理论力学

赵鹏巍

内容回顾

- 拉格朗日方程，哈密顿原理

  有心运动

  刚体运动

  小振动

  狭义相对论?

- 哈密顿方程，正则变换

- 哈密顿-雅可比 (Hamilton-Jacobi) 方程

  经典场论?

一　质点力学

二　质点组力学

今日目标

- 牛顿力学快速回顾
- 质点运动

  引入符号、标记约定

  动量、守恒律、动能、势能
- 质点组的运动

  质点之间的力、作用力与反作用力，牛顿第三定律
- 引入“约束”

  完整约束(Holonomic)、非完整约束(nonholonomic)
- 引入拉格朗日方程

参考系，坐标系

- 坐标系 = 时空坐标组成的网格
  参考系 = 坐标系 + 观察者（位于坐标原点）
- 坐标系用于描述物体的时空位置
  参考系用于描述物体的位置，速度，加速度。
- 物体的位置依赖于原点的选取，但位移，速度，加速度不依赖于原点的选取。
- 总可以选另一个参考系，且与第一个参考系之间有相对运动。两个参考系原点处的观察者看到物体的位置、速度、加速度依赖于两者之间的相对运动。

质点

- 质点 = 可以忽略 大小与形状 的物体 [物体在运动过程中的行为]

  电子射线管中的电子；抛出的篮球；绕太阳公转的地球

- 质点具有质量 m, 位置 $\boldsymbol{r}$

  速度 $$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}$$ 线动量 $$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{\boldsymbol{r}}$$

- 牛顿第二定律 $$\boldsymbol{F} = \dot{\boldsymbol{p}} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$$

- 牛顿第一定律：

  没有外力的情况下，质点将保持静止或匀速直线运动状态，即**惯性定律**。

  似乎可从第二定律推出来，但其根本意义在于定义“惯性”，是独立于第二定律的，

  可推广至狭义相对论情形。

惯性参考系

- 位置 *r* 的原点 O 是任取的

  选取一个原点 O 意味着选取一个参考系

- 惯性参考系 = 牛顿第二定律成立的参考系 $\boldsymbol{F} = \dot{\boldsymbol{p}} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$

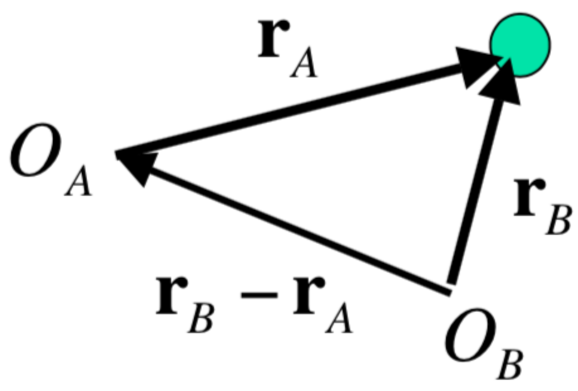
  牛顿第二定律可以表述为

  存在使线动量的时间导数等于受力的参考系

- 任意两个惯性系之间保持恒定的相对速度

  惯性系的等价性由伽利略提出，也称伽利略系

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}_A = m\ddot{\boldsymbol{r}}_B &\rightarrow \ddot{\boldsymbol{r}}_B - \ddot{\boldsymbol{r}}_A = 0 \\ &\rightarrow \dot{\boldsymbol{r}}_B - \dot{\boldsymbol{r}}_A = \mathrm{Const}\end{aligned}$$



相对论情况下，惯性系的定义要回到牛顿第一定律上！

角动量

- 定义角动量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$

注意顺序！

- 定义力矩 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$

r 依赖于原点O

$$\boldsymbol{F} = \dot{\boldsymbol{p}} \rightarrow \boldsymbol{N} = \dot{\boldsymbol{L}}$$

