2099 年普通高等学校招生全国统一考试

数学

本试卷共 4 页，22 题．全卷满分 150 分，考试用时 120 分钟．

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1=1$，$a_2=101$．则 $a_1=$

A．101　　B．100　　C．2　　D．1

2. 设函数 $f(x,y)=x^2-x^2$，则 $\iint_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

A．π　　B．1　　C．0　　D．$+\infty$

3. 假设有一个装有若干个彩球的袋子，袋子里有 1 个红球，1 个蓝球，1 个绿球，1 个紫球和 96 个黑球．若随机摸出一个球，则这个球是白球的概率为

A．0　　B．1%　　C．96%　　D．1

4. 假设人与人之间只有相识与互不相识两种状态．定义使得 n 个人中必定有 p 个人相识或 q 个人互不相识的最小正整数 n 为 $R(p,q)$，则 $R(2,2)=$

A．1　　B．2　　C．6　　D．18

5. 下列各个说法中，正确的一项是

A．此题有且仅有 1 个答案　　B．此题有且仅有 2 个答案

C．此题没有答案　　D．以上说法均不正确

6. 定义阶乘运算为 $n!=n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1$，据此计算 $30!=$

A．0　　B．1

C．30　　D．265252859812191058636308480000000

7. 设椭圆 E 的方程为 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，则下列关于椭圆 E 的说法中，错误的一项是

A．椭圆不属于圆锥曲线

B．椭圆 E 的中心坐标为 $\left(\dfrac{BE-2CD}{4AC-B^2},\dfrac{BD-2AE}{4AC-B^2}\right)$

C．椭圆 E 的长轴倾角为 $\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{B}{A-C}$

D．设椭圆 E 的中心坐标为 (X_c,Y_c)，则其长半轴长为 $\sqrt{\dfrac{2\left(A{X_c}^2+C{Y_c}^2+BX_cY_c-1\right)}{A+C+\sqrt{(A-C)^2+B^2}}}$，短半轴长为 $\sqrt{\dfrac{2\left(AX_c^2+CY_c^2+BX_cY_c-1\right)}{A+C-\sqrt{(A-C)^2+B^2}}}$

8. 假设有 2 堆石头，分别含有 1 个和 2 个石头. 甲、乙两人轮流取走任意一堆的任意个石头，但不能不取，取走最后一个石头的人获胜. 假设两人充分理性，即每个人在某一确定状态作出的决策只与当前的状态有关，而与此人无关，则此游戏

A. 先手必败　　B. 先手必胜

C. 胜负情况确定，但不可计算　　D. 胜负情况不确定

9. 令 $x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$，注意到方程 $\frac{1}{1+x} = x$ 成立，从而求得 $x =$

A. $\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

10. 下列四种图形中，不属于二次曲面的一项是

A. 单叶双曲面　　B. 圆柱面　　C. 抛物线　　D. 椭球面

11. 任意给定一串字符，可以通过寻找重复模式将其压缩为较短的字符串，并通过一定规则解压缩得到原字符串. 例如对于字符串 ABCCBCCBCCD，注意到 BCC 在其中反复出现，因此可以将其压缩为 A $\langle$3BCC$\rangle$ D. 注意到 BCC 内部也有重复模式，因此可以进一步压缩为 A $\langle$3B $\langle$2C$\rangle\rangle$ D. 仿照上述规则，解压缩 $\langle$2A $\langle$3C$\rangle$ A$\rangle$ CA $\langle$2 $\langle$2A$\rangle$ C$\rangle$ 的结果为

A. ACCCAACCACCAAACAAC　　B. ACCCAACCCACAAAACAC

C. ACCCAACCCACAAACAAC　　D. ACAACCAACACAAACAAC

12. 记 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的对边分别为 a, b, c，且有 $a=3$, $b=4$, $c=5$. 则下列说法中，错误的一项是

A. $\triangle ABC$ 的面积为 6

B. $\tan C = 1$

C. 设 M 为 AB 上一点，且 CM 是 $\angle C$ 的平分线，则 $\frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB}$

D. 以 $\triangle ABC$ 的三条边为边，向外构造三个等边三角形，则这三个等边三角形的外接圆中心恰为另一个等边三角形的顶点

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

13. 0 个男生和 1 个女生排成一圈，则一共有 ________ 种不同的排法.

