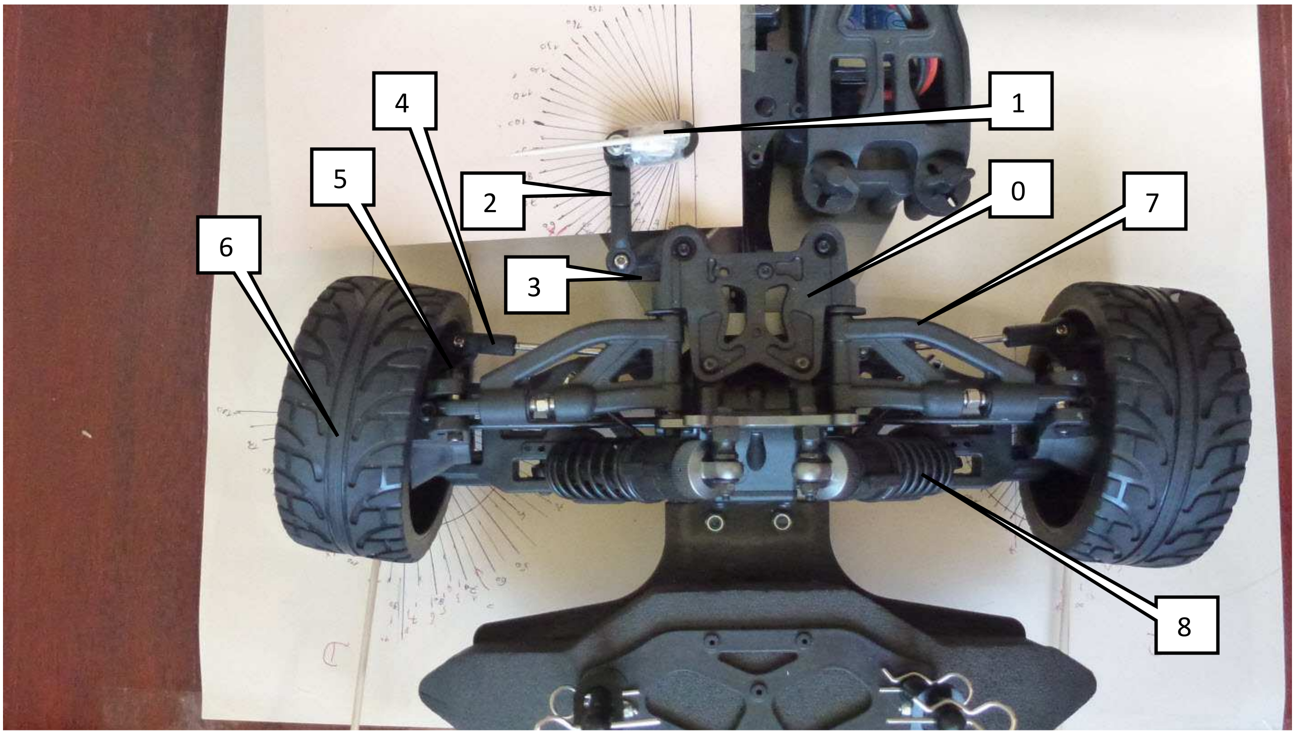
Dichotomie – Lagrange - Newton

Introduction

Le mécanisme de direction de la voiture RC DS3 est décrit par le schéma suivant. Celui-ci représente l'implantation sur le véhicule des différents constituants.



0	Bâti			6	Roue	
1	Servomoteur			7	Triangle de suspension	
2	Biellette commande			8	Amortisseur	
3	renvoi					
4	Biellette direction					
5	Fusée – support roue					

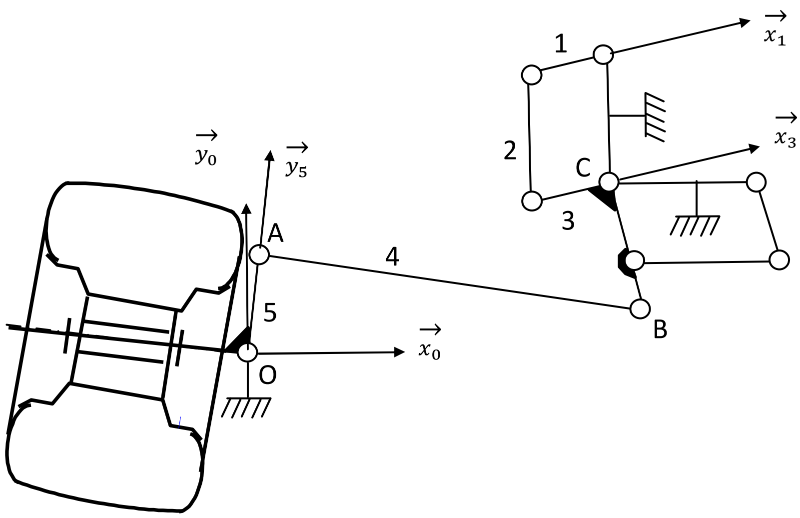
La fonction globale du sous-système est d'orienter les roues du véhicule.