对任意原点O 均成立

线动量、角动量守恒

$\boldsymbol{F} = \dot{\boldsymbol{p}}$ 如果合力为0，则线动量守恒

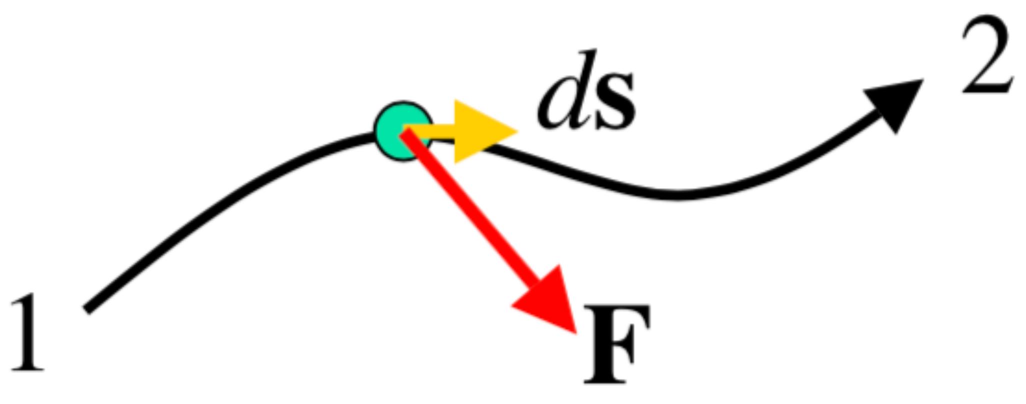
$\boldsymbol{N} = \dot{\boldsymbol{L}}$ 如果合力矩为0，则角动量守恒

外力作功

一质点在外力***F*** 的作用下从位置1运动到位置2

定义做功为

$$W_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$$



定义动能为

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

所以有

$$W_{12} = T_2 - T_1$$

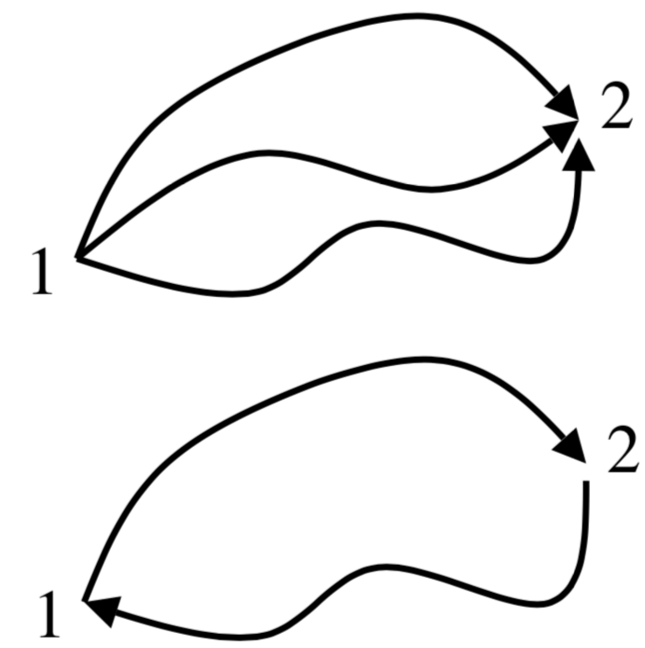
所做之功等于动能的变化!

保守力与能量守恒

对于点1与点2之间的任何可能路径，如果做功W_{12}均相同，则 ***F*** 是保守力

W_{12}仅依赖于路径端点，而与特定路径无关。

等价地，沿闭合路径所做之功为零。



$$\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_1^2 \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} + \int_2^1 \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

F 是保守力 $\longleftrightarrow$ $\boldsymbol{F} = -\nabla V(\boldsymbol{r})$ *V* 即势能

梯度定理及其逆定理

$$W_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = V_1 - V_2 = T_2 - T_1$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

如果作用于质点的力都是保守力，则质点的总能量*T*+*V* 守恒

质点组

描述多个质点？ —> 仅需要加下标！

$$\boldsymbol{F}_i = \dot{\boldsymbol{p}}_i \qquad \boldsymbol{N}_i = \dot{\boldsymbol{L}}_i$$

