503643355  9.999797442225070 | -4.595354e-09  4.084655e-07  -8.865195e-06  8.166096e-05  -3.932563e-04  1.088857e-03  -1.796379e-03  1.743528e-03  -9.185036e-04  2.025578e-04 | 1.000000005033655  1.999999562312160  3.000009365161822  3.999914572493884  5.000408523800090  5.998874723167420  7.001849150800947  7.998210749839966  9.000940305467335  9.999793038295417 | -5.033655e-09  4.376878e-07  -9.365162e-06  8.542751e-05  -4.085238e-04  1.125277e-03  -1.849151e-03  1.789250e-03  -9.403055e-04  2.069617e-04 |
| 11 | 1.000000076461369  1.999992092164025  3.000203033912005  3.997750135897830  5.013299933791998  5.953556526896495  7.100515065618588  7.863704482161239  9.112668308327819  9.948098288282310  11.010212097407699 | -7.646137e-08  7.907836e-06  -2.030339e-04  2.249864e-03  -1.329993e-02  4.644347e-02  -1.005151e-01  1.362955e-01  -1.126683e-01  5.190171e-02  -1.021210e-02 | 1.000000011902783  1.999998839729771  3.000028221095568  3.999702384271069  5.001681151474555  5.994370151250984  7.011721801201815  7.984665946992187  9.012259617119335  9.994525690722199  11.001046185883967 | -1.190278e-08  1.160270e-06  -2.822110e-05  2.976157e-04  -1.681151e-03  5.629849e-03  -1.172180e-02  1.533405e-02  -1.225962e-02  5.474309e-03  -1.046186e-03 |
| 12 | 1.000000184989908  1.999978381472006  3.000632808198202  3.991912571819874  5.055972554912605  5.766549074447063  7.620335037536279  6.924790065050665  10.211259818633124  9.144963537630460  11.343578381925482  11.940027554907205 | -1.849899e-07  2.161853e-05  -6.328082e-04  8.087428e-03  -5.597255e-02  2.334509e-01  -6.203350e-01  1.075210e+00  -1.211260e+00  8.550365e-01  -3.435784e-01  5.997245e-02 | 1.000000136457130  1.999982832149406  3.000536735274402  3.992722203565012  5.053138284101557  5.767316473670919  7.646421750318930  6.832866720462746  10.365260840866616  9.002089814361026  11.414168136681392  11.925495985444373 | -1.364571e-07  1.716785e-05  -5.367353e-04  7.277796e-03  -5.313828e-02  2.326835e-01  -6.464218e-01  1.167133e+00  -1.365261e+00  9.979102e-01  -4.141681e-01  7.450401e-02 |
| 13 | Матрица не может быть посчитана | /|\ | 0.999999400444789  2.000095095326305  2.996307258984851  4.061799019348940  4.442978452009580  9.029965600544559  -3.593988819830472  32.607786829466377  -29.375122707411641  49.711795737550318  -15.151673142330830  21.919641545812624  11.350415167945137 | 5.995552e-07  -9.509533e-05  3.692741e-03  -6.179902e-02  5.570215e-01  -3.029966e+00  1.059399e+01  -2.460779e+01  3.837512e+01  -3.971180e+01  2.615167e+01  -9.919642e+00  1.649585e+00 |

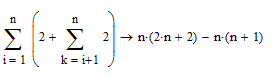
Как мы видим метода Гаусса с выбором элементов и метод LDU имеют сопоставимую погрешность.

Расчет количества действий

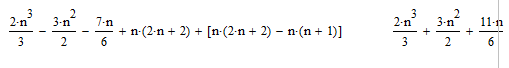
Приведение к верхней треугольной матрице



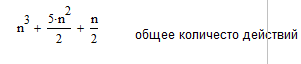
Обратный ход метода Гаусса



Общее число операций



Когда у LDU не включая вычисления матриц LDU

С вычислением мы получаем на плотныйх матрицах 

Подводя итог, можно сказать, что метод Гаусса и метод LDU имеют сопоставимую точность, то на плотных Матрицах метод Гаусса имеет большую скорость. Метод LDU быстрее, на разряженных матрицах, или, когда не нужно вычислять матрицы LDU, а они данный в качестве входных параметров.

1. Текст программы

enum class TypeMatrix

{

Full,

Prof,

Tape

};

enum {

NoErrors = 0,

ErrorInputFile = 1,

ErrorOutputFile = 2,

MatrixNotCount = 3

};

template<class T>

class matrixA

{

public:

vector<vector<T>> A; //Матрица в полном формате

vector<T> al, au, di; //Матрица в профильном формате

vector<size\_t> ia; //Матрица в профильном формате

vector<T> F; //Вектор правой стороны СЛАУ Ax = F

vector<T> X; //Результат СЛАУ

size\_t Error; //Информация об ошибках

matrixA();

~matrixA();

void SaveFile(); //Сохранение решения СЛАУ в текстовый документ

void CountUpTrianMatrix(); //Постройка верхней треугольной матрицы

void GausBack(); //Обратный метод Гаусса

void Prof2Full(); //Перевод из профильного формата в полный

void OpenFiles(TypeMatrix, char \*); //Открытие файлов

void OpenFiles(TypeMatrix, char \*, int k);

private:

size\_t n; //Размерность матрицы

template <class U>

bool OpenFile(const char name[], char \*path, vector<U> &a, size\_t len);

};

template<class T>

class matrixLDU

{

public:

matrixLDU();