Problématique technique

Un seul servomoteur va commander les deux roues en même temps. L'actionneur n'étant pas directement sur les roues, il est nécessaire de connaître la relation entre l'angle de l'actionneur et l'angle des roues. Afin de pouvoir réaliser un asservissement convenable, cette relation doit être la plus linéaire possible.

L'objectif est de pouvoir tracer la loi entrée sortie du mécanisme et d'en déterminer une modélisation linéaire.

Modélisation cinématique



Solide	Repère associé	Paramètres géométriques
S_0	$R_0(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$	$\overrightarrow{OC} = c\cdot\vec{x_0} + d\cdot\vec{y_0}$ avec $c = 75$ mm ; $d = 40$ mm
S_5	$R_5(O,\vec{x_5},\vec{y_5},\vec{z_0})$	$\overrightarrow{OA} = a\cdot\vec{y_5}$ avec $a = 23$ mm $\theta_5 = (\vec{x_0},\vec{x_5}) = (\vec{y_0},\vec{y_5})$
S_3	$R_3(C,\vec{x_3},\vec{y_3},\vec{z_0})$	$\overrightarrow{CB} = -b\cdot\vec{y_3}$ avec $b = 32$ mm $\theta_3 = (\vec{x_0},\vec{x_3}) = (\vec{y_0},\vec{y_3})$
S_4		$\lVert\overrightarrow{AB}\rVert = L$ avec $L = 75$ mm

$$\overrightarrow{AB} = -a\cdot\vec{y_5} + c\cdot\vec{x_0} + d\cdot\vec{y_0} - b\cdot\vec{y_3}$$

$$\overrightarrow{AB} = -a\cdot(\cos\theta_5\cdot\vec{y_0} - \sin\theta_5\cdot\vec{x_0}) + c\cdot\vec{x_0} + d\cdot\vec{y_0} - b\cdot(\cos\theta_3\cdot\vec{y_0} - \sin\theta_3\cdot\vec{x_0})$$

$$\lVert\overrightarrow{AB}\rVert^2 = (a\cdot\sin\theta_5 + c + b\cdot\sin\theta_3)^2 + (-a\cdot\cos\theta_5 + d - b\cdot\cos\theta_3)^2$$

L'objectif est de tracer $\theta_5 = f(\theta_3)$ mais la relation qui les relie est non linéaire. Une résolution numérique est donc appropriée.

Problème de recherche de zéro

Pour tracer la courbe on va pour un nombre discret de valeur de $\theta_3 \in [-0.8; 0.8]$ chercher la valeur de θ_5 solution de l'équation :

$$0 = (a\cdot\sin\theta_5 + c + b\cdot\sin\theta_3)^2 + (-a\cdot\cos\theta_5 + d - b\cdot\cos\theta_3)^2 - L^2$$

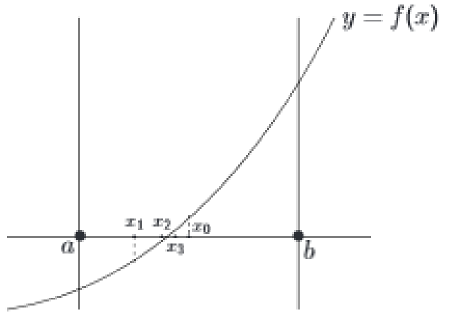
Pour cela vous allez utiliser :

- La fonction ***fsolve*** de la bibliothèque ***scipy.optimize***
- La méthode de dichotomie
- La méthode de Lagrange
- La méthode de Newton

La résolution de l'équation par la fonction fsolve étant donnée (fichier dicho_Lagrange_Newton.py), compléter le programme en proposant 3 fonctions permettant de retrouver ce résultat à l'aide des méthodes de dichotomie, Lagrange et Newton.

Méthode de dichotomie

On considère un intervalle $[a,b]$ et une fonction f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a)f(b)<0$ et que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[a,b]$.
La méthode de dichotomie consiste à construire une suite (x_n) qui converge vers α de la manière suivante :



Dichotomie

Initialisation : on prend pour x_0 le milieu de $[a,b]$. La racine se trouve alors dans l'un des deux intervalles $]a,x_0[$ ou $]x_0,b[$ ou bien elle est égale à x_0.
- si $f(a)f(x_0)<0$, alors $\alpha\in]a,x_0[$. On pose $a_1=a$, $b_1=x_0$.
- si $f(a)f(x_0)=0$, alors $\alpha=x_0$.
- si $f(a)f(x_0)>0$, alors $\alpha\in]x_0,b[$. On pose $a_1=x_0$, $b_1=b$.

