

我们令 $\dot{x} = z, \dot{y} = w$, 则有一阶微分方程

$$\begin{cases} \dot{z} = -\frac{k}{m}\sqrt{z^2 + w^2} \cdot z \\ \dot{w} = -\frac{k}{m}\sqrt{z^2 + w^2} \cdot w - g \end{cases}$$

给定 $z_0 = v \cos \theta, w_0 = v \sin \theta$ (v 和 θ 是已知参数), 取步长 $h = 0.1$, 下面用四阶龙格-库塔法对该微分方程进行数值计算。由公式, 有

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

$$\text{式中, } k_1 = -\frac{k}{m}\sqrt{z_n^2 + w_n^2} \cdot z_n,$$

$$k_2 = -\frac{k}{m}\sqrt{(z_n + \frac{hk_1}{2})^2 + (w_n + \frac{hk_1}{2})^2} \cdot (z_n + \frac{hk_1}{2}),$$

$$k_3 = -\frac{k}{m}\sqrt{(z_n + \frac{hk_2}{2})^2 + (w_n + \frac{hk_2}{2})^2} \cdot (z_n + \frac{hk_2}{2}),$$

$$k_4 = -\frac{k}{m}\sqrt{(z_n + hk_3)^2 + (w_n + hk_3)^2} \cdot (z_n + hk_3).$$

类似地, 可以写出 w 的递推公式:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

$$\text{式中, } k_1 = -\frac{k}{m}\sqrt{z_n^2 + w_n^2} \cdot w_n - g,$$

$$k_2 = -\frac{k}{m}\sqrt{(z_n + \frac{hk_1}{2})^2 + (w_n + \frac{hk_1}{2})^2} \cdot (w_n + \frac{hk_1}{2}) - g,$$

$$k_3 = -\frac{k}{m}\sqrt{(z_n + \frac{hk_2}{2})^2 + (w_n + \frac{hk_2}{2})^2} \cdot (w_n + \frac{hk_2}{2}) - g,$$

$$k_4 = -\frac{k}{m}\sqrt{(z_n + hk_3)^2 + (w_n + hk_3)^2} \cdot (w_n + hk_3) - g.$$

算出 z_{n+1} 与 w_{n+1} 后, 进一步地有如下的“微分方程”:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + z_{n+1}h + \frac{1}{2}\dot{z}_{n+1}h^2 \\ y_{n+1} = y_n + w_{n+1}h + \frac{1}{2}\dot{w}_{n+1}h^2 \end{cases}$$

事实上, 上式中的 \dot{z}_{n+1} 及 \dot{w}_{n+1} 正是四阶龙格库塔法中的 k_1 , 利用该中间变量可以简化计算。之后即可进行迭代, 直到 $y = 0$, 即弹丸落地为止。