~matrixLDU();

void CountLDU(vector<T> &L, vector<T> &D, vector<T> &U, vector<size\_t> &ia, TypeMatrix type, size\_t &Error);//Перевод из профильного формата matrixA в профильный формат LDU

void CountX(vector<T> &L, vector<T> &D, vector<T> &U, vector<T> &F, vector<T> &X, vector<size\_t> & ia); //Поиск решения уравнения LDUx = F

void SaveFile(vector<T> &); //Сохранения результата СЛАУ LDU x = F в файл

void SaveLDU(vector<T> &L, vector<T> &D, vector<T> &U, TypeMatrix Type);

private:

double CompareNumber;

size\_t n; //Размерность матрицы

size\_t m; //Количество недиагональных элементов в матрице

size\_t \*Error; //Информация об ошибках

};

/\* CountUpTrianMatrix - Функция поиска решения СЛАУ методом Гаусса с выбором главного коэффициента.

Матрица будет приводиться к верхнему треугольному виду\*/

template<class T>

void matrixA<T>::CountUpTrianMatrix()

{

if (Error)

return;

for (size\_t i = 0; i < n; i++)

{

//Опредиление главного Элемента в столбце

T Max = A[i][i];

size\_t index = i;

for (size\_t j = i+1; j < n; j++)

{

if (abs(A[j][i]) > abs(Max))

{

Max = A[j][i];

index = j;

}

}

//Проверка единственность

if (!Max)

{

Error = MatrixNotCount;

return;

}

//Свап строки

if (i != index)

{

A[index].swap(A[i]);

T buf = F[i];

F[i] = F[index];

F[index] = buf;

}

//Постройка верхней треугольной матрицы

for (size\_t j = i + 1; j < n; j++)

{

if(!A[j][i])

continue;

T c = A[j][i]/Max;

A[j][i] = 0.;

for (size\_t l = i + 1; l < n; l++)

A[j][l] -= A[i][l] \* c;

F[j] -= F[i] \* c;

}

}

}

template<class T>

void matrixA<T>::GausBack()

{

if (Error)

return;

for (int i = n - 1; i >= 0; i--)

{

double sum = 0;

for (size\_t j = i + 1; j < n; j++)

sum += A[i][j] \* X[j];

X[i] = (F[i] - sum)/A[i][i];

}

}

template<class T>

void matrixA<T>::Prof2Full()

{

if (Error) return;

if (!A.size())

if (!di.size()){

Error = MatrixNotCount;

return;}

else{

A.resize(n);

for (size\_t i = 0; i < n; A[i++].resize(n));

}

for (size\_t i = 0; i < n; i++) A[i][i] = di[i];

for (size\_t i = 0; i < n; i++)

{

for (size\_t m = ia[i], j = i - ia[i + 1] + m; m < ia[i + 1]; m++, j++)

{

A[i][j] = al[m];

A[j][i] = au[m];

}

}

}

//Постройка матриц LDU из матрицы A( Ax = F -> LDUx = F)

template<class T>

void matrixLDU<T>::CountLDU(vector<T> &L, vector<T> &D, vector<T> &U, vector<size\_t> &ia, TypeMatrix Type, size\_t &error)

{

if (error) return;

switch (Type)

{

case TypeMatrix::Prof:

{

Error = &error;

n = D.size();

m = L.size();

for (size\_t i = 0; i < n; i++)

{

double sum = 0;

for (size\_t j = ia[i], j1 = i - ia[i + 1] + j; j < ia[i + 1]; j++)

{

double sum1 = 0, sum2 = 0;

for (size\_t k = min(j - ia[i], ia[i - ia[i + 1] + j + 1] - ia[i - ia[i + 1] + j]),

i1 = j - k,

i2 = i - ia[i + 1] + j - k,

i3 = ia[i - ia[i + 1] + j + 1] - k;

k > 0; k--)

{

sum1 += L[i1] \* D[i2] \* U[i3];

sum2 += L[i3++] \* D[i2++] \* U[i1++];

}

L[j] = (L[j] - sum1) / D[j1];

U[j] = (U[j] - sum2) / D[j1];

sum += L[j] \* D[j1++] \* U[j];

}

//Если сделать проверка на inf после деления на 0, то можем получить не то что нам нужно

//Т.к. при разности (D[i] - sum) может получиться не 0, а число близкое к нему.

//и в таком случае при делении числа на эту разность может получиться не inf.

if (abs((D[i] - sum)) < abs(D[i]/CompareNumber))

{ \*Error = MatrixNotCount; return; }

D[i] -= sum;

}

break;

}

default:

break;

}

}

//Поиск X зная LDU

template<class T>

void matrixLDU<T>::CountX(vector<T> &L, vector<T> &D, vector<T> &U, vector<T> &F, vector<T> &X, vector<size\_t> &ia)

{

if (!Error || \*Error)

return;

//Поиск Y

vector<T> &Y = X;

for (size\_t i = 0; i < n; i++)

{

double sum = 0;

for (size\_t m = ia[i],

j = i - ia[i + 1] + m;

m < ia[i + 1]; m++)

sum += Y[j++] \* L[m];

Y[i] = F[i] - sum;

}

//Поиск Z

vector<T> &Z = X;

for (size\_t i = 0; i < n; i++)

Z[i] /= D[i];

//Поиск X

for (int i = n - 1; i >= 0; i--)

for (int j = ia[i + 1] - ia[i] - 1,

j1 = i - j - 1,

j2 = ia[i + 1] - j - 1;

j >= 0 ; j--)

X[j1++] -= X[i] \* U[j2++];

}