F 有可能作用于质点之间，因此要区分内力与外力

$$\underbrace{\boldsymbol{F}_i}_{\text{作用于质点 i 的力}} = \sum_j \underbrace{\boldsymbol{F}_{ji}}_{\text{来自质点 j 的力}} + \underbrace{\boldsymbol{F}_i^{(e)}}_{\text{来自外部的力}}$$

现在可以将指标 i 求和，来分析整个体系…

质点求和

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \boldsymbol{F}_{ji} + \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} = \sum_{i<j} \boxed{(\boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_{ij})} + \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji} \quad \longrightarrow \quad \sum_i \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

- 这一项等于零

  弱形式的作用和反作用定律

  两个质点彼此施加于对方的力是**等值、反向**的

强形式的作用和反作用定律

两个质点彼此施加于对方的力是**等值、反向、有心**的

有心：沿两质点连线

质点组的质心运动

考虑运动方程：

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} = \sum_i \dot{\boldsymbol{p}}_i = \frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i$$

定义质心：

$$\boldsymbol{R} \equiv \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{M}$$

$$\Rightarrow \quad M\ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \equiv \boldsymbol{F}^{(e)}$$

质量为*M* 的物体在外力的合力作用下运动：质心运动

总动量守恒

总线动量：$$\boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{p}_i = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = M\dot{\boldsymbol{R}}$$

时间导数：$$\dot{\boldsymbol{P}} = M\ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{F}^{(e)}$$

质心的牛顿运动方程

线动量守恒定理

假设弱形式的作用和反作用定律成立

如果外力的合力为零，则质点组的总线动量守恒

总角动量

总角动量：
$$\boldsymbol{L}=\sum_i \boldsymbol{L}_i=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i=\boldsymbol{F}_i=\sum_j \boldsymbol{F}_{ji}+\boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

时间导数：
$$\dot{\boldsymbol{L}}=\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\boxed{\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ji}}+\sum_i\boxed{\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{(e)}}$$

总外力矩

若满足强形式的作用和反作用定律，此项为零

总角动量守恒

总角动量：

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)} = \sum_i \boldsymbol{N}_i^{(e)} = \boldsymbol{N}^{(e)}$$

角动量守恒定理

假设强形式的作用和反作用定律成立

如果所加的合外力矩为零，则质点组的总角动量守恒

对于一个多质点体系，如果所有的内力满足强形式的作用和反作用定律，则该体系可以被当成一个单质点来处理。

作用与反作用定律

- 大多数力满足强形式的作用与反作用定律

  中心力：引力、静电力*

  动量与角动量守恒

- 非中心力：与速度有关的力 （或与其他自由度有关）

  运动电荷间的洛仑兹力：弱形式、或 “无形式”

  动量或角动量守恒不成立?

