《理论力学 A》习题

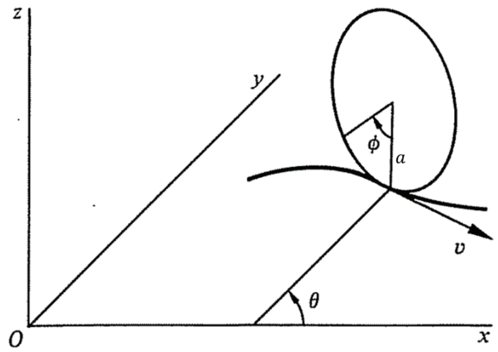
第一章

1. 火箭靠从尾部排出废气的反作用推进，由于这些气体是火箭所带燃料的反应产物, 所以火箭质量不是常数, 它将随着燃料的消耗而减少。证明, 如果略去大气阻力, 在均匀引力场中垂直向上发射的火箭的运动方程为

$$m\frac{dv}{dt} = -v'\frac{dm}{dt} - mg, \tag{1}$$

其中，m 是火箭质量，v' 是逸出气体相对于火箭的速度。假定质量随时间的损失率是一个常数, 求解火箭的运动方程，并将 v 表示为 m 的函数。对于一个从静止开始发射的火箭, 如果 v' 等于 $2.1km/s$, 每秒的损失质量等于初始质量的 1/60, 为了达到第二宇宙速度, 燃料重量与空火箭重量之比应约为多少?

2. 如图所示，一个恒与地面垂直的半径为 a 的圆盘在地面上滚动，确定圆盘空间位置要用到 4 个坐标，即盘心位置的坐标 x 和 y、圆盘轴线与 x 轴夹角 θ、圆盘绕自身轴线转过的角度 φ。当圆盘作“纯滚动”或“沿直线纯滚动”时，体系的约束方程分别是什么？是否为完整约束？为什么?



3. 质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点，由一根穿过光滑水平桌面上小孔的轻绳相连接, m_1 静止在桌面上，m_2 悬挂着。假设 m_2 仅在垂直方向上运动，写出系统的拉格朗日量和拉格朗日方程，并求出方程的初次积分。(只需考虑 m_1 和 m_2 都不穿过小孔的运动。)

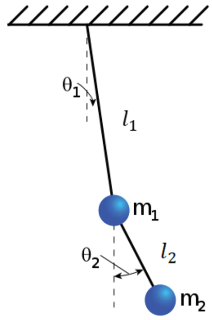
4. 考虑两个质量为 m 的质点，由长为 l 的轻刚性杆联结，它们的质心被约束在一半径为 a 的圆周上运动。引入广义坐标并建立动能的表达式。

5. 电磁场在矢势和标势的规范变换下不变，即

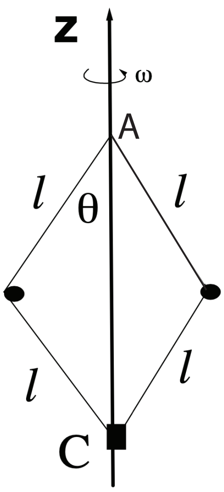
$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla\psi(\boldsymbol{r}, t), \quad \phi \to \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{2}$$

其中，ψ 是任意可微函数。考察规范变换对电磁场内运动质点的拉格朗日量有何影响？质点运动是否会受到影响？

6. 如图所示，考虑一复摆系统，给出体系的拉格朗日量和拉格朗日方程，已知摆的长度为 l_1 和 l_2，相应的质量为 m_1 和 m_2。



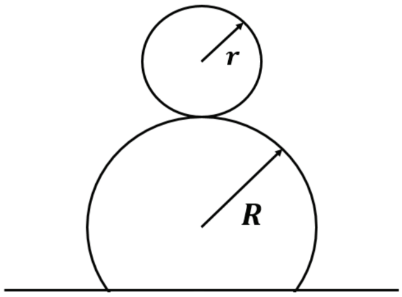
7. 瓦特调速器原理如图所示，考虑 4 根轻杆的长度都是 l，两个小球的质量均为 m，质量为 M 的套管 C 可沿 z 轴滑动，顶端 A 点为固定点，体系以恒定角速度 ω 绕 z 轴旋转。不计摩擦，给出体系的拉格朗日量、拉格朗日方程及其初积分。