14. 某人将 100 元存入银行，定期 70 年，年利率 -200%，一年支付 2 次利息. 假设按复利计算，则 70 年期满后，此人可以从银行取出 ________ 元.

15. 设矩阵 $Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $\det(Z) =$ ________ .

16. 微分方程 $y + 2y' = y' + y$ 的通解是 ________ .

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或者演算步骤

17.（10 分）某加工厂用一台包装机包装其产品，额定重量每袋 500 克．这台包装机存在随机误差，正常情况下它包装出来的产品重量服从正态分布 $N(500, 15^2)$．某日开工后，随机抽取它包装的 1 袋产品，称得其重量为 0.02 克，问：这天包装机工作是否正常？

18.（12 分）已知两个 1×1 矩阵 $A=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3\end{bmatrix}$.

（1）求 $A+B$;

（2）证明：$AB=BA$.

19.（12 分）设集合 $A=\{e,a,b,c\}$，在 A 中定义乘法 $\circ$ 如下：

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

例如 $e\circ a=a$，$a\circ b=c$.

（1）求 $a\circ(e\circ(b\circ c))$；

（2）证明：对于任意 $x,y\in A$，均有 $x\circ y\in A$.

20.（12 分）Curry 悖论是一种利用自指条件命题证明任意结论的悖论，例如下列过程是对命题 $0=1$ 的证明（下列公式中 $\alpha\to\beta$ 的含义是“如果 α 成立，那么 β 成立”）：

- 定义命题 p 为 $p\to(0=1)$，其含义是“如果 p 自身成立，那么 $0=1$”．值得注意的是，p 只是一个命题，并不知道其正确性；
- 定义命题 p_1 为 $p\to p$，其含义是“如果 p 为真，那么 p 为真”，显然 p_1 是恒成立的．将命题 p_1 的第二个 p 展开为 $p\to(0=1)$，得到命题 $p2$ 为 $p\to(p\to(0=1))$．由于这是一个等价替换，因此命题 p_2 也自然是恒成立的；
- 事实上，命题 p_2 等价于 $(p\to p)\to(p\to(0=1))$，其含义是“如果 $p\to p$ 成立，那么 $p\to(0=1)$ 成立”．因此，由 $p_1: p\to p$ 以及 $p_2:(p\to p)\to(p\to(0=1))$ 可以推出 $p_3: p\to(0=1)$．由于 p_1 和 p_2 都是恒成立的，所以 p_3 也是恒成立的；
- 注意到 p_3 等价于 p，所以可以断言 p 为真，即 $p\to(0=1)$ 恒成立．由于 $p\to(0=1)$ 的含义是“如果 p 成立，那么 $0=1$”，并且之前证明了 p 恒成立，所以 $0=1$ 自然成立．

请仿照上述流程，证明命题 $0\neq 1$．

21.（12 分）设 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个集合.

（1）若 $n=3$，且 $A_1=\{0,1\}$，$A_2=\{1,2\}$，$A_3=\{0,2\}$．求 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$；

（2）设 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，且对于任意 $A_i,A_j\in\mathscr{A}$ 都有 $A_i\cup A_j\in\mathscr{A}$．证明：存在一个元素 $a\in A$，这个元素包含在 $\mathscr{A}$ 的至少 $\dfrac{n}{2}$ 个集合中.

22.（12 分）若 $n \times n$ 的矩阵 H，其元素只取 1 或 -1，且 $HH^{\mathrm{T}} = nI_n$，则称 H 是一个 n 阶 Hadamard 矩阵.

（1）证明：$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 是一个 2 阶 Hadamard 矩阵；

（2）证明：对于任意正整数 n，存在 $4n$ 阶的 Hadamard 矩阵.