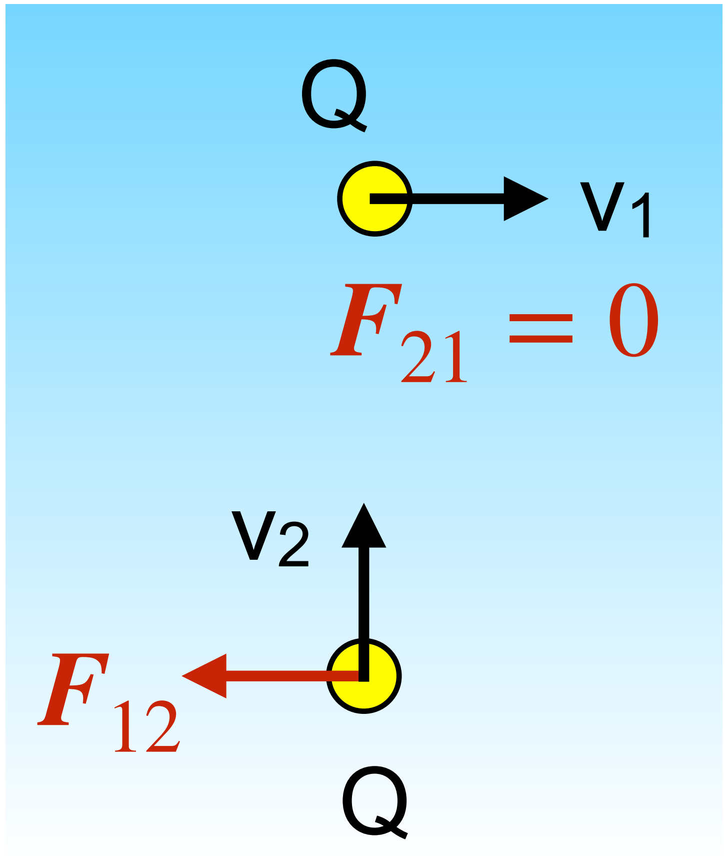
- 电磁场

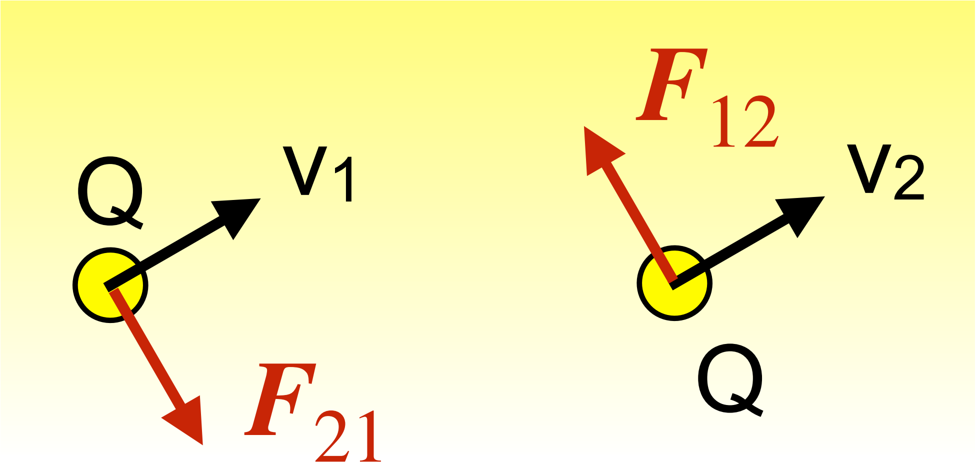
  粒子间通过场来进行相互作用

  场本身也有动量与角动量

  守恒律成立、更基本

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$





守恒律

弱形式的作用和反作用定律 ⟺ 动量守恒

强形式的作用和反作用定律 ⟺ 角动量守恒

- 我们将会看到这样一个事实：

  若承认物理定律的空间不变性，则有以上守恒律

  不存在特殊的原点设定

  不存在特殊的取向设定

- 如果我们将这些对称性作为基本原理，那么所有的力必须符合作用和反作用定律 [牛三定律的“证明”]

总角动量

定义第*i* 个质点距离质心的位置： $\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}$

同理， $\boldsymbol{v}_i' = \dot{\boldsymbol{r}}_i'$ $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{R}}$

总角动量

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{R}) \times m_i(\boldsymbol{v}_i' + \boldsymbol{v})$$

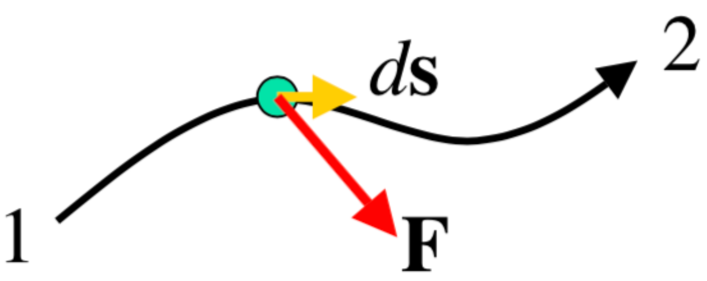
$$\Rightarrow \boldsymbol{L} = \boldsymbol{R} \times M\boldsymbol{v} + \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i'$$

相对于质心的运动的角动量

质心运动的角动量

质点组动能

质点组在外力***F*** 的作用下从位置1运动到位置2



定义作功为

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{s}_i$$

位置1与2理解为位形 (configurations)
[位置信息的集合]

可以证明

$$W_{12} = T_2 - T_1$$

其中，$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_i') \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_i') \rightarrow \frac{1}{2} M v^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