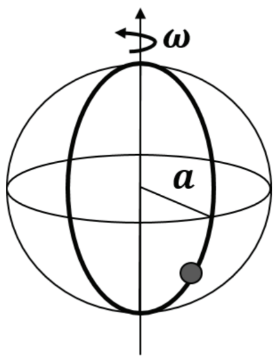
第二章

1. 曲面上两点之间路程为极小值的曲线叫短程线, 用变分法说明球面上的大圆 (即圆心与球心重合的圆) 是其短程线。

2. 如图所示，一质量为 m，半径为 r 的均匀圆环在半径为 R 的固定圆筒上无滑滚动。如果圆环在圆筒顶端从静止开始滚动，仅考虑重力，用拉格朗日乘子法求圆环跌离圆筒的位置。



3. 如图所示，一半径为 a 的无质量圆环绕自身竖直对称轴以常角速度 ω 旋转，圆环上有一质量为 m 的质点可以沿圆环光摩擦的滑动。仅考虑重力, 写出体系的拉格朗日量，求拉格朗日运动方程，给出运动常数。证明, 如果 ω 大于某一临界值 ω_0 时，就能得到一个质点不处于环底的稳定解，但若 ω 小于该临界值时，则质点的唯一稳定点是在环底，给出 ω_0 的值。



4. 如果拉格朗日量包含高于一阶的时间微商 $L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$，而且当 q_i 和 $\dot{q}_i$ 在端点处的变分为零时，哈密顿原理依然适用，利用变分法证明相应的拉格朗日方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

试将这一结果应用于拉格朗日量

$$L = -\frac{m}{2} q\ddot{q} - \frac{k}{2} q^2. \tag{4}$$

5. 写出质点在下列势场中运动时的循环坐标及其相应的守恒量：1）无限大均匀平面场；2）无限大均匀圆柱场；3）均匀圆环面的场；4）无限均匀半平面场；5）两点源的场；6）均匀圆锥体的场；7）无限均匀圆柱螺旋线的场。

6. 回到第一章第 2 题，考虑圆盘作纯滚动，利用拉格朗日乘子法给出系统四个广义坐标的运动方程，并分析圆盘质心坐标的运动规律。

第三章

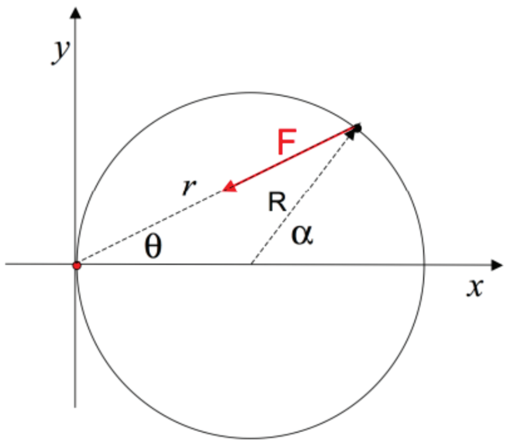
1. 一质点在有心势场

$$V = -k\frac{e^{-ar}}{r}$$

中运动，其中，常数 k 和 a 为正。定性讨论质点可能的各种运动性质，什么时候出现圆形轨道？求关于圆周运动的微幅径向振荡周期。

2. 质量相同的两个质点，用一固定长度为 l, 弹性系数为 k，质量可不计的弹性棒连接起来，用手握住其中的一个质点，使另一个作水平圆周运动，其速度为 v_0，然后将手放开，讨论这两个质点以后的运动情况。

3. a) 证明: 如果一个质点在指向圆周上一点的有心吸引力作用下沿圆形轨道运动，则这个力将按距离的五次方反比规律变化。b) 证明: 质点的总能量为零。c) 求运动周期。d) 求 $\dot{x}$, $\dot{y}$ 和 v, 并表达成绕圆周的角度 θ 的函数。证明：当质点通过力心时，速度趋于无限大。



4. 求粒子在势场

$$V = \frac{\alpha}{r^2}, \quad (\alpha > 0)$$

中的散射截面。

5. 求粒子在势场

$$V = \begin{cases} 0 & (r > a) \\ V_0 & (r \leqslant a) \end{cases}$$

中的散射截面。

第四章

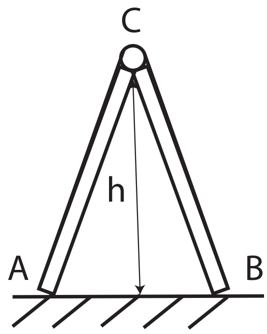
1. 如果 A 是绕任何轴转过 180° 的转动矩阵，证明：如果

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm A),$$

则 $P_\pm^2 = P_\pm$。选取合适的转轴，建立坐标系，求出 $P_\pm$ 的矩阵元, 并就 P_+，P_- 对一任意矢量 $\boldsymbol{F}$ 的运算给出几何解释.