On prend alors pour x_1 le milieu de $[a_1,b_1]$. On construit ainsi une suite $x_0=(a+b)/2$, $x_1=(a_1+b_1)/2,\dots,x_n=(a_n+b_n)/2$ telle que $|\alpha-x_n|\le(b-a)/2^{n+1}$.

Etant donné une précision ε, cette méthode permet d'approcher α en un nombre prévisible d'itérations.

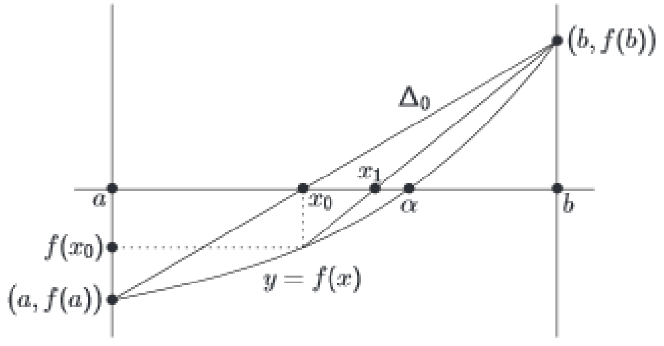
Méthode de Lagrange

Cette méthode est également appelée méthode de Lagrange, méthode des parties proportionnelles ou encore regula falsi...

On considére un intervalle $[a,b]$ et une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a)f(b)<0$ et que f' ne s'annule pas sur $[a,b]$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a,b]$.

Remarque - L'hypothèse "f dérivable" suffirait, mais demanderait une rédaction un peu plus fine des démonstrations.

La méthode de la sécante consiste à construire une suite (x_n) qui converge vers α de la manière suivante : soit Δ_0 la droite passant par $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$, elle coupe l'axe Ox en un point d'abscisse $x_0\in]a,b[$. On approche donc la fonction f par un polynôme P de degré 1 et on résout $P(x)=0$.



Méthode de la sécante

Ensuite, suivant la position de α par rapport à x_0, on considère la droite passant par $(a,f(a))$ et $(x_0,f(x_0))$ si $f(x_0)f(a)<0$ ou celle passant par $(x_0,f(x_0))$ et $(b,f(b))$ si $f(x_0)f(b)<0$. On appelle x_1 l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe Ox. On réitère ensuite le procédé.

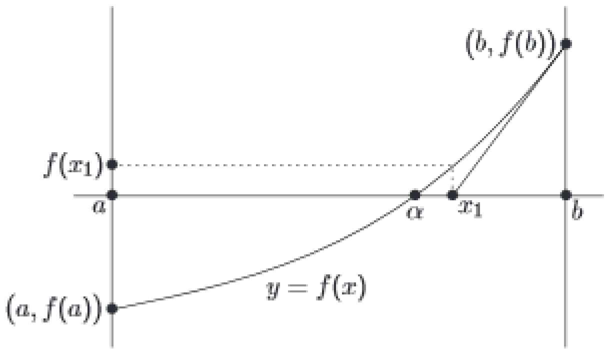
Plaons-nous dans le cas où $f'>0$ est dérivable et f est convexe (i.e. $f''\ge 0$), alors la suite (x_n) est définie par

$$\begin{cases} x_0=a \\ x_{n+1}=\dfrac{bf(x_n)-x_nf(b)}{f(x_n)-f(b)} \end{cases}$$

En effet, si f est convexe, on remplace l'intervalle $[x_n,b]$ par l'intervalle $[x_{n+1},b]$. L'équation d'une droite passant par $(c,f(c))$ et $(b,f(b))$ avec $c\neq b$ est $y-f(b)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}(x-b)$. On cherche son intersection avec l'axe Ox donc on prend $y=0$ et on obtient la formule donnée plus haut.

Méthode de Newton

La méthode de Newton consiste à remplacer la courbe par sa tangente en une de ses deux extrémités. Le point x_1 est l'intersection de cette tangente avec l'axe Ox.
Pour faire le dessin, on va se placer dans le cas étudié pour la méthode de la sécante, i.e. $f' > 0$ et $f'' < 0$. On prend alors $x_0 = b$.



Méthode de Newton

Traons la tangente à la courbe représentative de f passant par $(b, f(b))$. L'équation de cette tangente est $y = f'(b)(x - b) + f(b)$. Son intersection avec l'axe Ox a une ordonnée nulle et son abscisse vaut $x_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$. On trace ensuite la tangente à la courbe au point $(x_1, f(x_1))$. Le réel x_2 est l'abscisse de l'intersection de cette deuxième tangente avec l'axe Ox et on réitère ce procédé.

Remarque - Si on prenait la tangente à la courbe en $(a, f(a))$, son intersection avec l'axe Ox ne serait pas, sur ce dessin, dans l'intervalle $[a, b]$.