质心运动动能

相对质心的运动动能

势能

作功还可表示为

$$W_{12}=\sum_i\int_1^2 \boldsymbol{F}_i\cdot d\boldsymbol{s}_i=\sum_i\int_1^2 \boldsymbol{F}_i^{(e)}\cdot d\boldsymbol{s}_i+\sum_{i\neq j}\int_1^2 \boldsymbol{F}_{ji}\cdot d\boldsymbol{s}_i$$

假设外力为保守力

$$\boldsymbol{F}_i^{(e)}=-\nabla_i V_i$$

$$\nabla_i\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial y_i},\frac{\partial}{\partial z_i}\right)$$

$$\sum_i\int_1^2 \boldsymbol{F}_i^{(e)}\cdot d\boldsymbol{s}_i=-\sum_i\int_1^2 \nabla_i V_i\cdot d\boldsymbol{s}_i=-\sum_i V_i\Big|_1^2$$

$$V_{ij}=V_{ij}(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|)$$

假设内力为保守力 $\boldsymbol{F}_{ji}=-\nabla_i V_{ij}$ 且令 V 仅是质点间距离的函数 中心力

$$V_{ij}=V_{ij}(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|)$$

故有

$$\boldsymbol{F}_{ji}=-\nabla_i V_{ij}=+\nabla_j V_{ij}=-\boldsymbol{F}_{ij}$$

$$\nabla_i V_{ij}(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|)=(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)f$$

满足强形式的作用和反作用定律

势能

作功还可表示为

$$W_{12}=\sum_i\int_1^2 \boldsymbol{F}_i\cdot d\boldsymbol{s}_i=\sum_i\int_1^2 \boldsymbol{F}_i^{(e)}\cdot d\boldsymbol{s}_i+\sum_{i\neq j}\int_1^2 \boldsymbol{F}_{ji}\cdot d\boldsymbol{s}_i$$

假设外力为保守力 $\boldsymbol{F}_i^{(e)}=-\nabla_i V_i$

$$\nabla_i\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial y_i},\frac{\partial}{\partial z_i}\right)$$

$$\sum_i\int_1^2 \boldsymbol{F}_i^{(e)}\cdot d\boldsymbol{s}_i=-\sum_i\int_1^2 \nabla_i V_i\cdot d\boldsymbol{s}_i=-\sum_i V_i\Big|_1^2$$

$$V_{ij}=V_{ij}(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|)$$

假设内力为保守力 $\boldsymbol{F}_{ji}=-\nabla_i V_{ij}$ 且令V仅是质点间距离的函数 中心力

$$\sum_{i\neq j}\int_1^2 \boldsymbol{F}_{ji}\cdot d\boldsymbol{s}_i=-\sum_{i\neq j}\int_1^2 \nabla_i V_{ij}\cdot d\boldsymbol{s}_i \Rightarrow -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V_{ij}\Big|_1^2$$

能量守恒

- 如果外力与内力均为保守力，可以定义势能

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V_{ij}$$

$$W_{12} = \left(-\sum_i V_i - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V_{ij}\right)\Bigg|_1^2 = V_1 - V_2 = T_2 - T_1$$

因此，总能量*T+V* 守恒。

- 势能的第二项为内势能

  取决于所有质点对之间的距离 r_{ij}

  如果质点间的相对距离 r_{ij} 固定，即刚体，内势能为常数

约束

运动方程 $$m\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i = \sum_j \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$ 质点可以在空间内任意运动

- 这只是理想情况，真实情况下总是对运动有各种各样的约束

  铁轨对火车的约束；台球桌对台球的约束；….

- 约束带来的两类困难：

  1. 运动方程、约束方程联立求解；独立变量或自由度减少
  2. 问题中可能出现不能直接确定、只能根据它们对系统运动效应来确定的力

- 如何将各种各样的约束考虑到运动方程中呢?