2. 计算半径为 r，质量为 m 的空心球壳绕其直径的转动惯量。

3. 两根等长等重的均匀细杆 AC 及 BC，在 C 点用铰链连接，铅直地放在光滑水平面上。设两杆由图示位置由静止轻轻释放，求 C 点着地时的速度。



4. 有一均匀正圆锥, 高度为 h, 顶角为 2α, 密度为 ρ，沿其边在一均匀水平面上无滑滚动, 在 τ 时间后回到它原来的位置。求该锥体的动能和角动量分量表达式。

5. 一面粗糙另一面光滑的平板，质量为 m'，将光滑的一面放在水平桌上，在板上放一质量为 m 的球。若板沿其长度方向突然有一速度 v，问此球经过多少时间后开始作纯滚动?

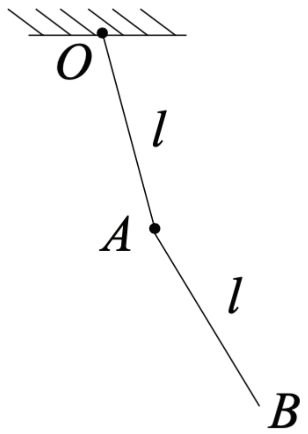
6. 三根长度均为 $2l$ 的无质量的刚性杆，刚性固连于三杆的中心，且彼此正交。六个质量均为 m 的质点分别位于三杆的端点。该体系的一个质点固定在 O 点，体系绕 O 点做无摩擦定点运动。要使该体系绕竖直轴 (即 $\theta = 0$) 稳定自转，其自转角速度应当多大?

7. 根据绕各主轴的转动的微小偏差来检验一般非对称刚体的欧拉方程的解, 从而用解析方法分析一般非对称刚体分别绕长轴、短轴和中间轴转动的稳定性。

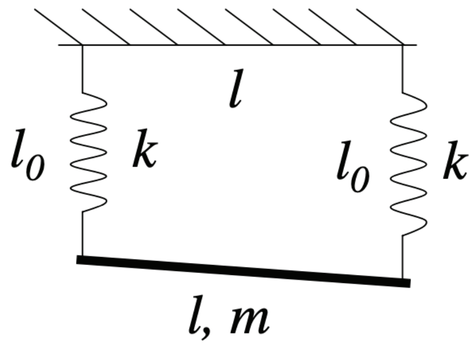
8. 给放置在光滑水平桌面上的物体以一个水平初速度，若考虑地球为非惯性系，证明物体的轨迹是一个圆, 并求出圆半径及桌面所受的力。

第五章

1. 如图，一杆 OA 质量为 m，长度为 l 绕固定点 O 在铅垂平面内摆动，另一杆 AB 质量为 m，长度为 l，绕 A 在同一铅垂面内运动，求双杆体系作小摆动时的频率和运动模式。



2. 如图，在 2 根自然长度为 l_0，弹性系数为 k 的弹簧下端悬一细棒 (质量为 m，长度为 l)，体系限于铅垂平面内因两弹簧的不同伸缩情况而运动。1) 通过求解本征值问题求体系小振动的频率和运动模式；2) 通过分析简正模式，求本征频率和简正坐标。

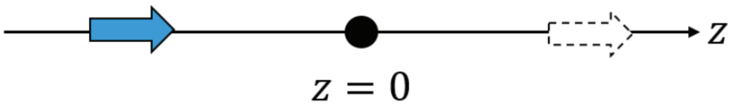


3. 四根弹性系数为 k、自然长度为 $\pi R/2$ 的轻质弹簧，相互连结着质量为 m 的四个质点，并组成半径为 R 的圆环，令质点只能沿该圆轨道无摩擦运动，试求体系的简正频率与简正模式，并讨论每一个简正模式的物理意义。