  依赖于约束的种类…

完整约束

- 约束可以表示为 $f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \ldots, t) = 0$ 完整约束

  x-y平面运动的质点 z = 0

  刚体 $(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$

- 所有其他的约束称为非完整约束 [可能真的只是为了不处理它们]

  可能表示为不等式 z>0

  可能依赖于导数 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ **有时可以写成积分形式，这时仍是完整约束！**

- 我们只处理完整约束的问题

独立变量

- 引入一个完整约束可以减少一个独立变量

  引入z = 0，剩下的独立变量为x和y

  可以求解约束方程 $f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \ldots, t) = 0$ ➡ $x_1 = g(y_1, z_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \ldots, t) = 0$

  消去x_1

- 有时可能需要转到一组新的独立变量

  一个位于球面上的质点，$x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ (θ, ϕ) 是很好的选择

- 新的独立变量 ➡ 广义坐标

广义坐标

- *N* 个质点具有 *3N* 个自由度

  引入 *k* 个完整约束将使自由度减至 *3N-k* 个

  利用广义坐标q_1 , q_2, … q_{3N-k}

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, t) = 0$$

从 ***r*** 到 *q* 的变换方程

举例：

$$\begin{cases} x = c\sin\theta\cos\phi \\ y = c\sin\theta\sin\phi \\ z = c\cos\theta \end{cases}$$

从（x, y, z）到 (θ, ϕ)

运动方程?

- 我们知道运动方程

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i = \sum_j \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

- 我们知道怎样通过转换广义坐标来引入约束

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, t) = 0$$

- 怎样将运动方程转换为关于广义坐标的运动方程?

$\Rightarrow$ 拉格朗日方程

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$L(q,\dot{q},t) \equiv T - V$$

拉氏量　动能　势能

- 将 $L = T - V$ 用广义坐标，广义坐标的时间导数以及时间表示

  势能 $V=V(q,t)$ 必须存在，即**有势力**

- 一个简单的例子

有势力与保守力略不同！

例子：沿直线运动的质点

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

一个沿 x 轴运动的质点 $x=x(t),\ y=0,\ z=0$

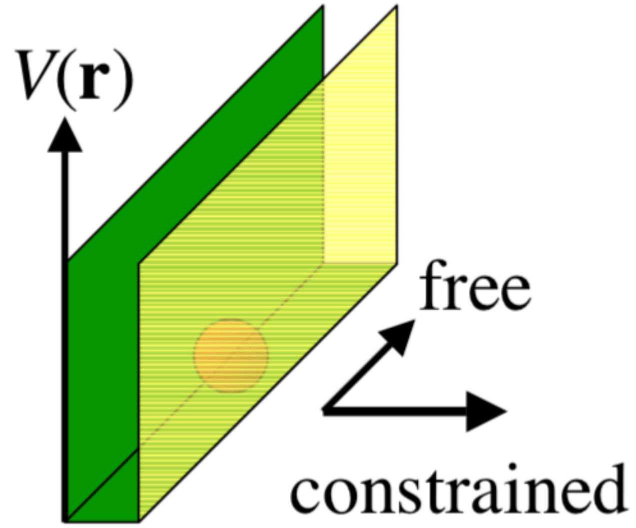
动能 $T=\frac{m}{2}\dot{x}^2$ 势能 $V=V(x)$ $\Rightarrow$ $L=\frac{m}{2}\dot{x}^2-V(x)$

拉格朗日方程 $\Rightarrow$ $$m\ddot{x}+\frac{\partial V}{\partial x}=0$$

与牛顿运动方程是等价的 $$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

约束与力

- 约束是一种宏观的概念，量子力学下没有什么是完全约束的 （不确定关系）
- 完整约束可以理解为一种无限大的力
- 没有受力的情况下，所有坐标系均是同等的，直角坐标系是最简单的
- 受力会破坏对称性，所以有些坐标系会可能会更适合描述物理
- 广义坐标提供了一种自然的处理受力系统的方法



总结

- 快速回顾了牛顿力学
  引入符号、标记约定
  动量、守恒律、动能、势能
- 讨论了质点组系统
  外力与内力、作用与反作用
  动量，守恒律，动能与势能
- 引入约束的概念
  完整与非完整约束
  广义坐标
- 引入拉格朗日方程
  接下来：证明拉格朗日方程与牛顿方程的等价性