4. 理论力学/刘川编著的第四章第 4 题 “圆管中滚动的圆柱体”。

第六章

1. 在其静止系中长度为 l_0 的火箭沿一惯性系的 z 轴以恒定速率运动着。在这一惯性系中原点处的观测者根据火箭头、尾在某一时刻的 z 坐标观测了火箭的表观长度。问当火箭从观测者的极左边运动到极右边时，这一表观长度是如何变化的？这些结果与在观测者的静止系中的测量相比如何？
(一次“测量”代表在观测者系中确定火箭的长度. “被测量”长度是我们经常使用洛伦兹变换处理的长度. 一次“观察”是一个观测者“看见”对象并记录它“看起来”多长的更主观的过程. 换言之, 光必须从火箭的两端发出并同时到达观测者. 不像“被测量的”长度, 一旦两个惯性系的相对速度给定它就确定了, “被观察的”长度依赖于观测者和对象的相对位置.)



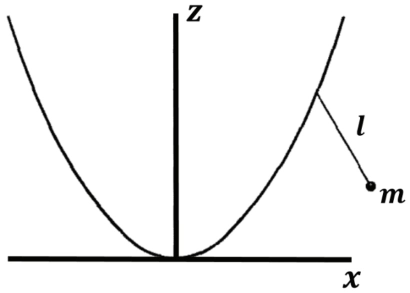
2. 一静止质量为 m, 电荷为 q 的质点, 以初速 $\boldsymbol{v}_0$ 进入到垂直于 $\boldsymbol{v}_0$ 的匀强电场 $\boldsymbol{E}$ 中。求以后质点的轨道，并证明，当极限值 c 趋于无穷大时它将成为抛物线。

3. a) 对于一个任意的三维推促矢量 $\beta = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$，推导恰当洛伦兹变换。b) 证明一个推促 β 的恰当洛伦兹变换的逆变换是由推促 $-\beta$ 产生的。

第七章

1. 回到第一章第 6 题的复摆系统，用哈密顿量和哈密顿运动方程表述这一系统的运动。

2. 如图，一长度为 l, 质量为 m 的单摆的悬挂点被约束在竖直平面内的抛物线 $z = ax^2$ 上运动。推导支配摆及其悬挂点的运动的哈密顿量，给出哈密顿运动方程。



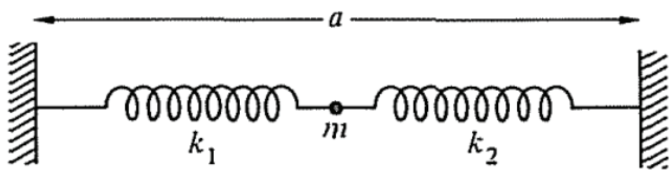
3. 一质量为 m, 电荷为 e 的质点在有心力势 $V(r)$ 以及恒定均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 的作用下在一平面内运动, $\boldsymbol{B}$ 垂直于该平面并由静矢势

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}$$

产生。a) 求用观测者的惯性系坐标表示的哈密顿量. b) 采用相对于该坐标系的转动坐标重复 (a) 中的推导。转轴垂直于平面，转动角速度为

$$\omega = -\frac{eB}{2m}.$$

4. 如图，一质量为 m 的质点能在两弹簧作用下作一维运动，两弹簧连接在相距为 a 的两固定点之间。弹簧未被拉伸时长度为零，弹性系数分别为 k_1 和 k_2。写出质点的拉格朗日量和哈密顿函数，列出正则方程并求解。



5. 证明下列变换为正则变换：
（1） $Q = \ln(\frac{1}{q}\sin p)$, $\quad P = q\cot p$. （2） $q = \sqrt{\frac{2Q}{k}}\cos P$, $\quad p = \sqrt{2Qk}\sin P$.

6. a) 证明变换

$$Q = p + iaq, \quad P = \frac{p - iaq}{2ia}$$

是正则的, 并寻找生成函数。b) 利用此变换求解线性谐振子问题。

7. a) 某个系统的哈密顿量的形式为

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right),$$

求 q 的运动方程。b) 求出把 H 化为谐振子形式的正则变换。证明变换后的变量的解能够满足 (a) 部分所求得的运动方程。